Lecciones populares de matemáticas

DIVISION DE UN SEGMENTO EN LA RAZON DADA

N. M. Beskin

Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Н. М. БЕСКИН

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАУКА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

N. M. BESKIN

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN LA RAZÓN DADA

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

IMPRESO EN LA URSS. 1976

На испанском языке

TRADUCIDO DEL RUSO POR EL INGENIERO K. P. MEDKOV

CONTENIDO

PREFACIO

Hay alumnos que poseen un buen «apetito matemático» y son insatisfechos de porciones de la materia, previstas en el programa escolar.

¿Cómo se puede aumentar los conocimientos matemáticos?

Los conocimientos matemáticos adicionales pueden agrandarse a lo ancho y a lo largo de la materia. Ensanchar los conocimientos significa estudiar nuevas ramas de las matemáticas; profundizarlos significa examinar detalladamente las cuestiones que hacen parte del programa escolar. No hay ningún matemático que pudiera pretender conocer hasta el fondo tal o cual rama de la materia, pues en el estudio de cada problema, sea el más elemental, siempre se revelan vinculaciones inesperadas con otros problemas, de modo que este proceso de ahondamiento no tiene fin.

Se puede volver repetidamente a la rama conocida de la ciencia y cada vez abrir para sí algo nuevo de ella.

El objetivo de este folleto consiste en conducir al lector a la profundidad. Examinando un problema más elemental («dividir el segmento en una razón dada») adquiriremos muchos conocimientos nuevos.

El propio problema será abordado en el capítulo I.

La introducción contiene observaciones puramente técnicas que son necesarias para la consideración del tema fundamental.

El autor

INTRODUCCIÓN

1. ORIENTACIÓN DE UNA RECTA Y DE UN SEGMENTO

Cada recta tiene dos direcciones contrarias. *Orientar* una recta significa elegir y determinar en ella una de las dos direcciones. Se llama *recta orientada o eje* a una recta cuya dirección está bien determinada. En lo sucesivo, la palabra «recta» la usaremos para designar una recta no orientada, cuyas dos direcciones son, por supuesto, igualmente legítimas.

En el dibujo la dirección elegida se marca, como regla, con una flecha (fig. 1). Se puede decir, pues, que el eje es

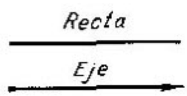


FIG. 1

una recta que comprende dos elementos: 1) la propia recta, 2) una de las dos direcciones, elegida en esta recta.

El segmento es una parte de la recta, limitada con dos puntos. Estos dos puntos son *extremos del segmento* y pertenecen a este último. Los extremos del segmento, podemos *ordenarlos*, esto es, tomar uno de ellos por primero y el otro, por el segundo. El primer extremo recibe el nombre de *origen* del segmento; el segundo se llama *fin* del segmento. Un segmento de extremos ordenados se denomina segmento *orientado*. Para representar en un dibujo el segmento orientado hace falta, ante todo, distinguir sus extremos, es decir, designarlos con diferentes letras, marcar una flecha en uno de los extremos, etc. Se puede decir que el segmento orientado comprende obligatoriamente dos elementos: 1) el propio segmento, 2) uno de los extremos del segmento (que se toma por el extremo primero o el origen del segmento).

Cuando un segmento no orientado se designa con dos letras, el orden en que se ponen estas letras no tiene importancia alguna, esto es, AB y BA representan un mismo segmento. En el caso de un segmento orientado la primera letra señala el origen del segmento, mientras que la segunda designa el fin del último. Así pues, AB y BA, en este caso, son segmentos distintos que se diferencian por su orientación.

2. SEGMENTOS DIRIGIDOS

Se llama *segmento dirigido* a un segmento orientado por un eje.

En la figura 2, *a* el segmento AB (A es el origen del segmento, B es el fin) no es segmento dirigido: aunque es orientado el segmento, no está orientada la recta que lo

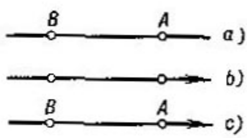


FIG. 2

comprende. El segmento en la figura 2, *b* tampoco es dirigido, puesto que no está orientado. El segmento dirigido AB está representado en la figura 2, *c*.

Resulta pues que para expresar geométricamente un segmento dirigido se debe determinar dos orientaciones: 1) la del propio segmento, 2) la de la recta que lo comprende. Estas dos orientaciones se hacen independientemente, es decir, cada orientación se lleva a cabo por uno de los dos modos posibles.

Cada segmento tiene una longitud determinada. La longitud es un número no negativo. Es nula sólo en el caso en que los extremos del segmento coinciden, esto es, cuando el segmento se reduce a un punto. Cualquier segmento, no reducido a un punto, tiene longitud siempre positiva. Convengamos en designar la longitud del segmento AB por el símbolo $\overline{AB}$. Al determinar la longitud del segmento, la orientación de éste no tiene ninguna importancia.

Además de la longitud, el segmento dirigido puede llevar un cierto signo que se le asigna según la regla siguiente: *un segmento dirigido se considera positivo (negativo), si su dirección*[1]) *coincide (no coincide) con la del eje.*

El signo no puede asignarse al segmento, si éste, aunque sea orientado, pertenece a una recta no orientada.

Así pues, los segmentos dirigidos se expresan por números reales, tanto positivos, como negativos. Por ejemplo, la anotación

$$AB = -3$$

significa que: 1) la longitud del segmento AB es igual a 3, 2) la dirección del segmento AB es contraria a la del eje al cual pertenece.

El símbolo AB expresa, por consiguiente, a una figura geométrica (segmento dirigido) y al número que le corresponde. La práctica nos señala que esto no conduce a confusiones. Está bien justificada, incluso, una enunciación que sigue: «el segmento dirigido es igual a —3».

Si A, B, C son tres puntos cualesquiera dispuestos en un eje, entonces:

$$AB + BC = AC. \tag{2.1}$$

Esta igualdad lleva el nombre de la *regla de la cadena* o *fórmula de Chasles.* La fórmula tiene el sentido muy profundo. En el caso de que AB, BC y AC representaran longitudes de los segmentos, la fórmula (2.1) sería válida sólo a condición de que el punto B se encuentre *entre A y C.* Cuando los segmentos son dirigidos, la fórmula (2.1) es siempre válida, *cualquiera que sea* la situación mutua de los puntos A, B, C. Se puede aplicarla, por ello, «a ciegas», sin referirse al dibujo. Basta recordar solamente la disposición de las letras en la fórmula.

La fórmula (2.1) se demuestra con facilidad, considerando todos los posibles casos de la situación del punto B con relación al segmento AC.

En virtud de la fórmula (2.1), cualquier segmento PQ dispuesto en el eje, se puede dividirlo por el punto X, perteneciente al mismo eje, de una manera tal que

$$PQ = PX + XQ.$$

---

[1]) La dirección del segmento orientado es aquella que va del origen hacia el fin del segmento.

La fórmula (2.1) puede ser generalizada:

$$AB + BC + CD + \ldots + KL + LM = AM. \qquad (2.2)$$

La fórmula (2.2) se denomina *regla generalizada de la cadena*. Se demuestra con facilidad, empleando procedimientos de cambio sucesivo: $AB + BC$ se sustituye por AC; luego, $AC + CD$, se sustituye por AD, etc.

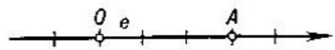


FIG. 3

Es evidente que, al permutar letras en la designación de un segmento dirigido, nosotros variamos su orientación y, por ello, el segmento cambia de signo, conservando su valor absoluto:

$$BA = -AB. \qquad (2.3)$$

La fórmula (2.3) puede ser obtenida también por un método formal, sustituyendo la letra C en la fórmula (2.1) por la letra A.

Con ayuda de segmentos dirigidos se puede introducir coordenadas en el eje. Con este objeto se eligen el *origen de coordenadas* O en el eje y la *unidad de escala*. Ahora, si A es el punto en el eje, entonces la relación del segmento dirigido OA a la unidad de escala e será la abscisa del punto A:

$$x = \frac{OA}{e}. \qquad (2.4)$$

Fijámonos en dos circunstancias muy importantes. En primer lugar, advertimos que a la unidad de escala e no se le asigna ningún signo (es decir, se considera siempre positiva). Esto significa que el signo de la coordenada x coincide con el del segmento dirigido OA. En segundo lugar, la coordenada está privada de dimensionalidad, es decir, es un número abstracto. En la figura 3 la coordenada del punto A es igual a 3 (con el signo $+$).

Supongamos que dos puntos de un eje están determinados por sus coordenadas: A (x_1) y B (x_2). ¿Cómo será expresado el segmento dirigido AB? La resolución de este problema con ayuda del dibujo no es conveniente, porque deberíamos considerar varios casos diferentes (cuál de las coordenadas es mayor, cuáles son sus signos, cuál es la disposición del punto O con relación al segmento AB). Por eso, el problema planteado se resuelve por medio del siguiente procedimiento, que, a propósito, es aplicable para todos los casos posibles:

$$AB = AO + OB = -OA + OB = x_2 - x_1.$$ [1]

Así pues, siempre es cierto que

$$AB = x_2 - x_1. \tag{2.5}$$

Retengamos en la memoria: *la longitud del segmento dirigido es igual a la abscisa de su fin, menos la coordenada del origen del segmento.*

Y, por fin, indiquemos una propiedad más de los segmentos dirigidos: si $AB = AC$, entonces el punto C coincide con el punto B. Simbólicamente:

$$(AB = AC) \Rightarrow (C \equiv B) \tag{2.6}$$

(donde $\Rightarrow$ es el signo de corolario, y $\equiv$ es el signo de identidad).

---

[1] Aquí y en lo sucesivo consideramos e como segmento unitario, esto es, le asignamos una longitud igual a la unidad.

CAPÍTULO I

RAZÓN SIMPLE

3. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Cada problema que ha de ser resuelto, debe ser, ante todo, enunciado, es decir, expresado en términos claros y precisos. Al enunciado «dividir un segmento en la razón dada» le falta claridad. ¿Cuál es el segmento, orientado o no? ¿Es parte de un eje o de una recta? Y por fin, ¿qué se debe entender bajo el término «razón»?

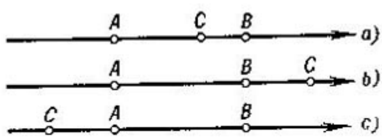


FIG. 4

A todas estas preguntas se darán respuestas oportunamente. *Por ahora*, consideremos el segmento dirigido AB y el punto C, perteneciente al segmento (fig. 4, *a*). Supongamos también (*por el momento*) que todos los tres puntos A, B y C, son distintos. Bajo la razón, en la que C divide el segmento AB, se entiende la relación $\frac{AC}{CB}$.

Designémoslo por una letra griega λ:

$$\lambda = \frac{AC}{CB}. \qquad (3.1)$$

Hace falta recordar el orden en que se disponen las letras de la fórmula (3.1), puesto que todos los tres puntos desempeñan un papel distinto, a saber:

A es el origen del segmento,
B es el fin del segmento,
C es el punto divisorio.

La relación, en la que un punto divide el segmento, se compone de una manera siguiente:

numerador, a partir del origen hasta el punto divisorio;

denominador, a partir del punto divisorio hasta el fin.

Por ejemplo, la figura 4, *a* nos muestra que el punto C divide el segmento AB en la razón $\lambda = 2$.

Ahora advertimos que la definición dada de ninguna manera requiere que el punto divisorio se encuentre dentro del segmento. En la figura 4, *b* el punto C se encuentra fuera del segmento AB, por parte de su fin. Nada nos impide que λ se calcule por la fórmula (3.1). En el dibujo mencionado $AC > 0$, $CB < 0$, $\lambda = -3$. Es verdad, que es un poco insólito decir «el punto C divide el segmento AB en la razón $\lambda = -3$». Nos hemos acostumbrado a considerar que el enunciado «un punto divide el segmento» significa una sola cosa: el segmento se divide en dos partes. Mientras tanto, el punto divisorio en el dibujo 4, *b* está fuera de los límites del segmento. No obstante, al futuro matemático no le deben turbar inconvenientes semejantes. En las matemáticas siempre se generalizan nociones y teoremas, quedándose invariable la terminología. Así que los términos y enunciados habituales se entienden, con frecuencia, en el sentido más amplio.

Suele decirse que cualquier punto, dispuesto dentro del segmento, lo divide *interiormente*. El punto que se encuentra fuera del segmento, lo divide *exteriormente*. En cualquier caso, la relación λ se determina según la fórmula (3.1). En la figura 4, *c*, por ejemplo, el punto C parte el segmento AB exteriormente en la razón $\lambda = -\frac{1}{3}$.

Así pues, hemos plenamente aclarado qué se debe entender bajo la razón λ *para un segmento dirigido*. Pongamos, ahora, dos preguntas:

1) ¿Es esencial que el segmento sea orientado?

2) ¿Es esencial que la recta, cuya parte hace el segmento, sea orientada?

En la figura 5, *a* está expuesto un segmento no orientado. ¿En qué razón lo divide el punto C? Esta pregunta no tiene respuesta. En efecto, en las figuras 5, *b* y 5, *c* un mismo segmento está orientado de una manera diferente. En la figura 5, *b* el punto C divide el segmento AB en la razón $\lambda = 2$; en la figura 5, *c* este mismo segmento se divide en razón $\lambda = \frac{1}{2}$.

Por consiguiente, la respuesta a la primera pregunta es positiva. *El problema de división de un segmento en la razón dada no tiene sentido en el caso de un segmento no orientado.*

Para contestar a la segunda pregunta escrutemos las figuras 6, *a* y 6, *b*. Se diferencian sólo por la dirección

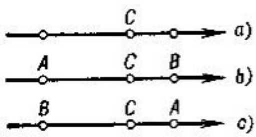


FIG. 5

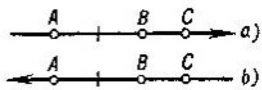


FIG. 6

del eje. Claro está, que si *cambiamos la dirección del eje en el cual se sitúan los puntos A, B y C, entonces todos los segmentos dirigidos en este eje sólo cambiarán de signo y, por lo tanto, la razón λ quedará invariable.* Por ejemplo,

en la figura 6, *a*: $AC = 3$, $CB = -1$, $\lambda = -3$;

en la figura 6, *b*: $AC = -3$, $CB = 1$, $\lambda = -3$.

Por consiguiente, la respuesta a la segunda pregunta es negativa. Para determinar λ no es necesaria la orientación

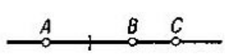


FIG. 7

de una recta que contiene el segmento. La figura 7 se diferencia de la figura 6 sólo por el hecho de que el segmento AB pertenece a una recta no orientada. Esto no nos impide establecer que $\lambda = -3$.

A los segmentos de una recta no orientada no se les puede asignar algún signo, pero se puede asignar el signo a una razón de segmentos[1]). Para determinar el signo de una relación de segmentos no es necesario conocer el signo de cada

[1]) Recordamos que los segmentos son orientados

segmento en separado. Lo importante en el caso dado es solamente la dirección de los segmentos, es decir, son de una misma dirección o de las direcciones contrarias.

El problema acerca de la división del segmento en una razón dada se refiere a los segmentos orientados, pertenecientes a la recta no orientada.

Entonces, si la recta no es orientada, ¿cómo podríamos determinar λ? La fórmula (3.1) no es válida en el caso considerado, ya que ella presupone que los segmentos tienen signos determinados.

Si A, B y C son los puntos de una recta, entonces bajo la razón en la que el punto C divide el segmento AB, se entiende el número λ, cuyo valor absoluto es igual a la razón de longitudes de los segmentos AC y CB,

$$|\lambda| = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}};$$

este número es positivo (negativo), si el punto C se encuentra dentro (fuera) del segmento AB.

Esta definición es muy importante porque señala a la posibilidad de determinar λ en una recta no orientada. Sin embargo, en la resolución de diversos problemas es más cómodo proceder de otra manera, a saber: orientar la recta. Ya sabemos que el valor de λ no depende de la manera en que orientamos la recta. Por otra parte, en la recta orientada el valor de λ se determina completamente (tanto por su valor absoluto como por el signo) según la fórmula (3.1). La comodidad de este método consiste en la posibilidad de utilizar las propiedades de segmentos dirigidos que no dependen de las peculiaridades del dibujo.

Nos queda considerar las circunstancias en que el punto C coincide con el A o el B. En el primer caso consideremos que $\lambda = 0$, en plena conformidad con la fórmula (3.1). En el segundo caso esta fórmula pierde sentido, dado que el denominador del segundo miembro se reduce a cero. Se ha aceptado considerar que $\lambda = \infty$. Pero esta igualdad debe percibirse simplemente como una anotación taquigráfica del hecho siguiente: «el punto divisorio coincide con el fin del segmento». El símbolo ∞ no puede considerarse como un número. A él nosele asigna un signo alguno (no siempre en las matemáticas, sino que en este problema solamento). Se trata, pues, no de $+\infty$ ó $-\infty$, sino que de ∞.

Esta suposición no está privada de base de la cual hablaremos en el capítulo segundo.

Dado que la designación $\frac{AC}{CB}$ parece ser un poco amontonada, se ha aceptado para ella otro símbolo, más sencillo:

$$\lambda = (ABC), \tag{3.2}$$

como también otra denominación: *razón simple de tres puntos* (en una recta). En el símbolo de una razón simple la primera letra significa el origen del segmento, la segunda letra indica al fin del segmento y la tercera, al punto divisorio.

Hemos aclarado, pues, qué es la razón simple λ. Nos queda enunciar el problema sobre la división de un segmento en la razón dada. He aquí este problema:

Dados el segmento AB y el número λ, encontrar el punto C que divide el segmento AB en la razón igual a λ.

Observación. Consideramos que los puntos A y B del segmento son distintos y no coincidentes, así que λ puede tomar cualquier valor real en los límites $-\infty < \lambda < \infty$.

4. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Cuando enunciamos un cierto problema, no podemos saber que ella tiene obligatoriamente una solución. En caso de que la solución exista, se desconoce todavía, si esta solución es única o existen varias soluciones.

Al principio comprobemos que con λ cualquiera el problema no puede tener más que una sola solución. Supongamos que existen dos puntos C y C', que dividen el segmento AB en una razón igual

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B},$$

o, dividiendo los segmentos en numeradores por el punto B,

$$\frac{AB+BC}{CB} = \frac{AB+BC'}{C'B},$$

$$\frac{AB}{CB} - 1 = \frac{AB}{C'B} - 1,$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AB}{C'B},$$

$$BC = BC',$$

de donde se deduce, en virtud de (2.6), que el punto C' coincide con el C. Quiere decir que, si para λ dada el problema tiene una solución, esta solución es única.

La cuestión sobre la existencia de solución se aclara, con mayor comodidad, en el transcurso de búsqueda de la propia solución.

Por los puntos A y B (fig. 8) tracemos dos rectas paralelas. En la primera de ellas marquemos una escala uniforme, tomando el punto A por el origen. En la segunda recta

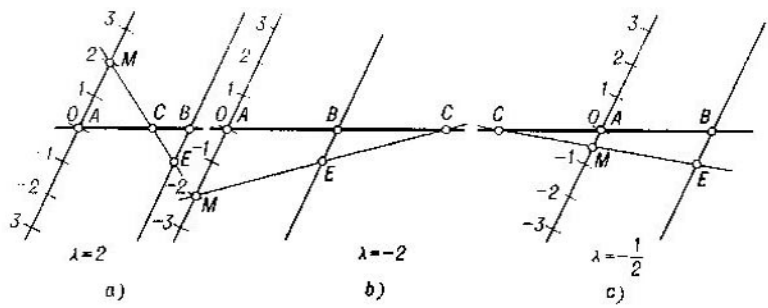


FIG. 8

marquemos el punto E de una manera tal que el segmento $BE = A1$ sea igual a la unidad de escala, dirigida a una dirección contraria. Ahora todo está preparado para resolver el problema. En el eje numérico encontremos el punto M, correspondiente al valor predeterminado de λ, y lo unamos con el punto E. El punto buscado será aquel en que se intersecan ME y AB.

En efecto, los triángulos AMC y BEC son semejantes. Por consiguiente,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BE}} .$$

Llamamos la atención del lector al hecho de que esta proporción es constituida por las longitudes de segmentos, ya que en la geometría elemental, particularmente en la teoría de semejanza de los triángulos, los segmentos se toman sin sus signos. Tomando en cuenta que $\overline{BE} = 1$, escribamos la proporción en la forma:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = |\lambda|.$$

Este razonamiento se aplica de igual manera a todos los tres variantes, expuestos en la figura 8. Nos queda convencerse de que el signo de $\frac{AC}{CB}$ y el de λ son iguales. Es evidente que, si $\lambda > 0$, el punto C se encontrará dentro del segmento; en caso de que sea $\lambda < 0$, el punto C estará fuera del segmento. Por consiguiente,

$$\frac{AC}{CB} = \lambda.$$

Es fácil ver en el dibujo que el punto C no se obtiene sólo en el caso en que las rectas ME y AB resulten paralelas, lo que puede tener lugar cuando $\lambda = -1$. Esto significa que cuando $\lambda = -1$, nuestra construcción geométrica no permite encontrar solución alguna, o esta solución simplemente no existe. No es difícil comprobar que en el caso dado la solución no existe. En efecto, ¿qué significa dividir un segmento AB en la razón $\lambda = -1$? Esto significa encontrar el punto C que: 1) está equidistante de los puntos A y B, pues $|\lambda| = 1$; 2) está fuera del segmento AB (dado que $\lambda < 0$). Un punto de tal género no puede existir, puesto que cada punto, dispuesto fuera del segmento, es más próximo a uno de sus extremos que al otro.

Advertimos que, cuando $\lambda = 0$, el punto C coincide con el A, cuando $\lambda = \infty$, coincidentes son los puntos C y B.

El problema acerca de la división de un segmento en la razón dada tiene una sola y la única solución para cada λ, excepto para $\lambda = -1$. Cuando $\lambda = -1$, la solución no existe.

A cada valor de λ (a excepción de $\lambda = -1$) le corresponde en la recta AB un cierto punto, y, recíprocamente, a cada punto de la recta AB le corresponde un determinado valor de λ. Es muy interesante estudiar esta correspondencia biunívoca, es decir, representar en forma ilustrativa, cómo se distribuyen diferentes valores de λ en la recta AB. Existen dos métodos de resolución del problema planteado; el método geométrico y el analítico.

El método geométrico está basado en la construcción de la figura 8. Tracemos por el punto E (fig. 9) unas cuantas rectas y encontremos los puntos de intersección de los radios $A1$, $A2$, $A3$, $A4$ ... con la recta AB. Fuera del segmento, por parte de su origen, se disponen valores negativos, inferiores, en su magnitud absoluta, a 1. Por parte final del segmento se disponen valores negativos, mayores que 1, en su magnitud absoluta.

Indiquemos, ahora, el método analítico, recurriendo al sistema de coordenadas. Tomemos el punto A por el origen

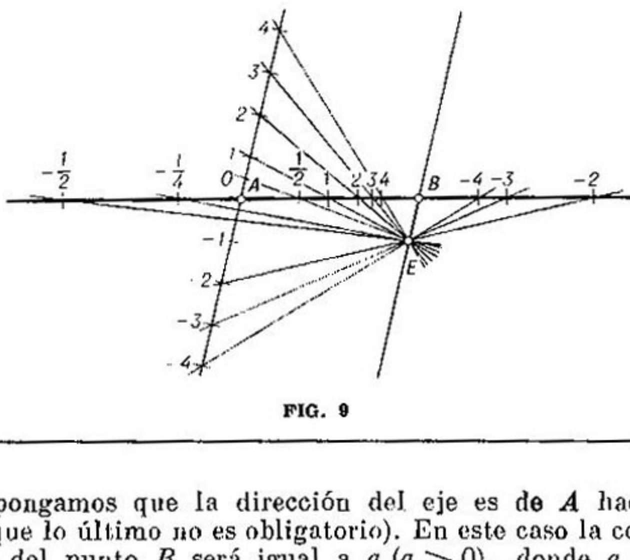


FIG. 9

y supongamos que la dirección del eje es de A hacia B (aunque lo último no es obligatorio). En este caso la coordenada del punto B será igual a a ($a > 0$), donde a es la longitud del segmento AB. Elijamos, ahora, en el eje cualquier punto C (x). Entonces:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda,$$

o, según la fórmula (2.5):

$$\frac{x-0}{a-x} = \lambda,$$

de donde $x = \frac{\lambda a}{1+\lambda}$. Así pues, tenemos dos fórmulas de las cuales una expresa λ a través de x, y la otra expresa x a través de λ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{x}{a-x}, \\ x &= \frac{\lambda a}{1+\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

La primera fórmula permite determinar λ, eligiendo en el eje puntos diferentes. Recíprocamente, al elegir el valor de λ y al hacer uso de la segunda fórmula, se puede encontrar x y marcar el punto correspondiente en la figura. La dirección del eje no influye en el resultado.

5. INTERPRETACIÓN MECÁNICA DEL PROBLEMA

En los puntos A y B coloquemos las masas m_1 y m_2, respectivamente, y encontremos el centro de gravedad del sistema, compuesto por estos dos puntos materializados. El centro de gravedad se encuentra, por supuesto, en el segmento AB y lo divide en partes inversamente proporcionales a las masas colocadas, es decir,

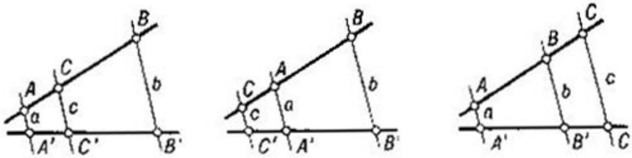
$$\frac{AC}{CB} = \frac{m_2}{m_1}$$

(por C designamos el centro de gravedad buscado). Por consiguiente, al problema de «dividir el segmento AB en la razón $\lambda = \frac{3}{2}$» se puede interpretar así: colóquense la masa 2 al punto A y la masa 3, al punto B. Entonces, el centro de gravedad nos da el punto buscado.

Esta interpretación, sin embargo, tiene una deficiencia. Es válida sólo para $\lambda > 0$. Deberíamos introducir masas negativas para poder aplicarlas en los casos cuando $\lambda < 0$.

6. INVARIANCIA DE UNA RAZÓN SIMPLE CON RESPECTO A LA PROYECCIÓN PARALELA

La palabra «invariancia» significa invariabilidad. El título del presente párrafo expresa la siguiente propiedad: *Si tres puntos de una recta son proyectados paralelamente enotra recta, su razón simple no varía.* La figura 10 ilustra, cómo se entiende la noción de «proyección paralela». Por los puntos A, B y C se trazan las rectas paralelas a, b y c. Se llaman proyecciones paralelas de los puntos A, B, C los puntos A', B', C' en los que las rectas a, b, c se intersecan con la recta de proyección.



a) b) c)

FIG. 10

Demostración. Según el conocido teorema sobre la proporcionalidad de los segmentos, que se obtienen al cortar los lados de un ángulo por rectas paralelas, tenemos:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},$$

o bien,

$$\left|\frac{A'C'}{C'B'}\right|=\left|\frac{AC}{CB}\right|.$$

Nos queda por demostrar que las razones simples $\frac{A'C'}{C'B'}$ y $\frac{AC}{CB}$ tienen signos iguales. Esto se deduce de lo siguiente: si el punto C se encuentra entre A y B, entonces el punto C' también se comprende entre A' y B' (fig. 10, a) y ambas razones son positivas. En caso de que el punto C se encuentre fuera del segmento AB, el punto C' estaría fuera del segmento correspondiente $A'B'$ (figs. 10, b y 10, c); ambas razones en este caso son negativas. Hemos demostrado de este modo que

$$\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{AC}{CB},$$

o bien,

$$(A'B'C')=(ABC). \qquad (6.1)$$

Esta propiedad puede ser apreciada desde otro punto de vista:

Tres rectas paralelas, a, b, c, al cortar una recta (no les paralela), forman en esta última una misma razón simple.

Así, en la figura 11

$$(A_1B_1C_1) = (A_2B_2C_2) = (A_3B_3C_3) = \ldots$$

Como la razón simple no depende de una recta secante, ella pertenece a la propia terna de rectas a, b y c. Esto nos permite avanzar en nuestros razonamientos. En efecto, hasta el momento hemos conocido sólo una razón simple

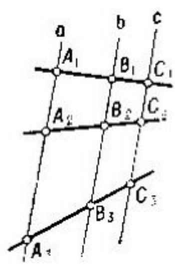


FIG. 11

de los tres puntos de una recta. Ahora introducimos una noción sobre razón simple de tres rectas paralelas.

Se llama razón simple de la terna ordenada de rectas paralelas a una razón simple de tres puntos que se obtienen como resultado de la intersección de las rectas mencionadas con cualquier recta secante.

7. PERMUTACIÓN DE ELEMENTOS EN UNA RAZÓN SIMPLE

La figura 12 muestra tres puntos en una recta. Si nos preguntáramos ¿cuál es la razón simple de estos puntos? no podríamos dar una respuesta determinada, puesto que los puntos indicados no están ordenados. Se puede ordenarlos de una manera diferente. Es por ello que a la terna dada de los puntos no ordenados, le corresponden varios valores de λ. ¿Cuántos son?

Tres puntos pueden ordenarse mediante uno de los seis métodos a seguir: (ABC), (BAC), (ACB), (CAB), (BCA), (CBA). Orientando de cualquier manera la recta que lleva los puntos mencionados, designemos por λ una razón simple (ABC):

$$\lambda = (ABC) = \frac{AC}{CB}. \qquad (7.1)$$

En los cálculos ulteriores utilizaremos las propiedades de segmentos dirigidos (2.1) y (2.3). Cada vez, cuando encontremos el segmento AB o el BA, lo dividiremos por el punto C.

FIG. 12

Calculemos las cinco razones simples restantes:

$$(BAC) = \frac{BC}{CA} = \frac{-CB}{-AC} = \frac{1}{\lambda}.$$

Retendremos en la memoria lo siguiente: *al cambiar de lugares el origen y el fin del segmento, la razón simple adquirirá una forma de razón inversa.*

Luego,

$$(ACB) = \frac{AB}{BC} = \frac{AC+CB}{-CB} = -\frac{AC}{CB} - 1 = -(1+\lambda).$$

Para calcular la siguiente razón simple, (CAB), es suficiente aplicar una regla acerca de la permutación de origen y fin del segmento, la que acabamos de enunciar:

$$(CAB) = -\frac{1}{1+\lambda}.$$

A continuación,

$$(BCA) = \frac{BA}{AC} = \frac{BC+CA}{AC} = \frac{-CB-AC}{AC} =$$

$$= \frac{-1-\dfrac{AC}{CB}}{\dfrac{AC}{CB}} = -\frac{1+\lambda}{\lambda}.$$

Permutando, de nuevo, el origen y el fin, resulta:

$$(CBA) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Hagamos una tabla de los resultados obtenidos. No es deseable que en esta tabla los puntos sean designados con letras, puesto que otras designaciones literales pueden encontrarse en circunstancias diferentes. Lo que es importante, son los lugares ocupados *por elementos* (por puntos o por rectas) en una razón simple. Por eso, sustituyamos las letras A, B, C por cifras 1, 2, 3.

Tenemos, entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} (123) = \lambda, & (312) = -\frac{1}{1+\lambda} \\ (213) = \frac{1}{\lambda}, & (231) = -\frac{1+\lambda}{\lambda} \\ (132) = -(1+\lambda), & (321) = -\frac{\lambda}{1+\lambda} \end{array}\right\} \qquad (7.2)$$

Así pues, según sea el método de ordenar, una misma terna no ordenada da origen a unas cuantas razones simples. Por ejemplo, a una terna, expuesta en la figura 12, le corresponden las siguientes razones simples: $2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$ y $-\frac{2}{3}$.

¿Cuántas son las razones simples que corresponden a una terna no ordenada? Hablando en general, son seis, lo que se deduce de la tabla. Decimos «en general», porque los valores indicados en la tabla (7.2) no siempre son distintos. Hay circunstancias, dependientes de la disposición de los puntos, bajo las cuales algunos valores son coincidentes. Aclaremos estas circunstancias. Es el problema bastante interesante, porque al principio puede parecer que existen muchas ternas de elementos que conducen a la coincidencia de valores, sin embargo, después se pone de manifiesto que en realidad existe una sola terna de esto género.

Para responder a la pregunta levantada, hace falta tomar en la tabla (7.2) pares de valores cualesquiera, igualarlos y encontrar λ. Advertimos, sin embargo, que con la letra λ designamos no una razón determinada, sino que cada una de las seis razones. Por ello, es suficiente igualar λ a las restantes expresiones, por lo cual el número de variantes se reduce a cinco. De antemano convengamos en suponer que todos los tres puntos son distintos. Las ternas de elementos coincidentes no nos pueden interesar: si dos puntos son coincidentes, su permutación no cambia la razón simple. Por esto, los valores de $\lambda = 0$ y $\lambda = \infty$, debemos considerarlos inválidos.

Examinemos, ahora, cinco variantes:

1) $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$. Como el valor de $\lambda = -1$ no es posible, queda válida sólo la solución $\lambda_1 = 1$.

2) $\lambda = -(1 + \lambda)$, de donde $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

3) $\lambda = -\frac{1}{1+\lambda}$, $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Las raíces son imaginarias.

4) $\lambda = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$. Lo mismo.

5) $\lambda = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$. Descartando como inválida la solución $\lambda = 0$, tomamos sólo $\lambda_3 = -2$.

Hemos obtenido tres valores de λ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = -2$. Recordemos, ahora, que estamos buscando una terna no ordenada, a la que corresponde no el único valor, sino seis valores de λ. Partiendo de cada valor obtenido de λ, reestablezcamos los seis elementos con este valor.

λ	$\frac{1}{\lambda}$	$-(1+\lambda)$	$-\frac{1}{1+\lambda}$	$-\frac{1+\lambda}{\lambda}$	$-\frac{\lambda}{1+\lambda}$
1	1	-2	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	-2	1	1
-2	$-\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	-2

Tres filas de esta tabla coinciden (con la exactitud de un orden). Por consiguiente, los tres valores obtenidos de λ deben considerarse como una solución. Estos valores corresponden a una terna de los puntos, uno de los cuales es el centro del segmento comprendido entre dos puntos restantes.

A la terna no ordenada y no degenerada corresponden, en general, seis distintos valores de razón simple. La única excepción es la terna, cuyo punto medio sirve de centro del segmento encerrado entre los puntos extremos. A la terna de tal índole le corresponden sólo tres valores diferentes de razón simple.

Es evidente que la permutación de los puntos extremos en tal terna no es notable y no puede cambiar el valor de la razón simple.

8. PROPIEDAD DE GRUPO DE UNA RAZÓN SIMPLE

La noción de grupo es una de las fundamentales nociones en las Matemáticas. No se puede razonar sobre ella de paso o muy be prisa. Por eso, aquí relatemos acerca de la propiedad de grupo de una razón simple sin relacionarla de ninguna manera a la noción general de un grupo. Que el lector del folleto perciba el contenido de este párrafo de una manera aislada, como una propiedad curiosa de la razón simple. A continuación, al familiarizarse con la teoría de los grupos[1]), el lector se dará cuenta de la profundidad de ideas con las que está relacionada la propiedad en consideración. A propósito, ¡es un ejemplo más de una profundización!

La propiedad de grupo de una razón simple consiste en lo siguiente:

Si en cualquiera de seis expresiones

$$\left.\begin{array}{lll} a_1=\lambda, & a_2=\dfrac{1}{\lambda}, & a_3=-(1+\lambda), \\ a_4=-\dfrac{1}{1+\lambda}, & a_5=-\dfrac{1+\lambda}{\lambda}, & a_6=-\dfrac{\lambda}{1+\lambda} \end{array}\right\} \qquad (8.1)$$

sustituimos λ por cualquiera de estas expresiones, en el resultado obtendremos también una de ellas.

---

[1]) Véanse: 1. *P. S. Alexandrov*: Introducción a la teoría de los grupos. Moscú, 1951. 2. *I. Grossman* y *V. Magnus*: Grupos y sus rúbricas. Moscú, 1971.

Es razonable el punto de vista siguiente. Todos a_i son funciones de λ:

$$a_i = f_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Sustituyendo el argumento por una de estas funciones, obtendremos una expresión de la forma:

$$f_i[f_j(\lambda)] \quad (i = 1, 2, \ldots, 6; \ j = 1, 2, \ldots, 6) \qquad (a)$$

(no se excluye el caso en que $i = j$). Resulta que la función (a) no es nueva, sino que una de las mismas seis funciones:

$$f_i[f_j(\lambda)] = f_k(\lambda). \qquad (8.2)$$

Por consiguiente, el procedimiento de la sustitución del argumento λ por una de las funciones $f_i(\lambda)$ no da algo nuevo, dado que no nos conduce fuera del campo de seis funciones primitivas.

Para comprobarlo se puede considerar todas las 36 combinaciones de las letras i, j en la fórmula (8.2). Sean, por ejemplo, $i = 3$ y $j = 6$. Esto significa que partimos de

$$a_3 = -(1 + \lambda)$$

y sustituimos λ por la expresión $a_6 = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$:

$$-(1 + a_6) = -\left(1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) = -\frac{1}{1+\lambda} = a_4,$$

Quiere decir:

$$f_3[f_6(\lambda)] = f_4(\lambda).$$

Sin embargo, este método de demostración no puede satisfacer a un lector ansioso de conocimientos. En efecto, del hecho de que 36 comprobaciones confirman nuestra suposición, no conviene hacer una deducción de que tenemos 36 coincidencias aleatorias. Debe haber alguna argumentación de este hecho. Ahora la indiquemos y esto será más persuasivo para el lector.

Hemos designado con λ *cualquiera* de las seis razones (ABC), (BAC), . . . En la tabla (7.2) hallamos, por ejemplo,

$$(123) = \lambda, \qquad (213) = \frac{1}{\lambda}$$

Haciendo caso omiso de las designaciones, llegamos a la conclusión: a la sustitución del valor de una razón simple por la magnitud recíproca, le corresponde la permutación de dos primeros elementos. Esta regla es aplicable a cualquiera de las seis razones (no tiene ninguna importancia, cuál punto de los tres designamos con la cifra 1, etc.). Por consiguiente, si la expresión $-\frac{1+\lambda}{\lambda}$ la sustituimos por su recíproca $\left(\text{ponemos } -\frac{1+\lambda}{\lambda}\right.$ en lugar de λ en la expresión $\left.\frac{1}{\lambda}\right)$, obtendremos una razón simple con dos primeros elementos permutados. Por supuesto, esta razón se halla en la tabla (7.2), así que nuestro postulado queda demostrado.

Volvamos a considerar la fórmula (8.2). Hemos descubierto que para $i = 3$ y $j = 6$ resulta que $k = 4$. Hallemos la solución total de este problema, es decir, encontremos k para cualesquiera de i, j. Al principio recordemos, qué se entiende bajo la palabra «*operación*»[1]) en la aritmética y álgebra. Sea dado un conjunto M. *La operación es subordinada a una ley, según la cual a cualquier par ordenado de elementos* (a, b), *tomado del conjunto* M, *se le pone en conformidad el único elemento del mismo*[2]) *conjunto.*

Ejemplo 1. Sea M un conjunto de números naturales o enteros positivos 1, 2, 3, . . . Mediante la operación de *adición* a cada par de números se le pone en conformidad el tercer número, la suma. El signo de operación se pone, con frecuencia, entre las componentes: $2 + 3 = 5$.

Ejemplo 2. Haciendo uso del mismo conjunto M, consideremos una operación más, la de *multiplicación*. Es una operación *de otra especie*. El mismo par de números (2, 3) ella lleva a la conformidad, expresada por 6, y no por 5 como en el ejemplo 1 $(2 \cdot 3 = 6)$.

Ambas operaciones consideradas poseen la propiedad *conmutativa* $(a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a)$ y por eso la ordenación de componentes (a, b) en pares no es esencial. Advertimos que en una operación $a^b = c$ las componentes no son equivalentes en sus derechos.

[1]) Más exacto sería decir «operación binaria», es decir, la operación con dos componentes, pues la operación puede realizarse también con una sola componente, como, por ejemplo, la extracción de una raíz cuadrada.

[2]) No es obligatorio, pero nos limitaremos a este caso.

Consideremos, ahora, un conjunto M, cuyos elementos están constituidos por las funciones (8.1). En este conjunto definamos una operación que llamaremos «multiplicación» y designaremos con el signo $\odot$ (comillas y círculo sirven de señal que no se trata aquí de multiplicación en el auténtico sentido de esta palabra).

«Multiplicar» a_i por a_j significa sustituir λ en la expresión para a_i por la de a_j. Simbólicamente:

$$a_i \odot a_j = f_i [f_j (\lambda)] = a_k. \tag{8.3}$$

Más arriba hemos señalado que $f_3 [f_6 (\lambda)] = f_4 (\lambda)$. Ahora esta misma idea se enunciará así: a_3, «multiplicada» por a_6, nos da a_4, o $a_3 \odot a_6 = a_4$.

Que el mismo lector halle todos los 36 «productos» $a_i \odot a_j$. En la tabla que sigue abajo se dan las respuestas:

1er factor	2º factor					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3	a_6	a_5
a_3	a_3	a_5	a_1	a_6	a_2	a_4
a_4	a_4	a_6	a_2	a_5	a_1	a_3
a_5	a_5	a_3	a_6	a_1	a_4	a_2
a_6	a_6	a_4	a_5	a_2	a_3	a_1

(8.4)

La tabla puede denominarse de «multiplicación»[1]. Examinemos la tabla con toda la atención y hagamos algunas observaciones.

1. La «multiplicación» no es conmutativa. Tenemos, por ejemplo, $a_2 \odot a_3 = a_4$, y $a_3 \odot a_2 = a_5$. Por esto, cuando decimos «multiplicar» por a_i, debemos añadir «de derecha»

[1]) En la teoría de los grupos la llaman «cuadrado de Cayley».

o «de izquierda». Por ejemplo, «multiplicar» a_2 por a_3 «de derecha» significa: $a_2 \odot a_3 = a_4$; «multiplicar» a_2 por a_3 «de izquierda» significa: $a_3 \odot a_2 = a_5$.

2. Con relación a la «multiplicación» el elemento a_1 desempeña el mismo papel que el número 1 en la operación de multiplicación habitual. La multiplicación de cualquier número por la unidad no lo hace cambiar:

$$a \cdot 1 = a.$$

De la tabla 8.4 se infiere que la «multiplicación» (sea de derecha o de izquierda) de cualquier elemento por a_1 no hace variar este último:

$$a_i \odot a_1 = a_1 \odot a_i = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

Por eso, el elemento a_1 se denomina «unidad».

3. La «multiplicación» posee la *propiedad asociativa*:

$$(a_i \odot a_j) \odot a_k = a_i \odot (a_j \odot a_k). \tag{8.5}$$

Si, por ejemplo, multiplicamos, *al principio*, $a_2 \odot a_3$ y, *después*, el resultado obtenido lo multiplicamos (de derecha) por a_4, entonces resulta:

$$(a_2 \odot a_3) \odot a_4 = a_4 \odot a_4 = a_5.$$

Si, *al principio*, multiplicamos $a_3 \odot a_4$, resultará que

$$a_2 \odot (a_3 \odot a_4) = a_2 \odot a_6 = a_5.$$

El resultado es el mismo. Haciendo uso de este método, se puede comprobar todas las combinaciones posibles y, además, convencerse de que la ley (8.5) es siempre verificada.

La propiedad asociativa hace excesivo el uso de los paréntesis en la anotación del producto constituido por tres y mayor número de elementos.

Se puede escribir:

$$a_i \odot a_j \odot a_k,$$

sobreentendiendo bajo esta anotación cualquier miembro de la igualdad (8.5).

Podríamos definir, también, la operación de «división». ¡Pero, basta! Es el momento de pararnos. Que el lector mismo piense en la «división».

Recibe el nombre *de grupo* el conjunto de elementos en el que está definida una operación, la cual posee algunas propiedades que aquí no las enunciamos. Los elementos (8.1) con la operación definida por la fórmula (8.3), constituyen un grupo.

Hemos echado una ojeada a la teoría de los grupos a través de una «mirilla». Nuestro deseo es que a continuación cada lector de este folleto entre en la teoría a través de una «puerta» ampliamente abierta.

9. PUNTOS IMPROPIOS

En este párrafo ampliemos la noción de un punto; sin esta ampliación nuestro avance en el desarrollo del problema sería dificultado. Las dificultades con que tropezaríamos serán indicadas en el párrafo 10.

Convengamos en asignar a las rectas paralelas un punto común, llamado *impropio*[1]), esto es, decimos, desde ahora, que *dos rectas paralelas se intersecan en un punto impropio*. Por supuesto, el lector tendrá interés en ver este punto, como otro cualquiera. No obstante, hay que tener en cuenta que este punto no es parecido al común, sino es *impropio*. Existe posibilidad de considerarlo, pero de una manera un poco desacostumbrada. Ahora mismo trataremos de vencer la resistencia natural de la mentalidad humana a la introducción de nuevas nociones que salen fuera de lo acostumbrado.

Un punto impropio es algo común, perteneciente a las rectas paralelas. Dos rectas paralelas tienen, por ejemplo, una *dirección* común. Por consiguiente, la introducción de puntos impropios no es una revuelta radical, sino que el simple cambio de denominación: el término «dirección de la recta» es sustituido, ahora, por el nuevo, esto es, «punto impropio».

En la figura 13, *a* está representado el conjunto de las rectas que pasan por un punto común. Este conjunto se llama *haz central* y el punto común, *centro del haz*. Es evi-

[1]) A veces este punto se denomina *punto infinitamente alejado*; este nombre es peor, dado que nunca operaremos con la distancia hasta él.

dente, que con la definición del centro se define, también, el haz, y viceversa. En la figura 13, *b* está expuesto el *haz paralelo*, es decir, un conjunto de las rectas paralelas perte-

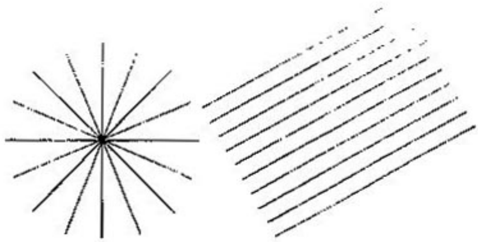


FIG. 13

necientes a un plano. La diferencia entre los puntos comunes e impropios parcialmente se borra, si imaginamos haces en lugar de los puntos:

punto común (propio) es un haz central,

punto impropio es un haz paralelo

Prevenimos al lector de una pregunta: ¿dónde se encuentra el punto impropio, por la derecha o por la izquierda? La pregunta de esta índole sería una tentativa de abordar las nociones nuevas con ayuda de intuición vieja. Para aprender a operar con puntos impropios es necesario formar en sí una intuición nueva. En cada recta existe uno, y sólo uno, punto impropio y para él no son aplicables las nociones «por la derecha», «por la izquierda», «superiormente», «inferiormente», etc. En la figura 14 se exponen la recta *a* y el haz central *S*. Establezcamos la correspondencia entre los puntos de la recta y las rectas del haz: a la recta *m*, le corresponde el punto *M*, y viceversa (véase el dibujo). Mas, ¿podemos afirmar que esta correspondencia es biunívoca, es decir, será cierto que *a cada punto de la recta a corresponde una recta del haz S, y, recíprocamente, a cada recta del haz S, le corresponde un punto de la recta a*? Mientras no conocimos la noción de puntos impropios, la segunda parte de esta afirmación no era justa: en el haz *S* hay una recta *de sobra, a'*, paralela a *a*. A ella no le corresponde ningún punto en la recta a. No obstante, al introducir puntos impropios, la afirmación se pone válida. En efecto, ahora también a la recta a' corresponde un punto en la recta a, el cual es el punto impropio. No se halla por la derecha, ni tampoco por la izquierda. Si la recta m empieza a girar alrededor del punto S en la dirección contraria a las agujas de un reloj, el punto M va a desplazarse por la recta a hacia la derecha. Si m gira en el sentido de las agujas de un reloj,

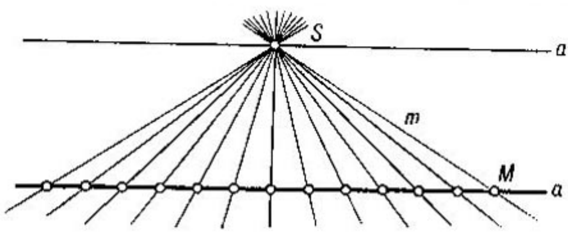


FIG. 14

M se desplazará a la izquierda. En ambos casos llegará el momento, cuando la recta m coincida con la a'. En este instante el punto M se hará impropio.

¡Es evidente que en un plano existe una infinidad de puntos impropios. Designemos por u el conjunto de estos puntos y convengamos en considerarlo una recta (impropia). Lo último es plenamente natural en virtud de dos razones.

En primer lugar, cada recta propia tiene un punto impropio, es decir tiene un punto común con el conjunto u. Por eso, es natural tomar u por una recta.

Segundo. Examinemos dos planos paralelos, α y α' (fig. 15). A cada haz paralelo en el plano le corresponde un haz paralelo de la misma dirección en el punto α'. En otras palabras, cada punto impropio del plano α pertenece también al plano α', y viceversa. Esto significa que el conjunto de los puntos impropios es común para ambos planos paralelos, lo que constituye un argumento más en favor de llamar el conjunto mencionado una recta.

Así pues, *en un plano existe la única recta impropia. Cada recta propia tiene un solo punto impropio; la recta impropia está constituida exclusivamente por puntos impropios.*

Si en una recta están descubiertos dos puntos impropios, es indicio de que la recta es impropia.

El conjunto de todos los puntos impropios en el espacio se denomina *plano impropio*. No lo examinemos en este folleto porque el último está dedicado a la geometría en un plano.

Hemos extendido el conjunto de los puntos en el plano, al introducir nuevos puntos. Pero no podemos considerar

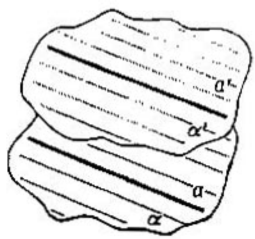


FIG. 15

que los nuevos puntos introducidos (impropios) son en todo equivalentes a los puntos propios. Los puntos impropios son equivalentes a los propios solamente *en el sentido parcial*. Indiquemos con toda la precisión, en qué sentido los puntos impropios y los propios pueden considerarse equivalentes.

Entre los puntos mencionados no hay ninguna diferencia, cuando los consideramos desde el punto de vista de su posición, es decir, en cuanto a la pertenencia mutua de puntos y rectas. En efecto, todas las propiedades de posición (en el plano) se infieren de dos axiomas:

1. *Dos distintos puntos definen a una sola recta* (se entiende una recta que pasa por los puntos indicados).

2. *Dos distintas rectas definen a un solo punto*, perteneciente a ellas.

El primer axioma se ilustra por la figura 16. Cada punto es definido por un haz respectivo. Trazar la recta por los dos puntos significa hallar una recta común para dos haces. En la figura 16, *a* ambos puntos son propios. Es un caso «viejo», bien conocido. En la figura 16, *b* uno de los puntos es propio, el otro es impropio. Es evidente que en este caso ellos definen también una recta única. La figura 16, *c* nos muestra dos puntos impropios. Existe una sola recta que los contiene, es una recta impropia.

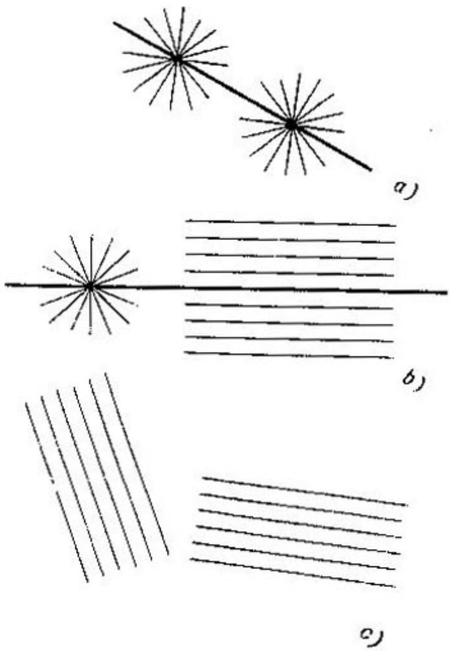


FIG. 16

Para comprobar el segundo axioma examinemos tres casos:

1. Las dos rectas son propias y no paralelas; se intersecan en un punto propio.
2. Las dos rectas son propias y paralelas; tienen un punto común, que es impropio.
3. Una recta es propia, la otra impropia. Como punto (y el único punto) común para ellas sirve el punto impropio de la primera recta.

En las cuestiones, relacionadas a la medición de segmentos y ángulos, los puntos impropios no son equivalentes a los propios. No se puede hablar de la distancia entre dos puntos impropios (pero sí, ¡se puede hablar del ángulo!). Una recta propia permite la única perpendicular trazada de un punto propio. Desde el punto impropio se puede trazar una infinidad de perpendiculares, o bien ninguno, etc.

El axioma acerca de las paralelas tampoco puede ser extendido al caso en que una recta o un punto fuera de ésta son impropios.

Volvamos a desarrollar el problema principal del folleto. Sean A y B puntos propios, y U, un punto impropio de la recta AB. ¿Cuál es la razón simple (ABU)? Por supuesto, es una cuestión de la convención, pero hay que convenir de un modo natural al máximo.

Si todos los tres puntos son propios, entonces:

$$\lambda=(ABC)=\frac{AC}{CB}=\frac{AB+BC}{CB}=\frac{AB}{CB}-1;$$

si el punto C *tiende a* U (es decir, se aleja ilimitadamente a lo largo de la recta), entonces $\lim\limits_{C\to U}\frac{AB}{CB}=0$. Por ello, al coincidir C y U, sería natural asignar a λ el valor extremo:

$$\lambda=(ABU)=-1.$$

Hasta el presente consideramos imposible el valor de -1 para λ. Actualmente, precisamente este valor es el más acertado para un punto impropio. Por consiguiente, desde ahora podemos dividir el segmento AB en una relación *cualquiera*.

Examinemos, además, las circunstancias en que el origen o el fin del segmento es un punto impropio. Si $A\to U$, el numerador de la expresión $\lambda=\frac{AC}{CB}$ crece infinitamente, mientras que el denominador queda invariable. Si $B\to U$, todo ocurre al revés. Por ello, es natural considerar que

$$\left.\begin{aligned}(UBC)&=\infty,\\(AUC)&=0,\\(ABU)&=-1.\end{aligned}\right\}\qquad(9.1)$$

No todas las propiedades de la razón simple, que hemos examinado arriba, son válidas para los elementos impropios.

10. SEPARACIÓN DE PUNTOS EN UNA RECTA

Cada recta contiene un conjunto infinito de puntos. A este conjunto le hemos añadido un punto más, el punto impropio. ¿Será de gran importancia este hecho? Resulta que sí. La adición de un punto impropio cambia esencialmente las propiedades de la recta. En particular, introducido el punto impropio, pierde todo sentido la noción «entre».

Hasta el momento considerábamos que de los tres puntos en una recta, dos son *extremos* y un punto es *intermedio*,

FIG. 17

que se halla *entre* los de extremidad. Suele decirse también que dos puntos *se separan* por el tercero. Supongamos que en el punto A se encuentra un lobo, y en el punto B, una oveja (fig. 17). Es evidente que la seguridad de la oveja se puede garantizar, al establecer en el punto C un obstáculo insuperable (se supone que el lobo corre solamente por una recta); en el caso dado el obstáculo separa al lobo de la oveja. Estas propiedades de una recta no son aptas en una circunferencia. Entre los tres puntos de la circunferencia no hay ninguno que podría llamarse intermedio. Si es necesario *separar* la oveja del lobo, no es suficiente tener un solo obstáculo. Un obstáculo, puesto en el punto C (fig. 18), no impide que el lobo atrape a la oveja, corriendo según el sentido de manecillas de un reloj. Hacen falta dos obstáculos, en los puntos C y D, para que la oveja pueda estar quieta.

Así pues, *un punto en la circunferencia no puede separar dos puntos de la misma circunferencia; lo pueden hacer dos puntos.* Y un postulado más: *una cuaterna de puntos en la circunferencia se desintegra de una manera única en dos pares de puntos, que son recíprocamente divisorios.*

Tan pronto como introducimos la noción de un punto impropio, desaparece la diferencia, arriba indicada, entre una recta y una circunferencia. Desde ahora la recta se hizo una línea cerrada.

En la figura 19 se muestra la correspondencia entre los puntos de la circunferencia y los de la recta que se denomina *proyección estereográfica*. La recta toca la circunferencia a' en el punto O. El punto U', diametralmente opuesto,

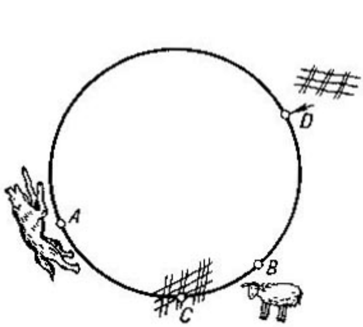


FIG. 18

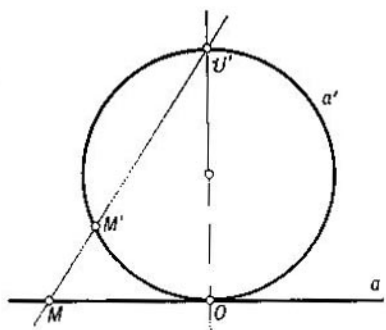


FIG. 19

sirve de centro de proyección. A cada punto M de la recta le corresponde el punto M' de la circunferencia y, viceversa, al punto M' corresponde el punto M. Hasta la introducción del punto impropio esta imagen no era biunívoca: en la circunferencia hay un punto sobrante U'. Ahora al punto U' corresponde el punto impropio U de la recta a.

En el haz central de rectas una recta tampoco puede separar un par de otras rectas. Sean a y b dos rectas del haz (fig. 20). Cualquiera que sea la tercera recta c, haciendo girar a, siempre se puede conseguir que ésta coincida con b, sin que en el transcurso del giro a pase la posición de c. Sin embargo, dos rectas pueden dividir a y b. Y un postulado más: *una cuaterna de rectas de un haz central se desintegra de una manera única en dos pares que son recíprocamente divisorios.*

Estudiemos una vez más la figura 14. Es fácil ver que es justo el lema siguiente.

Supongamos que una cuaterna de los puntos de una recta es proyectada desde un cierto centro por cuatro rectas, entonces los pares divisorios de puntos son proyectados por pares divisorios de rectas.

¡De este modo, la separación recíproca de dos pares de puntos conserva su validez en el caso de una proyección central. Esto es cierto, cuando la proyección se hace de una recta a otra. Mientras tanto, la propiedad de la terna de

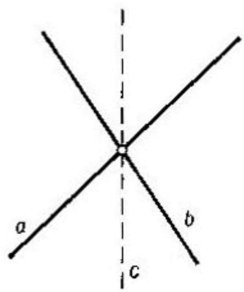


FIG. 20

puntos de una recta de desintegrarse en dos puntos extremos y un intermedio (se trata de una recta sin punto impropio) se conserva sólo en el caso de una proyección paralela (véase la fig. 11); en el caso de una proyección central esta propiedad no tiene lugar. En la figura 21 vemos tres puntos, A, B y C, en la recta a; con esto el punto C se encuentra *entre* A y B. Los puntos mencionados están proyectados del centro S a la recta a' y el punto C' *no* se halla entre A' y B'.

Que el mismo lector, examinando el dibujo 21, piense sobre la cuestión: ¿será el segmento $A'B'$ la proyección del segmento AB o no? La cuestión no está clara. En efecto, en la recta a existen dos segmentos AB: uno es interior, y el otro, exterior, es decir, aquel que comprende un punto impropio. La figura 21 nos muestra que cada punto interior del segmento AB (C, por ejemplo), siendo proyectado, se convierte en punto exterior del segmento $A'B'$. Al construir, mediante una recta, la proyección del punto impropio U, (la recta de proyección es paralela a a), obtendremos el punto U', situado dentro del segmento $A'B'$. Resulta pues, que el segmento interior $A'B'$ es una proyección del segmento exterior $\boldsymbol{AB}$.

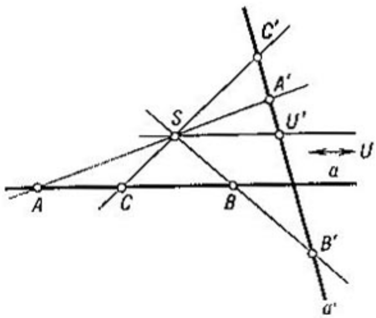


FIG. 21

Nuestros razonamientos, aunque parecen abstractos, para el lobo A tienen una significación muy práctica (fig. 17). Introducido el punto impropio, el obstáculo C ya no impide que el lobo atrape a la oveja en el punto B con tal de que

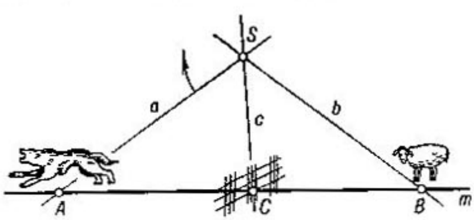


FIG. 22

el lobo siga un camino que pasa por el punto impropio. Imaginemos que todos los tres puntos están proyectados desde el punto S (fig. 22). La recta a gira alrededor del punto S en el sentido de las manecillas de un reloj. El lobo debe correr a la izquierda de un modo tal que a cada instante dado pueda encontrarse en el punto en que se intersecan a y m. Cuando a sea paralela a m, el lobo se encontrará en el punto impropio. Con el giro sucesivo de la recta a el lobo aparecerá desde la derecha y atrapará a la oveja.

A decir verdad, el lobo debe ser un corredor excelente. La recta a gira alrededor de S uniformemente, por ello, cuando a se aproxima a una posición paralela a m, la velocidad con que corre el lobo tiene que crecer infinitamente. Mas, esto no debe sorprendernos. La velocidad es una noción métrica, relacionada con la medición de distancias. Mientras tanto, el lector ya fue prevenido que no se deben plantear problemas métricos en relación a los puntos impropios.

11. TEOREMA DE CEVA

Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto. El sentido recíproco no existe, es decir, del hecho de que las rectas AL, BM y CN pasan por un mismo punto (fig. 23) no

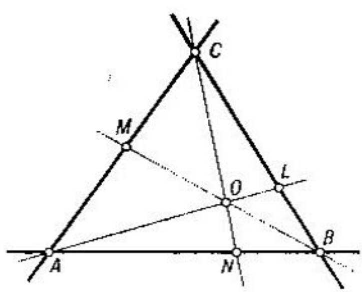


FIG. 23

se deduce que ellas son medianas. La irreversibilidad del teorema significa que sus condiciones contienen requisitos sobrantes: para concluir que las rectas AL, BM y CN pasan por un mismo punto no es necesario requerir que ellas sean medianas (alturas, bisectrices), sino que se puede limitarse a un *requisito menos estricto*. Interesante es el problema de encontrar una condición *mínima*, es decir, la condición, que siendo no satisfecha, las rectas AL, BM y CN no tengan el punto común. En este último caso el teorema adquirirá el sentido recíproco, esto es, la condición mencionada será suficiente y necesaria.

La condición mínima fue hallada por Giovanni Ceva (1648—1734), matemático italiano. Antes de enunciarla aquí, precisaremos algunos términos.

Bajo el «lado del triángulo» entendemos no un segmento, sino toda la recta infinita. Sea dado el triángulo ABC. Elijamos en cada lado un punto respectivo (no coincidente con ningún vértice):

el punto N, en el lado AB;
el punto L, en el lado BC;
el punto M, en el lado CA.

Para determinar razones en que estos puntos dividen los lados del triángulo, es necesario ordenar sus vértices. Convengamos en recorrer el triángulo en cualquiera de las dos direcciones: ABC, o bien ACB. En el primer caso los pares de vértices se ordenan de la manera siguiente: AB, BC, CA. En el segundo caso los vértices se disponen como sigue: BA, AC, CB.

Con el fin de mayor definición tomamos la primera orientación y designemos

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= (BCL),\\ \mu &= (CAM),\\ \nu &= (ABN).\end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

El teorema de Ceva dice:

Si las rectas AL, BM y CN pasan por un mismo punto, entonces $\lambda\mu\nu = 1$.

Observación. Los puntos A, B, C son propios, los L, M, N y O pueden ser cualesquiera.

Demostración. Al principio supongamos que todos los siete puntos son propios. El punto O puede encontrarse tanto dentro del triángulo como fuera de sus límites (véanse las figuras 24*a*, *b*). Lo que diremos abajo es igualmente aplicable en ambos casos.

Tracemos por el punto C una recta c', paralela a AB. Los puntos, en que c' interseca a AL y BM, los designemos con A' y B'. En lo sucesivo haremos uso de proporciones que se deducen de la semejanza de triángulos, razón por la cual *consideramos segmentos y relaciones entre ellos como magnitudes positivas.*

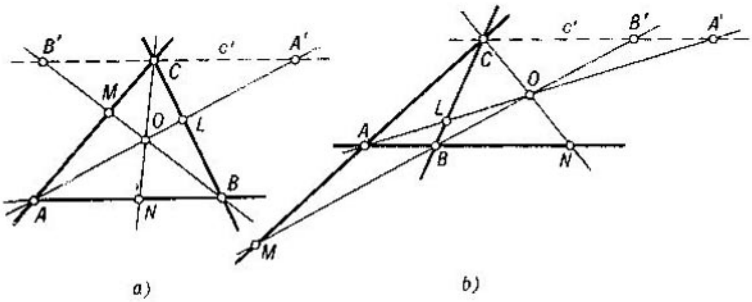


FIG. 24

De la semejanza de los triángulos $OA'C$ y OAN tenemos:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{CA'}}=\frac{\overline{ON}}{\overline{OC}}\ .$$

De la semejanza de los triángulos $OB'C$ y OBN obtenemos:

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{CB'}}=\frac{\overline{ON}}{\overline{OC}}\ .$$

Igualamos los miembros primeros:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{CA'}}=\frac{\overline{NB}}{\overline{CB'}}\ ,$$

o, permutando los términos de la proporción:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}\ . \qquad \text{(a)}$$

De la semejanza de los triángulos ABL y $A'CL$ tenemos:

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA'}}\ . \qquad \text{(b)}$$

De la semejanza de los triángulos ABM y $CB'M$ obtenemos:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{B'C}}{\overline{AB}}. \tag{c}$$

Multiplicando (a), (b) y (c), obtenemos:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}\cdot\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=1. \tag{d}$$

Nos queda por aclarar qué sucederá, si en el primer miembro de la última ecuación introducimos las relaciones (11.1) con sus signos. En el caso, expuesto en la figura 24, *a* (el

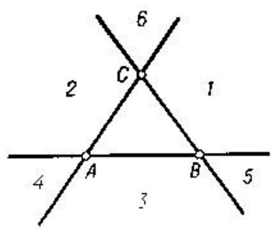


FIG. 25

punto O se encuentra dentro del triángulo), cada uno de los puntos L, M y N se dispone *entre* dos vértices del triángulo, por lo cual todas las relaciones (11.1) son positivas. Por consiguiente, en lugar de la igualdad (d) se puede escribir

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1. \tag{11.2}$$

Si el punto O se encuentra fuera del triángulo y no en los lados de éste, debe haber bien dentro del ángulo del triángulo (dominios *1*, *2*, *3* en la fig. 25) o bien dentro del ángulo vertical (dominios *4*, *5*, *6* en la fig. 25). Supongamos, por ejemplo, que el punto O se halla dentro del ángulo A o dentro de un ángulo, vertical a éste. En este caso la recta AO cortará el lado BC en el punto L, que se encuentra *entre* B y C; las rectas BO y CO cortarán los lados CA y AB *fuera* de los segmentos CA y AB. De este modo, si el punto O

se halla fuera del triángulo ABC, entonces entre las relaciones (11.1) las dos serán negativas, y una positiva. Quiere decir, en cualquier circunstancia el producto $\lambda\mu\nu$ es siempre positivo, quedando así demostrada la relación (11.2).

Supongamos ahora, que uno de los puntos divisorios, L, por ejemplo, es impropio, es decir $AL \parallel BC$ (fig. 26). De la

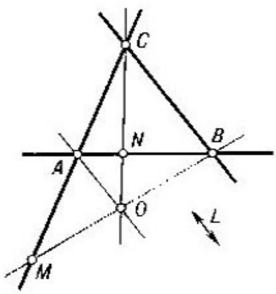


FIG. 26

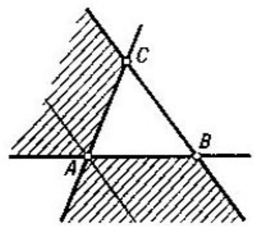


FIG. 27

semejanza de los triángulos AON y BCN se deduce que

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BC}}.$$

Por otra parte, la semejanza de los triángulos OMA y BMC nos da:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BC}}.$$

Igualamos los primeros miembros:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{CM}}. \qquad \text{(e)}$$

Como el punto O debe disponerse en la recta AL, paralela a BC, se halla, por consiguiente, en el dominio rayado (fig. 27). Es fácil ver, en este caso, que bien el punto N se encuentra entre A y B, mientras que el punto M está fuera del segmento AC, o bien, todo va viceversa, es decir, las relaciones $\frac{AN}{NB}$ y $\frac{MA}{CM}$ tienen signos opuestos. Por esto, la igualdad (e) se puede escribir en la forma:

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{MA}{CM},$$

o bien,

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{1}{\frac{CM}{MA}},$$

es decir,

$$\nu = -\frac{1}{\mu}.$$

Por lo tanto, $\mu\nu = -1$. El punto L es impropio, es decir- $\lambda = -1$. Así pues:

$$\lambda\mu\nu = 1.$$

Examinemos, ahora, un caso en que dos puntos divi, sorios, L y M, por ejemplo, son impropios. La figura $ACBO$

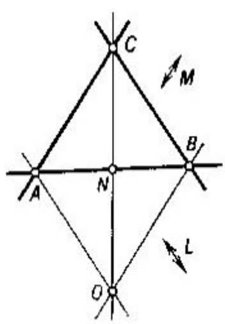


FIG. 28

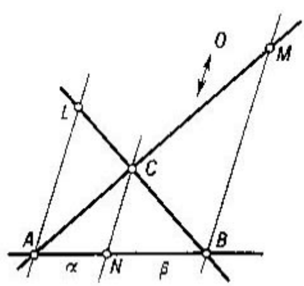


FIG. 29

será un paralelogramo (fig. 28) y el punto N, el centro del lado AB. En este caso $\lambda = -1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$, y, por consiguiente, $\lambda\mu\nu = 1$.

Todos los tres puntos, L, M, y N, no pueden ser impropios (si se da de antemano que las rectas AL, BM y CN tienen un punto común). Es posible, además, que el punto O sea impropio, es decir, las rectas AL, BM y CN son paralelas (fig. 29). Es fácil convencerse de que una relación en este caso es positiva y las otras dos, negativas. En la figura 29 tenemos: $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\nu > 0$. Designemos por α y β los segmentos respectivos AN y NB. Entonces:

$$\nu = \frac{AN}{NB} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\lambda = \frac{BL}{LC} = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha},$$

$$\mu = \frac{CM}{MA} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Multiplicando, encontramos:

$$\lambda\mu\nu = 1.$$

El teorema de Ceva está completamente demostrado.

El teorema recíproco. *Si en cada lado de un triángulo elegimos un punto (no coincidente con el vértice) de tal modo*

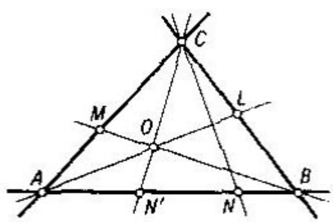


FIG. 30

que el producto de relaciones, en que los puntos indicados dividen los lados del triángulo, sea igual a 1, *entonces se puede afirmar que las rectas que unen los vértices del triángulo y los puntos de lados opuestos pasan por un mismo centro.*

En la forma más breve: *si* $\lambda\mu\nu = 1$, *entonces* AL, BM *y* CN *pasan por un mismo centro (punto).*

Demostración. Supongamos que las rectas AL, BM y CN no pasan por un mismo centro (fig. 30). Designemos con O el punto de intersección de AL y BM; tracemos la recta CO e indiquemos con N' el punto de intersección de CO y AB. La razón simple (ABN') la designemos por ν'

Tenemos:

$\lambda\mu\nu = 1$ (según la condición),

$\lambda\mu\nu' = 1$ (según el teorema de Ceva).

Por consiguiente, $\nu = \nu'$, lo que contradice a la suposición de que los puntos N y N' son diferentes. El teorema está demostrado.

En adelante llamaremos teorema de Ceva ambos teoremas arriba mencionados que pueden ser enunciados en la siguiente forma:

Para que las rectas AL, BM y CN pasen por un mismo punto, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad $\lambda\mu\nu = 1$.

Sin embargo, ambos teoremas no podrían ser tan simples, si no introdujésemos los puntos impropios. Al teorema primero deberíamos enunciarlo así: si las rectas AL, BM y CN pasan por un mismo punto, tres casos son posibles:

sea que el producto de tres relaciones λ, μ, ν es igual a la unidad;

sea una recta paralela al lado opuesto[1]), mientras que las otras dos rectas intersecan los lados opuestos de una manera tal que el producto de sus relaciones es igual a menos unidad;

sean dos rectas paralelas a los lados opuestos, mientras que la tercera divide el lado opuesto (segmento) a medias.

Está excluida la situación expuesta en la figura 29, dado que hemos aceptado que las rectas pasan por un mismo punto.

En lo que se concierne al teorema segundo, lo deberíamos enunciar así: si $\lambda\mu\nu = 1$, las rectas AL, BM y CN pasan por un mismo punto, o bien son paralelas. Como hemos aceptado la existencia de los puntos L, M, N, los casos de tipo $AL \parallel BC$ están excluidos.

La introducción de puntos impropios permite unir todos los casos más diversos (como podría parecer) en una sola enunciación. En general, se ha aceptado en las Matemáticas unificar los casos, iguales según su forma, aunque diferentes por su contenido. Cada matemático debe saber hacer esta unificación.

Todos los teoremas (conocidos del curso escolar) acerca de la intersección de medianas, bisectrices y alturas son

[1]) Si $AL \parallel BC$, entonces AL es la designación de una recta; el punto L, en este caso, no existe.

nada más que casos particulares del teorema segundo. Demostrémoslo.

Si AL, BM y CN son medianas, entonces $\lambda = \mu = \nu = 1$. Por lo tanto, $\lambda\mu\nu = 1$.

En caso de que AL, BM y CN sean bisectrices, entonces $\lambda = \frac{c}{b}$, $\mu = \frac{a}{c}$, $\nu = \frac{b}{a}$. Por consiguiente, $\lambda\mu\nu = 1$.

Si AL, BM y CN son alturas, entonces se tiene: $\lambda = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}$, $\mu = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}$, $\nu = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}$. Por consiguiente, $\lambda\mu\nu = 1$. Este teorema tiene un caso muy particular, a saber: el caso en que el triángulo ABC es rectángulo, cuando el teorema de Ceva no puede aplicarse, pues requiere que los puntos L, M y N no coincidan con los vértices. Por supuesto, sigue siendo válido el teorema acerca de las alturas del triángulo que pasan por un mismo punto. No obstante, cuando referencias se hacen al teorema de Ceva, el caso de un triángulo rectángulo se debe considerar por separado.

Observación histórica. El teorema que lleva el nombre de Giovanni Ceva fue deducido por razones mecánicas. Supongamos que en los vértices A, B y C se disponen las masas respectivas m_1, m_2 y m_3. Sean L, M y N los centros de gravedad de pares (m_2, m_3), (m_3, m_1), (m_1, m_2), respectivamente. El centro de gravedad de dos puntos materiales se encuentra en el segmento, limitado por los mismos, y divide éste último en una razón recíproca a la razón de masas, es decir,

$$\left.\begin{aligned} &L \text{ divide el segmento } BC \text{ en la razón } \lambda = \frac{BL}{LC} = \frac{m_3}{m_2}, \\ &M \text{ divide el segmento } CA \text{ en la razón } \mu = \frac{CM}{MA} = \frac{m_1}{m_3}, \\ &N \text{ divide el segmento } AB \text{ en la razón } \nu = \frac{AN}{NB} = \frac{m_2}{m_1}. \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

Es evidente que $\lambda\mu\nu = 1$.

Del curso de estática conocemos que el centro de gravedad del sistema de tres puntos se encuentra en el segmento que liga uno de estos puntos con el centro de gravedad de los otros dos[1]). Por lo tanto, el centro de gravedad de tres

[1]) Se puede decir esto sobre cualquier multitud de puntos materiales, dividida en dos submultitudes.

masas, m_1, m_2 y m_3 pertenece a cada uno de los segmentos AL, BM, CN, esto es, tres segmentos mencionados tienen un punto común.

No es difícil demostrar que si $\lambda\mu\nu = 1$, las masas m_1, m_2, m_3 pueden elegirse de una manera tal que se satisfagan las condiciones (11.3).

La concepción de centro de gravedad se usa con frecuencia en la geometría[1]). El método puede ser extendido al dominio de valores negativos de λ, μ, ν.

12. TEOREMA DE MENELAO[2])

Conservando designaciones anteriores, enunciemos dos siguientes teoremas.

1. *Si los puntos L, M y N están situados en una misma recta, el producto $\lambda\mu\nu$ es igual a -1.*

2. *Si $\lambda\mu\nu = -1$, los puntos L, M y N se sitúan en una misma recta.*

Recordemos que los vértices del triángulo ABC se suponen siempre propios; los puntos L, M y N pueden ser cualesquiera.

Una recta que corta los lados del triángulo recibe el nombre de *línea transversal* (con relación al triángulo dado). Si la línea transversal está trazada de una manera tal que no pasa por ninguna de los vértices del triángulo, entonces la línea mencionada corta dos lados del triángulo en su interior y un lado fuera de éste (fig. 31, *a*), o bien corta todos los tres lados fuera del triángulo (fig. 31, *b*). Los puntos en que se cortan la línea transversal y los lados BC, CA y AB están designados por L, M y N, respectivamente.

Demostremos el primer teorema. Tracemos por los vértices del triángulo tres rectas, paralelas a la línea transversal (en la figura 31 se muestra una sola de ellas: BM'). Si la línea transversal no es paralela a ninguno de tres lados, entonces todas las tres rectas son *distintas*. Sustituyamos las relaciones que nos interesan por las razones de segmentos en uno de los lados del triángulo, por ejemplo,

---

1) Véase *M. B. Balk*. «Aplicaciones geométricas de la concepción de centro de gravedad».

2) Geómetra griego, 1er siglo de n.e.

en el lado CA. Al designar por M' el punto de intersección de una paralela, que pasa por B, con el lado CA, tenemos

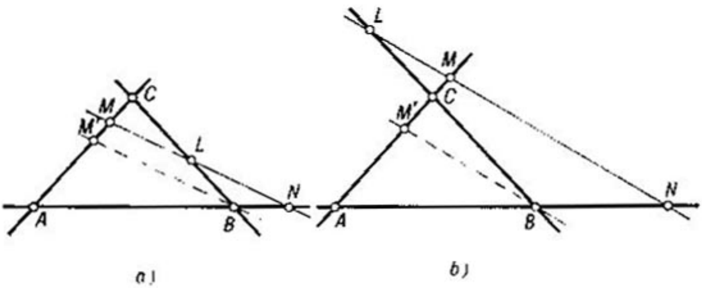


FIG. 31

(atención: todas las proporciones se han tomado con sus signos):

$$\left.\begin{aligned}\frac{BL}{LC}&=\frac{M'M}{MC},\\ \frac{AN}{NB}&=\frac{AM}{MM'}.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(a)}$$

Teniendo en cuenta (a), calculemos el producto $\lambda\mu\nu$:

$$\lambda\mu\nu=\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{M'M\cdot CM\cdot AM}{MC\cdot MA\cdot MM'}=$$
$$=\frac{M'M}{MM'}\cdot\frac{CM}{MC}\cdot\frac{AM}{MA}=(-1)\cdot(-1)(-1)=-1.$$

Si la línea transversal es paralela a uno de los lados del triángulo (fig. 32), la tarea se hace más simple:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AM}{MC}=\frac{MA}{CM}=\frac{1}{\frac{CM}{MA}},$$

es decir, $\nu=\frac{1}{\mu}$, o sea $\mu\nu=1$. En este caso el punto L es impropio, o sea $\lambda=-1$. Por consiguiente, $\lambda\mu\nu=-1$.

Nos queda por examinar un caso más en que la línea transversal es una recta impropia. En este caso todos los tres puntos, L, M y N, son impropios; $\lambda=\mu=\nu=-1$

y $\lambda\mu\nu = -1$. El primer teorema está completamente demostrado.

Demostremos el segundo teorema. Se conoce que $\lambda\mu\nu = -1$. Supongamos que los puntos L, M y N no pertenecen a una misma recta. Tomemos la recta LM por una línea

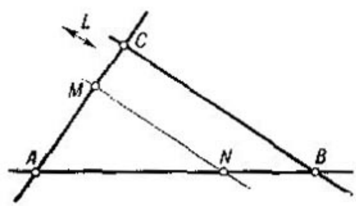


FIG. 32

transversal; designemos por N' el punto de intersección de LM con AB, y por ν' la razón simple (ABN'). Entonces tenemos:

$\lambda\mu\nu = -1$ (según la condición),

$\lambda\mu\nu' = -1$ (según el teorema anterior).

De aquí se deduce que $\nu = \nu'$, lo que contradice a la suposición de que N y N' son puntos diferentes. El teorema queda demostrado.

CAPÍTULO II
RAZÓN COMPLEJA

13. NOCIÓN DE RAZÓN COMPLEJA

Elijamos en la recta un segmento AB y dos puntos divisorios, C y D, que deben ser ordenados (por ejemplo, se toma C por el primer punto y D, por el segundo). Aparecen dos razones simples:

el punto C divide el segmento AB en la razón $\lambda = (ABC)$;

el punto D divide el segmento AB en la razón $\mu = (ABD)$.

La relación de estas dos razones recibe el nombre de *razón compleja* de cuatro puntos y se designa con el símbolo $(ABCD)$:

$$w = (ABCD) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(ABC)}{(ABD)} . \tag{13.1}$$

Descifrando el sentido de una razón simple, se puede obtener una definición inmediata de la razón compleja:

$$w = (ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} , \tag{13.2}$$

o sea, designando los puntos con cifras:

$$(1234) = \frac{13}{32} : \frac{14}{42} = \frac{13 \cdot 42}{32 \cdot 14} \tag{13.3}$$

(es evidente que la combinación de cifras «13» significa un segmento dirigido desde el punto 1 hasta el 3, siendo elegida la dirección de la recta).

Subrayamos que en el símbolo $(ABCD)$ cada punto desempeña un papel especial:

$$\begin{cases} A \text{ — origen del segmento,} \\ B \text{ — fin del segmento,} \end{cases}$$
$$\begin{cases} C \text{ — primer punto divisorio,} \\ D \text{ — segundo punto divisorio.} \end{cases}$$

Es conveniente reunirlos por pares como se señala arriba con corchetes. En el párrafo 15 veremos que estos pares son equivalentes, esto es, se puede considerar, tanto C como D, como el origen y el fin del segmento; A y B pueden ser el punto divisorio primero y segundo.

Supondremos (casi siempre) que todos los cuatro puntos son distintos. Con relación al segmento AB los puntos divisorios se pueden disponer según uno de los siguientes órdenes (fig. 33):

a) ambos puntos están en el interior del segmento;

b) ambos puntos están fuera del segmento;

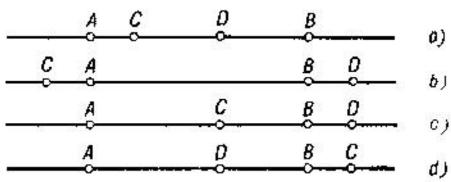


FIG. 33

c) el primer punto está en el interior del segmento y el segundo, fuera de éste;

d) el primer punto divisorio está fuera del segmento y el segundo, en su interior.

Examinemos el signo de razón compleja en los casos indicados:

a) $\lambda > 0$, $\mu > 0$; $w > 0$,

b) $\lambda < 0$, $\mu < 0$; $w > 0$,

c) $\lambda > 0$, $\mu < 0$; $w < 0$,

d) $\lambda < 0$, $\mu > 0$; $w < 0$.

De este modo, la razón compleja es positiva, si ambos puntos divisorios están situados de «un modo igual» con relación al segmento; ella es negativa, si los puntos se ubican de la manera diferente. Análogamente a lo enunciado en el párrafo 10, se puede decir así:

La razón compleja es positiva, cuando los pares no se separan, y es negativa, si un par divide al otro.

Es interesante calcular, cuál es la razón compleja en el caso en que dos puntos coinciden. Nos limitemos a un caso en que el cuarto punto coincide con alguno de los tres otros. Sustituyendo la letra D en la fórmula (13.2) por letras A, B y C (por turno), encotraremos que

$$\left.\begin{aligned}(ABCA) &= \infty,\\ (ABCB) &= 0,\\ (ABCC) &= 1.\end{aligned}\right\} \qquad (13.4)$$

14. INVARIANCIA DE UNA RAZÓN COMPLEJA CON RESPECTO A LA PROYECCIÓN CENTRAL

A diferencia de la proyección paralela, en la proyección central las líneas de proyección no son paralelas, sino pasan por un mismo punto (propio), denominado *centro de proyección* (fig. 10). En la proyección paralela desde una recta a la otra las longitudes de segmentos se alteran, pero queda

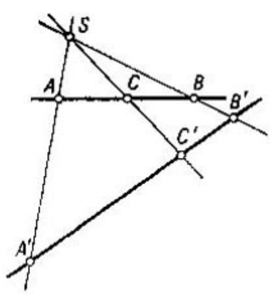


FIG. 34

invariante la razón entre ellos. En la proyección central cambian no sólo las longitudes, sino que también las razones. Por ejemplo, en la figura 34 el punto C es el centro del segmento AB, mientras que el punto C' no es el medio del segmento $A'B'$. Incluso el signo de la razón puede variar. Por ejemplo, $(ABC) > 0$ (véase la fig. 21); siendo proyectado S en la recta a' resulta que $(A'B'C') < 0$. No obstante, *la relación de dos razones es invariante.*

Si cuatro puntos de una recta son proyectados sobre otra recta, la razón compleja entre ellos no varía[1]).

Que el lector no piense que aquí se ha omitido la palabra «central». Este teorema es válido para proycección cualquiera: sea central o paralela. En el caso de una proyección paralela el teorema es trivial: si son invariantes las razones simples separadas, es invariante también la razón entre ellas.

Demostración. Tracemos por dos puntos, B y B', por ejemplo, las rectas, paralelas a alguna de rectas de proyec-

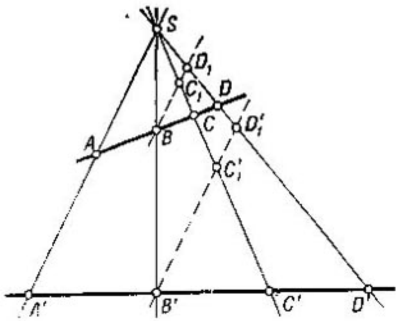


FIG. 35

ción, SA, por ejemplo. Fijemos los puntos de intersección de las primeras rectas con dos rectas restantes de proyección (fig. 35). Tenemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{C_1B}},$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{D_1B}},$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{D_1B}}{\overline{C_1B}}. \qquad \text{(a)}$$

[1]) El verbo alemán «werfen» significa tirar, «der Wurf» es tiro. Esta palabra fue utilizada por el geómetra alemán K. G. H. Staudt (1798—1867) para caracterizar la razón compleja. De razón para ello servía el hecho de que la razón no varía, al «tirar» los cuatro puntos de una recta a la otra. Por esto la razón compleja se designa, con frecuencia, por la letra w. El término «wurf» (en el sentido de razón compleja) puede encontrarse en la literatura científica sobre problemas geométricos.

De un modo análogo resulta:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{D'_1B'}}{\overline{C'_1B'}} . \tag{b}$$

Los segundos miembros de (a) y (b) son equivalentes (en virtud de semejanza de los triángulos SBD_1 y $SB'D'_1$). Por consiguiente, son iguales los primeros miembros:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}} .$$

Tomando en consideración que ambas razones complejas son de un mismo signo, se puede escribir:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} ,$$

o bien,

$$(ABCD) = (A'B'C'D'), \tag{14.1}$$

lo que se trataba de demostrar.

Se puede apreciar esta propiedad desde el otro punto de vista:

Las cuatro rectas a, b, c, d de un haz central cortan cualquier recta, que no pasa por el centro del haz, de un modo tal que la razón compleja siempre queda la misma.

Ya que la razón compleja pertenece a la cuaterna de rectas a, b, c, d, ella no dependo de la recta secante. Esta circunstancia permite introducir una concepción sobre la razón compleja de cuatro rectas del haz central.

Se llama razón compleja de la cuaterna ordenada de rectas de un haz central a la razón compleja de cuatro puntos que se obtienen como resultado de la intersección de estas rectas y una secante cualquiera, a condición de que esta última no pasa por el centro del haz.

La razón compleja de cuatro rectas se designa con el símbolo $(abcd)$.

La razón compleja de cuatro rectas puede expresarse a través de los ángulos, formados por estas rectas, es decir, sin hacer uso de una recta secante. Proponemos que el mismo lector demuestre la siguiente fórmula:

$$(abcd) = \frac{\operatorname{sen}(a, c)}{\operatorname{sen}(c, b)} : \frac{\operatorname{sen}(a, d)}{\operatorname{sen}(d, b)} , \tag{14.2}$$

la que no será utilizada en nuestro folleto.

15. PERMUTACION DE ELEMENTOS EN UNA RAZÓN COMPLEJA

Al estudiar las permutaciones de elementos en una razón simple (párrafo 7), encontrábamos sus valores para cada uno de los seis métodos, por cuyo intermedio se puede ordenar tres elementos. En el caso de cuatro elementos existen 24 métodos y costaría pesado trabajo de encontrar el valor de la razón compleja para cada uno de ellos. Demostraremos aquí cuatro reglas generales, teniendo en cuenta que la cuaterna de puntos $ABCD$ se compone de dos pares: AB y CD.

Regla 1. *Cuando se permutan los pares, la razón compleja no varía.*

Efectivamente, según la fórmula (13.3)

$$(CDAB)=\frac{CA\cdot BD}{AD\cdot CB}.$$

De la fórmula (13.2) se deduce que esto coincide con $(ABCD)$:

$$(CDAB) = (ABCD).$$

Regla 2. *La razón compleja no varía, cuando los elementos dentro de cada par se permutan simultáneamente.*

En virtud de la fórmula (13.3) tenemos:

$$(BADC)=\frac{BD\cdot CA}{DA\cdot BC}=(ABCD).$$

Es evidente que la razón compleja no variará, si realizamos sucesivamente ambas permutaciones, no importa cuál sea el orden en que se hacen estas permutaciones: partiendo de $(ABCD)$ en cada caso llegaremos a $(DCBA)$ (los elementos están escritos en el orden inverso):

$$(DCBA) = (ABCD).$$

Así pues:

$$w = (ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA). \quad (15.1)$$

Las reglas 1 y 2 nos dictan cambiar los papeles asignados a los elementos en el párrafo 12. Ya no disponemos del derecho de distinguir el «origen y fin del segmento», como tampoco «puntos divisorios», puesto que los pares son equivalentes. En adelante, refiriéndonos a una razón compleja $(ABCD)$, diremos que ella está compuesta por *dos pares*, AB y CD, sin asignarles denominaciones diferentes. De acuerdo con la regla 2, estos pares se deben considerar como *no ordenados.* No tiene importancia alguna el orden en que se disponen los elementos de cada par; no obstante *existe una cierta correspondencia entre los elementos de estos pares:* en la razón compleja $(ABCD)$ al elemento A del primer par le corresponde el elemento C del segundo par, mientras que al elemento B corresponde el elemento D. Esto significa que si el orden del primer par es AB, el segundo par debe ser CD. Y viceversa, si el primer par es BA, el segundo par debe ser DC.

Regla 3. *Al permutar los elementos en un solo par, el valor de la razón compleja se cambia por su recíproca.*

En efecto,

$$(BACD) = \frac{BC \cdot DA}{CA \cdot BD} = \frac{1}{w}.$$

Haciendo uso de (15.1), se puede escribir

$$\frac{1}{w} = (BACD) = (CDBA) = (ABDC) = (DCAB).$$

Regla 4. *Cuando se permutan los elementos no correspondientes de los pares distintos, el valor de la razón compleja se reemplaza por su complemento hasta la unidad.*

En la razón compleja $(ABCD)$ permutemos los elementos B y C:

$$(ACBD) = \frac{AB \cdot DC}{BC \cdot AD}.$$

Comparando esta expresión con la (13.2), encontramos en el numerador unos segmentos, que están ausentes en la expresión (13.2). Con el fin de superar esta inconveniencia dividamos el segmento AB por el punto C, y el segmento DC, por B:

$$(ACBD) = \frac{-(AC + CB)(DB + BC)}{CB \cdot AD} =$$
$$= -\frac{AC \cdot DB + AC \cdot BC + CB \cdot DB + CB \cdot BC}{CB \cdot AD}.$$

En el segundo término del numerador permutemos las letras en las designaciones de ambos segmentos, después de lo cual saquemos el elemento CB fuera del paréntesis de los tres últimos términos:

$$(ACBD) = -\frac{AC\cdot DB + CB\,(DB + BC + CA)}{CB\cdot AD} =$$

$$= -\frac{AC\cdot DB + CB\cdot DA}{CB\cdot AD} =$$

$$= -\frac{AC\cdot DB}{CB\cdot AD} + 1 = 1 - w.$$

Los cuatro elementos permiten formar 24 permutaciones. Las cuatro reglas arriba indicadas hacen posible determinar los valores de razones complejas correspondientes sin recurrir a las operaciones adicionales:

$$1 - w = (ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA).$$

Apliquemos la regla 3:

$$\frac{1}{1-w} = (CABD) = (BDCA) = (ACDB) = (DBAC).$$

Apliquemos la regla 4 a $\frac{1}{w}$:

$$\frac{w-1}{w} = (BCAD) = (ADBC) = (CBDA) = (DACB).$$

Apliquemos la regla 3 a las últimas razones complejas:

$$\frac{w}{w-1} = (CBAD) = (ADCB) = (BCDA) = (DABC).$$

Hemos abarcado todas las 24 permutaciones que se pueden formar de cuatro elementos. Sustituyendo designaciones literales con cifras, daremos abajo los resultados obtenidos:

$$\left.\begin{aligned}
w &= (1234) = (3412) = (2143) = (4321),\\
\frac{1}{w} &= (2134) = (3421) = (1243) = (4312),\\
1 - w &= (1324) = (2413) = (3142) = (4231),\\
\frac{1}{1-w} &= (3124) = (2431) = (1342) = (4213),\\
\frac{w-1}{w} &= (2314) = (1423) = (3241) = (4132),\\
\frac{w}{w-1} &= (3214) = (1432) = (2341) = (4123).
\end{aligned}\right\} \qquad (15.2)$$

Fijemos la atención al hecho de que los resultados arriba indicados se diferencian esencialmente de los que se habían obtenido en el párrafo 7 (véase la tabla (7.2)). De los tres puntos de una recta se pueden formar seis permutaciones, y *a todas estas permutaciones, hablando en general, les corresponden diferentes razones simples.* De los cuatro puntos de una recta pueden formarse 24 permutaciones, pero *a éstas, hablando en general, corresponden sólo seis diferentes razones complejas*[1]). El conjunto de las permutaciones se desintegra en seis cuaternas con razones complejas iguales.

16. CUATERNAS ARMÓNICAS

Trataremos de aclarar si pueden cuatro puntos disponerse en una recta de tal modo que a estos puntos corresponderían menos que seis valores de la razón compleja. Para responder a esta pregunta hace falta encontrar los valores de w para los cuales coinciden algunos miembros primeros de las fórmulas (15.2).

Observación 1. Es suficiente igualar uno de los primeros miembros (w, por ejemplo) a todos los restantes (por la misma razón que en el párrafo 7).

Observación 2. Tratamos de hallar una cuaterna de puntos, sin fijar sus papeles que deben desempeñar (es decir, todos los puntos son equivalentes y no es obligatorio que les designemos por letras, cifras o de cualquier otro modo). Una cuaterna de este género se caracteriza no por un solo valor de la razón compleja, sino por seis valores.

Observación 3. Partimos del hecho de que todos los cuatro puntos son distintos, es decir, tratamos de hallar una cuaterna auténtica (no la terna), pues, si dos puntos son coincidentes, la tarea sería trivial, dado que es evidente de antemano que la permutación de puntos coincidentes no conduce a cambios algunos.

Procedamos, ahora, con el cumplimiento del plan trazado.

1) $w = \frac{1}{w}$, $w^2 = 1$, $w = \pm 1$.

---

[1]) Y aún menos en algunos casos de la disposición de los puntos (véase el párrafo 16).

Omitimos el valor $w = 1$, puesto que corresponde a una cuaterna degenerada (véanse las fórmulas (13.4)). Tomemos en consideración el valor de $w_1 = -1$.

2) $w = 1 - w$, $w_2 = \frac{1}{2}$.

3) $w = \frac{1}{1-w}$, $w^2 - w + 1 = 0$. Las raíces son imaginarias.

4) $w = \frac{w-1}{w}$, $w^2 - w + 1 = 0$. Las raíces son imaginarias.

5) $w = \frac{w}{w-1}$. El valor $w = 0$ corresponde a la cuaterna degenerada. Tomemos en cuenta el valor $w_3 = 2$.

Para cada uno de los valores encontrados de w formamos una tabla de seis valores correspondientes:

w	$\frac{1}{w}$	$1-w$	$\frac{1}{1-w}$	$\frac{w-1}{w}$	$\frac{w}{w-1}$
-1	-1	2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	2	-1	-1
2	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{1}{2}$	2

Todas las líneas contienen los mismos números. Quiere decir que los tres valores encontrados de w se deben considerar como una solución, puesto que ellos corresponden a una misma cuaterna de puntos, ordenada de una manera diferente. Una cuaterna de este género se llama *armónica*.

Aclaremos la noción de la cuaterna armónica. A cualquier cuaterna de puntos $ABCD$ de una recta se la puede dividir en dos pares de tres maneras: 1) AB y CD, 2) AC y BD, 3) AD y BC. Independientemente de la disposición de los puntos, una de estas tres variantes nos da pares divididos y las otras dos, no divididos[1]). Dividamos la cuaterna armónica en dos pares divididos. A ello corresponde el valor de $w = -1$. Recordando que $w = \frac{\lambda}{\mu}$, deducimos que $\lambda = -\mu$. Ahora sabemos, por consiguiente, cuál debe ser la expresión de la cuaterna armónica. Tomemos un segmento cualquiera AB y el punto C, dentro de éste, que divide el segmento en una relación λ. Tomemos también un punto D, fuera del segmento, que lo divide *en la misma* razón (en valor absoluto).

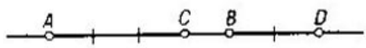


FIG. 36

Ejemplo: El punto C en la figura 36 divide el segmento AB en la razón $\lambda = 3$, el punto D divide el mismo segmento en la razón $\mu = -3$ (para mayor comodidad se usa una escala en el dibujo). Por lo tanto, la cuaterna $ABCD$ en la figura 36 es armónica.

Indiquemos unas cuantas propiedades de cuaternas armónicas cuya demostración puede ser realizada por el mismo lector.

1. Como en cualquier cuaterna, los pares de la cuaterna armónica son equivalentes. Esto significa que los puntos C y D se pueden tomar por los extremos del segmento. Entonces, A y B lo dividirán interiormente y exteriormente en una misma razón (en valor absoluto).
Por ejemplo (véase la fig. 36):

el punto A divide el segmento CD en la razón $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$,

el punto B divide el mismo segmento CD en la razón $\mu_1 = \frac{1}{2}$.

No obstante, la cuaterna armónica se diferencia de otra cualquiera por ausencia de la correspondencia entre los puntos de ambos pares, es decir, no se puede decir que al

[1]) He aquí el equivalente algebraico de esta afirmación: de los seis números w, $\frac{1}{w}$, $\frac{1}{1-w}$, $1-w$, $\frac{w-1}{w}$, $\frac{w}{w-1}$ los cuatro son positivos y los dos, negativos.

punto A corresponde el punto C. Efectivamente, al permutar elementos en un par, la razón compleja $w = -1$ se sustituirá por su recíproca, es decir, no variará.
Por ejemplo (véase la fig. 36):

el punto C divide el segmento BA en la razón $\lambda_3 = \frac{1}{3}$,

el punto D divide el segmento BA en la razón $\mu_3 = -\frac{1}{3}$.

La cuaterna armónica se compone de dos pares divididos. Ninguno de los pares es ordenado. Los pares son equivalentes. Los puntos de un par se denominan armónicamente conjugados con respecto al otro par.

2. Obsérvese: si el punto interior C es muy próximo a A, el punto exterior D es también próximo a A. Si el punto C

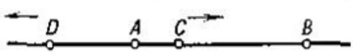


FIG. 37

se desplaza hacia la derecha, el D se desplaza al principio hacia la izquierda (fig. 37). Al ocupar C la posición media, el punto D se hace impropio ($\lambda = 1$, $\mu = -1$). Requiere una atención especial la afirmación: *con el centro del segmento está armónicamente conjugado un punto impropio.*

Cuando el punto C se encuentre a la derecha del centro por la parte derecha aparecerá D y empezará a moverse hacia C. Los puntos C y D se aproximarán a B desde direcciones opuestas.

Señalemos las cuaternas armónicas de rectas. Para obtener una cuaterna armónica de rectas hace falta proyectar una cuaterna armónica de puntos desde algún punto S. Tomemos un triángulo ABS (fig. 38) y en su base AB indiquemos una cuaterna armónica: 1) los vértices A y B, 2) el centro C y un punto impropio D. Proyectando esta cuaterna desde el vértice S, llegamos a la deducción de que *en cada vértice de un triángulo existe la siguiente cuaterna armónica*: 1) *dos lados del triángulo*, 2) *la mediana y una recta paralela a la base.*

Esta deducción nos permite dibujar con facilidad una cuaterna armónica de rectas. Haciendo cortarla por distintas rectas, se puede obtener una diversidad de cuaternas armónicas de puntos: véase, por ejemplo, la cuaterna $A'B'C'D'$ en la figura 38.

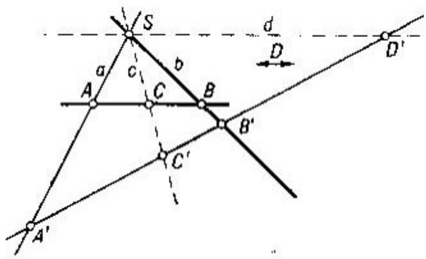


FIG. 38

Indiquemos un método más, bastante simple, para la obtención de las cuaternas armónicas de rectas:

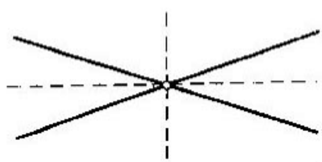


FIG. 39

Dos rectas, que se intersecan, y las bisectrices de éstas forman una cuaterna armónica (fig. 39).

17. CONSTRUCCIÓN DEL CUARTO PUNTO SEGÚN LA RAZÓN COMPLEJA

En el párrafo 4 se ha resuelto el problema: dados dos puntos (A y B) y una razón simple $\lambda = (ABC)$, encontrar el tercer punto C. Es natural plantear el problema análogo para una razón compleja: *dados tres puntos de la cuaterna*

ABCD en una recta y la razón compleja $w = (ABCD)$, *encontrar un punto cuarto.*

Resolvamos, al principio, un problema auxiliar. *Sean dadas tres rectas* a, b, c *del haz central y tres puntos* A_0, B_0,

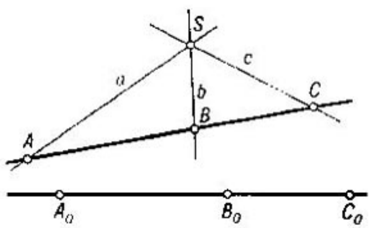


FIG. 40

C_0 de una recta (fig. 40). *Trazar una recta, la cual se corta por* a, b, c *de un modo tal que se obtiene la terna de puntos* A, B, C, *congruente a* A_0, B_0, C_0.

La construcción será más cómoda, si la empezamos con los puntos A_0, B_0, C_0, haciendo de ellos vértices de los

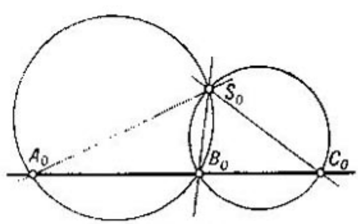
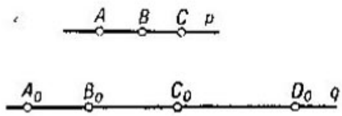


FIG. 41

ángulos, formados por las rectas a, b, c. El punto S_0 debe disponerse en el arco $A_0S_0B_0$ que contiene el ángulo (a, b) (fig. 41). Existen dos tales arcos; para simplificar examinemos uno de ellos. Simultáneamente, el punto S_0 se debe hallar en el arco $B_0S_0C_0$, que contiene el ángulo (b, c) (tomemos este arco del mismo lado respecto a A_0B_0 al igual que el arco $A_0S_0B_0$). S_0 se determinará como el segundo (además de B_0) punto en el que se intersecan dos circunferencias. El caso de la tangencia de dos circunferencias no puede tener lugar, puesto que la condición de tangencia es $(a, b) + (b, c) = 180°$. Ahora conviene volver a la figura 40 y marcar en las rectas a, b, c los segmentos $SA = S_0A_0$, $SB = S_0B_0$, $SC = S_0C_0$, partiendo siempre del punto S. Con esto, la disposición de los segmentos debe ser igual



FIF. 42

que en la figura 41. La recta ABC es la que buscamos. Existen dos soluciones: la segunda recta es simétrica a ABC con respecto al punto S.

Si uno de los puntos, C, por ejemplo, es impropio, la solución del problema se hace más simple: es suficiente cortar la terna a, b, c por cualquier recta paralela a c, y después cambiar semejantemente el dibujo.

Procedamos, ahora, con la solución del problema fundamental. En la recta p se han dado tres puntos: A, B, C (fig. 42), y en la recta q, cuatro puntos A_0, B_0, C_0, D_0. Esta cuaterna es precisamente la expresión gráfica de la razón compleja $w = (A_0B_0C_0D_0)$. Es necesario hallar el punto D que, junto con la terna ABC, forma igual razón compleja.

Solución. Proyectemos los puntos dados A, B, C desde un punto arbitrario S. A la terna obtenida de rectas $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$, la hagamos cortar por una recta de un modo que se forme la terna de puntos $A_0'B_0'C_0'$ (fig. 43), congruente a $A_0B_0C_0$. Construyamos el punto D_0' (la cuaterna $A_0'B_0'C_0'D_0'$ es congruente a $A_0B_0C_0D_0$). Unamos los puntos D_0' y S. El punto, donde se intersecan $D_0'S$ y p, es el punto buscado. La unicidad de la solución es indudable.

Examinemos, ahora, un caso particular y más interesante, el de la cuaterna armónica. Dada una terna de puntos en una recta, se requiere complementarla hasta la cuaterna armónica. No es necesario ordenar la terna dada, basta indicar, cuáles dos puntos de los tres componen un par. Sean dados tres puntos ABC, de los cuales A y B forman un par, mientras que C es un punto perteneciente al otro

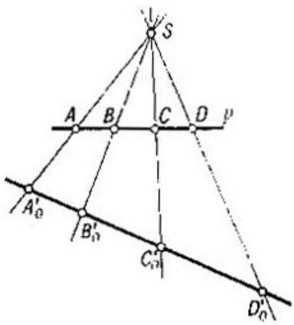


FIG. 43

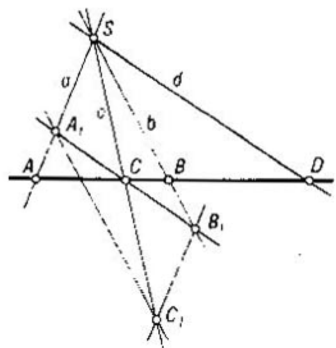


FIG. 44

par. Se requiere encontrar el punto D de la condición $(ABCD) = -1$. Este problema puede enunciarse en la forma más breve:

Encontrar el punto D, armónicamente conjugado con C respecto a A y B.

El problema puede ser resuelto mediante el método expuesto arriba. Hay también otros métodos, más simples. Señalemos dos métodos, basados sobre las propiedades de haces armónicos (figs. 38 y 39).

1. Desde un punto arbitrario S proyectamos los tres puntos dados ABC (fig. 44). Ahora, debemos trazar por el punto C una recta de tal modo que su segmento dentro del ángulo ASB se divida por mitad en el punto C. Con este fin medimos $CC_1 = SC$ y trazamos $C_1A_1 \parallel BS$ y $C_1B_1 \parallel AS$. La figura $SA_1C_1B_1$ es un paralelogramo. Sus diagonales se dividen por mitad en el punto de intersección. Por lo tanto, SC es una mediana del triángulo A_1B_1S. Basta, ahora, trazar por S una recta, paralela a A_1B_1. Esta recta, al cortar AB, nos da el punto buscado D.

2. Por los puntos A y B tracemos una circunferencia (fig. 45). Hallemos el centro C_1 del arco AB. (cualquiera). Tracemos la recta C_1C y hallemos el punto S, donde se intersecan C_1C y la circunferencia. Es evidente que $c \equiv SC$ es una bisectriz del ángulo (a, b). Basta trazar una bisectriz d del otro ángulo (contiguo), que, al cortar AB, nos da el punto buscado D.

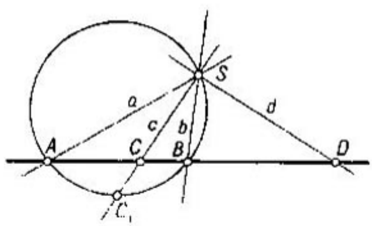


FIG. 45

Los dos métodos que acabamos de demostrar son bastante artesanos y requieren investigaciones minuciosas de los posibles casos particulares. No nos ocupemos de esto, y en cambio, indiquemos un procedimiento mucho mejor. Para el procedimiento, que estamos por considerar, no importa la disposición de elementos, ni la presencia de un punto impropio entre los puntos dados. Además, el procedimiento indicado se lleva a cabo sólo con ayuda de una regla.

18. TEOREMA SOBRE UN CUADRIVERTICE COMPLETO

Se llama cuadrivértice completo a una figura *plana*, formada por los elementos siguientes: 1) cuatro puntos de disposición común, lo que significa que ningunos tres de ellos pertenecen a una misma recta, 2) seis rectas que unen estos puntos por pares[1]). Los cuatro puntos se denominan

[1]) Se denomina cuadrivértice simple a una cuaterna *ordenada* de puntos y *cuatro* rectas que unen *sucesivamente* estos puntos, es decir, 1 con 2, 2 con 3, 3 con 4 y 4 con 1.

vértices del cuadrivértice, y seis rectas representan sus *lados*.

La denominación «cuadrivértice» está introducida con el fin de evitar la palabra «cuadrilátero» que puede conducir a las asociaciones habituales. Mientras tanto, el cuadrivértice no es una parte del plano y está privada del interior.

El cuadrivértice completo está representado en la figura 46. Sus vértices están indicados con círculos y designados

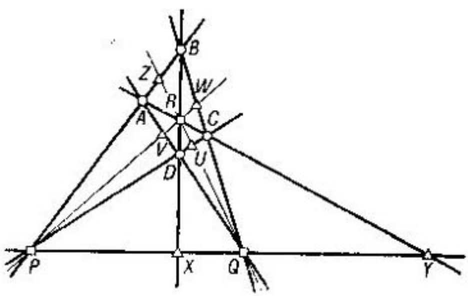


FIG. 46

por las letras A, B, C, D sin que ello signifique que los vértices sean ordenados. Los vértices del cuadrivértice completo son todos equivalentes, no hay vértices «vecinos», ni tampoco «opuestos».

Los lados del cuadrivértice se intersecan en los vértices y en tres puntos más. Estos últimos se llaman *puntos diagonales*. En la figura 46 están marcados por cuadrados y designados con P, Q, R.

Examinemos una recta que une dos puntos diagonales, por ejemplo, P y Q. En estos puntos se intersecan dos pares de lados del cuadrivértice. Los dos lados restantes del cuadrivértice cortan a la recta PQ (o QR, o bien RP) en dos puntos. Todos estos puntos están señalados en la figura 46 por triángulos. Resulta que dos «cuadrados» y dos «triángulos» hacen una cuaterna armónica.

Teorema sobre el cuadrivértice completo. *Cualquier par de puntos diagonales de un cuadrivértice completo se* *divide armónicamente por los puntos de intersección de su recta con dos lados restantes del cuadrivértice.*

Demostración. Obtengamos la proyección de la cuaterna $PQXY$ en la recta BD, desde el punto A. Los puntos P, Q, X, Y se transformarán en B, D, X, R, respectivamente. En la proyección central una razón compleja no varía:

$$w = (PQXY) = (BDXR). \tag{a}$$

Si proyectamos la cuaterna $(BDXR)$, desde el punto C, en la recta PQ, obtendremos la cuaterna $QPXY$:

$$(BDXR) = (QPXY). \tag{b}$$

De (a) y (b) se deduce que

$$w = (PQXY) = (QPXY). \tag{18.1}$$

Si $(PQXY) = w$, entonces $(QPXY) = \frac{1}{w}$ (véase (15.2)). Por consiguiente, $w = \frac{1}{w}$, de donde $w = \pm 1$. Pero, w no puede ser igual a la unidad, puesto que todos los puntos P, Q, X, Y son diferentes. Por ello, $w = (PQXY) = -1$, es decir, $PQXY$ es la cuaterna armónica, lo que se trataba de demostrar.

Este razonamiento es aplicable también a las cuaternas análogas $QRZU$ y $RPVW$. Además, se ha revelado en el proceso de razonamiento que la cuaterna $BDRX$ es armónica. Las cuaternas $ABPZ$, $ACRY$, $ADQV$, $BCQW$ y $CDPU$ son también armónicas.

La demostración quedará la misma, si algunos puntos resultan impropios.

El teorema demostrado permite encontrar la cuarta armónica construyendo un cuadrivértice completo sobre la terna dada. Los pasos consecutivos de la construcción se muestran en la figura 47:

1) Se trazan dos rectas por un «cuadrado». 2) Se traza una recta por el «triángulo». Los puntos, donde se intersecan estas tres líneas, determinan la posición de dos vértices del cuadrivértice («círculos»). 3) Los «círculos» se unen con el segundo «cuadrado», definiéndose dos «círculos» más. 4) Se traza el último lado (se unen los últimos dos «círculos») el que, recorta en la recta dada el segundo «triángulo».

Ejercicio. Haciendo uso del teorema sobre el cuadrivértice completo, demostrar que la recta que une el punto de intersección de los lados laterales del trapecio y el de inter-

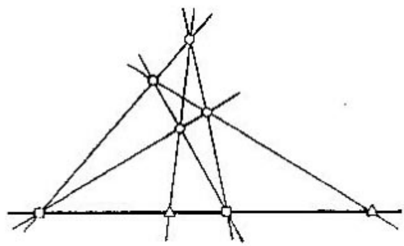


FIG. 47

sección de diagonales, divide los lados paralelos del trapecio por mitad. Comparar con la demostración elemental.

19. PROPIEDAD DE GRUPO DE UNA RAZON COMPLEJA

En virtud de las mismas razones que se han expuesto en el párrafo 8, las expresiones en los primeros miembros de las fórmulas (15.2) poseen una propiedad de grupo: al sustituir w en una de ellas por otra cualquiera, obtendremos otra vez una de estas expresiones.

Introduzcamos las siguientes designaciones:

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = w, & a_2 = \dfrac{1}{w}, & a_3 = 1 - w, \\ a_4 = \dfrac{1}{1-w}, & a_5 = \dfrac{w-1}{w}, & a_6 = \dfrac{w}{w-1} \end{array}\right\} \qquad (19.1)$$

Definamos la «multiplicación» (como en el § 8) así: «multiplicar» a_i por a_j *significa sustituir w por a_j en la expresión para a_i*. Por ejemplo:

$$a_3 \odot a_4 = 1 - \frac{1}{1-w} = \frac{w}{w-1} = a_6.$$

Realizando estos cálculos para cualesquiera pares obtendremos una tabla de «multiplicación» («cuadrado de Cayley).

Dejemos al lector componerla a su propia cuenta. Es probable que quede sorprendido al ver que esta tabla no se diferencia de (8.4).

Desde el punto de vista geométrico, los grupos (8.1) y (19.1) son distintos. El primero está compuesto por razones simples, el segundo, por razones complejas. No obstante, si nos abstraemos del sentido concreto de elementos y los consideramos sólo en relaciones mutuas durante «multiplicación», veremos que la diferencia no existe. Es lo mismo que en la aritmética abstracta no existe diferencia entre las igualdades: «2 manzanas + 3 manzanas = 5 manzanas» y «2 lápices + 3 lápices = 5 lápices», aunque una manzana no tiene nada que ver con un lápiz. La aritmética enseña que $2 + 3 = 5$, abstrayéndose de la naturaleza concreta de objetos sumados. Del mismo modo un especialista en la teoría de grupos considera que un grupo de razones simples y uno de razones complejas no son más que un mismo grupo. Este grupo tiene, además, otras realizaciones concretas (por ejemplo, grupo de sustituciones entre tres elementos; véanse los libros de P. Alexandrov e I. Grossman y V. Magnus, mencionados en la página 26).

PROBLEMAS

Así hemos terminado el tema. Un lector, que ha revelado interés por el tema, debe resolver unos cuantos problemas. Algunos de ellos son mucho más difíciles que el material arriba expuesto.

1. Dado el segmento AB. Encontrar en la recta AB un par de puntos CD, que la divide armónicamente, siendo: a) $\overline{CD} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, b) $\overline{CD} = k\cdot\overline{AB}$ $(k > 0)$ ($\overline{AB}$ es longitud del segmento AB).

Problemas de la «división». ¿Qué significa «dividir b por a»? Esto significa resolver la ecuación $ax = b$. En el grupo (8.4) la «multiplicación» no es conmutativa; por ello es natural definir dos «divisiones» diferentes, a saber: «dividir b por a de izquierda» significa resolver la ecuación $a \odot x = b$; «dividir b por a de derecha» significa resolver la ecuación $y \odot a = b$ (aquí, a, b como también x e y designan los elementos de un grupo; a y b están dados, x e y son incógnitas).

2. «Dividir de izquierda» a_5 por a_3.

3. «Dividir de derecha» a_5 por a_3.

4. Comprobar que la «división» (no importa de que dirección) de a_i por a_j es siempre (esto es, cualesquiera que sean los elementos a_i y a_j) posible y unívoca.

El elemento a_i del grupo se denomina *cíclico*, si existe un número natural m tal que $a_i^m = a_1$ (la potencia se define como «producto» de m factores $a_i \odot a_i \odot \ldots \odot a_i$, a_1 es un elemento unitario). El número m se llama *orden* del elemento cíclico a_i, a condición de que $a_i^n \neq a_1$, siendo $n = 1, 2, \ldots, m - 1$ (es decir, m es un exponente *mínimo* con el cual $a_i^m = a_1$).

5. Demostrar que todos los elementos del grupo (8.4) son cíclicos y hallar su orden.

6. Hallar a) $a_2^3 \odot a_4^2 \odot a_5$; b) $a_3^{26} \odot a_6^3$.

7. La relación entre los teoremas de Ceva y Menelao.

En cada lado del triángulo ABC (el lado es una recta infinita) se han eligido dos puntos que dividen armónicamente los vértices del triángulo: L y L', en el lado BC, M y M', en el lado CA, N y N', en el lado AB.

Demostrar:

a) Los puntos L', M', N' se disponen en una misma recta u a condición de que las rectas AL, BM y CN pasen por un mismo punto U (la recta u se llama *polar armónica* del punto U respecto al triángulo ABC).

b) Inversamente: si los puntos L', M' y N' se disponen en una misma recta u, entonces las rectas AL, BM y CN pasan por un mismo punto U, llamado *polo armónico* de la recta u respecto al triángulo ABC).

En los problemas 8—10 se examina un triángulo ABC, en cuyos lados están dispuestos puntos L, M y N. Con ello las rectas AL, BM y CN no pasan obligatoriamente por un mismo punto. En este caso ellas forman el triángulo $A'B'C'$ (fig. 48). Los vértices del triángulo $A'B'C'$ se proyectan en los lados opuestos por pares de puntos LL',

MM' y NN'. Las razones simples en las cuales los puntos L, M y N dividen los lados del triángulo ABC se designan, como antes, por λ, μ y ν, y las razones analógicas para los puntos L', M', N', se designan con λ', μ', ν'.

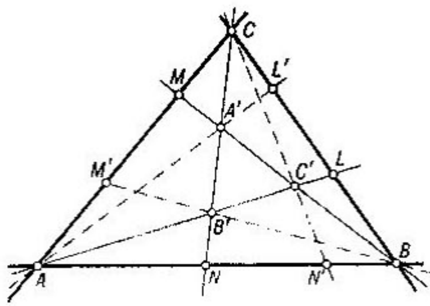


FIG. 48

8. Demostrar (teorema de N. A. Izvolski, 1929) que $(BCLL') = (CAMM') = (ABNN') = \lambda\mu\nu$. Deducir de la demostración el teorema de Ceva.

9. Demostrar (teorema de Rouse, 1896) que la relación entre las áreas de los triángulos $A'B'C'$ y ABC tiene la siguiente expresión:

$$\frac{S'}{S} = \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)}.$$

Deducir de aquí el teorema de Ceva.

10. Demostrar que la relación entre las áreas de los triángulos LMN y ABC tiene la siguiente expresión:

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}.$$

Obtener de esta expresión el teorema de Menelao.

11. Demostrar el siguiente teorema que puede denominarse teorema de Ceva en el espacio tridimensional.

Sea dado el tetraedro arbitrario $A_0A_1A_2A_3$. Se ha elegido en cada arista A_iA_j (se supone que la arista es una recta infinita) *un punto adicional* A_{ij} que no coincide con A_i, ni con A_j. Si las rectas A_iA_{jk}, A_jA_{ik} y A_kA_{ij} en el triángulo $A_iA_jA_k$ pasan por un mismo punto, suele decirse en este caso que en el triángulo tiene lugar el *fenómeno de Ceva*, el propio punto se llama *punto de Ceva* y se lo designa A_{ijk}.

Teorema. Si en tres aristas de tetraedro $A_0A_1A_2A_3$ tiene lugar el fenómeno de Ceva, entonces:

1) el mismo fenómeno tiene lugar también en la cuarta arista;

2) siete rectas, A_0A_{123}, A_1A_{023}, A_2A_{013}, A_3A_{012}, $A_{01}A_{23}$, $A_{02}A_{13}$ y $A_{03}A_{12}$ pasan por un mismo punto, llamado *punto de Ceva* del tetraedro y designado por A_{0123}.

RESPUESTAS Y SOLUCIONES

1. Hacer uso de la segunda fórmula (4.1). El problema tiene dos soluciones: a) $\lambda_C = -\lambda_D = 3$ ó $\lambda_C = -\lambda_D = \frac{1}{3}$; b) $\lambda_C = -\lambda_D = \frac{\sqrt{1+k^2}+1}{k}$, o sea $\lambda_C = -\lambda_D = \frac{\sqrt{1+k^2}-1}{k}$.

2. a_2.

3. a_6.

4. La posibilidad de «dividir de izquierda» se deduce de lo que cada fila de la tabla (8.4) contiene todos los elementos del grupo; el carácter unívoco se deduce de que cada elemento aparece una sola vez. La posibilidad y lo unívoco de la «división de derecha» se infieren de las propiedades análogas de las columnas.

5. El elemento a_1 es de primer orden; los a_2, a_3, a_6, de segundo orden: a_4 y a_5, de tercer orden.

6. Resolviendo este problema hace falta utilizar el resultado del problema anterior. Por ejemplo, conociendo a_3 como elemento cíclico de segundo orden, se puede descartar los dos en el exponente de la expresión a_3^{25}: $a_3^{25} = a_3^1 = a_3$. a) a_3; b) a_4.

7. Si AL, BM y CN pasan por un mismo punto, entonces $\lambda\mu\nu = 1$. Pero $\lambda' = -\lambda$, $\mu' = -\mu$, $\nu' = -\nu$. Si $\lambda\mu\nu = 1$, entonces $\lambda'\mu'\nu' = -1$, y, por consiguiente, los puntos L', M' y N' se disponen en una misma recta. De modo análogo se demuestra el teorema recíproco.

8. Desde el punto A proyectamos la cuaterna de puntos $BCLL'$ en la recta CN; luego, proyectamos la cuaterna obtenida desde B en CA. Estas dos cuaternas tienen iguales razones complejas: $(BCLL') = (NCB'A') = (ACM'M)$. En la última razón compleja permutemos los elementos de cada par (la segunda regla del § 15):

$$(BCLL') = (CAMM').$$

De modo similar se demuestra que la tercera razón compleja es igual a cada una de las dos primeras:

$$(BCLL') = (CAMM') = (ABNN').$$

Observemos, ahora, que las rectas AL', BM y CN pasan por el punto A'. Esto significa que según el teorema de Ceva tenemos:

$$\frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1,$$

o sea,

$$\lambda'\mu\nu = 1; \quad \lambda' = \frac{1}{\mu\nu}.$$

Calculemos la razón compjela $(BCLL')$:

$$(BCLL') = \frac{BL}{LC} : \frac{BL'}{L'C} = \lambda : \lambda' = \lambda : \frac{1}{\mu\nu} = \lambda\mu\nu.$$

Si las rectas AL, BM y CN pasan por un mismo punto, entonces L' y L coinciden, por lo cual $\lambda\mu\nu = (BCLL') = (BCLL) = 1$ (fórmulas 13.4).

9. El teorema se demuestra con facilidad por método analítico. Recomendamos postergar su demostración a los lectores que no están familiarizados con la geometría analítica.

Tomemos los rayos AB y AC por ejes de coordenadas (¡del sistema de ángulos oblicuos!), y los segmentos AB y AC por unidades de escala (¡¡desiguales!!). Los puntos que nos interesan tendrán las coordenadas siguientes: $A\,(0,\ 0)$, $B\,(1,\ 0)$, $C\,(0,\ 1)$, $L\left(\frac{1}{1+\lambda},\ \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, $M\left(0,\ \frac{1}{1+\mu}\right)$, $N\left(\frac{\nu}{1+\nu},\ 0\right)$. Tenemos ecuaciones:

$$AL\colon \lambda x - y = 0,$$

$$BM\colon x + (1+\mu)\, y = 1,$$

$$CN\colon (1+\nu)\, x + \nu y = \nu.$$

Resolviendo estas ecuaciones por parejas, hallamos

$$A'\left(\frac{\mu\nu}{1+\mu+\mu\nu},\ \frac{1}{1+\mu+\mu\nu}\right),\quad B'\left(\frac{\nu}{1+\nu+\nu\lambda},\ \frac{\nu\lambda}{1+\nu+\nu\lambda}\right),$$

$$C'\left(\frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu},\ \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}\right).$$

La relación entre las áreas de triángulos es expresada mediante determinantes de tercer orden

$$S' : S = \begin{vmatrix} x_{A'} & y_{A'} & 1 \\ x_{B'} & y_{B'} & 1 \\ x_{C'} & y_{C'} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\mu\nu}{1+\mu+\mu\nu} & \frac{1}{1+\mu+\mu\nu} & 1 \\ \frac{\nu}{1+\nu+\nu\lambda} & \frac{\nu\lambda}{1+\nu+\nu\lambda} & 1 \\ \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu} & \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \mu\nu & 1 & 1+\mu+\mu\nu \\ \nu & \nu\lambda & 1+\nu+\nu\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda+\lambda\mu \end{vmatrix}.$$

De la tercera columna del determinante restamos la suma de dos primeras:

$$S':S=\frac{1}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)}\begin{vmatrix}\mu\nu & 1 & \mu\\ \nu & \nu\lambda & 1\\ 1 & \lambda & \lambda\mu\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)}.$$

Si las rectas AL, BM y CN pasan por un mismo punto, entonces $S'=0$ y, por consiguiente, $\lambda\mu\nu=1$.

Al lector que conoce sólo el sistema de coordenadas cartesianas (rectangular, con escalas iguales por ejes) le recomendamos asignar a los puntos primitivos las coordenadas A (0, 0), B (a, 0), C (b, c) y después, hacer las mismas operaciones que acabamos de realizar. Se obtendrá el mismo resultado, aunque el trabajo será mucho más laborioso, con lo que subrayamos la importancia de elección del procedimiento adecuado.

10. Después de resolver el problema anterior no tenemos mucho que hacer. Las coordenadas de los puntos L, M y N ya están halladas; las relaciones de áreas se calculan de un modo igual que en el problema anterior. Si los puntos L, M y N se disponen en una misma recta, entonces $S_0=0$, y, por consiguiente, $\lambda\mu\nu=-1$.

11. En lugar de las designaciones λ, μ, ν introduzcamos $\lambda_{ij}=$ $=\frac{A_iA_{ij}}{A_{ij}A_j}$. Es evidente que $\lambda_{ij}\cdot\lambda_{ji}=1$ (a). Supongamos que el fenómeno de Ceva tiene lugar en aristas que pasan por el vértice A_0. En este caso

$$\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{20}=1,\quad \lambda_{02}\lambda_{23}\lambda_{30}=1,\quad \lambda_{03}\lambda_{31}\lambda_{10}=1.$$

Multiplicando estas igualdades y tomando en cuenta (a), obtendremos: $\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31}=1$, es decir, el fenómeno de Ceva tiene lugar también en la arista $A_1A_2A_3$.

Para comprobar la segunda parte del teorema construyamos dos ternas de planos

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1^0&\equiv A_0A_1A_{23},\\ \alpha_2^0&\equiv A_0A_2A_{13},\\ \alpha_3^0&\equiv A_0A_3A_{12},\end{aligned}\right\}\ \text{(b)}\qquad \left.\begin{aligned}\alpha_0^1&\equiv A_1A_0A_{23},\\ \alpha_2^1&\equiv A_1A_2A_{03},\\ \alpha_3^1&\equiv A_1A_3A_{02}.\end{aligned}\right\}\ \text{(c)}$$

Todos los planos (b) contienen el punto A_{123}, mientras que los planos (c) contienen el punto A_{023}. Esto significa que los planos (b) pasan por la recta A_0A_{123}; los (c), por la recta A_1A_{023}; α_1^0 y α_0' es un mismo plano. Así pues, las rectas A_0A_{123} y A_1A_{023} están en un mismo plano y, por lo tanto, se intersecan (quizás, en un punto impropio). De modo idéntico se demuestra la intersección de dos rectas cualesquiera que unen los vértices de un tetraedro con los puntos de Ceva de aristas opuestas. De este modo, las rectas A_0A_{123}, A_1A_{023}, A_2A_{013} y A_3A_{012} se intersecan *por pares*, lo que puede suceder sólo en dos ocasiones: 1) todas las cuatro rectas tienen un punto común, 2) todas las cuatro rectas están en un plano. El segundo caso se excluye, dado que en estas rectas se hallan todos los vértices del tetraedro, es decir, el segundo caso significaría que los últimos se dispongan en un mismo plano. Queda válido, por consiguiente, el primer caso, lo que se trataba de demostrar. Designemos por A_{0123} el punto de intersección de cuatro rectas.

Ahora, debemos demostrar que las rectas, que unen los puntos adicionales de las aristas opuestas, pasan también por el punto A_{0123}. Estas tres rectas pertenecen a los planos (b) y, por consiguiente, se cortan con la recta A_0A_{123}. Ellas también pertenecen a los planos (c) y por eso intersecan la recta A_1A_{023}. Las últimas rectas tienen un solo punto común. Quiere decir, las rectas $A_{01}A_{23}$, $A_{02}A_{13}$ y $A_{03}A_{12}$ pasan por este punto, o bien se disponen en el plano de rectas A_0A_{123} y A_1A_{023}. La segunda posibilidad se rechaza, pues los puntos A_{23}, A_{13} y A_{12} se hallan en la arista $A_1A_2A_3$, mientras que los puntos A_{01}, A_{02} y A_{03} no pueden disponerse en esta arista. Por consiguiente, las rectas $A_{01}A_{23}$, $A_{02}A_{13}$ y $A_{03}A_{12}$ pasan por el punto A_{0123}, lo que se trataba de demostrar.

A NUESTROS LECTORES

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Lecciones populares de matemáticas