CAPITULO VII

LA COMBINATORIA Y LAS SERIES

El método de las relaciones de recurrencia permite resolver muchos problemas combinatorios. Pero en toda una serie de casos estas relaciones son muy difíciles de componer, y aún más difíciles de resolver. A menudo estas dificultades pueden ser soslayadas utilizando las funciones generatrices. Como este concepto está relacionado con las series infinitas de potencias, ante todo será necesario presentar dichas series.

DIVISION DE POLINOMIOS

El lector sabe, claro está, cómo se dividen los polinomios entre sí. Si se dan dos polinomios $f(x)$ y $\varphi(x)$, siempre existen los polinomios $q(x)$ (*cociente*) y $r(x)$ (*resto*) tales que $f(x) = \varphi(x)\,q(x) + r(x)$, siendo la potencia de $r(x)$ menor que la de $\varphi(x)$, o bien $r(x) = 0$. Aquí $f(x)$ se denomina *dividendo*, y $\varphi(x)$, *divisor*. Si deseamos que la división se efectúe sin resto, habrá que admitir como cociente no sólo a los polinomios, sino también a las series infinitas de potencias. Para obtener el cociente hay que disponer los polinomios en potencias crecientes de x y dividir «en ángulo», a partir de los términos de menor grado. Veamos, por ejemplo, la división de 1 por $1 - x$. Tenemos:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \;1-x \\ \cline{2-2}
\underline{\mp 1 \pm x} & \;1+x+x^2+\ldots \\
\quad x & \\
\quad \underline{\mp x \pm x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad \underline{\mp x^2 \pm x^3} & \\
\qquad\quad x^3 \ldots &
\end{array}
$$

Está claro que el proceso de división no terminará nunca (igual que, por ejemplo, cuando se transforma el número $\frac{1}{3}$ en una fracción decimal infinita). Es fácil demostrar, mediante inducción completa, que todos los coeficientes del cociente son iguales a la unidad. Por esto, en calidad de cociente se obtiene la serie infinita

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

En general, si $f(x)$ y $\varphi(x)$ son dos polinomios:

$$f(x)=a_0+\ldots+a_nx^n, \quad \varphi(x)=b_0+\ldots+b_mx^m,$$

siendo el término independiente b_0 del polinomio $\varphi(x)$ diferente de cero, $b_0 \neq 0$, al dividir $f(x)$ por $\varphi(x)$ se obtiene la serie infinita

$$c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots \qquad (1)$$

Por ejemplo, si se toman los polinomios $f(x) = 6x^3-2x^2+x+3$ y $\varphi(x)=x^2-x+1$, obtenemos, mediante el nuevo método de división:

$$
\begin{array}{l|l}
3+x-2x^2+6x^3 & \;1-x+x^2 \\ \cline{2-2}
\underline{\mp 3 \pm 3x \mp 3x^2} & \;3+4x-x^2+x^3+2x^4+\ldots \\
\quad 4x-5x^2+6x^3 & \\
\quad \underline{\pm 4x \pm 4x^2 \mp 4x^3} & \\
\qquad -x^2+2x^3 & \\
\qquad \underline{\pm x^2 \mp x^3 \pm x^4} & \\
\qquad\quad x^3+x^4 & \\
\qquad\quad \underline{\mp x^3 \pm x^4 \mp x^5} & \\
\qquad\qquad 2x^4-x^5 & \\
\qquad \cdots\cdots\cdots &
\end{array}
$$

El mismo cuadro se observará en todos los casos en que sea $b_0 \neq 0$ y $r(x) \neq 0$. Sólo en el caso en que $f(x)$ se divida exactamente por $\varphi(x)$ la serie (1) se cortará y obtendremos un polinomio.

FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SERIES DE POTENCIAS

Al dividir el polinomio $f(x)$ por el $\varphi(x)$, hemos obtenido una serie infinita de potencias. Surge la cuestión de cómo está relacionada dicha serie con la fracción algebraica $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, es decir, qué sentido puede dársele a la escritura

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots \qquad (2)$$

Consideremos, por ejemplo, el desarrollo

$$\frac{1}{1-x} \sim 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad (3)$$

Aquí no escribimos el signo de igualdad, pues desconocemos qué sentido posee la suma del segundo miembro, con un número infinito de sumandos. Para esclarecer esto, probemos sustituir en ambos miembros de la relación (3) distintos valores de x. Hagamos primeramente $x=\frac{1}{10}$. Entonces el primer miembro de la relación adquiere el valor $\frac{10}{9}$, y el segundo se transforma en la serie numérica infinita

$$1+0{,}1+0{,}01+\ldots+0{,}000\ldots01+\ldots$$

Como no sabemos sumar una cantidad infinita de sumandos, probemos tomar primero uno, después dos, luego tres, etc. sumandos. Obtendremos las siguientes sumas: 1; $1{,}1$; $1{,}11$; ... ...; $\underbrace{1{,}111\ldots1}_{n \text{ unidades}}$; ... Está claro que al aumentar n estas sumas se aproximan al valor $\frac{10}{9}=$ $=1{,}11\ldots$, que adquirió el primer miembro de la relación (3) para $x=\frac{1}{10}$.

Lo mismo se obtiene si se sustituye el número $\frac{1}{2}$ en lugar de x en ambos miembros de la igualdad (3). El primer miembro tomará el valor 2, y el segundo se transformará en la serie numérica infinita $1+$ $+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ Tomando sucesivamente uno, dos, tres, cuatro, ... sumandos, obtenemos los números 1; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{3}{4}$; $1\frac{7}{8}$; ... ...; $2-\frac{1}{2^n}$. Está claro que al aumentar n estos números tienden a 2.

Sin embargo, si se toma $x=4$, el primer miembro de la igualdad (3) tomará el valor $-\frac{1}{3}$, obteniéndose en el segundo la serie $1+4+$ $+4^2+\ldots+4^n+\ldots$ Si se suman sucesivamente los términos de ésta, se obtienen las sumas 1; 5; 21; 85; ... Estas sumas aumentan indefinidamente y no tienden al número $-\frac{1}{3}$.

De este modo, nos hemos encontrado con dos casos. Para diferenciarlos, introduzcamos el concepto general de convergencia y divergencia de una serie numérica. Sea dada la serie numérica infinita

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (4)$$

Se dice que ésta *converge hacia el número* b, si la diferencia $b-(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ tiende a cero al aumentar n indefinidamente. En otras palabras, cualquiera que sea el número $\varepsilon>0$ que indiquemos, la desviación entre la suma a_1+ $+\ldots+a_n$ y b será, a partir de cierto número N, menor que ε:

$$|b-(a_1+\ldots+a_n)|<\varepsilon, \text{ si } n \geqslant N.$$

En este caso, el número b se denomina *suma de la serie infinita* $a_1+\ldots+a_n+\ldots$ y se escribe

$$b=a_1+\ldots+a_n+\ldots$$

Si no existe ningún número b hacia el cual converja la serie dada (4), ésta se llama *divergente*.

La investigación efectuada más arriba demuestra que

$$\frac{10}{9}=1+0{,}1+0{,}01+\ldots+0{,}00\ldots01+\ldots,$$

$$2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

mientras que la serie $1+4+16+\ldots+$ $+4^n+\ldots$ diverge.

Un análisis más detallado demuestra que si $|x|<1$, la serie $1+x+\ldots+x^n+\ldots$ converge hacia $\frac{1}{1-x}$, y si $|x|\geqslant 1$, ésta diverge.

Para demostrar esta afirmación, es suficiente observar que

$$1+x+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

y que cuando $n\to\infty$ la expresión x^{n+1} tiende a cero si $|x|<1$, y a infinito si $|x|>1$. Para

$x=\pm 1$ se obtienen las series numéricas divergentes $1+1+\ldots+1+\ldots$ y $1-1+\ldots+1-$ $-1+\ldots$

Así, pues, si $|x|<1$, será

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+\ldots \tag{5}$$

Obsérvese que la igualdad (5) es la fórmula, conocida del curso escolar de matemáticas, de la suma de una progresión geométrica infinita decreciente.

Hemos aclarado, de este modo, el sentido de la escritura

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+\ldots$$

Esta muestra que para los valores de x que se hallen en cierta región, precisamente, para $|x|<$ <1, la serie del segundo miembro converge hacia $\frac{1}{1-x}$. Se dice que la función $\frac{1}{1-x}$ se desarrolla, para $|x|<1$, en la serie de potencias $1+$ $+x+\ldots+x^n+\ldots$

Ahora ya podemos esclarecer también un problema más general. Supongamos que al dividir el polinomio $f(x)$ por el $\varphi(x)$ se obtiene la serie infinita

$$c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{6}$$

Resulta ser que para valores de x suficientemente pequeños, la serie (6) converge hacia $f(x)/\varphi(x)$.

Las dimensiones de la región de convergencia dependen de las raíces del denominador, es decir, de los números para los que éste se anula. Precisamente, si estos números son iguales a $x_1, \ldots$ $\ldots, x_k$ y r es el menor de los números $|x_1|, \ldots$ $\ldots, |x_k|$, la serie converge en la región $|x|<$ $<r$. Por ejemplo, la función $1-x$ se anula para $x=1$, por lo cual el desarrollo de $\frac{1}{1-x}$ es válido solamente para $|x|<1$. Y la función $x^2-7x+10$ se anula para $x_1=2$, $x_2=5$, por lo que el desarrollo de $\frac{x-1}{x^2-7x+10}$ converge para $|x|<2$.

Obsérvese que ninguna de las raíces del denominador es igual a cero, ya que supusimos que el término independiente de éste es diferente de cero, por lo cual $\varphi(0)=b_0\neq 0$.

En otras palabras, siempre existe una región $|x|<r$, en la cual se cumple la igualdad

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{7}$$

No sólo las fracciones algebraicas pueden desarrollarse en series de potencias, sino también muchas otras funciones. En el análisis matemático se demuestra, por ejemplo, que

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \tag{8}$$

y

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots \tag{9}$$

Para nosotros tendrá interés el desarrollo

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \tag{10}$$

De la fórmula (10) se aprecia que

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots \tag{11}$$

Tomando una cantidad suficiente de términos de la serie (11), se obtiene el valor de e con cualquier grado de exactitud. Las primeras cifras decimales de e tienen la forma

2,718281828459045 ...

Las series (8), (9), (10) convergen para todo valor de x.

Señalemos además la siguiente afirmación importante:

Una función $f(x)$ no puede tener dos desarrollos distintos en series de potencias.

En otras palabras, si

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

y

$$f(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots,$$

entonces será

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \ldots,\ a_n=b_n,\ \ldots$$

OPERACIONES CON LAS SERIES DE POTENCIAS

Pasemos ahora a las operaciones con las series de potencias. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ han sido desarrolladas en series de potencias:

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{12}$$

y

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots \tag{13}$$

Entonces, tendremos que

$$f(x)+\varphi(x)=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)+$$
$$+(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots).$$

Resulta ser que los sumandos del segundo miembro de esta igualdad se pueden permutar y agrupar los términos con iguales potencias de x (esta afirmación no es en absoluto tan evidente como parecería a primera vista: en el segundo miembro tenemos sumas infinitas, y en éstas existe gran cantidad de casos en que no se pueden permutar los sumandos). Después de esta reagrupación, se obtiene

$$f(x)+\varphi(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots$$
$$\ldots+(a_n+b_n)x^n+\ldots \tag{14}$$

La serie del segundo miembro de la igualdad (14) se denomina suma de las series de potencias (12) y (13).

Veamos ahora cómo se desarrolla en serie de potencias el producto de las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$. Tenemos que

$$f(x)\varphi(x)=(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)\times$$
$$\times(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots). \tag{15}$$

Resulta que, al igual que en el caso de los polinomios, las series del segundo miembro de la igualdad (15) se pueden multiplicar término a término (omitimos la demostración de esto). Hallemos la serie que se obtiene después de multiplicar término a término. El término independiente de esta serie es igual a a_0b_0. Los términos que contienen x se obtienen dos veces: al multiplicar a_0 por b_1x, y al multiplicar a_1x por b_0. Estos nos dan

$$a_0b_1x+a_1b_0x=(a_0b_1+a_1b_0)x.$$

Análogamente se calculan los términos que contienen x^2:

$$a_0b_2x^2+a_1b_1x^2+a_2b_0x^2=(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2.$$

En general, el coeficiente de x^n tiene la forma

$$a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_kb_{n-k}+\ldots+a_nb_0.$$

De esto modo,

$$f(x)\varphi(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots$$
$$\ldots+(a_0b_n+\ldots+a_nb_0)x^n+\ldots \tag{16}$$

La serie del segundo miembro de la igualdad (16) se denomina *producto de las series* (12) y (13).

En particular, elevando la serie (12) al cuadrado, obtenemos

$$f^2(x)=a_0^2+2a_0a_1x+(a_1^2+2a_0a_2)x^2+$$
$$+2(a_0a_3+a_1a_2)x^3+\ldots \tag{17}$$

Veamos ahora cómo se dividen las series de potencias entre sí. Supongamos que el término independiente de la serie (13) es diferente de cero. Mostremos que en este caso existe una serie de potencias

$$c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots, \tag{18}$$

tal que

$$(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+\ldots)\times$$
$$\times(c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots)=$$
$$=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \tag{19}$$

Para demostrarlo, multipliquemos las series del primer miembro de esta igualdad. Obtenemos así la serie

$$b_0c_0+(b_0c_1+b_1c_0)x+\ldots$$
$$\ldots+(b_0c_n+\ldots+b_nc_0)x^n+\ldots$$

Para que esta serie coincida con la serie (12), es necesario y suficiente que se cumplan las igualdades

$b_0c_0 = a_0,$

$b_0c_1 + b_1c_0 = a_1,$

$\dots\dots\dots\dots$

$b_0c_n + \dots + b_nc_0 = a_n,$

$\dots\dots\dots\dots$

Estas igualdades nos dan un sistema infinito de ecuaciones para determinar los coeficientes $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$. De la primera ecuación del sistema se obtiene que $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$. Sustituyendo el valor obtenido en la segunda ecuación, tendremos

$$b_0c_1 = a_1 - \frac{b_1a_0}{b_0},$$

de donde se halla que $c_1 = \frac{a_1b_0 - b_1a_0}{b_0^2}$. En general, si ya han sido hallados los coeficientes $c_0, \dots, c_{n-1}$, para la determinación de c_n tendremos la ecuación

$$b_0c_n = a_n - b_1c_{n-1} - \dots - b_nc_0.$$

Esta ecuación tiene resolución, puesto que $b_0 \neq 0$.

Hemos demostrado así la existencia de la serie (18), que satisface a la relación (19). La serie (18) se denomina cociente de la división de las series (12) y (13). Se puede demostrar que la primera se obtiene al desarrollar la función $f(x)/\varphi(x)$. De esta manera, las series de potencias se pueden sumar, multiplicar y dividir (lo último bajo la condición de que el término independiente del divisor sea diferente de cero). Estas operaciones corresponden a las operaciones con las funciones que se desarrollan.

Obsérvese que ahora podemos interpretar de otra forma el significado del desarrollo

$$\frac{a_0 + \dots + a_nx^n}{b_0 + \dots + b_mx^m} = c_0 + c_1 + \dots + c_kx^k + \dots \qquad (20)$$

Esta igualdad indica que la serie $c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots$ se obtiene al dividir la serie finita de potencias $a_0 + \dots + a_nx^n$ por la serie finita $b_0 + \dots + b_mx^m$. En otras palabras, esta igualdad significa que

$$(b_0 + \dots + b_mx^m)(c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k + \dots) = \\ = a_0 + \dots + a_nx^n, \qquad (21)$$

dondo el producto del primer miembro de la igualdad se determina por una fórmula del tipo (16).

APLICACION DE LAS SERIES DE POTENCIAS A LA DEMOSTRACION DE IDENTIDADES

Mediante las series de potencias se pueden demostrar muchas identidades. Con este fin, se toma cierta función y se desarrolla de dos maneras en serie de potencias. Como la función puede ser representada sólo de una forma única en serie de potencias, los coeficientes de iguales potencias de x deben coincidir en ambas series. Esto conduce, precisamente, a la identidad que se quería demostrar. Tomemos, por ejemplo, el desarrollo que ya conocemos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Elevando ambos miembros de este desarrollo al cuadrado, obtenemos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots \\ \dots + (n+1)x^n + \dots \qquad (22)$$

Si se sustituye aquí x por $-x$, se obtiene que

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \dots \\ \dots + (-1)^n(n+1)x^n + \dots \qquad (22')$$

Multiplicando los desarrollos (22) y (22'), se deduce que

$$\frac{1}{(1-x)^2}\frac{1}{(1+x)^2} = 1 + [1(-2) + 2\cdot 1]x + \\ + [1\cdot 3 + 2(-2) + 3\cdot 1]x^2 + \dots \\ \dots + [1(-1)^n(n+1) + 2(-1)^{n-2}n + \dots \\ \dots + (-1)^n(n+1)\cdot 1]x^n + \dots \qquad (23)$$

Es evidente que los coeficientes de potencias impares de x se anulan (cada sumando figura dos veces en estos coeficientes, con signos opuestos). El coeficiente de x^{2n} es igual a

$$1(2n+1)-2\cdot 2n+3(2n-1)-\ldots+(2n+1).$$

Pero la función $\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}$ se puede desarrollar en serie de potencias también de otra forma. Tenemos que

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)^2}=\frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

Y el desarrollo de $\frac{1}{(1-x^2)^2}$ se obtiene del (22), si se sustituye en éste x por x^2:

$$\frac{1}{(1-x^2)^2}=1+2x^2+3x^4+\ldots+(n+1)x^{2n}+\ldots \qquad (24)$$

Sabemos que *ninguna función* puede tener dos desarrollos distintos en series de potencias. Por esto, el coeficiente de x^{2n} del desarrollo (23) debe ser igual al coeficiente de dicho término en el desarrollo (24). De aquí se desprende la siguiente identidad:

$$1(2n+1)-2\cdot 2n+3(2n-1)-\ldots+(2n+1)\cdot 1=n+1.$$

FUNCIONES GENERATRICES

Ahora ya podemos pasar al tema principal de este capítulo: el concepto de función generatriz. Sea dada cierta sucesión de números a_0, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Formemos la serie de potencias

$$a_0+a_1x\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Si esta serie converge en alguna región hacia la función $f(x)$, dicha función se denomina *generatriz* de la sucesión numérica $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Por ejemplo, de la fórmula

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+\ldots$$

se desprende que la función $\frac{1}{1-x}$ es generatriz de la sucesión de números $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ Y la fórmula (22) indica que, la función generatriz de la sucesión numérica $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ es la función $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Nos interesarán las funciones generatrices de las sucesiones $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ relacionadas en una u otra forma con los problemas combinatorios. Mediante estas funciones se logra obtener las propiedades más variadas de estas sucesiones. Además, estudiaremos cómo están ligadas las funciones generatrices con la resolución de las relaciones de recurrencia.

BINOMIO DE NEWTON

Ahora obtendremos la función generatriz de la sucesión finita de números $C_0^n, C_1^n, \ldots, C_n^n$.

Del curso de álgebra elemental se conoce que

$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$$

y que

$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3.$$

Estas igualdades son casos particulares de una fórmula más general, que expresa el desarrollo de $(a+x)^n$. Escribamos $(a+x)^n$ en la forma

$$(a+x)^n=\underbrace{(a+x)(a+x)\ldots(a+x)}_{n \text{ veces}}. \qquad (25)$$

Abramos paréntesis en el segundo miembro de esta igualdad, escribiendo todos los factores en el orden en que los encontremos. Por ejemplo, $(a+x)^2$ lo escribiremos en la forma

$$(a+x)^2=(a+x)(a+x)=aa+ax+xa+xx, \qquad (26)$$

y $(a+x)^3$, en la forma

$$(a+x)^3=(a+x)(a+x)(a+x)=$$
$$=aaa+aax+axa+axx+xaa+$$
$$+xax+xxa+xxx. \qquad (27)$$

Se puede apreciar que en la fórmula (26) figuran todos los arreglos con repetición, formados por las letras x y a, tomadas de a dos, y en la fórmula (27), los arreglos con repetición de las mismas letras, pero tomadas de a tres. Lo mismo tendrá lugar en el caso general: *después de abrir paréntesis en la fórmula (25), se obtienen todos los arreglos posibles con repetición de las letras x y a, tomadas de a n.*

Agrupemos ahora términos semejantes. Estos serán los que contengan igual cantidad de letras x (con lo cual también tendrán el mismo número de letras a). Hallemos cuántos términos habrá, en los que figuren k letras x y, en consecuencia, $n-k$ letras a. Estos términos son permutaciones con repetición, formadas por k letras x y $n-k$ letras a. Por esto, en virtud de la fórmula (5) del capítulo II, su número es igual a

$$P(k,\ n-k)=C_k^n=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

De aquí se deduce que, después de agrupar términos semejantes la expresión x^ka^{n-k} figurará con un coeficiente igual a $C_k^n=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Hemos demostrado, pues, que

$$(a+x)^n=C_0^na^n+C_1^na^{n-1}x+\ldots$$
$$\ldots+C_k^na^{n-k}x^k+\ldots+C_n^nx^n. \qquad (28)$$

Se acostumbra a denominar la igualdad (28) fórmula del binomio de Newton. Si hacemos en esta igualdad $a=1$, se obtiene

$$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+\ldots$$
$$\ldots+C_k^nx^k+\ldots+C_n^nx^n. \qquad (29)$$

Podemos apreciar que $(1+x)^n$ es la función generatriz de los números C_k^n, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Mediante esta función generatriz se puede demostrar en forma relativamente sencilla muchas propiedades de los números C_k^n, que fueron obtenidas antes mediante razonamientos bastante rebuscados.

Demostremos primeramente que

$$C_k^{n+1}=C_k^n+C_{k-1}^n. \qquad (30)$$

Para esto es suficiente multiplicar ambos miembros de la igualdad (29) por $1+x$. Se obtiene entonces que

$$(1+x)^{n+1}=$$
$$=(C_0^n+C_1^nx+\ldots+C_k^nx^k+\ldots+C_n^nx^n)(1+x).$$

La expresión del primer miembro de esta igualdad la desarrollaremos nuevamente en el binomio de Newton. Sólo que habrá que sustituir en dicha fórmula n por $n+1$. Por esto, el coeficiente de x^k será C_k^{n+1}. En el segundo miembro, en cambio, al abrir paréntesis el término que contiene x^k surge dos veces: al multiplicar $C_k^nx^k$ por 1 y al multiplicar $C_{k-1}^nx^{k-1}$ por x. Por esto, el coeficiente de x^k en el segundo miembro de la igualdad tendrá la forma $C_k^n+C_{k-1}^n$. Pero a ambos lados debe haber un mismo polinomio. Por esto, los coeficientes de x^k en ambos miembros deben ser iguales. Esto demuestra, precisamente, que $C_k^{n+1}=C_k^n+C_{k-1}^n$.

En la pág. 36 hemos demostrado esta igualdad. Pero allí fueron necesarios razonamientos combinatorios. Análogamente, en la pág. 36 fue demostrado, de manera relativamente compleja, que

$$2^n=C_0^n+C_1^n+\ldots+C_k^n+\ldots+C_n^n. \qquad (31)$$

Sin embargo, mediante la fórmula (29) la demostración se obtiene instantáneamente: es suficiente hacer $x=1$. Y si hacemos en esta igualdad $x=-1$, se obtiene que

$$0=C_0^n-C_1^n+C_2^n-C_3^n+\ldots+(-1)^kC_k^n+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^nC_n^n.$$

En otras palabras, la suma de los valores de C_k^n para k pares es igual a la suma de dichos valores para k impares:

$$C_0^n+C_2^n+C_4^n+\ldots+C_{2m}^n+\ldots$$
$$\ldots=C_1^n+C_3^n+\ldots+C_{2m+1}^n+\ldots \qquad (32)$$

Ambas sumas son finitas y se interrumpen cuando $2m$ y $2m+1$ respectivamente sean mayores que n.

Se obtiene un resultado curioso si en la igualdad (29) se hace $x=i$, $n=4m$. Un cálculo soncillo demuestra que $(1+i)^4 = -4$. Por esto, $(1+i)^{4m} = (-4)^m$. Obtenemos entonces la igualdad

$$(-4)^m = C_0^{4m} + C_1^{4m} i + C_2^{4m} i^2 + C_3^{4m} i^3 + \\ + C_4^{4m} i^4 + \ldots + C_{4m}^{4m} i^{4m} = C_0^{4m} + C_1^{4m} i - C_2^{4m} - \\ - C_3^{4m} i + C_4^{4m} + \ldots + C_{4m}^{4m}.$$

Separando en esta igualdad las partes real e imaginaria, se obtienen las identidades

$$C_1^{4m} - C_3^{4m} + C_5^{4m} - \ldots - C_{4m-1}^{4m} = 0, \qquad (33)$$

$$C_0^{4m} - C_2^{4m} + C_4^{4m} + \ldots + C_{4m}^{4m} = (-4)^m. \qquad (34)$$

Dejamos que el lector compruebe por sí mismo qué identidades se obtienen si se hace $n = 4m+1$, $4m+2$, $4m+3$.

Es fácil demostrar también, mediante la función generatriz, la igualdad

$$C_s^{n+m} = C_0^n C_s^m + C_1^n C_s^m + \ldots + C_k^n C_{s-k}^m + \ldots \\ \ldots + C_n^n C_{s-n}^m \qquad (35)$$

(aquí se toma $C_{s-k}^m = 0$ para $s - k < 0$; por esto, en realidad k varía desde 0 hasta el menor de los números m, n). Para la demostración, hay que tomar los desarrollos

$$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + \ldots + C_k^n x^k + \ldots + C_n^n x^n$$

y

$$(1+x)^m = C_0^m + C_1^m x + \ldots + C_s^m x^s + \ldots + C_m^m x^m$$

y multiplicar ambos miembros de estas igualdades. Se obtiene entonces

$$(1+x)^{n+m} = [C_0^n + C_1^n x + \ldots + C_k^n x^k + \ldots \\ \ldots + C_n^n x^n]\,[C_0^m + C_1^m x + \ldots + C_s^m x^s + \ldots + C_m^m x^m].$$

Apliquemos ahora al primer miembro la fórmula del binomio de Newton (para el exponente $n+m$), y abramos paréntesis en el segundo miembro. Si se comparan los coeficientes de x^s en ambos miembros, se obtiene, precisamente, la igualdad (35). Un caso particular de ésta es la

$$C_n^{2n} = (C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 \qquad (35')$$

(recuérdese que $C_k^n = C_{n-k}^n$).

FORMULA POLINOMICA

Aplicando la fórmula del binomio de Newton, se pueden desarrollar también expresiones más complejas, como por ejemplo la $(x+y+z)^4$. Precisamente,

$$(x+y+z)^4 = [(x+y)+z]^4 = \\ = (x+y)^4 + C_1^4 (x+y)^3 z + C_2^4 (x+y)^2 z^2 + \\ + C_3^4 (x+y) z^3 + C_4^4 z^4.$$

Desarrollemos ahora $(x+y)^4$, $(x+y)^3$, $(x+y)^2$ nuevamente según la fórmula del binomio de Newton. Se obtiene así

$$(x+y+z)^4 = x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4x^3z + 4xy^3 + \\ + 4y^3z + 4xz^3 + 4yz^3 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + \\ + 6y^2z^2 + 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2. \quad (36)$$

Pero este método es demasiado engorroso. Aplicándolo, es difícil responder inmediatamente a la pregunta: ¿con qué coeficiente figura en el desarrollo de $(x+y+z)^9$ el término $x^2y^4z^3$? Por esto, es deseable deducir una fórmula que nos dé directamente el desarrollo de la expresión

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n. \qquad (37)$$

No es difícil adivinar esta fórmula. En la demostración de la del binomio de Newton, vimos que en el desarrollo de $(a+x)^n$ el término $x^k a^{n-k}$ figuraba con coeficiente $P(k, n-k)$. Se puede suponer que en el desarrollo de $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$, el coeficiente de $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$ será $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Ahora demostraremos que esto es así precisamente.

En efecto, escribamos $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$ en forma de producto de n factores y abramos paréntesis, escribiendo todos los factores en su orden de aparición. Está claro que entonces se obtendrán todos los arreglos posibles con repetición, formados por las letras $x_1, x_2, \ldots, x_m$, tomadas de a n. Pero algunos de estos arreglos nos darán términos semejantes. Así será, si en el primer arreglo cada letra figura tantas veces como en el segundo. Por esto, para hallar el coeficiente de $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$, hay que calcular cuántos arreglos con repetición contienen k_1 veces la letra x_1, k_2 veces la x_2, . . ., k_m veces la x_m. Está claro que cada uno de estos arreglos es una permutación con repetición de k_1 letras x_1, k_2 letras x_2, . . ., k_m letras x_m. Hemos denotado mediante $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ el número de tales permutaciones. De esta manera, efectivamente, el coeficiente de $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$ en el desarrollo de la expresión (37) es $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ (donde, se sobreentiende, $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$, ya que en cada término del desarrollo figura un elemento de cada paréntesis, siendo n el número total de paréntesis que se multiplican).

La fórmula que acabamos de demostrar se puede escribir como sigue:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\\ =\sum P(k_1, k_2, \ldots, k_m)\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}, \qquad (38)$$

donde la suma se generaliza a todas las particiones posibles $k_1+k_2+\ldots+k_m$ del número n en m sumandos enteros no negativos. Recuérdese que

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m)=\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}. \qquad (39)$$

Está claro que si los números $s_1, \ldots, s_m$ se obtienen de los $k_1, \ldots, k_m$ mediante una permutación, será $P(s_1, \ldots, s_m)=P(k_1, \ldots, k_m)$. Por esto, por ejemplo, en el desarrollo (36) los coeficientes de x^2yz y xyz^2 son iguales. Esta observación facilita el cálculo de los términos del desarrollo (37). Es suficiente hallar los coeficientes para las particiones $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$ tales que $k_1\geqslant k_2\geqslant\ldots\geqslant k_m$, y luego cambiar de lugar los exponentes de todas las formas posibles.

Calculemos, por ejemplo, $(x+y+z)^5$. Si no se tiene en cuenta el orden de los sumandos, el número 5 se puede dividir en 3 sumandos de cinco formas:

$$5=5+0+0,\ 5=4+1+0,\ 5=3+2+0,\\ 5=3+1+1,\ 5=2+2+1.$$

Pero $P(5, 0, 0)=1$, $P(4, 1, 0)=5$, $P(3, 2, 0)=10$, $P(3, 1, 1)=20$, $P(2, 2, 1)=30$. Por esto,

$$(x+y+z)^5=x^5+y^5+z^5+5x^4y+5xy^4+5x^4z+\\ +5xz^4+5y^4z+5yz^4+10x^3y^2+10x^2y^3+\\ +10x^3z^2+10x^2z^3+10y^3z^2+10y^2z^3+20x^3yz+\\ +20xy^3z+20xyz^3+30x^2y^2z+30x^2yz^2+30xy^2z^2.$$

La fórmula (38) permite demostrar fácilmente algunas propiedades de los números $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Por ejemplo, si hacemos en esta fórmula $x_1=x_2=\ldots=x_m=1$, se obtiene que

$$m^n=\sum P(k_1, \ldots, k_m). \qquad (40)$$

Aquí la suma se extiende a todas las particiones del número n en m sumandos enteros no negativos: $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$, tomándose en consideración el orden de los sumandos.

Ahora bien, si se multiplican ambos miembros de la igualdad (38) por $x_1+x_2+\ldots+x_m$, se aplica al primer miembro un desarrollo análogo y se abren paréntesis en el segundo, se obtiene para $P(k_1, \ldots, k_m)$ la siguiente relación de recurrencia:

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_m)=P(k_1-1, k_2, \ldots, k_m)+\\ +P(k_1, k_2-1, \ldots, k_m)+\ldots\\ \ldots+P(k_1, k_2, \ldots, k_m-1). \qquad (41)$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros de los desarrollos

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum P(k_1, k_2, \ldots\\ \ldots, k_m)\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_m^{k_m}$$

y

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^s=\sum P(l_1, l_2, \ldots\\ \ldots, l_m)\,x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_m^{l_m}$$

y comparamos los coeficientes de $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots$ $\ldots x_m^{r_m}$ en ambos miembros, se obtiene la identidad $P(r_1, r_2, \ldots, r_m)=$

$$=\sum_{k_p+l_p=r_p} P(k_1, k_2, \ldots, k_m)\,P(l_1, l_2, \ldots, l_m). \qquad (42)$$

Aquí en el segundo miembro la suma se extiende a todos los números enteros no negativos $k_1, k_2, \ldots, k_m; l_1, l_2, \ldots, l_m$ tales que $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, $l_1 + l_2 + \ldots + l_m = s$ y $k_1 + l_1 = r_1, k_2 + l_2 = r_2, \ldots, k_m + l_m = r_m$. Dejamos que el lector efectúe con detalle los razonamientos correspondientes.

Se sobreentiende que las fórmulas (40)—(42) se podrían haber obtenido sin utilizar la función generatriz (38). Pero en tal caso habríamos tenido que efectuar razonamientos de carácter geométrico, análogos a los aplicados en la pág. 86, aunque ya no en el plano, sino en el espacio n-dimensional. La aplicación de la función generatriz permite obtener estas identidades automáticamente, efectuando sólo transformaciones algebraicas sencillas.

SERIE DE NEWTON

Hemos denominado, como se hace comúnmente en la escuela, *binomio de Newton* a la fórmula del desarrollo de $(a + x)^n$. Esta denominación es incorrecta desde el punto de vista de la historia de las matemáticas. Dicha fórmula era bien conocida por los matemáticos del Asia Central Omar Hayyam, Giyaseddin y otros. En la Europa Occidental, mucho antes que Newton la conocía Blas Pascal. El mérito de Newton reside en otro hecho: él logró generalizar la fórmula del desarrollo de $(x + a)^n$ para el caso de exponentes no enteros. Precisamente, éste demostró que *si a es un número positivo y $|x| < a$, para todo valor real de α tiene lugar la igualdad*

$$(x+a)^\alpha = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}a^{\alpha-2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}a^{\alpha-k}x^k + \ldots \qquad (43)$$

Sólo que ahora se obtiene no un número finito de sumandos, sino una serie infinita. En el caso en que n es un número entero, el paréntesis $(n - n)$ se anula. Pero este paréntesis figura en los coeficientes de todos los términos, a partir del $(n + 2)$-ésimo, por lo cual todos estos términos del desarrollo son iguales a cero. Por esto, para un n natural la serie (43) se transforma en una suma finita.

No demostraremos la fórmula (43) para todo valor de α, sino que estudiaremos solamente el caso en que α es un número entero negativo, $\alpha = -n$. En este caso, la fórmula que debemos demostrar adquiere la siguiente forma:

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}x + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}a^{-n-2}x^2 -$$
$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-n-3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1.2\ldots k}a^{-n-k}x^k + \ldots \quad (44)$$

Esta igualdad se puede escribir de otro modo como sigue:

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{-n} = 1 - C_1^n\left(\frac{x}{a}\right) + C_2^{n+1}\left(\frac{x}{a}\right)^2 -$$
$$- C_3^{n+2}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots + (-1)^k C_k^{n+k-1}\left(\frac{x}{a}\right)^k + \ldots \qquad (44')$$

$\left(\text{téngase en cuenta que } C_k^{n+k-1} = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1.2\ldots k}\right)$.

Nos resultará más cómodo sustituir $\frac{x}{a}$ por $-t$ y demostrar, en lugar de la (44′), la siguiente igualdad:

$$(1-t)^{-n} = 1 + C_1^n t + C_2^{n+1}t^2 + \ldots + C_k^{n+k-1}t^k + \ldots \qquad (45)$$

Efectuaremos la demostración mediante inducción completa con respecto a n. Para $n = 1$, tenemos que $C_k^{n+k-1} = C_k^k = 1$, por lo cual la relación a demostrar adquiere la forma siguiente:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^k + \ldots \qquad (46)$$

Pero ésta es la conocida fórmula de la suma de una progresión geométrica infinita decreciente (recuérdese que en nuestro caso es $|t| = \left|\frac{x}{a}\right| < 1$).

Supongamos ahora que ya fue demostrada la igualdad (45) y demostremos que ésta implica la igualdad

$$(1-t)^{-n-1} = 1 + C_1^{n+1}t + C_2^{n+2}t^2 + \dots \\ \dots + C_k^{n+k}t^k + \dots \qquad (47)$$

Para esto, multipliquemos ambos miembros de la igualdad (47) a demostrar por $1 - t$. Si después de esto obtenemos una igualdad correcta, la (47) también tendrá lugar. Pero después de multiplicar por $1 - t$, se obtiene

$$(1-t)^{-n} = [1 + C_1^{n+1}t + C_2^{n+2}t^2 + \dots \\ \dots + C_{k-1}^{n+k-1}t^{k-1} + C_k^{n+k}t^k + \dots](1-t).$$

Abramos paréntesis en el segundo miembro y reduzcamos los términos semejantes. Los sumandos que contienen t^k aparecen dos veces: cuando se multiplica a $C_k^{n+k}t^k$ por 1 y cuando se multiplica a $C_{k-1}^{n+k-1}\ t^{k-1}$ por $-t$. Por esto, el coeficiente de t^k en el segundo miembro es igual a

$$C_k^{n+k} - C_{k-1}^{n+k-1} = C_k^{n+k-1}$$

(véase la fórmula (11) de la pág. 36).

Pero, por la hipótesis de la inducción, el coeficiente de t^k en el desarrollo de $(1 - t)^{-n}$ es precisamente igual a C_k^{n+k-1}. Como después de multiplicar por $1 - t$ hemos obtenido una igualdad correcta, la igualdad (45) a demostrar también lo es.

Si el lector no quiere ir desde una igualdad a demostrar hasta otra ya conocida, sino que prefiere el camino contrario, debe multiplicar ambos miembros de la igualdad (45) por los términos correspondientes de la relación (46). Se obtiene entonces que

$$(1-t)^{-n-1} = \\ = (1 + C_1^n t + C_2^{n+1}t^2 + \dots + C_k^{n+k-1}t^k + \dots) \times \\ \times (1 + t + t^2 + \dots + t^k + \dots).$$

Ahora hay que abrir paréntesis y aplicar la identidad

$$C_0^{n-1} + C_1^n + C_2^{n+1} + \dots + C_k^{n+k-1} = C_k^{n+k}$$

(véase la pág. 37). Como resultado, se llega a la relación (47) que se quería demostrar).

De esta manera, la igualdad (45) queda demostrada. Recalquemos una vez más que ésta es válida solamente para $|t| < 1$. Si un lector descuidado prueba hacer en ambos miembros de la igualdad $t = -1$ y deduce, a base de esto, la fórmula «notable»

$$\frac{1}{2^n} = 1 - C_1^n + C_2^{n+1} - C_3^{n+2} + \dots \\ \dots + (-1)^k C_k^{n+k-1} + \dots, \qquad (48)$$

cometerá un grave error, pues en el segundo miembro se halla la suma de números enteros, que nunca dará el número fraccionario $1/2^n$.

En el siglo XVIII, cuando la teoría de las series infinitas aún no estaba estudiada al detalle, estos errores eran cometidos también por matemáticos conocidos. Fueron necesarias decenas de años de investigaciones intensas para comprender con exactitud qué es la suma de una serie infinita, cuándo ésta existe y cuándo no. A propósito, hay que acotar que a fines del siglo XIX el concepto de suma de una serie infinita fue considerablemente generalizado, y existen definiciones en las que la fórmula (48) tiene lugar. Pero estos problemas se salen del marco de nuestro libro.

Comparemos el desarrollo que acabamos de demostrar

$$(1+t)^{-n} = 1 - C_1^n t + C_2^{n+1}t^2 - \dots \\ \dots + (-1)^k C_k^{n+k-1}t^k + \dots \qquad (49)$$

con la fórmula

$$(1+t)^n = 1 + C_1^n t + C_2^n t^2 + \dots + C_k^n t^k + \dots + t^n. \qquad (50)$$

Llegamos nuevamente a la conclusión de que al generalizar el símbolo C_k^n para valores negat vos de n, hay que hacer

$$C_k^{-n} = (-1)^k C_k^{n+k-1}$$

(véase la pág. 80). Para valores negativos de k será $C_k^n = 0$, por cuanto en los desarrollos (49) y (50) no figuran sumandos con potencias negativas de t. Por las mismas razones será $C_k^n = 0$ para $0 \leqslant n < k$.

EXTRACCION DE RAICES CUADRADAS

Hemos demostrado la fórmula de Newton para todos los valores enteros del exponente. Pero, como ya indicamos, esta fórmula es válida no sólo para los valores enteros del exponente, sino también para los fraccionarios (o inclusive para los irracionales). Aquí no la demostraremos para dichos valores, limitándonos a escribir los desarrollos para $n = \frac{1}{2}$ y $n = -\frac{1}{2}$.

Para $n = \frac{1}{2}$, la fórmula de Newton adquiere la forma

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{1\cdot 2\ldots k}x^k + \ldots \quad (51)$$

Transformando esta expresión, se obtiene:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2k-3)}{2\cdot 4\ldots 2k}x^k + \ldots$$

Análogamente, para $n = -\frac{1}{2}$ deducimos que

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \ldots \ldots + (-1)^k \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}x^k + \ldots \quad (52)$$

Las fórmulas obtenidas se pueden escribir de otro modo. Para esto, obsérvese que

$$\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{2^{2k}}C_k^{2k}.$$

Por esto,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^2}C_1^2 x + \frac{1}{2^4}C_2^4 x^2 - \ldots \ldots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_k^{2k}x^k + \ldots \quad (53)$$

Análogamente se obtiene que

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 2^3}C_1^2 x^2 + \frac{1}{3\cdot 2^5}C_2^4 x^3 - \ldots \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{k-1}^{2k-2}x^k + \ldots \quad (54)$$

Estas expresiones convergen en la región $|x| < 1$. Con su ayuda se pueden extraer raíces cuadradas con cualquier grado de exactitud. Por ejemplo,

$$\sqrt{30} = \sqrt{25+5} = 5\sqrt{1+0,2} = 5(1+0,2)^{\frac{1}{2}} = 5\left[1 + \frac{1}{2}\cdot 0,2 - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot 0,2^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 0,2^3 - \ldots\right] = 5,4775\ldots$$

Sin embargo, no nos interesarán las aplicaciones de las fórmulas indicadas a la extracción de raíces cuadradas de números, sino las relaciones entre los coeficientes binomiales que se desprenden de los desarrollos obtenidos. Para obtener estas relaciones, elevemos ambos miembros de la igualdad (53) al cuadrado. En virtud de la regla del producto de series de potencias, se obtiene que el coeficiente de x^k en el segundo miembro tiene la forma

$$\frac{(-1)^k}{2^{2k}}[C_k^{2k}+C_1^2C_{k-1}^{2k-2}+C_2^4C_{k-2}^{2k-4}+\ldots+C_k^{2k}].$$

En el primer miembro de esta igualdad se obtiene

$$\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]^2=\frac{1}{1+x}.$$

Pero nosotros sabemos que

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^k x^k+\ldots$$

Comparando los coeficientes de las potencias x^k en ambos miembros de la igualdad, se obtiene la identidad

$$C_k^{2k}+C_1^2C_{k-1}^{2k-2}+C_2^4C_{k-2}^{2k-4}+\ldots+C_k^{2k}=2^{2k}. \quad (55)$$

Razonamientos análogos, aplicados a la igualdad (54), nos conducen a la identidad

$$\frac{C_{k-2}^{2k-4}}{1\cdot(k-1)}+\frac{C_1^2C_{k-3}^{2k-6}}{2(k-2)}+\frac{C_2^4C_{k-4}^{2k-8}}{3(k-3)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{C_{k-2}^{2k-4}}{(k-1)\cdot 1}=\frac{C_{k-1}^{2k-2}}{k}, \quad (56)$$

que es válida para $k\geqslant 2$.

Continuando, multipliquemos miembro a miembro los desarrollos (53) y (54). Se obtiene entonces

$$1=\left[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 2^3}C_1^2x^2+\frac{1}{3\cdot 2^5}C_2^4x^3-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{k-1}^{2k-2}x^k+\ldots\right]\times$$
$$\times\left[1-\frac{1}{2^2}C_1^2x+\frac{1}{2^4}C_2^4x^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_k^{2k}x^k+\ldots\right]. \quad (57)$$

Abramos paréntesis en el segundo miembro de esta igualdad. Obtendremos una serie de potencias, con la particularidad de que se deduce de la igualdad (57) que todos los coeficientes de esta serie (a excepción del término independiente) son iguales a cero. De aquí se obtiene la identidad

$$C_{k-1}^{2k-2}+\frac{1}{2}C_1^2C_{k-2}^{2k-4}+\frac{1}{3}C_2^4C_{k-3}^{2k-6}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{k}C_{k-1}^{2k-2}=\frac{1}{2}C_k^{2k}, \quad (58)$$

la cual es válida para $k\geqslant 1$.

Obsérvese, por último, que

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-1}=(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

de donde se desprende que

$$\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 2^3}C_1^2x^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k\cdot 2^{2k-1}}C_{k-1}^{2k-2}x^k+\ldots\right)\times$$
$$\times(1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^kx^k+\ldots)=$$
$$=1-\frac{1}{2^2}C_1^2x+\frac{1}{2^4}C_2^4x^2-\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^k}{2^{2k}}C_k^{2k}x^k+\ldots$$

Abriendo paréntesis en ambos miembros de esta igualdad y comparando los coeficientes de x^k en ambas partes, se obtiene la identidad

$$1-\frac{1}{2\cdot 2^2}C_1^2-\frac{1}{3\cdot 2^4}C_2^4-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{k\cdot 2^{2k-2}}C_{k-1}^{2k-2}=\frac{1}{2^{2k-1}}C_k^{2k}. \quad (59)$$

FUNCIONES GENERATRICES Y RELACIONES DE RECURRENCIA

Ya hemos expresado que la teoría de las funciones generatrices está estrechamente ligada a las relaciones de recurrencia. Volvamos a analizar la división de los polinomios. Sean

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

y

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$$

dos polinomios, con la particularidad de que $b_0 \neq 0$. Además, supongamos que $n < m$, es decir, que el quebrado algebraico $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ es propio (en caso contrario se puede separar de éste la parte entera).

Sabemos que si

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = c_0 + c_1x + \ldots + c_kx^k + \ldots, \tag{60}$$

entonces será

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n =$$
$$= (b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)(c_0 + c_1x + \ldots$$
$$\ldots + c_kx^k + \ldots).$$

Abramos paréntesis en el segundo miembro de esta igualdad y comparemos los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros. Primeramente obtendremos m relaciones del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} &b_0c_0 = a_0, \\ &b_0c_1 + b_1c_0 = a_1, \\ &b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_0c_{m-1} + b_1c_{m-2} + \ldots + b_{m-1}c_0 = a_{m-1} \end{aligned} \tag{61}$$

(si $n < m-1$, consideramos que $a_{n+1} = \ldots$ $\ldots = a_{m-1} = 0$). Las demás relaciones son todas del mismo tipo:

$$b_0c_{m+k} + b_1c_{m+k-1} + \ldots + b_mc_k = 0,$$
$$k = 0, 1, \ldots \tag{62}$$

(puesto que en $f(x)$ no hay términos que contengan a x^m, x^{m+1}, etc.). Así, pues, los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ de la serie (60) satisfacen a la relación de recurrencia (62). Los coeficientes de esta relación dependen solamente del denominador de la fracción. A su vez el numerador es necesario para la determinación de los primeros términos $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ de la sucesión de recurrencia.

Recíprocamente, si se da la relación de recurrencia (62) y se fijan los términos $c_0, c_1, \ldots$ $\ldots, c_{m-1}$, primeramente, a partir de las fórmulas (61), calculamos los valores de $a_0, \ldots$ $\ldots, a_{m-1}$. Entonces, la función generatriz de la sucesión de números $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ es el quebrado algebraico

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_{m-1}x^{m-1}}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}. \tag{63}$$

A primera vista parecería ser que hemos ganado poco al sustituir la relación de recurrencia por la función generatriz. Porque de todos modos habrá que dividir el numerador por el denominador, lo que a su vez nos conducirá a la misma relación de recurrencia (62). Pero la ventaja consiste en que con la fracción (63) se pueden efectuar algunas transformaciones algebraicas, lo cual facilita la determinación de los números c_k.

DESARROLLO EN FRACCIONES ELEMENTALES

Ahora mostraremos cómo se pueden resolver las relaciones de recurrencia efectuando transformaciones algebraicas de la función generatriz. Supongamos que el denominador de la fracción (63) se halla desarrollado en factores de primer grado:

$$\varphi(x) = b_m(x-\alpha_1)^r \ldots (x-\alpha_h)^s.$$

Obsérvese que para esto es necesario previamente resolver la ecuación $b_0 + \ldots + b_mx^m =$ $= 0$, es decir, la ecuación característica de la relación (62).

Entonces queda claro que la fracción (63) fue obtenida como resultado de reducir a común denominador las siguientes fracciones elementales:

$$\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)^r}, \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^{r-1}}, \ldots, \frac{A_{1,r-1}}{(x-\alpha_1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{A_{h1}}{(x-\alpha_h)^s}, \frac{A_{h2}}{(x-\alpha_h)^{s-1}}, \ldots, \frac{A_{h,s-1}}{x-\alpha_h}.$$

En otras palabras,

$$\frac{a_0+\ldots+a_{m-1}x^{m-1}}{b_m(x-\alpha_1)^r\ldots(x-\alpha_h)^s}=\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)^r}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_{1,\,r-1}}{x-\alpha_1}+\ldots+\frac{A_{h1}}{(x-\alpha_h)^s}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_{h,\,s-1}}{x-\alpha_h}. \quad (64)$$

Aquí desconocemos solamente los coeficientes $A_{11}, \ldots, A_{h\,s-1}$. Para hallarlos, hay que multiplicar ambos miembros de la igualdad (64) por el denominador $(x-\alpha_1)^r\ldots(x-\alpha_h)^s$, abrir paréntesis y comparar los coeficientes de iguales potencias de x. Del sistema obtenido de ecuaciones se hallan, precisamente, los coeficientes buscados.

A veces se logra evitar la resolución del sistema de ecuaciones. Supongamos, por ejemplo, que hay que desarrollar la fracción

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{x^4-5x^2+4}.$$

Como

$$x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=$$
$$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2),$$

este desarrollo deberá tener la forma

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=$$
$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}.$$

Reduciendo a denominador común, se obtiene que

$$x^3-2x^2+6x+1=A(x+1)(x-2)(x+2)+$$
$$+B(x-1)(x-2)(x+2)+$$
$$+C(x-1)(x+1)(x+2)+D(x-1)(x+1)(x-2).$$

Esta igualdad debe satisfacerse para todo valor de x. Pero para $x=1$ todos los sumandos del segundo miembro de la igualdad, a excepción del primero, se anulan, y obtenemos $-6A=6$. Por esto, $A=-1$. Análogamente, haciendo $x=$ $=-1$, $x=2$, $x=-2$, se halla que $B=-\frac{4}{3}$, $C=\frac{13}{12}$, $D=\frac{9}{4}$. De este modo,

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{x^4-5x^2+4}=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3(x+1)}+$$
$$+\frac{13}{12(x-2)}+\frac{9}{4(x+2)}. \quad (65)$$

Para las fracciones del tipo $\frac{A}{(x-\alpha)^r}$, el desarrollo en serie se obtiene a partir de la fórmula de Newton. Por ejemplo,

$$\frac{13}{12(x-2)}=-\frac{13}{24}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}=$$
$$=-\frac{13}{24}\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right].$$

Aplicando este desarrollo a todos los quebrados de la igualdad (65), se obtiene que

$$\frac{x^3-2x^2+6x+1}{x^4-5x^2+4}=(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)-$$
$$-\frac{4}{3}(1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots)-$$
$$-\frac{13}{24}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{9}{8}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{2^n}+\ldots\right).$$

Agrupando los términos con iguales potencias de x, se obtiene que el coeficiente de x^n se expresa mediante la fórmula

$$c_n=1-\frac{4}{3}(-1)^n-\frac{13}{24\cdot 2^n}+\frac{9(-1)^n}{8\cdot 2^n}.$$

Ya sabemos que el problema sobre el desarrollo de una fracción algebraica en serie de potencias es equivalente al de la resolución de cierta relación de recurrencia con condiciones iniciales dadas. De esta manera, mediante el desarrollo de los quebrados en elementales y el subsiguiente desarrollo de éstos en series de potencias se pueden resolver las relaciones lineales recurrentes con coeficientes constantes.

De esta forma, si se dan la relación de recurrencia (62) y los valores de $c_0, \ldots, c_{m-1}$, hay que hallar primeramente, según las fórmulas (61), los valores de $a_0, \ldots, a_{m-1}$. Estos nos dan los coeficientes del polinomio que se halla en el numerador de la fracción

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots$$

El denominador de esta fracción es igual a $b_0+ + \ldots + b_mx^m$.

La fracción hallada $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ debe descomponerse en fracciones elementales, luego de lo cual cada una de ellas se desarrolla en serie de potencias según la fórmula de Newton. El coeficiente de x^k en la serie obtenida nos da, precisamente, el valor de c_k.

Resolvamos, por ejemplo, la relación de recurrencia

$$c_{k+2}-5c_{k+1}+6c_k=0 \tag{66}$$

con las condiciones iniciales $c_0=1$, $c_1=-2$. Aquí será $b_0=1$, $b_1=-5$, $b_2=6$. De la fórmula (61) se obtiene que $a_0=b_0c_0=1$, $a_1=b_0c_1+b_1c_0= =-7$. Por esto, el numerador de la fracción

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k+\ldots$$

es igual a $1-7x$. El denominador de esta fracción se obtiene de inmediato de la relación (60). Este tiene la forma x^2-5x+6. Por lo tanto, para hallar la solución debemos desarrollar en serie de potencias la fracción

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6}$$

Pero $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, por lo cual

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6}=\frac{1-7x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}.$$

Eliminando denominadores, obtenemos

$$1-7x=A(x-3)+B(x-2).$$

Haciendo $x=3$, se halla que $B=-20$, y haciendo $x=2$, se encuentra que $A=13$. Por consiguiente,

$$\frac{1-7x}{x^2-5x+6}=\frac{13}{x-2}-\frac{20}{x-3}=$$
$$=-\frac{13}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}+\frac{20}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}=$$
$$=-\frac{13}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{20}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\ldots+\frac{x^n}{3^n}+\ldots\right).$$

Por esto,

$$c_n=-\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{3^n}=-\frac{13}{2^{n+1}}+\frac{20}{3^{n+1}}.$$

SOBRE UNA RELACION UNICA NO LINEAL DE RECURRENCIA

Al resolver el problema sobre la partición de una sucesión, obtuvimos la relación de recurrencia

$$T_n=T_0T_{n-1}+T_1T_{n-2}+\ldots+T_{n-1}T_0, \tag{67}$$

donde $T_0=1$ (véase la pág. 100). Esta relación fue resuelta de un modo muy artificioso: redujimos este problema al problema de la cola (véase la pág. 56), el cual ya sabíamos resolver. Pero la propia resolución del problema de la cola era bastante engorrosa.

Ahora mostraremos cómo se resuelve directamente la relación (67). Para esto, escribamos la función generatriz

$$f(x)=T_0+T_1x+T_2x^2+\ldots+T_nx^n+\ldots \tag{68}$$

Hagamos

$$F(x)\equiv xf(x)=T_0x+T_1x^2+\ldots+T_nx^{n+1}+\ldots \tag{69}$$

y elevemos $F(x)$ al cuadrado. Se obtiene entonces que

$$F^2(x)=T_0^2x^2+(T_0T_1+T_1T_0)x^3+\ldots$$
$$\ldots+(T_0T_{n-1}+\ldots+T_{n-1}T_0)x^{n+1}+\ldots$$

Pero, en virtud de la relación de recurrencia (67),

$$T_0T_{n-1}+\ldots+T_{n-1}T_0=T_n.$$

Por consiguiente,

$F^2(x)=T_1x^2+T_2x^3+\ \dots\ +T_nx^{n+1}+\ \dots$

La serie obtenida no es otra cosa que $F(x)-$ $-T_0x$; como $T_0=1$, ésta es igual a $F(x)-x$. Así, pues,

$$F^2(x)=F(x)-x. \qquad (70)$$

Hemos obtenido para la función $F(x)$ la ecuación cuadrática (70). Resolviéndola, se halla que

$$F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Hemos escogido el signo de menos delante de la raíz, pues en caso contrario tendríamos, para $x=0$, $F(0)=2$, mientras que del desarrollo (69) se aprecia que $F(0)=0$.

En virtud de la fórmula (54), tendremos que

$$\sqrt{1-4x}=(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1-2x-\frac{2}{2}C_1^2x^2-$$
$$-\frac{2}{3}C_2^4x^3-\ \dots\ -\frac{2}{n+1}C_n^{2n}x^{n+1}-\ \dots$$

Por cosiguiente,

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-2x-\dots\right.\right.$$
$$\left.\left.\dots-\frac{2}{n+1}C_n^{2n}x^{n+1}-\dots\right)\right]=$$
$$=x+C_1^2x^2+\ \dots+\frac{1}{n+1}C_n^{2n}x^{n+1}+\ \dots \qquad (71)$$

Comparando las fórmulas (69) y (71), se obtiene que $T_n=\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$. Esto corresponde totalmente a la solución obtenida antes por un método combinatorio (véase la pág. 100).

FUNCIONES GENERATRICES Y PARTICIONES DE LOS NUMEROS

En el capítulo IV resolvimos distintos problemas combinatorios sobre particiones de números. Estos problemas pueden resolverse con suma sencillez mediante las funciones generatrices.

Designemos mediante a_n el número de maneras de particiones para n, y escribamos la serie

$a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots$

En muchos casos se logra formar una expresión algebraica $f(x)$ tal que después de quitar paréntesis en esta expresión el sumando x^n se repite exactamente a_n veces. Entonces

$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots$

y, por lo tanto, $f(x)$ es la función generatriz de la sucesión a_0, a_1, ..., a_n, ...

Supongamos, por ejemplo, que se considera *la partición del número N en sumandos, cada uno de los cuales sea igual a uno de los números n_1 ... ..., n_k. Además, los sumandos no deben repetirse, y su orden no tiene importancia.*

Para resolver el problema, formemos la expresión

$$(1+x^{n_1})(1+x^{n_2})\ \dots\ (1+x^{n_k}). \qquad (72)$$

Al quitar paréntesis, se obtienen sumandos del tipo x^{m_1}, ..., x^{m_s}, donde m_1, ..., m_s son algunos de los números n_1, ..., n_k. Por esto x^N se encontrará en la suma tantas veces, de cuantas maneras se pueda descomponer el número N en sumandos, de la forma requerida.

Por ejemplo, si hay que averiguar de cuántas formas se puede pagar 78 kopeks, tomando no más de una moneda de cada valor, hay que formar la expresión

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)\times$$
$$\times(1+x^{10})(1+x^{15})(1+x^{20})(1+x^{50}), \qquad (73)$$

abrir paréntesis y hallar el coeficiente de x^{78}.

Resolvamos ahora mediante las funciones generatrices el siguiente problema:

¿De cuántas maneras se pueden pagar 29 kopeks en monedas de 3 y 5 k.?

En este problema hay que hallar el número de formas de descomponer el número 29 en sumandos, iguales a 3 y 5, sin que nos interese el orden de éstos. En otras palabras, hay que hallar el número de soluciones no negativas de la ecuación $3m+5n=29$.

Escribamos para esto la expresión

$$f(x)=(1+x^3+x^6+\dots+x^{3m}+\dots)\times$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+\dots+x^{5n}+\dots). \qquad (74)$$

Los exponentes de x en el primer paréntesis toman todos los valores no negativos múltiplos de 3, y en el segundo, todos los no negativos múltiplos de 5. Está claro que después de quitar paréntesis x^N figurará con un coeficiente igual al número de soluciones de la ecuación $3m+5n=$ $=N$. En particular, el coeficiente de x^{29} nos dará la respuesta de nuestro problema.

En lugar de quitar paréntesis, se puede proceder del siguiente modo. Apliquemos la fórmula de la progresión geométrica infinita. Entonces la expresión (74) se escribe en la forma

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x^5}=\frac{1}{1-x^3-x^5+x^8}.$$

Dividamos ahora el numerador por el denominador, según la regla de división de polinomios (sólo que los dispondremos no en potencias decrecientes, sino en potencias crecientes de x). El comienzo de esta division es el siguiente:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-x^3-x^5+x^8 \\ \hline
\underline{x^3+x^5-x^8} & 1+x^3+x^5+x^6+x^8+\dots \\
\underline{\quad x^5+x^8-x^{11}} & \\
\underline{\qquad x^6+x^8+x^{10}-x^{11}-x^{13}} & \\
\qquad\quad x^8+x^9+x^{10}-x^{13}-x^{14} &
\end{array}$$

Continuando la división, se halla el coeficiente buscado de x^{29}.

El problema general es aquí el siguiente:

Hallar de cuántas maneras se puede descomponer el número N en sumandos, iguales respectivamente a $a, b, \dots, m$, sin que se tenga en cuenta el orden de éstos.

En este caso, la función generatriz tiene la forma

$$f(x)=(1+x^a+x^{2a}+\dots+x^{la}+\dots)\times$$
$$\times(1+x^b+x^{2b}+\dots+x^{sb}+\dots)\times$$
$$\times(1+x^m+x^{2m}+\dots+x^{qm}+\dots)=$$
$$=\frac{1}{(1-x^a)(x-x^b\dots(1-x^m)}. \qquad (75)$$

Por ejemplo, en el problema sobre el cambio de la moneda de 10 kopeks (véase la pág. 69), hay que escribir la función generatriz

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}.$$

Multiplicando las expresiones que están en el denominador de la fracción se obtiene

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}}.$$

Efectuando la división, se halla que

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-x-x^2+x^7-x^9-x^{10}+x^{11} \\ \hline
\underline{x+x^2-x^7+x^9+x^{10}-x^{11}} & 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\dots \\
\underline{2x^2+3x^3-x^7-x^8+x^9+2x^{10}-x^{12}} & \\
\underline{\quad 3x^3+2x^4-x^7-x^8-x^9+2x^{10}+2x^{11}+x^{12}-2x^{13}} & \\
\qquad 5x^4+3x^5-x^7-x^8-x^9-x^{10}+2x^{11}-4x^{12}+x^{13}-3x^{14}. &
\end{array}$$

El coeficiente de x^{10} da la respuesta del problema planteado.

Se sobreentiende que aquí es bastante complicado efectuar la división por el método habitual. En lugar de esto, se puede proceder de otra forma. Escribamos el resultado de la división en forma de una serie infinita con coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{1-x-x^2+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}}=$$
$$=A_0+A_1x+A_2x^2+\dots+A_nx^n+\dots$$

Multipliquemos ambos miembros de la igualdad por el denominador. Entonces, el coeficiente de x^n en el segundo miembro será igual a

$$A_n-A_{n-1}-A_{n-2}+A_{n-7}-A_{n-9}-A_{n-10}+A_{n-11}.$$

En el primer miembro, el coeficiente de x^n, $n \geqslant 1$, es igual a cero. Por consiguiente, para $n \geqslant 1$ los coeficientes A_n deben satisfacer a la relación de recurrencia

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} - A_{n-7} + A_{n-9} + A_{n-10} - A_{n-11}.$$

Las condiciones iniciales tienen la forma: $A_n = 0$ para $n < 0$ y $A_0 = 1$. Utilizando estas condiciones, es fácil hallar sucesivamente todos los coeficientes A_n.

Como ejemplo, consideremos el problema del aspirante (véase la pág. 66). En éste había que hallar de cuántas maneras se puede representar el número 17 en forma de suma de 4 sumandos, que adquieren los valores 3, 4, 5, teniendo importancia el orden de los sumandos. Para este problema, hay que tomar como función generatriz $(x^3 + x^4 + x^5)^4$, puesto que al abrir paréntesis en la expresion $f(x) = (x^3 + x^4 + x^5)^4$, cada sumando x^N se encontrará tantas veces, de cuantas maneras N se descomponga en suma de 4 sumandos que adquieran los valores 3, 4, 5. Aquí se encontrarán también los términos que se obtienen uno del otro por permutación de los sumandos en el exponente (por ejemplo, $x^3x^4x^5x^3$ y $x^4x^3x^3x^5$).

La operación de abrir paréntesis en la expresión $(x^3 + x^4 + x^5)^4 = x^{12}(1 + x + x^2)^4$ se puede efectuar, por ejemplo, por el teorema polinómico. Pero es más sencillo otro método. Obsérvese que $1 + x + x^2 + \frac{1-x^3}{1-x}$. Por esto, $f(x)$ se puede escribir en la forma

$$f(x) = \frac{x^{12}(1-x^3)^4}{(1-x)^4} = x^{12}(1-x^3)^4(1-x)^{-4}.$$

Pero, en virtud de la fórmula del binomio de Newton, tendremos que

$$(1-x^3)^4 = 1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12},$$

y por la fórmula de la serie de Newton (véase la pag. 122), será $(1-x)^{-4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \ldots$
$$\ldots + \frac{4\cdot 5 \ldots (n+3)}{1\cdot 2 \ldots n}x^n + \ldots$$

Por esto,

$$f(x) = x^{12}(1 - 4x^3 + 6x^6 - 4x^9 + x^{12}) \times$$
$$\times (1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + \ldots).$$

Multiplicando término a término estos desarrollos, se halla que el coeficiente de x^{17} es igual a 16. En consecuencia, la partición se puede efectuar de 16 maneras.

En general, si hay que hallar de cuántas maneras se puede descomponer el número N en k sumandos, que adquieren los valores $n_1, \ldots, n_s$, teniéndose en cuenta el orden de los sumandos, la función generatriz tiene la forma

$$f(x) = (x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots + x^{n_s})^k. \tag{76}$$

El problema se simplifica si los números $n_1, \ldots, n_s$ forman una progresión aritmética. En este caso, $x^{n_1}, \ldots, x^{n_s}$ forman una progresión geométrica, lo cual permite simplificar la expresión de $f(x)$.

Hallemos, por ejemplo, de cuántas maneras se pueden obtener 25 tantos, echando 7 dados. Aquí hay que formar la función generatriz

$$f(x) = (x + x^2 + \ldots + x^6)^7. \tag{77}$$

Por la fórmula de la suma de una progresión geométrica, esta función se puede escribir en la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{x^7(1-x^6)^7}{(1-x)^7} = x^7(1-x^6)^7(1-x)^{-7}.$$

Desarrollemos ahora $(1-x^6)^7$ según la fórmula del binomio de Newton, y $(1-x)^{-7}$, según la de la serie de Newton. Obtenemos entonces

$$f(x) = x^7(1 - 7x^6 + 21x^{12} - 35x^{18} + 35x^{24} - 21x^{30} +$$
$$+ 7x^{36} - x^{42})(1 + 7x + 28x^2 + 84x^3 +$$
$$+ 210x^4 + 462x^5 + \ldots).$$

Multiplicando estos desarrollos, se calcula sin dificultad el coeficiente de x^{25}. Este nos dará, precisamente, la respuesta al problema planteado.

Análogamente se resuelven también, mediante las funciones generatrices, los otros problemas analizados en el capítulo IV.

RESUMEN DE LOS RESULTADOS SOBRE LA COMBINATORIA DE LA PARTICION

1. El número de formas de dividir n distintos objetos en r grupos diferenciables entre sí con la particularidad de que se admiten grupos vacíos, es igual a r^n.

2. El número de maneras de dividir n objetos distintos en r grupos diferenciables entre sí, siendo todos éstos no vacíos, es igual al coeficiente de x^n del desarrollo de la función $(e^x - 1)^r$ en serie de potencias, multiplicado por $n!$ Este número se puede escribir en la forma

$$r^n - \frac{r}{1}(r-1)^n + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}(r-2)^n - \dots$$

3. Si en el mismo problema los grupos son indistinguibles, la cantidad de maneras es $r!$ veces menor.

4. El número de modos de dividir n objetos indistinguibles en r grupos diferenciables entre sí, en los cuales todos los grupos no son vacíos, es igual a C_{r-1}^{n-1}.

5. El número de maneras de dividir n objetos indiferenciables en r grupos distinguibles, admitiéndose grupos vacíos, es igual a C_{r-1}^{n+r-1}.

6. El número de formas de dividir n objetos indiferenciables en r grupos distinguibles, en los que cada grupo contenga por lo menos q objetos, es igual a $C_{r-1}^{n-1-r(q-1)}$.

7. El número de modos de dividir n objetos indistinguibles en r grupos diferenciables, en los que el número de elementos de cada grupo se halle entre q y $q+s-1$, $q \leqslant x \leqslant q+s-1$, es igual al coeficiente de x^{n-rq} del desarrollo de la función $\left(\frac{1-x^s}{1-x}\right)^r$ en serie de potencias.

8. Designemos el número de formas de dividir n objetos indistinguibles en r grupos indiferenciables, en los que no hay ninguno vacío, mediante Π_r^n. Entonces tiene lugar la fórmula de recurrencia

$$\Pi_r^n = \Pi_{r-1}^{n-1} + \Pi_{r-1}^{n-r-1} + \Pi_{r-1}^{n-2r-1} + \dots$$

Tiene lugar la igualdad

$$\Pi_r^n = \Pi_{r-1}^{n-1} + \Pi_r^{n-r}.$$

Para $n - r < r$, se tiene que

$$\Pi_r^n = \Pi_{r-1}^{n-1}.$$

Conjuntamente con las particiones, se estudian las ordenaciones de elementos, en los que tiene importancia tanto el orden de los grupos como el de los elementos en éstos. Para las ordenaciones son válidas las afirmaciones siguientes:

9. Si n objetos distintos están ordenados en r grupos diferenciables, admitiéndose grupos vacíos, el número de ordenaciones es igual a

$$r(r+1)\dots(r+n-1).$$

10. Si n objetos distintos se ordenan en r grupos diferenciables, siendo todos ellos no vacíos, el número de ordenaciones es igual a

$$n!\,C_{r-1}^{n-1} = \frac{n!\,(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!}.$$

Si, en cambio, los grupos son indistinguibles, por lo cual su orden no tiene importancia, el número de ordenaciones es igual a $\frac{n!}{r!}C_{r-1}^{n-1}$.

11. Supongamos que de n elementos diferentes se forman, de todas las maneras posibles, r grupos ordenados (se pueden tomar no todos los elementos, se admiten grupos vacíos y se tiene en cuenta el orden de los grupos). La cantidad de tales grupos es igual a

$$n!\left[\frac{1}{n!} + \frac{r}{1!\,(n-1)!} + \frac{r(r+1)}{2!\,(n-2)!} + \dots\right].$$

Esta expresión es el coeficiente de x^n del desarrollo de la función $e^x(1-x)^{-r}$ en serie de potencias, multiplicado por $n!$.

12. Si en el mismo problema se prohíben los grupos vacíos la respuesta es igual al coeficiente de x^{n-r} en el desarrollo de la función $e^x(1-x)^{-r}$ en potencias de x, multiplicado por $n!$

1.

De la ciudad A hasta la B conducen cinco caminos, y de la B a la C, tres. ¿Cuántos caminos que pasen por B conducen desde A hasta C?

2.

De dos sociedades deportivas, con 100 esgrimidores cada una, hay que escoger de a un espadachín para participar en una competición. ¿De cuántas formas se puede efectuar esta elección?

3.

Hay cinco tipos de sobres sin estampillas y cuatro tipos de estampillas de un mismo valor. ¿De cuántas maneras se puede escoger un sobre con estampilla para enviar una carta?

4.

¿De cuántos modos se puede escoger una vocal y una consonante de la palabra «cantor»?

5.

Lo mismo, pero de la palabra «trineo».

6.

Se echa un dado de seis caras y se hace girar un trompo con ocho caras. ¿De cuántas maneras diferentes pueden caer éstos?

7.

A la cumbre de una montaña conducen cinco caminos. ¿De cuántas maneras puede trepar un turista a la montaña y descender de ella? Lo mismo, pero con la condición de que el ascenso y el descenso tienen lugar por caminos diferentes.

8.

En una granja hay 20 ovejas y 24 cerdos. ¿De cuántos modos se puede escoger una oveja y un cerdo? Si esta elección ya fue efectuada, ¿de cuántas maneras se la puede efectuar nuevamente?

9.

¿De cuántas formas se pueden indicar en el tablero de ajedrez dos casillas, una blanca y una negra? ¿Y si no hay limitaciones en lo que respecta al color de las casillas escogidas?

10.

¿De cuántas maneras se pueden escoger en el tablero de ajedrez una casilla blanca y una negra que no estén en una misma horizontal ni vertical?

11.

De 12 palabras de género masculino, 9 de femenino y 10 de neutro hay que escoger una de cada género. ¿De cuántos modos se puede efectuar esta elección?

12.

Hay 6 pares de guantes de distintas medidas. ¿De cuántas maneras se pueden escoger entre ellos un guante de la mano izquierda y otro de la derecha, de forma que estos guantes sean de distintas medidas?

13.

De entre 3 ejemplares de un texto de álgebra, 7 de uno de geometría y 7 de uno de trigonometría hay que escoger un ejemplar de cada texto. ¿Cuántos modos existen de efectuarlo?

14.

En una librería hay 6 ejemplares de la novela de I. S. Turgénev «Rudin», 3 de la novela del mismo autor «Nido de Hidalgos» y 4 de la novela «Padres e Hijos». Además, hay 5 tomos que contienen las novelas «Rudin» y «Nido de Hidalgos» y 7 que contienen las novelas «Nido de Hidalgos» y «Padres e Hijos». ¿De cuántos modos se puede efectuar una compra que contenga un ejemplar de cada una de estas novelas?

15.

El mismo problema pero si, además, en la librería hay tres tomos en los que se incluyen «Rudin» y «Padres e Hijos».

16.

En una canasta hay 12 manzanas y 10 naranjas. Iván toma de ésta una manzana o una naranja, luego de lo cual Nadia escoge una manzana y una naranja. ¿En qué caso Nadia tendrá mayor libertad de elección: cuando Iván toma una manzana, o cuando éste toma una naranja?

17.

Hay tres trompos con 6, 8 y 10 caras respectivamente. ¿De cuántas maneras diferentes pueden caer éstos? El mismo problema, si se conoce que

1.

De la ciudad A hasta la B conducen cinco caminos, y de la B a la C, tres. ¿Cuántos caminos que pasen por B conducen desde A hasta C?

2.

De dos sociedades deportivas, con 100 esgrimidores cada una, hay que escoger de a un espadachín para participar en una competición. ¿De cuántas formas se puede efectuar esta elección?

3.

Hay cinco tipos de sobres sin estampillas y cuatro tipos de estampillas de un mismo valor. ¿De cuántas maneras se puede escoger un sobre con estampilla para enviar una carta?

4.

¿De cuántos modos se puede escoger una vocal y una consonante de la palabra «cantor»?

5.

Lo mismo, pero de la palabra «trineo».

6.

Se echa un dado de seis caras y se hace girar un trompo con ocho caras. ¿De cuántas maneras diferentes pueden caer éstos?

7.

A la cumbre de una montaña conducen cinco caminos. ¿De cuántas maneras puede trepar un turista a la montaña y descender de ella? Lo mismo, pero con la condición de que el ascenso y el descenso tienen lugar por caminos diferentes.

8.

En una granja hay 20 ovejas y 24 cerdos. ¿De cuántos modos se puede escoger una oveja y un cerdo? Si esta elección ya fue efectuada, ¿de cuántas maneras se la puede efectuar nuevamente?

9.

¿De cuántas formas se pueden indicar en el tablero de ajedrez dos casillas, una blanca y una negra? ¿Y si no hay limitaciones en lo que respecta al color de las casillas escogidas?

10.

¿De cuántas maneras se pueden escoger en el tablero de ajedrez una casilla blanca y una negra que no estén en una misma horizontal ni vertical?

11.

De 12 palabras de género masculino, 9 de femenino y 10 de neutro hay que escoger una de cada género. ¿De cuántos modos se puede efectuar esta elección?

12.

Hay 6 pares de guantes de distintas medidas. ¿De cuántas maneras se pueden escoger entre ellos un guante de la mano izquierda y otro de la derecha, de forma que estos guantes sean de distintas medidas?

13.

De entre 3 ejemplares de un texto de álgebra, 7 de uno de geometría y 7 de uno de trigonometría hay que escoger un ejemplar de cada texto. ¿Cuántos modos existen de efectuarlo?

14.

En una librería hay 6 ejemplares de la novela de I. S. Turguénev «Rudin», 3 de la novela del mismo autor «Nido de Hidalgos» y 4 de la novela «Padres e Hijos». Además, hay 5 tomos que contienen las novelas «Rudin» y «Nido de Hidalgos» y 7 que contienen las novelas «Nido de Hidalgos» y «Padres e Hijos». ¿De cuántos modos se puede efectuar una compra que contenga un ejemplar de cada una de estas novelas?

15.

El mismo problema pero si, además, en la librería hay tres tomos en los que se incluyen «Rudin» y «Padres e Hijos».

16.

En una canasta hay 12 manzanas y 10 naranjas. Iván toma de ésta una manzana o una naranja, luego de lo cual Nadia escoge una manzana y una naranja. ¿En qué caso Nadia tendrá mayor libertad de elección: cuando Iván toma una manzana, o cuando éste toma una naranja?

17.

Hay tres trompos con 6, 8 y 10 caras respectivamente. ¿De cuántas maneras diferentes pueden caer éstos? El mismo problema, si se conoce que por lo menos dos trompos cayeron sobre el lado marcado con la cifra 1.

18.

¿De cuántos modos se pueden escoger tres pinturas diferentes de las cinco en existencia?

19.

¿De cuántas formas se puede confeccionar una bandera de franjas de tres colores, si se tiene tela de 5 colores distintos? El mismo problema, si una de las franjas debe ser roja.

20.

¿Cuántos diccionarios hay que editar para que se puedan efectuar directamente traducciones entre cualquiera de los cinco idiomas: español, ruso, inglés, francés, alemán?

21.

¿Cuántos diccionarios habrá que agregar si el número de idiomas diferentes es igual a 10?

22.

¿De cuántas maneras se puede escoger, de una baraja completa, una carta de cada palo[1]? Lo mismo, pero con la condición de que entre las cartas escogidas no haya ningún par igual, es decir, dos reyes, dos diez, etc.

23.

¿De cuántos modos se puede escoger de una baraja completa (que contenga 52 cartas) una carta de cada palo de forma que las de palos rojos y las de palos negros formen parejas (por ejemplo, los nueves de picas y de tréboles y los valets de cuadrados y de corazones)?

24.

Los ingleses suelen dar varios nombres a sus hijos. ¿De cuántas formas se puede dar un nombre al niño, si el número general de nombres es igual a 300, y le dan no más de tres nombres?

25.

Varias personas se sientan a una mesa redonda. Consideraremos que dos formas de sentarse coinciden, si cada persona tiene los mismos vecinos en ambos casos. ¿De cuántos modos diferentes se puede sentar a cuatro personas? ¿Y a siete? ¿En cuántos casos dos personas dadas de entre siete serán vecinos? ¿En cuántos casos una persona dada (de entre siete) tendrá dos vecinos dados?

26.

Cinco muchachas y tres muchachos juegan a la pelota. ¿De cuántas formas pueden dividirse en dos equipos de 4 personas cada uno, si en cada equipo debe haber por lo menos un muchacho?

27.

Hay que enviar 6 cartas urgentes. ¿De cuántas maneras puede efectuarse esto, si para transmitir las cartas se pueden enviar tres agentes, y cada carta se puede entregar a cualquiera de ellos?

28.

Una persona tiene 7 libros de matemáticas, y otra, 9. ¿De cuántos modos pueden cambiar un libro de uno por uno del otro?

29.

El mismo problema, pero se intercambian dos libros de uno por dos del otro.

30.

En una reunión deben intervenir 5 personas: A, B, C, D y E. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir en la lista de oradores, con la condición de que B no debe intervenir antes que A?

31.

El mismo problema, pero con la condición de que A deba intervenir inmediatamente antes que B.

32.

¿De cuántas formas se puede sentar alrededor de una mesa redonda a 5 hombres y 5 mujeres de modo que no haya juntas dos personas de un mismo sexo?

33.

El mismo problema, pero se sientan no alrededor de una mesa redonda, sino en una calesita, y las formas que se transforman una en la otra al girar la calesita se consideran coincidentes.

[1] Se toma una baraja de 52 cartas (N. del T.).

34.

De una baraja que contiene 52 cartas se han extraído 10. ¿En cuántos casos entre ellas habrá por lo menos un as? ¿En cuántos habrá exactamente un as? ¿En cuántos habrá no menos de dos ases? ¿Y exactamente dos ases?

35.

En una estación del ferrocarril hay m semáforos. ¿Cuántas señales diferentes se pueden dar, si cada uno de ellos tiene tres estados: rojo, amarillo y verde?

36.

En cierto Estado no había dos habitantes con igual cantidad de dientes. ¿Cuál puede ser la población máxima en este Estado (el mayor número de dientes es igual a 32)?

37.

En el coupé de un vagón del ferrocarril hay dos divanes opuestos, de 5 lugares cada uno. De 10 pasajeros, cuatro desean sentarse cara a la locomotora, y tres, de espaldas a ella; a los tres restantes les es indiferente cómo sentarse. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los pasajeros?

38.

En un Comité Sindical se han escogido 9 personas. De entre ellas hay que elegir al presidente, al vicepresidente, al secretario y al organizador cultural. ¿De cuántos modos se puede efectuar esto?

39.

De entre los integrantes de una conferencia, en la que toman parte 52 personas, hay que escoger una delegación formada por 5 personas. ¿De cuántas formas puede hacerse?

40.

Los números de automóvil están formados por una, dos o tres letras y cuatro cifras. Hallar la cantidad total de estos números, si se utilizan las 32 letras del alfabeto ruso.

41.

La mamá tiene 2 manzanas y 3 peras. Cada día, durante cinco días seguidos, da al hijo una fruta. ¿De cuántas maneras puede efectuarse esto?

42.

Resolver un problema análogo, pero con m manzanas y n peras.

43.

Resolver un problema análogo, en el caso en que haya 2 manzanas, 3 peras y 4 naranjas.

44.

El padre tiene 5 naranjas distintas dos a dos, las que entrega a sus ocho hijos de forma que cada uno obtiene o una naranja o nada. ¿De cuántos modos puede hacerlo?

45.

Un problema análogo, pero si el número de naranjas que obtiene cada hijo es ilimitado.

46.

¿Cuántas palabras diferentes se pueden obtener mutando las letras de la palabra «matemática»? ¿Y de la palabra «parábola»? ¿Y de la palabra «ingredient»[1]?

47.

En un club deportivo, con 30 miembros, hay que formar un equipo de 4 personas, para participar en una carrera de 1000 m. ¿De cuántas maneras puede hacerse? ¿Y de cuántas se puede formar un equipo de 4 personas para participar en la carrera de relevos $100 + 200 + 400 + 800$?

48.

¿De cuántas formas se pueden colocar las figuras blancas (2 caballos, 2 torres, 2 alfiles, el rey y la reina) en la primera fila del tablero de ajedrez?

49.

Hay n abonados en una red telefónica. ¿De cuántos modos se pueden unir al mismo tiempo tres pares?

50.

En una oficina de correos se venden estampillas de 10 tipos. ¿De cuántas formas se pueden comprar en ella 12 estampillas? ¿Y 8 estampillas? ¿Y 8 estampillas diferentes?

[1] Se da la forma rusa de la palabra «ingrediente» (N. del T.).

51.

De un grupo formado por 7 hombres y 4 mujeres hay que escoger 6 personas de forma que entre ellas haya no menos de 2 mujeres. ¿De cuántas maneras puede efectuarse la elección?

52.

¿Cuántos números distintos de cuatro cifras, que se dividan por 4, pueden formarse a partir de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, si cada cifra puede emplearse en la escritura de un número varias veces?

53.

Un tren, en el que se encuentran n pasajeros, debe efectuar m paradas. ¿De cuántos modos pueden distribuirse los pasajeros entre estas paradas? El mismo problema, si se tiene en cuenta sólo la cantidad de pasajeros que se bajaron en una parada prefijada.

54.

¿Cuántas permutaciones distintas pueden efectuarse con n elementos, en las que dos de ellos, a y b, no estén juntos? ¿Y en las que no lo estén tres, a, b, c (en cualquier orden)? ¿Y en las que ningún par de los elementos a, b, c esté junto?

55.

En un torneo de gimnasia participan 10 personas. Tres jueces deben numerarlos, independientemente el uno de los otros, en un orden que refleje sus éxitos en el torneo, según la opinión de cada juez. Se considera ganador el que haya sido nombrado primero por lo menos por dos jueces. ¿En qué porcentaje de los casos del torneo se habrá determinado un ganador?

56.

Cuatro estudiantes rinden un examen. ¿De cuántas maneras se les pueden poner las calificaciones, si se sabe que ninguno de ellos obtuvo insuficiente[1]?

57.

¿Cuántos collares diferentes se pueden confeccionar de siete cuentas de distinto tamaño (hay que utilizar las 7)?

[1] En los exámenes de la URSS hay tres notas de promoción: 3, 4 y 5 (véase también la nota de la pág. 21) (N. del T.).

58.

¿Cuántos collares diferentes se pueden confeccionar de cinco cuentas iguales y dos de mayor dimensión?

59.

En una aldea hay 2000 habitantes. Demostrar que por lo menos dos de ellos tienen iguales iniciales[2].

60.

Un grupo de siete muchachos y diez chicas baila. Si en algún baile participan todos los muchachos, ¿cuántas variantes existirán de la participación de las muchachas en este baile? ¿Cuántas variantes habrá, si se tiene en cuenta sólo qué chicas quedaron sin ser invitadas? Resolver las mismas cuestiones si se puede decir con seguridad que dos chicas determinadas serán invitadas al baile?

61.

Una compañía está formada por 3 oficiales, 6 sargentos y 60 soldados rasos. ¿De cuántos modos se puede elegir entre ellos un destacamento formado por un oficial, dos sargentos y 20 soldados rasos? El mismo problema, pero en el destacamento debe figurar el jefe de la compañía y el mayor de los sargentos.

62.

En una fiesta escolar hay 12 niñas y 15 niños. ¿De cuántas maneras se pueden escoger de entre ellos 4 pares para un baile?

63.

Hay 3 gallinas, 4 patos y 2 gansos. ¿Cuántas agrupaciones existen para la elección de varias aves, de forma que entre las escogidas haya tanto gallinas como patos y gansos?

64.

¿De cuántos modos se pueden dividir $m + n + p$ objetos en tres grupos, de forma que en uno haya m objetos, en otro n, y en el tercero p?

65.

En un estante hay $m + n$ libros diferentes, de los cuales m están encuadernados en negro, y n, en rojo. ¿Cuántas permutaciones existen de estos

[2] En ruso hay dos iniciales (del nombre y del patronímico), utilizándose para ellas 29 letras del alfabeto (N. del T.).

libros, en las que los encuadernados en negro ocupen los primeros m lugares? ¿Cuántas posiciones hay, en las que todos los libros encuadernados en negro se hallen juntos?

66.

¿De cuántas formas se puede escoger entre 15 personas un grupo para trabajar? En el grupo puede haber 1, 2, 3, ... 15 personas. El mismo problema, pero para el caso en que haya que elegir de entre n personas.

67.

Sean $p_1, \ldots, p_n$ números primos diferentes. ¿Cuántos divisores tiene el número

$$q = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n},$$

siendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números naturales (incluyendo los divisores 1 y q)? ¿A qué es igual su suma?

68.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 monedas de 50 kopeks en cinco paquetes diferentes, si ninguno de éstos debe ser vacío?

69.

¿De cuántas formas se pueden distribuir 20 libros en una biblioteca con 5 estantes, si cada estante puede contener todos los 20?

70.

¿De cuántos modos se pueden poner 5 anillos diferentes en los dedos de una mano, omitiendo el pulgar?

71.

30 personas votan por 5 mociones. ¿De cuántas formas se pueden distribuir los votos, si cada uno vota por una moción y se tiene en cuenta solamente el número de votos que obtuvo cada una?

72.

Un encuadernador debe encuadernar 12 libros diferentes en rojo, verde y marrón. ¿De cuántos modos puede hacerlo, si por lo menos un libro debe estar encuadernado en cada color?

73.

¿De cuántas maneras se pueden formar 6 palabras de 32 letras, si en el conjunto de estas 6 palabras cada letra se utiliza una vez, y sólo una vez?

74.

¿Cuántas formas existen de escoger 12 personas de entre 17, si dos personas dadas de estas 17 no pueden ser elegidas juntas?

75.

¿Cuántos brazaletes distintos se pueden confeccionar de cinco esmeraldas iguales, seis rubíes iguales y siete zafiros iguales (en el brazalete deben figurar todas las 18 piedras)?

76.

¿De cuántos modos se pueden escoger, de las mismas piedras, tres para un anillo?

77.

En una pieza de la residencia estudiantil viven tres estudiantes. Estos tienen 4 tazas, 5 platillos y 6 cucharillas de té (todas las tazas, platillos y cucharillas se diferencian entre sí). ¿De cuántas maneras pueden servir una mesa para tomar el té (cada uno obtiene una taza, un platillo y una cucharilla)?

78.

El marido tiene 12 conocidos, 5 mujeres y 7 hombres, y la esposa, 7 mujeres y 5 hombres. ¿De cuántas formas se puede formar un grupo de 6 hombres y 6 mujeres, de modo que 6 personas sean invitadas por el marido y 6 por la esposa?

79.

A cada costado del bote hay sentadas 4 personas. ¿De cuántas maneras se puede escoger un equipo para este bote, si hay 31 candidatos, y además 10 quieren sentarse en el costado izquierdo de éste, 12, en el derecho, y a 9 les es igual dónde sentarse?

80.

En una urna hay fichas con los números 1, 2, 3, . . ., 10. De ella se sacan 3 fichas. ¿En cuántos casos la suma de los números escritos en ellas será igual a 9? ¿Y no menor que 9?

81.

¿De cuántas formas se pueden escoger 6 cartas de una baraja de 52, de manera que entre ellas haya de cada uno de los cuatro palos?

82.

Un coro está formado por 10 participantes. ¿De cuántos modos se pueden escoger 6 participantes durante tres días, de forma que cada día el coro tenga distinta composición?

83.

Una persona tiene 6 amigos y durante 20 días invita a su casa a 3 de ellos, de modo que el grupo no se repite ni una sola vez. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

84.

Tres muchachos y dos muchachas escogen lugar de trabajo. En la ciudad hay tres fábricas en las que son necesarios obreros en los talleres de fundición (donde se admiten solamente hombres), dos fábricas de tejidos (en las que se aceptan sólo mujeres) y dos fábricas en las que se necesitan hombres y mujeres. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir entre estas fábricas?

85.

¿Cuántas palabras que contengan cinco letras cada una se pueden formar con 33 letras, si se admiten repeticiones, pero no puede haber dos letras vecinas que coincidan, es decir, si palabras tales como «llama» o «perro» no se admiten?

86.

Para los premios de una olimpíada matemática se prepararon 3 ejemplares de un libro, 2 de otro y 1 de un tercero. ¿De cuántos modos se pueden entregar los premios, si en la olimpíada participaron 20 personas y a nadie se le otorgan dos libros de golpe? El mismo problema, pero considerando que a nadie se le otorgan dos ejemplares de un mismo libro, pero se le pueden entregar dos o tres libros diferentes.

87.

Se toma un dominó desde el (0, 0) hasta el (n, n). Mostrar que el número de dominós con suma de tantos $n - r$ es igual al número de éstos con suma de puntos $n + r$, y que dicho número es igual a $\frac{1}{4}(2n - 2r + 3)$. Hallar el número total de todos los dominós.

88. ¿De cuántas formas se pueden sentar alrededor de una mesa redonda 7 hombres y 7 mujeres, de manera que no haya 2 mujeres juntas?

89.

¿De cuántos modos se pueden escoger de entre 16 caballos seis para enganchar, de forma que figuren tres caballos del sexteto $ABCA'B'C'$, pero que no haya ningún par AA', BB', CC'?

90.

¿De cuántas maneras se pueden formar palabras a partir de 9 consonantes y 7 vocales, en las que figuren 4 consonantes distintas y 3 vocales diferentes? ¿En cuántas de estas palabras no habrá dos consonantes juntas?

91.

En una sección de un instituto de investigación científica trabajan varias personas, y cada una de ellas conoce por lo menos una lengua extranjera. Seis saben inglés; seis, alemán; siete, francés. Cuatro saben inglés y alemán; tres, alemán y francés; dos, francés e inglés. Una persona sabe los tres idiomas. ¿Cuántas personas trabajan en la sección? ¿Cuántas de ellas saben solamente inglés? ¿Y solamente francés?

92.

A un paseo a las afueras de la ciudad fueron 92 personas. 47 de ellas llevaron sandwiches de fiambre; 38, de queso; 42, de jamón; 28, de queso y fiambre; 31, de fiambre y jamón; 26, de queso y jamón. 25 personas llevaron los tres tipos de sandwiches, y varias llevaron empanadas en lugar de sandwiches. ¿Cuántas personas llevaron empanadas?

93.

Un grupo formado por 10 parejas de casados se divide en 5 grupos de a 4 personas para un paseo en bote. ¿De cuántas formas se las puede dividir, de manera que en cada bote haya dos hombres y dos mujeres?

94.

¿En cuántos casos un hombre dado quedará en el mismo bote que su esposa?

95.

¿En cuántos casos dos hombres dados quedarán en un solo bote junto con sus mujeres?

96.

¿Cuántos números distintos de cuatro cifras se pueden formar a partir de las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, si cada una de ellas puede repetirse varias veces?

97.

Hallar la cantidad de números de seis cifras, tales que la suma del número formado por las tres primeras cifras, de éstas seis, y del formado por las tres últimas, sea menor que 1000.

98.

¿De cuántos modos se pueden disponer 12 fichas blancas y 12 negras en las casillas negras de un tablero de ajedrez?

99.

¿De cuántas formas se pueden permutar las letras de la palabra «olivar», de manera que las vocales vayan en orden alfabético?

100.

¿De cuántas formas se pueden permutar las letras de la palabra «Maracaná», de modo que las cuatro «a» no vayan juntas?

101.

¿De cuántas maneras se pueden permutar las letras de la palabra «engorro», de forma que la letra «g» vaya inmediatamente después de una «o»?

102.

¿De cuántas maneras se pueden permutar las letras de la palabra «cloroformo», de modo que no haya dos «o» juntas?

103.

¿De cuántas formas se pueden permutar las letras de la palabra «cerámica», de manera que no haya dos vocales juntas?

104.

¿De cuántas formas se pueden permutar las letras de la palabra «Carelia», de modo que no cambie el orden de las vocales?

105.

¿De cuántas formas se pueden permutar las letras de la palabra «parallelism»[1], de modo que no cambie el orden de las vocales?

106.

¿De cuántas maneras se pueden permutar las letras de la palabra «pastor», de forma que entre las dos vocales haya dos consonantes?

107.

¿De cuantas maneras se pueden permutar las letras de la palabra «logarifm»[2], de modo que el segundo, cuarto y sexto lugares estén ocupados por consonantes?

108.

¿De cuántas maneras se pueden escoger de la palabra «logarifm» dos consonantes y una vocal? El mismo problema, pero si entre las letras escogidas debe hallarse la «f».

109.

¿De cuántos modos se pueden permutar las letras de la palabra «coloso», de forma que las tres «o» no estén juntas?

110.

El mismo problema, pero se prohibe que haya dos «o» juntas.

111.

¿De cuántos modos diferentes se pueden escoger letras de la frase «Oko za oko, zub za zub»[3]? El orden de las letras no se tiene en cuenta.

112.

¿De cuántas maneras se pueden escoger tres letras de esta frase?

113.

¿De cuántas formas se pueden escoger tres letras de esta frase, si se tiene en cuenta el orden de las letras escogidas?

---

[1] Se da la forma rusa de la palabra «paralelismo» (N. de la Ed.).
[2] Lo mismo con la palabra «logaritmo».
[3] Ojo por ojo, diente por diente.

114.

¿De cuántas maneras se pueden permutar las letras de la palabra «lectura», de modo que tanto las vocales como las consonantes estén en orden alfabético?

115.

¿De cuántas formas se pueden permutar las letras de la palabra «espirales», de modo que se alternen las vocales y las consonantes? Lo mismo, pero para la palabra «samovar».

116.

¿De cuántas maneras se pueden permutar las letras de la palabra «Abacán», si las consonantes deben estar en orden alfabético? Lo mismo, pero con la condición complementaria de que no haya dos «a» juntas.

117.

¿De cuántos modos se pueden permutar las letras de la palabra «tic-tac», si dos letras iguales no pueden ir una a continuación de la otra? Lo mismo, pero para la palabra «tam-tam».

118.

¿De cuántas formas se pueden escoger 4 letras de la palabra «tam-tam», si no se considera el orden de las letras elegidas? ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden escribir a partir de las cifras del número 132 132?

119.

¿Cuántos números enteros no negativos, menores que un millón, contienen a todas las cifras 1, 2, 3, 4? ¿Cuántos están formados solamente por estas cifras?

120.

Hallar la suma de los números de cuatro cifras que se obtienen al permutar de todas las formas posibles las cifras 1, 2, 3, 4.

121.

Lo mismo para las cifras 1, 2, 2, 5.

122.

Lo mismo para las cifras 1, 3, 3, 3.

123.

Lo mismo para las cifras 1, 1, 4, 4.

124.

Lo mismo para todos los números de cinco cifras que se pueden obtener permutando las cifras 0, 1, 2, 3, 4. La cifra 0 no debe hallarse en el primer lugar.

125.

¿Cuántos números menores que un millón se pueden escribir mediante las cifras 8 y 9.

126.

Lo mismo, pero mediante las cifras 9, 8, 7.

127.

Lo mismo, pero mediante las cifras 9, 8, 0 (no se admiten escrituras que comiencen con cero).

128.

Hallar la suma de todos los números de tres cifras que pueden escribirse mediante las cifras 1, 2, 3, 4.

129.

Hallar la suma de todos los números posibles de cinco cifras que se pueden escribir mediante las cifras 1, 2, 3, 4, 5, y en los cuales cada cifra se repite una vez, y una sola? El mismo problema, pero para los números de cinco cifras que pueden ser escritos con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

130.

¿Cuántos números impares pueden formarse a partir de las cifras del número 3694 (cada cifra puede ser utilizada no más de una vez)? ¿Y números pares?

131.

¿Cuántos números de seis cifras existen, para los cuales tres cifras son pares y tres, impares?

132.

El mismo problema, si se admiten también números «de seis cifras» que comiencen a partir de cero.

133.

¿Cuántos números de seis cifras existen, en los cuales la suma de las cifras es par (se supone que la primera es diferente de cero)? El mismo problema, si se toman todos los números del 1 al 999 999.

134.

¿Cuántos números de diez cifras existen, en los cuales la suma de éstas es igual a tres (se supone que la primera es diferente de cero)? El mismo problema, pero se toman todos los números del 1 al 9 999 999 999.

135.

¿Cuántos números de nueve cifras existen, para los cuales todas las cifras son diferentes?

136.

¿Cuántos números enteros existen del 0 al 999, que no se dividan ni por 5 ni por 7?

137.

¿Cuántos números enteros existen del 0 al 999, que no se dividan por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7?

138.

¿En cuántos números del 0 al 999 figura la cifra 9? ¿En cuántos ésta figura dos veces? ¿En cuántos figura la cifra 0? ¿En cuántos ésta figura dos veces? ¿En cuántos figuran las cifras 0 y 9? ¿Y las cifras 8 y 9? ¿Cuántos números hay del 0 al 999 999 en los que no figuren dos cifras iguales juntas?

139.

¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar a partir de las cifras del número 123 153?

140.

¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar a partir de las cifras del número 12 335 233?

141.

¿Cuántos números de seis cifras se pueden escribir a partir de las cifras del número 1 233 145 254, de forma que no haya dos cifras iguales juntas?

142.

¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar a partir de las cifras del número 12 312 343, de manera que las tres cifras 3 no vayan juntas?

143.

¿De cuántos modos se pueden permutar las cifras del número 12 341 234, de forma que no haya dos cifras iguales juntas?

144.

El mismo problema para el número 12 345 254.

145.

¿De cuántas maneras se pueden permutar las cifras del número 1 234 114 546, de forma que no haya tres cifras iguales juntas?

146.

¿De cuántos modos se puede hacer esto, de manera que no haya dos cifras iguales juntas?

147.

¿De cuántas formas se pueden escoger de los números naturales del 1 al 20 dos, de modo que su suma sea impar?

148.

¿De cuántas maneras se pueden escoger de los números naturales del 1 al 30 tres, de forma que su suma sea par?

149.

Desde Londres hasta Brighton conducen dos carreteras, unidas por 10 caminos vecinales

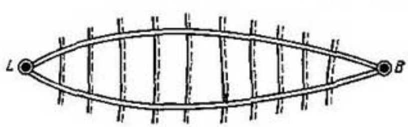

Fig. 34.

(fig. 34). ¿De cuántos modos se puede viajar desde Londres hasta Brighton, de forma que el camino no se corte a sí mismo?

150.

Supongamos que, en las mismas condiciones, dos viajeros parten desde Londres por carreteras diferentes. ¿De cuántas maneras puede tener lugar el recorrido de forma que éstos no pasen por ningún segmento de carretera en un mismo sentido?

151.

De Londres a Cambridge conducen 3 carreteras, que son cruzadas por 4 caminos vecinales (fig. 35). ¿De cuántas formas se puede efectuar el viaje,

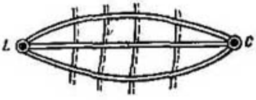

Fig. 35.

si no se viaja en dirección a Londres por ningún segmento de carretera, y ningún segmento es recorrido dos veces?

152.

Hay una cantidad ilimitada de monedas por valor de 10, 15 y 20 kopeks. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 20 monedas?

153.

Hay que adivinar qué cinco monedas tiene en sus manos el contrincante. Las monedas pueden ser por valor de 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 kopeks y 1 rublo. ¿Cuántas respuestas incorrectas se pueden dar?

154.

¿Cuántos números de cinco cifras hay? ¿En cuántos de ellos todas las cifras son pares? ¿En cuántos son todas impares¿En cuántos no figuran cifras menores que 6? ¿En cuántos no hay cifras mayores que 3? ¿Cuántos de ellos contienen a todas las cifras 1, 2, 3, 4, 5? ¿Cuántos contienen a todas las cifras 0, 2, 4, 6, 8?

155.

Los lados de cada uno de dos dados están marcados con los números 0, 1, 3, 7, 15, 31. ¿Cuántas sumas diferentes pueden ser obtenidas al echar estos dados?

156.

Los lados de cada uno de tres dados están marcados con los números 1, 4, 13, 40, 121, 364. ¿Cuántas sumas distintas se pueden obtener al tirarlos?

157.

Se tiran seis dados, marcados con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. ¿En cuántos casos éstos darán un solo tipo de puntos? ¿Y dos tipos? ¿Y tres? ¿Y cuatro? ¿Y cinco? ¿Y seis? (Todos los dados se consideran diferentes entre sí.)

158.

Se echan n dados. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse (los que se diferencian sólo en el orden de los puntos se consideran iguales; en cada dado están marcados los números 1, 2, 3, 4, 5, 6)?

159.

¿De cuántas maneras diferentes se puede representar el número 1 000 000, en forma de producto de tres factores? Las representaciones que se diferencien en el orden de los factores se considerarán distintas.

160.

El mismo problema, pero con la condición de que el orden de los factores no se tiene en cuenta.

161.

¿De cuántas formas se pueden distribuir nueve monedas de distinto valor en dos bolsillos?

162.

¿De cuántos modos se pueden distribuir $3n$ objetos diferentes entre tres personas, de forma que cada uno obtenga n objetos?

163.

Se dan $2n$ elementos. Se consideran todas las particiones posibles en pares, y las que se diferencian entre sí sólo en el orden de los elementos dentro del par y en el orden de ubicación de los pares, se consideran coincidentes. ¿Cuántas particiones distintas de este tipo existen?

164.

El mismo problema, pero se dividen nk elementos en n grupos de k elementos cada uno.

165.

¿De cuántas maneras se pueden dividir 30 obreros en 3 brigadas de 10 personas cada una? ¿Y en 10 grupos de 3 personas cada uno?

166.

¿De cuántas formas se puede dividir una baraja de 36 cartas en dos mitades, de modo que haya dos ases en cada uno de los montones resultantes.

167.

¿De cuántos modos se pueden distribuir 10 libros en 5 encomiendas de 2 libros cada una (el orden de éstas no se tiene en cuenta)?

168.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 9 libros en 4 encomiendas de 2 libros y en una de 1 libro?

169.

El mismo problema, si hay que hacer 3 encomiendas con 3 libros cada una.

170.

¿De cuántas formas 3 personas pueden repartir entre sí 6 manzanas iguales, 1 naranja, 1 ciruela, 1 limón, 1 pera, 1 membrillo y 1 dátil?

171.

¿De cuántos modos se puede efectuar este reparto, de forma que cada uno obtenga 4 frutos?

172.

Las personas A, B y C tienen 3 manzanas cada una y, además, A tiene 1 pera, 1 ciruela y 1 membrillo, B tiene 1 naranja, 1 limón y 1 dátil, y C tiene 1 mandarina, 1 damasco y 1 durazno. ¿De cuántas maneras pueden distribuir entre sí estas frutas, de modo que cada uno obtenga 6 unidades?

173.

¿De cuántas formas se puede repartir una baraja de 52 cartas entre 13 jugadores, dando 4 a cada uno? El mismo problema, pero con la condición de que cada uno obtenga una carta de cada palo. El mismo problema, pero con la condición de que uno tiene cartas de los cuatro palos, y todos los restantes, cartas de un mismo palo.

174.

¿De cuántas maneras se pueden extraer 4 cartas de una baraja completa, de forma que haya 3 palos? ¿Y de modo que haya 2 palos?

175.

¿De cuántas maneras se pueden repartir 52 cartas entre cuatro jugadores, de forma que cada uno obtenga tres cartas de tres palos y cuatro del cuarto palo?

176.

¿De cuántas formas se pueden repartir 18 objetos diferentes entre 5 participantes, de modo que cuatro de ellos obtengan 4 objetos cada uno, y el quinto, 2?. El mismo problema, pero ahora tres obtienen 4 objetos cada uno, y dos, 3.

177.

Se tienen 14 pares de objetos distintos. Hallar el número total de elecciones que se pueden efectuar a partir de éstos (dos elecciones se diferencian entre sí por la composición, pero no por el orden de los objetos).

178.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 4 esferas negras, 4 blancas y 4 azules en 6 paquetes diferentes (algunos de ellos pueden estar vacíos)?

179. ¿De cuántos modos se pueden distribuir 3 rublos y 10 monedas de 50 kopeks en 4 paquetes distintos?

180.

Demostrar que la cantidad de particiones del número n en varios sumandos es igual a la de particiones del número $2n$ en n sumandos (el orden de éstos no se tiene en cuenta).

181.

Se han dispuesto n objetos en fila. ¿De cuántos modos se pueden escoger tres de ellos, si no se toman dos elementos vecinos?

182.

Un niño coloca en las dos primeras líneas del tablero de ajedrez figuras blancas y negras (de a dos caballos, dos torres, dos alfiles, la reina y el rey de cada color). ¿De cuántas maneras lo puede efectuar?

183.

¿De cuántas formas se pueden distribuir estas figuras en *todo* el tablero?

184.

Resuélvase el mismo problema si se colocan además todos los peones (8 de cada color).

185.

¿De cuántas formas se pueden colocar 15 fichas blancas y 15 negras en 24 casillas, de manera que en cada una haya sólo fichas blancas o sólo negras? (Así se distribuyen las fichas en el juego oriental llamado «nardy»).

186.

¿De cuántos modos se pueden distribuir 20 fichas blancas en el tablero de ajedrez, de forma que cada disposición se transforme en sí misma al girar el tablero 90°?

187.

¿De cuántas maneras se pueden disponer 20 fichas blancas en el tablero de ajedrez, de forma que cada disposición sea simétrica con respecto a la línea que divide el tablero a la mitad?

188.

Lo mismo, pero con la condición de que las fichas se coloquen en las casillas negras.

189.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 fichas blancas y 12 negras en las casillas negras de un tablero de ajedrez, de forma que cada posición sea simétrica con respecto al centro del tablero?

190.

Lo mismo, pero en la simetría deben cambiar los colores de las fichas.

191.

¿De cuántos modos se pueden colocar 20 fichas blancas en las casillas del borde de un tablero de ajedrez, de forma que cada distribución no varíe al girar el tablero 90°?

192.

¿De cuántas maneras se pueden colocar 20 fichas blancas en las casillas de los bordes de un tablero de ajedrez, de forma que en los lados opuestos del tablero las fichas se dispongan simétricamente con respecto a la línea que divide el tablero por la mitad?

193.

¿De cuántos modos se pueden distribuir en 9 hoyos 7 esferas blancas y 2 negras? Una parte de los hoyos puede estar vacía, y éstos se consideran diferentes.

194.

¿De cuántas formas se pueden distribuir en 9 hoyos 7 esferas blancas, 1 negra y 1 roja?

195.

¿De cuántas formas se pueden repartir 27 libros entre las personas A, B, y C, de modo que A y B juntas obtengan el doble de libros que C?

196

A un ascensor subieron 8 personas. ¿De cuántas maneras pueden bajarse en cuatro pisos, de modo que en cada piso salga por lo menos una persona?

197.

¿De cuántas formas se pueden escoger de los números del 1 al 100 tres, de modo que su suma se divida por 3?

198.

¿De cuántas maneras se pueden escoger de $3n$ números enteros sucesivos tres, tales que su suma se divida por 3?

199.

Se tienen n esferas blancas y una negra. ¿De cuántas formas se pueden colocar algunas de estas esferas en $n + 1$ hoyos, si en cada uno cabe no más de una esfera?

200.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir m esferas blancas y n negras, de modo que entre las esferas blancas y las negras haya $2r - 1$ contactos? ¿Y $2r$ contactos?

201.

¿De cuántas formas se pueden obtener 8 calificaciones no menores que 3 en distintas disciplinas, de modo que su suma sea igual a 30?

202.

Demostrar que $m + n$ objetos se pueden permutar, de modo que exactamente n queden en su lugar, de $\frac{(m+n)!\, D_m}{m!\, n!}$ maneras (véase la pág. 47).

203.

Demostrar que r cosas diferentes se pueden distribuir entre $n+p$ personas, de modo que n dadas obtengan por lo menos un objeto, de

$$S_r=(n+p)^r-n(n+p-1)^r+C_2^n(n+p-2)^r-\dots$$
$$\dots+(-1)^n p^r$$

formas.

204.

Demostrar que la cantidad de particiones del número $2r+x$ en $r+x$ sumandos diferentes de cero es la misma que la de descomposiciones de r en sumandos no negativos.

205.

Una sociedad con n miembros escoge entre ellos un representante. ¿De cuántas maneras puede tener lugar la votación, si cada uno vota por una persona (puede ser que por sí mismo)? El mismo problema, pero se tiene en cuenta sólo el número de votos que obtuvo cada candidato, y no quién votó por él.

206.

Demostrar que el número de formas de dividir $2n$ objetos indistinguibles en tres partes indiferenciables, de modo que la suma de dos cualesquiera sea mayor que la tercera, es igual al número de maneras de dividir de la misma forma $2n-3$ objetos.

207.

Demostrar que un número impar de objetos puede ser escogido de n objetos de 2^{n-1} maneras.

208.

Demostrar que el número de formas con que dos personas pueden repartir entre sí $2n$ objetos de un tipo, $2n$ de otro y $2n$ de un tercero, de modo que cada uno obtenga $3n$ objetos, es igual a $3n^2+3n+1$.

209.

Si se agregan $2n$ objetos de un cuarto tipo, el número de formas de reparto, en las que cada persona obtiene $4n$ objetos, es igual a

$$\frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3).$$

210.

Si los objetos se dividen en partes indiferenciables, las respuestas serán

$$\frac{1}{2}(3n^2+3n+2) \text{ y } \frac{1}{3}(n+1)(8n^2+4n+3).$$

211.

Demostrar que si se tienen m tipos de objetos, con $2n$ objetos cada tipo, el número de maneras de dividirlos en dos partes iguales se expresa mediante la fórmula

$$C_{m-1}^{mn+m-1}-C_1^m C_{m-1}^{mn+m-2n-2}+$$
$$+C_2^m C_{m-1}^{mn+m-4n-3}\mp\dots$$
$$\dots\pm C_x^m C_{m-1}^{mn+m-1-x(2n+1)}\mp\dots$$

212.

¿De cuántas formas se pueden colocar cinco esferas blancas, cinco negras y cinco rojas en tres cajones diferentes, poniendo cinco esferas en cada cajón?

213.

Si hay tres tipos de objetos, habiendo n de cada tipo, se pueden distribuir entre tres personas A, B, C, de modo que cada una obtenga n objetos, de

$$C_2^{n+2}C_2^{n+2}-3C_4^{n+3}=\frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3x+4)$$

maneras.

214.

¿De cuántas formas se pueden sentar juntos 3 ingleses, 3 franceses y 3 turcos, de modo que no haya tres compatriotas juntos?

215.

El mismo problema, pero con la condición de que no haya dos compatriotas juntos.

216.

¿De cuántas maneras se pueden sentar a una mesa redonda 3 ingleses, 3 franceses y 3 turcos, de modo que no haya dos compatriotas juntos?

217.

¿De cuántas formas se pueden pegar estampillas a suma de 40 kopeks, utilizando estampillas por valor de 5, 10, 15, y 20 k., situadas en una fila? (Las disposiciones que se diferencian en el orden de las estampillas se consideran distintas; el número de estampillas es ilimitado.)

218.

¿De cuántas maneras se puede cambiar un rublo en monedas por valor de 10, 15, 20 y 50 k.?

219.

¿De cuántos modos se pueden obtener 78 g, utilizando 8 pesas de 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20 y 50 g? Aquí se considera que la utilización de dos pesas distintas, aunque sean de un mismo peso, conduce a combinaciones diferentes.

220.

Hay seis esferas: 3 negras, 1 roja, 1 blanca y 1 azul. ¿De cuántas formas se puede formar con ellas una fila que contenga 4 esferas?

221.

¿De cuántas maneras se puede representar el número natural n en forma de suma de tres términos, cada uno de los cuales sea también un número natural (las representaciones que se diferencien en el orden de los sumandos se considerarán distintas)?

222.

¿Cuántas y qué cifras serán necesarias para escribir todos los números del 1 al 999 999 inclusive? ¿Y del 1 al $10^n - 1$ inclusive?

223.

¿Cuántos números diferentes de diez cifras se pueden escribir utilizando las tres cifras 1, 2, 3, con la condición complementaria de que la cifra 3 se utilice en cada número exactamente dos veces? ¿Cuántos de los números escritos se dividen por 9?

224.

Diremos que dos números, que figuran en un arreglo, forman una inversión, si el mayor de ellos está escrito antes que el menor. ¿Cuántas inversiones hay en todas las permutaciones de los números $1, 2, \ldots, n$?

225.

Demostrar que el número de particiones de n en 3 partes tales que no haya dos iguales, es igual a

$$E\left[\frac{1}{12}(n^2-6n+12)\right].$$

226.

Demostrar que el número de particiones de $12n+5$ en 4 partes, tales que ninguna de ellas supere a $6n+2$, es igual a

$$\frac{1}{2}(n+1)(12n^2+9n+2).$$

227.

Demostrar que el número de particiones de $12n+5$ en 4 partes, en las que ninguna supera a $6n+2$ y no hay dos iguales, es

$$\frac{n}{2}(12n^2+3n-1).$$

228.

Hallar la cantidad de ternas de números naturales que formen progresión geométrica y no superen a 100.

229.

¿De cuántas maneras se pueden disponer en fila 6 ingleses, 7 franceses y 10 turcos, de modo que cada inglés esté entre un francés y un turco y que no haya ningún francés junto a un turco?

230.

Lo mismo, pero para 5 ingleses, 7 franceses y 10 turcos.

231.

¿Cuántas soluciones tiene el problema siguiente: hallar dos números tales que su máximo común divisor sea igual a G, y su mínimo común múltiplo, a $M = Ga^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$ (a, b, c y d son números primos)?

232.

Resolver el mismo problema, pero sin las palabras «mínimo» y «máximo».

233.

¿Cuántas combinaciones se pueden formar de 20 letras, tomadas de a 6, de modo que en cada una no haya ninguna letra que figure más de dos veces?

234.

Hay $p+q+r$ letras: p letras α, q letras β y r letras γ. Estas se permutan de todas las maneras posibles, de forma que las α comiencen antes que las β, y las β, antes que las γ. ¿De cuántos modos es posible esta permutación?

235.

Una línea de 30 cm se pinta en el orden siguiente: rojo, blanco, azul, rojo, blanco, azul, etc. Se comienza por el color rojo, y se termina en el azul. Cada color ocupa en total 10 cm, las franjas no son menores que 2 cm, siendo las longitudes de éstas números enteros. ¿Cuántas maneras posibles hay de pintarla? ¿Y si se quita la condición de que todo culmina en el azul? Demostrar que si ninguna franja es menor de 3 cm, en 153 casos el último será el color azul, en 71, el blanco, y en 81, el rojo.

236.

Tengo 6 amigos, con cada uno de los cuales he almorzado 8 veces; con cada dos, 5 veces; con cada tres, 4 veces; con cada cuatro, 3 veces; con cada cinco, 2 veces; con todos los seis, 1 vez, y sin cada uno de ellos, 8 veces ¿Cuántas veces he almorzado solo?

237.

Dos examinadores, trabajando a un tiempo, examinan un grupo de 12 personas en dos disciplinas. Cada examinado responde durante 5 minutos a cada disciplina. ¿De cuántas formas pueden distribuir los examinadores entre sí el trabajo, de modo que a ningún escolar le toque responder las dos disciplinas a la vez?

238.

¿De cuántas maneras 6 personas pueden escoger de 6 pares de guantes uno derecho y uno izquierdo, de modo que ninguno obtenga un par? Lo mismo para 9 pares y 6 personas.

239.

Las letras que figuran en la expresión $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ se permutan de todas las maneras posibles, en las que junto a cada letra (a su izquierda o a su derecha) se halle la misma letra. Demostrar que el número de estas permutaciones es igual a 6. Para $\alpha^3\beta^3\gamma^3$ es también 6. Para $\alpha^4\beta^4\gamma^4$, 90, y para $\alpha^5\beta^5\gamma^5$, 426.

240.

En una olimpíada de ajedrez participan representantes de n países, de a 4 representantes de cada país. ¿De cuántas formas se pueden colocar en fila, de modo que al lado de cado uno se halle un representante del mismo país?

241.

Las casillas de un tablero de ajedrez se pintan de 8 colores, de modo que en cada fila horizontal se encuentren los 8 colores, y en cada vertical no se encuentren dos casillas juntas pintadas del mismo color. ¿De cuántas maneras es posible este pintado?

242.

Hay n cosas iguales, y otras n diferentes. ¿De cuántas formas se pueden escoger n cosas de entre ellas? ¿De cuántas se pueden ordenar todas las $2n$ cosas?

243.

m franceses y n ingleses están parados en fila, de modo que al lado de cada uno se halla por lo menos uno de sus compatriotas. Mostrar que el número de disposiciones posibles de este tipo es igual a

$$m!\,n!\,[1+(C_0^{m-2}+C_1^{m-3})(C_0^{n-2}+C_1^{n-3})+$$
$$+(C_1^{m-3}+C_2^{m-4})(C_1^{n-3}+C_2^{n-4})+$$
$$+(C_2^{m-4}+C_3^{m-5})(C_2^{n-4}+C_3^{n-5})+\ldots].$$

244.

¿Cuántos números de seis cifras contienen exactamente tres cifras diferentes?

245.

¿Cuántos números de m cifras contienen exactamente k cifras distintas?

246.

Se analizan todos los k-arreglos de los números 1, 2, . . ., n, en los cuales los números pares se hallan en los lugares con números pares, y los impares, en los que tienen números impares. ¿Cuántos de estos arreglos están dispuestos en orden creciente de los números (por ejemplo, tienen la forma 3678)?

247.

Se dan $2n$ elementos $a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, a_n$, siendo $a_i \neq a_j$, si $i \neq j$. ¿En cuántas permutaciones de estos $2n$ elementos ningún par de elementos iguales estará junto?

248.

Se dan n conjuntos, en cada uno de los cuales figuran q elementos iguales, siendo los elementos de distintos conjuntos diferentes. ¿En cuántas permutaciones de estos nq elementos no habrá elementos iguales juntos?

249.

Resolver el mismo problema, con la condición de que los elementos se disponen en círculo.

250.

En un estante de biblioteca hay n libros. ¿De cuántas formas se pueden escoger p de éstos, de modo que entre dos cualesquiera de los escogidos, al igual que después del p-ésimo tomado, haya no menos de s libros?

251.

Los números que expresan la cantidad de participantes de una olimpíada matemática de las clases 5, 6, 7, 8, 9 y 10, forman una progresión aritmética. El número de premios para cada clase es igual a la razón de esta progresión. Demostrar que el número de maneras de entregar los premios no varía si se entregan todos a los alumnos de la 10-ma clase (se supone que todos los premios son distintos).

252.

En un papel cuadriculado se ha dibujado un cuadrado $ABCD$ de lado igual a 4 casillas, después de lo cual se han trazado todos los caminos más cortos desde el vértice A al C, que pasan por los lados de las casillas. Demostrar que el número de caminos es igual a 70, pasando 35 caminos por 4 segmentos; 20 caminos por 8; 18 por 4; 15 por 4; 12 por 4; 10 por 4; 5 por 4; 4 por 4; 1 por 4.
Estudiar análogamente los cruces: 1 es pasado 36 veces; 4, 35 veces; 4, 30 veces; 4, 15 veces; 4, 5 veces; 4, 40 veces; 2, 1 vez (los puntos extremos se excluyen).

253.

¿Cuántos triángulos existen, cuyos vértices sean vértices de un hexágono convexo dado?

254.

¿Cuántos triángulos existen, cuyas longitudes de los lados adquieran uno de los valores 4, 5, 6, 7?

255.

¿Cuántos paralelepípedos rectángulos distintos se pueden construir, para los cuales la longutud de cada arista sea un entero del 1 al 10?

256.

En el plano se han trazado 4 rectas, entre las cuales no hay dos paralelas y no hay 3 que pasen por un mismo punto. ¿Cuántos triángulos se obtuvieron?

257.

En el plano se han fijado n puntos, de los cuales p se hallan en una misma recta y, a excepción de éstos, no hay 3 puntos sobre una misma recta. ¿Cuántos triángulos existen, cuyos vértices sean estos puntos?

258.

En una recta se han tomado p puntos, y en una paralela a ella, otros q puntos. ¿Cuántos triángulos existen, cuyos vértices sean estos puntos?

259.

Supongamos que, en las mismas condiciones, en una paralela más se han tomado r puntos, y no hay tres que se hallen sobre una misma recta que corte las tres paralelas. ¿Cuántos triángulos complementarios se obtendrán?

260.

Cada lado de un cuadrado se ha dividido en n partes. ¿Cuántos triángulos se pueden construir, cuyos vértices sean los puntos de división?

261.

En el plano se han trazado n líneas rectas, entre las cuales no hay dos paralelas ni tres que se corten en un mismo punto. ¿Cuántos puntos de intersección tienen estas rectas?

262.

En el plano se han trazado n rectas, de las cuales p pasan por el punto A y q por el B y, además, no hay tres que pasen por un mismo punto, ninguna que pasa por ambos puntos A y B, y ningún par de paralelas. ¿Cuántos puntos de intersección tienen estas rectas?

263.

¿En cuántas partes dividen al plano n rectas, entre las cuales no hay dos paralelas ni tres que pasen por un mismo punto?

264.

¿En cuántas partes dividen al espacio n planos, entre los cuales no hay 4 que pasen por un mismo punto, ni 3 que pasen por una misma recta, ni 2 paralelos?

265.

En el plano se han tomado cinco puntos. Entre las rectas que los unen no hay paralelas, perpendiculares ni coincidentes. Tracemos por cada punto las perpendiculares a todas las rectas que se pueden formar uniendo de a pares los cuatro puntos restantes. ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección de estas perpendiculares entre sí, si no se consideran los cinco puntos dados?

266.

¿De cuántas maneras se pueden formar triángulos, cuyos lados sean enteros mayores que n y que no superen $2n$? ¿Cuántos de ellos son isósceles, y cuántos equiláteros?

267.

Demostrar que el número de triángulos de lados enteros, cuya longitud no supere $2n$, es igual a $\frac{1}{6} n (n+1)(4n+5)$. Si se excluyen los isósceles, este número será igual a $\frac{1}{6} n (n-1)(4n-5)$.

268.

Demostrar que el número de triángulos cuya longitud de los lados[1] no supere a $2n-1$, es igual a $\frac{1}{6} n (n+1)(4n-1)$, y después de excluir a los isósceles quedan $\frac{1}{6} (n-1)(n-2)(4n-3)$ triángulos.

269.

En el plano se han trazado n rectas, entre las cuales no hay tres que pasen por un mismo punto. Demostrar que el número de grupos no ordenados de n puntos de intersección cada uno, de los cuales no haya tres sobre una misma recta, es igual a $\frac{1}{2} (n-1)!$.

270.

Hay n puntos en el plano, entre los cuales no hay tres sobre una misma recta. ¿Cuántas quebradas cerradas de r segmentos existen, con vértices en estos puntos?

271.

Sobre una recta se han tomado n puntos, y sobre una paralela a ella, m. Estos puntos se unen mediante rectas. Demostrar que el número de puntos de intersección de las rectas trazadas es igual a $\frac{mn(m-1)(n-1)}{2}$. (Consideramos que entre las rectas trazadas no hay tres que se corten en un mismo punto, y los $m+n$ puntos dados no se tienen en cuenta.)

272.

Hay n puntos en el plano, entre los cuales no hay tres sobre una misma recta ni 4 sobre una misma circunferencia. Por cada dos de estos puntos se traza una recta, y por cada tres, una circunferencia. Hallar la mayor cantidad posible de puntos de intersección de todas estas rectas trazadas con todas las circunferencias.

273.

En el espacio se han dado n puntos, entre los cuales no hay cuatro sobre un mismo plano. Por cada tres puntos se traza un plano, y entre éstos no hay dos paralelos. Hallar el número de rectas que se obtienen en la intersección de estos planos, así como también el de rectas que no pasen por ninguno de los puntos dados.

274.

Entre n segmentos de longitud $1, 2, \ldots, n$, se escogen 4, de modo que se obtenga un cuadrilátero circunscrito. Demostrar que esto se puede efectuar de $\frac{2n(n-2)(2n-5)-3+3(-1)^n}{48}$ maneras. ¿Cuántos cuadriláteros se obtienen si se pueden tomar lados de igual longitud?

275.

Se dan n puntos, entre los cuales no hay cuatro sobre una misma circunferencia. Se traza una

[1] Aquí también se considera que los lados son enteros (N. del T.).

circunferencia por cada tres de ellos. ¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección de estas circunferencias?

276.

Demostrar que si n planos pasan por el centro de una esfera, en el caso general la dividen en no más de $n^2 - n + 2$ partes.

277.

¿De cuántas formas geométricamente distintas se pueden pintar las caras de un cubo con seis pinturas diferentes? Dos métodos se consideran geométricamente coincidentes, si se puede transformar uno en el otro moviendo el cubo como si fuese un cuerpo rígido.

278.

¿De cuántas maneras geométricamente diferentes se pueden pintar las caras de un tetraedro con cuatro pinturas distintas?

279.

¿De cuántos modos geométricamente diferentes se pueden pintar las caras de un octaedro con ocho pinturas distintas?

280.

Resolver un problema análogo para el dodecaedro e icosaedro regulares.

281

En los problemas anteriores considerar los casos en que el número de pinturas sea menor que el de caras (por ejemplo, el cubo se pinta con dos colores, con tres, cuatro, cinco).

282.

¿Cuántos triángulos existen con lados enteros y perímetro 40? ¿Y con perímetro 43?

283.

Demostrar que el número de triángulos de lados enteros y perímetro $4n + 3$ es mayor en $n + 1$ que el de triángulos de lados enteros y perímetro $4n$.

284.

Demostrar que el número de triángulos de lados enteros y perímetro N se expresa por la tabla

N	Número de triángulos	N	Número de triángulos
$12n$	$3n^2$	$12n+6$	$3n^2+3n+1$
$12n+1$	$n(3n+2)$	$12n+7$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+2$	$n(3n+1)$	$12n+8$	$(n+1)(3n+1)$
$12n+3$	$3n^2+3n+1$	$12n+9$	$3n^2+6n+3$
$12n+4$	$n(3n+2)$	$12n+10$	$(n+1)(3n+2)$
$12n+5$	$(n+1)(3n+1)$	$12n+11$	$3n^2+7n+4$

285.

La red de autobuses de una ciudad está formada de la siguiente manera:

1. De cualquier parada se puede llegar, sin hacer transbordo, a cualquier otra.
2. Para cualquier par de recorridos existe una parada, y sólo una, en la cual se puede pasar de uno de estos recorridos a otro.
3. Cada recorrido tiene exactamente n paradas.

¿Cuántos recorridos de autobús hay en la ciudad?

286.

En la ciudad hay 57 recorridos de autobús. Se conoce que

1. De cualquier parada se puede llegar a cualquier otra sin hacer transbordo.
2. Para cualquier par de recorridos existe una parada, y sólo una, en la cual se puede pasar de uno de estos recorridos al otro.
3. Cada recorrido tiene no menos de tres paradas.

¿Cuántas paradas posee cada uno de los 57 recorridos?

287.

¿Se pueden trazar en la ciudad 10 recorridos de autobús y establecer en éstos las paradas de forma que cualesquiera que sean los 8 recorridos que tomemos existirá una parada que no se encuentre en ninguno de ellos y que 9 recorridos cualesquiera pasen por todas las paradas?

288.

¿Cuál es el máximo número de esferas distintas que se pueden trazar en el espacio, de modo que sean tangentes a tres planos dados y a una esfera dada?

289.

Trancemos m rectas por cada uno de tres puntos dados, de manera que entre ellas no haya dos paralelas entre sí ni tres que se corten en un mismo punto. Hallar el número de puntos de intersección de estas rectas.

290.

En el espacio se han fijado n puntos, de los cuales m se hallan en un mismo plano P, y los demás están situados de modo que no haya cuatro sobre un mismo plano. ¿Cuántos planos se pueden trazar que contengan de a tres de los puntos dados?

291.

En el plano se dan tres puntos, A, B, C. Tracemos por el punto A m rectas, por el B, n, y por el C, p. Además, entre las rectas trazadas no debe haber tres que se corten en un mismo punto ni dos paralelas. Hallar la cantidad de triángulos cuyos vértices sean los puntos de intersección de estas rectas y no coincidan con los puntos dados A, B, C.

292.

¿Cuántos triángulos existen, cuyos vértices son vértices de un polígono convexo dado de n lados y cuyos lados no coincidan con los de esta figura?

293.

En el plano se han trazado n rectas, y en cada una de ellas se han tomado p puntos, de forma que ninguno de éstos sea punto de intersección de las rectas y no haya tres sobre una recta distinta de las dadas. Hallar el número de triángulos con vértices en estos puntos.

294.

Demostrar que el número de puntos de intersección de las diagonales de un polígono convexo de n lados, que se hallan fuera de este polígono, es igual a $\frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)$, y el de los que se hallan dentro de él, a $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ (se supone que no hay dos diagonales paralelas ni tres que se corten en un mismo punto).

295.

En una circunferencia hay n puntos. ¿Cuántos polígonos distintos existen (no forzosamente convexos) inscritos en esta circunferencia, cuyos vértices sean los puntos dados? ¿Y cuántos polígonos convexos?

296.

En el plano se han trazado m rectas paralelas. Además, en el mismo plano se han trazado n rectas no paralelas ni entre sí, ni a las que ya se han trazado antes. Ninguna recta pasa por el punto de intersección de otras dos. ¿En cuántas regiones queda dividido el plano por las rectas trazadas?

297.

Se dan 11 puntos, de los cuales hay 5 en una misma circunferencia. Además de éstos, no hay 4 que se hallen sobre una misma circunferencia. ¿Cuántas circunferencias se pueden trazar, de modo que cada una de ellas contenga por lo menos 3 puntos de los dados?

298.

En el plano se han fijado 10 rectas que se cortan dos a dos, sin que haya 3 de ellas que pasen por un mismo punto ni 4 que sean tangentes a una misma circunferencia. ¿Cuántas circunferencias se pueden trazar, cada una de las cuales sea tangente a 3 de las 10 rectas dadas?

299.

Hallar la cantidad de todos los polígonos convexos de k lados, cuyos vértices sean k de los n vértices de un polígono convexo de n lados, con la particularidad de que dos vértices vecinos del polígono de k lados deben estar separados por lo menos por s vértices del polígono de n lados.

300.

Un paralelogramo se corta por dos series de rectas paralelas a sus lados; cada serie está formada por r líneas. ¿Cuántos paralelogramos hay en la figura obtenida?

301.

¿En cuántas partes se divide un polígono convexo de n lados por sus diagonales, si no hay tres de ellas que se corten en un mismo punto dentro del polígono?

302.

Sea dada una carta con número 1, dos con número 2, tres con el 3, etc. Demostrar que el número de formas de extraer dos cartas, de modo que se obtenga como suma n, es igual a $\frac{n}{12}(n^2-1)$, o a $\frac{n}{12}(n^2-4)$, según sea impar o par n.

303.

Se tienen $3n+1$ objetos, de los cuales hay n iguales, y los demás son distintos. Demostrar que de ellos se pueden extraer n objetos de 2^{2n} maneras.

304.

Se da la sucesión de números $1, 2, 3, \ldots, 2n$. ¿De cuántas formas se pueden extraer de ésta tres números que formen una progresión aritmética? Lo mismo para la sucesión numérica $1, 2, 3, \ldots, 2n+1$.

305.

En el plano se han trazado varias curvas cerradas, cada una de las cuales corta todas las restantes por lo menos en dos puntos. Sea n_r el número de puntos, en los que se cortan r curvas. Demostrar que el número de regiones cerradas, delimitadas por arcos de estas curvas y que no contengan dentro de sí a tales arcos, es igual a

$$1+n_2+2n_3+\ldots+rn_{r+1}+\ldots$$

306.

En el plano se han trazado dos haces de rectas con centros en los puntos A y B, uno de los cuales contiene m rectas, y el otro, n. Supongamos que no hay dos rectas paralelas y ninguna que pase por ambos puntos A y B. ¿En cuántas partes dividen al plano las rectas de estos haces?

307.

¿Se puede unir cada uno de 77 teléfonos dados exactamente con otros 15?

308.

Hallar la suma de los coeficientes del polinomio que se obtiene después de abrir paréntesis en la expresión

$$(7x^3-13y^3+5z^2)^{1964}(y^3-8y^2+6y+z)^2+$$
$$+(2x^2+18y^3-21)^{1965}.$$

309.

En un cajón hay 100 bolas de distintos colores: 28 rojas, 20 verdes, 12 amarillas, 20 azules, 10 blancas y 10 negras. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que deben ser extraídas para que entre ellas haya forzosamente 15 de un mismo color?

310.

Se pueden pintar todas las caras de un cubo de blanco, o bien de negro, o bien una parte de blanco y otra de negro. ¿Cuántas formas distintas de pintado existen? (Dos cubos se consideran pintados de diferente manera, si no se los puede confundir, por más que giremos al cubo.)

311.

Resuélvase el mismo problema, con la condición de que *no* se pinten las caras, sino los vértices del cubo.

312.

Los modelos de poliedros se confeccionan de desarrollos planos. En el desarrollo las caras están unidas unas a las otras por sus aristas, y el modelo se construye doblando el desarrollo en cartulina a lo largo de las aristas. El tetraedro regular tiene dos distintos desarrollos de este tipo. ¿Cuántos tiene el cubo?

313.

Un dodecaedro regular se puede pintar de 4 colores, de modo que cualesquiera dos caras adjuntas tengan distinto color. ¿Cuántas soluciones geométricamente distintas tiene este problema?

314.

De seis aristas del tetraedro se pueden escoger cuatro que formen un cuadrilátero espacial cerrado. Este cuadrilátero contiene todos los vértices del tetraedro. Lo mismo puede hacerse con el cubo: obtendremos un octógono que contiene todos los vértices del cubo. ¿Puede ser efectuado lo mismo con el octaedro, el dodecaedro, el icosaedro? ¿Cuántas soluciones habrá para cada poliedro?

315.

En el origen de coordenadas hay una partícula. Al cabo de una unidad de tiempo, ésta se desintegra en dos, una de las cuales se desplaza en una unidad de longitud hacia la izquierda, y la otra, hacia la derecha. Este proceso se repite al cabo de cada unidad de tiempo, con la particularidad de que dos partículas que quedaron en un mismo punto se aniquilan mutuamente (de forma que, por ejemplo, al cabo de dos unidades de tiempo quedarán dos partículas). ¿Cuántas partículas habrá al cabo de 129 unidades de tiempo? ¿Y al cabo de n unidades?

316.

Cierto alfabeto está formado por seis letras, las cuales han sido codificadas, para transmitirlas por el telégrafo, como sigue:

·; —; ··; — —; ·—; —·

Al transmitir una palabra, no fueron hechos inetrvalos que separasen una letra de la otra, de modo que se obtuvo una cadena uniforme de puntos y rayas, formada por 12 signos. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra transmitida?

317.

¿Qué números, del 1 al 10 000 000, habrá más: aquellos en cuya escritura se encuentra la unidad, o aquellos que no la contienen en su escritura?

318.

De puntos y rayas se forman todas las «palabras» posibles, en las cuales figuran exactamente siete símbolos. ¿Cuál es el mayor número de palabras que se pueden formar, de modo que dos de ellas se diferencien por lo menos en tres signos?

319.

¿De cuántas formas se puede pintar con n colores una circunferencia dividida en p partes (p es primo)? Las formas que coinciden en un giro de la circunferencia alrededor de su centro se consideran coincidentes.

320.

En una hoja de papel cuadriculado de $n \times n$ cuadrículas, se han dispuesto los números 1, 2, 3, . . ., n^2, de a uno en cada cuadrícula, de modo que los números de cada vertical y horizontal formen una progresión aritmética. Hallar la cantidad de tales disposiciones.

321.

El hombre no tiene más de 300 000 pelos en su cabeza. Demostrar que en Moscú viven no menos de 10 personas con igual número de pelos (la población de Moscú es alrededor de 7 millones de personas).

322.

Se dan $2n + 1$ objetos. Demostrar que entre ellos se puede escoger un número impar de objetos mediante la misma cantidad de formas que un número par de ellos.

323.

Demostrar que 1 rublo se puede cambiar en monedas de 2 y 5 kopeks mediante un número mayor de formas que en monedas de 3 y 5 k.

324.

¿De cuántas maneras se pueden cambiar 20 kopeks en monedas por valor de 1, 2 y 5 k.?

325.

Demostrar que mediante una colección standard de pesas: 1 mg, 2 mg, 2 mg, 5 mg, 10 mg, 20 mg, 20 mg, 50 mg, 100 mg, 200 mg, 200 mg, 500 mg. 1 g, etc., se puede formar cualquier peso, expresado mediante un número entero de miligramos,

326.

Se dan 6 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Hallar la suma de todos los números pares de cuatro cifras que se pueden escribir con estas cifras (una misma cifra puede repetirse).

327

Una baraja de $2n$ cartas se mezcla de la siguiente manera: se divide por la mitad, y las cartas de la primera mitad se distribuyen de a una entre las de la segunda (en el orden dado). Por ejemplo, la carta de número $n + 1$ será la primera; la primera será segunda; la de número $n + 2$, tercera; la segunda, cuarta, etc. Demostrar que después de r veces la carta que al principio se hallaba en el p-ésimo lugar quedará en el lugar x, siendo x el resto de la división de $p2^r$ por $2n + 1$.

328.

Demostrar que si en las condiciones del problema 327 la baraja contiene $6m + 2$ cartas, las cartas de números $2m + 1$ y $4m + 2$ todo el tiempo se intercabiarán de lugar.

329.

Si en las mismas condiciones la baraja contiene $14m + 6$ cartas, después de mezclar tres veces de la manera indicada, las cartas $2m + 1$,

$2(2m+1)$, $3(2m+1)$, $4(2m+1)$, $5(2m+1)$, $6(2m+1)$ volverán a sus lugares iniciales.

330.

Si en las mismas condiciones $2^x - 1$ se divide por $2n+1$, una baraja de $2n$ cartas, después de x mezclas, volverá a su posición inicial.

331.

Una baraja de cartas se mezcla como sigue: primero se toma la primera carta, la segunda se coloca sobre ella, la tercera, debajo de ella, etc. Demostrar que si la baraja contiene $6n - 2$ cartas, la carta $2n$ quedará en su lugar.

332.

22 cartas se someten a la mezcla indicada más arriba. Demostrar que la carta 8 quedará todo el tiempo en su lugar, la 5 y la 14 se intercambiarán sus lugares, y las, 3, 13, 18 pasan una a la otra en forma circular.

333.

Demostrar que, bajo las mismas condiciones: una baraja de 16 cartas vuelve a su posición inicial cada 5 veces; una de 32 cartas, al cabo de 6 veces; una de 42, luego de 8 veces; las de 28 y 36, después de 9 veces; las de 12, 20 y 46, al cabo de 10 veces; las de 22 y 52, después de 12; una de 14, al cabo de 14 veces; una de 18, después de 18; una de 26, luego de 26, una de 30, después de 30, y una de 50, al cabo de 50 veces.

334.

Un cuadrado está dividido en 16 cuadrados iguales. ¿De cuántas maneras se pueden pintar de blanco, negro, rojo y azul, de modo que en cada horizontal y en cada vertical estén los cuatro colores?

335.

15 escolares se forman, para un paseo, en 5 filas de 3 personas cada una. ¿Cuántas veces puede efectuarse esto, de modo que no haya dos escolares que queden dos veces juntos?

336.

Demostrar que si n es un entero, $(n^2)!/(n!)^{n+1}$ también lo será, y si m y n son impares, $(mn)!/(m!)^{\frac{n+1}{2}}(n!)^{\frac{m+1}{2}}$ es entero.

337.

n objetos se hallan distribuidos en círculo. Demostrar que si f_n es el número de permutaciones de estos objetos, en las que ninguno de ellos sigue tras aquel que seguía al principio, entonces será

$$f_n + f_{n+1} = D_n$$

(véase la pág. 47).

338.

Hallar el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = m$, si todas las incógnitas satisfacen a la desigualdad $0 \leqslant l \leqslant \leqslant x_h \leqslant n$.

339.

Se tienen 7 ejemplares de un libro, 8 de otro y 9 de un tercero. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir entre dos personas, de modo que cada una obtenga 12 libros?

340.

Se han escrito todas las n-combinaciones con repetición, formadas a partir de n letras. Demostrar que cada letra se encontrará C_n^{2n-1} veces.

341.

Desde A hasta B hay 999 km. A lo largo del camino hay postes indicadores de los kilómetros, en los cuales están escritas las distancias hasta A y hasta B (0, 999), (1, 998), . . ., (999,0). ¿Cuántos habrá, entre ellos, en los qua haya sólo dos cifras distintas?

342.

Se forman todos los arreglos posibles con repetición que pueden efectuarse con m esferas blancas y n negras. Demostrar que su número es igual a $P(m+1, n+1) - 2$.

343.

Se han formado todos los arreglos posibles con repetición que pueden efectuarse a partir de m esferas blancas y n negras. Demostrar que el número total de esferas blancas en todos los arreglos es de

$$1 + \frac{mn+m-1}{n+2} P(m+1, n+1),$$

y el de las negras, de

$$1+\frac{mn+n-1}{m+2}\,P\,(m+1,\;n+1).$$

Comprobar la respuesta de este problema en la palabra «Gaaga».

344.

Demostrar que el número de arreglos tomados de a 1, 2, . . ., $m+n+1$, que se pueden formar a partir de m esferas blancas, n negras y una roja, en los que figure la roja, es igual a

$$1+\frac{mn+m+n}{m+n+4}\,P\,(m+2,\;n+2).$$

345.

El número total de arreglos que se pueden formar a partir de m esferas blancas, n negras y una roja, es igual a

$$\frac{(m+1)\,(n+1)}{m+n+3}\,P\,(m+2,\;n+2)-1.$$

Comprobar la respuesta en la palabra «okorok».

346.

Tengo 7 amigos. ¿De cuántas maneras los puedo invitar a almorzar de a 3 durante 7 días, de modo que no haya 3 que se encuentren en mi casa dos veces?

347.

Si quiero tener 7 grupos diferentes de a 3 y no dejar a nadie sin invitar, esto se puede efectuar de

$$A_7^{35}-7A_7^{20}+21A_7^{10}$$

formas.

348

Si quiero tener 7 grupos distintos de a 3 y que no haya ningún amigo que venga cada día, esto se puede efectuar de $A_7^{35}-7A_7^{15}$ maneras.

349.

Demostrar que el número total de arreglos de $n\geqslant 2$ objetos (tomados de a 1, 2, . . ., n) es el entero más próximo a $en!-1$.

350.

Si se escriben todos estos arreglos, el número de veces que se encontrará cada objeto es el entero más próximo a $e\,(n-1)\,(n-1)!$.

351.

Se tira una moneda $2n$ veces. Demostrar que el número de variantes, en las cuales la cara no cayó en ningún momento con mayor frecuencia que la cruz, es igual a

$$1+(C_1^n)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_n^{2n}.$$

352.

¿De cuántas formas se pueden distribuir $3n$ libros distintos entre tres personas, de modo que las cantidades de libros formen una progresión aritmética?

353.

Hay n pares, formados por letras iguales, con la particularidad de que pares distintos contienen distintas letras. Estas letras se ordenan de todas las formas posibles, de modo que no haya dos letras iguales juntas. Demostrar que el número de ordenamientos diferentes es igual a

$$\frac{1}{2^n}\left[(2n)!-\frac{n}{1}\,2\,(2n-1)!+\right.$$
$$\left.+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,2^2\,(2n-2)!-\ldots\right].$$

354.

Hay r objetos distintos, los que se distribuyen entre $n+p$ personas, de forma que por lo menos n de ellas obtengan no menos de un objeto. Demostrar que el número de formas de distribución es igual a

$$(n+p)^r-n\,(n+p-1)^r+$$
$$+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,(n+p-2)^r-\ldots$$

355.

Designemos mediante Π_k^n el número de maneras de dividir n objetos diferentes en k grupos. Demostrar que, para $n>1$, será

$$1-\Pi_2^n+2!\,\Pi_3^n-3!\,\Pi_4^n+\ldots=0.$$

356.

Hay m casillas, en la primera de las cuales se encuentran n objetos, en la segunda, $2n$, . . ., en la m-ésima, mn. ¿De cuántas maneras se pueden escoger n objetos de cada casilla?

357.

En una canasta hay $2n + r$ manzanas y $2n - r$ peras. Demostrar que, para un n dado, el número de elecciones de n manzanas y n peras será máximo para $r = 0$.

358.

1000 puntos son vértices de un polígono convexo de mil lados, dentro del cual hay otros 500 puntos, de forma que no haya tres de estos 1500 sobre una misma recta. El polígono dado se corta en triángulos, de manera que todos los 1500 puntos indicados sean vértices de triángulos, y que éstos no tengan otros vértices. ¿Cuántos triángulos se obtendrán en este corte?

359.

Cinco personas juegan varios partidos al dominó (dos contra dos), y cada jugador tiene a cada uno una vez como compañero, y dos veces como contrario. Hallar el número de partidos jugados y todas las formas de distribución de los jugadores.

360.

Desde el punto O del plano se trazan todas las quebradas cerradas de longitud $2n$, cuyos lados se hallan sobre las líneas de un papel cuadriculado con retículo de lado igual a 1. Hallar el número de estas quebradas, si cada una puede recorrer un mismo segmento varias veces.

361.

Sobre una hoja de papel se ha trazado una red de n rectas horizontales y n verticales. ¿Cuántas quebradas cerradas de $2n$ eslabones distintas se pueden trazar sobre las líneas de la red, de modo que cada una tenga segmentos en todas las rectas horizontales y en todas las verticales?

362.

Una fábrica produce sonajeros en forma de anillo con 3 bolitas rojas y 7 azules enhebradas en éste. ¿Cuántos sonajeros distintos se pueden producir (dos sonajeros se consideran iguales, si uno puede ser obtenido a partir del otro sólo desplazando las bolitas por el anillo o girándolo)?

363.

Se han reunido n personas. Algunas de ellas se conocen, y cada dos desconocidos tienen exactamente dos conocidos comunes, y cada dos conocidos no tienen conocidos comunes. Demostrar que cada presente conoce a un mismo número de personas.

364.

Sobre la circunferencia se han tomado varios puntos; algunos de ellos se han designado con la letra A, y otros, con la B. Sobre cada uno de los arcos en que la circunferencia se divide por los puntos tomados, efectuamos lo siguiente: si ambos puntos extremos están denotados por letras A, escribimos el número 2; si ambos extremos están denotados por B, escribimos 1/2; si éstos están denotados por letras distintas, escribimos el número 1. Demostrar que el producto de todos los números escritos es igual a 2^{a-b}, donde a es el número de puntos denotados por la letra A, y b, el de los denotados por la B.

365.

Las filas horizontales de un tablero de ajedrez se designan, como es usual, por las cifras del 1 al 8, y las verticales, por las letras de la a a la h. Sean ahora a, b, c, d, e, f, g, h números arbitrarios. Escribamos en cada casilla del tablero el producto de los números que designan la horizontal y la vertical respectivas, y dispongamos 8 torres de modo que no puedan comerse una a la otra. ¿A qué es igual el producto de los números ocultos?

366.

El Comité de Organización de una olimpíada está formado por 11 personas. Los materiales de la olimpíada se conservan en una caja fuerte. ¿Cuántas cerraduras debe tener ésta, y cuántas llaves hay que entregar a cada miembro del Comité, para que sea posible abrir la caja cuando se reúnan 6 miembros cualesquiera del Comité, y sea imposible si se reúnen menos de 6?

367.

Hay un trozo de cadena de 60 eslabones. Cada eslabón pesa 1 g. ¿Cuál es el mínimo número de eslabones que hay que abrir para que sea posible obtener, mediante los eslabones abiertos y los trozos restantes, un peso cualquiera, que se exprese con un número entero del 1 al 60? Resuélvase el mismo problema, si para el pesado se puede utilizar una balanza de dos platillos.

368.

¿Cuántos pares existen de números enteros x e y, comprendidos entre 1 y 1000, tales que $x^2 + y^2$ se divida por 49?

369.

¿Cuántos números de dos cifras dan un cuadrado perfecto sumados al número escrito con las mismas cifras, pero en orden inverso?

370.

Hallar la suma de todos los números de cuatro cifras, formados por las cifras del 1 al 6 y que se dividan por 3.

371.

Hallar la suma de todos los números pares de cuatro cifras, que se pueden formar con las cifras del 0 al 5.

372.

¿Cuántas soluciones enteras diferentes tiene la desigualdad $|x| + |y| \leqslant 1000$?

373.

Sobre una circunferencia se han fijado los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Formemos todos los polígonos convexos posibles, cuyos vértices se hallen entre los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Dividamos estos polígonos en dos grupos. Al primero referimos todos los polígonos que tengan el punto A_1 como uno de sus vértices, y al segundo, todos los demás. ¿En qué grupo habrá más polígonos?

374.

Sobre un tablero de ajedrez infinito se halla un caballo. Hallar el número de casillas en las que puede hallarse al cabo de $2n$ jugadas.

375.

Hay 1955 puntos. ¿Cuál es el máximo número de ternas de puntos que se pueden escoger entre ellos, de modo que cada par de ternas tenga un punto común?

376.

Los números del 1 al 100 000 000 han sido escritos en fila, de modo que se obtuvo la sucesión de cifras 123 456 . . . 100 000 000. Demostrar que el número de todas las cifras de esta sucesión es igual al de ceros en la sucesión $1, 2, 3, \ldots, 10^9$.

377.

¿Cuántos números de cuatro cifras existen, del 0001 al 9999, para los cuales la suma de las dos primeras cifras sea igual a la de las dos últimas?

378.

En la escuela se estudian $2n$ disciplinas. Todos los alumnos obtienen calificaciones de 4 y 5. No hay dos que estudien igual, ni tampoco hay dos sobre los que se pueda decir que uno estudia mejor que el otro. Demostrar que el número de alumnos en la escuela no es mayor que C_{2n}^{n} (consideramos que un alumno estudia mejor que otro, si en todas las disciplinas sus notas no son peores que las del segundo, y en algunas son mejores).

379.

Sea M_r el número de arreglos sin repetición de m elementos tomados de a r, y N_r, el de arreglos sin repetición de n elementos tomados de a r. Demostrar que el número de arreglos de $m + n$ elementos tomados de a r se expresa mediante la fórmula $(M + N)^r$, donde, después de elevar a la potencia indicada, hay que sustituir todos los exponentes por subíndices.

380.

Hallar el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(1 + x^2 - x^3)^9$.

381.

Hallar el coeficiente de x^m en el desarrollo de

$$(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \ldots + (1+x)^n$$

en potencias de x. Analizar por separado los casos $m < k$, $m \geqslant k$.

382.

Hallar los coeficientes de x^{17} y x^{18} después de abrir paréntesis y agrupar los términos semejantes en la expresión $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

383.

¿En cuál de las expresiones, $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$ ó $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$, después de abrir paréntesis y agrupar los términos semejantes, x^{17} tendrá un coeficiente mayor?

384.

Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots$ los coeficientes del desarrollo de $(1+x+x^2)^n$ en potencias crecientes de x. Demostrar que

a) $a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \ldots - a_{2n-1}a_{2n} = 0$,

b) $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \ldots + (-1)^{n-1}a_{n-1}^2 =$
$$= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}(-1)^{n-1}a_n^2,$$

c) $a_r - na_{r-1} + C_2^n a_{r-2} - \ldots$
$\ldots + (-1)^r C_r^n a_0 = 0$, si r no es múltiplo de 3,

d) $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots = \frac{1}{2}(3^n+1)$,

$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = \frac{1}{2}(3^n-1)$.

385.

Hallar el número de términos diferentes (no semejantes entre sí) del desarrollo de

$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^3$,

que se obtiene después de elevar a la potencia indicada.

386. Hallar el coeficiente de x^k en el desarrollo de $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})^2$.

387.

Demostrar que

$$\frac{[C_{r+1}^{n+1} - C_r^n]\,C_{r-1}^{n-1}}{(C_r^n)^2 - C_{r+1}^{n+1}C_{r-1}^{n-1}} = r.$$

388.

Demostrar que

$C_1^n + 6C_2^n + 6C_3^n = n^3$,

$1 + 7C_1^n + 12C_2^n + 6C_3^n = (n+1)^3$.

389.

Demostrar que

$1 + 14C_1^n + 36C_2^n + 24C_3^n = (n+1)^4 - n^4$,

$C_1^n + 14C_2^n + 36C_3^n + 24C_4^n = n^4$.

390.

Demostrar que

$$1 - 3C_2^n + 9C_4^n - 27C_6^n + \ldots = (-1)^n\, 2^n \cos\frac{2n\pi}{3},$$

$$C_1^n - 3C_3^n + 9C_5^n - \ldots = \frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}.$$

391.

Demostrar que

a) $C_0^n + C_3^n + C_6^n + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$,

b) $C_1^n + C_4^n + C_7^n + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$,

c) $C_2^n + C_5^n + C_8^n + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$,

d) $C_0^n + C_4^n + C_8^n + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

392.

Demostrar que, para $n \geqslant 2$ y $|x| < 1$, se tendrá $(1+x)^n + (1-x)^n \leqslant 2^n$.

393.

Demostrar que, para $m \geqslant n$,

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{m(m-1)\ldots(m-x+1)} = \frac{m+1}{m-n+1}$$

y

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{C_x^n C_r^n}{C_{x+r}^{2n}} = \frac{2n+1}{n+1}.$$

394.

Demostrar que

$$\frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1\cdot 2\ldots n} =$$
$$= \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+m+1)}{1\cdot 2\ldots m}.$$

395.
Demostrar que

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{x-1}^{n-1}}{C_{x}^{2n-1}} = \frac{2}{n+1}.$$

396.
Demostrar que

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{x-1}^{n-1}}{C_{x}^{n+q}} = \frac{n+q+1}{(q+1)(q+2)}.$$

397.
Demostrar que

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_{x}^{n+q}} = \frac{2(n+q+1)}{(q+1)(q+2)(q+3)}.$$

398.
Demostrar que

$$(C_1^n)^2 + 2(C_2^n)^2 + 3(C_3^n)^2 + \ldots$$
$$\ldots + n(C_n^n)^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.$$

399.
Demostrar la identidad

$$\frac{1}{[(n-1)!]^2} + \frac{1}{1!\,2!}\,\frac{1}{[(n-2)!]^2} +$$
$$+ \frac{1}{2!\,3!}\,\frac{1}{[(n-3)!]^2} + \ldots = \frac{(2n-1)!}{[n!\,(n-1)!]^2}.$$

400.
Demostrar que

$$\frac{(n+r-1)!}{r!} - \frac{n}{1}\,\frac{(n+r-3)!}{(r-2)!} +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(n+r-5)!}{(r-4)!} - \ldots = \frac{n!\,(n-1)!}{r!\,(n-r)!}.$$

401.
Calcular las siguientes sumas:

a) $C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \ldots + nC_n^n$,

b) $C_0^n + 2C_1^n + 3C_2^n + \ldots + (n+1)\,C_n^n$,

c) $C_2^n + 2C_3^n + 3C_4^n + \ldots + (n-1)\,C_n^n$,

d) $C_0^n + 3C_1^n + 5C_2^n + \ldots + (2n-1)\,C_n^n$,

e) $C_0^n - 2C_1^n + 3C_2^n - \ldots + (-1)^n (n+1)\,C_n^n$,

f) $3C_1^n + 7C_2^n + 11C_3^n + \ldots + (4n-1)\,C_n^n$,

g) $C_1^n - 2C_2^n + 3C_3^n - \ldots + (-1)^{n-1}\,nC_n^n$,

h) $\dfrac{C_0^n}{1} + \dfrac{C_1^n}{2} + \dfrac{C_2^n}{3} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1}$,

i) $\dfrac{C_0^n}{2} + \dfrac{C_1^n}{3} + \dfrac{C_2^n}{4} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+2}$,

j) $\dfrac{C_0^n}{1} - \dfrac{C_1^n}{2} + \dfrac{C_2^n}{3} - \ldots + (-1)^n\,\dfrac{C_n^n}{n+1}$,

k) $(C_0^n)^2 - (C_1^n)^2 + (C_2^n)^2 - \ldots + (-1)^n (C_n^n)^2$.

402.
Hallar el mayor coeficiente de los desarrollos de $(a+b+c)^{10}$, $(a+b+c+d)^{14}$.

403.
Sean Y_n los coeficientes del desarrollo de la función $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ en serie de potencias:

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + Y_1 x + Y_2 x^2 + \ldots$$

Exprésense Y_n mediante los coeficientes binómicos. Hallar el desarrollo de $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$.

404.
Demostrar que los números Y_n satisfacen a las relaciones:

a) $$Y_n + \frac{1}{2}\,Y_1 Y_{n-1} + \frac{1}{3}\,Y_2 Y_{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n+1}\,Y_n = \frac{1}{2}\,Y_{n+1},$$

b) $Y_0Y_n+Y_1Y_{n-1}+Y_2Y_{n-2}+\ldots+Y_nY_0=4^n$.

c) $$\frac{Y_0Y_n}{1(n+1)}+\frac{Y_1Y_{n-1}}{2\cdot n}+\frac{Y_2Y_{n-2}}{3(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{Y_nY_0}{(n+1)\cdot 1}=\frac{Y_{n+1}}{n+2}.$$

405.

En el triángulo numérico

```
      1
    1 1 1
  1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
. . . . . . . . .
```

cada número es igual a la suma de los situados en la fila anterior sobre este número y sobre sus vecinos a derecha e izquierda (si no todos estos números están presentes, se consideran iguales a cero). Demostrar que en cada fila, a partir de la tercera, existe un número par.

406.

La primera fila del triángulo numérico

```
0 1 2 3 . . . . . . . 1957      1958
 1 3 5 . . . . . . . .     3915
. . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

está formada por los números 0, 1, . . ., 1958. Los elementos de cada fila siguiente son iguales a las sumas de los de la fila precedente, que se hallan a su izquierda y a su derecha. Demostrar que el elemento de la última fila del triángulo se divide por 1958.

407.

Se considera la serie de los números de Fibonacci $u_n: u_0=0,\ u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=3,\ u_5=5$, etc. (la hemos comenzado a partir de los términos 0 y 1, y no de los 1 y 2, como en el capítulo VI). Demostrar que

a) Para todo m y n, será

$u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}$.

b) Para todo m y $n=km$, el número u_n se divide por u_m.

c) Dos números vecinos de la serie de Fibonacci son primos entre sí.

408.

Hallar el máximo común divisor de los términos 1000 y 770 de la serie de Fibonacci.

409.

¿Existirá entre los primeros 100 000 001 términos de la serie de Fibonacci un número que termine en cuatro ceros?

410.

En la serie de Fibonacci se han elegido 8 números sucesivos. Demostrar que su suma no pertenece a esta serie.

411.

Demostrar que

a) $u_2+u_4+\ldots+u_{2n}=u_{2n+1}-1$,

b) $u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}=u_{2n}$,

c) $u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2=u_nu_{n+1}$.

d) $u_{n+1}^2=u_nu_{n+2}+(-1)^n$,

e) $u_1u_2+u_2u_3+\ldots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2$,

f) $u_1u_2+u_2u_3+\ldots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1$,

g) $nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\ldots+2u_{n-1}+$
$+u_n=u_{n+4}-(n+3)$,

h) $u_3+u_6+\ldots+u_{3n}=\frac{u_{3n+2}-1}{2}$,

i) $u_{3n}=u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3$.

412.

Demostrar que cualquier número natural N puede ser representado en forma de suma de números de Fibonacci, y cada número figura no más de una vez en la suma, sin que haya dos números vecinos que figuren a la vez.

413.

Sean $p\geqslant q\geqslant r$ números enteros, tales que $p<q+r$ y $p+q+r=2s$. Hay p esferas negras, q blancas y r rojas. Demostrar que el número de formas de distribuir estas esferas entre dos personas, en las cuales cada una obtenga s esferas, es igual a

$s^2+s+1-\frac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)$.

414.

Si $q+r<p$, la respuesta al problema anterior aumenta en $\frac{1}{2}(p-s)(p-s-1)$.

415.

Hay $pq+r$ objetos diferentes, siendo $0 \leqslant r < p$. Estos se distribuyen entre p personas de la forma más equitativa posible (todos obtienen o bien q, o bien $q+1$ objetos). Demostrar que el número de maneras de esta distribución es igual a

$$C_r^p \frac{(pq+r)!}{(q+1)^r (q!)^p}.$$

416.

Calcular la suma

$$\sum_{i_n=1}^{m} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \cdots \sum_{i_1=1}^{i_2} \sum_{i_0=1}^{i_1} 1.$$

417.

Demostrar la identidad

$$C_m^{n+m} = \sum P(k_1, \ldots, k_m, n-k_1-\ldots-k_m+1),$$

donde la suma se extiende a todas las soluciones enteras no negativas de la ecuación $k_1+ +2k_2+\ldots+mk_m=m$.

418.

Hallar la solución general de las siguientes relaciones de recurrencia:

a) $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$,

b) $a_{n+2}=3a_{n+1}-10a_n=0$,

c) $a_{n+2}-4a_{n+1}+13a_n=0$,

d) $a_{n+2}+9a_n=0$,

e) $a_{n+2}+4a_{n+1}+4a_n=0$,

f) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0$,

g) $a_{n+3}+3a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n=0$,

h) $a_{n+4}+4a_n=0$.

419.

Hallar a_n, conociendo la relación de recurrencia y los términos iniciales:

a) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0,\ a_1=1,\ a_2=-7$,

b) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0,\ a_1=2,\ a_2=4$,

c) $a_{n+2}+a_{n+1}+a_n=0,\ a_1=-\frac{1}{4},\ a_2=-\frac{1}{2}$,

d) $a_{n+3}-9a_{n+2}+26a_{n+1}-24a_n=0,\ a_1=1,$
$a_2=-3,\ a_3=-29$.

420.

Hallar una sucesión tal que $a_1=\cos\alpha$, $a_2= =\cos 2\alpha$ y

$$a_{n+2}-2\cos\alpha a_{n+1}+a_n=0.$$

421.

Demostrar que la sucesión[1] de término común $a_n=n^k$ satisface a la relación

$$a_{n+k}-C_1^k a_{n+k-1}+C_2^k a_{n+k-2}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^k C_k^k a_n=0.$$

422.

Hallar una sucesión tal que

$$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=2^n.$$

423.

A partir de la identidad $(1+x)^p(1+x)^{-k-1}= =(1+x)^{p-k-1}$ dedúzcase que

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_s^{k+s} C_{n-s}^p = C_n^{p-k-1}.$$

424.

A partir de la identidad $(1-x)^{-m-1}(1-x)^{-q-1}= =(1-x)^{-m-q-2}$, dedúzcase que

$$\sum_{s=0} C_m^{p-s} C_q^{q-s} = C_{p-m}^{p+q+1}.$$

425.

A partir de la identidad $(1+x)^n=(1-x^2)^n\times \times(1-x)^{-n}$ dedúzcase que

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_n^{n+k-2s} C_s^{n+1} = C_k^{n+1}.$$

426.

A partir de la identidad $(1+x)^n(1-x^2)^{-n}= =(1-x)^{-n}$, dedúzcase que

$$\sum_{s=0} C_{k-2s}^n C_s^{n+s-1} = C_k^{n+k-1}.$$

[1] Aquí y en lo sucesivo la suma se extiende por los valores enteros no negativos de s, para los cuales esté definido el primer miembro de la igualdad.

427.

A partir de la identidad $(1-x^2)^{-p-1} = (1+x)^{-p-1}(1-x)^{-p-1}$, dedúzcase que

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_p^{p+2k-s} C_p^{p+s} = C_k^{p+k}.$$

428.

A partir de las identidades

$$(1-x)^{-2p}\left[1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right]^{-p} = (1-2x)^{-p}$$

y

$$(1-x)^{2p}\left[1-\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right]^{p} = (1-2x)^{p}$$

dedúzcase que

$$\sum_{s=0} C_s^{p+s} C_{2p+2s+1}^{2p+m} = 2^{m-1} C_p^{m+p-1}$$

y que

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_s^p C_{m-2s}^{2p-2s} = 2^p C_m^p.$$

429.

Demostrar que

$$\sum_{s=0} C_s^{p+s} C_{2p+2s}^{2p+m} = 2^{m-1}\,\frac{2p+m}{m}\, C_p^{m+p-1}.$$

430.

A partir de las identidades

$$(1-x)^{\pm 2p}\left[1+\frac{2x}{(1-x)^2}\right]^{\pm p} = (1+x^2)^{\pm p}$$

dedúzcanse las fórmulas

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_s^{p+s-1} C_{2m+1-s}^{2m+2p+s} 2^s = 0,$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_s^{p+s-1} C_{2m-s}^{2m+2p+s-1} 2^s = (-1)^m C_m^{p+m-1},$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_s^p C_{2m+1-s}^{2p-2s} 2^s = 0,$$

$$\sum_{s=0} (-1)^s C_s^p C_{2m-s}^{2p-2s} 2^s = C_m^p.$$

A partir de éstas, demuéstrese que

$$\sum_{s=0} C_{2s}^{2p+2m} C_p^{p+m-s} = 2^{2m}(p+m)\,\frac{(p+2m-1)!}{p!\,(2m)!},$$

$$\sum_{s=0} C_{2s+1}^{2p+2m+1} C_p^{p+m-s} = 2^{2m}(2p+2m+1)\,\frac{(p+2m)!}{p!\,(2m+1)!},$$

$$\sum_{s=1} C_{2s-1}^{2p+2m} C_p^{p+m-s} = 2^{2m-1} C_p^{p+2m-1},$$

$$\sum_{s=0} C_{2s}^{2p+2m+1} C_p^{p+m-s} = 2^{2m} C_p^{p+2m}.$$

431.

Considerando las fórmulas

$$[(1+x)^p \pm (1-x)^p]^2 = (1+x)^{2p} + (1-x)^{2p} \pm \pm 2(1-x^2)^p,$$

$$[(1+x)^p + (1-x)^p]\,[(1+x)^p - (1-x)^p] = (1+x)^{2p} - (1-x)^{2p}$$

para valores positivos y negativos de p, demostrar que

$$2\sum_{s=0} C_{2s}^p C_{2m-2s}^p = C_{2m}^{2p} + (-1)^m C_m^p,$$

$$2\sum_{s=0} C_{2s+1}^p C_{2m-2s+1}^p = C_{2m+2}^{2p} + (-1)^m C_{m+1}^p,$$

$$2\sum_{s=0} C_{2s}^p C_{2m-2s+1}^p = C_{2m+1}^{2p},$$

$$2\sum_{s=0} C_p^{p+2s} C_p^{p+2m-2s} = C_{2p+1}^{2p+2m+1} + C_p^{p+m},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p-1}^{p+2s} C_{p-1}^{p+2m-2s} = C_{2p-1}^{2p+2m+1} - C_p^{p+m},$$

$$2\sum_{s=0} C_p^{p+2s} C_p^{p+2m-2s+1} = C_{2p+1}^{2p+2m+2}.$$

432.

Considerando la expresión

$[(1+x)^{p+1} \pm (1-x)^{p+1}]\,[(1+x)^p \pm (1-x)^p]$ para todas las combinaciones de los signos, dedúzcase las fórmulas

$$2\sum_{s=0} C_{2s}^{p+1} C_{2m-2s}^p = C_{2m}^{2p+1} + (-1)^m C_m^p,$$

$$2\sum_{s=0} C_{2s}^{p+1}C_{2m-2s+1}^{p}=C_{2m+1}^{2p+1}-(-1)^m C_m^p,$$

$$2\sum_{s=0} C_{2s+1}^{p+1}C_{2m-2s}^{p}=C_{2m+1}^{2p+1}+(-1)^m C_m^p,$$

$$2\sum_{s=0} C_{2s+1}^{p+1}C_{2m-2s+1}^{p}=C_{2m+2}^{2p+1}+(-1)^m C_{m+1}^p,$$

$$2\sum_{s=0} C_{p-1}^{p+2s-1}C_{p}^{p+2m-2s}=C_{2p}^{2p+2m}+C_p^{p+m},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p-1}^{p+2s-1}C_{p}^{p+2m-2s+1}=C_{2p}^{2p+2m+1}+C_p^{p+m},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p-1}^{p+2s}C_{p}^{p+2m-2s}=C_{2p}^{2p+2m+1}-C_p^{p+m},$$

$$2\sum_{s=0} C_{p-1}^{p+2s}C_{p}^{p+2m-2s+1}=C_{2p}^{2p+2m+2}-C_p^{p+m+1}.$$

433.
A partir de la relación

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^m(1-x)^{-n-1}=\frac{(-1)^m}{x^m}(1-x)^{m-n-1}$$

dedúzcase que

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_{m-k+s}^{m}C_n^{n+s}=C_k^{m-n-1}.$$

434.
Demuéstrese que

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_s^m C_n^s=\begin{cases} 0, & \text{si } m\neq n,\\ (-1)^n, & \text{si } m=n.\end{cases}$$

435.
A partir de la igualdad

$$(1-x)^{-n}(1-x^h)^n=(1+x+\ldots+x^{h-1})^n,$$

dedúzcase que

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_{n-1}^{m-sh}C_s^n=\begin{cases} 0, \text{ si } m>hn-1,\\ 1, \text{ si } m=hn-1.\end{cases}$$

436.
A partir de la identidad

$$(1-x)^{-n-1}(1-x^h)^n=\frac{(1+x+\ldots+x^{h-1})^n}{1-x},$$

dedúzcase que, para $m\geqslant hn$,

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_n^{m-sh}C_s^n=h^n.$$

437.
A partir de la identidad

$$(1+x)^{\pm p}(1-x)^{\pm p}=(1-x^2)^{\pm p}$$

dedúzcase que

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_{m-s}^{p}C_s^p=$$

$$=\begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}}C_{\frac{m}{2}}^{p}, & \text{si } m \text{ es par},\\ 0, & \text{si } m \text{ es impar},\end{cases}$$

$$\sum_{s=0}(-1)^s C_p^{p+m-s}C_p^{p+s}=$$

$$=\begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}}C_{\frac{m}{2}}^{p+\frac{m}{2}}, & \text{si } m \text{ es par}\\ 0, & \text{si } m \text{ es impar}.\end{cases}$$

438.
Demostrar que

$$\sum_{s=0}(-1)^s[C_s^m]^2=\begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}}C_{\frac{m}{2}}^{m}, & \text{si } m \text{ es par}.\\ 0, & \text{si } m \text{ es impar}.\end{cases}$$

439.
Designemos la expresión

$a(a+1)(a+2)\,\ldots\,(a+n-1)$

mediante $(a)_n$. Demostrar que

$$(a+b)_n=\sum_{m=0}^{n} C_m^n(a+m)_{n-m}(b-m+1)_m.$$

1.

En virtud de la regla del producto, se obtienen $5\cdot 3 = 15$ caminos.

2.

En virtud de la misma regla, tendremos $100^2 = 10\,000$ formas de elección.

3.

20.

4.

8.

5.

9.

6.

48.

7.

25; 20.

8.

480; 437.

9.

1024; 4032.

10.

El cuadrado blanco lo escogemos de 32 maneras y tachamos la horizontal y vertical correspondientes. En la parte restante del tablero hay 24 cuadrados negros. En total hay $32\cdot 24 = 768$ formas de elección.

11.

En virtud de la regla del producto, hay $12\cdot g\cdot 10 = 1080$ formas.

12.

$6\cdot 5 = 30$ maneras.

13.

$3\cdot 7\cdot 7 = 147$.

14.

Se puede comprar o un ejemplar de cada novela, o un tomo que contenga dos novelas y un ejemplar de la tercera. Según las reglas de la suma y del producto, se obtienen $6\cdot 3\cdot 4 + 5\cdot 4 + 7\cdot 6 = 134$ modos.

15.

Se puede comprar además un tomo que contenga las novelas «Rudin» y «Padres e Hijos» y un ejemplar del «Nido de Hidalgos». Se agregan $3\cdot 3 = 9$ formas, obteniéndose en total 143.

16.

Habrá mayor cantidad de elecciones si fue escogida una manzana, pues $11\cdot 10 > 12\cdot 9$.

17.

$6\cdot 8\cdot 10 = 480$; si los dos primeros trompos cayeron sobre el lado «1», el tercero puede caer de 10 maneras; análogamente se consideran los casos en que sobre este lado caen los otros dos trompos; en total, se obtienen $6 + 8 + 10$ formas, pero aquí una de ellas (cuando sobre el lado «1» caen los tres trompos) se considera tres veces; por esto, quedan 22 maneras.

18.

Como el orden de las pinturas no tiene importancia, se da $C_3^5 = 10$ maneras.

19.

Aquí ya el orden de las pinturas tiene importancia; por esto, tendremos $A_3^5 = 60$ formas. Si una franja es roja, tendremos $3\cdot A_2^4 = 36$ maneras.

20.

$A_2^5 = 20$ diccionarios.

21.

$A_2^{10} - A_2^5 = 70$.

22.

Se obtienen arreglos con repetición de 13 cartas tomadas de a 4. En total, habrá $13^4 = 28\,561$ maneras. Si entre las cartas no debe haber pares, tendremos arreglos sin repetición; el número de éstos es igual a $A_4^{13} = 17\,160$.

23.

Como es suficiente escoger una carta negra y una roja, obtendremos $13^2 = 169$ maneras de elección.

24.

Un niño puede obtener uno, dos o tres nombres, siendo todos ellos distintos. En total habrá $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26\,820\,600$ nombres distintos.

25.

La relación de vecindad se conserva en las permutaciones cíclicas y en caso de una simetría. En el caso de 4 personas, tendremos $2.4 = 8$ transformaciones que conserven la relación de vecindad. Como el número total de permutaciones de 4 personas es igual a $4! = 24$, tendremos $24/8 = 3$ formas distintas de sentarse. Si hay 7 personas alrededor de la mesa, tendremos $7!/14 = 360$ modos y, en general, en el caso de n personas, $(n-1)!/2$ formas. El número de maneras en las que 2 personas dadas se hallen juntas, es dos veces mayor que el de sentar a 6 personas (en virtud de la posibilidad de cambiar de lugar estas personas). Por lo tanto, éste es igual a $5! = 120$. Análogamente, el número de formas en las que una persona dada tendrá dos vecinos determinados, es igual a $4! = 24$.

26.

En un equipo juega un muchacho, y en el otro, dos. Estos se pueden dividir en equipos de 3 maneras. Después de esto, hay que escoger, para el primer equipo, 3 muchachas de entre 5. Esto se puede efectuar de $C_5^3 = 10$ maneras. En total se obtienen, según la regla del producto, $3 \cdot 10 = 30$ modos de dividir en equipos.

27.

El número de formas de dividir n objetos diferentes en k grupos es igual a k^n. En nuestro caso, tendremos $3^6 = 729$ maneras.

28.

En virtud de la regla del producto, esto es posible de $7 \cdot 9 = 63$ maneras.

29.

El primero puede escoger los libros para el intercambio de $C_7^2 = 21$ modos, y el segundo, de $C_9^2 = 36$. En total habrá $21 \cdot 36 = 756$ formas de intercambio.

30.

Dividamos todos los modos de ordenar a los oradores en pares, formados por los métodos que se obtienen uno del otro permutando A y B. En cada par hay sólo una manera que satisface la condición planteada. Por esto, tendremos $5!/2 = 60$ maneras.

31.

Si A interviene inmediatamente antes que B, podemos considerarlos como si fuesen un solo orador. Por esto, tendremos $4! = 24$ formas.

32.

La elección de los lugares para las mujeres y para los hombres se puede efectuar de dos maneras. Después de esto, se puede sentar a los hombres en los lugares escogidos de 5! modos. Otros tantos hay de sentar a las mujeres. En total, obtenemos $2\,(5!)^2 = 28\,800$ maneras.

33.

Obtenemos 10 veces menos formas que en el problema precedente, es decir, 2880.

34.

El número total de maneras de extraer 10 cartas es igual a C_{10}^{52}. El de formas en las que no se escoge ningún as, es C_{10}^{48}. Por esto, por lo menos un as habrá en $C_{10}^{52} - C_{10}^{48}$ casos. Exactamente un as habrá en $C_1^4 C_9^{48}$ casos; no menos de dos ases, en $C_{10}^{52} - C_{10}^{48} - 4C_9^{48}$, y exactamente dos ases, en $C_2^4 C_8^{48}$ (se escogen dos ases de C_2^4 formas, y otras 8 cartas, de entre 48, de C_8^{48}).

35.

3^m señales (véase el problema 27).

36.

Cifremos cada juego de dientes mediante una sucesión de ceros y unidades (se coloca un cero si en el lugar dado no hay diente, y una unidad si lo hay). El número de estas sucesiones es igual a 2^{32}. Como a cada habitante le corresponde su sucesión, el número de éstos no es mayor que 2^{32}.

37.

Primeramente escogemos cuál de los tres pasajeros, a los que les da lo mismo cómo sentarse, lo hará cara a la locomotora. Esta elección se puede efectuar de 3 maneras. En cada banco se puede sentar a los pasajeros de 5! formas. En total, obtenemos $3\,(5!)^2 = 43\,200$ formas.

38.

$A_4^9 = 3024$.

39.

$C_5^{52} = 2\,598\,960$.

40.

Hay $32 \cdot 10^4$ números que contienen una letra; $32^2 \cdot 10^4$ que contienen dos, y $32^3 \cdot 10^4$ que contienen tres. En total, según la regla de la suma, habrá $33\,820 \cdot 10^4$ números.

41.

De cinco días hay que escoger dos en los quo se den las manzanas. En total, hay $C_2^5 = 10$ formas.

42.

C_m^{m+n}.

43.

$P(2,\ 3,\ 4) = 1260$.

44.

Como las naranjas son distintas, tendremos $A_5^8 =$ $= 6720$ modos.

45.

Cada naranja puede quedar en manos de cualquiera de los 8 hijos. Por esto, tendremos $8^5 = 32\,768$ maneras.

46.

$P(4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1)$; $P(3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$; $P(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$.

47.

$C_4^{30} = 27\,405$; $A_4^{30} = 657\,720$.

48.

$P(2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1) = 5040$.

49.

Primeramente se eligen 6 abonados de C_6^n maneras. Dispongámos estos abonados en cualquier orden, y dividámoslos en pares (el primero y el segundo, después el tercero y el cuarto y, por fin, el quinto y el sexto). Esto se puede efectuar de $6!$ formas. Como los abonados se pueden permutar dentro de cada par, y como no tiene importancia el orden de los pares, el número total de modos debe ser dividido por $2^3 \cdot 3! = 48$.

En total, obtenemos $\dfrac{n!}{48\,(n-6)!}$ maneras.

50.

$\overline{C}_{12}^{10} = C_{12}^{21}$; $\overline{C}_8^{10} = C_8^{17}$; C_8^{10}.

51.

Se pueden escoger dos, tres o cuatro mujeres. Dos de ellas se pueden elegir de C_2^4 formas. Después de esto, hay que escoger 4 hombres, lo cual puede efectuarse de C_4^7 maneras. En virtud de la regla del producto, obtenemos $C_2^4 C_4^7$ formas. Si se eligen tres mujeres, se obtienen $C_3^4 C_3^7$ maneras, y si son cuatro, $C_4^4 C_2^7$. En total, hay

$C_2^4 C_4^7 + C_3^4 C_3^7 + C_4^4 C_2^7 = 271$ modos.

52.

El número debe terminar en una de las cinco combinaciones siguientes: 12, 24, 32, 44, 52; las primeras dos cifras, en cambio, pueden ser arbitrarias. En total, se obtienen $5^3 \cdot 5 = 125$ números.

53.

Cada uno de los n pasajeros puede escoger cualquiera de las m paradas. Por esto, tendremos m^n modos de distribución. Si se tiene en cuenta sólo la cantidad de pasajeros que se bajaron en cada parada, se obtienen C_{m-1}^{m+n-1} formas.

54.

Si a y b se hallan juntos, podemos unirlos en un solo símbolo. Teniendo en cuenta que a y b se pueden cambiar de lugar, se obtienen $2\,(n-1)!$ permutaciones en las que a y b están juntos. Por esto, no lo estarán en $n! - 2\,(n-1)!$ permutaciones. Análogamente se obtiene, que a, b y c no estarán juntos en $n! - 6\,(n-2)!$ permutaciones. No habrá ningún par de elementos a, b, c juntos en $n! - 6\,(n-1)! + 6(n-2)!$ permutaciones (según la fórmula de inclusiones y exclusiones).

55.

Tres jueces pueden escoger al vencedor de 10^3 maneras. En $A_3^{10} = 720$ casos nombrarán a tres candidatos distintos. Por esto, la coincidencia de dos jueces, por lo menos, tendrá lugar en 280 casos. La parte de estos casos es igual a 0,28.

56.

Como cada estudiante puede obtener tres tipos de calificación, tendremos $3^4 = 81$ maneras de rendir los exámenes.

57.

Como los collares no cambian para permutaciones cíclicas de las cuentas y al rebatirlos, se pueden formar $\frac{7!}{14} = 360$ tipos de collares.

58.

Los tipos de collares se diferencian entre sí en el número de cuentas pequeñas, contenidas entre dos grandes. Por esto, tendremos tres tipos de collares.

59.

En el alfabeto ruso hay 33 letras, pero por lo menos por cuatro de ellas, Ъ, Ь, Ы, Й, no comienza ningún nombre. Por esto, el número total de iniciales diferentes no es mayor que $29^2 = 841$, lo cual es menor que 2000.

60.

$A_7^{10} = 604\,800$; $C_3^{10} = 120$. Si dos muchachas serán invitadas con seguridad a bailar, tendremos A_2^7 variantes de elección de sus compañeros; los 5 muchachos restantes escogen a su compañera de entre 8 chicas, lo cual puede ser efectuado de A_5^8 maneras; en total, tendremos $A_2^7 A_5^8 = 282\,240$ formas. Por último, si dos chicas determinadas son invitadas a bailar, las otras cinco se pueden elegir de C_5^8 modos.

61.

El oficial puede elegirse de C_1^3 maneras, los sargentos, de C_2^6, y los soldados rasos, de C_{20}^{60}. En total se obtienen, en virtud de la regla del producto, $C_1^3 C_2^6 C_{20}^{60}$ formas de elección. Si en el destacamento debe figurar el comandante de la compañía y el mayor de los sargentos, se obtienen $C_1^5 C_{20}^{60}$ modos de elección.

62.

Cuatro chicas pueden ser elegidas de C_4^{12} maneras. Después de esto, elegimos de A_4^{15} modos a los muchachos (aquí ya tiene importancia el orden). En total, se obtienen $C_4^{12} A_4^{15} = 17\,417\,400$ formas.

63.

Cada gallina puede figurar o no entre las elegidas. Por esto, hay 2^3 formas de elección de gallinas. Como, por hipótesis, debe ser escogida por lo menos una gallina, obtenemos 7 formas de elección de éstas. Análogamente, hay $2^4 - 1 = 15$ maneras de elección de los patos y $2^2 = 1 = 3$ de elección de los gansos. En total hay $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$ modos.

64.

Este número es igual a $P(m, n, p) = \frac{(m+n+p)!}{m!\, n!\, p!}$.

65.

Los libros encuadernados en negro se pueden permutar de $m!$ maneras, y los que lo están en rojo, de $n!$. En total, hay, según la regla del producto, $m!n!$ formas. Si los libros encuadernados en negro están juntos, hay que elegir además para éstos el lugar entre los encuadernados en rojo, cosa que puede efectuarse de $n + 1$ modos. En total, obtenemos

$m!\, n!\, (n+1) ! = m!\, (n+1)!$ formas.

66.

Cada una de las 15 personas puede figurar o no en el grupo. Como éste no puede ser vacío, obtenemos $2^{15} - 1 = 32\,767$ maneras. Para n personas habrá $2^n - 1$ formas.

67. El número p_k puede figurar en el divisor α dado con índices $0, 1, \ldots, \alpha_k$: en total, de $\alpha_k + 1$ maneras. En virtud de la regla del producto, el número de divisores es igual a $(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$. Para hallar la suma de los divisores, consideremos la expresión

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \ldots (1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n}).$$

Si se abren paréntesis en ésta, obtendremos una suma, en la que cada divisor figurará exactamente una vez. Según la fórmula de la suma de una progresión geométrica, obtenemos que esta suma es igual a

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}.$$

68.

Coloquemos primero en cada paquete una moneda de 50 kopeks. Después, habrá que distribuir en los 5 paquetes 7 monedas restantes. Esto se puede efectuar de $C_4^{11} = 330$ maneras (véase la pág. 132).

69.

Agreguemos a los 20 libros 4 objetos de separación iguales, y consideremos todas las permutaciones de los objetos obtenidos. El número de éstas es igual a $24!/4!$. A cada permutación le corresponde su forma de distribución de los libros.

70.

En forma análoga al problema anterior, se obtiene que el número de maneras es igual a $8!/3! = 6720$.

71.

Como se toma en consideración sólo el número de votos, que obtuvo cada moción, hay que distribuir 30 «objetos» iguales en 5 «cajones». Para esto, agreguemos 4 objetos de separación iguales, y tomemos todas las permutaciones de los objetos obtenidos. El número de éstas es igual a $P(30,\ 4) = 46\,376$. A cada permutación le corresponde su distribución de votos.

72.

12 libros se pueden encuadernar en 3 colores de 3^{12} modos. De ellos, en $3 \cdot 2^{12}$ casos los libros estarán encuadernados en no más de dos colores, y en 3 casos en un solo color. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, en $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 = 519\,156$ casos los libros estarán encuadernados en tapas de los tres colores.

73.

Agreguemos a las 32 letras 5 «tabiques» iguales, y consideremos todas las permutaciones posibles de los objetos obtenidos, en las que no haya ningún tabique al principio o al final, ni haya dos tabiques juntos. Las letras se permutan de $32!$ maneras, y para los tabiques obtenemos 31 lugares, pudiéndolos colocar de C_5^{31} modos. Teniendo en cuenta que el orden de las palabras no tiene importancia, se obtienen $32!C_5^{31}/6!$ maneras de formar las palabras.

74.

12 personas se pueden escoger de C_{12}^{17} modos. En C_{10}^{15} casos entre los elegidos figurarán dos personas dadas. Por esto, quedan $C_{12}^{17} - C_{10}^{15}$ elecciones admisibles.

75.

Las piedras pueden ser permutadas de $P(5,\ 6,\ 7)$ maneras. En las permutaciones cíclicas y en las simetrías, el brazalete permanece invariable. Obtenemos, por esto, $P(5,\ 6,\ 7)/36 = \dfrac{18!}{36 \cdot 5!6!7!}$ modos.

76.

Si todas las piedras escogidas son de un mismo tipo, tenemos 3 modos; si se han escogido dos tipos de piedras, $2C_1^3 = 6$ modos, y si las tres piedras son diferentes, 1 modo. En total hay 10 formas.

77.

Las tazas se pueden distribuir de A_3^4 formas; los platillos, de A_3^5, y las cucharillas de té, de A_3^6. En total se obtienen, en virtud de la regla del producto, $A_3^4 \cdot A_3^5 \cdot A_3^6 = 172\,800$ maneras.

78.

Si el marido invita a k mujeres, el número de hombres que éste invita es igual a $6 - k$. Entonces la esposa invitará a $6 - k$ mujeres y k hombres. Según las reglas de la suma y del producto, esta elección se puede efectuar de $\sum\limits_{k=0}^{5} (C_k^5)^2 (C_{6-k}^7)^2 = 267\,148$ modos.

79.

En el costado izquierdo pueden estar sentados 0, 1, 2, 3 ó 4 personas de aquellas a las que les es indiferente la elección del costado. Si entre ellas han sido elegidas k personas, hay que escoger además $4 - k$ entre los 10 que prefieren el costado izquierdo. Después de esto, quedarán $12 + (9 - k)$ candidatos, entre los cuales elegimos 4 remeros para el lado derecho. En total, tendremos $C_k^9 C_{4-k}^{10} C_4^{21-k}$ formas de elección. Sumándolas con respecto a k, obtenemos la respuesta:

$$\sum_{k=0}^{4} C_k^9 C_{4-k}^{10} C_4^{21-k} =$$

$$= \frac{9!\,10!}{4!} \sum_{k=0}^{4} \frac{(21-k)!}{k!\,(9-k)!\,(4-k)!\,(6+k)!\,(17-k)!}.$$

80.

El número 9 se puede descomponer en tres sumandos distintos de tres maneras: $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$. La suma menor que 9 tendrá lugar en 4 casos: $1 + 2 + 3 =$

$6, 1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 =$ $= 8$. Como 3 fichas pueden ser extraídas de C_3^{10} formas, en $C_3^{10} - 4 = 116$ casos la suma no será menor que 9.

81.

Escojamos primeramente una carta de cada palo. Esto se puede efectuar de 13^4 modos. Después de esto, escojamos dos cartas más. Si son de distinto palo, esto se puede hacer de $C_2^4 \cdot 12^2 = 864$ maneras. Combinándolas con las diferentes formas de escoger las primeras 4 cartas y teniendo en cuenta la posibilidad de permutar el orden de elección de dos cartas de un mismo palo, se obtienen $216 \cdot 13^4$ modos. Si las dos nuevas cartas son de un mismo palo, obtenemos $4 \cdot C_2^{12} = 264$ maneras de elección. Por las mismas consideraciones, éstas conducen a $88 \cdot 13^4$ modos de elección de todas las cartas. En total, obtenemos $304 \cdot 13^4$ formas.

82.

En el primer día los participantes se pueden escoger de $C_6^{10} = 210$ formas; en el segundo, de $C_6^{10} - 1 = 209$, y en el tercero, de $C_6^{10} - 2 =$ $= 208$. En total habrá $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9\,129\,120$ maneras.

83.

Como $C_3^6 = 20$, cada forma de elección del grupo será utilizada exactamente una vez. El número de permutaciones de estas formas es igual a $20!$.

84.

Cada muchacho puede elegir entre 5 lugares de trabajo, y cada muchacha, de 4. En total, se obtienen $5^3 \cdot 4^2 = 2000$ formas de elección.

85.

En el primer lugar se puede escribir cualquiera de las 33 letras, y en cada uno de los siguientes, cualquiera de 32 (se excluye la precedente). En total, tendremos $33 \cdot 32^4 = 34\,503\,008$ palabras.

86.

Escojamos primeramente los premiados, y distribuyamos después entre ellos los libros. En virtud de la regla del producto, se obtienen $C_6^{20}P(3, 2, 1)$ maneras. En el segundo caso elegimos primero quién obtuvo el primer libro, luego, quién obtuvo el segundo y, al fin, a quién le tocó el tercero. En total, obtenemos $C_3^{20}C_2^{20}C_1^{20}$ formas de distribución.

87.

Pongamos en correspondencia a cada ficha (p, q) la ficha $(n - p, n - q)$. Si $p + q = n - r$, entonces será $(n - p) + (n - q) = n + r$. Por consiguiente, el numero de fichas con suma de puntos $n - r$ es igual al de fichas con suma de puntos $n + r$. El número total de todas las fichas del dominó será igual a C_2^{n+1}.

88.

Por la hipótesis del problema, los lugares ocupados por las mujeres y los hombres se alternan. Por esto, tendremos $2\,(7!)^2$ maneras.

89.

Escojamos un caballo de cada par AA', BB', CC' (hay 8 formas de elección), tres caballos de los restantes 10 (hay $C_3^{10} = 120$ formas) y elijamos el orden de enganchar éstos (6! maneras). En total habrá $8 \cdot 6! C_3^{10} = 691\,200$ modos.

90.

Las consonantes se pueden elegir de C_4^9 formas, y las vocales, de C_3^7. Las 7 letras elegidas pueden ser permutadas de 7! maneras. En total obtenemos $C_4^9 C_3^7 \cdot 7!$ modos. Si no puede haber dos vocales juntas, el orden de las letras es el siguiente: $CVCVCVC$. Aquí tenemos sólo $3!4!$ permutaciones y $C_4^9 C_3^7 3!4!$ palabras.

91.

En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, el número de empleados es igual a $6 + 6 +$ $+ 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11$. Sólo inglés conocen $6 - 4 - 2 + 1 = 1$, sólo francés, $7 - 3 -$ $- 2 + 1 = 3$.

92.

Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, $92 - 47 - 38 - 42 + 28 + 31 + 26 - 25 =$ $= 25$ personas llevaron empanadas.

93.

Los hombres pueden ser divididos en pares de $\frac{10!}{(2!)^5 5!}$ maneras (teniendo en cuenta las permutaciones dentro de los pares y las de los propios pares). Las mujeres se dividen de $10!/(2!)^5$ formas (aquí ya tiene importancia el orden de los pares). En total existen $(10!)^2/2^{10}5!$ modos.

94.

Escojamos primeramente un hombre y una mujer, los que quedarán en el mismo bote que el par escogido antes (9^2 formas). Después, dividimos los restantes en 4 grupos de $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ maneras. En total, habrá $\frac{(9!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ modos.

95.

Si dos hombres dados quedan en un mismo grupo (y en ésto se encuentran también sus esposas), los restantes se pueden dividir en grupos de $\frac{(8!)^2}{2^8 \cdot 4!}$ maneras. Si, en cambio, quedan en distintos grupos, éstos pueden ser completados de $(A_2^3)^2$ formas y, después de esto, se puede dividir a los demás en grupos de $\frac{6!}{2^6 \cdot 3!}$ modos. En total, obtenemos $17\,(8!)^2/2^8 4!$ maneras.

96.

Como los números no pueden comenzar por el cero, tendremos $7^4 - 7^3 = 2058$ números.

97.

Si el número representado por las tres primeras cifras es igual a x, el que representan las últimas tres puede adquirir los valores $0, 1, \ldots, 999 - x$: en total, $1000 - x$ valores. Como x varía de 100 a 999, debemos hallar la suma de los números naturales del 1 al 900. Esta es igual a 405 450.

98.

Las fichas blancas se pueden disponer de C_{12}^{32} maneras. Después de la elección de 12 casillas para las fichas blancas, quedarán 20 para las negras, sobre las cuales se las puede ubicar de C_{12}^{20} formas. En total, hay $C_{12}^{32} C_{12}^{20}$ modos.

99.

Dividamos todas las permutaciones de las letras de la palabra «olivar» en clases, de forma que las pertenecientes a una misma clase se diferencien entre sí sólo en el orden de las vocales. El número de clases es igual a $P_6/P_3 = 120$. Solamente una permutación de cada clase satisface la condición planteada. Por esto, su número es también igual a 120.

100.

En las permutaciones en que las cuatro «a» van juntas, se las puede unir y considerar como una sola letra. Por esto, el número de estas permutaciones es igual a 5! Quedan $P\,(4, 1, 1, 1, 1) - 5! = 1560$ permutaciones.

101.

Si la «g» va inmediatamente después de una «o», estas letras se pueden unir. Por esto, el número de permutaciones buscadas es igual a $P\,(2, 1, 1, 1, 1) = 360$.

102.

Escribamos primeramente todas las letras de la palabra «cloroformo» distintas de la «o», lo que puede hacerse de $P\,(2, 1, 1, 1, 1)$ maneras. Después de esto, escogemos 4 de los 7 lugares, en los que se pueden colocar las letras «o». En total, obtenemos $P\,(2, 1, 1, 1, 1) \cdot C_4^7$ formas.

103.

Tanto las vocales como las consonantes se pueden permutar entre sí de $P\,(2, 1, 1) = 12$ modos. Si ya han sido dispuestas las consonantes, para las vocales quedarán 5 lugares. Por esto, los lugares para ellas pueden ser elegidos de $C_4^5 = 5$ maneras. En total, tendremos $5 \cdot 12^2 = 720$ modos.

104.

Escribamos las vocales en el orden dado. Entonces, para la letra «c» tendremos 5 lugares. Después de escribirla, habrá 6 lugares para la «r» y, por último, 7 para la «l». En total, $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ modos.

105.

Al igual que en el problema anterior, obtenemos que el número de formas es igual a $A_7^{11}/P_3 = 277\,200$ (hay que tener en cuenta que la letra «l» figura tres veces en nuestra palabra).

106.

Fijemos primeramente la sucesión de las vocales (hay 2 formas), y después ubiquemos entre ellas a 2 consonantes (hay $A_2^4 = 12$ maneras). La primera de las consonantes que quedan se puede colocar antes o después de ambas vocales (2 formas), y para la segunda ya tendremos tres lugares. En total, obtenemos $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 3 = 144$ modos.

107.

Escojamos 3 letras de las 5 consonantes, y coloquémoslas en los lugares indicados (existen A_3^5

formas). Las 5 letras restantes se disponen arbitrariamente en los 5 lugares que quedan (hay 5! modos). En total, habrá $5!A_3^2 = 7200$ maneras.

108.

En virtud de la regla del producto, hay $C_2^4C_1^6 = 30$ maneras; $C_1^4C_1^3 = 12$ formas.

109.

$P(3, 1, 1, 1) - 4! = 96$ modos (véase el problema 100).

110.

Dispongamos primeramente las consonantes (hay 3! formas). Para las 3 letras «o» quedarán 4 lugares, y se las puede disponer de 4 maneras. En total habrá 24 modos.

111.

La letra «o» puede figurar entre las escogidas 0, 1, 2, 3 ó 4 veces (de 5 formas), la «k», de tres formas, etc. En total, se obtiene $5\cdot3\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3 = 2025$ agrupaciones.

112.

El número de combinaciones en las que las tres letras son distintas es igual a $C_6^3 = 20$; el de combinaciones que contienen exactamente 2 letras distintas, a $6\cdot5 = 30$, y el de las que contienen sólo una letra, a 2. En total hay 52 formas de elección.

113.

Si se tiene en cuenta también el orden de las letras, se obtienen $A_3^6 + 3A_2^6 + 2 = 212$ maneras.

114.

Como el orden tanto de las vocales como de las consonantes está determinado, hay que escoger sólo 3 lugares entre 7 para las vocales. Esto puede hacerse de C_3^7 maneras.

115.

Para la palabra «espirales», la primera y última letras deben ser consonantes. Estas se pueden permutar de $P(2, 1, 1, 1)$ formas, y las vocales, de $P(2, 1, 1)$ maneras. En total, tendremos $P(2, 1, 1, 1)\cdot P(2, 1, 1) = 720$ modos. Para la palabra «samovar» existen $P_4\cdot P(2, 1) = 72$ permutaciones.

116.

Hay que escoger 3 lugares entre 6 para la letra «a», cosa que puede efectuarse de $C_3^6 = 20$ maneras. Si se agrega la condición de que no haya dos «a» seguidas, para éstas habrá solamente 4 lugares, y tendremos $C_3^4 = 4$ formas.

117.

Las letras de la palabra «tic-tac» se pueden permutar de 180 modos. En 60 de estas permutaciones estarán juntas las dos «t» (no tenemos en cuenta el guión); en 60, las dos «c», y en 24, ambas letras. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos $180 - 60 - 60 + 24 = 84$ permutaciones admisibles. Para la palabra «tam-tam» tendremos $90 - 30 - 30 - 30 + 12 + 12 + 12 - 6 = 30$ permutaciones admisibles.

118.

Hay 3 agrupaciones que contienen las 3 letras «t», «a», «m», y 3 que contienen 2 letras diferentes cada una. En total, hay 6 agrupaciones. Los números diferentes de cuatro cifras que se pueden formar a partir de las cifras del número 123 123 constituyen $3P(2, 1, 1) + 3P(2, 2) = 54$.

119.

Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos que todas las cifras 1, 2, 3, 4 están contenidas en $10^6-4\cdot9^6 + 6\cdot8^6 - 4\cdot7^6 + 6^6 = 23\,160$ números. Sólo por las cifras 1, 2, 3, 4 estarán formados $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 =$

$$= \frac{4^7-4}{3} = 5460 \text{ números.}$$

120.

Cada cifra aparece en cada columna 6 veces ($P_4/4$). Por esto, sumando las cifras de la primera columna, obtenemos $6(1 + 2 + 3 + 4) = 60$, sumando las de la segunda, 600, etc. En total, se obtienen $60 + 600 + 6000 + 60\,000 = 66\,660$.

121.

Aquí el número total de permutaciones es igual a 12; las cifras 1 y 5 aparecen en cada columna 3 veces cada una, y la 2, 6 veces. Por esto, la suma de las cifras de la primera columna será igual a $3\cdot1 + 3\cdot5+6\cdot2 = 30$. La suma total es igual a $30 + 300 + 3000 + 30\,000 = 33\,330$.

122.

Análogamente se obtiene que la suma es igual a 11 110.

123.

La suma es igual a 16 665.

124.

Si se quita la limitación de que la cifra 0 no sea primera, se obtiene una suma de 2 666 640. La de los números que «empiezan por 0» es igual a 66 660. Por esto, la suma de los números de cinco cifras que no comienzan por la cifra «0» es igual a 2 599 980.

125.

Como mediante las cifras «8» y «9» se pueden escribir 2^k números de k cifras, la cantidad total de números buscados es igual a $\sum_{k=1}^{6} 2^k = 126$.

126.

Análogamente se obtiene $\sum_{k=1}^{6} 3^k = 1092$.

127.

Como la primera cifra no puede ser 0, se obtienen $2\sum_{k=1}^{6} 3^k = 728$ números.

128.

Cada cifra se repite en cada columna $4^2 = 16$ veces. Por esto, la suma de las cifras de la primera columna es igual a $16(1+2+3+4) = 160$, la de las cifras de la segunda, a 1600, y de la tercera, a 16 000. La suma es igual a 17 760.

129.

En el primer caso la suma es igual a 3 999 960. En el segundo, cada cifra se repite A_8^4 veces en cada columna, y obtenemos una suma de cifras de la primera columna de $A_8^4(1+2+\ldots+9) = 75\,600$; la suma total es igual a 839 991 600.

130.

En el último lugar puede estar la cifra 3 o la 9; las restantes se pueden permutar de 3! maneras. En total, obtenemos 12 números impares. Análogamente se obtiene que la cantidad de números pares es igual a 12.

131.

Los lugares para las cifras impares se pueden escoger de $C_6^3 = 20$ formas. En cada lugar puede estar una de las 5 cifras (o par, o impar). En total, obtenemos $20\cdot 5^6$ números. Pero entre ellos $10\cdot 5^5$ comienzan por cero. Quedan $20\cdot 5^6 - 10\cdot 5^5 = 281\,250$ números.

132.

$C_6^3\cdot 5^6 = 312\,500$ números.

133.

En el primer lugar puede estar una de las 9 cifras; en el 2º, 3º, 4º y 5º, una de las 10, y en el último, una entre 5 (su paridad está determinada). En total, obtenemos $9\cdot 10^4\cdot 5 = 450\,000$ números. Si se toman todos los números del 1 al 999 999, se obtendrán 499 999 números.

134.

Si se excluyen los ceros, las cifras restantes darán una de las sucesiones siguientes: 3; 2,1; 1,2; 1, 1, 1. Queda por distribuir los ceros, de forma que la primera cifra sea distinta de cero. Para el 3 esto se puede hacer de una manera, para 2, 1 y 1, 2, de nueve (según la cantidad de ceros que se hallen entre estas cifras), y para 1, 1, 1, de C_9^2 modos. En total habrá $1 + 9 + 45 = 55$ números. Si se toman todos los números del 1 al 9 999 999 999, hay que escoger los lugares para las cifras distintas de cero. Para el 3, esto se puede hacer de C_1^{10} maneras, para el 2, 1 y 1, 2, de C_2^{10}, y para 1, 1, 1, de C_3^{10}. En total, obtenemos $C_1^{10} + 2C_2^{10} + C_3^{10} = 340$ números.

135.

En el primer lugar puede estar cualquiera de las 9 cifras 1, 2, . . ., 9. El segundo lo puede ocupar cualquiera de las 9 restantes, el tercero, cualquiera de las 8, etc. En total, se obtienen $9\cdot 9!$ números.

136.

La cantidad de números del 0 al 999 que se dividen por 5 es igual a $E\left(\frac{1000}{5}\right)$, siendo $E(x)$ la parte entera de x. Análogamente, por 7 se dividen $E\left(\frac{1000}{7}\right)$ números, y por 35, $E\left(\frac{1000}{35}\right)$. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene que

$$1000 - E\left(\frac{1000}{5}\right) - E\left(\frac{1000}{7}\right) + E\left(\frac{1000}{35}\right) = 686$$

números no se dividen ni por 5, ni por 7.

137.

Análogamente, se halla que la cantidad de números buscados es igual a 228.

138.

La cantidad de números que se escriben sin la cifra 9 es igual a 729. Por esto, la cifra 9 está contenida en $1000 - 729 = 271$ números. Exactamente 2 veces la cifra 9 figura en 27 números (099, 990, 909, 199, etc.). El cero figura en 1 número de una cifra, 9 de dos cifras y 171 de tres; en total, figura en 181 números. Dos veces el cero figura en 9 números. Las dos cifras 0 y 9 figuran en 36 números (si la tercera cifra es distinta de 0 y 9, habrá $2 \cdot 2 \cdot 8$ variantes, y si es igual a 0 ó a 9,4 variantes más). Las cifras 8 y 9 figuran en 54 números. La cantidad de números de n cifras que no contienen dos cifras iguales seguidas es igual a 9^n si $n > 1$, y a 10 si $n = 1$. Por esto, la cantidad de estos números, del 0 al 999 999, es igual a $10 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6 = 597\,871$.

139.

El número de cuatro cifras puede estar formado por cuatro cifras distintas (1, 2, 3, 5), o por dos iguales y dos diferentes (1, 1, 2, 3; 1, 1, 2, 5; 1, 1, 3, 5; 1, 2, 3, 3; 1, 3, 3, 5; 2, 3, 3, 5) o, por último, por dos pares de cifras iguales (1, 1, 3, 3). Por esto, la cantidad total de estos números es igual a

$$P_4 + 6P(2, 1, 1) + P(2, 2) = 24 + 6 \cdot 12 + 6 = 102.$$

140.

En forma análoga al problema anterior, obtenemos la respuesta:

$$2P(2, 1, 1, 1) + 3P(3, 1, 1) + 2P(2, 2, 1) + 3P(4, 1) = 255.$$

141.

En el número de seis cifras pueden figurar uno, dos o tres pares de cifras iguales. Un par se puede escoger de C_1^5 maneras. El número de permutaciones de 4 cifras distintas y 2 iguales es igual a $P(2, 1, 1, 1, 1) = 6!/2! = 360$. Entre ellas, en $5! = 120$ permutaciones dos cifras iguales estarán juntas. Por consiguiente, en este caso obtenemos $5(360 - 120) = 1200$ números de seis cifras. Dos pares de cifras iguales pueden ser escogidos de $C_2^5 = 10$ maneras, luego de lo cual de $C_2^3 = 3$ formas se pueden escoger dos cifras más. La cantidad total de permutaciones de estas cifras es igual a $P(2, 2, 1, 1) = 180$, con la particularidad de que en $2 \cdot \frac{5!}{2!} = 120$ de ellas hay por lo menos un par de cifras iguales seguidas, y en $4! = 24$ permutaciones dos de estos pares. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene que esto caso nos da $10 \cdot 3 \times (180 - 120 + 24) = 2520$ números necesarios. Análogamente se halla que tres pares de cifras iguales los tienen

$$C_3^5\left(\frac{6!}{(2!)^3} - 3 \cdot \frac{5}{(2!)^2} + 3 \cdot \frac{4!}{2!} - 3!\right) = 300$$

números necesarios. En total, obtenemos 4020 números.

142.

La cantidad total de números de cinco cifras que pueden formarse a partir de las cifras dadas, es igual a

$$3 \cdot \frac{5!}{2!} + C_2^3 C_1^2 \frac{5!}{(2!)^2} + C_1^3 \cdot \frac{5!}{3!} + C_1^2 \cdot \frac{5!}{3!\,2!} = 440.$$

Entre ellos en $3P_3 + 2\frac{P_3}{2!} = 24$ la cifra 3 se repite 3 veces seguidas. Obtenemos así 416 números buscados.

143.

El número total de permutaciones de las cifras dadas es igual a $P(2, 2, 2, 2)$. Entre ellas, en $P(2, 2, 2, 1)$ permutaciones una cifra dada se halla dos veces seguidas; en $P(2, 2, 1, 1)$ se repetirán seguidas 2 cifras dadas; en $P(2, 1, 1, 1)$, 3 cifras dadas, y en $P(1, 1, 1, 1)$, 4 cifras dadas. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos que no habrá 2 cifras que se repitan en

$$P(2, 2, 2, 2) - 4P(2, 2, 2, 1) + 6P(2, 2, 1, 1) - 4P(2, 1, 1, 1) + P(1, 1, 1, 1) = 864$$

permutaciones.

144.

Análogamente se obtiene que el número de permutaciones es igual a

$$\frac{8!}{(2!)^3}-3\cdot\frac{7!}{(2!)^2}+3\cdot\frac{6!}{2!}-5!=2220.$$

145.

De igual forma, tendremos

$$\frac{10!}{(3!)^2}-2\cdot\frac{8!}{3!}+6!=88080.$$

146.

Análogamente se obtiene la respuesta 20 040.

147.

Si se ha escogido un número, el segundo se puede elegir de 10 maneras (ya que su paridad ya es conocida). Teniendo en cuenta la posibilidad de permutar estos dos números, se obtienen $\frac{20\cdot 10}{2}=100$ modos de elección.

148.

O los tres números escogidos son pares, o bien uno es par y dos son impares. Por esto, obtendremos $C_3^{15}+C_1^{15}C_2^{15}=2030$ maneras de elección.

149.

En 11 puntos del camino se puede elegir entre dos posibilidades. Por esto, la cantidad de caminos es igual a $2^{11}=2048$.

150.

Como la elección en el punto inicial ya fue efectuada, quedarán $2^{10}=1024$ posibilidades.

151.

Análogamente hallamos que el número de formas es igual a $3^5=243$.

152.

Si se han escogido p monedas por valor de 10 kopeks, se pueden tomar $0, 1, \ldots, 20-p$ de 15 k.: en total hay $21-p$ formas. Como p varía de 0 a 20, tendremos en total $1+2+3+\ldots+21=312$ maneras de eleccion.

153.

El número de combinaciones distintas de monedas es igual a $C_5^{13}=1287$. Por esto, puede haber 1286 respuestas incorrectas.

154.

La cantidad de números de cinco cifras es igual a 90 000. Entre ellos, cada cifra es un número par en $4\cdot 5^4=2500$ casos, e impar, en $5^5=3125$. Las cifras menores que 6 no figuran en $4^5=1024$ casos, y las mayores que 3, en $3\cdot 4^4=768$. Todos las cifras 1, 2, 3, 4, 5 están contenidas en $5!=120$ números, y todas las 0, 2, 4, 6, 8, en $4\cdot 4!=96$.

155.

De la hipótesis del problema se aprecia que distintos resultados de echar los dados darán igual suma sólo si se obtienen uno del otro permutando los dados. Por esto, la cantidad de sumas distintas es igual a $C_2^6+6=21$.

156.

Análogamente obtenemos la respuesta $C_3^6+2C_2^6+6=56$.

157.

Un solo tipo de puntos habrá en 6 casos. Dos tipos pueden caer de las tres maneras siguientes: un dado del primer tipo y 5 del segundo, o dos del primero y cuatro del segundo, o tres de cada uno. En el primer caso, el tipo de los dados se puede escoger de A_2^6 maneras, y cualquiera de los 6 puede dar puntos del primer tipo. Esto nos da $6A_2^6=180$ casos. Análogamente, la variante $2+4$ nos dará $A_2^6P(2, 4)=450$ casos, y la $3+3-C_2^6P(3, 3)=300$ casos. Así, pues, dos tipos de puntos se obtienen en $180+450+300=930$ casos. Para tres tipos de puntos, hallamos primero todas las particiones del número 6 en 3 sumandos: $6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$. En correspondencia con esto, resulta

$$\frac{1}{2!}A_3^6P(1, 1, 4)=1800,$$

$$A_3^6P(1, 2, 3)=7200,$$

$$\frac{1}{3!}A_3^6P(2, 2, 2)=1800,$$

obteniéndose e ntotal 10 800 casos en que caen exactamente 3 tipos de puntos.
En 4 sumandos, el número 6 se descompone como sigue: $6=1+1+1+3=1+1+2+2$.

Estas variantes nos dan $\frac{1}{3!}A_4^6P(1, 1, 1, 3)=$

$= 7200$ y $\frac{1}{(2!)^2} A_4^6 P(1, 1, 2, 2) = 16\,200$, habiendo en total 23 400 casos en que caerán 4 tipos de puntos.

Para 5 tipos tendremos $\frac{1}{4!} A_5^6 P(1, 1, 1, 1, 2) =$ 10 800 casos, y para 6, $6! = 720$. Obsérvese que $6 + 930 + 10\,800 + 23\,400 + 10\,800 + 720 = 6^6$.

158.

Al echar los dados, éstos se dividen en grupos, según la cantidad de puntos que cayeron en cada uno. Por esto, hay que hallar la cantidad de maneras de dividir n dados en 6 grupos. Este número es igual a C_5^{n+5} (véase la pag. 132).

159.

Como $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$, cualquier desarrollo de un millón en tres factores tendrá la forma

$$1\,000\,000 = (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1})(2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2})(2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}),$$

siendo α_1, α_2, α_3, β_1, β_2 β_3 números enteros no negativos, tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 6$. Como 6 se descompone en 3 sumandos enteros no negativos de $C_8^2 = 28$ modos, el número de desarrollos será igual a $28^2 = 784$, si se tiene en cuenta el orden de los factores.

160.

Los desarrollos obtenidos en el problema anterior se dividen en tres clases: o los tres factores coinciden, o coinciden dos, y el tercero es distinto de ellos, o son los tres diferentes. La primera clase está formada por el único desarrollo $1\,000\,000 = 100 \cdot 100 \cdot 100$. Hallemos el número de desarrollos de la segunda. Si los factores que coinciden son de la forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$, obtendremos $2\alpha + \alpha_3 = 2\beta + \beta_3 = 6$. Pero la ecuación $2x + y = 6$ tiene 4 soluciones entre los números enteros positivos: $x = 0$, $y = 6$; $x = 1$, $y = 4$; $x = 2$, $y = 2$; $x = 3$, $y = 0$. Como cualquier α se puede combinar con cualquier β, obtenemos 16 variantes para $2^\alpha \cdot 5^\beta$. Una de ellas, precisamente la $2^2 \cdot 5^2$, debe desecharse, pues conduce al desarrollo de la primera clase. Quedan 15 variantes. Cada una de ellas conduce a tres desarrollos, según el lugar que ocupe el tercer factor. Por lo tanto, la segunda clase está formada por 45 desarrollos. Si no se tiene en cuenta el orden de los factores, se obtienen 15 desarrollos. Por último, el número de desarrollos de la tercera clase es igual a $784 - 1 - 45 = 738$. Estos se dividen en grupos que se diferencian sólo por el orden de los factores, y están formados por 6 desarrollos cada uno. Por esto, si no se tiene en cuenta el orden de los factores, se obtienen $1 + 15 + 123 = 139$ desarrollos.

161.

Cada moneda puede quedar en uno de los dos bolsillos. Por esto, tendremos 2^9 maneras.

162.

Dispongamos los objetos en algún orden, y démoslo a la primera persona los primeros n, a la segunda, los n siguientes, y la última, los objetos restantes. Como el orden de los elementos en los grupos no tiene importancia, obtendremos $C_n^{3n} C_n^{2n} = \frac{(3n!)}{(n!)^3}$ formas de distribución.

163.

En forma totalmente análoga al problema anterior, obtenemos que el número de descomposiciones es igual a $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

164.

Análogamente se obtiene la respuesta $\frac{(nk)!}{(k!)^n n!}$.

165.

$\frac{30!}{(10!)^3 3!}$, $\frac{30!}{(3!)^{10} 10!}$.

166.

4 ases se pueden dividir en dos mitades de $\frac{4!}{(2!)^3} = 3$ maneras, y las 32 cartas restantes, de $\frac{32!}{(16!)^2 2!}$. Como estas particiones se pueden combinar entre sí de dos maneras, obtenemos $\frac{3 \cdot 32!}{(16!)^2}$ formas de partición.

167.

El número de maneras es igual a $\frac{10!}{2^5 \cdot 5!} = 945$.

168.

945.

169.

$9!/(3!)^4 = 280.$

170.

Tres personas pueden repartirse 6 manzanas de C_2^8 maneras; cada una de las frutas restantes puede tocarle a cualquiera de los tres, y podemos repartirlas de 3^6 formas. En total, se obtienen $3^6C_2^8 = 20\,412$ modos de reparto.

171.

Distribuyamos primero las manzanas. Como cada uno obtiene no más de 4, esta distribución puede efectuarse, salvo posibles permutaciones, de una de las formas siguientes: $6 = 4 + 2 + 0 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 + 0 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2$. Si las manzanas están distribuídas según el esquema $4 + 2 + 0$, habrá que escoger 2 frutas más de entre 6 para el segundo, y entregar las restantes al tercero. Esto se puede efectuar de C_2^6 maneras. Teniendo en cuenta la posibilidad de permutar las personas, se obtienen $3!\ C_2^6$ formas de reparto. Según el esquema $4 + 1 + 1$, habrá que elegir 3 frutas para el segundo, de entre las 6 restantes (C_3^6 modos). Como dos personas tienen igual cantidad de manzanas, el número de permutaciones de las personas es igual a $P(2,\ 1) = 3$. Por el esquema $3 + 3 + 0$, habrá que elegir una fruta de entre 6 para el primero y una de las 5 restantes para el segundo. Aquí también habrá 3 permutaciones de personas. Análogamente se estudian los esquemas restantes. En total, obtenemos

$$6C_2^6+3C_3^6+3C_1^6C_1^5+6C_1^6C_2^5+C_2^6C_2^4=690$$

formas de distribución.

172.

Como $9=6+3+0=6+2+1 = 5 + 4+0=5+2+2=4+3+2=3+3+3$, obtenemos, al igual que en el problema anterior,

$$6\,[C_3^9+C_4^9+C_1^9C_2^8+C_1^9C_3^8+C_2^9C_3^7]+ \\ +3\,(C_1^9C_4^8+C_2^9C_2^7)+C_3^9C_3^6=19\,068$$

maneras de distribución.

173.

Una baraja se puede repartir entre 13 jugadores de $\frac{52!}{(4!)^{13}}$ maneras (véase el problema 162). Si cada uno debe tener una carta de cada palo, para cada palo obtenemos una permutación de 13 cartas; como las permutaciones de los palos no dependen unas de las otras, obtendremos, en virtud de la regla de la suma, $(13!)^4$ formas. En el tercer caso, un jugador puede escoger una carta de cada palo de 13^4 modos. Después de esto, las 12 cartas restantes de cada palo se pueden dividir en 3 grupos de $\frac{12!}{(4!)^3 3!}$ maneras, y todas las restantes, de $\frac{(12!)^4}{(4!)^{12}(3!)^4}$ modos. Estos grupos se pueden repartir entre 12 jugadores de $12!$ maneras. Teniendo en cuenta que el jugador que tenga todos los palos puede ser escogido de 13 formas, obtenemos para el tercer caso la respuesta $\frac{(13!)^5}{(4!)^{12}(3!)^4}$.

174.

4 cartas pueden ser extraídas, de una baraja completa, de C_4^{52} maneras. Exactamente 3 palos habrá en $A_2^4\,(C_1^{13})^2C_2^{13} = 518\,184$ casos: escogemos el palo que falta y el que se repite de A_2^4 maneras, después de lo cual escogemos dos cartas del palo que se repite de C_2^{13} modos, y de a una carta de otros dos palos de $(C_1^{13})^2$ modos. Exactamente dos palos habrá en $C_2^4\,(C_2^{13})^2 + A_2^4C_3^{13}C_1^{13} = 81\,120$ casos. En efecto, esto es posible si tenemos dos cartas de cada dos palos, o una de un palo y tres de otro. En el primer caso hay que escoger dos palos y dos cartas en cada uno de ellos, y en el segundo, elegir el primero y el segundo palos (aquí ya tiene importancia el orden de éstos) y después tomar tres cartas del primero y una del segundo.

175.

Dividamos las 13 cartas de cada palo según el esquema $3 + 3 + 3 + 4$. Esto se puede efectuar de $\frac{13!}{4!(3!)^4}$ maneras. Los grupos de 4 cartas se pueden repartir entre los jugadores de $4!$ formas, y los de 3 de cada palo, de $3!$. En total obtenemos $(3!)^4 4!$ modos de distribución de los grupos. Las cartas, a su vez, pueden ser repartidas de

$$\left(\frac{13!}{4!\,(3!)^4}\right)^4 4!\,(3!)^4=\frac{(13!)^4}{(4!)^3\,(3!)^{12}}$$

formas.

176.

Distribuyamos a los participantes del reparto en cierto orden. Después de esto, dispongamos, de todas las formas posibles, 18 objetos en orden y dividámoslos en 4 grupos de 4 objetos cada uno y 1 de 2 objetos. El grupo de dos objetos lo otorgamos a uno de los 5 participantes del reparto, dando los grupos restantes a los demás (el primer grupo al primero; el segundo, al segundo, etc.). Como el orden de los elementos en los grupos no tiene importancia, se obtienen $\frac{5\cdot 18!}{(4!)^4 2!}$ formas de reparto. En el segundo caso, análogamente, obtendremos $\frac{18!\, C_2^5}{(4!)^3(3!)^2}$ modos.

177.

Para cada par de elementos hay tres posibilidades: en la elección pueden figurar dos, uno o ninguno del par. Por esto, la cantidad de elecciones es igual a $3^{14} = 4\,782\,969$.

178.

Las 4 esferas negras se pueden distribuir en 6 paquetes de C_5^9 maneras. Para las blancas y las azules tendremos la misma cantidad de formas. En virtud de la regla del producto, obtenemos $(C_5^9)^3 = 2\,000\,376$ maneras.

179.

Análogamente obtenemos la respuesta $C_3^6 C_3^{13} = 5720$.

180.

Representemos cada partición del número n en sumandos en forma de un diagrama puntual. Si agregamos a éste una columna de n puntos, obtendremos un diagrama para la partición del número $2n$ en n sumandos.

181.

Escojamos tres números naturales cualesquiera, del 1 al $n-2$; agreguemos 2 al mayor de ellos y 1 al segundo en magnitud. Obtendremos tres números, de los cuales no habrá dos juntos. Estos dan, precisamente, los números de los objetos elegidos. De este modo, la elección se puede efectuar de C_3^{n-2} formas.

182.

De $P(2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{16!}{2^6}$ maneras.

183.

Podemos ocupar las casillas libres por fichas iguales y obtener una permutación de 48 fichas y de las figuras indicadas en el problema. El número de estas permutaciones es igual a $P(48, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = \frac{64!}{2^6 48!}$.

184.

Por el mismo procedimiento se obtiene la respuesta $P(32, 8, 8, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$.

185.

Supongamos que se han ocupado p casillas por fichas blancas y q por negras. Las 15 fichas blancas se pueden colocar en p casillas, de modo que todas las casillas queden ocupadas, de C_{p-1}^{14} maneras, y las 15 negras en q casillas, de C_{q-1}^{14}. Se pueden escoger p casillas para las fichas blancas y q para las negras de $P(p, q, 24-p-q)$ maneras. Por eso, el número total de formas es igual a

$$\sum_{p,\,q} P(p, q, 24-p-q)\, C_{p-1}^{14} C_{q-1}^{14},$$

donde la suma se toma por todos los p y q tales que

$$1 \leqslant p \leqslant 15, \quad 1 \leqslant q \leqslant 15, \quad p+q \leqslant 24.$$

186.

Unamos en un mismo grupo las casillas que se transforman una en la otra cuando el tablero se gira en 90°. Por hipótesis, las fichas ocupan 5 de estos grupos, siendo el número total de ellos igual a 16. Por esto, tendremos $C_5^{16} = 4368$ formas de distribución.

187.

Se resuelve análogamente al problema anterior. Hay C_{10}^{32} maneras.

188.

Ahora hay dos veces menos casillas, por lo que tendremos C_{10}^{16} modos.

189.

En una mitad del tablero hay que colocar 6 fichas blancas y 6 negras, sobre 16 casillas negras. Esto puede efectuarse de $P(6, 6, 4) = \frac{16!}{6!\,6!\,4!}$ modos.

190.

Hay que escoger 12 casillas en una mitad del tablero, entre 16, y colocar en ellas fichas cualesquiera, ocupando en la segunda mitad casillas simétricas con fichas de color opuesto. La elección de las casillas puede efectuarse de C_{12}^{16} formas, y la del color de las fichas que ocupan estas 12 casillas, de 2^{12}. En total, se obtienen $2^{12}C_{12}^{16} =$ 17 454 720 maneras.

191.

La posición de las fichas se determina por cuáles 5 casillas de 7 de la primera fila horizontal están ocupadas por fichas blancas. Por esto, tendremos $C_5^7 = 21$ formas.

192.

Las posiciones se dividen en dos clases, según esté ocupada o no la casilla angular. Si éstas se hallan ocupadas, sobre la primera vertical y la primera horizontal habrá 8 fichas más en 12 casillas no angulares. Estas se pueden disponer de $C_8^{12} = 495$ maneras. Si las casillas angulares están libres, en las 12 no angulares de la primera vertical y horizontal habrá 10 fichas. Se las puede disponer de $C_{10}^{12} = 66$ maneras. En total, tendremos 561 modos de distribución.

193.

Las 7 esferas blancas se pueden colocar en 9 hoyos de C_8^{15} formas, y las dos negras, de C_8^{10}. En total, tendremos $C_8^{15}\cdot C_8^{10} = 289\,575$ modos.

194.

Análogamente, se obtienen $C_8^{15}\,(C_8^9)^2 = 521\,235$ maneras.

195.

Escojamos primero 9 libros para la persona C. Esto se puede efectuar de C_9^{27} maneras. Los 18 libros restantes se pueden distribuir entre A y B de 2^{18} modos. En total, tendremos $2^{18}C_9^{27}$ formas de reparto.

196.

Los 8 pasajeros se pueden distribuir entre los pisos de 4^8 modos. Entre ellos, en 3^8 casos no saldrá ningún pasajero en un piso dado, en 2^8, en dos pisos dados, y en 1, en tres pisos prefijados. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos la respuesta $4^8 - 4\cdot 3^8 + 6\cdot 2^8 - 4 = 40\,824$.

197.

Son posibles los siguientes casos: por 3 se dividen los tres sumandos, uno y ninguno de ellos. En el primer caso, los sumandos se pueden escoger de C_3^{33} maneras. En el segundo, un sumando da como resto 1 y el otro, 2. Como hay 34 números del 1 al 100 que dan 1 como resto, 33 que se dividen por 3 y otras tantas que dan como resto 2, en el segundo caso tendremos $C_1^{34}\,(C_1^{33})^2$ formas. Si ninguno de los tres sumandos se divide por 3, éstos darán como resto 1, 1 y 1, o bien 2, 2 y 2. Correspondientemente, obtenemos C_3^{34} o C_1^{33} casos. En total, habrá $2C_3^{33} + C_3^{34} + C_1^{34}\,(C_1^{33})^2 = 53\,922$ modos de elección.

198.

El problema se resuelve en forma análoga al precedente. La respuesta será

$$3C_3^n + (C_1^n)^3 = \frac{n}{2}\,(3n^2 - 3n + 2).$$

199.

Si se han colocado p esferas blancas, los hoyos ocupados se pueden escoger de C_p^{n+1} formas. Luego, quedarán $n - p + 1$ hoyos para la esfera negra y, además, se puede no colocarla en absoluto. Obtenemos así $n - p + 2$ posibilidades. Por esto, la respuesta tendrá la forma $\sum\limits_{p=0}^{n} (n - p + 2)\ C_p^{n+1} = \sum\limits_{s=1}^{q} sC_s^q + \sum\limits_{p=0}^{q-1} C_p^q$. Como $\sum\limits_{s=1}^{q} sC_s^q = q2^{q-1}$ y $\sum\limits_{p=0}^{q-1} C_p^q = 2^q - 1$ (véase el problema 401a), obtenemos la respuesta $(q + 2)\, 2^{q-1} - 1$.

200.

Designemos un conjunto no vacío de esferas blancas por la letra B, y el de negras, por N. De la hipótesis del problema se deduce que las esferas se distribuyen según uno de los esquemas NBNB . . . NB, o bien BNBN . . . BN, figurando r pares en cada conjunto. Pero m esferas blancas se pueden distribuir entre r conjuntos no vacíos de C_{r-1}^{m-1} maneras. Para las esferas negras, tendremos C_{r-1}^{n-1} modos, habiendo en total $2C_{r-1}^{m-1}C_{r-1}^{n-1}$. Análogamente se deduce que $2r$ contactos habrá en $C_r^{m-1}C_{r-1}^{n-1} + C_{r-1}^{m-1}C_r^{n-1}$ casos.

201.

Sea $A(m, n)$ el número de formas de obtener m puntos en n exámenes (sin obtener, además, ningún «2»). Entonces queda claro, que $A(30, 8) = A(25, 7) + A(26, 7) + A(27, 7)$, etc. Continuando la disminución de m, al cabo de varios pasos se obtiene la respuesta 784.

202.

Escojamos primeramente los n objetos que quedarán en sus lugares. Esto se puede hacer de C_n^{m+n} modos. Los m objetos restantes se permutan de forma que ninguno quede en su lugar. Esto se puede efectuar de D_m maneras (véase la pág. 47).

En total, tendremos $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}D_m$ formas.

203.

r objetos se pueden distribuir entre $n+p$ personas de $(n+p)^r$ maneras; aquí en $(n+p-1)^r$ casos una persona dada no obtendrá ningún objeto; en $(n+p-2)^r$, dos personas dadas no obtendrán nada, etc. Aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene el resultado que queríamos demostrar.

204.

La primera columna de la partición de $2r+x$ en $r+x$ sumandos diferentes de cero contiene $r+x$ elementos. Eliminándola, obtenemos un diagrama de la partición de r en sumandos no negativos.

205.

Como cada uno puede votar por cualquiera de las n personas, tendremos n^n formas de votación. En el segundo caso, hay que dividir n votos entre n candidatos, cosa que puede efectuarse de C_{n-1}^{2n-1} maneras.

206.

Supongamos que el número $2n$ está dividido en tres partes del modo requerido: $2n = a + b + c$, siendo $a \leqslant b \leqslant c$. Entonces $a \neq 1$, pues en caso contrario tendríamos que $b + c = 2n - 1$, por lo cual sería $b < c$, cosa que no puede ser, ya que $b + 1 > c$. Además, $a + b > c$, y los números $a + b$ y c tienen igual paridad. En consecuencia, $a + b \geqslant c + 2$. Pero entonces los números $a-1$, $b-1$, $c-1$ forman una partición de $2n-3$, siendo $(a-1)+(b-1) > c-1$. Con esto se establece una correspondencia biunívoca entre las particiones de los números $2n$ y $2n-3$.

207.

Se desprende de la igualdad

$$C_1^n + C_3^n + C_5^n + \ldots = 2^{n-1}.$$

208.

Supongamos que el primero obtuvo x objetos del primer tipo, y del segundo y z del tercero. Entonces será $x + y + z = 3n$, con la particularidad de que $0 \leqslant x, y, z \leqslant 2n$. De esta forma, hay que hallar el número de soluciones de la ecuación $x + y + z = 3n$ en enteros positivos que no superen $2n$. Si se eliminan las condiciones $x \leqslant 2n$, $y \leqslant 2n$, $z \leqslant 2n$, el número de soluciones es igual al de maneras de dividir $3n$ objetos iguales entre tres personas, es decir, a C_2^{3n+2}. Hallemos ahora la cantidad de soluciones en las que $x > 2n$. Esta es igual al número total de soluciones, en enteros no negativos, de las ecuaciones $y + z = k$, $0 \leqslant k < n$, es decir, a $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. En el mismo número de soluciones será $y > 2n$ y $z > 2n$. Eliminándolas, obtenemos $3n^2 + 3n + 1$ soluciones.

209.

El problema se resuelve análogamente. Se obtiene

$$C_3^{4n+3} - 4\sum_{k=0}^{2n-1} C_2^{k+2} = C_3^{4n+3} - 4C_3^{2n+2} = \frac{1}{3}(2n+1)(8n^2+8n+3).$$

210.

Como las partes son indistinguibles, las soluciones x, y, z y $2n-x$, $2n-y$, $2n-z$ de la ecuación $x + y + z = 3n$ se identifican. Una solución, precisamente, la $x = n$, $y = n$, $z = n$ se identifica en este caso consigo misma, y las demás, con soluciones diferentes de ellas. Por esto, la respuesta tiene la forma

$$\frac{3n^2+3n}{2} + 1.$$

Análogamente se considera el caso en que haya objetos de 4 tipos.

211.

Aquí hay que hallar el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = mn$, que satisfagan a las condiciones $0 \leqslant x_k \leqslant 2n$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Si se eliminan las limitaciones $0 \leqslant x_k \leqslant 2n$, $1 \leqslant k \leqslant m$ obtenemos C_{m-1}^{mn+m-1} soluciones. Hallemos el número de éstas, para las cuales $x_1 > 2n$. Este es igual al número total de soluciones de todas las ecuaciones

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_m = k,$$

donde $0 \leqslant k \leqslant mn - 2n - 1$, es decir, a

$$\sum_{k=0}^{mn-2n-1} C_{m-2}^{k+m-2} = C_{m-1}^{mn-2n+m-2}.$$

Otras tantas soluciones existen, para las que $x_2 > 2n$. etc. En consecuencia, hay que eliminar $C_1^m C_{m-1}^{mn+m-2n-2}$ soluciones. Aquí algunas soluciones (precisamente, aquellas para las cuales, digamos, $x_1 > 2n$ y $x_2 > 2n$) se eliminan dos veces. Aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene el resultado que se quería demostrar.

212.

De 231 formas. En lo que respecta a la resolución, véase el problema siguiente.

213.

Sea x_1, x_2, x_3 la cantidad de objetos del primer tipo, e y_1, y_2, y_3, la de los del segundo, que obtienen las personas A, B y C respectivamente. Entonces tendremos las ecuaciones $x_1 + x_2 + x_3 = n$ e $y_1 + y_2 + y_3 = n$, debiendo cumplirse las condiciones $x_k + y_k \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Si se eliminan las limitaciones $x_k + y_k \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$, obtendremos C_2^{n+2} soluciones de la primera ecuación y C_2^{n+2} de la segunda, habiendo en total $(C_2^{n+2})^2$ soluciones. Aquí el número de soluciones para las cuales se viola la condición $x_1 + y_1 \leqslant n$ es igual a la cantidad total de soluciones enteras no negativas de los sistemas de ecuaciones $x_2 + x_3 = r$, $y_2 + y_3 = s$, donde $0 \leqslant r < n$, $0 \leqslant s < n$ y $r + s < n$. El sistema $x_2 + x_3 = r$ $y_2 + y_3 = s$ tiene $(r + 1)(s + 1)$ soluciones enteras no negativas. Por esto, el número total de soluciones de nuestros sistemas es igual a

$$\sum_{s=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-s-1} (r+1)(s+1) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)(n-s)(n-s+1) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} C_1^{s+1} C_2^{n-s+1} = C_4^{n+3}$$

(véase la pág. 38). Otras tantas soluciones no satisfacen las condiciones $x_2 + y_2 \leqslant n$ y $x_3 + y_3 \leqslant n$. Eliminándolas, obtenemos

$$(C_2^{n+2})^2 - 3C_4^{n+3}$$

soluciones. Para $n = 5$, tendremos 231 soluciones

214.

9 personas se pueden intercambiar de lugar de $9!$ formas. Hallemos en cuántas permutaciones 3 ingleses estarán sentados juntos. Todas estas permutaciones se obtienen de una de ellas intercambiando entre sí a los ingleses (hay $3!$ modos), y a los 6 franceses y turcos y el grupo de ingleses (son $7!$ formas). En total, se obtienen $3!\,7!$ permutaciones. En el mismo número de éstas estarán sentados juntos los tres franceses, y en otras tantas, los 3 turcos. Ahora bien, en $(3!)^2\,5!$ permutaciones estarán juntos los ingleses y los franceses, y en $(3!)^4$, los ingleses, los franceses y los turcos. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene la respuesta

$$9! - 3 \cdot 3!\,7! + 3\,(3!)^2\,5! - (3!)^4 = 283\,824.$$

215.

El número total de permutaciones es igual a $9!$ Hallemos la cantidad de éstas, en las cuales dos ingleses dados estén juntos. Si los unimos, obtendremos permutaciones de 8 objetos. Pero, además, podemos intercambiar el asiento de uno con el del otro. Por esto, en total tendremos $2!8!$ permutaciones. Además, dos ingleses dados se pueden elegir de C_3^2 modos, y en total tenemos tres nacionalidades distintas. Por esto, el término correspondiente de la fórmula de inclusiones y exclusiones es igual a $3C_3^2 2!8!$. Hallemos ahora en cuántas permutaciones estarán sentados juntos dos ingleses dados y, además, dos franceses prefijados. Si unimos en un par a los compatriotas que están sentados juntos, se obtienen 7 objetos a permutar. Además, se pueden cambiar de lugar los compatriotas vecinos. En total, tendremos $(2!)^2 7!$ permutaciones. Pero también dos pares de compatriotas pueden ser escogidos de $(C_3^2)^3$ maneras. Por esto, el sumando correspondiente de la fórmula de inclusiones y exclusiones es igual a $(C_3^2)^3 (2!)^2 7!$. Luego se estudian los siguentes casos: juntos están sentados

a) tres compatriotas,

b) dos representantes de cada nacionalidad,

c) tres representantes de una nacionalidad y dos de otra,

d) tres representantes de una nacionalidad y tres de otra,

e) tres representantes de una nacionalidad, dos de otra y dos de la tercera,

f) tres representantes de una nacionalidad, tres de otra y dos de la tercera,

g) tres de cada nacionalidad.

Aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, obtenemos la respuesta

$$9! - 9 \cdot 2!\, 8! + 27\,(2!)^2\, 7! + 3 \cdot 3!\, 7! - (2!)^3\, 6! - 18 \cdot 3!\, 2!\, 6! + 3\,(3!)^2\, 5! + 27 \cdot 3!\,(2!)^2\, 5! - 9\,(3!)^2\, 2!\, 4! + (3!)^4.$$

216.

Este problema se resuelve en forma análoga al anterior, pero se calcula de otra manera el número de permutaciones en las que los compatriotas dados estén sentados juntos. Dos ingleses se pueden sentar juntos de $2!9$ maneras, después de lo cual se puede sentar a los restantes de $7!$ modos. Si se toman dos ingleses y dos franceses, el número de formas de sentado, en las que estos compatriotas estarán juntos, es igual a $(2!)^2 9 \cdot 6!$. Precisamente, podemos escoger de 9 maneras los lugares para los ingleses, después de lo cual se unen en un par los dos franceses y se toman todas las permutaciones posibles de este par y las 5 personas restantes. Teniendo en cuenta la posibilidad de cambiar de lugar tanto a los ingleses que están sentados juntos como a los franceses vecinos, obtenemos el número indicado de permutaciones. Las posibilidades restantes se estudian análogamente. En total, obtenemos

$$9! - 9 \cdot 2!\, 9 \cdot 7! + 27\,(2!)^2\, 9 \cdot 6! + 3 \cdot 3!\, 9 \cdot 6! - (2!)^3\, 9 \cdot 5! - 18 \cdot 3!\, 2!\, 9 \cdot 5! + 3\,(3!)^2\, 9 \cdot 4! + 27 \cdot 3!\,(2!)^2\, 9 \cdot 4! - 9\,(3!)^2\, 2!\, 9 \cdot 3! + (3!)^3\, 9 \cdot 2!$$

formas.

217.

Designemos el número de formas de pegar las estampillas por una suma de N kopeks mediante $F(N)$. Dividamos estas formas en clases, en correspondencia con el valor de la última estampilla. Obtendremos así la relación de recurrencia

$$F(N) = F(N-5) + F(N-10) + F(N-15) + F(N-20).$$

Utilizando esta relación y la igualdad $F(5) = 1$, se obtiene que $F(40) = 108$.

218.

Sea $F(n_1, \ldots, n_m; N)$ el número de formas de pagar una suma de N kopeks en monedas de $n_1, \ldots, n_m k$. Entonces, tiene lugar la relación de recurrencia

$$F(n_1, \ldots, n_m; N) = F(n_1, \ldots, n_{m-1}; N) + F(n_1, \ldots, n_m; N - n_m)$$

(véase la pág. 68). Utilizando esta relación y otras análogas, se halla que $F(10, 15, 20, 50; 100) = 20$.

219.

Mediante una relación de recurrencia se obtiene que el problema posee 4 soluciones.

220.

La fila puede contener 3, 2 ó 1 esferas negras. Si contiene 3, la cuarta esfera se puede elegir de tres formas, intercambiando luego las 3 esferas negras y una de otro color de $P(3, 1) = 4$ maneras. En total habrá 12 modos. Análogamente, si se toman 2 esferas negras se obtienen $C_3^2 P(2, 1, 1) = 36$ posibilidades, y si se toma 1, $4!$ posibilidades. En total, se pueden formar $12 + 36 + 24 = 72$ filas.

221.

El número de estas representaciones es igual al de particiones de n esferas iguales en 3 grupos no vacíos, es decir, a C_2^{n-1}.

222.

Hallemos primeramente cuántos ceros serán necesarios para escribir todos los números del 1 al 999 999. En el último lugar habrá un cero en 99 999 números (10, 20, . . ., 999 990); en el segundo, en 99 990; en el tercero, en 99 900, etc. En total, endremos 99 999 + 99 990 +

$+ 99\,900 + 99\,000 + 90\,000 = 488\,889$. El número total de cifras es igual a $9 + 2 \cdot 90 + + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 9000 + 5 \cdot 90\,000 + 6 \cdot 900\,000 = = 5\,888\,889$. Como todas las cifras, a excepción del cero, figuran igual cantidad de veces, cada una de ellas figurará

$$\frac{5\,888\,889 - 4\,888\,889}{9} = 600\,000 \text{ veces.}$$

223.

Elijamos primero los lugares en los que esté la cifra 3 (cosa que puede efectuarse de C_2^{10} maneras). Después, coloquemos en los 8 lugares restantes las cifras 1 ó 2, lo que puede hacerse de 2^8 formas. En total, se obtienen $2^8 C_2^{10} = 11\,520$ modos.

La suma de las cifras de cualquiera de los números escritos está comprendida entre $8 \cdot 1 + + 2 \cdot 3 = 14$ y $8 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 22$. Por esto, si el número se divide por 9, la suma de sus cifras debe ser igual a 18. Por lo tanto, las unidades y los «2» tienen por suma 12. Esta se obtiene si se toman 4 unidades y 4 «2». Así, pues, nuestro número contiene 4 unidades, 4 «2» y 2 «3». Con estas cifras se pueden formar

$$P(4, 4, 2) = \frac{10!}{4!\,4!\,2!} = 3150$$

números distintos.

224.

Supongamos que los números a y b forman una inversión en una permutación dada. Si los cambiamos de lugar, obtendremos una permutación nueva, en la que éstos ya no formarán inversión. Tenemos $n!$ permutaciones, en cada una de las cuales se pueden elegir de C_2^n modos los números a y b. En la mitad de los casos estos números formarán una inversión. Por consiguiente, el número de inversiones es igual a $\frac{n!}{2} C_2^n$.

225.

El número n se puede representar de $C_2^{n-1} = = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ maneras como suma de tres sumandos enteros positivos (considerando distintas las representaciones que se diferencian en el orden de los sumandos). Entre éstas, en $\frac{n-2}{2}$, para n par, y en $\frac{n-1}{2}$, para n impar, representaciones dos sumandos son iguales. Además, si n se divide por 3, existe una representación en la que los tres sumandos serán iguales. Aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene sin dificultad que el número de representaciones con sumandos distintos dos a dos se expresa mediante las siguientes fórmulas:

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) + 2 = \frac{n^2 - 6n + 12}{2},$$

si $n = 6k$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) = \frac{n^2 - 6n + 5}{2},$$

si $n = 6k + 1$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) = \frac{n^2 - 6n + 8}{2},$$

si $n = 6k + 2$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) + 2 = \frac{n^2 - 6n + 9}{2},$$

si $n = 6k + 3$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-2) = \frac{n^2 - 6n + 8}{2},$$

si $n = 6k + 4$,

$$\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{3}{2}(n-1) = \frac{n^2 - 6n + 5}{2},$$

si $n = 6k + 5$.

Si no se tiene en cuenta el orden de los sumandos, se obtienen 6 veces menos representaciones. No es difícil comprobar que las expresiones que se obtienen en este caso no son otra cosa que la parte entera de $\frac{n^2 - 6n + 12}{12}$ para los valores correspondientes de n.

226.

El número $12n + 5$ se puede representar de C_3^{12n+4} maneras en forma de cuatro sumandos (considerando diferentes las representaciones que se diferencien en el orden de los sumandos). El número de representaciones en las que $x = y$ es igual al de soluciones de las ecuaciones $2x + z + t = 12n + + 5$ en números enteros positivos. Como la ecuación $z + t = 12n - 2k + 5$ tiene $12n - 2k + 4$ soluciones enteras positivas, el número total de estas soluciones es igual a

$$\sum_{k=1}^{6n+1} (12n - 2k + 4) = (6n+1)(6n+2) = 2C_2^{6n+2}.$$

El número de soluciones en las que $x = y = z$ es igual al de soluciones de las ecuaciones $3x + t = 12n + 5$, es decir, a $4n + 1$.

Hallemos en cuántas soluciones hay sumandos mayores que $6n + 2$. Sea $x = k \geqslant 6n + 3$. Entonces, será $y + z + t = 12n + 5 - k$. Pero el número $12n + 5 - k$ se puede representar de $C_2^{12n+4-k}$ formas como suma de tres términos enteros positivos. Por esto, habrá

$$\sum_{k=6n+3}^{12n+2} C_2^{12n+4-k} = C_3^{6n+2}$$

soluciones, para las cuales sea $x \geqslant 6n + 3$. Como en lugar de x se puede tomar cualquier sumando, tendremos $C_3^{12n+4} - 4C_3^{6n+2}$ soluciones, en las que todos los sumandos no superen $6n + 2$.

Ahora bien, el número de soluciones de la ecuación $2x + z + t = 12n + 5$, para las cuales sea $z \geqslant 6n + 3$, es igual a $3n(3n + 1)\, 2C_2^{3n+1}$. Por esto, el número de soluciones en las cuales $x = y$ y todos los sumandos no superan $6n + 2$, es igual a $2\,[C_2^{6n+2} - 2C_2^{3n+1}]$. Como en lugar de x e y se puede tomar cualquier otro par de letras, la cantidad total de soluciones en las que dos sumandos son iguales y todos éstos no superan $6n + 2$, es igual a

$$2C_2^4\,[C_2^{6n+2} - 2C_2^{3n+1}].$$

Por último, el número de soluciones de la ecuación $3x + t = 12n + 5$, para las cuales $t \geqslant 6n + 3$, es igual a $2n$. Por esto, el número total de soluciones en las cuales tres sumandos son iguales y todos ellos no superan $6n + 2$, es igual a $4(2n + 1)$.

Si se desechan de todas las representaciones aquellas en las que coinciden dos sumandos, las representaciones en las que coincidan tres serán eliminadas tres veces. Por esto, en la fórmula de inclusiones y exclusiones hay que multiplicar el número de éstas por dos. En total, se obtienen

$$[C_3^{12n+4} - 4C_3^{6n+2}] - 2C_2^4\,[C_2^{6n+2} - 2C_2^{3n+1}] + 8(2n+1) = 12n(12n^2 + 3n - 1$$

representaciones, en las que todos los sumandos son distintos,

$$2C_2^4\,[C_2^{6n+2} - 2C_3^{3n+1}] - 12(2n+1) = 12n(9n+4)$$

representaciones que contienen exactamente tres sumandos diferentes, y $4(2n + 1)$ en las que hay dos sumandos diferentes.

Dividamos todas las representaciones en clases, tales que dos de una misma clase se diferencien entre sí sólo en el orden de los sumandos. Entonces las representaciones del primer tipo se dividirán en clases formadas por 24 elementos; las del segundo, por 12 elementos, y las del tercero, por 4. Por esto, la cantidad de particiones del tipo exigido es igual

$$\frac{n}{2}(12n^2 + 3n - 1) + n(9n + 4) + 2n + 1 = \frac{n+1}{2}(12n^2 + 9n + 2).$$

227.

En el proceso de resolución del problema anterior, hallamos que el número de representaciones en las que todos los sumandos son diferentes es igual a $12n(12n^2 + 3n - 1)$. Como ahora no tenemos en cuenta el orden de los sumandos, se obtienen $\frac{n}{2}(12n^2 + 3n - 1)$ particiones.

228.

Cada progresión geométrica se determina por el primer término y la razón q. Si la progresión crece, se debe cumplir la desigualdad $aq^2 \leqslant 100$, de donde se deduce que $a \leqslant \frac{100}{q^2}$. Por consiguiente, el número de progresiones crecientes de tres términos con razón q es igual a $E\left(\frac{100}{q^2}\right)$. El número total de progresiones será igual a

$$2\left[E\left(\frac{100}{4}\right) + E\left(\frac{100}{9}\right) + E\left(\frac{100}{16}\right) + \ldots + E\left(\frac{100}{100}\right)\right] = 102$$

(el factor 2 está ligado a que una misma terna de números se puede considerar tanto como progresión creciente que como decreciente).

229.

Designemos mediante F el conjunto de varios franceses juntos, y mediante T, el de varios turcos juntos. La letra «i» denotará a un inglés. De la hipótesis del problema se deduce que es posible uno de los siguientes tipos de disposición: FiTiFiTiFiTiF, o bien TiFiTiFiTiFiT. En el primer tipo, habrá que dividir 7 franceses en 4 grupos no vacíos (cosa que puede hacerse de C_3^6 modos), 10 turcos en 3 grupos no vacíos (hay C_2^9 maneras), después colocar estos grupos en orden en los lugares respectivos y permutar de todas las formas posibles a los compatriotas entre sí. Se obtienen $6!\,7!\,10!\,C_3^6 C_2^9$ formas de disposición. El segundo tipo de disposición da, por el mismo método, $6!\,7!\,10!\,C_2^6 C_3^9$ maneras de disposición. En total, se obtienen

$$6!\,7!\,10!\,[C_3^6 C_2^9 + C_2^6 C_3^9] = 6!\,7!\,10!\,1980$$

soluciones.

230.

Análogamente al problema anterior, se obtienen $5!\,7!\,10!\,1080$ soluciones.

231.

Los dos números buscados se diferencian entre sí por los factores a^{α}, b^{β}, c^{γ}, d^{δ}, cada uno de los cuales figura en uno de los números y en el otro no. Como 4 factores pueden distribuirse entre dos números de $2^4 = 16$ maneras, el problema tiene 16 soluciones. Si no se tiene en cuenta el orden de los números, tendremos 8 soluciones.

232.

Los números buscados tienen la forma GA y GB, siendo A y B divisores del número $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}$. Este número tiene $N = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \times \times (\delta + 1)$ divisores (véase el problema 67). Por esto, A y B se pueden escoger de C_2^{N+1} formas, si no se distinguen los pares (GA, GB) y (GB, GA), y N^2 si estos pares se diferencian.

233.

Existen C_6^{20} agrupaciones en las que todas las letras son distintas, $C_1^{20}C_4^{19}$ en las que coinciden dos letras, etc. En total, obtenemos

$$C_6^{20} + C_1^{20}C_4^{19} + C_2^{20}C_4^{18} + C_3^{20} = 146\,400$$

agrupaciones.

234.

Las permutaciones buscadas comienzan por varias letras α, después de las cuales va una letra β, y después las letras pueden estar en cualquier orden. Si al principio hay k letras α y una β, las letras restantes se pueden permutar de $P(p - - k,\ q - 1,\ r)$ formas. Sumando con respecto a k de 1 a p, se obtiene que el número de permutaciones buscadas es igual a

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{(p+q+r-k-1)!}{(p-k)!\,(q-1)!\,r!} =$$

$$= C_r^{q+r-1} \sum_{k=1}^{p} C_{p-k}^{p-k+q+r-1}.$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{p} C_{p-k}^{p-k+q+r-1} = C_{p-1}^{p+q+r-1}.$$

Por esto, tendremos $C_r^{q+r-1}C_{p-1}^{p+q+r-1}$ — permutaciones.

235.

Los números que expresan las longitudes de las franjas de cada color forman una representación del número 10 en forma de suma de términos que toman valores naturales del 2 al 10, teniendo importancia el orden de los sumandos. La cantidad de tales particiones en k sumandos es igual al coeficiente de x^{10} en el desarrollo de la expresión

$$(x^2 + x^3 + \ldots + x^{10})^k = \left(\frac{x^2 - x^{11}}{1-x}\right)^k =$$

$$= x^{2k}(1 - x^9)^k (1 - x)^{-k} =$$

$$= x^{2k}\left(1 - kx^9 - \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^{18} - \ldots\right) \times$$

$$\times \left(1 + kx + \frac{k(k+1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{k(k+1)\ldots(k+9)}{10!}x^{10} + \ldots\right).$$

De aquí se halla de inmediato que para $k = 1$ el coeficiente buscado es igual a 1, para $k = 2$, a 7, para $k = 3$, a 15, para $k = 4$, a 10, y para $k = 5$, a 1. Como la cantidad de franjas de cada color, para una forma dada de pintado, es la misma, y la longitud de las franjas de distinto color puede combinarse arbitrariamente, se obtienen $1^3 + 7^3 + 15^3 + 10^3 + 1^3 = 4720$ maneras de pintado.

Quitemos ahora la condición de que el último color sea azul. Si el pintado termina por el rojo, éste se encontrará una vez más que el blanco y el azul. En este caso, el número de formas es igual a $1 + 7\cdot 1^2 + 15\cdot 7^2 + 10\cdot 15^2 + 1\cdot 10^2 = = 3093$. Análogamente, si el último color es blanco, el número de maneras de pintado es igual a $1^2 + 7^2 \cdot 1 + 15^2 \cdot 7 + 10^2 \cdot 15 + 1^2 \cdot 10 = 3135$. En total, tendremos 10 948 modos.

Si ninguna franja es menor de los 3 cm, el problema se reduce al cálculo del número de representaciones de 10 como suma de k números naturales, que adquieren los valores del 3 al 10. Para $k = 1$, tendremos una representación, para $k = 2$, cinco; para $k = 3$, tres. Por esto, el pintado terminará en el azul $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$ veces, por el rojo $1 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 5^2 = 81$ veces, y por el blanco $1^2 + 5^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 5 = 71$ veces.

236.

Como yo he almorzado una vez con todos los seis amigos, y con cada cinco dos veces, he almorzado una vez con cada quinteto de amigos en ausencia del sexto. Pero entonces almorcé 3 veces con cada cuatro (dos almuerzos de a cinco y uno de a seis), con cada tres, 4 veces, y con cada dos, 5 veces. Con cada amigo me encontré en estos almuerzos 7 veces. En consecuencia, he almorzado una vez con cada amigo, estando los dos solos. Cada amigo no estuvo en 6 almuerzos (en 5 de a dos y en 1 de a cinco). Como sin cada amigo he almorzado 8 veces, habré almorzado solo 2 veces.

237.

12 alumnos pueden establecer una cola a cada examinador de $12!$ maneras, y a dos de ellos, de $(12!)^2$. Aquí en $C_1^{12} \cdot 11!$ casos por lo menos un alumno deberá responder a la vez a ambos examinadores; en $C_2^{12} \cdot 10!$ casos esta suerte la correrán dos alumnos, etc. Aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene que el número de formas razonables de distribución es igual a

$$(12!)^2 \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{1}{12!}\right] =$$

$$= 12! \cdot 176\,214\,841.$$

238.

Análogamente se obtienen las respuestas

$$(6!)^2 \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!}\right] = 190\,800$$

y

$$(A_6^9)^2 - C_1^6 A_1^9 (A_5^8)^2 + C_2^6 A_2^9 (A_4^7)^2 - C_3^6 A_3^9 (A_3^6)^2 +$$
$$+ C_4^6 A_4^9 (A_2^5)^2 - C_5^6 A_5^9 (A_1^4)^2 + C_6^6 A_6^9.$$

239.

De la hipótesis se deduce que las letras iguales de la expresión $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ figuran en las permutaciones de a pares. Por esto, obtenemos permutaciones de los 3 elementos $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$, $c = \gamma^2$, siendo el número de éstas igual a 6. Lo mismo tendrá lugar para las permutaciones de las letras de la expresión $\alpha^3\beta^3\gamma^3$. En las permutaciones de las letras de la expresión $\alpha^4\beta^4\gamma^4$, las letras iguales también se encontrarán de a pares. Hagamos por ahora $\alpha^2 = a_1$, $\alpha^2 = a_2$; $\beta^2 = b_1$, $\beta^2 = b_2$ y $\gamma^2 = c_1$, $\gamma^2 = c_2$[1]. Entonces, tendremos permutaciones de los 6 elementos $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, cuya cantidad es igual a 720. Pero estas permutaciones se dividen en grupos que se diferencian entre sí por las permutaciones de los elementos a_1 y a_2, b_1 y b_2, c_1 y c_2. En cada grupo figuran 8 permutaciones, y todas ellas corresponden a una misma permutación de letras de la expresión $\alpha^4\beta^4\gamma^4$. Por lo tanto, el número de permutaciones de letras de esta expresión es igual a $\frac{720}{8} = 90$.

Consideremos, por último, las permutaciones de las letras de la expresión $\alpha^5\beta^5\gamma^5$. Si hacemos por un momento $\alpha^2 = a_1$, $\alpha^3 = a_2$, $\beta^2 = b_1$, $\beta^3 = b_2$, $\gamma^2 = c_1$, $\gamma^3 = c_2$, cada permutación admisible de letras de la expresión $\alpha^5\beta^5\gamma^5$ será una permutación de las letras $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$. Pero algunas permutaciones de estas letras dan una misma permutación de las letras α, β, γ. Por ejemplo, $a_1a_2b_1c_2b_2c_1$ y $a_2a_1b_1c_2b_2c_1$ dan $\alpha^5\beta^2\gamma^3\beta^3\gamma^2$. Esto tiene lugar si algún par de letras (a_1, a_2), (b_1, b_2) ó (c_1, c_2) está junto. Las letras a_1 y a_2 estarán juntas en $2 \cdot 5!$ permutaciones, al igual que las (b_1, b_2) y (c_1, c_2). Las letras de los dos pares (a_1, a_2) y (b_1, b_2) estarán juntas en $(2!)^2 4!$ permutaciones (al igual que las de los pares (a_1, a_2), (c_1, c_2) ó (b_1, b_2), (c_1, c_2)). Por último, los tres pares estarán juntos en $(2!)^3 3! = 48$ permutaciones. Según la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene que en $6! - 6 \times 5! + 3\,(2!)^2 \cdot 4! - (2!)^3 3! = 240$ permutaciones ningún par de letras estará junto, en

$$3\,[2 \cdot 5! - 2\,(2!)^2\,4! + (2!)^3\,3!] = 288$$

permutaciones, exactamente uno de los pares de letras (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) estará junto, y en

$$3\,[(2!)^2\,4! - (2!)^3\,3!] = 144$$

[1] Por un momento no se toma en cuenta que, en realidad, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$.

estarán juntas las letras de dos de estos pares exactamente. De aquí se deduce que el número buscado de permutaciones de las letras α, β, γ es igual a

$$240+\frac{288}{2!}+\frac{144}{(2!)^2}+\frac{48}{(2!)^3}=426$$

(si las letras a_1 y a_2 están juntas, su permutación no cambia el orden de las letras α, β, γ).

240.

Dividamos primeramente a los jugadores de cada país en pares ordenados. Para cada país, esto se puede efectuar de $\frac{4!}{2}=12$ formas (el orden de los propios pares no tiene importancia). En total, se obtienen 12^n modos de partición. Los pares se pueden permutar entre sí de $(2n)!$ maneras. Por esto, la cantidad total de permutaciones admisibles es igual a $12^n (2n)!$.

241.

La primera fila horizontal se puede pintar de 8! modos. Cada horizontal siguiente debe pintarse de forma que el color de cada casilla se diferencie de la que se halle debajo de ésta. Esto se puede efectuar de

$$8!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!}\right]=14\,833$$

maneras. En virtud de la regla del producto, se obtiene que el número total de formas de pintado es igual a $8!(14\,833)^7$.

242.

De n objetos distintos se puede efectuar una elección de 2^n formas (en ésta pueden figurar 0, 1, . . . , n objetos). Después de efectuada esta elección, agreguemos los objetos que faltaban, de los n iguales. Tendremos, por esto, 2^n formas de elección. El número de permutaciones de todos los $2n$ objetos es igual a $\frac{(2n!)}{n!}$.

243.

En cada permutación admisible, tanto los ingleses como los franceses estarán dispuestos en grupos, formados por no menos de dos personas. Además, el número de grupos de fraceses se diferenciará del de los ingleses no en más que 1. Calculemos de cuántas maneras se pueden dividir n ingleses en p grupos ordenados, de forma que cada uno contenga no menos de dos personas. Para esto, hay que disponerlos en algún orden (de $n!$ maneras), tomar luego el segundo, el tercero, . . ., etc. hasta el intervalo $n-2$ y colocar en ellos $p-1$ «tabiques», de forma que no haya dos separadas por un solo elemento. Según los resultados de la pág. 60, esto se puede hacer de C_{p-1}^{n-p-1} maneras. En total, tendremos $n!C_{p-1}^{n-p-1}$ formas. Análogamente, m franceses se pueden dividir en s grupos del tipo indicado de $m!C_{s-1}^{m-s-1}$ modos. Estos se pueden combinar entre sí por los siguientes métodos:

a) p grupos de ingleses y $p-1$ de franceses,

b) p grupos de ingleses y p de franceses, estando primero los ingleses,

c) p grupos de ingleses y p de franceses, estando los franceses primero,

d) p grupos de ingleses y $p+1$ de franceses.

Por consiguiente, el número total de formas se expresa por la fórmula

$$\begin{aligned}m!n!\,[2\,(&C_0^{m-2}C_0^{n-2}+C_1^{m-3}C_1^{n-3}+\\&+C_2^{m-4}C_2^{n-4}+\ldots)+(C_0^{m-2}C_1^{n-3}+\\&+C_1^{m-3}C_2^{n-4}+\ldots)+(C_1^{m-3}C_0^{n-2}+\\&+C_2^{m-4}C_1^{n-3}+\ldots)].\end{aligned}$$

Abriendo paréntesis en la fórmula de la pág. 147, se obtiene el mismo resultado.

244.

Hallemos primero la cantidad de números en las que no figura la cifra cero. Las tres cifras de este número se pueden escoger de $C_9^3=84$ formas. De tres cifras se pueden formar 3^6 números de seis cifras; de dos, 2^6, y de una, 1^6. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, existirán

$$3^6-C_3^1 2^6+C_3^2 1^6=540$$

números de seis cifras, en las que figurarán las tres que escogimos. Por esto, la cantidad total de números de seis cifras en los que figuren exactamente tres distintas de cero, es igual a $84\cdot540=45\,360$.

Si en el número figura el cero, hay que escoger otras dos cifras de éste. Esto se puede hacer de $C_9^2=36$ maneras. Supongamos que, por ejemplo, fueron elegidos el 0, el 1 y el 2. Entonces la primera cifra del número debe ser 1 ó 2. Si, por ejemplo, la primer cifra es 1, las cinco restantes pueden ser cualesquiera de las 0, 1 ó 2, con la condición de que entre ellas se encuentren el

0 y el 2. En virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene que estas cinco cifras pueden ser elegidas de

$$3^5 - C_1^2 2^5 + 1^6 = 180$$

modos. Pero entonces, el número total de números de seis cifras, formadas por las 0, 1, 2 y que contengan a todas las tres, es igual a $2 \cdot 180 = 360$; en total habrá $36 \cdot 360 = 12\,960$ números de seis cifras, formadas por tres, entre las cuales hay un cero. En total, se obtiene $45\,360 + 12\,960 = 58\,320$ números.

245.

Igual que en el problema 244, obtenemos la respuesta

$$C_k^9\,[k^m - C_1^k (k-1)^m + C_2^k (k-2)^m - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} C_{k-1}^k 1^m] + (k-1)\, C_{k-1}^9\,[k^{m-1} -$$
$$- C_1^{k-1} (k-1)^{m-1} + C_2^{k-1} (k-2)^{m-1} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-2} C_{k-2}^{k-1} 1^{m-1}].$$

246.

Designemos el número total de arreglos de este tipo mediante $\Gamma_n^{(k)}$. Estos arreglos se dividen en dos clases. A la primera pertenecerán los que comiencen por 1, y a la segunda, todos los demás. Si el arreglo empieza por 1, restemos de todas las cifras que figuran en éste 1, y eliminemos el cero que se halla delante (por ejemplo, el 14 589 se transforma aquí primero en el 03 478, y después, en el 3478). Se obtiene entonces un $(k-1)$-arreglo del mismo tipo, pero formado por los números 1, 2, ..., $n-1$. Por esto, el número de arreglos de la primera clase es igual a $\Gamma_{n-1}^{(k-1)}$. Cada arreglo de la segunda clase comienza por un número mayor que 1. Restemos 2 de todas las cifras de este arreglo. Se obtiene entonces un k-arreglo del mismo tipo, en el cual figuran los números 1, 2, ..., $(n-2)$. Por esto, el número de arreglos de la segunda clase es igual a $\Gamma_{n-2}^{(k)}$. De este modo, tiene lugar la fórmula de recurrencia

$$\Gamma_n^{(k)} = \Gamma_{n-1}^{(k-1)} + \Gamma_{n-2}^{(k)}.$$

Hagamos $F_n^{(k)} = C_k^N$, donde $N = E\left(\frac{n+k}{2}\right)$. Tendremos entonces:

$$F_{n-1}^{(k-1)} + F_{n-2}^{(k)} = C_{k-1}^{N-1} + C_k^{N-1} = C_k^N = F_n^{(k)}.$$

De esta forma, los números $F_n^{(k)}$ satisfacen la misma relación de recurrencia que los $\Gamma_n^{(k)}$.

Demostremos ahora que $F_n^{(n)} = \Gamma_n^{(n)}$ y que $F_{n+1}^{(n)} = \Gamma_{n+1}^{(n)}$. Para esto, obsérvese que los números 1, 2, ..., n se pueden disponer de una manera única en orden creciente, por lo cual $\Gamma_n^{(n)} = 1 = C_n^n = F_n^{(n)}$. A partir de los números 1, 2, ..., $n+1$ también se pueden escoger de una manera única n en correspondencia con las condiciones planteadas. Por esto, también será $\Gamma_{n+1}^{(n)} = 1 = C_n^n = F_{n+1}^{(n)}$. De lo demostrado se deduce que para todo n y k tendrá lugar la igualdad

$$\Gamma_n^{(k)} = F_n^{(k)} = C_k^N,$$

siendo, recordemos una vez más, $N = E \times \left(\frac{n+k}{2}\right)$.

247.

Los elementos dados se pueden permutar de

$$P(2, 2, \ldots, 2) = \frac{(2n)!}{2^n}$$

maneras. Hallemos en cuántas permutaciones los elementos de k pares dados se hallarán juntos. En éstas se puede unir a los elementos juntos de un mismo par. Obtenemos entonces una permutación de k elementos diferentes y de los que pertenecen a $n-k$ pares. El número de tales permutaciones es igual a $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$. Como k pares pueden ser escogidos de C_k^n maneras, según la fórmula de inclusiones y exclusiones se obtiene que en

$$\frac{(2n)!}{2^n} - C_1^n \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} + C_2^n \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n C_n^n n!$$

permutaciones no habrá dos elementos iguales juntos.

248.

En forma totalmente análoga al problema anterior, se obtiene la respuesta

$$\frac{(qn)!}{(q!)^n} - C_1^n \frac{(qn-q+1)!}{(q!)^{n-1}} + C_2^n \frac{(qn-2q+2)!}{(q!)^{n-2}} - \ldots$$

249.

Los elementos dados se pueden permutar de $\frac{(qn)!}{(q!)^n}$ maneras. Calculemos en cuántas permutaciones los elementos de k conjuntos dados de q elementos estarán juntos. Tomemos uno de estos conjuntos. Sus elementos se pueden colocar juntos en la circunferencia de qn maneras. Después de ubicados éstos, unamos los elementos de cada uno de los $k-1$ conjuntos restantes y consideremos todas las permutaciones posibles de los $k-1$ nuevos elementos obtenidos y de los $(n-k)\,q$ restantes. El número de éstas es igual a $\frac{(qn-qk+k-1)!}{(q!)^{n-k}}$, siendo fácil apreciar que a cada una de estas permutaciones le corresponde su disposición de elementos sobre la circunferencia. Por esto, el número de permutaciones en las que los elementos de k conjuntos dados estén juntos, es igual a $\frac{qn\,(qn-qk+k-1)!}{(q)!^{n-k}}$. Como los propios conjuntos se pueden escoger de C_k^n formas, se obtiene, en virtud de la fórmula de inclusiones y exclusiones, que la cantidad de permutaciones buscadas es igual a

$$qn\left[\frac{(qn-1)!}{(q!)^n}-C_1^n\frac{(qn-q)!}{(q!)^{n-1}}+\right.$$
$$\left.+C_2^n\frac{(qn-2q+1)!}{(q!)^{n-2}}-\ldots+(-1)^n C_n^n(n-1)!\right].$$

250.

Agreguemos a cada libro escogido los s que le siguen. Entonces habrá que elegir p objetos de entre $n-ps$. Esto puede hacerse de C_p^{n-ps} formas.

251.

Si la diferencia de la progresión es igual a d, y el número de participantes de la olimpíada de la 5ª clase, a a, los premios pueden ser distribuidos de $A_d^a A_d^{a+d} A_d^{a+2d} \ldots A_d^{a+5d}$ modos. Si, en cambio, se otorgan todos los premios a los alumnos de la 10ª clase, se los podrá distribuir de A_{6d}^{a+5d} formas. La igualdad

$$A_d^a A_d^{a+d} A_d^{a+2d} \ldots A_d^{a+5d} = A_{6d}^{a+5d}$$

se desprende de la identidad evidente $A_m^n A_k^{n+k} = A_{m+k}^{n+k}$.

252.

Para resolver el problema hay que considerar los segmentos y los cruces de distintas posiciones y calcular el número de caminos que pasan por éstos. Por jemplo, por el segmento EF (fig. 36) pasan 18 caminos ($C_1^3 = 3$ conducen del punto A al E y $C_2^4 = 6$ conducen del F al C). Por el

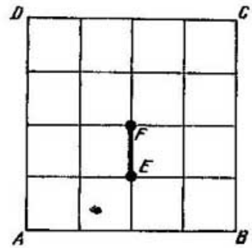

Fig. 36.

punto E pasarán 30 caminos: de A a E conducen 3 caminos, y de E a C, $C_2^5 = 10$. Análogamente se analizan los demás segmentos y puntos.

253.

$C_3^6 = 20$.

254.

Tenemos combinaciones con repetición de elementos de 4 tipos, tomados de a tres. Su número es igual a

$\overline{C}_3^4 = C_3^6 = 20$.

255.

$\overline{C}_3^{10} = C_3^{12} = 220$.

256.

4 triángulos.

257.

Si no hubiese 3 de los n puntos sobre una misma recta, habría C_3^n triángulos con vértices en estos puntos. Pero p puntos se hallan en una misma recta, por lo cual C_3^p triángulos deben ser desechados. Quedan $C_3^n - C_3^p$ triángulos.

258.

Se pueden tomar dos vértices sobre una misma recta y el tercero sobre otra. Por esto, se obtienen

$$C_2^p C_1^q + C_1^p C_2^q = \frac{pq}{2}(p+q-2) \text{ triángulos.}$$

259.

Se agregarán

$$C_2^r (C_1^p + C_1^q) + C_1^r (C_2^p + C_2^q) + C_1^r C_1^p C_1^q =$$

$$= \frac{r}{2}(p+q)(p+q+r-2)$$

triángulos.

260.

Los triángulos pueden ser de dos tipos: o los tres vértices se hallan en distintos lados del cuadrado, o dos se hallan en un lado y el tercero, en algún otro. En el primer caso, hay que escoger tres lados del cuadrado de entre cuatro (hay $C_3^4 = 4$ formas de elección), y luego tomar, en cada uno de los tres, un punto de entre $n-1$. En total, tendremos $4\,(C_1^{n-1})^3$ maneras de elección. En el segundo caso, hay que escoger el lado en que se hallarán los dos vértices (son 4 modos de elección) y dos puntos de entre $n-1$ (C_2^{n-1} formas), eligiendo después uno de los tres lados restantes (tres maneras) y un punto en éste (C_1^{n-1} modos). En total tendremos, en el segundo caso, $12C_1^{n-1}C_2^{n-1}$ maneras de elección. La cantidad total de formas será

$$4\,(C_1^{n-1})^3 + 12C_1^{n-1}C_2^{n-1} = 2\,(n-1)^2\,(5n-8).$$

261.

C_2^n puntos de intersección.

262.

n rectas en posición general tendrán C_2^n puntos de intersección. Pero las p rectas que pasan por el punto A darán un punto de intersección, en lugar de C_2^p, y las q que pasan por B, uno en lugar de C_2^q. Por esto, quedarán $C_2^n - C_2^p - C_2^q + 2$ puntos de intersección.

263.

Supongamos que en el plano se han trazado $k-1$ rectas. Tracemos una más. Esta se divide por los puntos de intersección con las trazadas anteriormente en k partes, cada una de las cuales corresponde a una nueva región del plano. Por esto, n rectas dividen el plano en $1 + 1 + 2 + \ldots$

$$\ldots + n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2) \text{ partes.}$$

264.

Supongamos que ya se han trazado $k-1$ planos. Tracemos uno más. Este se interseca con los planos trazados antes por $k-1$ rectas, las cuales lo dividen en $\frac{1}{2}(k^2 - k + 2)$ partes. Cada una de éstas corresponde a una nueva región del espacio. Por esto, n planos dividirán el espacio en

$$1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - k + 2) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n^2 - n + 6)$$

partes.

265.

Se han trazado $C_2^5 = 10$ rectas. Por cada punto, por ejemplo, por el C, pasan 4 rectas. Por lo tanto, de este punto parten 6 perpendiculares. Tomemos dos puntos arbitrarios, por ejemplo, el B y el C. Las perpendiculares trazadas desde B a las rectas que pasan por C, intersecan todas las trazadas desde C. De C parten 3 rectas que no pasan por B. Por consiguiente, de B se pueden trazar 3 perpendiculares a éstas. Ellas se intersecan con las trazadas desde C en $3 \cdot 6 = 18$ puntos. Cada una de las perpendiculares trazadas desde el punto B a las otras 3 rectas que pasan por C corta sólo a 5 perpendiculares trazadas desde C, puesto que ésta es paralela a una de estas perpendiculares, por ser ambas normales a una misma recta. Se obtienen 15 puntos más. En consecuencia, las perpendiculares trazadas desde dos puntos se intersecan en $18 + 15 = 33$ puntos. Pero de 5 puntos se pueden formar 10 pares. Esto nos daría $33 \cdot 10 = 330$ puntos de intersección, pero algunos de éstos coinciden. Precisamente, 3 puntos cualesquiera de los 5 dados forman un triángulo. Las alturas de éste (que son algunas de nuestras perpendiculares) se intersecan en un mismo punto, el cual hemos considerado 3 veces. Como hay $C_3^5 = 10$ de estos triángulos, deben eliminarse 20 puntos, quedando 310 puntos posibles de intersección.

266.

Tres números enteros cualesquiera x, y, z, que satisfagan las desigualdades $n+1 \leqslant x, y, z \leqslant \leqslant 2n$, pueden ser lados de un triángulo. Por esto, el número de triángulos con tales lados es igual a $\overline{C}_3^n = C_3^{n+2}$. Para hallar la cantidad de triángulos isósceles, obsérvese que, para una base dada, tendremos n triángulos isósceles. Por consiguiente, el número total de éstos es igual a n^2. El número de triángulos equiláteros es igual a n.

267.

Hay que hallar la cantidad de ternas de números naturales x, y, z, tales que $x \leqslant y \leqslant z \leqslant 2n$ y $x+y>z$. Sea dado $x=p$. Entonces y toma los valores de p a $2n$. Cuando y toma los valores de p a $2n-p+1$, a cada valor de y corresponderán p de z, que satisfagan las desigualdades $y \leqslant z < y+p$, $z \leqslant 2n$. Si, en cambio, y toma los valores de $2n-p+2$ a $2n$, el número de valores correspondientes de z será igual a $2n-$ $-y+1$. En total, para un $x=p$ dado, se obtienen

$$2p(n-p+1)+\sum_{y=2n-p+2}^{2n}(2n-y+1)=$$
$$=2pn-\frac{3}{2}p^2+\frac{3}{2}p$$

pares (y, z) tales que x, y, z satisfacen a las condiciones planteadas. De aquí se deduce que el número total de triángulos, para los cuales $1 \leqslant x \leqslant n$ y $1 \leqslant y, z \leqslant 2n$, es igual a

$$\sum_{p=1}^{n}\left(2pn-\frac{3}{2}p^2+\frac{3}{2}p\right)=\frac{n}{2}(n+1)^2.$$

En virtud del problema 266, existen C_3^{n+2} triángulos, para los cuales $x \geqslant n+1$. Por esto, en total tendremos

$$\frac{n}{2}(n-1)^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

triángulos.

El número de triángulos isósceles de base $x=2k$, es igual a $2n-k$, y los de base $2k+1$, también a $2n-k$. Por esto, la cantidad total de triángulos isósceles es igual a

$$\sum_{k=1}^{n}(2n-k)+\sum_{k=0}^{n-1}(2n-k)=3n^2.$$

Eliminándolos, obtenemos

$$\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}-3n^2=\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}$$

triángulos.

268.

Este problema se resuelve en forma semejante al 267. El número de triángulos con un valor dado de $x=p \leqslant n-1$, es igual a $2np-\frac{3}{2}p^2+\frac{p}{2}$, y el de todos los triángulos para los que $x \leqslant n-1$, es

$$\sum_{p=1}^{n-1}\left(2np-\frac{3}{2}p^2+\frac{p}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n-1)}{2}.$$

En cambio, el número de triángulos para los que $x \geqslant n$, es igual a C_3^{n+2}, por lo cual tendremos, en total,

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=$$
$$=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

triángulos. El número de triángulos isósceles es igual a

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2n-k-1)+\sum_{k=0}^{n-1}(2n-k-1)=3n^2-3n+1,$$

y el de escalenos, a

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}-3n^2+3n-1=$$
$$=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3).$$

269.

Como se toman n puntos de intersección y no hay tres de ellos sobre una misma recta, en cada recta habrá dos, y sólo dos, puntos del grupo escogido.

Por esto, para fijar este grupo se numeran las rectas dadas y se escoge en la primera de ellas el punto de intersección con la segunda, en la segunda, el de intersección con la tercera, ..., en la n-ésima, el de intersección con la primera. Se obtiene así el grupo buscado de puntos, y todos estos grupos se pueden obtener mediante el método descrito. Teniendo en cuenta que la permutación cíclica de los puntos y el cambio del orden del recorrido de éstos no cambian el grupo de puntos, se obtiene que el número de éstos es igual a $\frac{P_n}{2n} = \frac{1}{2}(n-1)!$.

270.

Podemos elegir r vértices, que vayan en un orden dado, de A_r^n formas. Como una permutación cíclica de éstos y la inversión del orden de su recorrido no cambian el polígono, se obtienen $\frac{1}{2r}A_r^n$ polígonos.

271.

Tomemos dos puntos en una recta y dos en la otra. A éstos les corresponden dos puntos de intersección de las rectas que pasan por ellos (el punto de intersección de las diagonales del trapecio y del de intersección de sus costados). Como sobre la primera recta se pueden tomar C_2^n pares de puntos, y sobre la segunda, C_2^m, el número de puntos de intersección es igual a $2C_2^nC_2^m$.

272.

Los n puntos determinan C_3^n circunferencias. Entre ellas, C_2^{n-1} pasan por un punto dado, y C_1^{n-2}, por dos puntos dados. Por esto, la recta que pasa por dos puntos dados tiene no más de $2C_3^{n-2} + (2C_2^{n-1} - C_1^{n-2}) + 2$ puntos de intersección con las circunferencias. Como por n puntos pasan C_2^n rectas, tendremos no más de

$$C_2^n[2C_3^{n-2}+2C_2^{n-1}-C_1^{n-2}+2]$$

puntos de intersección.

273.

Cada recta de la intersección se determina por dos planos, y cada plano, por tres puntos dados. Las rectas se dividen en clases, según cuántos puntos de los que determinan el primer plano figuren entre los que determinan el segundo. Todos los puntos serán distintos en $\frac{1}{2}C_3^nC_3^{n-3}$ casos (se escogen tres puntos entre n y otros tres entre los $n-3$ restantes, sin tener importancia su orden de elección). Si un punto figura en ambas ternas, se obtienen $\frac{3}{2}C_3^nC_2^{n-3}$ formas de elección, y si son dos los puntos que figuran en ambas ternas, $\frac{3}{2}C_3^nC_1^{n-3}$. En total, tendremos

$$\frac{1}{2}C_3^n(C_3^{n-3}+3C_2^{n-3}+3C_1^{n-3}) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2+2)}{72}$$

rectas. Entre ellas,

$$\frac{1}{2}C_3^nC_3^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{72}$$

no pasarán por ninguno de los puntos dados.

274.

Designemos los lados del cuadrilátero mediante a, b, c, d. Sin perder generalidad, se puede considerar que a es el menor de los lados, c es el lado opuesto a éste, y que $b < d$. Entonces, será $a < b < d$ y $a < c$. Además, como los cuadriláteros están circunscritos a una circunferencia, será $a + c = b + d$. De aquí se deduce que $a + c > 2b$. Por esto, para valores dados de a y b, la longitud de c puede adquirir valores de $2b - a + 1$ a n, y debe cumplirse la desigualdad $2b - a \leqslant n - 1$.

De esta forma, hemos demostrado que $b \leqslant \frac{a+n-1}{2}$ y que $2b - a + 1 \leqslant c \leqslant n$. Designemos mediante s a $E\left(\frac{a+n-1}{2}\right)$. Entonces, para un valor dado de a, tendremos

$$\sum_{b=a+1}^{s}(n+a-2b) = (s-a)(n-s-1)$$

cuadriláteros.

Sea n un número par, $n = 2m$. Entonces, para valores impares de a, $a = 2k - 1$, tendremos $s = E\left(\frac{n+a-1}{2}\right) = m + k - 1$ y, por consiguiente, $(m-k)^2$ cuadriláteros, y para a pares, $a = 2k$, será $s = E\left(\frac{n+a-1}{2}\right) = m + k - 1$

habiendo, por ende, $(m-k-1)(m-k)$ cuadriláteros. Sumando con respecto a a, se obtiene que el número total de cuadriláteros es igual a

$$\sum_{k=1}^{m}(m-k)^2+\sum_{k=1}^{m}(m-k)(m-k+1)=$$
$$=\frac{m(m-1)(4m-5)}{6}=\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}.$$

El caso en que n es impar se estudia análogamente.

Si se admite que los cuadriláteros tengan lados iguales, a, b, c, d habrán de satisfacer las relaciones $a \leqslant b \leqslant d \leqslant n$, $a \leqslant c$ y $a+c=b+d$, de donde se deduce que $b \leqslant \frac{a+n}{2}$ y $2b-a \leqslant \leqslant c \leqslant n$. Si hacemos $E\left(\frac{a+n}{2}\right)=s$, el número de cuadriláteros con el valor dado de a será igual a $(n-s+1)(s-a+1)$.

Para un valor par de n, se obtienen $\frac{n(n+2)(2n+5)}{24}$ cuadriláteros, y para n impar, $\frac{(n+1)(2n^2+7n+3)}{24}$.

275.

El número de circunferencias trazadas es igual a C_3^n, pasando C_2^{n-1} por un punto dado, y C_1^{n-2} por dos puntos dados. Tomemos una de estas circunferencias, trazada por los puntos A, B, C. Tendremos $C_3^n-3C_2^{n-1}+3C_1^{n-2}-1$ circunferencias que no pasen por ninguno de estos puntos. La circunferencia escogida se interseca con cada una de ellas en dos puntos. Ahora bien, existen $3(C_2^{n-1}-2C_1^{n-2}+1)$ circunferencias que pasan por uno de los puntos A, B, C y no pasan por dos de ellos. Estas nos dan un punto de intersección cada una, distinto de A, B, C. Las demás circunferencias se intersecan con la elegida en dos de los puntos A, B, C. De este modo, la circunferencia tomada nos da

$$2(C_3^n-3C_2^{n-1}+3C_1^{n-2}-1)+3(C_2^{n-1}-$$
$$-2C_1^{n-2}+1)=\frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6}$$

puntos de intersección, distintos de A, B, C. En total, obtenemos

$$\frac{1}{2}C_3^n\frac{(n-3)(n-4)(2n-1)}{6}=\frac{5(2n-1)}{3}C_5^n$$

puntos de intersección distintos de los dados. Agregando estos n puntos, se obtiene que la mayor cantidad de puntos de intersección es igual a

$$\frac{5(2n-1)}{3}C_5^n+n.$$

276.

Al agregar el plano $k+1$ a los k trazados antes $(k=1, 2, \ldots)$, se obtienen $2k$ regiones nuevas, habiendo en total $2+2+4+6+\ldots+2(n-1)=n^2-n+2$.

277.

La cantidad total de formas de pintar 6 caras de 6 colores distintos es igual a $6!=720$. Dividamos estas formas en clases, formadas por los pintados que pueden hacerse coincidir mediante movimientos. El cubo se puede hacer coincidir consigo mismo de 24 maneras (de 6 modos se escoge la cara en la que se transformará una cara dada del cubo, después de lo qual quedan 4 giros de éste, en los que la cara dada se transforma en sí misma). Por esto, cada clase está formada por 24 formas de pintado, siendo el número de formas geométricamente distintas de pintado igual a $720/24=30$.

278.

Se resuelve en forma análoga al problema 277. El número de formas de pintado es igual a $4!/12=2$.

279.

Existen $8!/24=1680$ modos de pintado.

280.

Para el dodecaedro hay $12!/60$ formas de pintado, y para el icosaedro, $20!/60$.

282. Hay que hallar la cantidad de ternas de números naturales x, y, z, tales que $x \leqslant y \leqslant z$, $x+y+z=40$ y $x+y>z$. De estas desigualdades se desprende que z puede tomar valores que satisfagan a las desigualdades $14 \leqslant z \leqslant 19$. Si $z=19$, será $x+y=21$, siendo $x \leqslant y \leqslant 19$. Por esto, será $11 \leqslant y \leqslant 19$, y tendremos 9 triángulos con $z=19$. Análogamente se establece que el número de triángulos, para los cuales $z=18, 17, 16, 15, 14$, es igual a 8, 6, 5, 3, 2 respectivamente, habiendo en total 33 triángulos. De la misma forma se obtiene que el número de triángulos de perímetro 43 es igual a 44.

283.

Tomemos un triángulo de perímetro $4n$. Supongamos que sus lados son iguales a x, y, z. Agregando 1 a las longitudes de estos lados, se obtienen los números $x+1$, $y+1$, $z+1$, que son longitudes de los lados de un triángulo de perímetro 43. Pero, además, tendremos triángulos de lados $(1, 2n+1, 2n+1)$, $(2, 2n, 2n+1)$, ..., $(n+1, n+1, 2n+1)$, que no pueden ser obtenidos por el método descrito.

284.

Sea $N = 12n$. Debemos hallar la cantidad de ternas de números naturales x, y, z, tales que $x \leqslant y \leqslant z$, $x+y+z = 12n$ y $x+y > z$. De estas desigualdades se deduce que $4n \leqslant z \leqslant 6n - 1$. Además, si $z = 2k$, será $x + y = 12n - 2k$, y el número de soluciones enteras de esta ecuación, tales que $x \leqslant y \leqslant z = 2k$, será igual a $3k - 6n + 1$. Si, en cambio, es $z = 2k + 1$, tendremos $3k - 6n + 2$ soluciones. Por esto, el número de triángulos es igual a

$$\sum_{k=2n}^{3n-1} (3k-6n+1) + \sum_{k=2n}^{3n-1} (3k-6n+2) = 3n^2.$$

Los casos restantes se analizan de igual forma. Al pasar de N a $N+3$ se pueden utilizar razonamientos análogos a los efectuados en la resolución del problema 282.

285.

Demostremos que cada parada la tienen exactamente n recorridos. Sea l uno de los recorridos, y B, una parada situada fuera de este recorrido

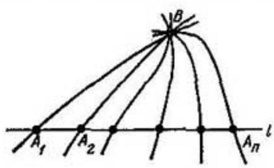

Fig. 37.

(fig. 37). En virtud de la condición 1, de la parada B se puede llegar por uno de los recorridos a cada una de las n paradas $A_1, \ldots, A_n$ del recorrido l. Además, según la condición 2, cada uno de los recorridos que pasa por B pasa por una de las paradas $A_1, \ldots, A_n$ (de otro modo, no se podría pasar de este recorrido al l) y sólo por una de ellas (de otra manera se podría pasar de este recorrido al l en dos paradas). Tampoco hay dos recorridos que pasen por B y por una misma parada del recorrido l (de otra forma, se podría pasar de uno de estos recorridos a otro en dos paradas: en la B y en la parada del recorrido

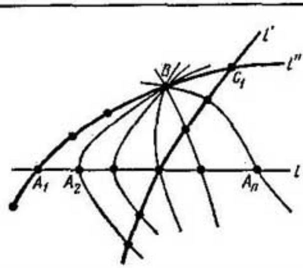

Fig. 38.

l por la que pasan ambos). De aquí se deduce que por la parada B pasan tantos recorridos, cuantas paradas existan en el recorrido l, es decir, exactamente n.

Nos queda por demostrar que por cada una de las paradas $A_1, \ldots, A_n$, situadas en el recorrido l, pasan también exactamente n recorridos. Para esto, es suficiente demostrar que para cualquiera de estas paradas existe un recorrido l' que no pase por ella (éste tiene, por hipótesis, n paradas, y entonces, como sabemos, por esta parada pasarán n recorridos). Como el número total de recorridos no es menor que dos, además de l existirá por lo menos otro recorrido l' (fig. 38), que se intersecará con el l en un punto único, digamos, el A_1. Entonces, las paradas $A_2, \ldots, A_n$ estarán situadas fuera del recorrido l', por lo que pasarán n recorridos por ellas. Sea B otra parada en el recorrido l'. El recorrido que pasa por B y A_2 no pasa por A_1, por lo cual también pasarán exactamente n paradas por A_1. Así pues, por cualquier parada pasan exactamente n recorridos.

Como para cada parada se puede hallar un recorrido que no pase por ella, y en cada recorrido hay n paradas, por cada parada pasarán n recorridos. Tomemos uno de estos recorridos l. Por cada parada de éste pasan $n-1$ recorridos, distintos del l, sin que haya dos de ellos que coincidan, en virtud de la condición 2 (de otro modo, tendrían dos paradas comunes), y cualquier recorrido figura entre los que se obtienen por este método. De esta forma, el número de recorridos distintos del l es igual a $n(n-1)$, teniendo en total $n(n-1)+1$ recorridos.

286.

Supongamos que en uno de los recorridos l hay n paradas. De la resolución del problema 285 queda claro que por cualquier parada B, que se halle fuera de l, pasan exactamente n recorridos. Demostremos que en un recorrido arbitrario l', distinto del l, hay exactamente n paradas. En virtud de la condición 3, en l' hay no menos de tres paradas y, según la 2, sólo una de éstas es al mismo tiempo parada del recorrido l. Fuera del l', están situadas $n-1$ paradas del recorrido l. Demostremos que, además de esto, fuera de l' hay por lo menos otra parada más, que no se encuentra en l. En efecto, sea A_1 una de las $n-1$ paradas del recorrido l, situadas fuera del l', y C_1, una de las paradas del recorrido l', situadas fuera del l (hay no menos de 2 de estas paradas). En virtud de la condición 1, existe un recorrido l'' que pasa por las paradas A_1 y C_1. Además, por la condición 3, en este recorrido habrá, además de A_1 y C_1, por lo menos otra parada B_1, la cual estará situada fuera de l' y de l. Por esta parada B_1, como sabemos por la resolución del problema 285, pasan n recorridos. Cada uno de ellos se interseca con el l' en un punto único. Además, por cada parada del recorrido l' pasa por lo menos uno que la une con la B. Por esto, el número de paradas del recorrido l' es igual al de recorridos que pasan por la parada B, es decir, a n.

Como hemos visto en la resolución del problema 285, en este caso el número de recorridos se expresa mediante la fórmula $n(n-1)+1$. Como por hipótesis, este número es igual a 57, hay que resolver la ecuación n^2-n+1. Haciéndolo, hallamos que $n=8$.

287.

Es posible. Tomemos, por ejemplo, 10 rectas del plano, tales que no haya dos paralelas ni tres que se intersequen en un mismo punto, y consideraremos que las rectas son recorridos de autobús, y los puntos de intersección de éstas son las paradas. Aquí se puede viajar de cualquier parada a cualquier otra sin hacer transbordos, si se hallan en una misma recta, y con un solo transbordo, si lo están en rectas diferentes. Si inclusive se elimina una recta de este esquema, de todos modos existirá la posibilidad de viajar de cada parada a cualquier otra, efectuando en el camino no más de una transbordo. Pero si se eliminan dos rectas, una parada —el punto de intersección de éstas— no será atendida en absoluto por los recorridos restantes, y desde ésta será imposible viajar a cualquier otra.

288.

La esfera puede ser tangente a cualquier plano por uno de sus dos lados, y a una esfera dada, desde adentro o desde afuera. Por esto, se pueden trazar 16 esferas distintas.

289.

Cada una de las m rectas trazadas por el punto A se interseca con $2m$ rectas. Por esto, las que pasan por A dan $2m^2$ puntos de intersección. La cantidad total de tales puntos, diferentes de los tres dados, es igual a $3m^2$.

290.

Designemos los puntos que se hallan sobre un mismo plano mediante $A_1, \ldots, A_m$, y los restantes, por $B_1, \ldots, B_{n-m}$. Cada plano se determina por la elección de tres puntos. Entre éstos puede haber tres, dos, uno, o ningún punto de los $A_1, \ldots, A_m$. En correspondencia con esto, se obtiene que la cantidad de planos es igual a

$$1+C_2^mC_1^{n-m}+C_1^mC_2^{n-m}+C_3^{n-m}.$$

291.

El número de puntos de intersección que se hallan en cada una de las rectas que pasa por A, es igual a $n+p$, por B, a $m+p$, y por C, a $m+n$. Como por A pasan m rectas, por B, n y por C, p, el número total de puntos de intersección es igual a

$$\frac{1}{2}[m(n+p)+n(m+p)+p(m+n)]=$$

$$=mn+mp+np.$$

De éstos se puede elegir de $C_3^{mn+mp+np}$ maneras una terna de puntos, pero en $mC_3^{n+p}+nC_3^{m+p}+pC_3^{m+n}$ casos obtendremos puntos que se hallen sobre una misma recta. Por esto, el número de triángulos es igual a

$$C_3^{mn+mp+np}-mC_3^{n+p}-nC_3^{m+p}-pC_3^{m+n}.$$

292.

Tomemos arbitrariamente el primer vértice del triángulo. Esto puede hacerse de n maneras. Después, debemos elegir otros dos vértices entre $n-3$ puntos, que no estén junto al dado, de forma que tampoco lo estén entre sí. Esto puede hacerse de C_2^{n-4} maneras (véase la pág. 60). Como cualquiera de los tres vértices se puede considerar primero, tendremos $\frac{n}{3}C_2^{n-4}=$ $=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ modos de elección.

293.

Dividamos todos los triángulos en dos clases: aquellos cuyos vértices se hallen en distintas rectas, y aquellos en los que dos vértices estén sobre una misma recta. El número de triángulos de la primera clase es igual a $p^3C_3^n$ (escogemos de C_3^n modos las tres rectas en que se hallarán los vértices, después de lo cual se elige, en cada una de ellas, un punto de entre p). El número de triángulos de la segunda clase es igual a $\frac{1}{2}p^2(p-1)n(n-1)$ (escogemos la recta en que se hallarán los dos vértices, luego dos puntos en ella, después de lo cual se toma una recta, donde estará un solo vértice, y un punto en esta recta). El número total de triángulos es igual a

$$p^3C_3^n+\frac{1}{2}p^2(p-1)n(n-1)=$$

$$=\frac{n(n-1)p^2(pn+p-3)}{6}.$$

294.

Cada punto interior de intersección de las diagonales se determina unívocamente fijando 4 vértices del polígono de n lados que son los extremos de las diagonales que se cortan. Por esto, su número es igual a C_4^n. Hallemos ahora la cantidad total de puntos de intersección de las diagonales. De cada vértice del polígono de n lados parten $n-3$ diagonales, teniendo en total $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Cada diagonal AB se corta con todas las que unen los vértices distintos de A y B. Por esto, habrá

$$\frac{n(n-3)}{2}-2(n-3)+1=\frac{(n-3)(n-4)}{2}+1$$

puntos de intersección de la diagonal AB con las restantes. Como el número total de diagonales es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$, y cada punto de intersección se toma en consideración dos veces, tendremos, en total,

$$\frac{n(n-3)[(n-3)(n-4)+2]}{8}$$

puntos de intersección de las diagonales. Restando de este número la cantidad de puntos interiores de intersección, se obtiene que el número de puntos exteriores de intersección es igual a

$$\frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{12}.$$

295.

Cada polígono de r lados se determina por la elección de r puntos de entre n, tomados en un orden determinado; además, una permutación cíclica de los puntos no provoca un cambio de este polígono, así como tampoco lo hace el cambio de la orientación. Por esto, el número de polígonos de r lados es igual a $\frac{1}{2r}A_r^n$ y, en general, el número de polígonos es $\sum_{r=3}^{n}\frac{1}{2r}A_r^n$. El número de polígonos convexos es igual a $\sum_{r=3}^{n}C_r^n$.

296.

m rectas paralelas dividen el plano en $m+1$ franjas. Cada nueva recta agrega tantas regiones, en cuantas partes se divide por las rectas ya trazadas. Como trazamos n rectas más, se obtienen

$$m+1+(m+2)+\ldots+(m+n)=\frac{n(2m+n+1)}{2}$$

regiones.

297.

Dividamos las circunferencias en clases, según la cantidad de puntos dados que se hallen en la circunferencia dada. Una circunferencia (precisamente, la dada) los contiene todos, $C_2^5C_1^6$ circunferencias contienen a dos puntos, $C_1^5C_2^6$, a uno, y C_3^6, a ninguno. En total, obtenemos $1+C_2^5C_1^6+C_1^5C_2^6+C_3^6=156$ circunferencias.

298.

A cada tres rectas les corresponden 4 circunferencias tangentes a ellas. Por esto, en total tendremos $4C_3^{10}=480$ circunferencias.

299.

Escojamos s vértices seguidos del polígono de n lados $A_1, \ldots, A_s$ y dividamos todos los polígonos de k lados, que satisfagan la condición planteada en el problema, en dos clases. A la primera haremos pertenecer todos los polígonos de k lados, uno de cuyos vértices coincida con uno de los elegidos, y a la segunda, los restantes. Los polígonos de la primera clase se dividen en s subclases, según cuál de los vértices A_m, $1\leqslant m\leqslant s$, pertenezca a éste (es evidente que estas subclases no tienen elementos comunes).

Hallemos el número de polígonos de k lados, en los cuales uno de los vértices es A_m. Para esto, eliminemos el vértice A_m y los s vértices que le siguen, en el sentido de las agujas del reloj (ninguno de ellos es vértice del polígono de k lados). Debemos elegir, de entre los $n-s-1$ vértices restantes, $k-1$, de forma que después de cada uno de ellos haya no menos de s vértices elegidos. Esto se puede hacer de C_{k-1}^{n-ks-1} maneras (véase el problema 250). Por esto, el número de polígonos de k lados con vértice A_m es igual a C_{k-1}^{n-ks-1}, y el número total de polígonos de la primera clase, a sC_{k-1}^{n-ks-1}.

Hallemos ahora el número de polígonos de k lados de la segunda clase. Para esto, «cortemos» la circunferencia entre los vértices A_s y A_{s+1}. Hay que escoger k vértices, de forma que después de cada uno elegido haya por lo menos s que quedaron (sin que sea elegido ninguno de los vértices $A_1, \ldots, A_s$). Esto se puede efectuar de C_k^{n-ks} maneras. De este modo, el número total de polígonos de k lados que satisfacen la condición planteada es igual a $sC_{k-1}^{n-ks-1}+C_k^{n-ks}$.

300.

Cada paralelogramo se determina por dos pares de rectas paralelas. Por esto, tendremos $(C_2^{n+2})^2$ paralelogramos.

301.

Trazaremos sucesivamente las diagonales desde los vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Cada nueva diagonal nos da tantas regiones nuevas, en cuantas partes se divide por las trazadas anteriormente, es decir, en una región más que el número de puntos de intersección de ésta con las diagonales que se han trazado antes. Como cada punto de intersección se obtiene aquí una sola vez, el número total de nuevas regiones es igual a la suma del número de puntos de intersección y del de diagonales. Como al principio teníamos una región, en total habrá

$$1+\frac{n(n-3)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n(n-3)(n^2-3n+14)}{24}+1$$

partes (véase el problema 294).

302.

Sea n par, $n=2k$. Entonces n se puede representar de las siguientes maneras como suma de dos términos:

$$n=1+(2k-1)=2+(2k-2)=\ldots=k+k.$$

Pero la carta con número 1 puede ser extraída de una sola forma, con 2, de dos, etc. Y dos cartas con número $k>1$ se pueden escoger de C_2^k modos. Por esto, tendremos en total

$$1(2k-1)+2(2k-2)+\ldots+(k-1)(k+1)+\frac{k(k-1)}{2}=\sum_{s=1}^{k-1}s(2k-s)+\frac{k(k-1)}{2}=\frac{2k(k^2-1)}{3}=\frac{n(n^2-4)}{12}$$

maneras de obtener una suma de $n=2k$. Si, en cambio, n es impar, $n=2k-1$, entonces

$$n=1+(2k-2)=2+(2k-3)=\ldots=(k-1)+k,$$

siendo el número de formas igual a

$$\sum_{s=1}^{k-1}s(2k-s-1)=\frac{k(k-1)(2k-1)}{3}=\frac{n}{12}(n^2-1).$$

303.

Dividamos las elecciones en clases, según el número de objetos iguales que figuran en ellas. La cantidad de elecciones que contengan k objetos iguales es igual a C^{2n+1}_{n-k}. Por esto, el número total de elecciones será igual a

$$C^{2n+1}_{n}+C^{2n+1}_{n-1}+\ldots+C^{2n+1}_{0}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}C^{2n+1}_{k}=2^{2n}.$$

304.

Si el primer término de la progresión es igual a a y su diferencia a d, el tercero será igual a $a+2d$. Por hipótesis es $a+2d\leqslant 2n$. Esta desigualdad tiene, para un d fijo, $2n-2d$ soluciones. En total, se obtienen

$$(2n-2)+(2n-4)+\ldots+2=n(n-1)$$

soluciones. Como cada progresión obtenida se puede considerar tanto creciente como decreciente, se obtienen $2n(n-1)$ progresiones. Para la sucesión de número $1, 2, 3, \ldots, 2n+1$, tendremos $2n^2$ progresiones.

305.

Demostremos la afirmación mediante inducción con respecto al número s de curvas. Si $s=1$, ésta es evidente, ya que no hay puntos de intersección y el número de regiones es igual a 1. Supongamos que la afirmación ya fue demostrada para s curvas. Tomemos un sistema de s curvas, con n_r puntos de intersección de multiplicidad r, $r=2, 3, \ldots$ (un punto será de multiplicidad r, si en éste se intersecan r curvas). Entonces, éstas delimitan $1+n_2+\ldots+rn_{r+1}+\ldots$ regiones cerradas. Tracemos la curva $s+1$, y supongamos que ésta tiene k_r puntos de intersección, de multiplicidad r, con las trazadas anteriormente, $r=2, 3, \ldots$, y, en total, $k_2+k_3+\ldots k_{r+1}$ puntos de intersección. Estos puntos la dividen en $k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}$ partes. Cada parte de la curva trazada corresponde a una nueva región, por lo cual el número de éstas será ahora igual a

$$(1+n_2+\ldots+rn_{r+1}+\ldots)+(k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}+\ldots).\ (*)$$

Pero si la nueva curva pasa por un punto de intersección de multiplicidad r de las trazadas anteriormente, ahora éste será un punto de intersección de multiplicidad $r+1$.

Sea n'_r el número de puntos de multiplicidad r en el nuevo sistema de curvas. Está claro que $n'_{r+1}=n_{r+1}-k_{r+1}+k_r$ (de los puntos de intersección de multiplicidad $r+1$ que había hay que restar k_{r+1}, de multiplicidad $r+1$, que aumentan a ésta, y agregar k_r, de multiplicidad r y que la aumentan). Pero entonces

$$1+n'_2+2n'_3+\ldots+rn'_{r+1}=$$
$$=1+(n_2-k_3+k_2)+2(n_3-k_4+k_3)+\ldots$$
$$\ldots+r(n_{r+1}-k_{r+1}+k_r)+\ldots=$$
$$=(1+n_2+2n_3+\ldots+rn_{r+1}+\ldots)+$$
$$+(k_2+k_3+\ldots+k_{r+1}+\ldots)$$

Hemos demostrado, así, que $1+n'_2+2n'_3+\ldots+rn'_{r+1}+\ldots$ es igual al número de regiones para el nuevo sistema de curvas (véase la fórmula (*)). En virtud del principio de inducción completa, la afirmación es válida para cualquier número de curvas.

306.

Las rectas del primer haz dividen el plano en $2m$ partes. La primera recta del segundo haz se interseca con todas las m del primero, dando $m+1$ regiones nuevas. Todas las rectas restantes del segundo haz tendrán $m+1$ puntos de intersección con las trazadas antes. Por esto, tendremos en total

$$2m+m+1+(n-1)(m+2)=nm+2n+2m-1$$

regiones.

307.

No, pues en caso contrario el número de uniones sería igual al número fraccionario $\frac{77\cdot 15}{2}$.

308.

La suma de los coeficientes es igual al valor de la expresión para $x=y=z=1$. Sustituyendo estos valores, se obtiene que la suma es igual a -1.

309.

El número máximo de bolas, entre las que no haya 15 iguales, es igual a 74 (10 blancas, 10 negras, 12 amarillas y de a 14 de las rojas, verdes y azules). Si se toman 75 bolas, habrá entre ellas 15 de un mismo color.

310.

Clasifiquemos las formas de pintado según el número de caras blancas. Existe una forma única de pintado que no contenga ninguna cara blanca, y una que contenga una sola. En el caso de dos caras blancas, habrá dos formas de pintado: o bien estas caras tienen una arista común, o bien son opuestas. Para tres caras blancas nuevamente tendremos dos formas: o hay dos caras blancas opuestas, o las tres confluyen en un mismo ángulo. Los casos de 4, 5 y 6 caras blancas se reducen a los que acabamos de analizar, sustituyendo los colores por los opuestos. En total, se obtienen $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ formas de pintado.

311.

Supongamos que ahora se pintan los vértices del cubo. Entonces hay una forma de pintar sin vértices blancos, 1 forma con un solo vértice blanco, 3 con dos (los vértices blancos se hallan en una misma arista, en una diagonal de una cara o en una del cubo), 3 con tres (los tres vértices se hallan en una misma cara, o bien hay dos

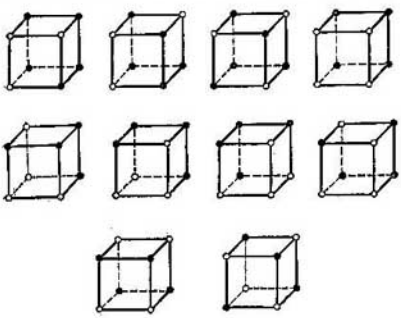

Fig. 39.

en una arista y el tercero en una diagonal de la cara con uno de estos dos vértices, o bien los tres vértices se hallan dos a dos en una diagonal de una cara, véase la fig. 39). Hay 5 formas de pintado con cuatro vértices blancos (todos los cuatro se hallan en una misma cara, o los tres vértices A, B, C se hallan en una cara y el cuarto en una misma arista que el A, o que el B, o en el vértice diametralmente opuesto al B; o bien dos vértices se hallan en una misma arista y otros dos en la diametralmente opuesta a ella). Los casos de 5, 6, 7 y 8 vértices blancos se reducen

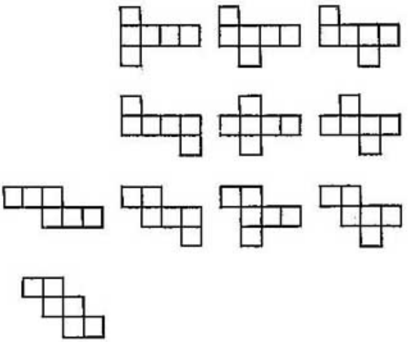

Fig. 40.

a los analizados más arriba cambiando los colores por los opuestos. En total, habrá $1 + 1 + 3 + 3 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 = 21$ formas de pintado.

312.

El cubo tiene 11 desarrollos (fig. 40). Las seis primeras soluciones las dan los desarrollos en los que cuatro caras del cubo están situadas en una banda del desarrollo. Los cuatro desarrollos siguientes son aquellos en los cuales hay tres caras en una banda, pero no cuatro. Por fin, en laúltima solución no hay tres caras en ninguna banda.

313.

Hay sólo 4 formas de este pintado. Con respecto a la demostración de esto, referimos al lector al libro de H. Steinhaus «Cien Problemas», ed. Fizmatguiz, 1959, problema № 40.

314.

Para un tetraedro existe una sola solución; para un octógono también una sola; para un octaedro, tres; para un dodecaedro, dos asimétricas y recíprocamente simétricas, y para el icosaedro, 33 soluciones. Véase la demostración detallada en el libro citado de H. Steinhaus, problema № 44.

315.

Demostremos primeramente que al cabo de 2^n unidades de tiempo quedarán sólo dos partículas, situadas en los puntos con coordenadas 2^n y -2^n respectivamente. Para $n = 1$, esta afirmación es evidente. Supongamos que ya fue demostrada para $n = k$. En el transcurso de los $2^k - 1$ pasos siguientes, estas partículas no interactúan y, en virtud de la hipótesis de la inducción, al cabo de 2^k pasos cada una de ellas dará sólo dos partículas, alejadas de ellas a la izquierda y a la derecha en 2^k. En otras palabras, obtenemos una partícula en el punto 2^{k+1}, dos en el O y una en el -2^{k+1}. Las partículas del punto O se aniquilan mutuamente, quedando dos partículas. La afirmación queda demostrada.
Asi, pues: al cabo de 128 pasos quedarán dos partículas en los puntos de coordenadas 128 y -128. Y al cabo de 129 pasos, habrá cuatro partículas en los puntos 129, 127, -127 y -129.

Si $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_s}$, $k_1 > k_2 > \ldots > k_s$,

obtenemos 2^s partículas, cuyas coordenadas tienen la forma $\pm 2^{k_1} \pm 2^{k_2} \pm \ldots \pm 2^{k_s}$ (se admiten combinaciones cualesquiera de los signos). Esta afirmación se demuestra fácilmente mediante inducción con respecto a s: para $s = 1$, ya la hemos demostrado. Supongamos que ya fue demostrada para $s < m$, y que $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$. Entonces, después del $(n - 2^{k_m})$-ésimo paso obtendremos 2^{m-1} partículas, dispuestas en los puntos de coordenadas $\pm 2^{k_1} \pm 2^{k_2} \pm \ldots \pm 2^{k_{m-1}}$. La distancia entre las partículas más próximas no es menor que $2^{k_{m-1}+1}$. Por esto, en el transcurso de $2^{k_{m-1}} - 1$ pasos, las partículas, generadas por distintos «centros», no interactuarán unas con las otras, pero al cabo de 2^{k_m} pasos cada centro dará dos partículas, que se hallen a una distancia de $\pm 2^{k_m}$ de éste. En otras palabras, obtenemos partículas en los puntos de la forma $\pm 2^{k_1} \pm \ldots \pm 2^{k_m}$. Nuestra afirmación queda demostrada.

316.

Para descifrar una palabra, es suficiente indicar los intervalos entre los símbolos que son iniciales para las letras que se codifican con dos símbolos. Estos intervalos deben ser escogidos de entre 11, y no puede haber dos de ellos juntos (hay en total 13 intervalos, considerando el inicial y el final, pero de la hipótesis queda claro que no se puede tomar ni el final, ni el que se halla delante de éste). Si la palabra contiene p letras de dos símbolos, hay que escoger p intervalos. Esto se puede efectuar de C_p^{12-p} maneras. Por esto, habrá

$$C_0^{12} + C_1^{11} + C_2^{10} + C_3^{9} + C_4^{8} + C_5^{7} + C_6^{6} = 233$$

formas de leer la palabra dada.

317.

La cantidad de números de p cifras, cuya escritura no contenga la unidad, es igual a $8 \cdot 9^{p-1}$. Por lo tanto, entre 1 y 10 000 000 habrá

$$8(1 + 9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 + 9^6) = 9^7 - 1 = 4\,782\,968$$

números cuya escritura no contenga 1. Esto es menos que la mitad de 10^7.

318.

Tomemos los tres primeros símbolos de cada palabra. Estos forman no más de $2^3 = 8$ disposiciones. Demostremos que a cada disposición de estos símbolos le corresponde no más de dos palabras. Diciendo de otro modo, demostremos que si tres palabras tienen los tres primeros símbolos comunes, por lo menos dos de ellas tendrán otros dos símbolos comunes. En efecto, escribamos una tabla, formada por los cuatro últimos símbolos de cada una de estas tres palabras. En cada columna coincidirán por lo menos dos signos. Como el número de pares que pueden formarse de tres palabras es igual a 3, y el de columnas, a cuatro, por lo menos para dos palabras la coincidencia tendrá lugar en dos columnas. Esto significa, precisamente, que las palabras tienen otros dos símbolos que coinciden, habiendo en total 5 signos coincidentes, lo que contradice la hipótesis.
De este modo, a cada agrupación de los tres primeros símbolos le corresponden no más de dos palabras. Por esto, el número total de ellas no es mayor que 16. En la fig. 41 se representan 16 palabras que satisfacen la condición planteada.

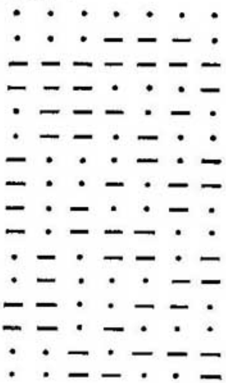

Fig. 41.

319.

Como p es un número primo, al girar la circunferencia se transforman en sí mismos sólo los pintados hechos con un mismo color. El número de los primeros es igual a n. Las demás formas de pintado (el número de ellas es igual a $n^p - n$) se dividen en clases, con p pintados cada una, transformándose los pintados de una misma clase unos en otros al girar la circunferencia. Por esto, ellos darán $\frac{n^p - n}{p}$ formas de pintado. En total, habrá $\frac{n^p - n}{p} + n$ modos. En la resolución de este problema hemos demostrado el llamado pequeño teorema de Fermat: si p es un número primo, para cualquier n entero el número $n^p - n$ se divide por p.

320.

Como 1 es el menor de los números dados, éste debe estar en una esquina, y el 2 debe estar junto a él en una misma vertical u horizontal. Entonces, los números 1, 2, . . ., n quedarán en una misma vertical u horizontal. El menor de los números restantes es el $n + 1$. Este debe ocupar su lugar junto al 1. Continuando este razonamiento, nos convencemos de que los números se disponen de una forma única, y determinada. Pero podemos colocar primero al 1 en cualquiera de las esquinas del tablero y elegir la dirección vertical, o la horizontal, para la sucesión 1, 2, . . ., n. Por esto, habrá 8 disposiciones.

321.

En caso contrario, la población de Moscú sería mayor que 9 300 000.

322.

Si se toma un número impar de objetos, el número de los que quedaron es par.

323.

El número de formas de cambiar 1 rublo en monedas de 2 y 5 kopeks es igual al de soluciones enteras no negativas de la ecuación $2x + 5y = 100$. Está claro que y puede tomar cualquier valor par de 0 a 20. Al cambiar en monedas de 5 y 3 kopeks, hay que resolver la ecuación $3x + 5y = 100$. Aquí y adquiere sólo los valores 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, el número de los cuales es menor que 21.

324.

Hay que hallar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x + 2y + 5z = 20$ o, lo que es lo mismo, de la desigualdad $2y + 5z \leqslant 20$. Está claro que z puede tomar sólo 0, 1, 2, 3 y 4 valores, a los que corresponden 11, 8, 6, 3 y 21 valores posibles de y, obteniéndose, en total, 49 soluciones.

325.

Como $3 = 2 + 1$, $4 = 2 + 2$, $6 = 5 + 1$, $7 = 5 + 2$, $8 = 5 + 2 + 1$, $9 = 5 + 2 + 2$, mediante las pesas indicadas se puede formar cualquier peso entero de 1 a 9 mg. Análogamente se forman los pesos que se expresan en decenas, centenas de miligramos, etc.

326.

El valor medio de la última cifra es igual a 2, el de la segunda y la tercera, a 2,5, y el de la primera, a 3. La cantidad total de números es igual a $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$. Por esto, su suma es igual a $540\,(3000 + 250 + 25 + 2) = 1\,769\,580$.

327.

La afirmación es evidente para $r = 1$: después del primer paso la carta que se hallaba en el p-ésimo lugar, para $p \leqslant n$, quedará en el lugar $2p$, y para $p > n$, en el $2p - 2n - 1$. En ambos casos el número del nuevo lugar es el resto de dividir $2p$ por $2n + 1$. Supongamos que la afirmación ya fue demostrada para r, es decir, supongamos que después de r pasos la carta con número p ocupó el lugar x, siendo $2^r p = k(2n + 1) + x$. En el paso siguiente, ésta ocupará el lugar y, donde $2x = l(2n + 1) + y$, $l = 0$ ó a 1. Pero entonces

$$2^{r+1}p = 2k(2n+1) + 2x = (2k+l)(2n+1) + y,$$

siendo $y < 2^{r+1}p$. Esto significa que y es el resto de dividir $2^{r+1}p$ por $2n + 1$. Según el principio de inducción completa, nuestra afirmación queda demostrada.

328.

Se desprende directamente del resultado del problema 327.

329.

Se deduce del resultado del problema 327.

330.

En efecto, en este caso el resto de la división de $2^x p$ por $2n + 1$ es igual a p.

331.

Efectivamente, después de la carta con número $2n$ habrá $2n - 1$ cartas con números pares, las cuales, precisamente, quedarán sobre la carta $2n$.

332.

La afirmación con respecto a la carta 8 se deduce del resultado del problema 331. Las demás se verifican directamente.

333.

Escribamos debajo del número de cada carta el que ésta obtendrá después de la mezcla indicada:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 11 & 6 & 12 & 5 & 13 & 4 & 14 & 3 & 15 & 2 & 16 & 1 \end{matrix} \qquad (*)$$

De esta tabla se aprecia que, por ejemplo, al mezclar una vez la 1 pasa a la 9, en la segunda, la 9 pasa a la 13, después la 13 a la 15, luego la 15 a la 16 y, por último, la 16 pasa a la 1. Esto se puede representar en forma del ciclo (1, 9, 13, 15, 16, 1). Toda la permutación se divide en ciclos de este tipo. Además del que acabamos de indicar, se tienen los ciclos (2, 8, 5, 11, 14, 2), (3, 10, 4, 7, 12, 3) y un ciclo formado sólo por el número 6. Cada ciclo está formado por una o por 5 cifras distintas, por lo cual, después de cinco veces, todas las cartas ocuparán la posición inicial. Los casos restantes se estudian de igual forma.

334.

En la primera fila podemos distribuir los colores en cualquier orden (24 modos), después de lo cual en la primera columna podemos disponer de cualquier manera los tres colores distintos del cuadrado angular (6 formas). Supongamos que se han elegido los colores indicados en la tabla.

b	n	r	a
n	b	a	r
r	a	b	n
a	r	n	b

Como en las filas verticales y horizontales debe haber representantes de todos los colores, en la segunda fila puede haber una de las siguientes combinaciones de colores: negro, blanco, azul, rojo; negro, rojo, azul, blanco; negro, azul, blanco, rojo. En la primera de estas variantes se determina unívocamente el color de las casillas de la segunda columna vertical, quedando dos posibilidades de pintar las 4 casillas restantes. Cada una de las dos variantes que quedan conduce también a dos pintados posibles. En total, se obtienen $4!\cdot 3!\cdot 2\cdot 3 = 144$ formas de pintado.

335.

Dividamos a los escolares en ternas de algún modo. De cada terna se pueden escoger tres pares no ordenados (por ejemplo, de la terna abc se pueden elegir los pares ab, ac, bc). En total, a la forma dada de partición le corresponden 15 pares, ninguno de los cuales debe encontrarse en las demás maneras de partición. Pero de 15 escolares se pueden formar $C_2^{15} = 105$ pares. Por esto, el número de modos diferentes de partición no puede superar $105 : 15 = 7$. La tabla siguiente muestra que el valor 7 se alcanza, es decir, que los escolares se pueden dividir en ternas, de forma que se cumpla la condición indicada durante 7 días:

klo	*ino*	*jmo*	*ilm*	*jln*	*ijk*	*kmn*
iab	*jac*	*lad*	*nae*	*kaf*	*mag*	*oah*
ncd	*mdb*	*kbc*	*ocg*	*mch*	*lce*	*icf*
mef	*keg*	*ieh*	*jfb*	*obe*	*ofd*	*jde*
jgh	*lhf*	*nfg*	*khd*	*idg*	*nhb*	*lbg*

336.

El número $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ es igual a la cantidad de formas de escoger, de n^2 objetos, n grupos no ordenados de n objetos cada uno y es, por lo tanto, un entero. También lo será el número $\frac{(mn)!}{(m!)^n\, n!}$, que es la cantidad de formas de dividir mn objetos en n grupos no ordenados, de m objetos cada uno. Por la misma causa será entero $\frac{(mn)!}{(n!)^m\, m!}$. Pero entonces $\left[\frac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}}(n!)^{\frac{m+1}{2}}}\right]^2$ también lo es, como producto de dos enteros. Como m y n son impares, $\frac{(mn)!}{(m!)^{\frac{n+1}{2}}(n!)^{\frac{m+1}{2}}}$ es racional, siendo su cuadrado un entero. Por consiguiente, el propio número es también entero.

337.

Véase la pág. 52.

338.

Este número es igual al coeficiente de x^m en el polinomio

$$(x^l+x^{l+1}+\ldots+x^n)^p=x^{lp}\,(1-x^{n-l+1})^p\,(1-x)^{-p}.$$

Aplicando la fórmula del binomio de Newton, se obtiene que este coeficiente es igual a

$$C_m^{m-(l-1)p-1}-C_1^pC_{m+l-n-1}^{m-(l-1)(p-1)-n-1}+$$
$$+C_2^pC_{m+2(l-n-1)}^{m-(l-1)(p-2)-2n-1}-\ldots$$

339.

Designemos mediante x, y, z el número de libros del primero, segundo y tercer tipo, obtenidos por el primer participante. Por la hipótesis del problema, se tiene que $x+y+z=12$, siendo $0\leqslant x\leqslant 7$, $0\leqslant y\leqslant 8$, $0\leqslant z\leqslant 9$. El número de soluciones enteras de la ecuación, que satisfagan las desigualdades dadas, es igual al coeficiente de t^{12} en el desarrollo del producto

$$(1+t+\ldots+t^7)(1+t+\ldots+t^8)(1+t+\ldots+t^9).$$

Este producto se puede escribir como sigue:

$$\frac{(1-t^8)(1-t^9)(1-t^{10})}{(1-t)^3}=$$
$$=(1-t^8-t^9-t^{10}+t^{17}+\ldots)\times$$
$$\times(1+3t+6t^2+10t^3+15t^4+\ldots+91t^{12}+\ldots).$$

Está claro que después de abrir paréntesis se obtiene el coeficiente 60 para t^{12}. Por esto, la distribución puede ser efectuada de 60 maneras.

340.

El número de todas las n-combinaciones con repetición de n letras es igual a C_n^{2n-1}; por lo tanto, en éstas figuran nC_n^{2n-1} letras. Como todas figuran igual número de veces, cada una se encuentra C_n^{2n-1} veces.

341.

La suma de los números escritos en el poste es igual a 999. Por esto, si ambos números son de tres cifras y uno de ellos tiene la forma $\overline{abc}$, el otro tendrá la forma $\overline{9-a,\ 9-b,\ 9-c}$. Si, en cambio, uno de los números es de una o dos cifras, el segundo comenzará a partir de la cifra 9 estando escrito en tales postes a, $\overline{99\,(9-a)}$ ó $\overline{ab}$, $\overline{9\,(9-a)\,(9-b)}$. Como en los postes debe haber sólo dos cifras distintas, será o $a=b=c$, o bien dos de los números a, b, c coinciden, siendo el tercero el complemento de éstos hasta 9. La cantidad de números del primer tipo es igual a 10 (111, 222, . . ., 999 y, además, el 0). Cada número del segundo tipo se determina por la elección de un par de cifras distintas del número de tres cifras en el que ambas figuran. Un par de cifras diferentes se puede escoger de $C_2^{10}=45$ formas distintas. A cada par le corresponden 6 números de tres cifras (por ejemplo, 221, 212, 122, 112, 121, 211). Por esto, la cantidad total de números de segundo tipo es igual a $6 \cdot 45 = 270$, habiendo, en total, 280 postes, en los cuales hay escritas sólo dos cifras diferentes.

342.

El número buscado es $\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} P(p, q) - 1$. (Eliminamos el arreglo vacío.) Como $\sum_{q=0}^{n} P(p, q) = P(p+1, q)$, tendremos:

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} P(p, q) - 1 = \sum_{p=0}^{m} P(p+1, n) - 1 = P(m+1, n+1) - 2.$$

343.

Según el problema anterior, el número de arreglos que contienen exactamente k esferas blancas es igual a $P(k+1, n+1) - P(k, n+1)$. Por esto, las esferas blancas figuran $\sum_{k=1}^{n} k[P(k+1, n+1) - P(k, n+1)]$ veces. Esta expresión se transforma como sigue:

$$\sum_{k=1}^{m} kP(k+1, n+1) - \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\times$$
$$\times P(k+1, n+1) = mP(m+1, n+1) -$$
$$-\sum_{k=0}^{m-1} P(k+1, n+1) = mP(m+1, n+1) -$$
$$-P(m, n+2) + 1 =$$
$$= 1 + \frac{mn+m-1}{n+2} P(m+1, n+1).$$

Análogamente se demuestra la afirmación sobre las esferas negras.

344.

El número buscado es igual a la suma

$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}(p+q+1)P(p, q).$$

Pero

$$\sum_{q=0}^{n}(p+q+1)P(p, q) =$$
$$= (p+1)\sum_{q=0}^{n} P(p, q) + \sum_{q=1}^{n} qP(p, q) =$$
$$= (p+1)\left[P(p+1, n) + \sum_{q=1}^{n} P(p+1, q-1)\right] =$$
$$= (p+1)[P(p+1, n) + P(p+2, n-1)] =$$
$$= (p+1)P(p+2, n).$$

Por esto, la suma es igual a

$$\sum_{p=0}^{m}(p+1)P(p+2, n) =$$
$$= \sum_{p=0}^{m}(p+2)P(p+2, n) - \sum_{p=0}^{m} P(p+2, n) =$$
$$= (n+1)P(m+1, n+2) - P(m+2, n+1) + 1 =$$
$$= 1 + \frac{mn+m+n}{m+n+4} P(m+2, n+2).$$

345.

Sumando los resultados obtenidos en los problemas 342 y 344, se obtiene el resultado requerido.

346.

El número total de pares que se pueden formar de 7 personas es igual a $C_7^2 = 21$. En cada terna (a, b, c) figuran 3 pares $((a, b), (a, c)$ y $(b, c))$. Por esto, durante 7 días todos los pares estarán representados una vez cada uno. Por cuanto en el transcurso de 7 días almorzarán 21 personas, cada amigo me visitará 3 veces, es decir, participará en tres ternas.

Escojamos primero las ternas en las que estará el primer amigo. Esto puede hacerse de $\frac{6!}{(2!)^3 3!}$ maneras (el número de formas de dividir a 6 personas en 3 pares). Cuando estas ternas estén escogidas, quedarán dos posibilidades de elegir las ternas en las que figure el segundo huésped (por ejemplo, si el primero figura en las ternas 1, 2, 3; 1, 4, 5; 1, 6, 7, el segundo estará o en las ternas 2, 4, 6; 2, 5, 7, ó en las 2, 4, 7; 2, 5, 6). Después de esto, la distribución de los restantes huéspedes se determina unívocamente. Teniendo en cuenta la posibilidad de permutar la terna de huéspedes, se obtienen

$$\frac{6!}{(2!)^3\,3!}\cdot 2\cdot 7! = 151\,200 \text{ modos.}$$

347.

De 7 personas se pueden formar $C_3^7 = 35$ ternas, de 6, $C_3^6 = 20$, de cinco, $C_3^5 = 10$, y de cuatro, $C_3^4 = 4$. Por esto, el número total de variantes de invitación es igual a A_7^{35}. En $7A_7^{20}$ casos un amigo quedará sin invitar, y en $21A_7^{10}$, dos. Aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene el resultado requerido.

348.

Si uno de los amigos viene cada día, con los restantes se pueden formar $C_2^6 = 15$ pares. Por esto, el número total de grupos, en los que toma parte una misma persona, es igual a $7A_7^{15}$. Quedan $A_7^{35} - 7A_7^{15}$ formas de invitación.

349.

Los arreglos pueden estar formados por 1, 2, . . ., . . ., n objetos. Por esto, el número total de arreglos es igual a

$$A_n^n + A_{n-1}^n + \ldots + A_1^n = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!} = n!\left[2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right].$$

Por otro lado,

$$en! - 1 = n!\left[2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right] + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right]. \qquad (*)$$

Pero para todo $n \geqslant 2$ natural, se tiene que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots = \frac{1}{n}.$$

Por esto, la expresión que se halla entre corchetes en la fórmula (*) es menor que $\frac{1}{2}$. Con esto queda demostrada nuestra afirmación.

350.

El número total de objetos de todos los arreglos es igual a

$$nA_n^n + (n-1)A_{n-1}^n + \ldots + A_1^n = n!\left[n + \frac{n-1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right] = (n-1)\,n!\left[\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right) + \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \ldots - \frac{n-2}{(n-1)!}\right)\right].$$

Es fácil comprobar que

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{3}{4!} - \ldots - \frac{n-2}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Como todos los objetos figuran un mismo número de veces, cada uno de ellos figurará

$$N = (n-1)(n-1)! \times \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right] + 1$$

veces.

Por otro lado,

$$(n-1)(n-1)!\,e = (n-1)(n-1)! \times \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots\right] = (n-1)(n-1)! \times \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right] + (n-1)\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots\right],$$

por lo cual

$$N - (n-1)(n-1)!\,e = 1 - (n-1) \times \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots\right] = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \ldots\right] < \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, N es el entero más próximo a $(n-1)(n-1)!e$.

351.

Véase la pág. 53.

352.

Uno de los tres obtiene n libros. Estos n libros pueden ser elegidos de C_n^{3n} maneras. Los $2n$ libros restantes los distribuimos entre las dos personas que quedan. Cada uno de los libros puede tocarle a una o a otra, por lo cual el número de formas de distribución de éstos es igual a 2^{2n}. Como n libros pueden ser dados a cualquiera de los tres, se obtienen $3 \cdot 2^{2n} C_n^{3n}$ modos de distribución.

353.

El número de ordenaciones distintas, en las que k pares dados de letras no se destruyan, es igual a $2^k (2n-k)!$. Estos k pares pueden ser elegidos de C_k^n maneras. Aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene el resultado requerido.

354.

El número de formas de distribución, en las que k personas dadas no obtengan ningún objeto, es igual a $(n+p-k)^r$. Aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones, se obtiene el resultado requerido.

355.

$r! \Pi_r^n$ es igual al número de formas de distribuir n objetos distintos en r cajones. Este número es igual al coeficiente de x^n en el desarrollo de $(e^x-1)^r$, multiplicado por $n!$ De aquí se desprende que

$$n! \, [1 - \Pi_2^n + 2! \, \Pi_3^n - 3! \, \Pi_4^n + \ldots]$$

es el coeficiente de x^n en el desarrollo de la suma de la serie

$$(e^x-1) - \frac{1}{2}(e^x-1)^2 + \frac{1}{3}(e^x-1)^3 -$$
$$-\frac{1}{4}(e^x-1)^4 + \ldots$$

Como

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = \ln(1+x), \qquad (*)$$

la suma de esta serie será igual a $\ln[1+(e^x-1)] = x$. Por esto, para $n>1$ la expresión (*) es igual a cero.

356.

De la primera casilla, de una forma, de la segunda, de $C_n^{2n}, \ldots$; de la k-ésima, de C_n^{kn}. En total, tendremos

$$C_n^{2n} C_n^{3n} \ldots C_n^{mn} = \frac{(mn)!}{(n!)^m}$$

modos.

357.

Hay que demostrar la desigualdad

$$C_n^{2n+r} C_n^{2n-r} \leqslant (C_n^{2n})^2.$$

La podemos escribir en la forma

$$\frac{(2n+r)(2n+r-1)\ldots(2n+1)}{(n+r)(n+r-1)\ldots(n+1)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}.$$

Esta desigualdad se deduce de que, para $0 \leqslant k < n$, será

$$\frac{2n+k}{n+k} < \frac{2n-k}{n-k}.$$

358.

Calculemos la suma de los ángulos de todos los triángulos obtenidos. La suma de los que tienen vértice en uno de los puntos interiores es igual a 360°. Como hay 500 de estos puntos, a éstos les corresponden ángulos cuya suma es igual a 360°·500. Ahora tomemos los ángulos cuyos vértices coinciden con los del polígono de 1000 lados. Su suma es igual a la de los ángulos interiores de dicho polígono, es decir, a 180°·998. En total, obtenemos 180°·1998. Como la suma de los ángulos de cada triángulo es igual a 180°, hemos obtenido 1998 triángulos.

359.

Cada jugador jugará 4 partidos, habiéndose jugado 5 en total. Supongamos que en el primer partido el par (a, c) jugó contra el (b, d). Entonces, en los tres juegos siguientes a debe tener por compañeros a b, d, e respectivamente, y no tomar parte en el quinto. El jugador e debe tomar parte en todos los partidos, a excepción del primero, siendo en el segundo y el tercero contrincante de a. En el lugar libre del segundo partido se puede tomar al jugador c o al d, y en el tercero, al

b o al c. Pero si se elige en el segundo partido al d, en el tercero habrá que escoger al c (de otro modo, c dejará pasar dos partidos), y entonces en el cuarto partido deberá faltar el jugador d, siendo b y c compañeros. Pero entonces en el quinto serán compañeros b y e, por un lado, y c y d por otro. Si elegimos en el segundo partido al jugador c, en el tercero habrá que escoger también al e (de otra forma e y c serán dos veces compañeros), en el cuarto, a c y d, y en el quinto los jugadores b y c jugarán contra d y e. Así, pues, cada elección de los jugadores del primer partido determina dos posibles divisiones de los jugadores en lo sucesivo. Como el orden de los 4 partidos siguientes puede ser cambiado de 24 maneras, obtenemos en total 48 posibilidades. Para el primer partido, se puede elegir a los jugadores de 15 formas (el número de maneras de dividir a 5 personas en 2 pares y dejar un jugador de reserva). Cada una de estas formas determina 48 posibilidades de la marcha del juego en lo sucesivo, habiendo, en total, 720 posibilidades. Si no se tiene en cuenta el orden de los partidos, quedarán 6 posibilidades.

360.

El número de quebradas cerradas es igual a $(C_n^{2n})^2$ (véase la pág. 92).

361.

Cada quebrada se determina por las coordenadas de sus vértices. Estas coordenadas forman una sucesión finita del tipo

$$(a_1, b_1),\ (a_1, b_2),\ (a_2, b_2),\ (a_2, b_3),\ \ldots,\ (a_n, b_1),$$

o bien

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_1),\ (a_2, b_2),\ (a_3, b_2),\ \ldots,\ (a_1, b_n).$$

Estas sucesiones se determinan fijando las permutaciones $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ e indicando a cuál de los dos tipos pertenece la sucesión. Como una permutación cíclica de las coordenadas no cambia a la quebrada, el número de éstas es igual a $\frac{(n!)^2}{2n}$.

362.

Dividamos los sonajeros en clases, haciendo pertenecer a la m-ésima a aquellos para los cuales el mínimo número de bolas azules entre las dos rojas es igual a m. Para $m = 0$, hay 4 sonajeros (la tercera bola roja está junto a las otras dos, o está separada de ellas por una, dos o tres bolas azules). Para $m = 1$, hay dos bolas rojas, separadas por una azul. La tercera bola roja puede estar separada de la roja más próxima por una, dos o tres azules. Por esto, para $m = 1$ hay 3 tipos de sonajeros. Para $m = 2$, tendremos sólo un tipo de sonajero. En total, hay 8 tipos.

363.

Supongamos que uno de los presentes — llamémoslo X — tiene m conocidos $a_1, \ldots, a_m$. Por hipótesis, no hay dos personas entre las $a_1, \ldots, a_m$ que se conozcan entre sí (ya que se conocen con X). Por esto, para dos personas cualesquiera a_i, a_j debe existir otro conocido común, amén de X. Esta persona no puede conocerse con X, y a distintos pares les corresponderán distintas personas (si alguien fuese conocido común para dos pares diferentes (a_i, a_j) y (a_k, a_l), tendría con X por lo menos tres conocidos comunes). Así, pues, el número de todas las personas que no se conocen con X no es menor que el de todos los pares de personas de entre las $a_1, \ldots, a_m$, es decir, no es menor que C_2^m.
Por otro lado, cada persona que no se conozca con X tiene con él exactamente dos conocidos comunes, se sobreentiende, entre los $a_1, \ldots, a_m$. Además, a distintas personas les corresponderán distintos pares (si un par (a_i, a_j) correspondiese a dos personas diferentes, a_i y a_j tendrían más de dos conocidos comunes, por cuanto son conocidos también con X). De aquí se deduce que el número de personas que no se conocen con X es también no mayor que C_2^m, por lo cual debe ser igual a $C_2^m = \frac{m(m-1)}{2}$. Pero entonces el número total n de presentes es igual a $1 + m + \frac{m(m-1)}{2}$. Considerando la igualdad $n = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2}$ como una ecuación cuadrática con respecto a m, vemos que ésta tiene sólo una raíz positiva, lo cual significa, precisamente, que para todas las personas el número m de sus conocidos es el mismo.

364.

La verificación demuestra que la permutación de dos letras vecinas A y B no cambia el producto (es suficiente analizar las combinaciones $AABA$, $BABB$ y $AABB$). Por esto, se puede considerar que primero van todas las letras A, y después, todas las B. Pero entonces la afirmación se hace evidente.

365.

En cada vertical y en cada horizontal hay una torre. Por esto, cada uno de los números a, b, c, d, e, f, g, h, al igual que cada uno de los 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, figurará en el producto exactamente una vez. Por esto, el producto es igual a $8!\, abcdefgh$.

366.

Supongamos que se han reunido 5 miembros del Comité de Organización. Por la hipótesis del problema, éstos no tienen llaves por lo menos de una cerradura, y la llave de ésta la tienen cada uno de los seis miembros restantes. Como esto tiene lugar para cualquier combinación de 5 miembros, el número total de cerraduras es igual a $C_5^{11} = 462$. Como para cada cerradura hay seis llaves, la cantidad total de éstas es igual a $462 \cdot 6 = 2772$, teniendo cada miembro del Comité de Organización $2772 : 11 = 252$ llaves.

Si el número de miembros fuese igual a n, y el de miembros necesarios y suficientes para que se pueda abrir la caja, a m, el número de cerraduras sería C_{m-1}^n, y el de llaves de cada miembro de la Comisión, a $\frac{n-m+1}{n} C_{m-1}^n$.

367.

Aclaremos primero cuál es la mayor longitud de la cadena, tal que después de romper k eslabones se pueda obtener cualquier peso de 1 a n. Analicemos, para esto, cuál es la disposición más ventajosa de los eslabones abiertos. Como el número de éstos es igual a k, con ellos se puede obtener cualquier peso de 1 a k. Pero ya no podremos obtener el peso $k+1$, sin utilizar una parte más. Está claro que lo más ventajoso es que esta parte esté formada por $k+1$ eslabones; entonces, podremos obtener cualquier peso, del 1 al $2k+1$. Ahora nos serán necesarias las partes de los pesos $2(k+1)$, $4(k+1)$, ..., $2^h(k+1)$. Con ayuda de éstos podremos obtener cualquier peso, del 1 al

$$n = k + [(k+1) + 2(k+1) + 4(k+1) + \dots$$
$$\dots + 2^h(k+1)] = k + (k+1)(2^{h+1}-1) =$$
$$= 2^{h+1}(k+1) - 1.$$

De este modo, si $2^h k \leqslant n \leqslant 2^{h+1}(k+1)$, podremos arreglarnos con k rupturas, pero será imposible arreglárselas con $k-1$. En particular, como $2^2 \cdot 3 \leqslant 60 \leqslant 2^4 \cdot 4 - 1$, para una cadena de 60 eslabones hay que abrir 3 de ellos, obteniendo los trozos de 4, 8, 16 y 29 g.

Si se utiliza una balanza de dos platillos, a los k eslabones abiertos hay que agregar el trozo de peso $2k+1$ (poniéndolo en un platillo de la balanza, y los eslabones restantes, en el otro, podremos obtener cualquier peso, de $k+1$ a $2k$, y colocándolo conjuntamente con los eslabones restantes, cualquier peso del $2k+1$ al $3k+1$). Los trozos restantes deben tener peso $3(2k+1)$, $9(2k+1)$, ..., $3^h(2k+1)$. Con éstos se puede obtener cualquier peso, del 1 al

$$k + [(2k+1) + 3(2k+1) + \dots + 3^h(2k+1)] =$$
$$= \frac{1}{2}[(2k+1)3^{h+1} - 1].$$

En particular, para una cadena de 60 g hay que abrir dos eslabones, obteniendo trozos de peso 5, 15 y 38 g.

368.

Si x, al dividirse por 7, da restos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, x^2 dará los restos 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1 respectivamente. Por esto, $x^2 + y^2$ se divide por 7 (y, con mayor razón, por 49) sólo en el caso en que x e y se dividan por 7. Por esto, el número de pares (teniendo en cuenta el orden), es igual a $\left[E\left(\frac{1000}{7}\right)\right]^2 = 142^2 = 20\,164$. Si no se tiene en cuenta el orden, se obtiene $\overline{C}_2^{142} = 10\,153$ pares.

369.

Si el número dado es igual a $10a + b$, sumándolo con el número escrito con las mismas cifras en orden inverso, se obtiene $11(a+b)$. Como esto es un cuadrado perfecto, y $2 \leqslant a + b \leqslant 18$, será $a + b = 11$. Obtenemos 8 posibilidades: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

370.

Las tres primeras cifras del número son arbitrarias, y la última toma uno de dos valores (determinados por el resto de la división de la suma de las tres primeras cifras por 3). Por esto, si en algún lugar se fija una cifra, las demás se pueden elegir de $6^2 \cdot 2 = 72$ maneras. En consecuencia, la suma de las cifras de la primera columna es igual a $72(1+2+3+4+5+6) = 1512$, siendo la suma de todos los números igual a $1512 + 15\,120 + 151\,200 + 1\,512\,000 = 1\,679\,832$.

371.

En el último lugar puede haber una de las cifras 0, 2, 4. Si se fija una de ellas, los lugares segundo y tercero pueden ser ocupados por cualquiera de las seis cifras, y el primero, cualquiera de las cinco 1, 2, 3, 4, 5. En total, se obtienen $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ posibilidades. Por consiguiente, la suma de las cifras de la primera columna es igual a $(2+4) \cdot 180 = 1080$. Análogamente se halla que la suma de las cifras de la segunda columna es igual a $(1+2+3+4+5)\,900 = 13\,500$; de la tercera, 135 000, y de la cuarta, 1 620 000. En total se obtiene la suma 1 769 580.

372.

La ecuación $x + y = k$ tiene $k - 1$ soluciones enteras, que satisfacen la condición $1 \leqslant x$, $1 \leqslant y$. Por esto, la desigualdad $|x| + |y| \leqslant 100$ tiene

$$4 \sum_{k=2}^{1000} (k-1) = 1\,998\,000$$

soluciones, para las cuales $|x| \neq 0$ e $|y| \neq 0$. Además, esta desigualdad tiene 3996 soluciones, para las cuales una de las incógnitas es igual a cero y una solución del tipo $x = 0$, $y = 0$. En total, existen 2 001 997 soluciones.

373.

Si se agrega a los vértices de cualquier polígono, que no contenga el punto A_1, este punto, se obtiene uno que contendrá A_1. Con esto queda establecida una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los polígonos que no contienen A_1 y una parte del conjunto de los que lo contienen. En este caso no hay polígonos que correspondan a los triángulos, uno de cuyos vértices es A_1.
Por esto, habrá más polígonos que contengan el punto A_1.

374.

Al cabo de un número par de jugadas, el caballo puede llegar a casillas de un mismo color que la del punto de partida. Nos será más cómodo girar el tablero 45° y representar sólo las casillas de este color, sustituyendo cada una por su centro. Entonces las casillas a las que el caballo puede llegar al cabo de 2 jugadas se representarán por el esquema de la fig. 42. El número de estas casillas es igual a 33. Cada una de ellas es el centro de una figura igual, que muestra dónde puede llegar el caballo después de las dos jugadas siguientes. Uniendo estas figuras, obtenemos la representada en la fig. 43. Esta se divide en un cuadrado, que contiene $9^2 = 81$ puntos, y cuatro trapecios, cada uno de los cuales contiene $7 + 5 = 12$ puntos. En total, se obtienen $81 + 4 \cdot 12 = 129$ puntos.

Al cabo de $2n$ jugadas, se obtendrá una figura que se dividirá en un cuadrado de lado $4n$, el que

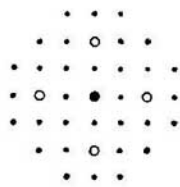

Fig. 42.

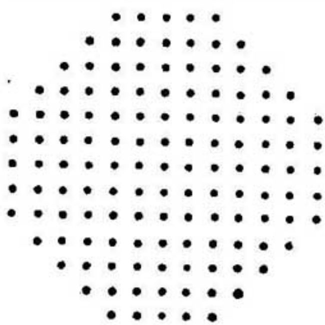

Fig. 43.

contendrá $(4n+1)^2$ puntos, y 4 trapecios, cada uno de los cuales contendrá

$$(4n-1)+(4n-3)+\ldots+(2n+1)=3n^2$$

puntos. En total, obtenemos

$$12n^2+(4n+1)^2=28n^2+8n+1$$

puntos. Así, pues, al cabo de $2n$ jugadas, $n > 1$, el caballo puede llegar a una de las $28n^2 + 8n + 1$ casillas.

375.

Si se toman las ternas que contienen un mismo elemento, digamos, el a, éstas satisfarán la condición planteada, siendo el número de éstas igual a $C_2^{1954} = 1\,907\,481$. Demostremos que no es posible escoger un número mayor de ternas que tengan dos a dos un elementos común. Supongamos que hemos escogido $N > C_2^{1954}$ de estas ternas, y que (a, b, c) es una de ellas. Como cualquiera de las $N - 1$ ternas restantes tiene por lo menos un elemento común con la elegida, resulta que por lo menos para uno de los elementos a, b, c, digamos, el a, existirán $\frac{N-1}{3}$ ternas que lo contengan, siendo $\frac{N-1}{3} > 635\,808$. No más de 3906 ternas contendrán, además de a, uno de los elementos b, c. Por esto, existirá una terna del tipo (a, d, e), siendo d y e distintos de b, y c. Análogamente, existirán ternas del tipo (a, f, g) y (a, h, j), siendo f y g distintos de b, c, d, e, y h, j, de b, c, d, e, f, g.

Cualquiera de las N ternas dadas tiene por lo menos un elemento común con cada una de las cuatro ternas (a, b, c), (a, d, e), (a, f, g), (a, h, j). Está claro que uno de estos elementos debe ser el a, puesto que, de otro modo, la terna contendría cuatro elementos distintos, lo cual es imposible. De esta manera, todas las ternas contienen el elemento a, por lo cual su número no supera a C_2^{1954}, contra la hipótesis.

376.

La sucesión dada contiene $9 + 2\cdot 90 + 3\cdot 900 + \ldots + 8\cdot 90\,000\,000 + 9$ cifras. Calculemos el número de ceros de la sucesión $1, 2, \ldots, 10^9$. Escribamos todos los números del 1 al $10^9 - 1$ en forma de números de nueve cifras, agregando delante la cantidad necesaria de ceros (por ejemplo, 000 000 003), y sustituyamos el 10^9 por 000 000 000. Como resultado, se obtienen $9\cdot 10^9$ cifras, figurando cada una de ellas tantas veces cuantas cualquier otra. Por esto, tendremos $9\cdot 10^8$ ceros. Pero entre ellos, una parte fue agregada por nosotros: $8\cdot 9$ ceros para los números de una cifra, $7\cdot 90$ para los de dos, etc. Si los eliminamos, quedarán $9\cdot 10 - 8\cdot 9 - 7\cdot 90 - \ldots - 9\cdot 10^7$ ceros. Es fácil ver que esta suma es igual a $2\cdot 9 + 3\cdot 90 + \ldots + 8\cdot 9\cdot 10^7$, es decir, al número de cifras de la primera sucesión.

377.

Si la suma de las primeras cifras es igual a k, para $k \leqslant 9$ tendremos $(k + 1)^2$ números con la propiedad indicada, y para $k > 9$, $(19 - k)^2$ de estos números. En total, se obtienen

$$2(1^2 + \ldots + 9^2) + 10^2 = 670 \text{ números.}$$

378.

Designemos el conjunto de asignaturas, en las que el alumno a obtiene 5, mediante A_a. Todos estos conjuntos están formados por no más de $2n$ elementos, sin que ninguno sea parte del otro, según la hipótesis del problema. Dividamos estos conjuntos en clases, haciendo pertenecer a la k-ésima los formados por k elementos. Sea r el mínimo número de elementos en los conjuntos de nuestra colección. Demostremos que, si $r < n$, se puede sustituir la colección dada de conjuntos por otra, de forma que

a) ningún conjunto de la nueva colección sea parte de otro;

b) el número de conjuntos en la nueva colección sea mayor que en la inicial;

c) el mínimo número de elementos en los conjuntos de la nueva colección sea igual a $r + 1$.

Tomemos para esto todos los conjuntos formados por r elementos, y agreguemos a cada uno, de todas las formas posibles, uno de los elementos que no le pertenecen. Dejemos los conjuntos restantes de nuestra colección invariables. Está claro que, después de esta operación, obtendremos una colección en la que el mínimo número de elementos de los conjuntos será igual a $r + 1$. Además, ningún conjunto de la nueva colección será parte de otro: si el conjunto B contuviese el nuevo conjunto A', éste contendría también el conjunto A de la r-ésima clase, del cual fue obtenido A' agregando un elemento, lo cual contradice a la hipótesis. Obsérvese, además, que ninguno de los nuevos conjuntos coincide con los dados inicialmente. Por ejemplo, supongamos que el nuevo conjunto fue obtenido agregando el elemento x al A. Si éste coincidiese con un conjunto B dado inicialmente, esto significaría que B contiene A, contra lo supuesto.

Nos queda demostrar que el número de nuevos conjuntos es mayor que el de los iniciales. Para esto, obsérvese que para cada conjunto A de la r-ésima clase hay $2n - r$ elementos que no le pertenecen, por lo cual se obtienen de éste $2n - r$ conjuntos nuevos. Pero algunos de ellos coinciden entre sí (por ejemplo, de los conjuntos (a, b) y (b, c) se puede obtener, agregando un elemento el mismo conjunto (a, b, c)). Pero un conjunto dado de $r+1$ elementos sólo de $(r+1)^a$ forma puede ser obtenido de conjuntos que contengan r elementos. Por esto, si el número de conjuntos de la r-ésima clase era igual a m y de éstos se obtuvieron p nuevos conjuntos distintos, será $m(2n-r) \leqslant p(r+1)$. Como para $r < n$ se tiene que $2n - r > r + 1$, de aquí se deduce que $m < p$, es decir, que el número de conjuntos aumentó.

Repitiendo el procedimiento descrito, podemos sustituir todos los conjuntos que contengan menos de n elementos por conjuntos de n elementos, conservando la condición a) y obteniendo mayor cantidad de conjuntos que al principio. De la misma forma se pueden sustituir todos los conjuntos que contengan más de n elementos (éstos se sustituyen sucesivamente por conjuntos que se obtengan eliminando un elemento). Como resultado, se obtiene una colección de conjuntos formados por n elementos y que contiene mayor cantidad de conjuntos que la dada inicialmente. Pero de $2n$ elementos se pueden formar solamente C_n^{2n} conjuntos de n elementos. Por lo tanto, la cantidad de conjuntos no era mayor que C_n^{2n}; en otras palabras, en la escuela no había más de C_n^{2n} alumnos.

379.

Llamaremos elementos de primera especie a los m primeros, y de segunda especie, a los segundos n. Dividamos todos los arreglos de $m+n$ elementos tomados de a r en clases, haciendo pertenecer a la k-ésima los arreglos en los que figuran exactamente k elementos de primera especie. Entonces, la k-ésima clase contiene $C_k^r A_k^m A_{r-k}^n$ arreglos. En efecto, podemos elegir de C_r^k formas los lugares en los que estén los elementos de primera especie, después de lo cual llenar de A_k^m modos estos lugares con elementos de primera especie, y de A_{r-k}^n modos los $r-k$ lugares restantes con elementos de segunda especie.

De esta manera, el número de arreglos de $m+n$ elementos tomados de a r es igual a $\sum_{k=0}^{r} C_k^r A_k^m A_{r-k}^n$ o, en las notaciones convenidas, a $\sum_{k=0}^{r} C_k^r M_k N_{r-k}$.

Pero esto no es otra cosa que el resultado de abrir paréntesis en la expresión $(M+N)^r$ y sustituir luego los exponentes por subíndices.

Obsérvese que el número de arreglos de la k-ésima clase puede ser calculado también así: escogemos k elementos de primera especie, y $r-k$ de segunda y permutamos de todas las maneras posibles estos elementos. Esto se puede efectuar de $P(k, r-k)\, A_k^m A_{r-k}^n = C_k^r A_k^m A_{r-k}^n$ formas.

380.

El exponente de grado 8 puede ser formado de las siguientes formas a partir de los exponentes 2 y 3: $8 = 2+2+2+2 = 2+3+3$. Esto significa que si se denota x^2 mediante y, y x^3 mediante z, el coeficiente buscado es igual a la suma de los coeficientes de y^4 e yz^2 en el desarrollo de $(1+y-z)^8$. En virtud de la fórmula de elevar un polinomio a una potencia, este coeficiente es igual a $P(2, 2, 2, 2, 1) + P(3, 3, 2, 1) = 378$.

381.

Se tiene que

$$(1+x)^k + \ldots + (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^k}{x}.$$

Por esto, el coeficiente de x^m es igual a $C_{m+1}^{n+1} - C_{m+1}^{k}$, si $m < k$, y C_{m+1}^{n+1}, si $m \geqslant k$.

382.

Tenemos que $17 = 7+5+5$, y 18 no se divide en suma de términos positivos, múltiplos de 5 y 7. Por esto, x^{17} figurará con coeficiente $C_1^{20} C_2^{19} = 3420$, y x^{18}, con coeficiente cero.

383.

Se tiene que $17 = 2+2+2+2+2+2+2+3 = 2+2+2+2+3+3+3 = 2+3+3+3+3+3$. Por esto, en el desarrollo de $(1+x^2-x^3)^{1000}$, el término con x^{17} tendrá un coeficiente igual a

$$-C_7^{1000} C_1^{993} - C_4^{1000} C_3^{996} - C_1^{1000} C_5^{999},$$

y en el desarrollo de $(1-x^2+x^3)^{1000}$, un coeficiente de

$$-C_7^{1000} C_1^{993} + C_4^{1000} C_3^{996} - C_1^{1000} C_5^{999}.$$

Está claro que el segundo coeficiente es mayor

384.

Se da que

$$(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n}. \quad (*)$$

Demostremos primeramente que $a_k=a_{2n-k}$. Para esto, hagamos $x=\frac{1}{y}$ y multipliquemos ambos miembros de la igualdad por y^{2n}. Obtendremos así que

$$(y^2+y+1)^n=a_0y^{2n}+a_1y^{2n-1}+\ldots+a_{2n}. \qquad (**)$$

Comparando los desarrollos (*) y (**), se obtiene que

$a_k=a_{2n-k}$.

Sustituyamos ahora x por $-x$. Se obtendrá que

$$(1-x+x^2)^n=a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots+a_{2n}x^{2n}. \quad (***)$$

Multiplicando los desarrollos (*) y (***), se deduce que

$$(1+x^2+x^4)^n=\sum_{k=0}^{4n}(-1)^k(a_0a_k-a_1a_{k-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_ka_0)\,x^k. \qquad (****)$$

Es evidente que el desarrollo del primer miembro de la igualdad contiene sólo términos con potencias pares de x, por lo cual el coeficiente de x^{2n-1} es igual a cero. Pero en el segundo miembro el coeficiente de x^{2n-1} es

$$-(a_0a_{2n-1}-a_1a_{2n-2}+a_2a_{2n-3}-\ldots-a_{2n-1}a_0)=$$
$$=-(a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\ldots-a_{2n-1}a_{2n}).$$

Queda así demostrada la igualdad a).

Obsérvese ahora que el desarrollo (****) se puede representar, según la fórmula (*), como sigue:

$$(1+x^2+x^4)^n=a_0+a_1x^2+a_2x^4+\ldots+a_{2n}x^{4n}.$$

De aquí se deduce que el coeficiente de x^{2n} en este desarrollo es igual a a_n. Por otro lado, según la fórmula (****), éste es igual a

$$a_0a_{2n}-a_1a_{2n-1}+a_2a_{2n-2}-\ldots+a_{2n}a_0=$$
$$=2a_0^2-2a_1^2+2a_2^2-\ldots+(-1)^n a_n^2.$$

De aquí se desprende directamente la igualdad b).

Escribamos la igualdad (*) en la forma

$$(1-x^3)^n=(1-x)^n(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n}).$$

De aquí se deduce que

$$1-C_1^nx^3+C_2^nx^6-\ldots+(-1)^n C_n^nx^{3n}=$$
$$=(1-C_1^nx+C_2^nx^2-\ldots+(-1)^nC_n^nx^n)\times$$
$$\times(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n}).$$

Si r no se divide por 3, el coeficiente de x^r en el primer miembro es igual a cero. En el segundo, el coeficiente de x^r es igual a

$$a_r-C_1^na_{r-1}+C_2^na_{r-2}-\ldots+(-1)^r C_r^na_0.$$

Por consiguiente, esta expresión es igual a cero, si r no se divide por 3, y a $(-1)^k C_k^n$, si $r=3k$. Con esto queda demostrada la relación c).

Haciendo en el desarrollo (*) $x=1$, se obtiene que

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{2n}=3^n.$$

Haciendo $x=1$ en el desarrollo (**), tendremos:

$$a_0-a_1+a_2-\ldots+a_{2n}=1.$$

Sumando y restando estas igualdades, se obtienen las relaciones d).

385.

Se tienen C_1^n términos del tipo x_k^3; $2C_2^n$ del tipo $x_j^2x_k$, $j\neq k$, y C_3^n del tipo $x_ix_jx_k$, $i\neq j$, $i\neq k$, $j\neq k$, habiendo, en total, $C_1^n+2C_2^n+C_3^n$ términos.

386.

Tenemos que

$$(1+x+\ldots+x^{n-1})^2=\frac{(x^n-1)^2}{(x-1)^2}=(x^n-1)^2\times$$
$$\times(x-1)^{-2}=(x^{2n}-2x^n+1)(1+2x+3x^2+\ldots$$
$$\ldots+mx^{m-1}+\ldots).$$

Por esto, el coeficiente de x^k es igual a $k+1$, si $0\leqslant k\leqslant n-1$, y a $2n-k-1$, si $n\leqslant k\leqslant 2n-2$. La respuesta se puede escribir como sigue: $n-|n-k-1|$.

387.

Como $C_{r+1}^{n+1}=\frac{n+1}{r+1}C_r^n$ y $C_r^n=\frac{n}{r}C_{r-1}^{n-1}$, el primer miembro de la igualdad se puede escribir en la forma

$$\frac{\frac{n}{r}\left(\frac{n+1}{r+1}-1\right)(C_{r-1}^{n-1})^2}{\left(\frac{n^2}{r^2}-\frac{(n+1)\,n}{(r+1)\,r}\right)(C_{r-1}^{n-1})^2}=\frac{\frac{n\,(n-r)}{r\,(r+1)}}{\frac{n\,(n-r)}{r^2\,(r+1)}}=r.$$

388.

El número de arreglos con repetición de n elementos tomados de a 3 es igual a n^3. Dividamos estos arreglos en clases, haciendo pertenecer a la k-ésima los que contienen exactamente k tipos distintos de elementos. El número de arreglos de la primera clase es igual a C_1^n, el de la segunda, a $6C_2^n$ (hay n formas de elección del elemento que figura dos veces en el arreglo, $n-1$ de tomar el que figura una vez y, luego, tres permutaciones de estos elementos), y el de la tercera, a $A_3^n = 6C_3^n$. En total, tendremos $C_1^n + 6C_2^n + 6C_3^n$ arreglos. De aquí se deduce la primera relación. Para demostrar la segunda, dividimos análogamente en clases los arreglos con repetición que contienen por lo menos un elemento de un tipo prefijado. Se obtiene así que

$$(n+1)^3 - n^3 = 1 + 6C_1^n + 6C_2^n,$$

de donde se deduce, precisamente, la relación a demostrar.

389.

Se demuestra en forma totalmente análoga a la afirmación 388, pero se toman arreglos con repetición de elementos de n tipos tomados de a 4.

390.

Tomemos la igualdad

$$\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi}{3}.$$

Según la fórmula del binomio de Newton, tendremos que

$$\frac{(-1)^n}{2^n}\{1+C_1^n(-i\sqrt{3})+C_2^n(-i\sqrt{3})^2+ C_3^n(-i\sqrt{3})^3+\ldots\} = \frac{(-1)^n}{2^n}\{1-3C_2^n+9C_4^n-\ldots -i\sqrt{3}\,[C_1^n-3C_3^n+\ldots]\}.$$

Igualando las partes real e imaginaria en ambos términos, obtenemos las relaciones que queríamos demostrar.

391.

Tomemos la identidad

$$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \ldots + C_n^n x^n$$

y hagamos en ella sucesivamente $x=1, \varepsilon, \varepsilon^2$, siendo $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$, por lo cual $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Se obtiene entonces:

$$2^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n,$$

$$(1+\varepsilon)^n = C_0^n + C_1^n\varepsilon + C_2^n\varepsilon^2 + \ldots + C_n^n\varepsilon^n,$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = C_0^n + C_1^n\varepsilon^2 + C_2^n\varepsilon^4 + \ldots + C_n^n\varepsilon^{2n}.$$

Pero $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=0$, si k no se divide por 3, y $1+\varepsilon^k+\varepsilon^{2k}=3$, si k se divide por 3. En consecuencia,

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 3\,(C_0^n + C_3^n + C_6^n + \ldots).$$

Como

$$1+\varepsilon = -\varepsilon^2 = -\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3},$$

$$1+\varepsilon^2 = -\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3},$$

tendremos que

$$2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n = 2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}.$$

De aquí se deduce, precisamente, que

$$C_0^n + C_3^n + C_6^n + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Las otras dos igualdades se obtienen en forma análoga a la anterior, considerando las sumas

$$2^n + \varepsilon(1+\varepsilon)^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n, \quad 2^n + \varepsilon^2(1+\varepsilon)^n + \varepsilon(1+\varepsilon^2)^n.$$

La igualdad d) se deduce análogamente, analizando la expresión $(1+i)^n$.

392.

Tenemos que

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C \quad x^{2k}.$$

Los coeficientes de este polinomio son positivos. Por esto, su mayor valor lo tendrá para $x=1$. Este valor es igual a 2^n.

393.

Se tiene:

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{n!\,(m-x)!}{m!\,(n-x)!}=\frac{1}{C_n^m}\sum_{x=0}^{n}C_{m-n}^{m-x}=\frac{C_{m-n+1}^{m+1}}{C_n^m}=\frac{m+1}{m-n+1}$$

y

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{C_x^nC_r^n}{C_{x+r}^{2n}}=\frac{n!\,C_r^n}{(2n)!}\sum_{x=0}^{n}\frac{(x+r)!\,(2n-x-r)!}{x!\,(n-x)!}=$$

$$=\frac{(n!)^2}{(2n!)}\sum_{x=0}^{n}C_r^{x+r}C_{n-r}^{2n-x-r}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,C_{n+1}^{2n+1}=\frac{2n+1}{n+1}.$$

394.

La suma del primer miembro de la igualdad se reduce a

$$\sum_{k=1}^{n}C_k^{m+k-1}=C_m^{m+n}-1.$$

Al mismo valor es igual la suma del segundo miembro.

395.

Se tiene que

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{x-1}^{n-1}}{C_x^{2n-1}}=\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\sum_{x=1}^{n}\frac{x\,(2n-x-1)!}{(n-x)!}=$$

$$=\frac{2n}{(2n-1)\,C_{n-1}^{2n-2}}\sum_{x=1}^{n}C_{n-1}^{2n-x-1}-$$

$$-\frac{1}{C_{n-1}^{2n-1}}\sum_{x=1}^{n}C_n^{2n-x}=\frac{2nC_{n-1}^{2n-1}}{(2n-2)\,C_{n-1}^{2n-2}}-\frac{C_{n-1}^{2n}}{C_{n-1}^{2n-1}}=\frac{2}{n+1}.$$

396.

Se tiene que

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{x-1}^{n-1}}{C_x^{n+q}}=\frac{(n-1)!}{(n+q)!}\sum_{x=1}^{n}\frac{x\,(n+q-x)!}{(n-x)!}=$$

$$=\frac{(n+q+1)\,(n-1)!\,q!}{(n+q)!}\sum_{x=1}^{n}C_{n-x}^{n+q-x}-$$

$$-\frac{(n-1)!\,(q+1)!}{(n+q)!}\sum_{x=1}^{n}C_{n-x}^{n+q-x+1}=$$

$$=\frac{(n+q+1)\,(n-1)!\,q!}{(n+q)!}\,C_{n-1}^{n+q}-$$

$$-\frac{(n-1)!\,(q+1)!}{(n+q)!}\,C_{n-1}^{n+q+1}=$$

$$=\frac{n+q+1}{q+1}-\frac{n+q+1}{q+2}=\frac{n+q+1}{(q+1)\,(q+2)}.$$

397.

Se tiene:

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{C_{x-2}^{n-2}}{C_x^{n+q}}=\frac{(n-2)!}{(n+q)!}\sum_{x=1}^{n}\frac{x\,(x-1)(n+q-x)!}{(n-x)!}.$$

Ahora bien, aplicando la identidad

$$x\,(x-1)=(n+q-x+1)\,(n+q-x+2)+$$
$$+(n+q+1)\,[n+q-2\,(n+q-x+1)],$$

se obtiene, que nuestra suma igual a

$$\frac{(n-2)!}{(n+q)!}\Big[(q+2)!\sum_{x=1}^{n}C_{n-x}^{n+q-x+2}-$$

$$-2\,(n+q+1)\,(q+1)!\sum_{x=1}^{n}C_{n-x}^{n+q-x+1}+$$

$$+(n+q)\,(n+q+1)\,q!\sum_{x=1}^{n}C_{n-x}^{n+q-x}\Big]=$$

$$=\frac{(n-2)!\,q!}{(n+q)!}\,[(q+1)\,(q+2)\,C_{n-1}^{n+q+2}-$$
$$-2\,(n+q+1)\,(q+1)\,C_{n-1}^{n+q+1}+$$
$$+(n+q)\,(n+q+1)\,C_{n-1}^{n+q}].$$

Sustituyendo los valores de C_{n-1}^{n+q+2}, C_{n-1}^{n+q+1}, C_{n-1}^{n+q} y transformando la expresión, se obtiene la fórmula requerida.

398.

Sabemos que $C_{k-1}^{n-1}=\frac{k}{n}C_k^n$. Como

$$(1+x)^n=1+C_1^n x+\ldots+C_k^n x^k+\ldots+C_n^n x^n, \quad (*)$$

de aquí se deduce que

$$n(1+x)^{n-1}=C_1^n+\ldots+kC_k^n x^{k-1}+\ldots$$
$$\ldots+nC_n^n x^{n-1} \quad (**)$$

(el lector que conozca el cálculo diferencial puede obtener esta fórmula derivando término a término ambos miembros de la igualdad (*)).

Multipliquemos los desarrollos (*) y (**). Obtendremos que

$$n(1+x)^{2n-1}=(1+C_1^n x+\ldots+C_n^n x^n)\times$$
$$\times(C_1^n+\ldots+nC_n^n x^{n-1}).$$

Comparando los coeficientes de x^{n-1} en ambos miembros de esta igualdad, se obtiene la relación que se quería demostrar.

399.

Tomemos todas las n-combinaciones con repetición de elementos de n tipos. El número de éstas es igual a C_n^{2n-1}. Dividamos estas combinaciones en clases, haciendo pertenecer a la k-ésima aquellas en las que figuren elementos de exactamente k tipos diferentes. En la k-ésima clase habrá $C_k^n C_{n-k}^{n-1}$ combinaciones (elegimos, de C_k^n modos, los k tipos de elementos que figuran en la combinación de esta clase, y de los elementos de los k tipos dados podemos formar C_{n-k}^{n-1} n-combinaciones con repetición, en las que figuren elementos de todos los k tipos). De esta forma, tenemos que $C_n^{2n-1}=\sum_{k=1}^{n} C_k^n C_{n-k}^{n-1}$.

Expresando los números C_n^{2n-1}, C_k^n, C_{n-k}^{n-1} mediante factoriales, se obtiene la relación requerida.

400.

La igualdad a demostrar puede escribirse así:
$$C_r^{n+r-1}-C_1^n C_{r-2}^{n+r-3}+C_2^n C_{r-4}^{n+r-5}-\ldots=C_r^n.$$

Para demostrarla, tomemos todas las r-combinaciones con repetición de elementos de n tipos, y hallemos de dos formas el número de todas aquellas que estén formadas solamente por elementos de distintos tipos. Por un lado, este número es igual a C_r^n. Por el otro, el número de r-combinaciones con repetición, formadas a partir de elementos de n tipos, en las que por lo menos figuren dos veces elementos de k tipos dados, es igual a $C_{r-2k}^{n+r-2k-1}$. Como estos k tipos pueden ser escogidos de C_k^n maneras, aplicando la fórmula de inclusiones y exclusiones se obtiene la relación que queríamos demostrar.

401.

a) Hagamos $S_n=C_1^n+2C_2^n+3C_3^n+\ldots+nC_n^n$. En virtud de la igualdad $C_k^n=C_{n-k}^n$, tendremos que $S_n=nC_0^n+(n-1)C_1^n+\ldots+C_{n-1}^n$. Sumando, obtenemos

$$2S_n=n[C_0^n+C_1^n+\ldots+C_n^n]=2^n n,$$

por lo cual será $S_n=2^{n-1}n$.

b) De la misma forma se establece que $S_n=(n+1)2^{n-1}$.

c) $S_n=(n-2)2^{n-1}+1$.

d) $S_n=(n+1)2^n$.

e) $S_n=0$.

f) Se tiene:

$$S_n=4(C_1^n+2C_2^n+\ldots+nC_n^n)-$$
$$-(C_1^n+C_2^n+\ldots+C_n^n)=2^{n-1}n-2^n+1.$$

g) Se tiene que $C_k^n=C_{k-1}^{n-1}+C_k^{n-1}$. Por esto,

$$S_n=C_0^{n-1}+C_1^{n-1}-2(C_1^{n-1}+C_2^{n-1})+$$
$$+3(C_2^{n-1}+C_3^{n-1})-\ldots+(-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1}=$$
$$=C_0^{n-1}-C_1^{n-1}+C_2^{n-1}-\ldots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}.$$

Esta suma es igual a 1 para $n=1$ y a 0 para $n>1$.

h) Esta suma es igual a

$$S_n=\frac{1}{n+1}[C_1^{n+1}+C_2^{n+1}+\ldots+C_{n+1}^{n+1}]=$$
$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

i) Como $C_k^n = \frac{(k+2)(k+1)}{(n+1)(n+2)} C_{k+2}^{n+2}$, esta suma es igual a

$$S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} (C_2^{n+2} + 2C_3^{n+2} + \dots$$
$$\dots + (n+1) C_{n+2}^{n+2}) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times$$
$$\times [(C_1^{n+2} + 2C_2^{n+2} + \dots + (n+2) C_{n+2}^{n+2}) -$$
$$-(C_1^{n+2} + \dots + C_{n+2}^{n+2})].$$

Aplicando los resultados de los problemas a) y b), se obtiene que

$$S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} [2^{n+1}(n+2) - 2^{n+2} + 1] =$$
$$= \frac{2^{n+1}n + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

j) Escribamos la suma en la forma

$$S_n = \frac{1}{n+1} [C_1^{n+1} - C_2^{n+1} + \dots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}] =$$
$$= \frac{1}{n+1},$$

puesto que la expresión entre corchetes es igual a 1.

k) Si n es impar, será $S_n = 0$, y si $n = 2k$ es par, será $S_n = (-1)^k C_n^{2k}$. Para demostrarlo, hay que multiplicar los desarrollos de $(1 + x)^n$ y $(1 - x)^n$, hallando luego el coeficiente de x^n.

402.

El mayor coeficiente del primer desarrollo es el de $a^3b^3c^4$ (o de $a^3b^4c^3$, $a^4b^3c^3$). Este es igual a $P(3, 3, 4) = 4200$. En el segundo desarrollo, el mayor será el coeficiente $P(4, 4, 3, 3)$ de $a^3b^3c^4d^4$.

403.

Según la fórmula del binomio de Newton, tendremos:

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-4x)^n. \quad (*)$$

Por esto, el coeficiente Y_n de x^n es igual a

$$Y_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 2^n}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_n^{2n}.$$

Para $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$, tendremos, en virtud de la fórmula del binomio de Newton, el desarrollo

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \times$$
$$\times (-4x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{1-2n} x^n.$$

Pero

$$\frac{Y_n}{1-2n} = -\frac{C_n^{2n}}{2n-1} = -\frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)} =$$
$$= -\frac{2}{n} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} = -\frac{2}{n} Y_{n-1}.$$

Por esto,

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{n-1}}{n} x^n, \quad (**)$$

donde hicimos $Y_0 = 1$.

404.

a) Multipliquemos los desarrollos (*) y (**). Obtendremos que

$$1 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n x^n\right)\left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_{n-1}}{n} x^n\right) =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[Y_n - 2\left(Y_{n-1} + \frac{1}{2} Y_{n-2}Y_1 + \dots\right.\right.$$
$$\left.\left.\dots + \frac{1}{n} Y_{n-1}\right)\right] x^n.$$

De aquí se deduce de inmediato la igualdad a demostrar.

b) Elevemos el desarrollo (*) al cuadrado. Se obtiene que

$$(1-4x)^{-1}=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} Y_n x^n\right)^2=$$
$$=1+(Y_0 \quad +Y_1Y_0)\,x+(Y_0Y_2+Y_1Y_1+$$
$$+Y_2Y_0)\,x^2+\ldots+(Y_0Y_n+Y_1Y_{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+Y_nY_0)\,x^n+\ldots$$

Como

$$(1-4x)^{-1}=1+4x+4^2x^2+\ldots+4^nx^n+\ldots,$$

se obtiene de inmediato la igualdad a demostrar.

c) Elévese al cuadrado el desarrollo (**).

405.

Designemos los números pares con la letra P, y los impares, con la I. Los primeros 4 elementos de la tercera fila tienen una escritura IPIP, los de la cuarta, IIPI, los de la quinta, IPPP, los de la sexta, IIIP, y los de la séptima, IPIP. Después de esto, el ciclo se repite (los primeros 4 elementos de cada fila se determinan por los primeros cuatro de la precedente). Por esto, en cada fila habrá por lo menos un número par.

406.

Demostremos que cada fila del triángulo es una progresión aritmética, y la suma de los elementos de la fila que estén igualmente alojados de los extremos se divide por 1958. La demostración la haremos mediante inducción con respecto al número de la fila. Para la primera, la afirmación es evidente. Supongamos que ésta fue demostrada para la n-ésima. Tomemos tres elementos vecinos a, $a+d$ y $a+2d$ de la n-ésima fila. En la fila $n+1$, a éstos les corresponderán los elementos $2a+d$, $2a+3d$, la diferencia de los cuales es igual a $2d$. Por lo tanto, en la fila $n+1$ se tiene una progresión con diferencia $2d$. Para hallar la suma de los elementos de esta fila que se hallen a igual distancia de los extremos, es suficiente hallar la suma del primero y del último. Pero si los dos primeros elementos de la n-ésima fila son iguales a a y b, y sus dos últimos, a c y d, la suma de los elementos primero y último de la $(n+1)$-ésima fila será igual a $(a+b)+(c+d)=2(a+d)$, por lo cual, según la hipótesis de la inducción, se divide por 1958. Por lo tanto, para cualquier fila la suma de los elementos primero y último se divide por 1958. Entonces, esta propiedad la poseerá también la suma de dos elementos de la penúltima fila, es decir, el último elemento de la tabla.

407.

a) Demostremos la igualdad mediante inducción con respecto a $n+m$. Supongamos que para todo k y s, tales que $k+s<n+m$, ya fue demostrada la igualdad a). Entonces, tendremos:

$$u_{n+m}=u_{n+m-1}+u_{n+m-2}=$$
$$=u_{n-1}u_{m-1}+u_nu_m+u_{n-1}u_{m-2}+u_nu_{m-1}=$$
$$=u_{n-1}(u_{m-1}+u_{m-2})+u_n(u_m+u_{m-1})=$$
$$=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}. \qquad (*)$$

Como para $m+n=1$ la igualdad (*) se comprueba directamente, ésta es válida para todo m y n.

b) Efectuemos la demostración mediante inducción con respecto a k. Para $k=1$, la afirmación es trivial. Supongamos que ya fue demostrado que u_{km} se divide por u_m. Según la igualdad (*), tendremos:

$$u_{(k+1)m}=u_{km+m}=u_{km-1}u_m+u_{km}u_{m+1},$$

por lo cual $u_{(k+1)m}$ también se dividirá por u_m. Por inducción concluimos que todos los u_{nm} se dividen por u_m.

c) Supongamos que u_n y u_{n+1} se dividen por $k\neq 1$. Entonces también $u_{n-1}=u_{n+1}-u_n$ se dividiría por k. Continuando este razonamiento, obtendríamos que $u_1=1$ se divide por k, lo cual es imposible.

408.

Designemos el máximo común divisor de los números a y b mediante (a, b). De la igualdad $u_{m+n}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}$, se deduce que (u_{m+n}, u_n) es divisor de $u_{n-1}u_m$ y, como u_n y u_{n-1} son primos entre sí, es también divisor de u_m. Recíprocamente, (u_m, u_n) es divisor de u_{m+n}. Por esto, $(u_m, u_n)=(u_{m+n}, u_n)$. Pero entonces, si $n=km+q$, será $(u_m, u_n)=(u_m, u_q)$. Aplicando el algoritmo de Euclides, nos convencemos de que $(u_m, u_n)=u_{(m,\,n)}$. En particular, $(u_{1000}, u_{770})=u_{10}=55$.

409.

Tomemos la sucesión formada por las últimas cuatro cifras de los números de Fibonacci. Como la cantidad de números de cuatro cifras del tipo 0000, 0001, . . ., 9999 es igual a 10^4, la cantidad de pares de estos números será igual a 10^8. Por consiguiente, entre los primeros 100 000 001 números de Fibonacci habrá dos pares (u_m, u_{m+1}) y (u_n, u_{n+1}), $n > m$, tales que u_m y u_n, al igual que u_{m+1} y u_{n+1} tengan las últimas cuatro cifras iguales. Pero entonces, los números $u_n - u_m$ y $u_{n+1} - u_{m+1}$ terminarán en cuatro ceros. Como

$$u_{n-1} - u_{m-1} = (u_{n+1} - u_{m+1}) - (u_n - u_m),$$

también $u_{n-1} - n_{m-1}$ terminarán en cuatro ceros. Si continuamos la disminución del subíndice y tenemos en cuenta que $u_0 = 0$, obtenemos que el número u_{n-m} termina en cuatro ceros.

410.

Supongamos que se han escogido los números $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+7}$. Exprésémoslos mediante u_n y u_{n+1}:

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1},\quad u_{n+3} = u_n + 2u_{n+1},\quad u_{n+4} = 2u_n + 3u_{n+1},$$
$$u_{n+5} = 3u_n + 5u_{n+1},\quad u_{n+6} = 5u_n + 8u_{n+1},\quad u_{n+7} = 8u_n + 13u_{n+1}$$

En consecuencia, la suma de estos números es igual a $21u_n + 33u_{n+1}$. Pero $u_{n+8} = 13u_n + 21u_{n+1}$, $u_{n+9} = 21u_n + 34u_{n+1}$. De la desigualdad $u_{n+8} < 21u_n + 33u_{n+1} < u_{n+9}$ queda claro que $21u_n + 33u_{n+1}$ no es un número de Fibonacci.

411.

La afirmación a) se demuestra por inducción. Para $n = 1$, ésta es evidente. Supongamos que sea válida para n:

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1.$$

Agreguemos u_{2n+2} a ambos miembros de la igualdad. Como $u_{2n+2} + u_{2n+1} = u_{2n+3}$, se obtiene que $u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n+2} = u_{2n+3} - 1$. Queda así demostrada nuestra afirmación. Análogamente se demuestra la afirmación b).

La afirmación c) también se demuestra mediante inducción completa.

Para demostrar la d), obsérvese que

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1} = u_{n+1}(u_{n+1} - u_n) - u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2.$$

Por esto, $u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n [u_1^2 - u_0 u_2] = (-1)^n$.

Demostraremos conjuntamente las afirmaciones e) y f). Para $n = 1$, éstas son evidentes. Supongamos que ya fueron demostradas para $n = k$. En virtud de la afirmación d), tendremos entonces que

$$u_1u_2 + u_2u_3 + \ldots + u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k+1}^2 - 1 + u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k+1}u_{2k+3} - 1 = u_{2k+2}^2$$

y que

$$u_1u_2 + \ldots + u_{2k+1}u_{2k+2} + u_{2k+2}u_{2k+3} = u_{2k+2}^2 + u_{2k+2}u_{2k+3} = u_{2k+2}u_{2k+4} = u_{2k+3}^2 - 1.$$

Por consiguiente, estas afirmaciones tienen lugar también para $n = k + 1$ y, en consecuencia, para todo n.

Para demostrar la igualdad g), obsérvese que, en virtud de a) y b), $u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1} = u_{n+3} - 1$. Por esto, si tiene lugar la igualdad g), será

$$(n+1)u_1 + nu_2 + \ldots + 2u_n + u_{n+1} = u_{n+4} - (n+3) + u_{n+3} - 1 = u_{n+5} - (n+4).$$

Como la igualdad g) es válida para $n = 1$, ésta lo será para todo n.

La relación h) se deduce sin dificultad de que

$$\frac{u_{3n+2} - 1}{2} + u_{3n+3} = \frac{u_{3n+5} - 1}{2}.$$

Para demostrar la relación i), hagamos $m = n$ en la fórmula $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$. Obtendremos entonces que $u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$. De igual forma se demuestra que $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$. Haciendo en la misma fórmula $m = 2n$, se obtiene que

$$u_{3n} = u_{n-1}u_{2n} + u_n u_{2n+1} = u_{n-1}(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + u_n(u_n^2 + u_{n+1}^2) = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

412.

Supongamos que $u_n \leqslant N < u_{n+1}$. Entonces será $0 \leqslant N - u_n < u_{n-1}$, por lo cual existirá un $s < n - 1$, tal que $u_s \leqslant N - u_n < u_{s+1}$. Pero entonces será $0 \leqslant N - u_n - u_s < u_{s-1}$, siendo, además, $s - 1 < n - 2$. Al cabo de varios pasos, obtendremos que $N = u_n + u_s + u_p + \ldots + u_r$, y los subíndices vecinos $n, s, p, \ldots, r$ se diferenciarán entre sí por lo menos en 2.

413.

Este número de formas es igual al coeficiente de x^s en el desarrollo de la expresión

$$(1+x+\ldots+x^p)(1+x+\ldots+x^q)(1+x+\ldots+x^r)=$$
$$=(1-x^{p+1})(1-x^{q+1})(1-x^{r+1})(1-x)^{-3}=$$
$$=(1-x^{p+1}-x^{q+1}-x^{r+1}-\ldots)(1+3x+6x^2+\ldots$$
$$\ldots+C_2^{n+2}x^n+\ldots).$$

Como $p<q+r$, será $p<s$, $q<s$, $r<s$, y este coeficiente tendrá la forma

$$C_2^{s+2}-C_2^{s-p+1}-C_2^{s-q+1}-C_2^{s-r+1}=$$
$$=\frac{(s+2)(s+1)}{2}-\frac{(s-p+1)(s-p)}{2}-$$
$$-\frac{(s-q+1)(s-q)}{2}-\frac{(s-r+1)(s-r)}{2}.$$

Abramos paréntesis y consideremos que $p+q+$ $+r=2s$. Después de efectuar transformaciones, se obtiene $s^2+s+1-\frac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)$.

414.

Si $q+r<p$, será $q<s$, $r<s$, pero $p\geqslant s$, por lo cual el coeficiente será igual a $C_2^{s+r}-C_2^{s-q+1}-$ $-C_2^{s-r+1}$. De aquí se desprende nuestra afirmación.

415.

Todos los objetos se pueden permutar de $(pq+r)!$ maneras. Después de esto, escojamos r personas de entre p, las que obtendrán $q+1$ objetos (de C_r^p modos) y repartamos los objetos en orden, dando a cada una persona q o $q+1$ de ellos. Como el resultado no depende del orden de los elementos en los grupos, habrá que dividir $C_r^p(pq+r)!$ por $(q!)^{p-r}[(q+1)!]^r=(q!)^p(q+1)^r$.

416.

Como $\sum\limits_{i_0=1}^{i_1} 1=i_1=C_1^{i_1}$, será $\sum\limits_{i_1=1}^{i_2}\sum\limits_{i_0=1}^{i_1} 1=$ $=\sum\limits_{i_1=1}^{i_2} C_1^{i_1}=C_2^{i_2+1}$. Después, tendremos $\sum\limits_{i_2=1}^{i_3}\times$

$$\times\sum_{i_1=1}^{i_2}\sum_{i_0=1}^{i_1} 1=\sum_{i_2=1}^{i_3} C_2^{i_2+1}=C_3^{i_3+2}.$$

De aquí queda claro que la suma calculada es igual a C_{n+1}^{n+m}.

417.

Dividamos todas las permutaciones de m esferas blancas y n negras en clases. Haremos pertenecer a la clase $(k_1, \ldots, k_m)$ las permutaciones en las que hay k_1 esferas blancas aisladas, k_2 pares, k_3 ternas, $\ldots$, k_m grupos de m esferas blancas juntas. Es evidente que $k_1+2k_2+\ldots$ $\ldots+mk_m=m$. Calculemos el número de permutaciones de la clase $(k_1, \ldots, k_m)$. Si las n esferas negras están en orden, tendremos $n+1$ lugares en que se podrán colocar las esferas blancas. De éstos, k_1 lugares estarán ocupados por una esfera blanca, k_2, por dos, $\ldots$, k_m, por m, y $n-k_1-\ldots-k_m+1$ lugares estarán libres. Por esto, el número de formas de distribuir los lugares para las esferas blancas, es decir, el número de permutaciones de la clase $(k_1, \ldots, k_m)$, es igual a $P(k_1, \ldots, k_m, n-$ $-k_1-\ldots-k_m+1)$. Como el número total de permutaciones de m esferas blancas y n negras es igual a C_m^{n+m}, obtenemos la relación que se quería demostrar.

418.

a) Resolviendo la ecuación característica r^2- $-7r+12=0$, se hallan las raíces $r_1=3$, $r_2=4$. Por esto, la solución general tiene la forma $a_n=C_13^n+C_24^n$. b) Análogamente se obtiene que $a_n=C_12^n+C_2(-5)^n$. c) Se tiene que $a_n=C_1(2+3i)^n+C_2(2-3i)^n$. d) $a_n=$ $C_1(3i)^n+C_2(-3i)^n$. e) $r_1=r_2=-2$. Por esto, $a_n=(-2)^n(C_1+C_2n)$. f) La ecuación característica es la siguiente: $r_3-9r^2+26r-24=0$. Sus raíces son $r_1=2$, $r_2=3$, $r_3=4$. Por esto, $a_n=C_12^n+C_23^n+C_34^n$. g) $r_1=r_2=r_3=$ $=-1$. Por esto, será $a_n=(-1)^n(C_1+$ $+C_2n+C_3n^2)$. h) La ecuación característica tiene la forma $r^4+4=0$. Sus raíces son: $r_{1,\,2}=$ $=1\pm i$, $r_{3,\,4}=-1\pm i$.

Por esto,

$$a_n=2^{1/2}[C_1(1+i)^n+C_2(1-i)^n+C^3(-1+i)^n+$$
$$+C_4(-1-i)^n].$$

419.

a) Resolviendo la ecuación característica r^2- $-5r+6=0$, se obtiene que $r_1=2$, $r_2=3$, por lo cual $a_n=C_12^n+C_23^n$. Haciendo $n=1$ y $n=2$, se obtiene, para determinar C_1 y C_2, el sistema de ecuaciones

$$2C_1+3C_2=1,\ 4C_1+9C_2=-7.$$

De éste se halla que $C_1=5$, $C_2=-3$, por lo cual $a_n=5\cdot 2^n-3^{n+1}$.

b) Se tiene que $a_n = 2^n (C_1 + C_2 n)$. Haciendo $n = 1$, $n = 2$, se obtiene el sistema de ecuaciones $C_1 + C_2 = 1$, $C_1 + 2C_1 = 1$, del cual se deduce que $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, por lo cual $a_n = 2^n$.

c) $a_n = \frac{1}{2^{n+2}} [(-1 + i\sqrt{3})^n + (-1 - i\sqrt{3})^n]$.

d) $a_n = 2^n + 2n - 4^n$.

420.

La ecuación característica tiene la forma $r^2 - 2r \cos\alpha + 1 = 0$. Sus raíces son $r_{1,2} = \cos\alpha \pm i \operatorname{sen}\alpha$. Por esto, $a_n = C_1 (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n + C_2 (\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)^n$. Haciendo $n = 1, 2$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (C_1 + C_2)\cos\alpha + (C_1 - C_2)\, i \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha, \\ (C_1 + C_2)\cos 2\alpha + (C_1 - C_2)\, i \operatorname{sen} 2\alpha = \cos 2\alpha. \end{cases}$$

De aquí se obtiene $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2} [(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n + (\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)^n]$.

En virtud de la fórmula de Moivre, será $a_n = \cos n\alpha$.

421.

Se deduce de que la ecuación característica

$$r^k - C_1^k r^{k-1} + C_2^k r^{k-2} + \ldots + (-1)^k = 0$$

se puede escribir en la forma $(r-1)^k = 0$. Esta tiene la raíz $r = 1$, de multiplicidad k. Por esto, una de las soluciones de la relación de recurrencia es $a_n = n^k$ (véase la pàg. 111).

422.

$$a_n = \frac{n}{12} \cdot 2^n + C_1 (-4)^n + C_2 2^n.$$

423.

Se tiene que

$$(1+x)^p = 1 + C_1^p x + C_2^p x^2 + \ldots + C_m^p x^m + \ldots \\ \ldots + C_p^p x^p, \quad (*)$$

$$(1+x)^{-k-1} = 1 - C_1^{k+1} x + C_2^{k+2} x^2 - \ldots \\ \ldots + (-1)^s C_s^{k+s} x^s + \ldots, \quad (**)$$

$$(1+x)^{p-k-1} = 1 - C_1^{p-k-1} x + \ldots \\ \ldots + (-1)^n C_n^{p-k-1} x^n + \ldots$$

Multipliquemos los desarrollos (*) y (**) y hallemos el coeficiente de x^n. Este es igual a $\sum\limits_s (-1)^{n-s} C_{n-s}^{k+n-s} C_s^p = \sum\limits_s (-1)^s C_s^{k+s} C_{n-s}^p$. De aquí se deduce directamente la identidad que había que demostrar. Las identidades restantes, hasta el problema 438 inclusive, se demuestran análogamente.

439.

Se demuestra mediante inducción completa con respecto a n.

AL LECTOR

Le agradeceremos a Ud. que nos dé a conocer su opinión acerca del libro que le ofrecemos, así como de la traducción, presentación e impresión del mismo. Le quedaremos también muy reconocidos si nos manda cualquier otra sugerencia.

Nuestra dirección
Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2
129820, И-278, Moscú, URSS

ఆ