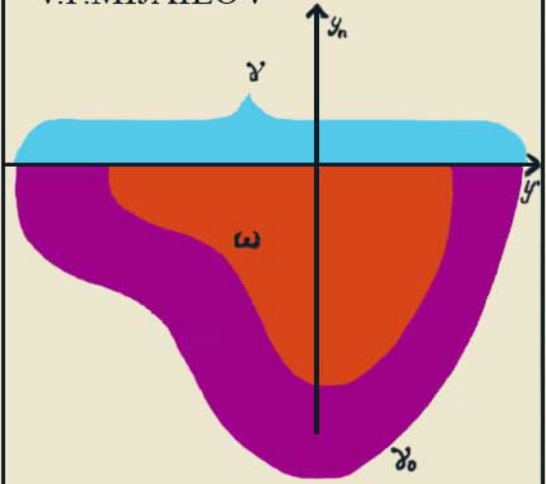
ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

V.P.MIJÁILOV



EDITORIAL · MIR · MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

В. П. МИХАЙЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

V. P. MIJAILOV

VERSION AL ESPAÑOL
POR K. P. MEDKOV

EDITORIAL · MIR · MOSCU

Franco Renato Campana Valderrama
U.P.R.P.

Impreso en la URSS. 1978

На испанском языке

INDICE

PREFACIO

La presente obra es una exposición ampliada del curso de conferencias dictadas por el autor durante varios años ante los estudiantes del Instituto físico-técnico de Moscú. Está destinada para los estudiantes que dominan las bases del Análisis matemático, Algebra y Teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias dentro de los límites del programa universitario. Toda la información indispensable está contenida, por ejemplo, en los libros siguientes: «Curso del Análisis matemático», vols. 1, 2, por *S. M. Nikólski*, «Fundamentos de Algebra lineal» por *A. I. Máltsev*, «Ecuaciones diferenciales corrientes» por *L. S. Pontryáguin*.

La disposición del material en el libro se arregla a los tipos principales de ecuaciones, a excepción del capítulo I en el que se consideran problemas generales de las ecuaciones en derivadas parciales. El papel central en el libro lo desempeña el capítulo IV, que es el más voluminoso, en el cual se estudian ecuaciones elípticas. En los capítulos V y VI se examinan ecuaciones hiperbólicas y parabólicas.

El método que emplea el autor para estudiar los problemas de contorno (y, en parte, el problema de Cauchy) se apoya en el concepto de la solución generalizada lo que permite abordar las ecuaciones con coeficientes variables de una manera tan sencilla como al operar con las ecuaciones más simples, a saber, las ecuaciones de Poisson, de onda y de conducción de calor. Analizando las cuestiones de existencia y unicidad de soluciones de los principales problemas de contorno, el autor dedica gran atención a los métodos aproximados para la resolución de los problemas citados: al método de Ritz en el caso de la ecuación elíptica y al de Galérkin, en el caso de ecuaciones hiperbólicas y parabólicas.

Los conocimientos necesarios sobre los espacios funcionales, en particular, el teorema de inmersión de S. L. Sóbolev, se dan en el capítulo III. No se suponía familiarizar al lector con los apartados correspondientes de la Teoría de funciones y del Análisis funcional; a estos problemas está dedicado el capítulo II de carácter auxiliar.

En cada capítulo, salvo en el II, se ofrecen problemas. Buena parte de éstos tiene por objeto profundizar y ampliar el contenido expuesto en el correspondiente capítulo; con el mismo fin se dan las listas de literatura adicional. Para los ejercicios se recomiendan:

«Problemas de las ecuaciones de física matemática» por V. S. Vladímirov, «Problemas de la física matemática» por B. M. Budak, A. A. Samarski, A. N. Tíjonov y «Problemas y ejercicios de la física matemática» por M. M. Smirnov.

En conclusión, el autor expresa su más profunda gratitud a V. S. Vladímirov que ha revelado enorme interés hacia este libro, y también a T. I. Zelenjak, I. A. Kiprijánov, S. L. Sóbolev que estudiaron el manuscrito y hicieron una serie de observaciones valiosas. Un agradecimiento especial el autor expresa a sus camaradas A. K. Guschin y L. A. Muravéji cuya cooperación fructífera contribuyó muchísimo a reforzar el carácter práctico de este libro.

Julio de 1975

V. Mijáilov

CAPITULO I. INTRODUCCION. CLASIFICACION DE ECUACIONES. PLANTEAMIENTO DE ALGUNOS PROBLEMAS

Introducción

Llamamos ecuaciones diferenciales aquellas cuyas incógnitas son funciones de una o varias variables, con la particularidad de que en dichas ecuaciones figuran no sólo las propias funciones sino también sus derivadas. Si las incógnitas son funciones de muchas variables (al menos dos), las ecuaciones se denominan *ecuaciones en derivadas parciales.* En lo sucesivo trataremos precisamente de ecuaciones de este tipo y vamos a considerar sólo una ecuación en derivadas parciales con una función incógnita.

Una ecuación en derivadas parciales de una función incógnita u de n variables $x_1, \ldots, x_n$ se denomina ecuación de *N-ésimo orden*, si contiene siquiera una derivada de orden N y no contiene derivadas de orden superior a N, es decir, la ecuación:

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N}\right) = 0 \tag{1}$$

La ecuación (1) se llama *lineal*, si Φ, siendo función de las variables $u, \frac{\partial u}{x_1}, \ldots, \frac{\partial^N u}{\partial x_n^N}$, es lineal. En lo sucesivo consideraremos una ecuación lineal de segundo orden, esto es, una ecuación de tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = f(x); \tag{2}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Las funciones $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $a(x)$ se denominan *coeficientes* de la ecuación (2), y la función $f(x)$, *término independiente*.

Designemos con R_n un espacio euclídeo n-dimensional y supongamos que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto de R_n, $|x| = (x_1^2 + \ldots \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Como siempre, por dominio en R_n o dominio n-dimensional entendemos un conjunto abierto y conexo (no vacío) de puntos pertenecientes a R_n. En lo sucesivo aceptaremos que dichos dominios son acotados, siempre que no se especifique lo contrario.

Sea Q un dominio n-dimensional. Un conjunto $E \subset Q$ se denomina *estrictamente interior* respecto de Q, $E \Subset Q$, si $\bar{E} \subset Q$, donde $\bar{E}$ es una adherencia*) (en el sentido de la distancia en R_n) del conjunto E.

Designemos con $C^k(Q)$ el conjunto de todas las funciones que tienen en Q derivadas parciales continuas de un orden hasta k inclusive (k es cierto número entero no negativo) y con $C^k(\bar{Q})$, el subconjunto de este conjunto compuesto por todas las funciones cuyas derivadas parciales hasta el k-ésimo orden son todas continuas en $\bar{Q}$. Para los conjuntos $C^0(Q)$ y $C^0(\bar{Q})$ de funciones continuas en Q y, conformemente, en $\bar{Q}$ emplearemos también las designaciones $C(Q)$ y $C(\bar{Q})$. El conjunto de todas las funciones que pertenecen a todos los $C^k(Q)$, $k = 0, 1, \ldots$, lo designamos por $C^\infty(Q)$, es decir, $C^\infty(Q) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(Q)$. El conjunto de todas las funciones pertenecientes a todos los $C^k(\bar{Q})$, $k = 0, 1, \ldots$, lo designamos por $C^\infty(\bar{Q})$, es decir, $C^\infty(\bar{Q}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\bar{Q})$.

La función $f(x)$ se llama *terminal* en Q, si existe un subdominio $Q' \Subset Q$ tal que $f(x) = 0$ en $Q \setminus Q'$. Designemos con $\dot{C}^k(\bar{Q})$ el conjunto de todas las funciones terminales de $C^k(Q)$ y con $\dot{C}^\infty(\bar{Q})$, la intersección $\bigcap_{k=0}^{\infty} \dot{C}^k(\bar{Q})$ de todos estos conjuntos.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un vector de coordenadas enteras no negativas, y designemos por $|\alpha|$ la suma $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$: $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Si la función $f(x) \in C^k(Q)$, entonces la derivada parcial $\dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ se designará con frecuencia, para abreviar, por el símbolo $D^\alpha f$. Para las derivadas de primero y segundo órdenes emplearemos también las designaciones f_{x_i}, $f_{x_i x_j}$. El gradiente $(f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ de la función $f \in C^1(Q)$ será designado mediante $\nabla f(x)$.

Por superficie cerrada S de $(n-1)$ dimensiones entenderemos una superficie $(n-1)$-dimensional de la clase C^k (para cierto $k \geqslant 1$), acotada, cerrada y sin límites, esto es, una superficie conexa acotada y cerrada ($S = \bar{S}$) que pertenece a R_n y que posee la siguiente propiedad: para todo punto $x^0 \in S$ existen su entorno (n-dimensional) U_{x^0} y una función $F_{x^0}(x)$, que pertenece a $C^k(U_{x^0})$ y para la cual se cumple la desigualdad $\nabla F_{x^0}(x^0) \neq 0$, tales, que el conjunto $S \cap U_{x^0}$ se describe por la ecuación $F_{x^0}(x) = 0$, es decir, que todos los

*) A veces se emplea también el término «clausura» (N. del T.)

puntos del conjunto $S \cap U_{x^0}$ satisfacen la ecuación $F_{x^0}(x) = 0$ y cualquier punto en U_{x^0} pertenece a S, siempre que satisfaga la ecuación $F_{x^0}(x) = 0$.

El contorno del dominio Q lo designaremos con ∂Q. En adelante supondremos, siempre que no se diga lo contrario, que los contornos de los dominios en consideración están compuestos de un número finito de superficies cerradas (n — 1)-dimensionales (de la clase C^1) y que estas superficies no se intersecan. Mediante $|Q|$ designaremos el volumen de Q.

Observemos que si la superficie cerrada S de (n — 1) dimensiones pertenece a la clase C^k, para todo punto x^0 de S existe un entorno U'_{x^0} tan pequeño que la intersección $S \cap U'_{x^0}$ se proyecta unívocamente sobre cierto dominio D_{x^0} (n — 1)-dimensional, con el límite de la clase C^k, y este dominio se encuentra en uno de los planos de coordenadas, es decir, se decribe, para cierto i, $i = 1, \ldots, n$, por la ecuación $x_i = \varphi_{x^0}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in D_{x^0}$ y que, además, $\varphi_{x^0} \in C^k(\overline{D}_{x^0})$. La intersección $S \cap U'_{x^0}$ se llamará *trazo simple* (o *trazo*) de la superficie S.

Dado que S es acotada y cerrada, entonces del cubrimiento $\{U'_x, x \in S\}$ de la superficie S se puede elegir un subcubrimiento finito. Llamaremos *cubrimiento de la superficie S con trozos simples* la totalidad de trozos simples $S_1, \ldots, S_N$ que corresponden a tal cubrimiento finito.

Por superficie $(n - 1)$-dimensional S de clase C^k, $k \geqslant 1$, entenderemos una superficie conexa que puede ser cubierta con un número finito de dominios (n-dimensionales) U_i, $i = 1, \ldots, N$, de manera tal que cada uno de los conjuntos $S_i = S \cap U_i$, $i = 1, \ldots, N$, se proyecte unívocamente sobre cierto dominio $(n - 1)$-dimensional D_i con contorno de la clase C^k, encontrándose éste en uno de los planos de coordenadas, es decir, para cierto $p = p(i)$, $p = 1, \ldots, n$, se describe cada conjunto por la ecuación $x_p = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots) \in D_i$, y que, además, $\varphi_i \in C^k(\overline{D}_i)$. Llamaremos *cubrimiento de la superficie S con trozos simples* la totalidad de superficies S_i, o sea, de trozos simples de la superficie S que corresponden al cubrimiento $U_1, \ldots, U_N$ de ésta. En lo sucesivo por superficie de $(n - 1)$ dimensiones entenderemos una superficie $(n - 1)$-dimensional de la clase C^k para cierto $k \geqslant 1$.

Designemos con Q^δ, $\delta > 0$, la unión de bolas $\{|x - x^0| < \delta\}$ que es un dominio respecto a todos los $x^0 \in Q$; $Q^\delta = \bigcup_{x^0 \in Q} \{|x - x^0| < \delta\}$; $Q \Subset Q^\delta$. Mediante Q_δ, $\delta > 0$, designaremos un conjunto constituido por todos aquellos puntos del dominio Q que distan del contorno ∂Q a una magnitud mayor que δ; $Q_\delta \Subset Q$; cuando $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, Q_δ será un dominio. Vamos a mostrar que para cualquier $\delta > 0$, suficientemente pequeño, existe una función $\zeta_\delta(x)$, indefinidamente diferenciable en R_n, que es igual a 1 en Q_δ y a 0 fuera de $Q_{\delta/2}$. La función $\zeta_\delta(x)$ se llamará en adelante *función δ-cortante* (o, simplemente, *función cortante*) *para el dominio* Q. Antes de construir la función $\zeta_\delta(x)$, introduzcamos el importante concepto del núcleo de mediación.

Sea $\omega_1(t)$ la función de una variable t $(-\infty < t < +\infty)$. Supongamos que esta función es indefinidamente diferenciable, par, no negativa y que se anula cuando $|t| \geqslant 1$, además, para ella es válida la igualdad

$$\int\limits_{R_n} \omega_1(|x|)\,dx = \int\limits_{|x|<1} \omega_1(|x|)\,dx = 1. \tag{3}$$

A título de $\omega_1(t)$ se puede tomar, por ejemplo, la función

$$\omega_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_n} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & 0 \leqslant |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1, \end{cases}$$

donde la constante C_n está elegida de tal manera que se cumpla la condición (3). Sea h número positivo arbitrario. La función

$$\omega_h(|x|) = \frac{1}{h^n}\,\omega_1(|x|/h)$$

lleva el nombre de *núcleo de mediación* (de radio h). Es evidente que el núcleo de mediación $\omega_h(|x|)$ posee las siguientes propiedades:

a) $\omega_h(|x|) \in C^\infty(R_n)$, $\omega_h(x) \geqslant 0$ en R_n,

b) $\omega_h(|x|) = 0$ para $|x| \geqslant h$,

c) $\int\limits_{R_n} \omega_h(|x|)\,dx = 1$,

d) para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \geqslant 0$, y para todos los $x \in R_n$

$$|D^\alpha \omega_h(|x|)| \leqslant C_\alpha / h^{n+|\alpha|},$$

donde C_α es cierta constante positiva que no depende de h.

Sea $\omega_h(|x|)$ un núcleo de mediación arbitrario. Se puede comprobar inmediatamente que, siendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño, la función

$$\zeta_\delta(x) = \int\limits_{Q_{3\delta/4}} \omega_{\delta/4}(|x-y|)\,dy$$

es cortante para el dominio Q y en R_n satisface las desigualdades $0 \leqslant \zeta_\delta(x) \leqslant 1$.

§ 1. Problema de Cauchy. Teorema de Kovalevskaya

1. Planteamiento del problema de Cauchy. Examinemos en un dominio Q del espacio n-dimensional R_n (el dominio no tiene que ser obligatoriamente acotado, en particular, puede coincidir con todo el R_n) una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x), \tag{1}$$

En este caso, consideraremos que los coeficientes y el término independiente son funciones de valores complejos suficientemente suaves. Designemos con $A(x)$ la matriz $\| a_{ij}(x) \|$, $i, j = 1, \ldots, n$, compuesta por los coeficientes de las derivadas de órdenes superiores; la matriz $A(x)$ es distinta de la matriz nula por todo Q.

En el caso de una sola variable espacial, $n = 1$, la ecuación (1) es una ecuación diferencial ordinaria y se la puede escribir ($a_{11} \neq 0$) en la forma

$$u'' + b(x)\, u' + c(x)\, u = g(x). \tag{2}$$

Entonces, el problema más sencillo es el de Cauchy que tiene por objeto hallar para esta ecuación una solución que para cierto $x = x^0$ satisfaga las condiciones iniciales $u(x^0) = u_0$, $u'(x^0) = u_1$.

Veamos cómo se puede plantear un problema análogo para la ecuación en derivadas parciales (1). Tomemos en Q una superficie $(n-1)$-dimensional S suficientemente suave (de la clase C^2), prefijada por la ecuación

$$F(x) = 0, \tag{3}$$

donde $F(x)$ es una función de valores reales, y supongamos que $|\nabla F| \neq 0$ para todos los $x \in S$.

Sea dado en Q tal campo vectorial $l(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$, donde $l_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, son funciones de valores reales pertenecientes a $C^1(Q)$, $|l^2| = l_1^2 + \ldots + l_n^2 > 0$, que para todos los $x \in S$ el vector $l(x)$ no haga contacto con la superficie S, es decir,

$$\frac{\partial F}{\partial l}\Big|_S = \frac{(l, \nabla F)}{|l|}\Big|_S \neq 0.$$

(En lo sucesivo sólo nos interesarán los valores del campo $l(x)$ en la superficie S).

Tomemos un punto arbitrario $x^0 \in S$ y examinemos la ecuación (1) en un entorno suficientemente pequeño U de este punto (supongamos que U es una bola de radio suficientemente pequeño y con centro en el punto x^0). Designaremos con S_0 la intersección $S \cap U$.

Sea dada en U una solución u, $u \in C^2(U)$, de la ecuación (1), y supongamos que $u_0(x)$ es un valor de la función u en S_0, y $u_1(x)$, el valor de la derivada $\frac{\partial u}{\partial l}$ en S_0:

$$u|_{S_0} = u_0(x), \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{S_0} = u_1(x). \tag{5}$$

Mostremos que para una ecuación en derivadas parciales, a diferencia de una ecuación ordinaria, u_0 y u_1 no pueden ser, en caso general, funciones arbitrarias (suaves).

Como $\nabla F(x^0) \neq 0$, una de las coordenadas del vector $\nabla F(x^0)$ es distinta de cero; sea, por ejemplo, $F_{x_n}(x^0) \neq 0$. Consideramos que el entorno U es tan pequeño que en él $F_{x_n}(x) \neq 0$ y la ecuación (3) puede escribirse en la forma

$$x_n = \varphi(x'),\ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

con una función suave $\varphi(x')$. Designemos con $F_n(x)$ la función $F(x)$ y con $F_i(x)$, las funciones $x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, n-1$, y examinemos una aplicación biunívoca

$$y_i = F_i(x),\ i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

del dominio U en cierto entorno V del origen de coordenadas, es decir, de la imagen del punto x^0. Designemos con el símbolo $\sum$ la imagen de la superficie S_0 que se encuentra en el plano $y_n = 0$:

$$\textstyle\sum = V \cap \{y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in R_{n-1},\ y_n = 0\}.$$

Designaremos por $v(y)$ la función $u(x(y))$. Dado que $u_{x_i} = \sum_{p=1}^{n} v_{y_p} F_{px_i}$, mientras que $u_{x_i x_j} = \sum_{p,\,q=1}^{n} v_{y_p y_q} F_{px_i} \cdot F_{qx_j} + \sum_{p=1}^{n} v_{y_p} F_{px_i x_j}$, entonces la ecuación (1) en las nuevas variables adquiere la forma

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} \beta_{ij}(y)\, v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(y)\, v_{y_i} + \beta(y)\, v = f_1(y), \tag{1'}$$

donde $\beta_{ij}(y)$ son elementos de la matriz cuadrada $\|(A(x(y)) \times \times \nabla F_i(x(y)),\ \nabla F_j(x(y)))\|$, en particular,

$$\beta_{nn}(y(x)) = (A(x)\,\nabla F(x),\quad \nabla F(x)). \tag{7}$$

Las condiciones (4) y (5) toman, respectivamente, la forma

$$v|_{\sum} = v_0(y') \tag{8}$$

y

$$(\nabla_y v,\ \lambda(y))|_{\Sigma} = v_1'(y'), \tag{5'}$$

donde $v_0(y') = u_0(y', \varphi(y'))$, $v_1'(y') = u_1(y', \varphi(y'))$, mientras que el vector $\lambda(y(x)) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial l}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial l}\right)$, $x \in S_0$, además, en S_0 se tiene

$$\frac{\partial F_n}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial l} \neq 0.$$

Ante todo mostremos que el valor del vector ∇v en la superficie $\sum$ se determina unívocamente mediante las funciones v_0 y v_1'. Efectivamente, las derivadas $v_{y_i}|_{\Sigma}$, $i = 1, \ldots, n-1$, se calculan de (8): $v_{y_i}|_{\Sigma} = v_{0y_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, y en virtud de (5') se tiene

$$v_{y_n}|_{\Sigma} = v_1(y'), \tag{9}$$

donde $v_1(y') = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial l}}\left(v_1'(y') - \sum_{i=1}^{n-1} v_{0y_i}\frac{\partial F_i}{\partial l}\right)$.

Es evidente que las condiciones (8), (5') y las (8), (9) son equivalentes.

Examinemos ahora los valores que toman en $\sum$ las segundas derivadas de la función $v(y)$. Señalemos primeramente que en virtud de las igualdades (8) y (9), los valores que toman en $\sum$ todas las segundas derivadas de la función $v(y)$, a excepción de la derivada $v_{y_n y_n}$, se determinan unívocamente mediante las funciones v_0 y v_1. Para determinar el valor que toma sobre $\sum$ la derivada $v_{y_n y_n}$, emplearemos la ecuación (1'). Partiendo de (1') y teniendo en cuenta (7), obtenemos:

$$(A(x(y))\nabla_x F(x(y)),\ \nabla_x F(x(y)))\, v_{y_n y_n} =$$
$$= f_1(y) - \sum_{i,j=1}^{n-1} \beta_{ij} v_{y_i y_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in} v_{y_i y_n} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_{y_i} - \beta v. \tag{1''}$$

Si en la superficie S_0 la función $(A(x)\nabla F,\ \nabla F) \neq 0$, entonces la función $(A(x(y))\nabla_x F(x(y)),\ \nabla_x F(x(y)))$ será distinta de cero en $\sum$, y, por consiguiente en V (consideramos que el entorno U es suficientemente pequeño). La ecuación (1'') en V se escribirá en este caso así:

$$v_{y_n y_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \gamma_{ij} v_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{in} v_{y_i y_n} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_{y_i} + \gamma v + h. \tag{10}$$

Haciendo en (10) $y_n = 0$, obtendremos el valor que la derivada $v_{y_n y_n}$ toma sobre $\sum$.

Así pues, si $(A(x)\nabla F, \nabla F) \neq 0$ sobre S_0, en dicha superficie se determinan unívocamente todas las derivadas de la función $u(x)$ hasta el segundo orden inclusive.

Si en cambio en algún punto $\tilde{x} \in S_0$ $(A(\tilde{x})\nabla F(\tilde{x}), \nabla F(\tilde{x})) = 0$, entonces en el correspondiente punto $\tilde{y}$ tenemos: $(A(x(\tilde{y}))$ $\nabla_x F(x(\tilde{y})), \nabla_x F(x(\tilde{y}))) = 0$. En este caso la igualdad (1") en el punto $\tilde{y}$ es la que vincula los valores ya determinados de $v(\tilde{y})$, $v_{y_i}(\tilde{y})$, $v_{y_i y_j}(\tilde{y})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$. De este modo, los valores que toman en el punto $\tilde{y}$ la función v_0 y sus derivadas hasta el segundo orden, así como también los de la función v_1 y de sus derivadas de primer orden y, por consiguiente, los valores en el punto $\tilde{x}$ de las funciones u_0 y u_1, y de las correspondientes derivadas de éstas, están entrelazados mediante cierta correlación, es decir, no pueden ser, en el caso general, arbitrarios.

El punto x de la superficie S de la clase C^1, dada por la ecuación $F = 0$ (F es una función de valores reales, $\nabla F \neq 0$ en S), se llama *punto característico* para la ecuación (1), si en él

$$(A(x)\nabla F(x), \nabla F(x)) = 0.$$

La superficie S se llama *característica* para la ecuación (1), si todos sus puntos son característicos.

En este párrafo estudiaremos el problema de Cauchy para la ecuación (1), es decir, el problema en que se busca una solución de dicha ecuación que satisfaga las condiciones (4) y (5) con ciertas funciones dadas u_0 y u_1, cuando la superficie S está privada de puntos característicos.

El caso en que la superficie S contiene puntos característicos es mucho más complicado. Ya fue mostrado que si el punto $x^0 \in S$ es característico, existen las funciones (suaves) u_0 y u_1, tales que en ningún entorno de este punto no existe solución (de $C^2(U)$) suave de la ecuación (1) que en la superficie $S_0 = S \cap U$ satisfaga las condiciones (4) y (5). Es fácil convencerse de que siendo U^+ una de las partes en las que S_0 divide U (consideramos que el entorno U es una bola de radio suficientemente pequeño y con centro en x^0), en $C^2(U^+ \cup S_0)$ tampoco existe solución que satisfaga las condiciones (4) y (5) en la superficie S_0. Si, no obstante, la solución suave existe, ésta puede ser no una única.

Sea, por ejemplo, $n = 2$. En un círculo U con el centro en el origen de coordenadas examinemos la ecuación

$$u_{x_1 x_2} = f(x),$$

para la cual la recta $x_2 = 0$ es característica (a este tipo de ecuaciones puede reducirse, al cambiar las variables independientes, la así llamada ecuación de onda $u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} = f_1$). Es fácil comprobar que para la existencia en U (de $C^2(U)$) de una solución suave de dicha ecuación que satisfaga las condiciones $u\mid_{x_2=0} = u_0(x_1)$, $u_{x_2}\mid_{x_2=0} = u_1(x_1)$, es necesario y suficiente que se cumpla la condición $\frac{du_1(x_1)}{dx_1} = f(x_1, 0)$. Además, si esta condición está cumplida, la solución se representa en la forma

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} d\xi_1 \int_0^{x_2} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 + u_0(x_1) + g(x_2),$$

donde g es una función arbitraria, diferenciable continuamente dos veces, que satisface las condiciones $g(0) = 0$, $\frac{dg(0)}{dx_2} = u_1(0)$.

Si la superficie S es característica, pueden surgir tales circunstancias cuando el problema para la ecuación (1) debe plantearse por analogía con el de Cauchy para una ecuación ordinaria no de segundo orden, sino de primer orden. Así, por ejemplo, en el capítulo VI estudiaremos un problema (problema de Cauchy) relacionado con la ecuación (sea, como antes, $n = 2$) de conducción de calor

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2} = f(x)$$

para la cual la recta $x_2 = 0$ es característica. El problema citado consiste en la búsqueda de la solución de la ecuación en el semiplano $x_2 > 0$, que satisfaga sólo la condición (4): $u\mid_{x_2=0} = u_0(x_1)$.

Pasemos ahora al estudio del problema (1), (4), (5) para el caso en que la superficie S está privada de puntos característicos. Sean Q un dominio n-dimensional y S una superficie $(n-1)$-dimensional que se encuentra en Q y, siendo definida por la ecuación (3), divide Q en dos dominios disjuntos Q^+ y Q^-, es decir, $Q \setminus S = Q^+ \cup Q^-$, $Q^+ \cap Q^- = \varnothing$. Supongamos que en el dominio Q está definida la ecuación (1) (es decir, en Q se conocen los coeficientes y el término independiente de la ecuación (1)), en la superficie S están dadas dos funciones, $u_0(x)$ y $u_1(x)$, y un campo vectorial $l(x) = (l_1(x), \ldots, l_n(x))$, $|l(x)| > 0$ en S, que no tiene ningún punto común con la superficie S. Partimos de la suposición de que S no tiene los puntos característicos de la ecuación (1), es decir,

$$(A(x)\nabla F, \Delta F) \neq 0 \text{ en } S. \tag{11}$$

Hemos de hallar la función $u(x)$ que pertenece a $C^2(Q)$ y satisface la ecuación (1) en Q y las condiciones iniciales (4) y (5) sobre S. Llamaremos esta operación problema de Cauchy no característico. Las funciones dadas, es decir, coeficientes y el término independiente de la ecuación (1), la función F de (3), la función-vector l y las funciones u_0 y u_1 se denominan datos del problema.

Supongamos que los datos del problema (1), (4), (5) son indefinidamente diferenciables: los coeficientes y el término independiente de la ecuación (1), así como también la función $F(x)$ de (3), pertenecen a $C^\infty(Q)$, mientras que las funciones $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, $u_0(x)$ $u_1(x)$ pertenecen a $C^\infty(\bar{S})$ (es decir, las funciones $l_1(x(y)), \ldots$ $\ldots, u_1(x(y))$, en las que $x = x(y)$ es una aplicación, dada por la fórmula (6), de cierto entorno U de un punto arbitrario $x^0 \in S$ en el entorno V del origen de coordenadas, son indefinidamente diferenciables en el dominio $(n-1)$-dimensional $\sum = V \cap \{y' \in R_{n-1}, y_n = 0\}$). Supongamos, además, que en Q existe una solución indefinidamente diferenciable $u(x)$ del problema (1), (4), (5).

Como se ha señalado más arriba, sobre la superficie S se determinan unívocamente, en términos de los datos del problema, todas las derivadas de la solución $u(x)$ hasta el segundo orden inclusive. Demostremos ahora que en dicha superficie se determinan unívocamente, también en términos de los datos del problema, todas las derivadas de cualquier orden de la función $u(x)$. Ya que en el caso que se considera la aplicación (6) del entorno U del punto arbitrario $x^0 \in S$ en el entorno V del origen de coordenadas se define con las funciones $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, indefinidamente diferenciables en U, entonces como resultado de la aplicación (6) el problema (1), (4), (5) (lo que se entiende como la búsqueda de una solución de la ecuación (1) en el dominio U, que satisfaga los datos iniciales $u|_{S_0} = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial l}|_{S_0} = u_1(x)$, donde $S_0 = U \cap S$) en el dominio U se sustituya por el problema equivalente (8)—(10) para la función $v(y)$ en el dominio V con los datos indefinidamente diferenciables. Ya que en U existe la solución indefinidamente diferenciable $u(x)$ del problema (1), (4), (5), el problema (8)—(10) en V también tiene en éste una solución $v(y) = u(x(y))$, indefinidamente diferenciable. Para demostrar esta afirmación basta establecer que todas las derivadas $D_y^\alpha v(y)$ en $\sum$ se determinan unívocamente en términos de los datos del problema (8)—(10).

Para cualesquiera $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, $|\alpha'| \geqslant 0$, los valores de las derivadas $D^{(\alpha', 0)}v(y)$ y $D^{(\alpha', 1)}v(y)$ en la superficie $\sum$ se determinan inmediatamente de las condiciones (8) y (9):

$$D^{(\alpha', 0)}v|_{\sum} = D^{\alpha'}v_0, \qquad D^{(\alpha', 1)}v|_{\sum} = D^{\alpha'}v_1.$$

Designemos por v_α el valor que toma la función $\frac{1}{\alpha!} D^\alpha v$ ($\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$) en el origen de coordenadas:

$$v_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha v(0), \qquad |\alpha| \geqslant 0. \tag{12}$$

En este caso, $v_{\alpha',0}$ y $v_{\alpha',1}$, $|\alpha'|\geqslant 0$, quedan unívocamente determinadas en términos de las funciones v_0 y v_1:

$$v_{\alpha',0}=\frac{1}{(\alpha')!}D^{\alpha'}v_0|_{y'=0},\tag{13}$$

$$v_{\alpha',1}=\frac{1}{(\alpha')!}D^{\alpha'}v_1|_{y'=0}\tag{14}$$

$((\alpha')!=\alpha_1!\ \ldots\ \alpha_{n-1}!)$

Para determinar en $\sum$ la derivada $D^{(\alpha',2)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$, emplearemos la ecuación (10). Derivando (10) respecto a $y_1,\ldots,y_{n-1}$, y haciendo $y_n=0$, obtenemos

$$D^{(\alpha',2)}v|_{\Sigma}=D^{(\alpha',0)}H_1|_{\Sigma},\quad |\alpha'|\geqslant 0,$$

donde la función $H_1(y)$ se define en V por la fórmula

$$H_1(y)=\sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}(y)v_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}(y)v_{y_iy_n}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(y)v_{y_i}+\gamma(y)v+h(y)$$

(en la cual a título de $v(y)$ figura la solución del problema (8)—(10)). La función $D^{(\alpha',0)}H_1|_{\Sigma}$ es una función (lineal, con coeficientes conocidos) de las magnitudes $D^{(\beta',0)}v|_{\Sigma}$ y $D^{(\gamma',1)}v|_{\Sigma}$ ya determinadas para $0\leqslant|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2, 0\leqslant|\gamma'|\leqslant|\alpha'|+1$. Por eso, todas las derivadas $D^{(\alpha',2)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$, están determinadas en $\sum$ unívocamente en términos de los datos del problema y, en particular,

$$v_{\alpha',2}=(2!\,(\alpha')!)^{-1}D^{(\alpha',0)}H_1(y)|_{y=0},\quad |\alpha'|\geqslant 0.$$

Supongamos que para cierto $k\geqslant 2$ en $\sum$ ya están unívocamente determinadas, según los datos del problema, todas las derivadas $D^{(\alpha',k-1)}v(y)$, $|\alpha'|\geqslant 0$. Hallemos la derivada $D^{(\alpha',k)}v(y)|_{\Sigma}$, $|\alpha'|\geqslant 0$. Para ello derivemos en V la ecuación (10) α_1 veces respecto a $y_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ veces respecto a y_{n-1}, y $k-2$ veces respecto a y_n, y luego hagamos $y_n=0$.

Como resultado obtendremos

$$D^{(\alpha',k)}v(y)|_{\Sigma}=D^{(\alpha',k-2)}H_1(y)|_{\Sigma}.$$

Aquí, $D^{(\alpha',k-2)}H_1|_{\Sigma}$ es una función (lineal, con coeficientes conocidos) respecto de las magnitudes ya determinadas $D^{(\beta',i)}v|_{\Sigma}$, $0\leqslant i\leqslant k-1$ $(0\leqslant|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2$ para $0\leqslant i\leqslant k-2$ y $0\leqslant|\beta'|\leqslant|\alpha'|+1$, para $i=k-1)$. Por eso, sobre $\sum$ se determinan unívocamente, en terminos de los datos del problema, todas las derivadas $D^{(\alpha', h)}v$, $|\alpha'|\geqslant 0$, en particular,

$$v_{\alpha', h}=((\alpha')!\,k!)^{-1}D^{(\alpha', h-2)}H_1(y)|_{y=0}. \tag{15}$$

La afirmación queda demostrada.

OBSERVACIÓN. Sea $v(y)$ una función arbitraria indefinidamente diferenciable en el dominio V. Examinemos la siguiente función indefinidamente diferenciable en V:

$$H(y)\equiv v_{y_n y_n}-\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}v_{y_i y_j}-\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}v_{y_i y_n}-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i v_{y_i}-\gamma v-h. \tag{16}$$

De los razonamientos arriba empleados se desprende que si los valores de la función $v(y)$ y de todas sus derivadas satisfacen las condiciones (12), en las que los números v_α, $|\alpha|\geqslant 0$, están definidos por las igualdades (13)—(15), entonces

$$D^\alpha H(y)|_{y=0}=0 \text{ para todo } \alpha,\ |\alpha|\geqslant 0. \tag{17}$$

Así pues, hemos mostrado que si la superficie S está privada de puntos característicos, los datos del problema definen unívocamente en S todas las derivadas de la solución indefinidamente diferenciable del problema (1), (4), (5). Por consiguiente, en la clase de funciones, definidas unívocamente por sus valores y por los valores de todas sus derivadas en S, el problema (1), (4), (5) tiene una única solución. Una de tales clases es la de funciones analíticas. Más abajo en este párrafo será mostrado que en la clase de funciones analíticas el problema (1), (4), (5) con datos analíticos es resoluble.

Observemos que a diferencia de una ecuación ordinaria, la condición de que en esta situación tan general los datos del problema sean analíficos (si no se impone a los coeficientes de la ecuación (1) limitaciones adicionales) es en cierto sentido necesaria para que el problema pueda ser resuelto. En determinadas condiciones una ecuación en derivadas parciales con coeficientes indefinidamente diferenciables y un término independiente puede, en general, no tener soluciones. He aquí un ejemplo, proporcionado por G. Levi, que demuestra esta afirmación.

EJEMPLO 1. La ecuación diferencial

$$u_{x_1x_3}+iu_{x_2x_3}+2i(x_1+ix_2)\,u_{x_3x_3}=f(x_3) \tag{18}$$

no tiene soluciones, que puedan diferenciarse continuamente dos veces, en ningún entorno del origen de coordenadas (del espacio R_3), si la función de valores reales $f(x_3)$ no es analítica.

Para demostrar esta afirmación basta, evidentemente, comprobar que la ecuación

$$u_{x_1}+iu_{x_2}+2i(x_1+ix_2)\,u_{x_3}=f(x_3) \tag{19}$$

no tiene soluciones diferenciables continuamente en ningún entorno del origen de coordenadas.

Supongamos, al contrario, que para algunos $R>0$ y $H>0$ en el cilindro $Q=\{x_1^2+x_2^2<R^2,\ |x_3|<H\}$ existe una solución $u(x)$ de la ecuación (19) con la función $f(x_3)$ de valores reales no analítica en el intervalo $|x_3|<H$ y que esta solución pertenece a $C^1(\overline{Q})$. Entonces, la función $u_1(\rho,\varphi,x_3)=u(\rho\cos\varphi,\rho\operatorname{sen}\varphi,x_3)$ en el paralelepípedo $\Pi=\{0<\rho<R,\ 0<\varphi<2\pi,\ |x_3|<H\}$ será la solución de la ecuación

$$u_{1\rho}e^{i\varphi}+i\frac{u_{1\varphi}}{\rho}e^{i\varphi}+2i\rho e^{i\varphi}u_{1x_3}=f(x_3),$$

siendo $u_1\in C^1(\overline{\Pi})$ y $u_1(\rho,0,x_3)\equiv u_1(\rho,2\pi,x_3)$. Integrando esta igualdad (con ρ y x_3 fijados) respecto a $\varphi\in(0,2\pi)$, llegamos a la conclusión de que en el rectángulo $K_1=\{0<\rho<R,\ |x_3|<H\}$ la función

$$u_2(\rho,x_3)=\int_0^{2\pi}u_1(\rho,\varphi,x_3)e^{i\varphi}\,d\varphi$$

$u_2(\rho,x_3)\in C^1(\overline{K}_1)$, satisface la ecuación

$$u_{2\rho}+\frac{u_2}{\rho}+2i\rho u_{2x_3}=2\pi f(x_3).$$

Por eso, la función

$v(r,x_3)=\sqrt{r}\,u_2(\sqrt{r},x_3)$, perteneciente a $C^1(K_2)\cap C(\overline{K}_2)$, donde K_2 es el rectángulo $\{0<r<R^2,\ |x_3|<H\}$, será en K_2 la solución de la ecuación

$$v_r+iv_{x_3}=\pi f(x_3),$$

o, lo que es lo mismo, de la ecuación

$$\left(v(r,x_3)+i\pi\int_0^{x_3}f(\xi)\,d\xi\right)_r+i\left(v(r,x_3)+i\pi\int_0^{x_3}f(\xi)\,d\xi\right)_{x_3}=0.$$

Mas, la última ecuación es la condición de Cauchy—Riemann para la función

$$w(r,x_3)=v(r,x_3)+i\pi\int_0^{x_3}f(\xi)\,d\xi.$$

Por consiguiente, la función $w(r,x_3)$ es analítica en K_2 y en $\overline{K}_2$ es la función continua de la variable compleja $r+ix_3$, $w(r,x_3)=g(r+ix_3)$. Como $\operatorname{Re}g\,|_{r=0}=0$, resulta, de acuerdo con el principio de simetría, que la función $g(r + ix_3)$ admite una prolongación analítica al rectángulo $K_3 = \{|r| < R^2, |x_3| < H\}$, y, en particular, en el segmento $\{r = 0, |x_3| < H\}$ es una función analítica respecto de x_3. Pero, $g|_{r=0} = i\pi \int_0^{x_3} f(\xi)\, d\xi$ por lo que la función $f(x_3)$ también es analítica para $|x_3| < H$, lo que contradice a la suposición.

Observemos que el plano $x_1 = 0$, por ejemplo, no contiene puntos característicos para la ecuación (18). De este modo, cualesquiera que sean las funciones iniciales, el problema de Cauchy para la ecuación (18) (con datos iniciales dados en el plano $x_1 = 0$) no tiene soluciones en ningún entorno que contenga el origen de coordenadas.

2. Funciones analíticas de varias variables. Sean Q un dominio n-dimensional del espacio R_n, y $g(x)$, una función de valores complejos definida en Q.

La función $g(x)$ se llama *analítica en el punto* $x^0 \in Q$, si en cierto entorno U de este punto se representa por una serie de potencias absolutamente convergente

$$g(x) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} g_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} = \\ = \sum_{\alpha} g_\alpha (x - x^0)^\alpha, \qquad (20)$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(x - x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$.

La función $g(x)$ se denomina *analítica en un dominio*, si es analítica en cada uno de sus puntos.

Supongamos que la función $g(x)$ es analítica en el punto $x^0 \in Q$. Entonces, en el cubo $K_R(x^0) = \{|x_i - x_i^0| < R, i = 1, \ldots, n\}$ se representará, para cierto $R > 0$, por la serie (20) absolutamente convergente (en $K_R(x^0)$). Ya que una serie de potencias absolutamente convergente en $K_R(x^0)$ converge uniformemente, junto con todas las derivadas, en cualquier subdominio estrictamente interior K del cubo $K_R(x^0)$, $K \Subset K_R(x^0)$, $g(x) \in C^\infty(\overline{K})$ y, por consiguiente, $g(x) \in C^\infty(K_R(x^0))$. Además, es obvio que $g_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha g(x^0)$, donde $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, esto es, la serie (20) es la de Taylor de la función $g(x)$ en el punto x^0. De aquí se despende que una función analítica en el dominio Q se define unívocamente en todo el dominio Q mediante su propio valor y los valores de todas sus derivadas en un punto arbitrario de Q, en particular, si en algún punto de Q ella se anula junto con todas sus derivadas, entonces $g(x) \equiv 0$ en Q.

Mostremos que si *la función* $g(x)$ *es analítica en el punto* $x^0 \in Q$, *será también analítica en cierto entorno de este punto.* Para ello es suficiente demostrar que si $K_R(x^0)$ es un cubo en el que la función $g(x)$ está representada por la serie (20) (absolutamente convergente), entonces $g(x)$ es analítica en el cubo $K_{R/4}(x^0)$.

De la convergencia absoluta en $K_R(x^0)$ de la serie (20) se deduce que para todo $\rho \in (0, R)$

$$\sum_\alpha |g_\alpha| \rho^{|\alpha|} < \infty. \tag{21}$$

Tomemos un punto arbitrario $x^1 \in K_{R/4}(x^0)$. Entonces, para todo $x \in K_{R/8}(x^1)$ tenemos

$$g(x) = \sum_\alpha g_\alpha \Big(\sum_{p_1=0}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^{p_1} (x_1 - x_1^1)^{p_1} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \times \ldots$$

$$\ldots \times \Big(\sum_{p_n=0}^{\alpha_n} C_{\alpha_n}^{p_n} (x_n - x_n^1)^{p_n} (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n} \Big) =$$

$$= \sum_\alpha \sum_{p_1=0}^{\alpha_1} \ldots \sum_{p_n=0}^{\alpha_n} g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} \ldots C_{\alpha_n}^{p_n} \times$$

$$\times (x_1 - x_1^1)^{p_1} \ldots (x_n - x_n^1)^{p_n} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \ldots (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n}.$$

Ya que en todo $x \in K_{R/8}(x^1)$, para cualesquiera $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \leqslant \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, se tiene:

$$|g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} \ldots C_{\alpha_n}^{p_n} (x_1 - x_1^1)^{p_1} \ldots (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n}| \leqslant$$

$$\leqslant |g_\alpha| 2^{|\alpha|} \left(\frac{R}{8}\right)^{|p|} \left(\frac{R}{4}\right)^{|\alpha| - |p|} = |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{2^{|p|}}$$

y como, en virtud de (21), la serie

$$\sum_\alpha \sum_p |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{2^{|p|}} = 2^n \sum_\alpha |g_\alpha| \left(\frac{R}{2}\right)^{|\alpha|} < \infty,$$

la función $g(x)$ se representa en $K_{R/8}(x^1)$ por una serie absolutamente convergente

$$g(x) = \sum_p g'_p (x - x^1)^p,$$

donde

$$g'_p = \sum_{\alpha_1 = p_1}^{\infty} \ldots \sum_{\alpha_n = p_n}^{\infty} g_\alpha C_{\alpha_1}^{p_1} (x_1^1 - x_1^0)^{\alpha_1 - p_1} \ldots C_{\alpha_n}^{p_n} (x_n^1 - x_n^0)^{\alpha_n - p_n}.$$

Por consiguiente, la función $g(x)$ es analítica en el punto x^1 y, por lo tanto, debido a la arbitrariedad de $x^1 \in K_{R/4}(x^0)$, en $K_{R/4}(x^0)$. La afirmación queda demostrada.

Una función de valores reales $g(x) = \sum_{\alpha} \tilde{g}_\alpha (x - x^0)^\alpha$, analítica en el punto x^0, se llama *mayorante* de la función $g(x)$ (de 18)) en el punto x^0, si para todos los α, $|\alpha| \geqslant 0$, $|g_\alpha| \leqslant \tilde{g}_\alpha$.

Sea $\{g_\alpha, |\alpha| \geqslant 0\}$ una sucesión numérica compleja para la cual existe una sucesión numérica real $\{\tilde{g}_\alpha, |\alpha| \geqslant 0\}$ tal que para cualquier α, $|\alpha| \geqslant 0$, tenemos $|g_\alpha| \leqslant \tilde{g}_\alpha$ y la serie $\sum_{\alpha} \tilde{g}_\alpha (x - x^0)^\alpha$ es absolutamente convergente en cierto entorno del punto x^0. Es evidente que en este caso la función $g(x) = \sum_{\alpha} g_\alpha (x - x^0)^\alpha$ es analítica en el punto x^0 y la función $\tilde{g}(x) = \sum_{\alpha} \tilde{g}_\alpha (x - x^0)^\alpha$ será su mayorante en el punto x^0.

Es también obvio que cualquier función analítica en el punto x^0 tiene en este punto su mayorante. A título de mayorante de la función $g(x)$ de (20) se puede tomar, por ejemplo, la función $\sum_{\alpha} |g_\alpha| (x - x^0)^\alpha$. La mayorante de la función $g(x)$ de (20) puede también construirse de la manera siguiente. Supongamos que para cierto $R > 0$ la serie (20) converge absolutamente en el cubo $K_R(x^0)$. Tomemos algún ρ en el intervalo $(0, R)$. En virtud de (21), existe tal M positivo que $|g_\alpha| \cdot \rho^{|\alpha|} \leqslant M$, es decir, $|g_\alpha| \leqslant M/\rho^{|\alpha|}$ para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Esto significa que en el punto x^0 la función $\tilde{g}(x) = \sum_{\alpha} \frac{M(x-x^0)^\alpha}{\rho^{|\alpha|}} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1 - x_1^0}{\rho}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n - x_n^0}{\rho}\right)}$ será la mayorante de la función $g(x)$. También será la mayorante de $g(x)$ en el punto x^0, para cualquier $N \geqslant 1$, la función

$$\tilde{g}(x) = \frac{M}{1 - \frac{(x_1 - x_1^0) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0) + N(x_n - x_n^0)}{\rho}}$$

dado que para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se cumple la desigualdad $\frac{MN^{\alpha_n}(|\alpha|)!}{\rho^{|\alpha|}\alpha!} \geqslant |g_\alpha|$.

3. Teorema de Kovalévskaya. Estudiaremos aquí el problema de Cauchy en la clase de funciones analíticas, o sea, consideraremos las soluciones del problema (1), (4), (5), analíticas en el dominio Q o en alguno de sus subdominios Q' que contiene la superficie S. Vamos a suponer que los datos del problema (1), (4), (5) son analíticos, es decir, que en Q los coeficientes y el término independiente de la ecuación (1), así como también la función F de (3) (que define la ecuación de la superficie S) son analíticos, mientras que las funciones $l_1(x), \ldots, l_n(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ son analíticas en S (esto es, las funciones $l_1(x(y)), \ldots, l_n(x(y))$, $u_0(x(y))$, $u_1(x(y))$ son analíticas en el dominio $(n-1)$ —dimensional $\sum = V \cap \{y' \in R_{n-1}, y_n = 0\}$, siendo $x(y)$ la representación, dada por la fórmula (6), de un entorno U del punto arbitrario $x^0 \in S$ en el entorno V del origen de coordenadas). Ha de recordarse que la solución del problema, los coeficientes y el término independiente de la ecuación (1), así como las funciones iniciales se expresan en valores complejos; las coordenadas $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ del vector $l(x)$ y la función $F(x)$ tienen valores reales. Se supone que la superficie S está privada de puntos característicos para la ecuación (1).

Demostremos, en primer lugar, el teorema sobre la existencia y unicidad de la solución de este problema.

TEOREMA 1 (teorema de Kovalévskaya). *Supongamos que los datos del problema* (1), (4), (5) *son analíticos y la superficie S no tiene puntos característicos para la ecuación* (1). *Entonces, para cualquier punto $x^0 \in S$ existe un entorno U_{x^0} de este punto en el cual el problema tiene solución analítica y en ningún entorno del mismo punto no puede haber más de una solución analítica del problema.*

Recordemos (véase el punto 1) que por el problema (1), (4), (5) en el dominio U_{x^0} se entiende un problema que tiene por fin hallar en U_{x^0} una solución $u(x)$ de la ecuación (1) que satisfaga las condiciones iniciales

$$u|_{S_0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{S_0} = u_1, \quad \text{donde} \quad S_0 = S \cap U_{x^0}.$$

Además, se supone que el entorno U_{x^0} es tan pequeño que la superficie S_0 la divide en dos dominios disjuntos.

Sea x^0 un punto arbitrario de la superficie S. Examinemos la representación biunívoca (6) de un entorno suficientemente pequeño U de este punto en el entorno V del origen de coordenadas, o sea de la imagen del punto x^0. Como los datos del problema (1), (4), (5) y las funciones $F_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$ son analíticos, el problema de Cauchy (1), (4), (5) en el dominio U se transforma en el problema equivalente (8)—(10) (en el dominio V) con datos analíticos. Para demostrar el teorema 1 basta mostrar que el origen de coordenadas cuenta con tal entorno V en el que existe solución analítica $v(y)$ del problema (8)—(10) y que esta solución es única.

Ante todo demostremos la unicidad de la solución. Supongamos que en un entorno V_1 del origen de coordenadas existe la solución analítica $v(y)$ del problema (8)—(10). Ya que $v(y) \in C^\infty(V_1)$, de los razonamientos expuestos en el punto 1 se deduce que en la superficie $\sum$ los datos del problema definen unívocamente los valores de todas las derivadas $D^\alpha v$, $|\alpha| \geqslant 0$. En particular, son unívocamente definidos todos los valores de $D^\alpha v(0)$, $|\alpha| \geqslant 0$. Por lo tanto (véase el punto 2), la solución $v(y)$ está unívocamente definida mediante los dados del problema en el dominio V_1. La unicidad queda demostrada.

Procedamos a la demostración de la existencia. Ante todo notemos que es suficiente demostrar la existencia de tal función $v(y)$, analítica en el origen de coordenadas, es decir que debido a las propiedades de funciones analíticas (véase el punto 2) ésta será también analítica en cierto entorno V del origen de coordenadas, que es la solución del problema (8)—(10) en V.

Según los datos del problema (8)—(10), las ecuaciones (12)—(15) (véase el p. 1) definen (unívocamente) los números v_α, $|\alpha| \geqslant 0$. Mostremos que la serie de potencias

$$\sum_{\alpha} v_\alpha y^\alpha, \tag{22}$$

escrita formalmente, representa en sí una función analítica en el origen de coordenadas. La suma de esta serie (designémosla $v(y)$), absolutamente convergente en un entorno V del origen de coordenadas, será precisamente la solución buscada.

Efectivamente, de (13) se desprende que el valor de la función $v(y', 0)$, analítica respecto a y', y los valores de todas sus derivadas respecto a $y_1, \ldots, y_{n-1}$ coinciden, cuando $y' = 0$, con los valores correspondientes de la función $v_0(y')$ que es analítica respecto a y'. Por consiguiente, en $\Sigma = V \cap \{y' \in R_{n-1}, y_n = 0\}$ tiene lugar la identidad $v(y', 0) \equiv v_0(y')$. Análogamente, de (14) obtenemos que en Σ, $v_{y_n}(y', 0) \equiv v_1(y')$. El hecho de que la función $v(y)$ satisface en V la ecuación (10), puede comprobarse del modo siguiente. Examinemos la función $H(y)$ que es analítica en V y está definida por la igualdad (16) en la cual $v(y)$ se ha sustituida por la función analítica examinada (22). De acuerdo con la observación en el punto 1 y gracias a la debida elección de los números v_α, $|\alpha| \geqslant 0$, tienen lugar las igualdades (17), es decir, la función $H(y)$ y todas sus derivadas son nulas en el origen de coordenadas. Por lo tanto, la función $H(y)$, analítica en V, es idénticamente igual a cero ($H(y) \equiv 0$). Lo último implica que en V la función $v(y)$ satisface la ecuación (10).

Así pues, hemos de demostrar que la serie (22) es absolutamente convergente en algún entorno del origen de coordenadas. Es suficiente mostrar para ello (véase el p. 2) que en el origen de coordenadas existe una mayorante para la serie citada.

El problema de Cauchy (en V) con datos analíticos

$$\tilde{v}_{y_n y_n} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{v}_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_{in} \tilde{v}_{y_i y_n} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\gamma}_i \tilde{v}_{y_i} + \tilde{\gamma}\tilde{v} + \tilde{h}, \tag{$\widetilde{10}$}$$

$$\tilde{v}|_{y_n=0} = \tilde{u}_0(y'), \tag{$\tilde{8}$}$$

$$\tilde{v}_{y_n}|_{y_n=0} = \tilde{u}_1(y') \tag{$\tilde{9}$}$$

lo llamaremos problema que mayora el problema (8)—(10), siempre que los datos indicados son mayorantes en el origen de coordenadas de los datos correspondientes del problema (8)—(10).

Si el problema $(\tilde{8})$—$(\tilde{10})$ tiene solución analítica en el origen de coordenadas, a saber:

$$\tilde{v}(y)=\sum_{\alpha}\tilde{v}_{\alpha}y^{\alpha}, \tag{$\tilde{22}$}$$

ésta es la mayorante en el origen de coordenadas para la serie (22), y, por lo tanto, la serie (22) representa en sí una función analítica en el origen de coordenadas.

La demostración de esta afirmación consiste en la comprobación de que las desigualdades $|v_{\alpha}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha}$ son válidas para cualquier α, $|\alpha|\geqslant 0$. Según la definición de problema mayorante, las funciones $\tilde{u}_0$ y $\tilde{u}_1$ son mayorantes en el origen de coordenadas de las funciones u_0 y u_1, respectivamente. Por consiguiente (véase (13) y (14)), para todos los α', $|\alpha'|\geqslant 0$, $|v_{\alpha',0}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',0}$ y $|v_{\alpha',1}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',1}$.

Supongamos que para cierto $k\geqslant 1$ han sido ya demostradas las desigualdades $|v_{\alpha',s}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',s}$ para cualquier s, $0\leqslant s\leqslant k-1$, y cualquier α', $|\alpha'|\geqslant 0$. Mostremos que en este caso también $|v_{\alpha',k}|\leqslant$ $\leqslant\tilde{v}_{\alpha',k}$, $|\alpha'|\geqslant 0$. En virtud de (15) tenemos

$$v_{\alpha',k}=\sum_{|\beta'|\leqslant|\alpha'|+1}c_{\beta',k-1}v_{\beta',k-1}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2}c_{\beta',s}v_{\beta',s}+h_{\alpha',k},$$

y

$$\tilde{v}_{\alpha',k}=\sum_{|\beta'|\leqslant|\alpha'|+1}\tilde{c}_{\beta',k-1}\tilde{v}_{\beta',k-1}+\sum_{s=0}^{k-2}\sum_{|\beta'|\leqslant|\alpha'|+2}\tilde{c}_{\beta',s}\tilde{v}_{\beta',s}+\tilde{h}_{\alpha',k},$$

donde

$$h_{\alpha',k}=\frac{1}{(\alpha')!\,k!}D^{(\alpha',k)}h(0),$$

$$\tilde{h}_{\alpha',k}=\frac{1}{(\alpha')!\,k!}D^{(\alpha',k)}\tilde{h}(0),$$

y las constantes $c_{\beta',s}$ son combinaciones lineales con coeficientes no negativos de los valores que en el origen de coordenadas toman las derivadas de los coeficientes de la ecuación (10), mientras que $\tilde{c}_{\beta',s}$ son las mismas combinaciones lineales de las derivadas correspondientes (¡no negativas!) de los coeficientes de la ecuación $(\tilde{10})$. Como el problema $(\tilde{8})$—$(\tilde{10})$ es mayorante para el (8)—(10), entonces $|h_{\alpha',k}|\leqslant\tilde{h}_{\alpha',k}$ y $|c_{\beta',s}|\leqslant\tilde{c}_{\beta',s}$. Por consiguiente, $|v_{\alpha',k}|\leqslant\tilde{v}_{\alpha',k}$.

De este modo, para demostrar que la serie (22) es absolutamente convergente en cierto entorno del origen de coordenadas, es suficiente construir el problema mayorante $(\widetilde{8})-(\widetilde{10})$ que tenga en el origen de coordenadas una solución analítica. Al construir el problema mayorante, será más cómodo que las condiciones iniciales (8) y (9) sean homogéneas:

$$v\,|_{y_n=0}=0 \qquad (8_0)$$

$$v_{y_n}\,|_{y_n=0}=0 \qquad (9_0)$$

Observemos que para demostrar la existencia de la solución analítica del problema (8)—(10) basta demostrar que existe la solución analítica $w(y)$ para el siguiente problema con condiciones iniciales homogéneas:

$$w_{y_ny_n}-\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}w_{y_iy_j}-\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}w_{y_iy_n}-\sum_{i=1}^{n}\gamma_iw_{y_i}-\gamma w-h'=0,$$
$$w\,|_{y_n=0}=0,$$
$$w_{y_n}\,|_{y_n=0}=0,$$

donde

$$h'=h-w'_{y_ny_n}+\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\gamma_{ij}w'_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}w'_{y_iy_n}+\sum_{i=1}^{n}\gamma_iw'_{y_i}+\gamma w',$$
$$w'(y)=v_0(y')+y_nv_1(y').$$

Efectivamente, es fácil advertir que si w es una solución analítica del problema citado, $v=w+w'$ será la solución analítica del problema (8)—(10).

Por consiguiente, las condiciones iniciales (8) y (9) pueden considerarse homogéneas, es decir, es suficiente construir un problema mayorante para el problema (8_0), (9_0), (10). Como los coeficientes y el término independiente de la ecuación (10) son analíticos en el origen de coordenadas, entonces (véase el punto 2) a título de ecuación $(\widetilde{10})$ del problema mayorante se puede tomar la ecuación

$$\widetilde{v}_{y_ny_n}=\frac{M}{1-\dfrac{y_1+\ldots+y_{n-1}+Ny_n}{\rho}}\times$$
$$\times\left(\sum_{i,\,j=1}^{n-1}\widetilde{v}_{y_iy_j}+\sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{v}_{y_iy_n}+\sum_{i=1}^{n}\widetilde{v}_{y_i}+\widetilde{v}+1\right) \qquad (\widetilde{\widetilde{10}})$$

para ciertos $\rho>0$, $M>0$ y $N\geqslant 1$ arbitrario. Examinemos las soluciones $\widetilde{v}=Y(\eta)$ de la ecuación $(\widetilde{\widetilde{10}})$, que sólo dependen de

$\frac{y_1+\ldots+y_{n-1}+Ny_n}{\rho}=\eta$. Todas ellas son soluciones de la ecuación ordinaria

$$Y''=\frac{AY'+B(Y+1)}{a-\eta},\tag{23}$$

en la que $A=\frac{M\rho(n-1+N)}{N^2}$, $B=\frac{M\rho^2}{N^2}$, $a=1-\frac{M(n-1)^2}{N^2}-$ $-\frac{(n-1)M}{N}$. Elijamos N tan grande, que el número a sea positivo, $0<a<1$.

Tomemos la solución $Y_0(\eta)$ de la ecuación (23) que satisface las condiciones iniciales homogéneas $Y_0(0)=Y_0'(0)=0$. Los coeficientes de la ecuación (23) son analíticos para $\eta=0$ (incluso cuando $|\eta|<a$). Por eso, no es difícil convencerse de que la función $Y_0(\eta)$ es también analítica en cero*). Ya sabemos que todas las derivadas de la función $\frac{1}{a-\eta}$ son positivas en el punto $\eta=0$. Así pues, en virtud de (23)

$$\frac{d^kY_0(0)}{d\eta^k}\geqslant 0 \quad \text{para} \quad \text{cualquier } k=0,\ 1,\ \ldots$$

De este modo, la función $\widetilde{v}(y)$, $=Y_0\left(\frac{y_1\ldots+y_{n-1}+Ny_n}{\rho}\right)$, analítica en el origen de coordenadas, es la solución de la ecuación $(\widetilde{\widetilde{10}})$ y todas sus derivadas en el origen de coordenadas son no negativas. Hemos, pues, construido la solución analítica del problema de Cauchy, la que mayora en el origen de coordenadas el problema (8_0), (9_0), (10). El teorema queda demostrado.

Del teorema 1 se deduce la siguiente afirmación.

---

*) He aquí el procedimiento más fácil para convencerse de esto. Consideremos una ecuación

$$\widetilde{Y}''=\frac{1}{a-\eta}\left(A\widetilde{Y}'+\frac{B(\widetilde{Y}+1)}{a-\eta}\right),\tag{$\widetilde{23}$}$$

cuyos coeficientes mayoran los coeficientes correspondientes de la ecuación (23) (dado que $0<a<1$). La ecuación $(\widetilde{23})$ es la de Euler para la función $\widetilde{Y}+1$. La solución de la ecuación $(\widetilde{23})$ que satisface las condiciones iniciales $\widetilde{Y}(0)=$ $=\widetilde{Y}'(0)=0$ es $\widetilde{Y}_0(\eta)=\frac{1}{\sigma_1-\sigma_2}\left[\sigma_1(1-\eta/a)^{\sigma_2}-\sigma_2(1-\eta/a)^{\sigma_1}\right]-1$, en la que $\sigma_1=\left[1-A+\sqrt{(1-A)^2+4B}\right]/2$ y $\sigma_2=\left[1-A-\sqrt{(1-A)^2+4B}\right]/2$. Esta solución es analítica en cero y mayora en el punto $\eta=0$ la función $Y_0(\eta)$.

TEOREMA 2. *Supongamos que los datos del problema* (1), (4), (5) *son analíticos y la superficie S no tiene puntos característicos. Entonces, existe un dominio Q' ($Q' \subset Q$), que contiene la superficie S, en el cual este problema tiene una solución analítica, y en ningún dominio, que contenga la superficie S, no puede haber más que una solución analítica de dicho problema.*

Ante todo indiquemos que la afirmación sobre la unicidad de la solución se deduce inmediatamente del teorema 1 y de las propiedades de las funciones analíticas.

Demostremos la existencia de la solución. Del teorema 1 se desprende que para todo punto x^0 de la superficie S existe un entorno en el cual el problema (1), (4), (5) se resuelve de manera unívoca. No es difícil ver que haciendo disminuir cada uno de los entornos U_{x^0}, $x^0 \in S$, se puede obtener un cubrimiento $\{U'_{x^0}, x^0 \in S\}$ de la superficie S que posee la siguiente propiedad: si la intersección de dos entornos cualesquiera no es vacía, será un conjunto abierto en el cual cada componente conexa contiene los puntos de S (es decir, esta intersección se representa como la unión de una cantidad a lo sumo numerable de dominios disjuntos cada uno de los cuales contiene puntos de S).

En efecto, examinemos en U_{x^0} una bola $\{|x - x^0| < r_0\}$ de radio $r_0 = r_0(x^0) > 0$ lo suficientemente pequeño para que el ángulo formado por las normales a S en dos puntos cualesquiera de la intersección de la bola con la superficie S, sea menor que $\pi/4$. A título de U'_{x^0} tomemos el dominio $\{x: x = x^1 + tn(x^1), x^1 \in S \cap \{|x - x^0| < r_0/4\}, t \in (-\delta_0, \delta_0)\}$, donde $n(x^1)$ es una normal a S en el punto x^1; además, vamos a considerar que $\delta_0 = \delta_0(x^0) < r_0/4$ es tan pequeño que por cada punto de este dominio pasa una sola normal a la superficie $S \cap \{|x - x^0| < r_0\}$ (es decir, para todo punto $x \in U'_{x^0}$ existe sólo un punto $x^1(x)$, perteneciente a $S \cap \{|x - x^0| < r_0\}$ tal que x pertenezca a la recta $\{x: x = x^1 + n(x^1)\, t, t \in R_1\}$). Es evidente que el cubrimiento $\{U'_{x^0}, x^0 \in S\}$ de la superficie S es el que buscamos.

Puesto que para todo $x^0 \in S$ se tiene $U'_{x^0} \subset U_{x^0}$, en el U'_{x^0} existe la única solución analítica del problema (1), (4), (5); designémosla mediante $u_{x_0}(x)$. Señalemos que si x^0 y x^1 son dos puntos arbitrarios de la superficie S y si, además, $U'_{x^0} \cap U'_{x^1} \neq \varnothing$, entonces en $U'_{x^0} \cap U'_{x^1}$ tenemos $u_{x^0}(x) \equiv u_{x^1}(x)$. Por consiguiente, en el dominio $Q' = \bigcup_{x^0 \in S} U'_{x^0}$, $Q' \subset Q$, la función analítica $u(x)$ puede determinarse, para $x \in U'_{x^0}$, por la igualdad $u(x) = u_{x^0}(x)$. La función $u(x)$ es la solución analítica buscada de la ecuación (1), (4), (5) en Q'. El teorema queda demostrado.

En caso de que la superficie S no contenga puntos característicos, el teorema de Kovalévskaya nos muestra que el problema de Cauchy para una ecuación en derivadas parciales de segundo orden que en el punto 1 fue planteado por analogía con el problema de Cauchy para la ecuación ordinaria de segundo orden, es realmente análogo a éste último en determinado sentido. El teorema de Cauchy, conocido en la teoría de ecuaciones ordinarias, afirma que la ecuación ordinaria (2) con coeficientes analíticos en el intervalo $a < x < b$ y un término independiente tiene en cierto entorno del punto x^0, en el que se dan las condiciones iniciales $a < x^0 < b$, una solución analítica única que satisface estas condiciones iniciales. El teorema de Kovalévskaya es una generalización del teorema de Cauchy con arreglo al caso de ecuaciones en derivadas parciales: si la superficie S, en la cual vienen dadas las condiciones iniciales, no tiene puntos característicos y los datos del problema (1), (4), (5) son analíticos, entonces en cierto «entorno» de la superficie S el problema (1), (4), (5) tiene una solución analítica única.

Sin embargo, no existe la analogía completa entre el problema de Cauchy para las ecuaciones ordinarias y el mismo problema para las ecuaciones en derivadas parciales, ni mucho menos entre la teoría de las ecuaciones ordinarias y la de las ecuaciones en derivadas parciales: en este último caso la situación es mucho más compleja.

En el punto 1 hemos mostrado que si la superficie S tiene puntos característicos, la existencia de la solución analítica (e incluso una solución que sea continuamente diferenciable dos veces) del problema de Cauchy no puede ser garantizada: si el punto $x^0 \in S$ es característico para la ecuación (1), existen funciones iniciales u_0 y u_1 (suaves e incluso analíticas) de tal género que en ningún entorno U de este punto no existe la solución (de $C^2(U)$) del problema (1), (4), (5). Se ha señalado, además, que si la superficie S es característica, pueden surgir tales circunstancias en las cuales el problema de Cauchy debe plantearse por analogía con una ecuación ordinaria de primer orden (por ejemplo, en el capítulo VI estudiaremos el problema de Cauchy en relación con la ecuación $u_{x_1x_1} - u_{x_2} = f(x)$, para la cual la recta $x_2 = 0$ es una característica; según veremos, el problema consiste en la búsqueda de la solución de esta ecuación en el semiplano $x_2 > 0$ que satisfaga una condición inicial, a saber, $u|_{x_2=0} = u_0(x_1)$). Como ilustra el siguiente ejemplo de Kovalévskaya, en este caso tampoco se garantiza la existencia de la solución analítica, aunque los datos del problema son analíticos.

Ejemplo 2. No existe en el origen de coordenadas una solución analítica de la ecuación

$$u_{x_1x_1} - u_{x_2} = 0,$$

que satisfaga la condición inicial

$$u\Big|_{x_2=0} = \frac{1}{1+x_1^2}.$$

Se comprueba inmediatamente que si la solución analítica de este problema existe en el origen de coordenadas:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2} u_{\alpha_1, \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

entonces, los coeficientes u_{α_1, α_2} tienen la forma $u_{2s, k} = \frac{(2s+2k)!}{(2s)!\,k!}(-1)^{k+s}$ y $u_{2s+1, k} = 0$, para $s \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Pero, en este caso la serie escrita no puede ser convergente en ningún entorno del origen de coordenadas, dado que diverge, por ejemplo, en cualquier punto $(0, x_2)$ para $x_2 \neq 0$.

Como es sabido, la solución del problema de Cauchy para la ecuación ordinaria (2) depende continuamente de los datos iniciales. El ejemplo de Hadamard, que se da más abajo, muestra que una ecuación en derivadas parciales no posee, en general, esta propiedad.

EJEMPLO 3. En el círculo $Q = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ examinemos el problema de Cauchy

$$u_{x_2x_2} = -u_{x_1x_1},$$

$$u|_{x_2=0} = u_{n,0} \equiv e^{-\sqrt{n}} e^{inx_1},$$

$$u_{x_2}|_{x_2=0} = u_{n,1} \equiv 0,$$

donde n es número natural (es evidente que la recta $x_2 = 0$ no tiene puntos característicos para la ecuación $u_{x_2x_2} = -u^{x_1x_1}$). Es fácil comprobar que la solución de este problema (única en la clase de funciones analíticas) tiene la forma $u = u_n(x) = e^{-\sqrt{n}}$ ch $nx_2 e^{inx_1}$. Por consiguiente, para cualquier punto $x = (x_1, x_2)$ del círculo Q que no se encuentre en la recta inicial $x_2 = 0$, tenemos: $|u_n(x)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, a pesar de que $u_{n,0}(x_1) \to 0$ ($|u_{n,0}| = e^{-\sqrt{n}}$) e, incluso cualquiera que sea $k \geqslant 1$, $\frac{d^k u_{n,0}}{dx_1^k} \to 0$ cuando $n \to \infty$ de una manera uniforme en $[-1, 1]$.

Además, es bien sabido que cualquier ecuación ordinaria (2) con coeficientes continuos en un intervalo determinado y un término independiente siempre tiene soluciones (por todo el intervalo). En cuanto se refiere a las ecuaciones en derivadas parciales que hemos considerado hasta ahora en una situación tan general, una afirmación análoga no tiene lugar: como muestra el ejemplo de Levi (citado en el punto 1), existen ecuaciones de segundo orden en derivadas parciales que no tienen ni una sola solución en ningún entorno de cierto punto; además, no hay ninguna clase de condiciones referentes a la suavidad de los coeficientes (incluso la naturaleza analítica de ellos) que garanticen la existencia de la solución, sea el término independiente tan suave como se quiera (incluso si es indefinidamente diferenciable). Por lo tanto, al estudiar soluciones no analíticas de una ecuación lineal de segundo orden en derivadas parciales necesitamos condiciones adicionales relacionadas con la estructura de la ecuación. En el párrafo que sigue vamos a destacar ciertas clases de ecuaciones que examinaremos a continuación.

§ 2. Clasificación de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

En el dominio n-dimensional Q examinemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden en derivadas parciales

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + a(x)\, u = f(x) \qquad (1)$$

Sean los coeficientes $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, de valores reales y supongamos que las soluciones de la ecuación (1) pertenecen a $C^2(Q)$. La matriz $A(x) = \| a_{ij}(x) \|$, compuesta por los coeficientes de las derivadas superiores del operador $\mathcal{L}$, puede considerarse simétrica. En efecto,

$$\sum a_{ij} u_{x_i x_j} = \sum a'_{ij} u_{x_i x_j} + \sum a''_{ij} u_{x_i x_j},$$

donde $a'_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, $a''_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$. Puesto que $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$, se tiene que $\sum a''_{ij} u_{x_i x_j} \equiv 0$; por eso $\sum a_{ij} u_{x_i x_j} \equiv \sum a'_{ij} u_{x_i x_j}$, siendo la matriz $\| a'_{ij}(x) \|$ simétrica.

Sea x^0 un punto arbitrario de Q y sean $\lambda_1(x^0), \ldots, \lambda_n(x^0)$ los valores propios (evidentemente reales) de la matriz $A(x^0)$. Designemos con $n_+ = n_+(x^0)$ el número de los valores propios positivos; con $n_- = n_-(x^0)$, el número de los valores propios negativos; con $n_0 = n_0(x^0)$, $n = n_+ + n_- + n_0$, el número de valores nulos.

La ecuación (1) se denomina *ecuación de tipo elíptico en el punto* x^0 (o, simplemente, *elíptica en el punto* x^0), si $n_+ = n$, ó $n_- = n$. Una ecuación se llama *elíptica en el conjunto* E, $E \subset Q$, si es elíptica en todo punto de este conjunto. Ejemplo de ecuación elíptica en R_n es la de Poisson

$$\Delta u = f,$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ es el operador de Laplace.

La ecuación (1) se denomina *hiperbólica en el punto* $x^0 \in Q$ (*ecuación de tipo hiperbólico* en x^0) si $n_+ = n - 1$ y $n_- = 1$, ó si $n_+ = 1$ y $n_- = n - 1$. Si la ecuación es hiperbólica en todo punto del conjunto E, $E \subset Q$, se llama *hiperbólica en* E. Ejemplo de ecuación hiperbólica en todo el espacio R_n de las variables $x_1, \ldots, x_n$, es la ecuación de onda

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n-1}x_{n-1}} - u_{x_nx_n} = f.$$

La ecuación (1) se denomina *ultrahiperbólica en el punto* x^0, si $n_0 = 0$ y $1 < n_+ < n - 1$. La ecuación (1) es *ultrahiperbólica en* E, $E \subset Q$, si es ultrahiperbólica en cada punto de E. La ecuación

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} = f(x)$$

es ultrahiperbólica en todo el espacio R_4.

La ecuación (1) se denomina *parabólica* (o *ecuación de tipo parabólico*) *en el punto* $x^0 \in Q$, si $n_0 > 0$. La ecuación (1) se llama *parabólica en el conjunto* $E \subset Q$, si es parabólica en todo punto de E. Ejemplo de ecuación parabólica en todo el espacio R_n de las variables $x_1, \ldots, x_n$ es la ecuación de conducción de calor

$$u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n-1}x_{n-1}} - u_{x_n} = f(x).$$

Por supuesto, el tipo de ecuación no tiene que ser necesariamente el mismo para todos los puntos del dominio. Por ejemplo, la ecuación de Chaplíguin ($n = 2$),

$$u_{x_1x_1} + T(x_1)\, u_{x_2x_2} = f(x),$$

donde la función $T(x_1)$ es positiva para $x_1 > 0$, negativa para $x_1 < 0$ e igual a cero para $x_1 = 0$, será elíptica para $x_1 > 0$, hiperbólica para $x_1 < 0$, y parabólica, para $x_1 = 0$.

Recordemos (véase el punto 1, § 1) que la superficie S, ubicada en Q y definida por la ecuación $F(x) = 0$ (la función de valores reales $F \in C^1(Q)$ y $|\nabla F| \neq 0$ en S), se llama característica para la ecuación (1), si en todos los puntos $x \in S$

$$(A(x)\nabla F, \nabla F) = 0. \tag{2}$$

Si la ecuación (1) es elíptica en Q, la matriz $A(x)$ será positiva o negativamente definida en cualquier punto $x \in Q$. Esto significa que la ecuación (2) sólo puede tener lugar cuando $|\nabla F| = 0$. Por consiguiente, las ecuaciones elípticas no tienen superficies características (todavía más, no existe ninguna superficie S que contenga un solo punto característico de la ecuación elíptica).

Siendo la ecuación (1) hiperbólica en Q, se puede mostrar que por cualquier punto del dominio Q se puede trazar una superficie característica. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de onda $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n-1}x_{n-1}} = u_{x_nx_n}$, la ecuación (2) tiene la forma

$$F_{x_1}^2 + \ldots + F_{x_{n-1}}^2 - F_{x_n}^2 = 0 \tag{2'}$$

Esta ecuación se satisface, en particular, por la función $(x - x_0, m) = (x_1 - x_1^0) m_1 + \ldots + (x_n - x_n^0) m_n$, donde x^0 es un punto arbitrario de R_n, y el vector $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $|m| = 1$, está subordinado a la condición $m_1^2 + \ldots + m_{n-1}^2 = m_n^2$. La ecuación (2') también queda satisfecha por la función $(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)^2 - (x_n - x_n^0)^2$, donde x^0 es un punto arbitrario de R_n. Por lo tanto, el plano $(x - x^0, m) = 0$ y la superficie cónica $(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)^2 = (x_n - x_n^0)^2$ son características de la ecuación de onda. Para la ecuación de conducción de calor $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_{n-1}x_{n-1}} = u_{x_n}$ la ecuación (2) tiene la forma

$$F_{x_1}^2 + \ldots + F_{x_{n-1}}^2 = 0.$$

Es evidente que cualquier solución de esta ecuación tiene la forma $F = \Phi(x_n)$, donde Φ es una función arbitraria continuamente diferenciable ($\Phi' \neq 0$). Por eso, las características de la ecuación de conducción de calor son los planos $x_n = \text{const}$.

Sea x^0 un punto del dominio Q. Designemos mediante $y = y(x)$ $(y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n)$ una transformación que representa biunívocamente cierto entorno U del punto x^0 en el entorno V que corresponde al punto y^0, $y^0 = y(x^0)$, y mediante $x = x(y)$, una transformación inversa a la primera. Supondremos, además, que las funciones $y_i(x) \in C^2(\overline{U})$, $i = 1, \ldots, n$, y que la matriz de Jacobi $J(x) = \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\|$ de la transformación $y = y(x)$ no está degenerada, es decir, en $\overline{U}$ el jacobiano de la transformación es distinto de cero ($\det J(x) \neq 0$). Designaremos la función $u(x(y))$ por $v(y)$. Puesto que $u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} y_{kx_i}$, $u_{x_ix_j} = \sum_{k,s=1}^{n} v_{y_ky_s} y_{kx_i} y_{sx_j} + \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} y_{kx_ix_j}$, entonces, después del cambio de variables la ecuación (1) tomará la forma

$$\sum_{k,s=1}^{n} \tilde{a}_{ks}(x(y)) v_{y_ky_s} = F(y, v, \nabla v), \tag{3}$$

donde $\tilde{a}_{ks}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) y_{kx_i} y_{sx_j}$, y F es una función que no depende de las segundas derivadas de v. Puesto que las matrices $\tilde{A}(x) = \|\tilde{a}_{ks}(x)\|$ y $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ están ligadas por la ecuación $\tilde{A}(x) = JAJ^*$, ambas matrices, de acuerdo con el conocido teorema de Algebra, tendrán igual número de valores propios positivos, negativos y nulos. Esto significa que en todo punto $y \in V$ la ecuación (3) será del mismo tipo que la (1) en el correspondiente punto $x \in U$. De este modo, la clasificación de las ecuaciones de segundo orden, expuesta más arriba, es invariante respecto a las transformaciones suaves biunívocas no degeneradas de las variables independientes. Esta circunstancia puede ser aprovechada para simplificar la ecuación (1).

Tomemos un punto arbitrario $x^0 \in Q$. Sabemos que para la matriz $A(x^0)$ existe otra matriz degenerada $T = T(x^0) = \| t_{ij} \|$, tal que

$$TA(x^0)\,T^* = \Lambda(x^0) = \begin{Vmatrix} \overbrace{+1 \ \ddots \ +1}^{n_+} & & & 0 \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{n_-} & & \\ & & \overbrace{0 \ \ddots \ 0}^{n_0} & \\ 0 & & & \end{Vmatrix}$$

Realicemos la sustitución lineal de las variables independientes $y = T(x^0)\,x$. Como la matriz de Jacobi de esta sustitución es igual a T, entonces, como resultado de la transformación, la ecuación (1) se transformará en la (2), en la que la matriz de los coeficientes de derivadas superiores es igual a $TA(x)\,T^*$. Esto significa que para $x = x^0$ la ecuación (3) tiene la forma

$$v_{y_1 y_1} + \ldots + v_{y_{n_+} y_{n_+}} - v_{y_{n_++1} y_{n_++1}} - \ldots - v_{y_{n_++n_-} y_{n_++n_-}} = F_1,$$

donde la función F_1 no depende de las segundas derivadas de la función v. Esta se llama *forma canónica* de la ecuación (1) en el punto x^0.

De este modo para cualquier punto $x = x^0 \in Q$ puede indicarse una transformación lineal no singular de las variables independientes que para $x = x^0$ reduce la ecuación (1) a la forma canónica. Como la transformación depende sólo de los valores de los coeficientes que tienen en (1) las derivadas superiores para $x = x^0$, entonces en el caso cuando estos coeficientes son constantes en Q, la transformación lineal determinada reduce la ecuación (1) a una forma canónica en todo punto del dominio Q (dentro del dominio Q).

§ 3. Planteamiento de algunos problemas

En este párrafo vamos a examinar algunos problemas físicos que conducen a los problemas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

1. Problemas de equilibrio y movimiento de una membrana.

Consideremos un problema que tiene por objeto encontrar la posición de equilibrio de una membrana (película elástica fina), que se encuentra bajo la acción de cierto sistema de fuerzas.

Supongamos que en cualquier posición admisible la membrana es una superficie, ubicada en el espacio $(x, u) = (x_1, x_2, u)$, que se proyecta unívocamente sobre cierto dominio Q del plano x_1Ox_2 y que se define por la ecuación $u = u(x)$, $x \in Q$, en la que $u(x)$ es una función de la clase $C^1(\overline{Q})$. Convengamos en lo siguiente: si $u = \varphi(x)$, $x \in Q$, caracteriza una posición admisible de la membrana, cualquier otra posición $u = u(x)$ se obtendrá de la posición $u = \varphi(x)$, desplazándose cada punto de la membrana paralelamente al eje Ou.

Supongamos que la fuerza exterior que actúa sobre la membrana es paralela al eje Ou y tiene una densidad continua $f_1(x, u)$ igual a $f(x) - a(x)u$ (la membrana se encuentra bajo la acción de la fuerza exterior de densidad $f(x)$, $x \in Q$, y la fuerza de resistencia del medio elástico cuya densidad, igual a $-a(x)u$, es proporcional al desplazamiento y de signo inverso al de éste; $a(x) \geqslant 0$ es el coeficiente de elasticidad del medio). El trabajo de la fuerza indispensable para desplazar la membrana de la posición $\varphi(x)$ a la $u(x)$, será igual a:

$$\int_Q \int_{\varphi(x)}^{u(x)} f_1(x, u)\, du\, dx = \int_Q \Big[f(x)(u(x) - \varphi(x)) - \\ - \frac{a(x)}{2}(u^2(x) - \varphi^2(x)) \Big] dx.$$

Pero la membrana es, además, accionada por la fuerza interior de elasticidad. El trabajo de ésta para desplazar la membrana de la posición $\varphi(x)$ a la $u(x)$ es

$$-\int_Q k(x)\left[\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}\right] dx$$

(el trabajo de esta fuerza reducido al elemento $(x_1, x_1 + \Delta x_1) \times \times (x_2, x_2 + \Delta x_2)$ de Q es proporcional a la variación del área de la superficie de aquella parte de la membrana que se proyecta sobre el citado elemento; el coeficiente $k(x) > 0$ se llama tensión de la membrana).

Si en los puntos del contorno de la membrana está aplicada una fuerza cuya densidad lineal se expresa por $g_1(x, u) = g_1(x) - \sigma_1(x)u$ ($\sigma_1(x) \geqslant 0$ es el coeficiente de la fijación elástica del contorno), el trabajo de esta fuerza necesario para desplazar la membrana de la posición $\varphi(x)$ a la $u(x)$ es igual a

$$\int_{\partial Q} \Big[g_1(x)(u(x) - \varphi(x)) - \frac{\sigma_1(x)}{2}(u^2(x) - \varphi^2(x)) \Big] dS.$$

De este modo, la energía potencial de la membrana en la posición $u(x)$ será

$$U(u)=U(\varphi)+\int\limits_{Q}\Big[k(x)\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2}-\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}\right)+$$
$$+\frac{a}{2}(u^2-\varphi^2)-f(u-\varphi)\Big]dx+\int\limits_{\partial Q}\Big[\frac{\sigma_1}{2}(u^2-\varphi^2)-g_1(u-\varphi)\Big]dS,$$

donde $U(\varphi)$ es la energía potencial de la membrana en la posición φ.

Con el fin de simplificar el problema supongamos que el gradiente de la función $u(x)$ es pequeño en todas las posiciones que puede ocupar la membrana y despreciemos los términos del orden $|\nabla u|^4$. En este caso la energía potencial de la membrana en la posición u se expresa del modo siguiente

$$U(u)=U(\varphi)+\int\limits_{Q}\Big[\frac{k}{2}(|\nabla u|^2-|\nabla\varphi|^2)+$$
$$+\frac{a}{2}(u^2-\varphi^2)-f(u-\varphi)\Big]dx+\int\limits_{\partial Q}\Big[\frac{\sigma_1}{2}(u^2-\varphi^2)-g_1(u-\varphi)\Big]dS.$$

Si u es la posición de equilibrio de la membrana, de acuerdo con el principio de los posibles desplazamientos, el polinomio (respecto a t)

$$P(t)=U(u+tv)=$$
$$=U(u)+t\Big[\int\limits_{Q}(k\nabla u\nabla v+auv-fv)\,dx+\int\limits_{\partial Q}(\sigma_1uv-g_1v)\,dS\Big]+$$
$$+\frac{t^2}{2}\Big[\int\limits_{Q}(k|\nabla v|^2+av^2)\,dx+\int\limits_{\partial Q}\sigma_1v^2\,dS\Big]$$

tiene, para $t=0$, un punto estacionario, cualquiera que sea v dentro de los límites admisibles. Por consiguiente, $\frac{dP(0)}{dt}=0$, es decir, para todo $v\in C^1(\overline{Q})$ la función $u(x)$, que describe la posición de equilibrio de la membrana, satisface la siguiente identidad integral:

$$\int\limits_{Q}(k\nabla u\nabla v+auv)\,dx+\int\limits_{\partial Q}\sigma_1uv\,dS=\int\limits_{Q}fv\,dx+\int\limits_{\partial Q}g_1v\,dS. \qquad (1)$$

Si el contorno de la membrana está inmóvil (sujeción rígida), todas las posiciones admisibles de la membrana satisfacen la condición

$$u|_{\partial Q}=\varphi|_{\partial Q}. \qquad (2)$$

En este caso la energía potencial de la membrana para una posición arbitraria u es igual (siempre que se desprecian los términos del orden $|\nabla u|^4$) a

$$U(u)=U(\varphi)+\int_Q\left[\frac{k}{2}(|\nabla u|^2-|\nabla\varphi|^2)+\frac{a}{2}(u^2-\varphi^2)-f(u-\varphi)\right]dx.$$

Sea u la posición de equilibrio de una membrana fijada rígidamente. Entonces, para toda $v\in C^1(\overline{Q})$ que satisfaga la condición

$$v|_{\partial Q}=0, \qquad (3)$$

la función $u+tv$ satisfará la condición (2), cualquiera que sea t. Por lo tanto, para todas las v de este género el polinomio

$$P(t)=U(u+tv)=U(u)+t\int_Q(k\nabla u\nabla v+auv-fv)\,dx+$$

$$+\frac{t^2}{2}\int_Q(k|\nabla v|^2+av^2)\,dx$$

tiene mínimo cuando $t=0$. Esto significa que para todos los $v\in\in C^1(\overline{Q})$ que satisfacen la condición (3), la función $u(x)$, que describe a posición de la membrana fijada rígidamente, satisface la identidad integral

$$\int_Q(k\nabla u\nabla v+auv)\,dx=\int_Q fv\,dx. \qquad (4)$$

En el capítulo V mostraremos que en el caso de que las funciones k, a, σ_1, f, g_1 (o incluso $\varphi_{\partial Q}$, si la membrana está fijada rígidamente) estén sujetas a ciertas limitaciones, las identidades integrales (1) y (4) determinan las únicas funciones $u(x)$, siempre que se cumpla la condición (2). Además demostraremos también que si el contorno ∂Q es suficientemente suave, las funciones $u(x)$ pertenecen al espacio $C^2(\overline{Q})$.

De inmediato, en lugar de las condiciones integrales (1) y (4) hallemos las condiciones locales a las cuales debe satisfacer la función buscada $u(x)$, suponiendo que $u(x)\in C^2(\overline{Q})$, $k(x)\in C^1(\overline{Q})$, $k(x)\geqslant k_0>0$, $a(x)\in C(\overline{Q})$, $\sigma_1(x)\in C(\partial Q)$, $g_1\in C(\partial Q)$, $\varphi\in\in C(\partial Q)$.

Como, según la fórmula de Ostrogradski, para cualquier $v\in\in C^1(\overline{Q})$

$$\int_Q k\nabla u\nabla v\,dx=-\int_Q v\,\mathrm{div}\,(k\nabla u)\,dx+\int_{\partial Q}k\frac{\partial u}{\partial n}v\,dS,$$

las identidades (1) y (4) pueden ser de nuevo escritas, respectivamente, de la forma

$$\int_Q(\mathrm{div}\,(k\nabla u)-au+f)\,v\,dx-\int_{\partial Q}\left(k\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma_1 u-g_1\right)v\,dS=0 \qquad (1')$$

y

$$\int_Q (\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f)\, v\, dx = 0. \qquad (4')$$

Dado que la función $\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f$ es continua, de la identidad (4′) se desprende la igualdad

$$\operatorname{div}(k\nabla u) - au + f = 0, \quad x \in Q, \qquad (5)$$

la cual, junto con la condición límite (2), nos proporciona las condiciones locales buscadas a las cuales debe satisfacer la función $u(x)$, si la membrana está rígidamente fijada. El problema de hallar la solución de la ecuación (5) que satisfaga la condición límite (2), se llama *primer problema de contorno* (*problema de Dirichlet*) para la ecuación (5).

Ya que en la (1′) $v(x)$ es una función arbitraria de $C^1(\overline{Q})$, entonces, en particular, cuando v satisfacen la condición (3), obtenemos que $u(x)$ también satisface, en este caso, la ecuación (5). Por consiguiente, la identidad (1′) puede escribirse de nuevo del modo siguiente:

$$\int_{\partial Q} \left(k\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_1 u - g_1\right) v\, dS = 0.$$

Puesto que para cualquier función de $C^1(\partial Q)$ existe una prolongación a Q, perteneciente a $C^1(\overline{Q})$ (véase p. 2, § 4, cap. III), de la última identidad se desprende la condición límite

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u \Big|_{\partial Q} = g \qquad (6)$$

donde $\sigma = \sigma_1/k \geqslant 0$, $g = g_1/k$.

El problema en que se busca la solución de la ecuación (5), que satisfaga la condición límite (6), se llama *tercer problema de contorno* para la ecuación (5). Cuando $\sigma \equiv 0$, el tercer problema de contorno lleva el nombre del *segundo problema de contorno* (*problema de Neumann*). La condición límite tiene en este caso la forma

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = g. \qquad (7)$$

De este modo, la posición de equilibrio de la membrana se describe por la solución de la ecuación (5) que satisface cierta condición límite. La ecuación (5) es de tipo elíptico y se llama *ecuación de equilibrio de la membrana*.

Examinemos ahora el problema del movimiento de la mebrana.

Sea que la función $u(x, t)$ caracteriza la posición de la membrana en el instante t de tiempo. Entonces, las funciones $u_t(x, t)$ y

$u_{tt}(x, t)$ (se supone que estas derivadas existen) determinan la velocidad y la aceleración de la membrana en el punto $x \in Q$. La posición y la velocidad de la membrana en el instante (inicial) $t = t_0$ están prefijadas, es decir,

$$u|_{t=t_0} = \psi_0(x), \quad x \in \overline{Q}, \tag{8}$$

$$u_t|_{t=t_0} = \psi_1(x), \quad x \in \overline{Q}. \tag{9}$$

Las condiciones (8) y (9) se llaman iniciales.

De acuerdo con el principio de d'Alembert, la ecuación de movimiento de la membrana es la ecuación de equilibrio (5) en la cual $f(x)$ está sustituida por la función $-\rho(x)u_{tt} + f(x, t)$:

$$\operatorname{div}(k\nabla_x u) - au + f(x, t) - \rho(x)u_{tt} = 0, \qquad x \in Q, \ t > t_0. \tag{10}$$

(Aquí, $-\rho(x)u_{tt}$ es la densidad de la fuerza de inercia en el punto x; $\rho(x) > 0$, la densidad de la membrana en el punto x, y $f(x, t)$ es la densidad de la fuerza exterior dependiente, en general, de t).

Igual que en el caso estático, las condiciones límites tienen la forma (2), (6) ó (7) (según sea el régimen dado en el contorno ∂Q) y se cumplen para todos los valores de tiempo $t \geqslant t_0$ que se consideran. Los problemas en que se busca la solución de la ecuación (10) para las condiciones (2), (8), (9); (7), (8), (9); (6), (8), (9) se llaman, respectivamente, *primero, segundo y tercer problemas mixtos* de la ecuación (10).

De este modo, el movimiento de la membrana se describe por la solución de la ecuación (10) que satisface las condiciones iniciales y ciertas condiciones límites. La ecuación (10) es hiperbólica (en un espacio tridimensional) y se denomina *ecuación de movimiento de la membrana*.

En el caso de una membrana extendida infinitamente ($Q = R_2$), la función $u(x, t)$, que describe el movimiento de ésta, satisface las condiciones iniciales (8) y (9) y es una solución de la ecuación (10) para todos los $x \in R_2$ y $t > t_0$. Aquí decimos que $u(x, t)$ es una solución *del problema inicial (problema de Cauchy)* para la ecuación (10).

Si los coeficientes en las ecuaciones (10) y (5) son constantes: $k(x) \equiv k$, $\rho(x) \equiv \rho$ y $a(x) \equiv 0$, entonces las ecuaciones se llaman, respectivamente, *de onda*:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt} - \Delta u = \frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in Q, \quad t > t_0, \quad a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \tag{10'}$$

y *de Poisson*

$$\Delta u = -\frac{f(x)}{k}, \quad x \in Q. \tag{5'}$$

En el caso de una variable espacial la ecuación (10') tiene la forma

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - u_{xx} = \frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad t > t_0. \tag{10'}$$

Esta ecuación describe el movimiento de una cuerda dispuesta sobre el intervalo (α, β). Cuando $x = (x_1, x_2, x_3)$, la ecuación

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u = \frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in Q, \quad t > t_0, \tag{10''}$$

describe el movimiento del gas en el dominio Q (la función $u(x, t)$ caracteriza, por ejemplo, pequeñas desviaciones de la presión del gas, respecto a la presión constante, que se observan en el punto $x \in Q$ en el momento t). El número a, en este caso, es la velocidad de propagación del sonido en el gas.

2. Problema de difusión del calor. Supongamos que una sustancia que se encuentra en el dominio tridimensional Q se caracteriza por la densidad $\rho(x) > 0$, la capacidad calorífica $c(x) > 0$ y por el coeficiente de conductibilidad térmica $k(x) > 0$. Designemos mediante $u(x, t)$ la temperatura en el punto $x \in Q$ en el momento t. Sea que la temperatura en el momento inicial $t = t_0$ es conocida:

$$u(x, t)|_{t=t_0} = \psi_0(x), \quad x \in Q; \tag{11}$$

se requiere determinarla para $t > t_0$.

Sea Q' un subdominio de Q. En conformidad con la ley de Newton la cantidad de calor que pasa por el contorno ∂Q al dominio Q' durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2), $t_0 \leqslant t_1 < t_2$, es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

donde n es una normal a $\partial Q'$, exterior respecto de Q'

Si en el dominio Q hay fuentes de calor de la densidad conocida $f(x, t)$, el incremento de la cantidad de calor en Q' durante el tiempo (t_1, t_2) será igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x, t)\, dx + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

y, por tanto, la ecuación del balance térmico en Q' tiene la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x, t)\, dx =$$

$$= \int_{Q'} c(x) \rho(x) (u(x, t_2) - u(x, t_1))\, dx.$$

Tomando en consideración que $u(x, t_2) - u(x, t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$, y valiéndose de la fórmula de Ostrogradski, obtenemos

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{Q'} \left[c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - f(x, t) \right] dx = 0.$$

Si la función integrando es continua en Q, en virtud de la arbitrariedad del dominio Q' y del intervalo (t_1, t_2) la última igualdad es equivalente a la ecuación diferencial

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f(x, t), \quad x \in Q, \quad t_1 > t_0. \tag{12}$$

Esta es una ecuación del tipo parabólico (en el espacio de cuatro dimensiones x_1, x_2, x_3, t). Cuando las funciones $c(x)$, $\rho(x)$ y $k(x)$ son constantes, la ecuación (12) se llama *ecuación de conducción del calor*:

$$\frac{1}{a^2} u_t - \Delta u = \frac{f(x, t)}{c\rho}, \tag{12'}$$

en la que $a^2 = \frac{k}{c\rho}$.

Subrayemos que la ecuación (12) sólo es válida para los puntos interiores del dominio Q y sólo cuando $t > t_0$. El compartamiento de la función $u(x, t)$ para $t = t_0$ se prefija por la condición inicial (11), y tiene que ser dado adicionalmente para $x \in \partial Q$. Se impone por las condiciones de un problema físico concreto que establece la ligazón térmica entre Q y el medio exterior.

En el caso más sencillo se da la temperatura $u(x, t)$ en el contorno ∂Q:

$$u|_{\partial Q} = f_0(x, t) \tag{13}$$

para todos los valores de t que se consideran. Entonces, la temperatura será descrita por la solución $u(x, t)$ de la ecuación (12), que satisface las condiciones (11) y (13).

Si se conoce la densidad $q_0(x, t)$ del flujo térmico que pasa por el contorno ∂Q, la condición límite, de acuerdo con la ley de Newton, tendrá la forma

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial Q} = q_0(x, t). \tag{14}$$

Si se conoce la temperatura $u_0(x, t)$ del medio fuera del dominio Q, mientras que la densidad del flujo térmico $q_0(x, t)$ por el contorno ∂Q es proporcional a la diferencia de temperaturas $u|_{\partial Q}$ y $u_0|_{\partial Q}$, entonces, la condición límite adquiere la forma

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + k_1 u\bigg|_{\partial Q} = k_1 u_0\bigg|_{\partial Q}, \tag{15}$$

donde $k_1(x) > 0$ es el coeficiente de intercambio de calor entre el cuerpo en cuestión y el medio.

Los problemas en que se determinan las soluciones de la ecuación (12) en las condiciones (11), (13); (11), (14); (11), (15) se llaman, respectivamente, *primero*, *segundo* y *tercer problemas mixtos* para la ecuación (12).

En el caso en que la sustancia llena todo el espacio R_3, $Q = R_3$, la temperatura $u(x, t)$ satisface la ecuación (12) cuando $t > t_0$, y la condición (11), cuando $t = t_0$. En este caso suele decirse que $u(x, t)$ es una solución *del problema inicial* (*problema de Cauchy*) para la ecuación (12).

PROBLEMAS DEL CAPITULO I

1. Supóngase que una superficie S de la clase C^2 divide el dominio Q en dos dominios disjuntos, Q^+ y Q^-, y que la función $u(x)$ pertenece a $C^1(\bar{Q}) \cap C^2(Q^+ \cup S) \cap C^2(Q^- \cup S)$, satisfaciendo en Q^+ y Q^- la ecuación lineal de segundo orden

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x) \tag{1}$$

con coeficientes continuos en $\bar{Q}$ y un término idependiente. Demuéstrese que si para cualquier entorno U_{x^0} de cierto punto $x^0 \in S$, la función $u(x)$ no pertenece a $C^2(U_{x^0})$, entonces x^0 es un punto característico para la ecuación (1).

2. Supóngase que en el dominio bidimensional Q está dada una ecuación lineal de segundo orden (1) con coeficientes analíticos y un término independiente y que, además, las rectas L_1 y L_2, que se cortan en un punto $x^0 \in Q$, son características para esta ecuación. Demuéstrese que el problema (problema de Goursat) de búsqueda de la solución $u(x)$ de la ecuación (1), que satisfaga las condiciones $u|_{L_1} = u_1$, $u|_{L_2} = u_2$ con funciones analíticas u_1 y u_2, tiene en cierto entorno del punto x^0 una solución única en la clase de funciones analíticas ($u_1(x^0) = u_2(x^0)$).

3. Sea dada en un dominio Q una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes continuos. Demuéstrese que:

— si la ecuación es elíptica (o hiperbólica) en algún punto de Q, será elíptica (o hiperbólica) también en algún entorno de este punto;

— si en Q existen dos puntos y la ecuación es elíptica en uno de ellos e hiperbólica en otro, entonces en Q habrá un punto en el que la ecuación sea parabólica

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO I

I. N. Vékua, Funciones analíticas generalizadas, Fismatguiz, 1959 (en ruso).

V. S. Vladímirov, Ecuaciones de la física matemática, «Naúka», 1971 (en ruso).

V. S. Vladímirov, Métodos de la teoría de funciones de varias variables complejas, «Naúka», 1964 (en ruso).

I. G. Petróvski, Conferencias sobre las ecuaciones en derivadas parciales, Fismatguiz, 1961 (en ruso).

S. L. Sóbolev, Ecuaciones de la física matemática, Fismatguiz, 1954 (en ruso).

A. Tijonov, A. Samarsky, Ecuaciones de la física matemática, Editorial MIR.

CAPITULO II. INTEGRAL DE LEBESGUE Y ALGUNOS PROBLEMAS DEL ANALISIS FUNCIONAL

§ 1. Integral de Lebesgue

El concepto de integral y el de función integrable, estrechamente relacionados entre sí, constituyen las nociones principales del análisis matemático. Estos conceptos, en el proceso de su desarrollo, han sufrido considerables cambios, como lo exigían las ciencias aplicadas y las propias matemáticas. Si la resolución de unos problemas requería sólo saber integrar funciones continuas o incluso analíticas, para resolucionar otros problemas se necesitaba ampliar estos conjuntos y, a veces, considerar un conjunto de todas las funciones integrables según Riemann. Es más, para la descripción matemática de algunos fenómenos resulta insuficiente «rico» inclusive el conjunto de funciones integrables según Riemann. Es natural que dicho conjunto resultó también insuficiente para las mismas matemáticas.

En particular, se logra describir aproximadamente algunos procesos por medio de una sucesión de funciones «buenas» $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, respecto de la cual sólo podemos afirmar que es convergente en cierto sentido integral. Así por ejemplo, la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, puede poseer una de las siguientes propiedades: $\int |f_k - f_m|\, dx \to 0$ cuando $m, k \to \infty$ (lo fundamental de la sucesión radica en la media), $\int (f_k - f_m)^2\, dx \to 0$ (lo fundamental está en la media cuadrática) o, en los casos más complejos, tienden a cero las integrales que contienen derivadas de las funciones (lo fundamental según la energía). Estas propiedades (en particular, en el segundo caso donde se trata de lo fundamental en la media cuadrática) de por sí pueden no garantizar la convergencia en el sentido común, es decir, la sucesión puede no converger en ningún punto. No obstante, se puede mostrar (lo haremos más abajo) que existe una función, única en cierto sentido, hacia la que esta sucesión converge (en la media cuadrática). En el caso general la función citada no es integrable según Riemann, por lo que en la definición de convergencia la integral se debe entender en un sentido más amplio, es decir, en el sentido de Lebesgue:

1. Conjunto de medida nula. Un conjunto $E \subset R_n$ se llama *conjunto de medida* (n-dimensional) *nula*, si se puede cubrirlo con un sistema numerable de cubos abiertos (n-dimensionales) en el que la suma de volumenes (volumen sumario) es tan pequeña como se quiera, es decir, respecto de cualquier $\varepsilon > 0$ existe un sistema numerable de cubos $K_1, K_2, \ldots$, tal que sea $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, y el volumen sumario de los cubos

$\sum_{i=1}^{\infty} |K_i| < \varepsilon$, donde $|K_i|$ es el volumen del cubo K_i, $i = 1, 2, \ldots$.

De la definición se desprende directamente que un conjunto compuesto de un número numerable de puntos es un conjunto de medida nula. La intersección y la unión de un número numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula. Las superficies suaves de k-ésima dimensión, $k < n$, es también un conjunto de medida nula.

A continuación nos será útil el criterio siguiente.

LEMA 1. *El conjunto E es un conjunto de medida nula, si, y sólo si, para él existe tal cubrimiento por un sistema numerable de cubos de volumen sumario finito, con el que cada punto resulta ser cubierto por un conjunto infinito de estos cubos.*

Supongamos, al principio, que el cubrimiento de que se trata en el lema 1 existe. Excluyendo de éste un número finito de cubos de volumenes máximos, se puede conseguir que el volumen sumario del cubrimiento restante sea tan pequeño como se quiera. Esto certifica que E es un conjunto de medida nula. Viceversa, si E es un conjunto de medida nula, se puede cubrirlo por un número numerable de cubos cuyo volumen sumario sea inferior a 2^{-k}, cualquiera que sea el número entero $k \geqslant 1$. El cubrimiento necesario se obtendrá al reunir estos cubrimientos respecto de $k = 1, 2, \ldots$

Si alguna propiedad se cumple para todos los puntos x de cierto conjunto G, a excepción, quizás, del conjunto de medida nula, se dice que esta propiedad se cumple *en casi todo punto* $x \in G$ (en c.t.p) o *casi siempre*. Así, por ejemplo, la función de Dirichlet $\chi(x)$, que es igual a 1 en los puntos cuyas coordenadas son todas racionales y es nula en todos los demás puntos, es igual a cero en c.t.p. de R_n o casi siempre en R_n.

Sea Q un dominio del espacio R_n. A la par de las funciones definidas por doquier en Q (es decir, funciones que asumen un valor finito en cada punto de Q) examinaremos también las funciones definidas en casi todo punto de Q (casi siempre en Q), es decir, funciones cuyos valores no están definidos en los conjuntos de medida nula, con la particularidad de que las funciones $f + g$, $f \cdot g$ (f y g están definidas casi siempre) están definidas en aquellos puntos en los que están definidas ambas funciones f y g.

2. Funciones medibles. Sea Q un dominio del espacio R_n. La sucesión de funciones $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, (definidas casi en todo punto de Q) se llama *convergente* en casi todo punto de Q, si casi para todos los $x^0 \in Q$ la sucesión numérica de valores de estas funciones tiene en el punto x^0 un límite (finito). La función $f(x)$ se llama *límite de la sucesión, convergente en casi todo punto*, $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, f_k(x) \to f(x)$ casi siempre en Q cuando $k \to \infty$, si para casi todos los $x^0 \in Q$ se tiene $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x^0) = f(x^0)$. Es obvio que si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son los límites para cierta sucesión de funciones convergente en casi todo punto, ellas coinciden en casi todo punto.

La función $f(x)$ se llama *medible* en Q, si es el límite para una sucesión de funciones de $C(\overline{Q})$, convergente en casi todo punto.

Indiquemos algunas propiedades obvias de las funciones medibles.

De la definición se desprende que la función $f(x)$, perteneciente a $C(\overline{Q})$, es medible. Una función arbitraria $f(x)$ de $C(Q)$ es también medible, dado que puede ser representada en forma del límite para una sucesión de funciones de $C(\overline{Q})$ convergente en Q: $f(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} f(x)\,\zeta_\delta(x)$, donde $\zeta_\delta(x)$ es una función cortante para el dominio Q (véase el cap I).

Una combinación lineal arbitraria de funciones medibles es una función medible; si f_1 y f_2 son medibles, la función $f_1 \cdot f_2$, es medible como también será medible la función $\frac{f_1}{f_2}$, siempre que se suponga adicionalmente que $f_2(x) \neq 0$ en casi todo punto. Junto con f es también medible la función $|f|$. Las funciones $\max\limits_{i\leq k}(f_i(x))$ y $\min\limits_{i\leq k}(f_i(x))$ son medibles, si lo son $f_1, \ldots, f_k$. En el punto 7 demostraremos que si una sucesión de funciones medibles converge en casi todo punto hacia cierta función, esta última es también medible. Por eso, si las funciones $\sup\limits_k(f_k(x)) = \lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{i\leq k}(f_i(x))$ y $\inf\limits_k(f_k(x)) = \lim\limits_{k\to\infty} \min\limits_{i\leq k}(f_i(x))$ son finitas en casi todo punto, serán medibles, siendo medibles $f_1, f_2, \ldots$

La derivada de una función medible, si es que existe en casi todo punto, es medible.

3. **Sucesiones monótonas de funciones.**

Examinaremos con frecuencia sucesiones monótonas no decrecientes (no crecientes) en casi todo punto de Q, $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones medibles, es decir, sucesiones para las cuales en casi todo punto de Q tienen lugar las igualdades $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x)$ $(f_{k+1}(x) \leqslant f_k(x))$, cualquiera que sea $k \geqslant 1$. Si esta sucesión de funciones es acotada en casi todo punto (es decir, para casi todos los $x^0 \in Q$ la sucesión numérica $f_k(x^0)$, $k = 1, 2, \ldots$, es acotada), será convergente hacia cierta función en casi todo punto. Introduzcamos las siguientes designaciones: $f_k \uparrow f$ en casi todo punto para $k \to \infty$, si la sucesión es monótona no decreciente, y $f_k \downarrow f$ en casi todo punto para $k \to \infty$, si la misma es monótona no creciente.

Designemos con $\Lambda_1 = \Lambda_1(Q)$ el conjunto de todas las funciones cada una de las cuales es límite casi siempre (en Q) para una sucesión monótona no decreciente de funciones de $C(\overline{Q})$ con una sucesión acotada (por arriba) de integrales (de Riemann).

Sea $f(x)$ una función arbitraria de Λ_1 y sea $f_k(x)$, ... $k = 1, 2, \ldots$ una sucesión monótona no decreciente de funciones continuas en $\overline{Q}$, convergente casi siempre hacia $f(x)$, con una sucesión acotada de integrales. La cota exacta superior del conjunto $\left\{\int\limits_Q f_k(x)\,dx,\ k = 1, 2, \ldots\right\}$ se denomina integral de Lebesgue de la función $f(x) \in \Lambda_1$:

$$(L)\int\limits_Q f\,dx = \sup_k \int\limits_Q f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_Q f_k(x)\,dx. \qquad (1)$$

Demostremos que si la función $f(x)$ pertenece a la clase Λ_1, entonces para toda sucesión monótona no decreciente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$, convergente casi siempre hacia $f(x)$, la sucesión de integrales es acotada y para cualesquiera dos sucesiones $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, y $f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, que poseen estas propiedades, $\sup\limits_k \int\limits_Q f_k'\,dx = \sup\limits_k \int\limits_Q f_k\,dx$, es decir, la integral de Lebesgue (de la función de Λ_1) no depende de la elección de la sucesión de aproximación.

Antes de demostrar esta afirmación mostremos que si $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión arbitraria de funciones de $C(\overline{Q})$ tal que $f_k \uparrow f$ casi siempre cuando $k \to \infty$ y $f(x) \geqslant 0$ en casi todo punto, entonces $\sup\limits_k \int\limits_Q f_k\,dx \geqslant 0$.

Supongamos que $f_k(x) \uparrow f(x)$ en casi todo punto para $k \to \infty$. Tomemos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$. Un conjunto E de puntos en los cuales o bien f_k, $k = 1, 2, \ldots$ no converge hacia la función f, o bien $f < 0$, es un conjunto de medida nula. Por eso, puede ser cubierto por un conjunto numerable de cubos abiertos $\{K_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ de volumen sumario menor que ε. Designemos con K la unión de todos los cubos de este cubrimiento. Para todo punto $x^0 \in \overline{Q} \setminus f_k(x^0) \uparrow f(x^0) \geqslant 0$ cuando $k \to \infty$, por lo que existe $N = N(x^0)$ tal que $f_N(x^0) > -\varepsilon$. Como la función $f_N(x) \in C(\overline{Q})$, la última desigualdad se cumplirá también en la intersección $U_{x^0} \cap \overline{Q}$ del conjunto $\overline{Q}$ con algún cubo abierto U_{x^0} con centro en el punto x^0. A causa de que la sucesión es monótona en $U_{x^0} \cap \overline{Q}$, tienen también lugar las desigualdades $f_k(x) > -\varepsilon$, cualquiera que sea $k \geqslant N$. La totalidad de conjuntos abiertos

$\{U_x,\ x \in \overline{Q} \setminus K\} \cup \{K_i,\ i=1, 2, \ldots\}$ cubre el conjunto $\overline{Q}$, y como este último es cerrado, se puede extraer del citado cubrimiento un subcubrimiento finito $U_{x^1}, \ldots, U_{x^l}, K_{i_1}, \ldots, K_{i_s}$. Designemos por K' la unión $\bigcup\limits_{j=1}^{s} K_{i_j}$. Dado que $|K'| < \varepsilon$, y, además, existe tal N_0 que para todos los $x \in \overline{Q} \setminus K' \subset (\bigcup\limits_{j=1}^{l} U_{x_j}) \cap \overline{Q} f_k(x) > -\varepsilon$ cualquiera que sea $k \geqslant N_0$, entonses para tales k

$$\int\limits_Q f_k(x)\,dx = \int\limits_{Q \setminus K'} f_k(x)\,dx + \int\limits_{K'} f_k(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant -\varepsilon|Q| - |A_1|\,\varepsilon = \varepsilon(-|A_1| - |Q|),$$

donde $|Q|$ es el volumen de Q y $A_1 = \min\limits_{x \ni \overline{Q}} f_1(x)$. Por ser arbitrario $\varepsilon > 0$, de esta desigualdad se obtiene la desigualdad requerida.

Sean $f(x)$ una función arbitraria de Λ_1 y $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, $f_k \uparrow f$ en casi todo punto cuando $k \to \infty$, una sucesión de funciones de $C(\overline{Q})$ para la cual la sucesión de integrales es acotada. Tomemos una sucesión arbitraria $f'_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones pertenecientes a $C(\overline{Q})$, tal que $f'_k(x) \uparrow f(x)$ en casi todo punto cuando $k \to \infty$. Mostremos que

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_Q f'_k\,dx = \lim_{k \to \infty} \int\limits_Q f_k\,dx.$$

Examinemos la sucesión $f_k - f'_m$, $k = 1, 2, \ldots$, siendo m arbitrario. Ya que para $k \to \infty$ $f_k - f'_m \uparrow f - f'_m \geqslant 0$ en casi todo punto de Q, entonces $\lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_Q (f_k - f'_m)\,dx = \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_Q f_k\,dx - \int\limits_Q f'_m\,dx \geqslant 0$. Por consiguiente, la sucesión $\int\limits_Q f'_m\,dx$, $m = 1, 2, \ldots$, es acotada y $\lim\limits_{m \to \infty} \int\limits_Q f'_m\,dx \leqslant \lim\limits_{k \to \infty} \int\limits_Q f_k\,dx$. Como la desigualdad inversa es, evidentemente, lícita, la afirmación queda demostrada.

Por analogía se demuestra que si las funciones f y g pertenecen a $\Lambda_1(Q)$ y $f(x) \geqslant g(x)$ en casi todo punto, entonces

$$(L)\int\limits_Q f\,dx \geqslant (L)\int\limits_Q g\,dx.$$

Efectivamente, sean $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, $f_k(x) \uparrow f(x)$ casi siempre cuando $k \to \infty$, y $g_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, $g_k(x) \uparrow g(x)$ casi siempre cuando $k \to \infty$, sucesiones de funciones de $C(\overline{Q})$. Para m

arbitrario, cuando $k \to \infty$, $f_k(x) - g_m(x) \uparrow f(x) - g_m(x) \geqslant f(x) - g(x) \geqslant 0$ casi siempre en Q, por esta razón $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q (f_k - g_m)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q f_k\,dx - \int\limits_Q g_m\,dx \geqslant 0$, es decir, para cualquier m $\int\limits_Q g_m\,dx \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q f_k\,dx$, y, por lo tanto, $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Q g_m\,dx \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Q f_k\,dx$, lo que se trataba de establecer.

De la definición se desprende directamente que si las funciones f_1 y f_2 pertenecen a Λ_1, entonces para cualesquiera constantes no negativas C_1 y C_2 la función $C_1f_1 + C_2f_2$ pertenece a Λ_1 y $(L)\int\limits_Q (C_1f_1 + C_2f_2)\,dx = C_1(L)\int\limits_Q f_1\,dx + C_2(L)\int\limits_Q f_2\,dx$; además, a la clase Λ_1 pertenecen también las funciones $\max(f_1(x), f_2(x))$ y $\min(f_1(x), f_2(x))$.

Tomemos un cubo que contiene el dominio Q y cuyas aristas son paralelas a los planos coordenados; por medio de planos paralelos a las aristas del cubo dividámoslo en un número finito de paralelepípedos. La intersección no vacía de un paralelepípedo abierto, obtenido como resultado de la división, con el dominio Q la llamaremos célula (de la división del dominio Q) y la totalidad de todas las células, división Π del dominio Q. La función medible $f(x)$ se llamará *escalonada en* Q, si asume un valor constante dentro de cada célula de cierta división Π del dominio Q.

Una integral de la función escalonada se comprenderá, por supuesto, como suma de los volúmenes de todas las células multiplicados por el valor de la función en la célula correspondiente.

LEMA 2. *Para toda sucesión monótona no decreciente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$ existe una sucesión monótona no decreciente en casi todo punto $f'_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas tal que casi siempre $f'_k(x) \leqslant f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, y que en casi todo punto $f_k(x) - f'_k(x) \to 0$, cuando $k \to \infty$.*

Debido a la continuidad uniforme de la función $f_k(x)$ existe un número $\delta_k > 0$ tal que $|f_k(x') - f_k(x'')| < 2^{-k}$ para cualesquiera puntos $x', x'' \in \overline{Q}$, para los cuales $|x' - x''| < \delta_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Designemos mediante Π_1 la división del dominio Q en la que el diámetro de la célula máximo es $\leqslant \delta_1$. La función escalonada $f'_1(x)$, que en cada célula K de la división Π_1 es igual al número $\min\limits_{x\in\overline{K}} f_1(x)$, posee la siguiente propiedad: $0 \leqslant f_1(x) - f'_1(x) \leqslant 2^{-1}$ para casi todos los $x \in Q$. A cuenta de la disminución de la división Π_1, construyamos otra división, Π_2, en la que el diámetro de la célula máximo es $\leqslant \delta_2$. La función escalonada $f_2'(x)$, que en cada célula K de la división Π_2 es igual al número $\min\limits_{x \in \overline{K}} f_2(x)$ satisface, para casi todos los $x \in Q$, las desigualdades $0 \leqslant f_2(x) - f_2'(x) \leqslant 2^{-2}$. Además, casi siempre en Q $f_2'(x) \geqslant f_1'(x)$. Continuando este proceso, obtendremos, para cualquier $k \geqslant 1$, la división Π_k del dominio Q y, junto con ella, una función escalonada $f_k'(x)$ que posee las siguientes propiedades: $0 \leqslant f_k(x) - f_k'(x) < 2^{-k}$, $f_k' \leqslant f_{k-1}'(x)$ para casi todos los $x \in Q$. Por consiguiente, en casi todo punto de Q $f_k'(x) \leqslant f_k(x)$ y casi siempre en Q existe y es igual a cero el límite de la sucesión $f_k(x) - f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ El lema queda demostrado.

LEMA 2'. *Para toda sucesión monótona no decreciente en casi todo punto de Q $f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas existe una sucesión monótona no decreciente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$ tal que en casi todo punto $f_k(x) \leqslant f_k'(x)$, y en casi todo punto de Q $f_k'(x) - f_k(x) \to 0$ cuando $k \to \infty$.*

Es obvio que basta demostrar esta afirmación para el caso en que la función $f_1'(x) \geqslant 0$ en casi todo punto.

Examinemos una función $f_k'(x)$ (del hecho de que $f_1'(x) \geqslant 0$ en casi todo punto se desprende que casi siempre $f_k'(x) \geqslant 0$) y sea que la división, que a ella corresponde, Π_k' de cierto cubo que contiene el dominio Q (designemos por a_0 la longitud de la arista de este cubo) se compone de m_k células (cuando la división Π_k del dominio Q, correspondiente a la función f_k', está compuesto a lo sumo de m_k células). Tomemos $\delta_k = \min\left\{\frac{a_k}{2}, \frac{1}{2na_0^{n-1}m_k2^k}\right\}$, donde a_k es la longitud de la menor de las aristas de todos los paralelepípedos que forman las células de la división Π_k', y sea $\zeta_{\delta_k}^p(x)$, $0 \leqslant \zeta_{\delta_k}^p(x) \leqslant 1$ una función cortante δ_k (véase la introducción, capítulo I) para la p-ésima célula de la división Π_k' (δ_k está elegida de tal manera que el volumen sumario de la intersección de los paralelepípedos, en los que $\sum\limits_{p=1}^{m_k} \zeta_{\delta_k}^p(x) < 1$, con el dominio Q no supere a 2^{-k}).

Designemos por $\psi_k(x)$ la función $f_k'(x) \cdot \sum\limits_{p=1}^{m_k} \zeta_{\delta_k}^p(x)$. Es fácil ver que las funciones $\psi_k(x) \in C(\overline{Q})$, $\psi_k(x) \leqslant f_k'(x)$ casi siempre, y en casi todo punto $f_k'(x) - \psi_k(x) \to 0$, cuando $k \to \infty$. Entonces, las funciones $f_k(x) = \max\limits_{m \leqslant k} \psi_m(x)$, continuas en $\overline{Q}$, satisfacen casi siempre las desigualdades $f_k(x) \leqslant f_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, y en casi todo punto $f_k'(x) - f_k(x) \to 0$ cuando $k \to \infty$. El lema queda demostrado.

De los lemas 2 y 2' se deduce directamente la siguiente afirmación.

TEOREMA 1. *Para que la función $f(x)$ pertenezca a $\Lambda_1(Q)$ es necesario y suficiente que exista la sucesión (convergente en casi todo punto hacia esta función y, además, monótona no decreciente en casi todo punto) $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas con una sucesión acotada de integrales. En este caso* $(L)\int\limits_Q f\,dx = \sup\limits_k \int\limits_Q f_k\,dx$.

LEMA 3. *Una sucesión monótona no decreciente de funciones de $C(\overline{Q})$ con una sucesión acotada de integrales converge en casi todo punto de Q.*

Del lema 2 se desprende que para demostrar el lema 3 es suficiente establecer la validez de la afirmación siguiente: si la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas no es monótona decreciente en casi todo punto y la sucesión de sus integrales es acotada, entonces la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, converge en casi todo punto de Q.

Cubramos el contorno ∂Q ($\partial Q \in C^1$, véase el capítulo I, Introducción) por un número finito de cubos cerrados $K_1, \ldots, K_l$, cuyo volumen sumario es suficientemente pequeño, de tal modo que el conjunto $Q' = Q \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} K_i$ sea un dominio. Está claro que es suficiente mostrar que la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, monótona no decreciente, de funciones escalonadas converge en casi todo punto del poliedro Q'.

Examinemos una función arbitraria $f_k(x)$ de esta sucesión, suponiendo que Π_k es una división del poliedro Q' que corresponde a dicha función.

Designemos por S la unión de las aristas de todos los poliedros que entran siquiera en una de las divisiones Π_k, $k = 1, 2, \ldots$, y por $\mathscr{E}$, la totalidad de todos aquellos puntos x del conjunto $Q' \setminus S$ en los que la sucesión numérica $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, no está acotada. Como S es un conjunto de medida nula, será suficiente mostrar que $\mathscr{E}$ es un conjunto de medida nula.

Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea $\mathscr{E}_{k,\varepsilon}$ un conjunto compuesto (de un número finito) de células de la división Π_k en las que $f_k(x) \geqslant$ $\geqslant 1/\varepsilon$. Puesto que $C \geqslant \int\limits_{Q'} f_k(x)\,dx \geqslant -|A_1||Q'| + \frac{1}{\varepsilon}|\mathscr{E}_{k,\varepsilon}|$, donde A_1 es el valor mínimo de los que asume la función $f_1(x)$ en las células de la división Π_1 ($f_k(x) \geqslant A_1$ en casi todo punto de Q'), entonces $|\mathscr{E}_{k,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon(C + |A_1||Q|)$. Dado que $\mathscr{E} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_{k,\varepsilon} = \mathscr{E}_{1,\varepsilon} \cup$ $\cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon})$, el conjunto $\mathscr{E}$ está cubierto por un sistema numerable de poliedros, no siendo el volumen sumario de éstos superior a $\varepsilon(C + |A_1||Q|)$, ya que, en virtud de la monotonía en casi todo punto de la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas,

$\mathscr{E}_{1,\varepsilon} \cup \bigcup_{k=1}^{N-1} (\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon}) \subset \overline{\mathscr{E}}_{N,\varepsilon}$, cualquiera que sea $N \geqslant 1$, y, por consiguiente

$$|\mathscr{E}_{1,\varepsilon}| + \sum_{k=1}^{N-1} |\mathscr{E}_{k+1,\varepsilon} \setminus \mathscr{E}_{k,\varepsilon}| \leqslant |\mathscr{E}_{N,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon (C + |A_1| |Q|).$$

Pero, en este caso, el conjunto $\mathscr{E}$ puede ser cubierto también por un sistema numerable de cubos abiertos cuyo volumen sumario sea menor que $2\varepsilon (C + |A_1| |Q|)$. El lema está demostrado.

4. **Funciones integrables según Lebesgue.** Una función de valores reales $f(x)$, dada en un dominio, se llama integrable según Lebesgue en el dominio Q, si puede ser representada en la forma

$$f(x) = f'(x) - f''(x), \tag{2}$$

donde f' y f'' son funciones de $\Lambda_1(Q)$; con ello, una integral de Lebesgue de la función f por el dominio Q se determina por la igualdad

$$(L) \int_Q f\, dx = (L) \int_Q f'\, dx - (L) \int_Q f''\, dx. \tag{3}$$

Mostremos que la integral de Lebesgue de la función f no depende del modo de representar esta función en forma de la diferencia entre dos funciones de $\Lambda_1(Q)$. En efecto, supongamos que a la par con (2) tiene lugar también la igualdad $f = \tilde{f}' - \tilde{f}''$, donde $\tilde{f}'$ y $\tilde{f}''$ pertenecen a $\Lambda_1(Q)$. Entonces, en casi todo punto tenemos $f' + \tilde{f}'' = \tilde{f}' + f'' \in \Lambda_1$ y (véase p. 3) $(L) \int_Q f' dx + (L) \int_Q \tilde{f}'' dx = (L) \times \int_Q \tilde{f}'\, dx + (L) \int_Q f''\, dx$, por lo que $(L) \int_Q f\, dx = (L) \int_Q \tilde{f}'\, dx - (L) \times \int_Q \tilde{f}''\, dx$.

Designemos por $\Lambda = \Lambda(Q)$ el conjunto de todas las funciones que son integrables en Q según Lebesgue. De la definición de $\Lambda(Q)$ se infiere que la función $C_1 f_1 + C_2 f_2 \in \Lambda(Q)$, si $f_i(x) \in \Lambda(Q)$ y C_i son constantes arbitrarias, $i = 1, 2$. Con ello

$$(L) \int_Q (C_1 f_1 + C_2 f_2)\, dx = C_1 (L) \int_Q f_1\, dx + C_2 (L) \int_Q f_2\, dx.$$

Una función integrable según Lebesgue es absolutamente integrable según Lebesgue, puesto que si $f = f' - f''$, donde f' y f'' pertenecen a Λ_1, entonces la función $|f| = \max(f', f'') - \min(f', f'')$ pertenece a Λ. Como la función f es integrable según Lebesgue, también serán integrables según Lebesgue las funciones

$$f^{+}(x)=\max(f(x),\,0)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2},$$

$$f^{-}(x)=-\min(f(x),\,0)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2},$$

mientras que la integrabilidad de las funciones f_1 y f_2 se desprende la integrabilidad de las funciones

$$\max(f_1(x),\,f_2(x))=\frac{1}{2}(|f_1-f_2|+f_1+f_2),$$

$$\min(f_1(x),\,f_2(x))=\frac{1}{2}(f_1+f_2-|f_1-f_2|).$$

Si la función $f(x)$ es integrable según Lebesgue y es no negativa casi siempre, entonces

$$(L)\int_Q f\,dx\geqslant 0. \tag{4}$$

Esta desigualdad proviene inmediatamente de los resultados del punto anterior, dado que las funciones f' y f'' (pertenecientes a Λ_1) en la representación (2) de la función f satisfacen, por condición, la desigualdad $f'(x)\geqslant f''(x)$ casi siempre en Q.

De (4) se deduce que para cualesquiera dos funciones f_1 y f_2 de $\Lambda(Q)$, que satisfacen casi siempre la desigualdad $f_1(x)\leqslant f_2(x)$, es válida la desigualdad

$$(L)\int_Q f_1\,dx\leqslant(L)\int_Q f_2\,dx \tag{5}$$

y, en particular, para toda función $f\in\Lambda(Q)$ tiene lugar la desigualdad

$$\left|(L)\int_Q f\,dx\right|\leqslant(L)\int_Q |f|\,dx. \tag{6}$$

Demostremos ahora el teorema de que el conjunto $\Lambda(Q)$ es «cerrado» respecto a los pasos límites monótonos.

TEOREMA 2 (B. Levi). *Una sucesión monótona casi siempre de funciones $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, interables según Lebesgue en Q con una sucesión acotada de integrales casi siempre en Q converge hacia la función $f(x)$ que es integrable según Lebesgue, entonces*

$$\lim_{k\to\infty}(L)\int_Q f_k\,dx=(L)\int_Q f\,dx. \tag{7}$$

Es suficiente demostrar el teorema para una sucesión monótona no decreciente. Cuando la sucesión es monótona no creciente el problema se reduce al anterior, es decir, basta cambiar el signo de todas las funciones. Además, sin menoscabar la generalidad de razonamientos, podemos considerar que las funciones $f_k(x) \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots$ casi siempre (de lo contrario, en lugar de la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, deberíamos considerar la sucesión $f_k(x) - f_1(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ compuesta por funciones negativas en casi todo punto).

Designemos con C la expresión $\sup\limits_k \int\limits_Q f_k\,dx$.

Supongamos primero que $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión monótona no decreciente casi siempre de funciones de Λ_1 con una sucesión acotada de integrales de Lebesgue. Mostremos que esta sucesión converge en casi todo punto hacia la función $f(x)$ de Λ_1, con la particularidad de qué aquí tiene lugar la igualdad (7).

Para cada $k \geqslant 1$ tomemos una sucesión $f_{km}(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$, $f_{km}(x) \uparrow f_k(x)$ casi siempre en Q cuando $m \to \infty$. Las funciones $\varphi_m(x) = \max\limits_{i \leqslant m} (f_{im}(x))$, $m = 1, 2, \ldots$, pertenecen a $C(\overline{Q})$ y poseen las siguientes propiedades:

a) $\varphi_m(x) \leqslant \varphi_{m+1}(x)$,

b) $f_{km}(x) \leqslant \varphi_m(x) \leqslant f_m(x)$ para $k \leqslant m$

(la segunda desigualdad en b) se cumple, por supuesto, casi siempre),

c) $\int\limits_Q \varphi_m(x)\,dx \leqslant (L)\int\limits_Q f_m\,dx \leqslant C$,

d) $\int\limits_Q f_{km}(x)\,dx \leqslant \int\limits_Q \varphi_m(x)\,dx$ para $k \leqslant m$.

De a), c) y el lema 3 se infiere que cuando $m \to \infty$, $\varphi_m \uparrow f$ en casi todo punto de Q, donde f es una función de Λ_1, con la particularidad de que $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Q \varphi_m\,dx = (L)\int\limits_Q f\,dx$. Pasando al límite para $m \to \infty$ en la desigualdad izquierda de b) y haciendo uso de la desigualdad derecha de b), obtenemos que casi siempre en Q $\varphi_k(x) \leqslant f_k(x) \leqslant f(x)$ para todo k, de donde fluye que $f_k(x) \uparrow f(x)$ casi siempre en Q cuando $k \to \infty$. Pasando en c) y d) al límite para $m \to \infty$, resulta que para cualquier k, $(L)\int\limits_Q f_k\,dx \leqslant (L)\int\limits_Q f\,dx \leqslant$ $\leqslant \lim\limits_{m\to\infty} (L)\int\limits_Q f_m\,dx$, es decir $(L)\int\limits_Q f\,dx = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_Q f_m\,dx$. De este modo queda demostrada la afirmación del teorema cuando $f_k \in \Lambda_1(Q)$.

Sea, ahora $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión arbitraria monótona no decreciente de funciones (integrables según Lebesgue) no negativas casi siempre en Q con una sucesión acotada de integrales. Puesto que

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{k} g_i(x), \quad k=1, 2, \ldots,$$

donde $g_1(x)=f_1(x)$, $g_s(x)=f_s(x)-f_{s-1}(x)$, $s=2, 3, \ldots$, son funciones no negativas casi siempre e integrables según Lebesgue, entonces para demostrar nuestra afirmación basta mostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, formada de funciones no negativas e integrables según Lebesgue, en la cual la sucesión de integrales de sus sumas parciales es acotada, converge casi siempre hacia una función integrable según Lebesgue y dicha serie puede integrarse término a término.

Notemos que para $k=1, 2, \ldots$, en la representación $g_k(x)=g_k'(x)-g_k''(x)$, donde g_k' y g_k'' pertenecen a Λ_1, puede considerarse que $g_k''(x)\geqslant 0$ en casi todo punto y $(L)\int_Q g_k''\,dx<2^{-k}$ (para poder hacerlo, en cierta representación $g_k=\widetilde{g}_k'-\widetilde{g}_k''$, $\widetilde{g}_k'\in\Lambda_1$, $\widetilde{g}_k''\in\Lambda_1$, será suficiente sustituir las funciones $\widetilde{g}_k'$ y $\widetilde{g}_k''$ por las funciones $g_k'=\widetilde{g}_k'-\Phi_k$, $g_k''=\widetilde{g}_k''-\Phi_k$, donde $\Phi(x)$ es una función continua en $\overline{Q}$ ($\Phi_k(x)\leqslant\widetilde{g}_k''(x)$ casi por doquier) que satisface la condición $(L)\int_Q \widetilde{g}_k''\,dx-\int_Q \Phi_k\,dx<2^{-k}$); con ello, $g_k'(x)\geqslant g_k''(x)\geqslant 0$ en casi todo punto. Así pues, para cualquier $k=1, 2, \ldots$

$$\sum_{s=1}^{k} g_s(x)=\sum_{s=1}^{k} g_s'(x)-\sum_{s=1}^{k} g_s''(x),$$

con la particularidad de que $(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s''(x)\,dx<1$, $(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s'(x)\,dx=$ $=\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s(x)\,dx+(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s''(x)\,dx\leqslant C+1$. Según lo demostrado más arriba, la sucesión de funciones de Λ_1 $\sum_{s=1}^{k} g_s'(x)$, $k=1, 2, \ldots$, converge casi siempre hacia cierta función $f'(x)$ de Λ_1, mientras que la sucesión $\sum_{s=1}^{k} g_s''(x)$, $k=1, 2, \ldots$, converge hacia la función $f''(x)$ de Λ_1, con la particularidad de que $(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s'\,dx\to(L)\int_Q f'\,dx$ y $(L)\int_Q \sum_{s=1}^{k} g_s''\,dx\to(L)\int_Q f''\,dx$, cuando $k\to\infty$. Como, en este caso, en casi todo punto $\sum_{s=1}^{\infty} g_k(x) \to f' - f''$, para $k \to \infty$, entonces la función f, igual a $f' - f''$, es integrable según Lebesgue y $(L)\int_Q \sum_{k=1}^{m} g_k\,dx \to (L)\int_Q f\,dx$ cuando $m \to \infty$. El teorema está demostado.

Del teorema 2 se desprende la siguiente afirmación.

COROLARIO. *Si* $f_k(x) \in \Lambda(Q)$, $k = 1, 2, \ldots$, *y la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} (L)\int_Q \times$ $\times |f_k|\,dx$ *converge, entonces en casi todo punto de* Q *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *es absolutamente convergente* (*es decir, casi siempre converge la sucesión* $\sum_{k=1}^{m} |f_k(x)|$, $m = 1, 2, \ldots$), *y además,* $f(x) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \in \Lambda(Q) \text{ y } (L)\int_Q f(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} (L)\int_Q f_k\,dx.$$

Haciendo uso del teorema de Levi demostremos el siguiente teorema.

TEOREMA 3. *Para que la función* $f(x)$, *casi siempre no negativa e integrable según Lebesgue en* Q, *sea nula en casi todo punto, es necesario y suficiente que* $(L)\int_Q f\,dx = 0$.

Si $f(x) = 0$ en casi todo punto de Q, entonces $f \in \Lambda_1(Q)$ y la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones, idénticamente iguales a cero en Q, posee la propiedad de que $f_k \uparrow f$ en casi todo punto de Q cuando $k \to \infty$. Según la definición esto significa que $(L)\int_Q f\,dx = 0$.

A la inversa, sea $(L)\int_Q f\,dx = 0$. Entonces, $(L)\int_Q kf\,dx = 0$ para cualquier k. Por consiguiente, según dice el teorema de Levi, una sucesión $kf(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, monótona no decreciente casi siempre, converge en casi todo punto hacia una función (finita casi siempre), lo que sólo es posible cuando $f = 0$ en casi todo punto. El teorema está demostrado.

5. Comparación de las integrales de Riemann y de Lebesgue. Si una función $f(x)$ es integrable según Riemann (recordemos que la integral de Riemann se define sólo para funciones acotadas), entonces, como sabemos, existen dos sucesiones de funciones escalonadas f'_k, f''_k, $k = 1, 2, \ldots$ (para cada $k = 1, 2, \ldots$, a las dos funciones corresponde la división Π_k del dominio Q), f'_k, $k = 1, 2, \ldots$, es monótona no decreciente en casi todo punto, f''_k, $k = 1, 2, \ldots$, es monótona no creciente en casi todo punto, $f'_k(x) \leqslant f(x) \leqslant f''_k(x)$ en casi todo punto, $k = 1, 2, \ldots$, tales que las sucesiones de sus integrales (sumas de Darbu superiores e inferiores) tienen un límite común igual a la integral de Riemann de la función f. De acuerdo al teorema 2, la sucesión monótona no creciente casi siempre $f''_k - f'_k$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones escalonadas no negativas en casi todo punto con una sucesión acotada de integrales converge casi siempre hacia cierta función no negativa en casi todo punto, perteneciente a $\Lambda(Q)$, cuya integral lebesguiana es igual cero.

En virtud del teorema 3 esta función es nula en casi todo punto. Por eso, cuando $k \to \infty$, $f'_k(x) \uparrow f(x)$ en casi todo punto (y $f''_k(x) \downarrow f(x)$ en casi todo punto). Por consiguiente, *si la función $f(x)$ es integrable según Riemann, será también integrable según Lebesgue, y sus integrales de Riemann y de Lebesgue coinciden*. Es más, está demostrado que la función $f(x)$ es integrable según Riemann en el caso, y sólo en el caso, cuando las funciones $f(x)$ y $-f(x)$ pertenecen a $\Lambda_1(Q)$.

Por ello, en lo sucesivo omitiremos el símbolo L ante el signo de la integral, entendiendo siempre la integral como la lebesguiana y el integrando, como función de $\Lambda(Q)$.

El conjunto de funciones acotadas contenidas en $\Lambda(Q)$ es más amplio que el de funciones integrables según Riemann, dado que, por ejemplo, la función de Dirichlet $\chi(x) \in \Lambda(Q)$ es acotada y no se integra según Riemann.

Luego, al construir la integral lebesguiana de la función $f(x)$ no se suponía que ésta era acotada, por ejemplo, la función no acotada $|x|^{-\alpha}$ pertenece a $\Lambda(|x| < 1)$, si $0 < \alpha < n$. En el curso de «Análisis matemático» se considera cómo la integral de Riemann se generaliza para funciones no acotadas (integral impropia). No es difícil mostrar que la función $f(x)$, absolutamente integrable según Riemann (en sentido impropio), pertenece a $\Lambda(Q)$ y su integral lebesguiana coincide con la integral impropia de Riemann.

Ha de notarse que en los dominios cuya dimensión no es menor que 2, todas las funciones integrables según Riemann en sentido impropio son funciones absolutamente integrables de manera impropia. Por esta razón, sólo en el caso unidimensional de la existencia de la integral impropia de Riemann de cierta función, la integrabilidad de dicha función según Lebesgue puede no deducirse. La función $\frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, definida en $(0, 1)$, es un ejemplo de tal función.

6. Condiciones suficientes de integrabilidad según Lebesgue. Teorema de Levi. Ahora pasemos a establecer la relación existente entre la cualidad de una función de ser medible y la de ser integrable.

Por definición, una función integrable es medible. Sin embargo, no toda función medible es integrable, como por ejemplo, la función $|x|^{-\alpha}$, $\alpha > n$, en la bola $\{|x| < 1\}$. Establezcamos algunas condiciones suficientes para que una función sea integrable.

TEOREMA 4 (lema de Fatou). *Si la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones no negativas, integrables en casi todo punto converge en casi todo punto hacia $f(x)$, y $\int\limits_Q f_k\,dx \leqslant A$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces $f(x)$ es integrable y $\int\limits_Q f\,dx \leqslant A$.*

Consideremos para $m \leqslant k$ las funciones integrables $\psi_{mk}(x) = \min\limits_{m \leqslant i \leqslant k} (f_i(x))$. Ya que en casi todo punto $\psi_{mk}(x) \downarrow \psi_m(x) = \inf\limits_{i \geqslant m} (f_i(x))$ cuando $k \to \infty$, y en casi todo punto $0 \leqslant \psi_{mk}(x) \leqslant f_m(x)$, entonces, de la desigualdad (6) y del teorema de Levi se deduce que $\psi_m(x) \in \Lambda(Q)$ y $0 \leqslant \int\limits_Q \psi_m(x)\,dx \leqslant \int\limits_Q f_m(x)\,dx \leqslant A$. Lo afirmado por el teorema se desprende ahora del teorema de Levi, dado que en casi todo punto $\psi_m(x) \uparrow f(x)$ cuando $m \to \infty$.

Otra condición necesaria para que la función pertenezca al conjunto $\Lambda(Q)$ está indicada en la siguiente afirmación.

TEOREMA 5. *Si la función $f(x)$ es medible y en casi todo punto $|f(x)| \leqslant g(x)$, donde $g(x)$ es una función integrable, entonces $f(x)$ es también integrable.*

De este modo, una función medible con módulo integrable es integrable y, en particular (¡el dominio Q es acotado!), es integrable cualquier función medible acotada (es decir, $|f(x)| \leqslant$ const en casi todo punto de Q).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5. Como la función $f(x)$ es medible, existe una sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones integrables (en realidad, incluso continuas en Q), que converge hacia $f(x)$ casi siempre en Q. Una sucesión de funciones integrables $f_k'(x) = \max(-g(x), \min(f_k(x), g(x)))$, $k = 1, 2, \ldots$, también converge hacia $f(x)$ en casi todo punto, y, además, posee la propiedad: $|f_k'(x)| \leqslant g(x)$ en casi todo punto, $k = 1, 2, \ldots$ Entonces, la sucesión $f_k'(x) + g(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, se compone de funciones no negativas en casi todo punto, converge hacia $f + g$ en casi todo punto y para todo k $\int\limits_Q (f_k' + g)\,dx \leqslant 2\int\limits_Q g\,dx$. Según el lema de Fatou, $f + g \in \Lambda(Q)$, y, por lo tanto, también $f \in \Lambda(Q)$. El teorema está demostrado.

7. Teorema de Lebesgue sobre el paso al límite bajo el signo de integral. Uno de los resultados más importantes de la teoría de integración lebesguiana es el siguiente teorema de Lebesgue sobre la posibilidad de paso al límite bajo el signo de integral.

TEOREMA 6. (Teorema de Lebesgue). *Si una sucesión de funciones medibles $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge casi siempre en Q hacia cierta función $f(x)$, y en casi todo punto $|f_k(x)| \leqslant g(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, donde $g(x)$ es integrable, entonces $f(x)$ también es integrable y*

$$\lim_{k\to\infty} \int_Q f_k(x)\,dx = \int_Q f\,dx. \tag{7}$$

En virtud del teorema 5, las funciones $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, son integrables.

Consideremos las funciones medibles $\varphi_s(x) = \sup\limits_{k\geqslant s}(f_k(x))$ y $\psi_s(x) = \inf\limits_{k\geqslant s}(f_k(x))$, $s = 1, 2, \ldots$ Puesto que en casi todo punto $|\varphi_s(x)| \leqslant g(x)$ y $|\psi_s(x)| \leqslant g(x)$, $s = 1, 2, \ldots$, las funciones $\varphi_s(x)$ y $\psi_s(x)$, $s = 1, 2, \ldots$, son también integrables. Mas, $\varphi_s(x) \downarrow f(x)$, $\psi_s(x) \uparrow f(x)$ en casi todo punto cuando $s \to \infty$; por lo tanto, según el teorema de Levi, $f(x) \in \Lambda(Q)$ y $\int\limits_Q f\,dx = \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_Q \varphi_s\,dx = \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_Q \psi_s\,dx$. Ahora, la igualdad 7 se desprende de las desigualdades obvias $\psi_s(x) \leqslant f_s(x) \leqslant \varphi_s(x)$ en casi todo punto, $s = 1, 2, \ldots$ El teorema está demostrado.

La igualdad (7) puede no tener lugar, si la sucesión no es mayorada por la función integrable. Por ejemplo, una sucesión $f_k(x) = \frac{k^2|x|^k}{\sigma_n}(1-|x|)$, $k = 1, 2, \ldots$, en la que σ_n es el área de la superficie de una esfera unitaria en un espacio n-dimensional, dada en la bola $Q = \{|x| < 1\}$, converge a cero casi siempre en $\overline{Q}$, pero $\int\limits_Q f_k\,dx = \frac{k^2}{(k+n)(k+n+1)} \to 1$, cuando $k \to \infty$.

Del teorema de Lebesgue se deduce:

TEOREMA 7. *Supongamos que para cierto $s \geqslant 0$ la función $f(x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q \subset R_n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \overline{\Omega} \subset R_m$, pertenece, para casi todos los $x \in Q$, al espacio $C^s(\overline{\Omega})$ y para todos los $y \in \overline{\Omega}$ y $|\alpha| \leqslant s$ las funciones $D_y^\alpha f(x, y)$ son medibles y $|D_y^\alpha f(x, y)| \leqslant g(x)$ para casi todos los $x \in Q$, donde $g(x)$ es una finción integrable en Q. Entonces, $\int\limits_Q f(x, y)\,dx \in C^s(\overline{\Omega})$.*

Empleando el teorema de Lebesgue es fácil demostrar que el límite $f(x)$ de una sucesión convergente $f_k(x)$, $k = 1, \ldots 2$, de funciones medibles casi siempre es una función medible. Efectivamente, para cualquier $k=1, 2, \ldots$ la función $g_k(x)=\frac{f_k(x)}{1+|f_k(x)|}$ es medible y en casi todo punto $|g_k(x)|\leqslant 1$. Por eso, según el teorema de Lebesgue, la función $g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}$, que es el límite de la sucesión $g_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, convergente en casi todo punto, es integrable en el dominio (acotado) Q y, por lo tanto, es medible. Por consiguiente, dado que $|g(x)|\neq 1$ en casi todo punto, será también medible la función $f(x)=\frac{g(x)}{1-|g(x)|}$.

8. Cambio de variables bajo el signo de la integral. En lo que se refiere al cambio de variables independientes, la integral de Lebesgue se comporta de modo análogo a la de Riemann.

Supongamos que la transformación

$$y=y(x) \quad (y_i=y_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, \ldots, n), \tag{8}$$

continuamente diferenciable en el dominio Q, representa biunívocamente el dominio Q en el dominio Q'. Mostremos primero que *esta transformación convierte un conjunto de medida nula en otro conjunto de medida nula.*

Efectivamente, sea E, $E\subset Q$, un conjunto de medida nula. Puesto que la unión de un número numerable de conjuntos de medida nula es un conjunto de medida nula, será suficiente mostrar que, realizándose la transformación (8), la imagen del conjunto $E_\delta = E\cap Q_\delta$ para cualquier $\delta>0$ suficientemente pequeño es un conjunto de medida nula.

Elijamos $\varepsilon>0$ de modo arbitrario. El conjunto E_δ puede ser cubierto por un sistema numerable de cubos cuyo volumen sumario sea menor que ε. Se puede considerar que todos los cubos de este cubrimiento tienen diámetros menores que $\delta/2$ y, por lo tanto, todos ellos pertenecen a $Q_{\delta/2}$. Puesto que cualquier cubo de diámetro d en este sistema se convierte, al realizarse la transformación (8), en un dominio de diámetro $d'\leqslant d\sqrt{n}\max\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ x\in\overline{Q}_{\delta/2}}}|\nabla y_i|=Cd$, la imagen del conjunto E_δ puede ser cubierta por un sistema numerable de cubos de volumen sumario menor que $C^n(\sqrt{n})^n\varepsilon$. La afirmación queda demostrada.

TEOREMA 8. *Supongamos que la transformación* (8), *continuamente diferenciable en Q, representa biunívocamente Q en el dominio Q', siendo el jacobiano $J(x)$ distinto de cero en Q. Para que la función $f(y)$ pertenezca a $\Lambda(Q')$, es necesario y suficiente que la función $f(y(x))\,|J(x)|$ pertenezca a $\Lambda(Q)$. En este caso*

$$\int\limits_{Q'} f(y)\,dy=\int\limits_{Q} f(y(x))\,|J(x)|\,dx. \tag{9}$$

La transformación inversa a (8) convierte biunívocamente Q' en Q, es continuamente diferenciable en Q' y tiene en Q' un jacobiano diferente de cero. Por esta razón es suficiente demostrar el teorema 8 sólo en una dirección. Aquí podemos limitarnos a considerar el caso en que la función $f(y) \in \Lambda_1(Q')$ y $f(y) \geqslant 0$ en casi todo punto.

Supongamos que $f(y)$ no es negativa en casi todo punto y pertenece a $\Lambda_1(Q')$ y sea $f_k(y)$, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de funciones de $C(\overline{Q'})$ cada una de las cuales puede considerarse no negativa, $f_k(y) \uparrow f(y)$ en casi todo punto de Q' cuando $k \to \infty$. Analicemos la sucesión de funciones $f'_k(y) = f_k(y)\zeta(k\rho(y))$, $k = 1, 2, \ldots$, continuas en $\overline{Q'}$; a función $\zeta(t)$ en esta sucesión está definida en $[0, \infty]$ y es nula cuando $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, es igual a $2t - 1$ cuando $1/2 < t < 1$, y es igual a la unidad para $t \geqslant 1$, mientras que $\rho(y)$ representa la distancia del punto $y \in Q'$ al contorno $\partial Q'$ ($\rho(y) \in C(\overline{Q'})$).

Es evidente que para cualquier k en casi todo punto de Q' $f'_k(y) \leqslant f_k(y) \leqslant f(y)$ $\left(\text{de lo cual se deduce que la sucesión } \int_{Q} f'_k\,dy,\ k = 1, 2, \ldots \text{ es acotada}\right)$ y $f'_k(y) \uparrow f(y)$ en casi todo punto de Q' cuando $k \to \infty$. Por consiguiente,

$$\lim_{k \to \infty} \int_{Q'} f'_k(y)\,dy = \int_{Q'} f(y)\,dy$$

Debido a la continuidad de las funciones $f'_k(y)$ en Q' resulta que $\int_{Q'} f'_k(y)\,dy = \int_{Q} f'_k(y(x))\,|J(x)|\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$ Por esto, la función $f(y(x))\,|J(x)|$, que en casi todo punto de Q es el límite de la sucesión $f_k(y(x))\,|J(x)|$, $k = 1, 2, \ldots$, (convergente monótona no decreciente) de funciones en $C(\overline{Q})$ con sucesión acotada de integrales, es integrable en Q y se cumple la igualdad (9). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Del teorema 8 se deduce inmediatamente que si en el dominio Q tienen lugar las desigualdades $C_0 \leqslant |J(x)| \leqslant C_1$ (donde C_0 y C_1 son ciertas constantes positivas), la condición necesaria y suficiente para que la función $f(y)$ sea integrable en Q' es que sea integrable en Q la función $f(y(x))$. En este caso son válidas las desigualdades

$$C_0 \int_{Q} |f(y(x))|\,dx \leqslant \int_{Q} |f(y)|\,dy \leqslant C_1 \int_{Q} |f(y(x))|\,dx. \tag{10}$$

9. Conjuntos medibles. Integrales extendidas a los conjuntos medibles. Examinemos un subconjunto E del dominio Q. La función $\chi_E(x)$, igual a la unidad para $x \in E$ y nula para $x \in Q \setminus E$, lleva el nombre de *función característica* del conjunto E.

El conjunto E se llama *medible*, si es medible su función característica. *La medida* del conjunto medible E (mes E) se define por la igualdad

$$\text{mes}\, E = \int_Q \chi_E(x)\, dx \tag{11}$$

(la integral en el segundo miembro tiene sentido debido al teorema 5).

Si Q' es un subdominio del dominio Q, será medible, dado que $\chi_{Q'}(x) = \lim_{\delta \to 0} \zeta_\delta(x)$, donde $\zeta_\delta(x)$ es una función cortante para el dominio Q'. En este caso mes $Q' = |Q'|$.

Los conjuntos de medida nula definidos en el punto 1 son medibles y ellos, y sólo ellos, tienen medida igual a cero (según la definición que acabamos de citar). Para demostrar esta afirmación, basta hacer uso del teorema 3, punto 6.

Si E es un subconjunto medible del dominio Q y $f(x)$, una función integrable en Q, según la definición, vamos a considerar esta función integrable también en E, con la particularidad de que la integral en E la definiremos por la fórmula

$$\int_E f\, dx = \int_Q f \chi_E\, dx \tag{12}$$

(la integral en el segundo miembro tiene sentido, como en el caso anterior, en virtud del teorema 5).

Siendo E un subdominio Q' del dominio Q, las nuevas definiciones de la integrabilidad y de la integral en Q' no contradicen, naturalmente (lo que se comprueba con facilidad), las definiciones correspondientes que fueron aceptadas antes (p. 4) inmediatamente para Q'.

10. Continuidad absoluta de una integral. Llamamos *continuidad absoluta de la integral de Lebesgue* a la siguiente propiedad.

TEOREMA 9. *Supongamos que la función $f(x)$ es integrable en Q. En este caso, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un $\delta > 0$ tal que para un conjunto medible arbitrario $E \subset Q$, mes $E < \delta$, se cumpla la desigualdad*

$$\left| \int_E f\, dx \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

Será suficiente demostrar este teorema para la función $f(x)$ de $\Lambda_1(Q)$, con la particularidad de que la función citada podemos considerarla no negativa en casi todo punto.

Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y escojamos una función $f_\varepsilon(x) \in C(\overline{Q})$ de tal modo que $f(x) \geqslant f_\varepsilon(x) \geqslant 0$ en casi todo punto de Q y que $0 \leqslant \int_Q f\,dx - \int_Q f_\varepsilon\,dx \leqslant \varepsilon/2$. Entonces, $\int_E f\,dx = \int_Q f\chi_E\,dx = \int_Q (f-f_\varepsilon)\chi_E\,dx + \int_Q f_\varepsilon\chi_E\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M_\varepsilon$ mes E, donde $M_\varepsilon = \max_{x\in\overline{Q}} f_\varepsilon(x)$. Por esto, para que se cumpla la desigualdad (13) basta tomar a título de δ el número $\varepsilon/(2M_\varepsilon)$. El teorema queda demostrado.

11. Relación existente entre integrales múltiples y reiteradas. Volvamos ahora al problema sobre la reducción de la integral múltiple de Lebesgue a las reiteradas y simultáneamente al problema de permutación de integrales.

Sea Q_n un dominio acotado n dimensional de las variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$, y Q_m, un dominio acotado m-dimensional de las variables $y = (y_1, \ldots, y_m)$. En el dominio acotado $Q_{m+n} = Q_m \times Q_n$, perteneciente al espacio $(m+n)$-dimensional de las variables (x, y), examinemos la función $f(x, y)$.

TEOREMA 10 (Teorema de Fubini). Supongamos que la función $f(x, y)$ es integrable en Q_{m+n}. En este caso, $f(x, y)$ es integrable respecto a $y \in Q_m$ para casi todos los $x \in Q_n$, e integrable respecto a $x \in Q_n$ para casi todos los $y \in Q_m$; las funciones $\int_{Q_m} f(x, y)\,dy$ y $\int_{Q_n} f(x, y)\,dx$ son integrables respecto a $x \in Q_n$ y respecto a $y \in Q_m$, respectivamente, y

$$\iint_{Q_{m+n}} f\,dx\,dy = \int_{Q_n} dx \int_{Q_m} f\,dy = \int_{Q_m} dy \int_{Q_n} f\,dx. \tag{14}$$

Por supuesto, es suficiente demostrar el teorema de Fubini (véase el punto 9) para el caso en que Q_n es un cubo $K_n = \{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n\}$, Q_m es un cubo $K_m = \{|y_i| < a, i = 1, \ldots, m\}$ y Q_{m+n} es un cubo $K_{m+n} = \{|x_i| < a, |y_j| < a, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$, siendo siempre $a > 0$. Antes de proceder a esta demostración, demostremos la siguiente afirmación.

LEMA 4. *Sea E un conjunto de medida nula $(m+n)$-dimensional dispuesto en K_{m+n}, y sean $E_2(\overline{x})$ y $E_1(\overline{y})$ sus secciones, m-dimensional y n-dimensional, respectivamente, de este conjunto por los planos $x = \overline{x}$ e $y = \overline{y}$. Para casi todos los $x \in K_n$, el conjunto $E_2(x)$ tiene la medida nula m-dimensional y para casi todos los $y \in K_m$ el conjunto $E_1(y)$ tiene la medida nula n-dimensional.*

En virtud del lema 1 (p.1), el conjunto E puede ser cubierto por un sistema numerable de cubos (cuyo volumen sumario es finito) de tal modo que cada uno de sus puntos pertenezca a un número infinito de cubos. En este caso podemos considerar que las aristas de los cubos son paralelas a los planos coordenados. Una serie compuesta por las integrales de las funciones características $\chi_k(x, y)$ de estos cubos converge. Ya que $\int\limits_{K_{m+n}} \chi_k(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{K} dx \int\limits_{K_m} \chi_k\,dy$, de acuerdo con el corolario de los teoremas (3) y (5) (punto 6), una serie de las integrales $\int\limits_{K_m} \chi_k(x, y)\,dy$ converge para casi todos los puntos x. Lo último significa que para casi todos los x el conjunto $E_2(x)$ resulta cubierto por un número numerable de cubos m-dimensionales de volumen sumario finito, con la particularidad de que cada punto del conjunto pertenece a un número infinito de cubos. El lema está demostrado.

Pasando a la demostración del teorema de Fubini, señalemos ante todo que podemos limitarnos al caso en que $f(x, y) \in \Lambda_1(K_{m+n})$.

Tomemos tal sucesión de funciones $f_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, de $C(\overline{K}_{m+n})$ que $f_k(x, y) \uparrow f(x, y)$ casi siempre en K_{m+n}. Designemos con E un conjunto de medida nula $(m+n)$-dimensional tal que para todos los $(x, y) \in K_{m+n} \setminus E$ la sucesión $f_k(x, y)$ converge de manera monótona hacia $f(x, y)$.

Según la definición de la integral, para $k \to \infty$

$$\int\limits_{K_n} dx \int\limits_{K_m} f_k(f, y)\,dy = \int\limits_{K_{m+n}} f_k(x, y)\,dx\,dy \to \int\limits_{K_{m+n}} f\,dx\,dy.$$

De acuerdo con el teorema de Levi, la sucesión monótona de funciones $F_k(x) = \int\limits_{K_m} f_k(x, y)dy$, $k = 1, 2, \ldots$, pertenecientes a $C(\overline{K}_n)$, converge casi siempre en K_n hacia cierta función $F(x)$ integrable en K_n y

$$\int\limits_{K_n} F\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{K_n} F_k(x)\,dx = \int\limits_{K_{m+n}} f\,dx\,dy. \tag{15}$$

Tomemos un punto arbitrario $\overline{x} \in K_n$ en el cual la sucesión numérica $F_k(\overline{x})$, $k = 1, 2, \ldots$, converge hacia $F(\overline{x})$ y el conjunto $E_2(\overline{x})$ (la intersección del conjunto E con el plano $x = \overline{x}$) tiene medida nula m-dimensional. En virtud del lema 4, el conjunto de puntos de K_n, privados de estas propiedades, tiene medida nula n-dimensional. La sucesión $f_k(\overline{x}, y)$, $k = 1, \ldots$, converge monótonamente hacia $f(\overline{x}, y)$ para todos los $y \in K_m \setminus E_2(\overline{x})$ (por lo tanto, en casi todo punto de K_m). El teorema de Levi afirma que $f(\overline{x}, y) \in \Lambda(K_m)$ y, cuando $k \to \infty$,

$$\int\limits_{K_m} f_k(\overline{x}, y)\,dy \uparrow \int\limits_{K_m} f(\overline{x}, y)\,dy. \tag{16}$$

Por consiguiente, las funciones $\int\limits_{K_m} f(x, y)\,dy$ y $F(x)$ coinciden casi siempre en K_n. El teorema queda demostrado.

En lo sucesivo emplearemos con frecuencia la siguiente afirmación que se deduce del teorema de Fubini.

COROLARIO. *Si la función $f(x, y)$, no negativa en casi todo punto, es medible en Q_{m+n} y en (14) existe una de las integrales reiteradas (es decir, por ejemplo, que para casi todos los x la función $f(x, y)$ es integrable respecto a y, mientras que la función $\int\limits_{Q_m} f\,dy$ es integrable respecto a x), entonces la función $f(x, y)$ es integrable en Q_{m+n} y, consecuentemente, existe la segunda integral reiterada y tiene lugar la igualdad* (14).

Para demostrar esta afirmación es suficiente comprobar que $f(x, y) \in \Lambda(Q_{m+n})$. La sucesión $f_k(x, y) = \min(f(x, y), k)$, $k = 1, 2, \ldots$, posee las siguientes propiedades: $f_k(x, y) \uparrow f(x, y)$ en casi todo punto de Q_{m+n},

$$\int\limits_{Q_{m+n}} f_k(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f_k(x, y)\,dy \leqslant \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f\,dy$$

(aquí, la igualdad está escrita basándonos en el teorema de Fubini aplicado a la función $f_k(x, y)$ que es medible y acotada y, por consiguiente, integrable en Q_{m+n}. La pertenencia de la función $f(x, y)$ a $\Lambda(Q_{m+n})$ se deduce, seguidamente, del teorema de Levi.

12. Integrales de tipo potencial. Sea $\rho(x)$ una función medible y acotada en casi todo punto de Q, $|\rho(x)| \leqslant M$ casi siempre. En este caso para todo $x \in R_n$ está definida la función $u(x) = \int\limits_{Q} \frac{\rho(y)\,dy}{|x-y|^{\alpha}}$, $\alpha < n$, llamada *integral de tipo potencial*.

Mostremos que $u(x) \in C(R_n)$. Esto es obvio para $\alpha \leqslant 0$. Supongamos ahora que $\alpha > 0$. Notemos ante todo que para cualesquiera puntos x^0 y x, como también para cualquier $\delta > 0$, se verifica la desigualdad

$$|u(x^0) - u(x)| \leqslant \int\limits_{Q} |\rho(y)| \left| \frac{1}{|x^0-y|^{\alpha}} - \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \right| dy \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{|x^0-y|<\delta} \left(\frac{1}{|x^0-y|^{\alpha}} + \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \right) dy +$$

$$+ M \int\limits_{Q \cap (|x^0-y| > \delta)} \left| \frac{1}{|x^0-y|^{\alpha}} - \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \right| dy. \qquad (17)$$

Fijemos x^0 y tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Como para $\alpha \geqslant 0$ y $x \neq x^0$, tenemos:

$$\inf_{y \in (|x-y|<\delta) \cap (|x^0-y|>\delta)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} = \frac{1}{\delta^\alpha} \geqslant \sup_{y \in (|x-y|>\delta) \cap (|x^0-y|<\delta)} \frac{1}{|x-y|^\alpha}$$

y, como

$$\operatorname{mes}\{(|x-y|<\delta) \cap (|x^0-y|>\delta)\} = \\ = \operatorname{mes}\{(|x-y|>\delta) \cap (|x^0-y|<\delta)\},$$

entonces

$$\int_{|x^0-y|<\delta} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \leqslant \int_{|x^0-y|<\delta} \frac{dy}{|x^0-y|^\alpha}.$$

Por ello,

$$\int_{|x^0-y|<\delta} \left(\frac{1}{|x^0-y|^\alpha} + \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right) dy \leqslant 2 \int_{|x^0-y|<\delta} \frac{dy}{|x^0-y|^\alpha} = \text{const} \cdot \delta^{n-\alpha}$$

Por consiguiente, se puede hallar (y fijar) tal $\delta > 0$, que el primer sumando en el segundo miembro (17) sea $< \varepsilon/2$.

La función $F(x, y) = \left| \frac{1}{|x^0-y|^\alpha} - \frac{1}{|x-y|^\alpha} \right|$ es continua en el conjunto cerrado $\Omega = \left\{ |x-x^0| \leqslant \frac{\delta}{2},\ y \in \overline{Q} \cap (|y-x^0| \geqslant \delta) \right\}$ y $F(x, y)\big|_{x=x^0} = 0$. Por eso, puede encontrarse tal η, $0 < \eta < \frac{\delta}{2}$, que $F(x, y) < \frac{\varepsilon}{2M|Q|}$ cuando $|x-x^0| < \eta$ para todos los $y \in \overline{Q} \cap (|y-x^0| \geqslant \delta)$.

Por lo tanto, cuando $|x-x^0| < \eta$, el segundo sumando del segundo miembro (17) tampoco supera de $\varepsilon/2$. De este modo, cuando $|x-x^0| < \eta$, será válida la desigualdad $|u(x^0) - u(x)| < \varepsilon$, es decir, la función $u(x)$ es continua.

Sea $n - \alpha > 1$. Mostremos que en este caso $u(x)$ es continuamente diferenciable en R_n y que

$$u_{x_i}(x) = \int_Q \rho(y) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} \right) dy = \alpha \int_Q \rho(y) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}} dy.$$

$$\text{Como} \left| \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}} \right| \leqslant \frac{1}{|x-y|^{\alpha+1}},\quad i = 1, \ldots, n,$$

razonando de manera análoga a la expuesta más arriba para la función $u(x)$, se establece que las funciones

$$u_i(x) = \alpha \int_Q \rho(y) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}} dy, \quad i = 1, \ldots, n,$$

son continuas en R_n. Luego, de acuerdo con el teorema de Fubini, para cualquier i, $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_{x_i^0}^{x_i} u_i(x)\,dx_i = \alpha \int_{x_i^0}^{x_i} dx_i \int_Q \rho(y) \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dy =$$

$$= \alpha \int_Q \rho(y)\,dy \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{y_i - x_i}{|x-y|^{\alpha+2}}\,dx_i = \int_Q \rho(y)\,dy \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\right)dx_i =$$

$$= u(x) - u\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \ldots, x_n\right).$$

Por eso,

$$u_i(x) = u_{x_i}(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

La afirmación queda demostrada.

Del mismo modo se establece que si $n - \alpha > s$, donde s es un número entero, $u(x)$ tiene derivadas continuas de un orden hasta s inclusive y para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant s$,

$$D^{\alpha} u(x) = \int_Q \rho(y)\, D_x^{\alpha} \frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\,dy.$$

Observemos que la función

$$u_1(x) = \int_Q \rho(y) \ln|x-y|\,dy,$$

llamada *potencial logarítmica*, es $(n-1)$ veces continuamente diferenciable en R_n y para cualquier α, $|\alpha| \leqslant n-1$,

$$D^{\alpha} u_1(x) = \int_Q \rho(y)\, D_x^{\alpha} \ln|x-y|\,dy.$$

13. Integral de Lebesgue de las funciones de valores complejos. Supongamos que la función $f(x)$, definida en el dominio Q, es de valores complejos

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x).$$

La función $f(x)$ se denomina medible en Q, si son medibles en Q las funciones $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$. La función $f(x)$ se llama integrable en Q, si son integrables en Q las funciones $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$. En este caso la integral de la función $f(x)$ se define por la igualdad

$$\int_Q f\,dx = \int_Q \operatorname{Re} f\,dx + i \int_Q \operatorname{Im} f\,dx.$$

Sabemos que $\frac{1}{2}(|\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|) \leqslant |f| \leqslant |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$; por ello, para que la función medible $f(x)$ sea integrable, es necesario y suficiente que sea integrable la función $|f(x)|$.

14. Integral de Lebesgue en una superficie $(n-1)$-dimensional. Sea S una superficie $(n-1)$-dimensional (de la clase C^1) y sea S_m, $m = 1, \ldots, N$, el cubrimiento de la superficie S con trazos simples, $S = \bigcup_{m=1}^{N} S_m$ (véase el cap. 1, Introducción). Cada trozo simple se describe por la ecuación

$$x_p = \varphi_m(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n),$$
$$(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) \in D_m, \quad \varphi_m \in C^1(\overline{D}_m) \quad (18)$$

D_m es una proyección S_m en el plano de coordenadas $x_p = 0$, $1 \leqslant p = p(m) \leqslant n$, y representa un dominio $(n-1)$-dimensional con contorno de la clase C^1).

Con ayuda de la fórmula (18) se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$ del conjunto $\overline{D}_m$ y los puntos $(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, \ldots, x_n)$ pertenecientes a $\overline{S}_m$: a cada punto $(x_1, \ldots, x_{p-1}, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n), x_{p+1}, \ldots, x_n) \in \overline{S}_m$ se le pone en correspondencia el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) \in \overline{D}_m$ (su proyección sobre el plano $x_p = 0$).

Supongamos que para cierto m, $m = 1, \ldots, N$, $\overline{S}_m$ contiene el conjunto E. Designemos con $\mathscr{E}$ la preimagen de E que pertenece a $\overline{D}_m$ para esta representación. Diremos que E es un conjunto de medida nula superficial, si $\mathscr{E}$ es un conjunto de la medida nula $(n-1)$-dimensional.

El conjunto E, perteneciente a S, se denomina conjunto de *medida nula superficial*, si cada uno de los conjuntos $E \cap S_m$, $m = 1, \ldots N$, es un conjunto de medida nula superficial.

Es fácil mostrar que la propiedad del conjunto $E \subset S$ de ser conjunto de las superficies de medida nula no depende de cómo se escoge el cubrimiento $S_1, \ldots, S_N$ de la superficie S.

El concepto de conjunto de medida nula permite (análogamente al caso del dominio n-dimensional, véanse pp. 1—4) introducir el concepto de convergencia en casi todo punto en S y otro, relacionado con este último, de una función medible en S e integrable en esta superficie según Lebesgue.

Una función dada en S se llama *medible* (en S), si en casi todo punto de S es el límite de la sucesión convergente de funciones de $C(\overline{S})$.

Diremos que una función de valores reales $f(x)$ pertenece a la clase $\Lambda_1(S)$, si casi siempre en S es el límite de una sucesión monótona no decreciente y convergente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones continuas en $\overline{S}$ con una sucesión acotada de integrales superficiales (según Riemann):

$\int\limits_S f_k(x)\, dS \leqslant C$, $k=1, 2, \ldots$. Una integral superficial (según Lebesgue) de la función $f(x)$ de la clase $\Lambda_1(S)$ se determina mediante la fórmula $\int\limits_S f\, dS = \sup\limits_k \int\limits_S f_k\, dS = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_S f_k\, dS$.

Una función de valores reales $f(x)$ dada en S, se llama integrable según Lebesgue en S, si puede ser representada en la forma

$$f(x) = f'(x) - f''(x),$$

donde f' y f'' son funciones de $\Lambda_1(S)$; con ello, la integral de Lebesgue de la función f respecto a S se define por la fórmula

$$\int\limits_S f\, dS = \int\limits_S f'\, dS - \int\limits_S f''\, dS.$$

Sea f una función dada en S, y sea $S_1, \ldots, S_N$ cierto cubrimiento de la superficie S con trozos simples. Designemos mediante $f^m(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n)$ la función $f(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, \varphi_m(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n), x_{p(m)+1}, \ldots, x_n)$ que está dada en D_m.

Mostremos que *la función f es medible cuando, y sólo cuando, son medibles todas las funciones f^m, $m = 1, \ldots, N$; la función f es integrable en S cuando, y sólo cuando, es integrable en D_m, $m = 1, \ldots, N$, cada una de las funciones f^m, siendo en este caso*

$$\int\limits_S f\, dS = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{D'_m} f^m \cdot \sqrt{1+|\nabla\varphi_m|^2}\, dx_1 \ldots dx_{p(m-1)}\, dx_{p(m+1)}\, dx_n \quad (19)$$

donde $D'_1 = D_1$, y D'_m es una proyección de $S_m \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} \overline{S}_i$ sobre el plano $x_{p(m)} = 0$, siempre que $m > 1$.

Si f es medible (integrable), es evidente que es medible (integrable) cada una de las funciones f^m, $m = 1, \ldots, N$.

Mostremos que si son integrables todas las funciones f^m, $m = 1, \ldots, N$, será también integrable la función f (análogamente se deduce la afirmación acerca de la propiedad de ser medible); consideraremos, además (lo que no resta la generalidad de razonamientos), que $f^m \in \Lambda_1(D_m)$ y $f^m \geqslant 0$ casi siempre en D_m, $m = 1, \ldots, N$.

Para cada m, $m = 1, \ldots, N$, tomemos una sucesión monótona no decreciente f_k^m, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones no negativas de $C(\overline{D}_m)$

que converge en casi todo punto (en D_m) hacia la función f^m. Examinemos la sucesión Π_k, $k = 1, 2, \ldots$, de las divisiones del cubo $(n-1)$-dimensional K que contiene el dominio D_m: Π_1 es una división del cubo K en 2^{n-1} subcubos iguales de arista igual a la mitad de la arista del cubo K; la división Π_2 es el fraccionamiento de la división Π_1 para el cual cada célula (cubo) de Π_1 se divide en 2^{n-1} subcubos iguales, y así sucesivamente. Cualesquiera que sean $m = 1, \ldots, N$ y $k = 1, 2, \ldots$, designemos mediante $D'_{m,k}$ un conjunto cerrado compuesto por adherencias (de número finito) de todas las células de la división Π_k, que están contenidas en D'_m, y mediante $\overline{f}^m_k$, una función continua en $\overline{D}_m$, que es nula en $D_m \setminus D'_{m,k}$ e igual en $D'_{m,k}$ a la función $f^m_k \cdot \zeta(k \cdot r_{m,k})$, donde $\zeta(t) = 0$ cuando $0 < t < \frac{1}{2}$, $\zeta(t) = 2t - 1$ cuando $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$, $\zeta(t) = 1$ cuando $t > 1$ mientras que $r_{m,k}$ es la distancia del punto $(x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n) \in D'_{m,k}$ al contorno de $D'_{m,k}$. Es evidente que para cualquier m, $m = 1, \ldots, N$, la sucesión $\overline{f}^m_k$, $k = 1, 2, \ldots$, converge hacia la función f^m sin decrecer de manera monótona en casi todo punto de D'_m.

Definemos la función $\widetilde{\overline{f}}{}^m_k$, $m = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2, \ldots$, que es continua en S, de la manera siguiente:

$$\text{para } x \in S_m \quad \widetilde{\overline{f}}{}^m_k = \overline{f}^m_k (x_1, \ldots, x_{p(m)-1}, x_{p(m)+1}, \ldots, x_n),$$

$$\text{para } x \in S \setminus S_m \quad \widetilde{\overline{f}}{}^m_k = 0;$$

y sea $f_k = \sum\limits_{m=1}^{N} \widetilde{\overline{f}}{}^m_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Está claro que cada una de las funciones f_k, $k = 1, 2, \ldots$, es continua en $\overline{S}$ y

$$\int\limits_S f_k \, dS = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_S \widetilde{\overline{f}}{}^m_k \, dS = \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{S_m} \widetilde{\overline{f}}{}^m_k \, dS =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{D_m} \overline{f}^m_k \sqrt{1 + |\nabla \varphi_m|^2} \, dx_1 \ldots dx_{p(m)-1} \, dx_{p(m)+1} \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{m=1}^{N} \int\limits_{D'_m} \overline{f}^m_k \sqrt{1 + |\nabla \varphi_m|^2} \, dx_1 \ldots dx_{p(m)-1} \, dx_{p(m)+1} \ldots dx_n. \qquad (20)$$

Además, $f_k \uparrow f$ en casi todo punto de S, cuando $k \to \infty$. En virtud de la integrabilidad en D'_m de la función $f^m \sqrt{1 + |\nabla \varphi_m|^2}$ $m = 1, \ldots, N$, de (20) se desprende que la sucesión $\int\limits_S f_k \, dS$,

$k=1, 2, \ldots$, es acotada. Por lo tanto, la función f es integrable en S. Pasando en la igualdad (20) al límite para $k \to \infty$, obtendremos (19).

De lo demostrado se deduce inmediatamente que todas las propiedades establecidas arriba para el dominio n-dimensional son válidas también para las funciones medibles e integrables en S.

§ 2. Espacios lineales normados. Espacio de Hilbert

1. Espacios lineales. Se llama *espacio lineal* el conjunto $\mathcal{F}$, para cuyos elementos están definidas las operaciones de adición y multiplicación por los números reales (complejos) que no nos llevan fuera de $\mathcal{F}$ y que poseen las siguientes propiedades:

a) $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$,
b) $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$,
c) en $\mathcal{F}$ existe un elemento o tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ $0 \cdot f = o$,
d) $(c_1 + c_2) f = c_1 f + c_2 f$,
e) $c (f_1 + f_2) = cf_1 + cf_2$,
f) $(c_1 c_2) f = c_1 (c_2 f)$,
g) $1 \cdot f = f$

para cualesquiera $f, f_1, \ldots, \in \mathcal{F}$ y cualesquiera números reales (complejos) $c, c_1, \ldots$

En dependencia de por qué números, reales o complejos, se permiten multiplicar los elementos del espacio $\mathcal{F}$, este último se llama *espacio lineal real* o *complejo*. Para concretar, consideraremos en este capítulo sólo el caso de espacios lineales complejos. Las definiciones y los resultados correspondientes se extienden sin dificultades algunas al caso de espacios lineales reales.

Un subconjunto de espacio lineal $\mathcal{F}$, que por sí mismo es espacio lineal, se denomina *variedad lineal* ne el espacio $\mathcal{F}$.

Sea f_m, $m = 1, 2, \ldots$, un sistema numerable (o finito) de elementos del espacio lineal $\mathcal{F}$. Un conjunto de elementos del tipo $c_1 f_1 + \ldots + c_k f_k$, cualesquiera que sean k y $c_1, \ldots, c_k$, arbitrarios y complejos, es una variedad lineal en el espacio $\mathcal{F}$ y se llama *variedad lineal tendida sobre los elementos* f_k, $k = 1, 2, \ldots$ Los elementos $f_1, \ldots, f_m$ de $\mathcal{F}$ se denominan *linealmente independientes*, si la igualdad $c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m = o$ es sólo posible para $c_1 = \ldots = c_m = 0$; en el caso contrario $f_1, \ldots, f_m$ son *linealmente dependientes*. Un conjunto infinito de elementos pertenecientes a $\mathcal{F}$ se llama linealmente independiente, si cualquiera de sus subconjuntos finitos es linealmente independiente.

Una variedad lineal es *de dimensión finita* (*n-dimensional*), cuando en ella existen n elementos independientes y la acumulación de cualesquiera $n + 1$ elementos suyos es linealmente dependiente.

Una variedad lineal tendida sobre los elementos linealmente independientes f_k, $k = 1, \ldots, n$, de $\mathcal{F}$ es n-dimensional.

Una variedad lineal se llamará *de dimensión infinita*, si podemos hallar en ella un subconjunto linealmente independiente que conste de un número infinito de elementos.

2. Espacios lineales normados. Un espacio lineal $\mathcal{F}$ se denomina *normado*, si a cada uno de sus elementos f se le puede poner en correspondencia el número real $\| f \| = \| f \|_{\mathcal{F}}$ (*norma* f), con la particularidad de que esta correspondencia tenga las siguientes propiedades:

a) $\| cf \| = | c | \| f \|$, para c complejo y $f \in \mathcal{F}$ arbitrarios,

b) $\| f_1 + f_2 \| \leqslant \| f_1 \| + \| f_2 \|$, para cualesquiera $f_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$ (desigualdad triangular),

c) $\| f \| \geqslant 0$, siendo $\| f \| = 0$ sólo para $f = o$.

En el espacio lineal normado se puede defindr el concepto de *distancia* $\| f_1 - f_2 \|$ entre dos elementos f_1 y f_2, y junto con ésta, el de convergencia.

La sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{F}$ se llama *fundamental*, si $\| f_k - f_m \| \to 0$ cuando $k, m \to \infty$.

La sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{F}$ se llama *convergente hacia* $f \in \mathcal{F}$ ($f_m \to f$ cuando $m \to \infty$, o $\lim\limits_{m \to \infty} f_m = f$), si $\| f_m - f \| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Una sucesión no puede converger hacia dos elementos distintos, puesto que si $\| f_m - f \| \to 0$ y $\| f_m - g \| \to 0$, cuando $m \to \infty$, entonces $\| f - g \| = \| f - f_m + f_m - g \| \leqslant \| f_m - f \| + \| f_m - g \| \to 0$ cuando $m \to \infty$, es decir, $\| f - g \| = 0$, de donde $f = g$.

Si $f_m \to f$, entonces $\| f_m \| \to \| f \|$ (*continuidad de la norma*). Efectivamente, en virtud de la desigualdad triangular $\| f_m \| \leqslant \leqslant \| f_m - f \| + \| f \|$ y $\| f \| \leqslant \| f_m - f \| + \| f_m \|$. Por ello, $\| f_m \| - \| f \| \leqslant \| f_m - f \| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Si una sucesión es convergente ($f_m \to f$), también es fundamental, puesto que

$$\| f_k - f_m \| = \| f_k - f + f - f_m \| \leqslant \| f_k - f \| + \| f - f_m \| \to 0 \text{ cuando } k, m \to \infty.$$

La afirmación contraria, en el caso general, no tiene lugar.

El espacio lineal normado se llama *completo*, si para toda sucesión fundamental de sus elementos se puede hallar un elemento de este espacio hacia el cual la sucesión converge.

Un espacio lineal normado completo B se denomina *espacio de Banach*.

Una variedad lineal en el espacio de Banach B que es completa en la norma de B (y, consecuentemente, es de por sí un espacio de Banach de la misma norma) se llama *subespacio* del espacio B. La variedad lineal tendida sobre un número finito de elementos de B es un subespacio del espacio B.

Sea $\mathcal{M}$ una variedad lineal en B. El conjunto $\overline{\mathcal{M}}$ obtenido como resultado de la adición a $\mathcal{M}$ de los elementos límites de todas las sucesiones fundamentales de elementos pertenecientes a $\mathcal{M}$ (en el espacio B toda sucesión fundamental tiene un elemento límite) se llama *adherencia* (en B) de la variedad $\mathcal{M}$.

Es evidente que la adherencia $\overline{\mathcal{M}}$ de la variedad lineal $\mathcal{M}$ es una variedad lineal. Mostremos que es completa. Sea f_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión fundamental arbitraria de elementos de $\overline{\mathcal{M}}$, y sea $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$. Cerciorémonos de que $f \in \overline{\mathcal{M}}$. De la definición de $\overline{\mathcal{M}}$ se deduce que para cualquier $k = 1, 2, \ldots$ existe un elemento $f_k' \in \mathcal{M}$ tal que $\| f_k' - f_k \| < 1/k$. Por esto,

$$\| f - f_k' \| = \| f - f_k + f_k - f_k' \| \leqslant \| f - f_k \| + 1/k \to 0$$

cuando $k \to \infty$, es decir, $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k'$. Lo último precisamente significa que $f \in \overline{\mathcal{M}}$.

Así pues, *la adherencia de una variedad lineal en B es un subespacio.*

La adherencia de una variedad lineal tendida sobre los elementos f_k, $k = 1, 2, \ldots$, se llama *subespacio tendido sobre los elementos indicados.*

El conjunto $\mathcal{M}' \subset B$ se llama acotado, si existe una constante C tal que $\| f \| \leqslant C$ para todo $f \in \mathcal{M}'$.

El conjunto $\mathcal{M}' \subset B$ se llama *siempre denso en B*, si para cualquier elemento $f \in B$ existe una sucesión f_k', $k = 1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{M}'$ convergente hacia f. El espacio de Banach B se denomina *separable*, si existe en él un conjunto numerable siempre denso.

3. Producto escalar. Espacio de Hilbert. Diremos que en el espacio lineal H se ha introducido *un producto escalar*, si a cada par de elementos $h_1, h_2 \in H$ se le ha puesto en correspondencia un número complejo (h_1, h_2) (producto escalar de estos elementos) y que esta correspondencia tiene las siguientes propiedades

a) $(h_1, h_2) = \overline{(h_2, h_1)}$ (en particular, (h, h) es un número real),
b) $(h_1 + h_2, h) = (h_1, h) + (h_2, h)$,
c) $c\,(ch_1, h_2) = c\,(h_1, h_2)$, para todo c complejo,
d) $(h, h) \geqslant 0$, siendo $(h, h) = 0$ sólo para $h = o$.

Enunciemos la siguiente importante *desigualdad de Buniakovski*:

$$|(h_1, h_2)|^2 \leqslant (h_1, h_1)\cdot(h_2, h_2), \tag{1}$$

que se verifica para cualesquiera h_1 y h_2 de H. La desigualdad (1) se muestra a las claras, cuando $h_2 = o$. Sea $h_2 \neq o$. Siendo t arbitrario y complejo, $0 \leqslant (h_1 + th_2, h_1 + th_2) = (h_1, h_1) + t\,\overline{(h_1, h_2)} + \overline{t}\,(h_1, h_2) + |t|^2\cdot(h_2, h_2)$. Si $t = -\frac{(h_1, h_2)}{(h_2, h_2)}$, esta desigualdad toma la forma $(h_1, h_1) - \frac{|(h_1, h_2)|^2}{(h_2, h_2)} \geqslant 0$, que es equivalente a (1).

El producto escalar engendra en el espacio H la norma $\| h \| = \sqrt{(h, h)}$. Para la norma introducida de esta manera las propiedades a) y c) son evidentes. Con el fin de demostrar la propiedad b) (desigualdad triangular) emplearemos la desigualdad de Buniakovski

$$\|h_1+h_2\|^2=\|h_1\|^2+(h_1, h_2)+(h_2, h_1)+\|h_2\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|h_1\|^2+2\|h_1\|\|h_2\|+\|h_2\|^2=(\|h_1\|+\|h_2\|)^2.$$

Un espacio lineal continente en producto escalar, completo en la norma engendrada por el mencionado producto (es decir, que el espacio es de Banach en dicha norma), se llama *espacio de Hilbert.*

A la par con la convergencia (según la norma) resulta cómodo introducir en el espacio de Hilbert otro tipo de convergencia. La sucesión h_m, $m = 1, 2, \ldots$, de H se denomina *débilmente convergente* hacia el elemento $h \in H$, si $\lim\limits_{m\to\infty} (h_m, f) = (h, f)$ para cualquier elemento $f \in H$.

Mostremos que la sucesión no puede converger débilmente hacia distintos elementos de H. Supongamos que existen dos elementos h y $h' \in H$, para los cuales $\lim\limits_{m\to\infty} (h_m, f) = (h, f)$ y $\lim\limits_{m\to\infty} (h_m, f) = (h', f)$, cualquiera que sea $f \in H$. Entonces, para cada $f \in H$ se tiene $(h - h', f) = 0$, en particular, cuando $f = h - h'$, tenemos $(h - h', h - h') = 0$, es decir, $h = h'$.

Si la sucesión $h_m \in H$, $m = 1, 2, \ldots$, converge hacia $h \in H$, ella será también débilmente convergente hacia h. En efecto, $|(h_m, f) - (h, f)| = |(h_m - h, f)| \leqslant \|h_m - h\| \|f\| \to 0$ cuando $m \to \infty$.

4. Formas bilineales hermitianas y productos escalares equivalentes. Diremos que en el espacio de Hilbert H está definida una *forma bilineal hermetiana* W, si a cada par de elementos h_1 y h_2 de H se le ha puesto en correspondencia un número complejo $W(h_1, h_2)$ y que esta correspondencia posee las siguientes propiedades:

a) $W(h_1 + h_2, h) = W(h_1, h) + W(h_2, h)$,

b) $W(ch_1, h_2) = cW(h_1, h_2)$,

c) $W(h_1, h_2) = \overline{W(h_2, h_1)}$

para $h, h_1, h_2 \in H$ arbitrarios y c complejo y arbitrario.

Se llama *forma cuadrática* de la forma bilineal hermitiana $W(h_1, h_2)$ la función $W(h, h)$ definida en H. De la propiedad c) se desprende que la forma cuadrática de la forma bilineal hermitiana es de valores reales.

A título de ejemplo de la forma bilineal hermitiana dada en H sirve el producto escalar. La forma cuadrática correspondiente a esta forma bilineal es el cuadrado de la norma engendrada por el producto escalar.

Si la forma cuadrática de cierta forma bilineal hermitiana posee la propiedad de que $W(h, h) \geqslant 0$ para todo $h \in H$ y $W(h, h) = 0$

sólo cuando $h = o$, entonces la forma bilineal $W(h_1, h_2)$ puede considerarse como un (nuevo) producto escalar en H : $W(h_1, h_2) = (h_1, h_2)'$.

La norma (nueva) correspondiente se definirá en este caso por la igualdad $\| h \|' = \sqrt{W(h, h)}$.

La norma $\| \|'$ se denomina *equivalente* a la norma $\| \|$, si existen tales constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ que para cualquier elemento $h \in E$ $\| h \|' \leqslant C_1 \| h \|$, $\| h \| \leqslant C_2 \| h \|'$. Los productos escalares $(,)$ y $(,)'$ se llaman equivalentes, si son equivalentes las normas engendradas por ellos.

Si la norma $\| \|'$ es equivalente a la norma $\| \|$, el conjunto H será espacio de Hilbert (es decir, completo) también en el producto escalar $(,)'$.

Efectivamente, supongamos que una sucesión de elementos h_k, $k = 1, 2, \ldots$, de H es fundamental según la norma $\| \|'$: $\| h_k - h_s \|' \to 0$ cuando $k, s \to \infty$. Puesto que $\| h_k - h_s \| \leqslant C_2 \| h_k - h_s \|'$, la sucesión citada es fundamental también en la norma $\| \|$. Como H es un espacio completo en la norma $\| \|$, existe un elemento $h \in H$ hacia el cual converge en esta norma la sucesión en consideración: $\| h_k - h \| \to 0$ para $k \to \infty$. Dado que $\| h_k - h \|' \leqslant C_1 \| h_k - h \|$, la sucesión es también convergente hacia h en la norma $\| \|'$. La afirmación queda demostrada.

5. Ortogonalidad. Sistemas ortonormales. Los elementos h_1 y $h_2 \in H$ se llaman *ortogonales* ($h_1 \perp h_2$), si $(h_1, h_2) = 0$. Un elemento h se llama *ortogonal al conjunto* $H' \subset H$, si $(h, h') = 0$ para todos los $h' \in H'$. Dos conjuntos H' y H'' de H se llaman ortogonales ($H' \perp H''$), si $(h', h'') = 0$ para cualesquiera $h' \in H'$, $h'' \in H''$.

Si $h \in H$ es ortogonal al conjunto H' siempre denso en H, entonces $h = o$. En efecto, sea h_k', $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de elementos de H' y supongamos que $h_k' \to h$ cuando $k \to \infty$. Puesto que $(h_k', h) = 0$ para todo $k \geqslant 1$ y la convergencia $(h_k', h) \to \| h \|^2$ es débil, entonces $\| h \| = 0$, es decir, $h = o$.

Un elemento $h \in H$ se denomina *normado*, si $\| h \| = 1$. Un con junto $H' \subset H$ se llama *ortonormal* (*sistema ortonormal*), si todos sus elementos son normados y ortogonales a pares. Un conjunto ortonormal es, claro está, linealmente independiente.

Un conjunto numerable (o finito) de elementos linealmete independiente h_k, $k = 1, 2, \ldots$, puede transformarse en un conjunto numerable (o finito) ortonormal de la manera siguiente (método de Gram — Schmidt):

$$e_1 = \frac{h_1}{\| h_1 \|}, \quad e_2 = \frac{h_2 - (h_2, e_1) e_1}{\| h_2 - (h_2, e_1) e_1 \|}, \ldots,$$

$$e_n = \frac{h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1}}{\| h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1} \|}, \ldots,$$

(en virtud de la suposición de que el conjunto h_k, $k = 1, 2, \ldots$, es linealmente independiente para todo $n \geqslant 2$, $h_n - (h_n, e_1) e_1 - \ldots - (h_n, e_{n-1}) e_{n-1} \neq 0$.

6. Series de Fourier según un sistema ortonormal arbitrario. Sea f un elemento arbitrario de H y sea $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ cierto sistema numerable ortonormal en H (si el espacio H es de dimensión finita, se debe tomar un sistema ortonormal formado por un número finito de elementos). Designemos por H_p el subconjunto tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_p$ para cierto $p \geqslant 1$ y hallemos en H_p un elemento más próximo (en la norma del espacio H) al elemento f. Puesto que para ciertas constantes $c_1, \ldots, c_p$ un elemento arbitrario de H_p tiene la forma

$\sum_{r=1}^{p} c_r e_r$, el problema se reduce a la búsqueda de tales números $c_1, \ldots, c_p$, para los cuales alcanza su mínimo la magnitud $\delta_{H_p}^2 (f; c_1, \ldots, c_p) = \| f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r \|^2$.

Introduzcamos los números $f_k (f, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, llamados *coeficientes de Fourier* del elemento f según el sistema $e_1, e_2, \ldots$ Puesto que

$$\delta_{H_p}^2 (f; c_1, \ldots, c_p) = \left(f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r,\ f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r\right) =$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{r=1}^{p} c_r \bar{f}_r - \sum_{r=1}^{p} \bar{c}_r f_r + \sum_{r=1}^{p} | c_r |^2 =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} | c_r - f_r |^2 - \sum_{r=1}^{p} | f_r |^2 + \| f \|^2,$$

la magnitud $\delta_{H_p}^2 (f; c_1, \ldots, c_p)$ alcanza el mínimo sólo cuando $c_r = f_r$, $r = 1, \ldots, p$, y este mínimo (designémoslo mediante $\delta_{H_p}^2 (f)$) es igual a $\| f \|^2 - \sum_{r=1}^{p} | f_r |^2$:

$$\delta_{H_p}^2 (f) = \| f \|^2 - \sum_{r=1}^{p} | f_r |^2.$$

De este, modo, dado f, para todos los $c_1, \ldots, c_p$, tiene lugar la desigualdad

$$\| f - \sum_{r=1}^{p} c_r e_r \| \geqslant \| f - \sum_{r=1}^{p} f_r e_r \|,$$

que expresa *la propiedad mínima* de los coeficientes de Fourier, con la particularidad de que la igualdad se logra sólo cuando $c_r = f_r$, $r = 1, \ldots, p$.

Designemos con f^p el único elemento que en el subespacio H_p es más próximo a f:

$$f^p = \sum_{r=1}^{p} f_r e_r.$$

En este caso

$$\| f - f^p \|^2 = \delta^2_{H_p}(f). \tag{3}$$

El elemento f^p se llama proyección del elemento f en el subespacio H_p.

De la ecuación (2) se deduce pue para cualquier elemento $f \in H$ y cualquier $p \geqslant 1$ tenemos $\sum_{r=1}^{p} |f_r|^2 \leqslant \|f\|^2$. Esto significa que la serie numérica $\sum_{r=1}^{\infty} |f_r|^2$ converge y tiene lugar *la desigualdad de Bessel*

$$\sum_{r=1}^{\infty} |f_r|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

LEMA 1. *Sea f_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de números complejos y sea e_k, $k = 1, 2, \ldots$, un sistema ortonormal en H. Para que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ sea convergente en la norma de H, es necesario y suficiente que la serie numérica $\sum_{r=1}^{\infty} |f_r|^2$ sea convergente.*

Sea $S_p = \sum_{r=1}^{p} f_r e_r$ una suma parcial de la serie $\sum_{r=1}^{\infty} f_r e_r$. Para $p > q$ tenemos la igualdad $\|S_p - S_q\|^2 = \| \sum_{q+1}^{p} f_r e_r \|^2 = \sum_{q+1}^{p} |f_r|^2$, de la cual se desprende que la convergencia de la serie $\sum |f_r|^2$ es necesaria y suficiente para que sea fundamental la sucesión de sumas parciales de la serie y, por este motivo, a causa de ser el espacio H completo, para la convergencia de esta serie. El lema está demostrado.

Sea f un elemento arbitrario de H y sean f_k, $k = 1, 2, \ldots$, sus coeficientes de Fourier según el sistema ortonormal e_k, $k = 1, 2 \ldots$ La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$$

se denomina serie de Fourier del elemento f según el sistema e_k, $k = 1, 2, \ldots$

De la desigualdad de Bessel y del lema 1 se infiere

LEMA 2. *La serie de Fourier de un elemento arbitrario $f \in H$ según un sistema ortonormal arbitrario converge en la norma del espacio H.*

El lema 2 afirma la existencia del elemento $\bar{f} \in H$, hacia el cual converge la serie de Fourier del elemento f. Naturalmente, surge una pregunta: ¿será válida la igualdad $\bar{f} = f$ para todos los $f \in H$?

En el caso general, si no se hacen ningunas suposiciones adicionales respecto al sistema $e_1, e_2, \ldots$, a excepción de que sea ortonormal, la respuesta a esta pregunta será negativa.

7. Base ortonormal. De (2) se deduce que a medida que crece p la magnitud $\delta^2_{H_p}(f)$ sólo puede disminuir, cualquiera que sea $f \in H$. Por eso, a priori pueden presentarse dos casos:

a) para todos los $f \in H \delta^2_{H_p}(f) \to 0$ cuando $p \to \infty$,

b) existe un elemento $f \in H$ tal que para él $\delta^2_{H_p}(f) \to c > 0$ cuando $p \to \infty$.

En el caso a), debido a la igualdad (3), para todo $f \in H$ tiene lugar la correlación

$$f = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} f_k e_k$$

o, lo que es lo mismo, la igualdad

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k, \tag{4}$$

es decir, en el caso a) la serie de Fourier de cualquier elemento f converge (en la métrica de H) hacia f. Además, para todo $f \in H$ tiene lugar la igualdad

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | f_k |^2, \tag{5}$$

denominada *igualdad de Parseval — Steklov*, y otra igualdad

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k \tag{5'}$$

que generaliza (5) y es válida para cualesquiera elementos f y g de H.

La igualdad (5) se desprende de (2). Demostremos la igualdad (5'). Ante todo indiquemos que la serie en el segundo miembro es absolutamente convergente, puesto que el término común de la serie es mayorado por el término común de la serie convergente: $| f_k \bar{g}_k | \leqslant$

$\leqslant \frac{1}{2}(|f_k|^2+|g_k|^2)$. Luego, en virtud de (4)

$$(f,g)=\lim_{p\to\infty}(f^p,g)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p} f_k e_k,\ g\right)=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p} f_k(e_k,g)=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p} f_k\overline{g}_k=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\overline{g}_k.$$

Lo que se trataba de establecer.

En el caso b) existe un elemento $f\in H$ tal que la serie de Fourier de éste converge (de acuerdo con el lema 2 del punto anterior) hacia el elemento $\overline{f}\neq f$, es decir, el elemento $h=f-\overline{f}\neq 0$. De este modo,

$$f=h+\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k,$$

donde $h\neq o$ y h es ortogonal al subespacio tendido sobre el sistema $e_1, e_2, \ldots$

Volvamos ahora otra vez al caso a) el cual, naturalmente, será para nosotros de mayor interés.

Un sistema numerable ortonormal $e_1, e_2, \ldots$ se llama *base completa* o bien *ortonormal* del espacio H, si cualquier elemento $f\in H$ puede ser desarrollado en la serie de Fourier (4) según este sistema.

De lo demostrado anteriormente se deduce la validez de la siguiente afirmación.

LEMA 3. *Para que el sistema ortonormal $e_1, e_2 \ldots$ sea base ortonormal de H, es necesario y suficiente que para todo elemento $f\in H$ tenga lugar la igualdad de Parseval — Steklov* (5). *o para dos elementos f y g cualesquiera de H tenga lugar la igualdad* (5').

LEMA 4. *Para que el sistema ortonormal $e_1, e_2, \ldots$ sea base ortonormal del espacio H, es necesario y suficiente que una variedad lineal tendida sobre el sistema sea un conjunto siempre denso en H.*

Si el sistema $e_1, e_2, \ldots$ es una base ortonormal en H, entonces en la norma de H todo elemento $f\in H$ es aproximado con cualquier grado de precisión por sumas parciales de su serie de Fourier que son combinaciones lineales de este sistema. La necesidad queda así establecida.

Demostremos la suficiencia. Sea f un elemento arbitrario de H Para $\varepsilon>0$ arbitrario hallemos el número $p=p(\varepsilon)$ y los números $c_1(\varepsilon), \ldots, c_p(\varepsilon)$ tales que

$\left\|f-\sum_{k=1}^{p} c_k(\varepsilon)e_k\right\|<\varepsilon$. En virtud de la propiedad mínima de los coeficientes de Fourier

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{p} f_k e_k\right\|^2\leqslant\left\|f-\sum_{k=1}^{p} c_k(\varepsilon)e_k\right\|^2\leqslant\varepsilon^2,$$

de donde se deduce la posibilidad de desarrollar f en la serie de Fourier (4).

TEOREMA 1. *En el espacio separable de Hilbert existe una base ortonormal.*

Sea h'_1, h'_2 un conjunto numerable siempre denso en H. Designemos por h_1 el primer elemento h'_{k_1} $(h'_1 = \ldots = h'_{k_1-1} = 0)$ de este conjunto distinto de cero, y mediante h_2, el primer elemento del conjunto $h'_{k_1+1}, h'_{k_1+2}, \ldots$, que junto con h_1 forma un par de elementos linealmente independientes, etc. El sistema numerable (o finito) h_1, $h_2, \ldots$ es linealmente independiente y las combinaciones lineales de elementos de este sistema son siempre densos en H. Transformemos el sistema $h_1, h_2, \ldots$ (p. 5) en un sistema numerable ortonormal de elementos $e_1, e_2, \ldots$, cuyas combinaciones lineales son también siempre densas en H. De acuerdo con el lema 4, este sistema es una base ortonormal del espacio H. El teorema 1 está demostrado.

§ 3. Operadores lineales. Conjuntos compactos. Operadores totalmente continuos.

1. Operadores. Funcionales. Sean B_1 y B_2 espacios de Banach y sea B'_1 un conjunto ubicado en B_1. Diremos que en B'_1 está definido *el operador A (operador A de B_1 en B_2)*, si a todo elemento $f \in B'_1$ se le ha puesto en correspondencia algún elemento $g \in B_2 : g = Af$. El conjunto B'_1 se denomina *campo de definición* D_A, $D_A = B'_1$, del operador A y el conjunto de elementos del tipo Af para $f \in D_A$, *campo de sus valores* $R_A \subset B_2$.

El operador A recibe el nombre de funcional, si el espacio B_2 es un conjunto de números complejos (por norma en este último se toma el módulo del número complejo). Comúnmente, las funcionales se designan con letra l.

Los operadores más sencillos son: el operador O, nulo, y (cuando $B_1 = B_2$) I, unitario, determinados de la manera siguiente: $Of = o$ para todo $f \in D_O$, $If = f$ para todo $f \in D_I$.

Un operador A se denomina *continuo en el elemento* $f \in D_A$, si toda sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos de D_A, convergente en la norma de B_1 hacia f, es transformada por él en la sucesión Af_k, $k = 1, 2, \ldots$ que en la norma de B_2 converge hacia Af. Un operador A se llama *continuo en el conjunto* $E \subset D_A$ (en particular, en D_A), si es continuo en todo elemento $f \in E$. El operador A continuo en D_A, lo llamaremos *continuo*.

Un operador A se denomina *lineal*, cuando D_A es una variedad lineal y $A(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1Af_1 + c_2Af_2$ para todo elemento $f_i \in D_A$ y todo número c_i, $i = 1, 2$.

El operador lineal A pone en correspondencia el elemento nulo del espacio B_2 con el elemento nulo del espacio B_1, ya que

$$Ao = A(0\cdot f) = 0\cdot Af = o$$

(f es un elemento arbitrario de D_A).

Para que el operador lineal A sea continuo, es necesario y suficiente que lo sea en el elemento nulo (o, en general, en cualquier elemento de D_A).

La necesidad de la afirmación es evidente. Demostremos la suficiencia. Sea f_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de elementos de D_A que converge hacia $f \in D_A$. Como $g_k = f_k - f$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de elementos de D_A, convergente hacia cero, $Ag_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Esto implica que $Af_k \to Af$ cuando $k \to \infty$. La afirmación está demostrada.

Supongamos que A_i, $i = 1, 2$, son operadores lineales de B_1 en B_2, $D_{A_1} = D_{A_2}$, y c_i, $i = 1, 2$, ciertos números. Definamos el operador $A = c_1A_1 + c_2A_2$ de la manera siguiente: para todo $f \in D_A = D_{A_2}$ $Af = c_1A_1f + c_2A_2f$. El operador A es también lineal.

Así pues, en el conjunto de operadores lineales con campo de definición común están introducidas las operaciones de adición y multiplicación por números complejos. No es difícil convencerse de que este conjunto forma un espacio lineal.

El operador lineal A se denomina *acotado*, si existe una constante $C > 0$ tal que $\|Af\|_{B_2} \leqslant C\|f\|_{B_1}$ para todo $f \in D_A$, o, lo que es lo mismo, $\|Af\|_{B_2} \leqslant C$ para aquellos $f \in D_A$ con los que $\|f\|_{B_1} = 1$.

La cota inferior exacta de los valores de la constante C se llama *norma* del operador A y se designa mediante $\|A\|$.

Mostremos que

$$\|A\| = \sup_{f \in D_A} \frac{\|Af\|_{B_2}}{\|f\|_{B_1}} = \sup_{\substack{f \in D_A \\ \|f\|_{B_1} = 1}} \|Af\|_{B_2}. \tag{1}$$

Designemos con α la expresión $\sup\limits_{f \in D_A} \|Af\|_{B_2} / \|f\|_{B_1}$.

Como para todo $f \in D_A$ $\|Af\|_{B_2} / \|f\|_{B_1} \leqslant \alpha$, entonces $\|A\| \leqslant \alpha$. Probemos la desigualdad recíproca. Según la definición de cota superior exacta, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un elemento $f_\varepsilon \in D_A$, para el cual $\|Af_\varepsilon\|_{B_2} / \|f_\varepsilon\|_{B_1} \geqslant \alpha - \varepsilon$. Esto significa que $\|A\| \geqslant \alpha - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir, $\|A\| \geqslant \alpha$. Así pues, $\|A\| = \alpha$.

En particular, si el operador A es una funcional lineal acotada, $A = l$, su norma es

$$\|l\| = \sup_{f \in D_l} \frac{|lf|}{\|f\|_{B_1}} = \sup_{\substack{f \in D_l \\ \|f\|_{B_1} = 1}} |lf|.$$

Observemos que un conjunto de operadores lineales acotados con el campo de definición común es una variedad lineal en el conjunto de todos los operadores lineales con el mismo campo de definición. La norma introducida del operador lineal acotado satisface todos los axiomas de la norma. Es fácil mostrar que este espacio normado es completo (es decir, es el espacio de Banach).

Una relación entre los conceptos de continuidad y acotación para los operadores lineales se releva por la siguiente afirmación.

Para que un operador lineal A sea continuo, es necesario y suficiente que sea acotado.

SUFICIENCIA. Supongamos que una sucesión f_k, $k=1, 2, \ldots$, de D_A converge (en B_1) hacia $f \in D_A$. Como

$$\| Af_k - Af \|_{B_2} = \| A(f_k - f) \|_{B_2} \leqslant \| A \| \| f_k - f \|_{B_1} \to 0$$

cuando $k \to \infty$, resulta que en $B_2 AF_k \to Af$ cuando $k \to \infty$.

NECESIDAD. Supongamos que el operador A no es acotado; en este caso existe una sucesión f_k', $k=1, 2, \ldots$, de elementos de D_A, para la cual $\| Af_k' \|_{B_2} > k \| f_k' \|_{B_1}$. Pero esto contradice a la continuidad del operador A, puesto que la sucesión $f_k = f_k'/(k \| f_k' \|_{B_1})$, $k=1, 2, \ldots$, perteneciente a D_A, tiende en B_1 a cero, mientras que la sucesión Af_k, $k=1$ $2, \ldots$, no puede tender a $Ao = o$, porque $\| Af_k \|_{B_2} \geqslant 1$.

Un operador lineal acotado A con el campo de definición D_A, siempre denso en B_1, siempre podemos considerarlo prefijado en todo el B_1, definiéndolo adicionalmente en $B_1 \setminus D_A$ del modo siguiente. Sea f cualquier elemento de $B_1 \setminus D_A$ y sea f_k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de elementos de D_A que en la norma de B_1 converge hacia f (D_A es siempre denso en B_1). Como el operador A es acotado, la sucesión Af_k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos de B_2 es fundamental en B_2. Siendo B_2 completo, la sucesión Af_k, $k = 1, 2, \ldots$, tiene límite en B_2. Mostremos que este límite no depende de cómo se elige la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$ Efectivamente, sea f_k', $k = 1, 2, \ldots$, alguna otra sucesión de D_A, convergente hacia f. Entonces, $\|Af_k' - Af_k\|_{B_2} = \| A(f_k' - f_k) \|_{B_2} = \| A \| \| f_k' - f_k \|_{B_1} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por consiguiente, el límite sólo depende del elemento f. Tomémoslo por el valor Af del operador A en el elemento f. *La ampliación* obtenida del operador, llamada *ampliación según la continuidad*, es un operador lineal acotado, dado en todo el B_1.

Si A_1 y A_2 son operadores lineales para los cuales $R_{A_2} \subset D_{A_1}$, el operador lineal $A_1 A_2$ en D_{A_2} con un campo de valores en R_{A_1} se determina así: $A_1 A_2 f = A_1 (A_2 f)$. Si A_1 y A_2 son operadores acotados, $A_1 A_2$ es también acotado y $\| A_1 A_2 \| \leqslant \| A_1 \| \| A_2 \|$.

Supongamos que para todo $g \in R_A$ la ecuación $Af = g$ tiene la única solución $f \in D_A$. Esto significa que en R_A está dado un operador (designémoslo mediante A^{-1}) que con el elemento $g \in R_A$ pone en correspondencia aquel único elemento $f \in D_A$ para el cual $Af = g$. El operador A^{-1} se denomina *inverso* del operador A. Está claro que $D_{A^{-1}} = R_A$, $R_{A^{-1}} = D_A$, $A^{-1}A = I$, $AA^{-1} = I$. Si el operador A es lineal, el operador inverso A^{-1} es también lineal.

2. Teorema de Riesz. Como ejemplo de una funcional lineal acotada, definida en el espacio de Hilbert, figura un producto escalar: fijemos al azar un elemento $h \in H$, entonces (f, h) es (según f) una funcional lineal acotada (la acotación se desprende de la desigualdad de Buniakovski). Es muy interesante que con la elección adecuada de $h \in H$ toda funcional lineal acotada, definida en H (o, en virtud del p.1, en un conjunto siempre denso en H), puede ser representada como un producto escalar. Resulta válida la siguiente importante afirmación.

TEOREMA 1. (Teorema de F. Risz). *Para toda funcional lineal acotada l, definida en el espacio de Hilbert H, existe un solo elemento $h \in H$ tal que para todos los $f \in H$ se cumple*

$$l(f) = (f, h). \tag{2}$$

Demostrando este teorema, limitémonos al caso de un espacio separable de Hilbert H (emplearemos el teorema sólo para los espacios de este género).

Sea $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ una base ortonormal en H (la que existe en virtud del teorema 1, § 2) y sea $\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ un desarrollo en la serie de Fourier de cierto elemento $f \in H$. Dado que $\sum_{k=1}^{p} f_k e_k \to f$ para $p \to \infty$, en vista de la continuidad de la funcional l se tiene

$$l(f) = \lim_{p\to\infty} l\left(\sum_{k=1}^{p} f_k e_k\right) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} f_k l(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \overline{h}_k, \tag{3}$$

donde $h_k = \overline{l(e_k)}$, $k = 1, 2, \ldots$

Examinemos el elemento $h^p = \sum_{k=1}^{p} h_k e_k$. Sabemos que $|l(h^p)| \leqslant \leqslant \|l\| \, \|h^p\|$ (acotación de la funcional l) y que $l(h)^p = \sum_{k=1}^{p} h_k l(e_k) = = \sum_{k=1}^{p} |h_k|^2 = \|h^p\|^2$. Entonces, para todos los $p \geqslant 1$ $\sum_{k=1}^{p} |h_k|^2 \leqslant \|l\|^2$. Esto significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2$ es convergente y $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 \leqslant \leqslant \|l\|^2$. De acuerdo con el lema 1 (p. 6, § 2) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} h_k e_k$ converge en la norma del espacio H hacia cierto elemento $h \in H$ (h_k son los coeficientes de Fourier del elemento h).

Sustituyendo en (3) $f_h = (f, e_h)$ y valiéndose otra vez de la continuidad de la funcional l, obtenemos la igualdad (2):

$$l(f) \sum_{h=1}^{\infty} (f, h_k e_k) = (f, \sum_{h=1}^{\infty} h_k e_k) = (f, h).$$

Si a la par con la representación (2) existe otra representación de la funcional l: $l(f) = (f, h')$, entonces $(f, h - h') = 0$ para todos los $f \in H$. Esto quiere decir que $h = h'$. El teorema queda demostrado.

Observemos que al demostrar el teorema 1, hemos establecido la desigualdad $\| h \| \leqslant \| l \|$. De (2) y de la desigualdad de Buniákovski se deduce una desigualdad recíproca $\| l \| \leqslant \| h \|$. Por lo tanto, $\| l \| = \| h \|$.

3. Operador conjugado. Sea H un espacio de Hilbert y sea A un operador lineal de H en H, definido en el conjunto D_A siempre denso en H (en el caso general no se supone que el operador A sea acotado).

Supongamos que D_{A^*} es un conjunto de todos los elementos de H que poseen una propiedad siguiente: para todo $g \in D_{A^*}$ existe un elemento $h \in H$ tal que para cualquier $f \in D_A$ se cumple la igualdad

$$(Af, g) = (f, h).$$

El conjunto D_{A^*} es no vacío, dado que el elemento nulo del espacio H le pertenece: el elemento $h = o$ cuando $g = o$.

Demostremos que a cada elemento $g \in D_{A^*}$ le está asignado un solo elemento $h \in H$. Supongamos, al contrario, que a cierto $g \in D_{A^*}$ le corresponden dos elementos h y h' de H. En este caso para todos los $f \in D_A$ tiene lugar la igualdad $(f, h - h') = 0$, de la cual se deduce que $h = h'$ (recordemos que D_A es siempre denso en H).

De este modo, en D_{A^*} está dado un operador que vamos a designar mediante A^*: a cada elemento $g \in D_{A^*}$ le está asignado un elemento único $h = A^*g \in H$ tal que

$$(Af, g) = (f, A^*g) \tag{4}$$

para todo $f \in D_A$. El operador A^* se llama *conjugado* al operador A. El conjunto D_{A^*} de todos los elementos de H, para los cuales se cumple la igualdad (4), cualquiera que sea $f \in D_A$, es el campo de definición del operador conjugado.

Sean g_1 y g_2 elementos arbitrarios de D_{A^*}, y c_1, c_2, números complejos cualesquiera. Entonces, en virtud de (4) tenemos para todo $f \in D_A$:

$$(f, c_1A^*g_1 + c_2A^*g_2) = \overline{c_1}(f, A^*g_1) + \overline{c_2}(f, A^*g_2) =$$
$$= \overline{c_1}(Af, g_1) + \overline{c_2}(Af, g_2) = (Af, c_1g_1 + c_2g_2).$$

Esto significa que $c_1g_1+c_2g_2 \in D_{A^*}$ (es decir, D_{A^*} es una variedad lineal) y $A^*(c_1g_1+c_2g_2)=c_1A^*g_1+c_2A^*g_2$. Esto quiere decir que el operador A^* es lineal.

Supongamos ahora que el operador A es acotado. En vista del p. 1, se le puede considerar dado por todo el espacio H. Tomemos un elemento *arbitrario* $g \in H$. Una funcional lineal $l(f) = (Af, g)$ es acotada, porque $|l(f)| \leqslant \|Af\| \, \|g\| \leqslant (\|A\| \, \|g\|) \|f\|$. De acuerdo con el teorema de Riesz (p. 2), existe tal elemento (único) $h \in H$ que $l(f) = (Af, g) = (f, h) = (f, A^*g)$. Por consiguiente, la igualdad (4) se cumple *para todos los* $g \in H$, es decir, $D_{A^*} = H$.

Demostremos que el operador A^* es acotado y que $\|A^*\| = \|A\|$. Sustituyendo en (4) $f = A^*g$, obtendremos para $g \in H$ arbitrario

$$\|A^*g\|^2=(AA^*g,\ g)\leqslant\|A(A^*g)\|\,\|g\|\leqslant(\|A\|\,\|g\|)\,\|A^*g\|$$

Por eso, $\|A^*g\| \leqslant \|A\| \, \|g\|$, esto es, el operador A^* es acotado y $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Sustituyendo en (4) $g = Af$, obtendremos, análogamente, para todo $f \in H$: $\|A^*\| \geqslant \|A\|$. Por lo tanto, $\|A^*\| = \|A\|$.

Así pues, el operador A^*, conjugado al operador lineal acotado A, está definido sobre todo el espacio, es lineal, acotado y su norma es igual a la del operador A.

Es fácil comprobar que $(A^*)^* = A$, $(cA)^* = \bar{c}A^*$ (c es un número complejo), $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$.

4. Representación matricial de un operador lineal acotado. Al demostrar el teorema de Riesz hemos establecido que una funcional lineal acotada dada en el espacio separable de Hilbert se define completamente por sus valores en la base ortonormal de este espacio. Lo mismo sucede también con los operadores lineales acotados.

Sea A un operador lineal acotado que actúa desde un espacio separable de Hilbert H en H. Sea $D_A = H$, y sea $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ una base ortonormal de H.

Llamaremos *representación matricial* del operador A en la base $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ a la matriz infinita $a_{ij}=(Ae_i,\ e_j)=(e_i,\ A^*e_j)$, $i\geqslant 1$, $j\geqslant 1$. Puesto que $(A^*e_j,\ e_i)=\bar{a}_{ij}$, $i=1,\ 2,\ \ldots$, son coeficientes de Fourier del elemento A^*e_j, entonces de acuerdo con la igualdad de Parseval—Steklov (igualdad (5), p. 7, § 2), la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2$ converge y para todos los $j=1,\ 2,\ \ldots$ es válida la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2=|A^*e_j\|^2\leqslant\|A^*\|^2=\|A\|^2. \tag{5}$$

Tomemos un elemento arbitrario $f \in H$ y sea $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ su desarrollo en una serie de Fourier. Como el elemento $Af \in H$, sus coeficientes de Fourier son

$$(Af)_j = (Af, e_j) = \left(A \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (Ae_i, e_j) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i a_{ij}, \quad (6)$$

$j = 1, 2, \ldots$ La serie en el segundo miembro de (6) converge absolutamente, ya que el término común $f_i a_{ij}$ es mayorado pol el término común de la serie convergente $\frac{1}{2} (|f_i|^2 + |a_{ij}|^2)$. Sustituyendo los valores de los coeficientes de Fourier en la serie de Fourier $Af = \sum_{j=1}^{\infty} (Af)_j e_j$, obtendremos

$$Af = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} f_i\right) e_j. \quad (7)$$

De este modo, cualquiera que sea $f \in H$, el elemento $Af \in H$ puede ser hallado por f, sólo con la ayuda de la matriz (a_{ij}). Lo último significa que la matriz (a_{ij}) define completamente el operador A.

Cuando (a_{ij}) es representación matricial del operador A en la base $e_1, e_2, \ldots$, y (a^*_{ij}), la representación correspondiente del operador conjugado A^*, tenemos

$$a^*_{ij} = (A^* e_i, e_j) = (e_i, Ae_j) = \bar{a}_{ij} \text{ para todos los } i \geqslant 1, j \geqslant 1.$$

El operador A se llama *de dimensión finita* (*n-dimensional*), cuando representa el espacio de Hilbert H en algún subespacion-dimensiona suyo.

Sea H_n un subespacio del espacio H, tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$. Para que un operador lineal acotado A transforme el espacio H en H_n, es necesario y suficiente que $a_{ij} = 0$ para $j > n$, $i \geqslant 1$. Esta afirmación se deduce directamente de las igualdades (6) y (7).

5. Operadores autoconjugados. Operadores de proyección ortogonal. Un operador lineal acotado que está definido en el espacio de Hilbert H y actúa de H en H, se llama autoconjugado, si $A = A^*$.

Al operador autoconjugado A se le puede asignar la forma bilineal hermitiana $W(f, g) = (Af, g)$ y la forma cuadrática (Af, f) correspondiente a ésta. Dichas formas se denominan, respectivamente, *bilineal* y *cuadrática del operador* A. La forma cuadrática de un operador autoconjugado es de valores reales. Si $(Af, f) \geqslant 0$ para todo f de H, el operador autoconjugado A se llama *no negativo*. Un operador no negativo se denomina *positivo*, si $(Af, f) = 0$ sólo cuando $f = 0$.

La representación matricial (a_{ij}) de un operador autoconjugado (cuando el espacio H es separable) posee la siguiente propiedad: $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots$

Supongamos que $e_1, e_2, \ldots$ es cierta base ortonormal de un espacio separable de Hilbert H, $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, \ldots$ es un subconjunto numerable (o finito) de dicha base, y $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}, \ldots$, un subconjunto de una base, adicional a la elegida. Denotemos mediante $\mathfrak{N}'$ el subespacio tendido sobre los elementos e_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots$, y mediante $\mathfrak{N}''$, el subespacio tendido sobre los elementos e_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots$ El subespacio $\mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{N}''$) es una colección de elementos, pertenecientes al espacio H y ortogonales a todos los elementos e_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots$ (e_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots$). Lo mismo expresamos diciendo que el subespacio $\mathfrak{N}'$ ($\mathfrak{N}''$) es un conjunto de todos aquellos elementos de H en cuyos desarrollos en series de Fourier según la base e_k, $k = 1, 2, \ldots$, los coeficientes de Fourier de los elementos e_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots$ (e_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots$) son todos nulos (esto es, en los desarrollos faltan los miembros correspondientes). Los subespacio $\mathfrak{N}'$ y $\mathfrak{N}''$ son ortogonales, $\mathfrak{N}' \perp \mathfrak{N}''$.

Comparemos un elemento arbitrario $f \in H$, cuyo desarrollo en la serie de Fourier tiene la forma $\sum f_k e_k$, y los elementos

$$f' = P'f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} e_{i_k}, \quad f'' = P''f = \sum_{k=1}^{\infty} f_{j_k} e_{j_k}. \tag{8}$$

Las series de (8) convergen en la norma del espacio H en virtud de la desigualdad de Bessel y del lema 1 (p. 6, § 2). Por eso, las correlaciones (8) definen en H dos operadores P' y P'', los cuales son lineales. Los campos de sus valores son: $R_{P'} = \mathfrak{N}'$, $R_{P''} = \mathfrak{N}''$.

Los operadores P' y P'' se llaman operadores de *proyección ortogonal* del espacio H sobre los subconjuntos $\mathfrak{N}'$ y $\mathfrak{N}''$, respectivamente (para abreviar, en lo sucesivo los vamos a llamar operadores *proyectivos*).

Un operador proyectivo es acotado y su norma es igual a 1. Efectivamente, como para todos los $f \in H$ $\|P'f\|^2 = \|f'\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{i_k}|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 = \|f\|^2$, resulta que $\|P'\| \leqslant 1$. Pero, $P'e_{i_1} = e_{i_1}$, es decir, $\|P'\| = 1$.

Un operador proyectivo es autoconjugado, puesto que para f y h cualesquiera de H $(P'f, h) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} e_{i_k}, h\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} (e_{i_k}, h) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k} \bar{h}_{i_k} = (f, P'h)$.

De la ecuación (8) se deduce que para todo $f \in H$

$$f = If = P'f + P''f, \quad I = P' + P'', \tag{9}$$

donde $P'f \in \mathfrak{R}'$, $P''f \in \mathfrak{R}''$. Además,

$$\|f\|^2 = \|P'f + P''f\|^2 = \|P'f\|^2 + \|P''f\|^2 + \\ + (P'f, P''f) + (P''f, P'f) = \|P'f\|^2 + \|P''f\|^2, \tag{10}$$

ya que $\mathfrak{R}' \perp \mathfrak{R}''$.

6. **Conjuntos compactos.** Sea H un espacio de Hilbert. El conjunto $\mathscr{M} \subset H$ se llama *compacto* en H, si toda (infinita) sucesión de sus elementos contiene una subsucesión fundamental en H.

LEMA 1. *Un conjunto compacto es acotado.*

Sea $\mathscr{M}$ un conjunto no acotado. Mostremos que este conjunto no puede ser compacto. Tomemos cierto elemento f^1 del conjunto y designemos por S_{f^1} una bola de radio 1 y con el centro en f^1, es decir, el conjunto de aquellos elementos $f \in H$ para los cuales $\|f - f^1\| < 1$. Como $\mathscr{M}$ no es acotado, el conjunto $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M} \setminus S_{f^1}$ es no vacío. Tomemos al azar $f^2 \in \mathscr{M}_1$ ($\|f^2 - f^1\| \geqslant 1$). Como el conjunto $\mathscr{M}_2 = \mathscr{M}_1 \setminus S_{f^2}$ tampoco es vacío, existe un elemento $f^3 \in \mathscr{M}$ tal que $\|f^3 - f^1\| \geqslant 1$, $\|f^3 - f^2\| \geqslant 1$. Continuando este proceso, obtendremos una sucesión f^k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathscr{M}$ que satisfacen la desigualdad $\|f^i - f^j\| \geqslant 1$, cualesquiera que sean i, j, $i \neq j$. Esta sucesión no contiene ninguna subsucesión fundamental. Por consiguiente, el conjunto $\mathscr{M}$ no puede ser compacto.

LEMA 2. *Para que un conjunto $\mathscr{M}$ del espacio de Hilbert H de dimensión finita (n-dimensional) sea compacto, es necesario y suficiente que sea acotado.*

La necesidad de la acotación se desprende del lema 1. Demostremos su suficiencia.

Ya que el conjunto $\mathscr{M}$ es acotado, $\|f\| \leqslant C$ para todo $f \in \mathscr{M}$. Por esta razón, los coeficientes de Fourier $f_i = (f, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, del desarrollo $f = f_1e_1 + \ldots + f_ne_n$ de un elemento arbitrario $f \in \mathscr{M}$*) satisfacen las desigualdades $|f_i| = |(f, e_i)| \leqslant \|f\| \, \|e_i\| = \|f\| \leqslant C$. Por consiguiente, para cualquier sucesión f^k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos pertenecientes a $\mathscr{M}$ una sucesión de vectores n-dimensionales $(f_1^k, \ldots, f_n^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, donde $f_i^k = (f^k, e_i)$, es acotada. Según el teorema de Bolzano — Weierstrass, de la última sucesión se puede extraer una subsucesión fundamental $(f_1^{k_s}, \ldots, f_n^{k_s})$, $s = 1, 2, \ldots$:

$$|f_1^{k_s} - f_1^{k_p}|^2 + \ldots + |f_n^{k_s} - f_n^{k_p}|^2 \to 0 \quad \text{cuando} \quad s, p \to \infty.$$

*) Según cierta base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$.

La sucesión correspondiente $f^{k_s} = f_1^{k_s} e_1 + \ldots + f_n^{k_s} e_n$, $s = 1, 2, \ldots$, es fundamental en H, dado que

$$\| f^{k_s} - f^{k_p} \|^2 = | f_1^{k_s} - f_1^{k_p} |^2 + \ldots + | f_n^{k_s} - f_n^{k_p} |^2 \to 0$$

$$\text{cuando} \quad s, \; p \to \infty.$$

La afirmación está demostrada.

7. Teorema de la compacidad de conjuntos en un espacio separable de Hilbert. Sea H un espacio separable de Hilbert de dimensión infinita y sea $e_1, \ldots, e_n$ su base ortonormal.

Indiquemos primero que no todo conjunto acotado de H es compacto. Por ejemplo, cualquier conjunto acotado que contiene una base ortonormal no es compacto, puesto que de la sucesión e_k, $k = 1, 2, \ldots$ (en virtud de la igualdad $\| e_i - e_j \| = \sqrt{2}$, $i \neq j$), no puede ser extraída una subsucesión fundamental. En particular, el conjunto $\{\| f \| \leqslant 1\}$ (una bola unitaria cerrada) en el espacio infinito es no compacto.

Designemos por P'_n un operador proyectivo que representa H en el subespacio de n dimensiones H_n tendido en los elementos $e_1, \ldots, e_n$, y sea $P''_n = I - P'_n$. Para todo $f \in H$ y $n \geqslant 1$, arbitrariamente elegido, tenemos (véase (9)):

$$f = P'_n f + P''_n f, \tag{11}$$

donde $P'_n f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$, $P''_n f = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k e_k$. De (11) se deduce que

$$\| f \|^2 = \| P'_n f \|^2 + \| P''_n f \|^2, \tag{12}$$

donde $\| P'_n f \|^2 = \sum_{k=1}^{n} | f_k |^2$, $\| P''_n f \|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} | f_k |^2$.

Esto significa que para todo $f \in H$ la sucesión numérica $\| P''_n f \|^2$, $n = 1, 2, \ldots$, tiende a cero, cuando $n \to \infty$, sin crecer de manera monótona.

TEOREMA 2. *Para que el conjunto $\mathscr{M} \subset H$ (H es un espacio separable de Hilbert) sea compacto, es necesario y suficiente que sea acotado, y que para todo $\varepsilon > 0$ exista un número $n = n(\varepsilon)$ tal que $\| P''_n f \| \leqslant \varepsilon$, cualquiera que sea $f \in \mathscr{M}$.*

En otras palabras, para que el conjunto $\mathscr{M}$ sea compacto, es necesario y suficiente que sea acotado y «casi de dimensión finita».

SUFICIENCIA. Sea $\| f \| \leqslant C$ para todo $f \in \mathscr{M}$. Tomemos una sucesión arbitraria f^k, $k = 1, 2, \ldots$, de elementos pertenecientes a $\mathscr{M}$. Hagamos $\varepsilon = 1$, entonces $\| P''_{n_1} f^k \| \leqslant 1$ para todo k, donde $n_1 = n(1)$. Puesto que $\| P'_{n_1} f^k \| \leqslant \| f^k \| \leqslant C$ para todo k (P'_n de (11)), el conjunto $P'_{n_1} f^k$, $k = 1, 2, \ldots$, es un conjunto acotado del espacio

n_1-dimensional H_{n_1}. Según el lema 2 (p. 6), del último se puede extraer una subsucesión fundamental y de ésta, una subsucesión $P'_{n_1}f^{1,s}$, $s=1, 2, \ldots$, que posea la siguiente propiedad: $\| P'_{n_1}f^{1,s} - P'_{n_1}f^{1,p} \| \leqslant 1$ para todos los s y $p \geqslant 1$. En este caso, para la subsucesión $f^{1,1}, \ldots, f^{1,s}, \ldots$ tenemos las desigualdades (en virtud de (12)):

$$\| f^{1,s} - f^{1,p} \|^2 = \| P'_{n_1}f^{1,s} - P'_{n_1}f^{1,p} \|^2 + \| P''_{n_1}f^{1,s} - P''_{n_1}f^{1,p} \|^2 \leqslant \leqslant 1 + (\| P''_{n_1}f^{1,s} \| + \| P''_{n_1}f^{1,p} \|)^2 \leqslant 5,$$

que son válidas para todos los p y s.

Valiéndonos de $\varepsilon = 1/2$, tomemos un número $n_2 = n(1/2)$. La sucesión $P'_{n_2}f^{1,1}, \ldots, P'_{n_2}f^{1,s}, \ldots$ pertenece a H_{n_2} y es acotada; por consiguiente, de ella podemos extraer una subsucesión $P'_{n_2}f^{2,s}$, $s=1, 2, \ldots$, para la cual $\| P'_{n_2}f^{2,s} - P'_{n_2}f^{2,p} \| \leqslant 1/2$, cualesquiera que sean p, s.

En vista de (12) tenemos $\| f^{2,s} - f^{2,p} \|^2 = \| P'_{n_2}f^{2,s} - P'_{n_2}f^{2,p} \|^2 + \| P''_{n_2}f^{2,s} - P''_{n_2}f^{2,p} \|^2 \leqslant 1/4 + 4/4 = 5/4$ para todos los s, p, etc. Para $\varepsilon = 1/i$ hallemos $n_i = n(1/i)$ y destaquemos de la subsucesión $P'_{n_i}f^{i-1,s}$, $s=1, 2, \ldots$, una subsucesión $P'_{n_i}f^{i,s}$, $s=1, 2, \ldots$, tal que $\| P'_{n_i}f^{i,s} - P'_{n_i}f^{i,p} \| \leqslant 1/i$, cualesquiera que sean s, p. Para la subsucesión $f^{i,s}$, $s=1, 2, \ldots$, en virtud de (12), $\| f^{i,s} - f^{i,p} \|^2 \leqslant \leqslant 1/i^2 + 4/i^2 = 5/i^2$ para todos los s, p.

La sucesión diagonal $f^{s,s}$, $s=1, 2, \ldots$, es una subsucesión de la sucesión de partida y para ella se verifica $\| f^{p,p} - f^{s,s} \| \leqslant \leqslant 5/i^2$, para todos los p, $s \geqslant i$, es decir, es fundamental.

NECESIDAD. La necesidad de la acotación del conjunto $\mathcal{M}$ fue demostrada en el lema 1 (p. 6). Demostremos la necesidad de la segunda condición del teorema.

Sea $\mathcal{M}$ compacto, pero, sin embargo, existe tal $\varepsilon_0 > 0$ que para todo n $\| P''_nf^n \| \geqslant \varepsilon_0$, para cierto $f^n \in \mathcal{M}$.

Tomemos n_1 arbitrario y hallemos, según él tal $f^{n_1} \in \mathcal{M}$ que $\| P''_{n_1}f^{n_1} \| \geqslant \varepsilon_0$. Partiendo de f^{n_1}, elijamos $n_2 > n_1$ de tal manera que $\| P''_{n_2}f^{n_1} \| < \varepsilon_0/2$ (esto es posible, dado que para cualquier $f \in H$ fijado $\| P''_kf \| \to 0$ cuando $k \to \infty$). Según n_2 escojamos $f^{n_2} \in \mathcal{M}$ de tal modo que $\| P''_{n_2}f^{n_2} \| \geqslant \varepsilon_0$. Según f^{n_2} hallamos n_3 de tal modo que $\| P''_{n_3}f^{n_2} \| \leqslant \varepsilon_0/2$, y así sucesivamente. Resulta que hemos obtenido la sucesión f^{n_k}, $k=1, 2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{M}$ para la cual son válidas las desigualdades

$$\| P''_{n_k}f^{n_k} \| \geqslant \varepsilon_0, \quad \| P''_{n_{k+1}}f^{n_k} \| < \varepsilon_0/2.$$

Mostremos que esta sucesión no puede contener una subsucesión fundamental. En efecto, teniendo en cuenta (12) y el hecho de que la función $\| P^{\perp}_n f \|$ es monótona según n, tenemos para todo $k > s$:

$$\| f^{n_k} - f^{n_s} \|^2 = \| P_{n_k} (f^{n_k} - f^{n_s}) \|^2 + \| P^{\perp}_{n_k} (f^{n_k} - f^{n_s}) \|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \| P^{\perp}_{n_k} (f^{n_k} - f^{n_s}) \|^2 \geqslant (\| P^{\perp}_{n_k} f^{n_k} \| - \| P^{\perp}_{n_k} f^{n_s} \|^2) \geqslant$$

$$\geqslant (\| P^{\perp}_{n_k} f^{n_k} \| - \| P^{\perp}_{n_{s+1}} f^{n_s} \|)^2 > (\varepsilon_0 - \varepsilon_0/2)^2 = \varepsilon_0^2/4.$$

COROLARIO. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de un espacio separable de Hilbert H. Examinemos una familia de conjuntos $\mathcal{M}_\varepsilon \subset H$, $\varepsilon > 0$, que posee la siguiente propiedad: en cada $\mathcal{M}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, para todo $f \in \mathcal{M}$ existe un elemento $f' = f'(\varepsilon)$ tal que $\| f' - f \| \leqslant \varepsilon$. *Si para una sucesión* $\varepsilon_k \to 0$ *cuando* $k \to \infty$, $\varepsilon_k > 0$, *todos los conjuntos* $\mathcal{M}_{\varepsilon_k}$ *son compactos, entonces* $\mathcal{M}$ *es compacto.*

Tomemos en esta sucesión ε_k arbitrario. Puesto que el conjunto $\mathcal{M}_{\varepsilon_k}$ es compacto, existirá tal $n = n(\varepsilon_k)$ que $\| P^{\perp}_n f \| \leqslant \varepsilon_k$ para todo $f \in \mathcal{M}_{\varepsilon_k}$. Mas, en este caso para cualquier $f \in \mathcal{M}$ $\| P^{\perp}_n f \| = \| P^{\perp}_n (f - f') + P^{\perp}_n f' \| \leqslant \| P^{\perp}_n (f - f') \| + \| P^{\perp}_n f' \| \leqslant \| f - f' \| + \varepsilon_k \leqslant 2\varepsilon_k$, siempre que f' es un elemento de $\mathcal{M}_{\varepsilon_k}$ de tal género que $\| f - f' \| \leqslant \varepsilon_k$. Como $\varepsilon_k \to 0$, en virtud del teorema 2, el conjunto $\mathcal{M}$ es compacto.

8. **Compacidad débil.** En conjunto $\mathcal{M}$ perteneciente al espacio de Hilbert H, se denomina ***débilmente compacto***, si en cualquier sucesión de sus elementos se puede elegir una subsucesión que converja débilmente hacia cierto elemento de H (no es obligatorio que este elemento pertenezca al conjunto $\mathcal{M}$).

TEOREMA 3. *Todo conjunto acotado del espacio de Hilbert es débilmente compacto.*

Efectivamente, la acotación de un conjunto no sólo es suficiente sino también necesaria para que éste sea compacto. Sin embargo, no vamos a demostrar aquí la necesidad y nos limitaremos a demostrar la suficiencia de la acotación para el caso de un espacio separable de Hilbert.

Sea e_k, $k = 1, 2, \ldots$, una base ortonormal H y sea $\mathcal{M}$ un conjunto acotado en H: $\| f \| \leqslant C$ para todo $f \in \mathcal{M}$. Tomemos en $\mathcal{M}$ una sucesión arbitraria f^k, $k = 1, 2, \ldots$ Puesto que $\| f^k \| \leqslant C$ para todo k, la sucesión numérica (f^k, e_1), $k = 1, 2, \ldots$, es acotada: $| (f^k, e_1) | \leqslant \| f^k \| \| e_1 \| \leqslant C$. Por lo tanto, de la sucesión f^k, $k = 1, 2, \ldots$, se puede extraer una subsucesión $f^{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, para la cual la sucesión numérica $(f^{1,k}, e_1)$ converja hacia cierto σ_1: $(f^{1,k}, e_1) \to \sigma_1$ cuando $k \to \infty$. La sucesión $(f^{1,k}, e_2)$ es también acotada. Esto quiere decir que de la sucesión $f^{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, se puede extraer una subsucesión $f^{2,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, para la cual la sucesión numérica $(f^{2,k}, e_2)$ tienda a σ_2 cuando $k \to \infty$, etc.

Mostremos que la sucesión diagonal $f^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, es de débil convergencia. Ante todo indiquemos que para todo $s \geqslant 1$, $(f^{k,k}, e_s) \to \sigma_s$ cuando $k \to \infty$. Por ello, cualquiera que sea $m \geqslant 1$, tenemos

$$(f^{k,k}, \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_i) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\sigma}_i (f^{k,k}, e_i) \to \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Puesto que $|(f^{k,k}, \sum_{i=1}^{m} \sigma_i e_i)|^2 \leqslant \|f^{k,k}\|^2 \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \leqslant C^2 \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2$, resulta: $\sum_{i=1}^{m} |\sigma_i|^2 \leqslant C^2$ para todo $m \geqslant 1$. Por consiguente, $\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2 \leqslant$ $\leqslant C^2$. En virtud del lema 1 (p. 6, § 2), la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i$ converge hacia cierto elemento $f \in H$, con la particularidad de que $\|f\|^2 =$ $= \sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2$. Mostremos que la sucesión $f^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge débilmente hacia f.

Sea g un elemento arbitrario de H. Tomemos al azar $\varepsilon > 0$ y elijamos un número $s = s(\varepsilon)$ de tal manera que $\sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant \varepsilon^2$. Conforme a la igualdad generalizada de Parseval — Steklov ((5′), p. 7, § 2) tenemos:

$$\begin{aligned}(f^{k,k} - f, g)| = |\sum_{i=1}^{\infty} ((f^{k,k}, e_i) - \sigma_i) \overline{g_i}| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{s} |f^{k,k}, e_i) - \sigma_i| \cdot |g_i| + \\ + \sum_{i=s+1}^{\infty} |(f^{k,k}, e_i)| \cdot |g_i| + \sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i| \cdot |g_i| \qquad (13)\end{aligned}$$

Además,

$$(\sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i| \cdot |g_i|)^2 \leqslant \sum_{i=s+1}^{\infty} |\sigma_i|^2 \cdot \sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant \|f\|^2 \cdot \varepsilon^2,$$

$$(\sum_{i=s+1}^{\infty} |f^{k,k}, e_i)||g_i|^2) \leqslant \sum_{i=s+1}^{\infty} |(f^{k,k}, e_i)|^2 \sum_{i=s+1}^{\infty} |g_i|^2 \leqslant C^2 \varepsilon^2.$$

Según la definición de los números σ_i, el primer sumando en el segundo miembro (13) también podemos hacerlo menor que ε, si para cierto $k_0(\varepsilon)$ $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Por eso, $|(f^{k,k} - f, g)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon(C +$ $+ \|f\|)$ para $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. El teorema queda demostrado.

9. Operadores totalmente continuos. Sea H un espacio de Hilbert. El operador A que actúa de H en H y está definido en H, se llama *totalmente continuo*, si transforma cualquier conjunto acotado en un conjunto compacto.

Si los operadores A_1 y A_2 son totalmente continuos, el operador $c_1A_1 + c_2A_2$ es totalmente continuo, cualesquiera que sean las constantes c_1 y c_2. Si A es un operador totalmente continuo y B, un operador acotado, prefijado en H, los operadores AB y BA son totalmente continuos.

Del lema 1 (p. 6) se desprende que un operador totalmente continuo es acotado. Sin embargo, no todo operador acotado es totalmente continuo. Así, por ejemplo, un operador unitario I que actúa en un espacio de Hilbert de dimensión infinita no puede ser totalmente continuo, puesto que transforma un conjunto acotado no compacto, o sea una base ortonormal, en sí mismo.

Un operador acotado de dimensión finita es totalmente continuo, lo que se deduce del lema 2 (p. 6). Como generalización inmediata de esta afirmación nos sirve el siguiente criterio.

TEOREMA 4. *Para que un operador lineal acotado A, que está definido en un espacio separable de Hilbert H y que actúa de H en H, sea totalmente continuo, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ se puedan hallar tal número entero $n = n(\varepsilon)$ y, además, tales operadores lineales A_1 y A_2 (A_1 es de n dimensiones y $\| A_2 \| \leqslant \varepsilon$) que*

$$A = A_1 + A_2. \tag{14}$$

De este modo, los operadores totalmente continuos son «casi de dimensión finita».

NECESIDAD. En virtud de (11) (véase p. 7), para cualesquiera $f \in H$ y $n > 0$ tenemos el desarrollo

$$Af = P'_nAf + P''_nAf \quad (A = P'_nA + P''_nA). \tag{15}$$

Como A es totalmente continuo, según cualquier $\varepsilon > 0$ se puede hallar tal $n = n(\varepsilon)$ que $\| P''_nA \| \leqslant \varepsilon$. Efectivamente, de acuerdo con el teorema 2, $\| P''_nAf \| = \| f \| \; \| P''_nA (f/ \| f \|) \| \leqslant \varepsilon \| f \|$, dado que de la acotación del conjunto $\{f/ \| f \|\}$ se deduce la compacidad del conjunto $\{A (f/ \| f \|)\}$. Como el operador P_nA es n-dimensional, la necesidad queda demostrada.

SUFICIENCIA. Sea f^k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión acotada arbitraria perteneciente a H, $\| f^k \| \leqslant C$, $k = 1, 2, \ldots$ Mostremos que de la sucesión Af^k, $k = 1, 2, \ldots$, se puede extraer una subsucesión fundamental. Tomaremos los números $\varepsilon > 0$ del conjunto $\{1, 1/2, \ldots, 1/i, \ldots\}$ y para $\varepsilon = 1/i$ hallaremos $n_i = n(1/i)$ y los operadores A_1^i y A_2^i tales que $A = A_1^i + A_2^i$ (A_1^i es n_i-dimensional y $\| A_2^i \| \leqslant 1/i$). En este caso $\| A_1^i \| = \| A - A_2^i \| \leqslant \| A \| + \| A_2^i \| \leqslant \| A \| + 1$.

$A_1^1 f^k$, $k = 1, 2, \ldots$, es el conjunto acotado de un espacio n_1-dimensional, por lo que (lema 2, p. 6) de él puede ser elegida la subsucesión fundamental $A_1^1 f^{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$ En estas condiciones, la sucesión $f^{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, posee la siguiente propiedad: $\| A_2^1 f^{1,k} \| \leqslant \leqslant \| A_2^1 \| \| f^{1,k} \| \leqslant 1 \cdot C$. $A_1^2 f^{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, es una sucesión acotada de un conjunto n_2-dimensional. Por consiguiente, existe su subsucesión fundamental $A_1^2 f^{2,k}$, $k = 1, 2, \ldots$ En este caso se cumple la desigualdad $\| A_2^2 f^{2,k} \| \leqslant \| A_2^2 \| \| f^{2,k} \| \leqslant \frac{1}{2} \cdot C$, y así sucesivamente.

La sucesión diagonal $f^{1,1}, f^{2,2}, \ldots$, posee, evidentemente, las siguientes propiedades: una sucesión $A_1^i f^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental para todo i, puesto que para todos los $k \geqslant i$, $f^{k,k}$ son elementos de la sucesión $f^{i,k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Además, $\| A_2^i f^{k,k} \| \leqslant C/i$ para todo i. Mostremos que la sucesión $Af^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental. Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y fijemos $i > 1/\varepsilon$. En este caso, ya que la sucesión $A_1^i f^{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental, tenemos (cuando k y s son suficientemente grandes):

$$\| Af^{k,k} - Af^{s,s} \| \leqslant \| A_1^i (f^{k,k} - f^{s,s}) \| + \| A_2^i (f^{k,k} - f^{s,s}) \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \| A_2^i f^{k,k} \| + \| A_2^i f^{s,s} \| \leqslant \varepsilon + 2C/i \leqslant (1 + 2C)\, \varepsilon,$$

lo que se trataba de demostrar.

Del teorema 4 se deduce, en particular, la afirmación siguiente. *Sea A un operador lineal totalmente continuo que está definido por todo el espacio separable de Hilbert H y actúa de H en H. Entonces, el operador A^*, conjugado al primero, es totalmente continuo.*

En efecto, la representación (14) engendra otra representación, a saber, $A^* = A_1^* + A_2^*$, donde $\| A_2^* \| = \| A_2 \| \leqslant \varepsilon$. Por lo tanto, la afirmación enunciada puede considerarse demostrada, si mostramos que el operador A_1^* es de dimensión finita.

Sea R_{A_1} un subespacio n-dimensional del espacio H y sea $e_1, \ldots, e_n$, su base ortonormal. Entonces, para todo $f \in H$ $A_1 f = = \sum_{i=1}^{n} (A_1 f, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} (f, A_1^* e_i)\, e_i$. Por eso, cualesquiera que sean f y g de H, tenemos

$$(A_1 f, g) = \sum_{i=1}^{n} (f, A_1^* e_i)\, \overline{g}_i = \left(f, \sum_{i=1}^{n} g_i A_1^* e_i\right),$$

es decir,

$$(f, A_1^* g) = (A_1 f, g) = \left(f, \sum_{i=1}^{n} g_i A_1^* e_i\right).$$

Por esta razón, para todo $g \in H$ resulta $A_1^* g = \sum_{i=1}^{n} g_i A_1^* e_i$. Esta igualdad significa que $R_{A_1^*}$ es un subespacio tendido sobre los elementos $A_1^* e_1, \ldots, A_1^* e_n$, es decir, que es de dimensión finita.

§ 4. Ecuaciones lineales en el espacio de Hilbert

Los razonamientos expresados en este párrafo son válidos para cualquier caso de un espacio de Banach. Sin embargo, nos limitamos a la consideración de un espacio separable de Hilbert H.

1. Operador lineal contraído. Un operador lineal A que está definido en H y actúa de H en H, se llama *contraído*, si $\|A\| < 1$.

LEMA 1. *Si A es un operador contraído que actúa de H en H, existe un operador $(I-A)^{-1}$ que está definido en H y actúa de H en H, teniendo lugar la desigualdad* $\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}$.

Para demostrar, examinemos la ecuación

$$(I-A)f = g \tag{1}$$

y mostremos que, cualquiera que sea $g \in H$, la única solución de esta ecuación será aquella que está representada por la serie $f = \sum_{h=0}^{\infty} A^h g \ (A^0 = I)$, que converge en H.

Esta serie es convergente, puesto que el espacio H es completo, mientras que las sumas parciales $g_m = \sum_{h=0}^{m} A^h g$ de la serie forman una sucesión fundamental: cuando $p > m$

$$\|g_p - g_m\| = \|A^p g + \ldots + A^{m+1} g\| \leqslant \|A^p g\| + \ldots + \|A^{m+1} g\| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\| (\|A\|^{m+1} + \ldots) = \|g\| \frac{\|A\|^{m+1}}{1-\|A\|} \to 0 \text{ cuando } m,\ p \to \infty.$$

El elemento $f \in H$ es la solución de la ecuación (1), ya que $(I-A)f = (g + Ag + \ldots) - (Ag + A^2 g + \ldots) = g$.

La solución es única. En efecto, sea que existan dos soluciones de la ecuación (1): f_1 y f_2. En este caso, $f = f_1 - f_2$ será una solución de la ecuación homogénea $f = Af$. Por ello, para esta ecuación se cumple la correlación $\|f\| = \|Af\| \leqslant \|A\| \ \|f\|$. Por lo tanto, $f = o$, es decir, $f_1 = f_2$.

Resulta pues, que el operador $(I-A)^{-1}$ existe y está definido por todo el H; como $\|(I-A)^{-1} g\| = \|g + Ag + \ldots + A^m g + \ldots\| \leqslant$ $\leqslant \|g\| (1 + \|A\| + \ldots) = \frac{\|g\|}{1-\|A\|}$ para todo $g \in H$, el operador es acotado y $\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A\|}$. El lema está demostrado.

OBSERVACION. En las sugestiones del lema 1 figura también el operador acotado $(I-A^*)^{-1}$, puesto que $\|A^*\| = \|A\| < 1$. Además, $(I-A^*)^{-1} = [(I-A)^{-1}]^*$.

Para demostrar la última igualdad tomemos al azar f' y $g' \in H$ y construyamos según ellos (lema 1) tales f y $g \in H$ que $(I - A)f = f'$, $(I - A^*)\,g = g'$.

Ya que $f = (I - A)^{-1}f'$ y $g = (I - A^*)^{-1}g'$, la igualdad $((I - A)f, g) = (f, (I - A^*)\,g)$ puede ser escrita en la forma $(f', (I - A^*)^{-1}g') = ((I - A)^{-1}f', g')$, de donde proviene la igualdad que necesitamos.

2. Ecuaciones con operador totalmente continuo. Examinemos la ecuación (1), sin hacer suposiciones sobre la pequeñez de la norma del operador A. En vez de esto, vamos a considerar que el operador A es totalmente continuo.

Valiéndonos del teorema 4 (punto 9) del párrafo anterior, podemos escribir la ecuación (1) en la forma $(I - A_2)f - A_1 f = g$, donde el operador A_1 es n-dimensional y $\| A_2 \| \leqslant \varepsilon < 1$. Denominemos por h el producto $(I - A_2)f$. En virtud del lema 1, el operador $I - A_2$ tiene un operador acotado inverso $(I - A_2)^{-1}$, definido en H:

$$(I - A_2)\,f = h, \quad f = (I - A_2)^{-1}\,h. \tag{2}$$

La ecuación (1) para h se escribirá en la forma

$$h - A_1\,(I - A_2)^{-1}\,h = g. \tag{3}$$

Sea A^* un operador conjugado a A. La ecuación

$$(I - A^*)f^* = g^* \tag{1*}$$

se llama *conjugada* a la (1). De la igualdad $A = A_1 + A_2$ tenemos que $A^* = A_1^* + A_2^*$. En vista de la observación al lema 1, el operador $(I - A_2^*)$ tiene en H un operador inverso $(I - A_2^*)^{-1} = [(I - A_2)^{-1}]^*$,

$$(I - A_2^*)^{-1}g^* = z^*, \quad g^* = (\,I - A_2^*)z^*. \tag{2*}$$

La ecuación (1*) puede escribirse en la forma

$$(I - A_2^*)f^* - A_1^*f^* = g^*.$$

Aplicando a ella el operador $(I - A_2^*)^{-1}$, obtenemos una ecuación equivalente

$$f^* - [(I - A_2)^{-1}]^*A_1^*f^* = z^*, \tag{3*}$$

en la que el operador $[(I - A_2)^{-1}]^*\,A_1^*$ está conjugado a $A_1\,(I - A_2)^{-1}$ (en la ecuación (3)).

El operador $A_1\,(I - A_2)^{-1}$ es, evidentemente, n-dimensional, por lo que su representación matricial (a_{ij}) en la base ortonormal correspondiente e_k, $k = 1, 2, \ldots$ (el subespacio tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$ coincide con $R_{A_1(I-A_2)^{-1}}$) posee la propiedad: $a_{ij} = 0$ para $i \geqslant 1$, $j \geqslant n + 1$ (véase p. 4, § 3), con la particularidad de que la fórmula (5) p. 4, § 3 nos da para todo j

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leqslant \| A_1 (I - A_2)^{-1} \|^2.$$

De acuerdo con la fórmula (7), p. 4, § 3, la ecuación (3) puede ser representada en la forma $\sum_j h_j e_j - \sum_j \sum_i h_i a_{ij} e_j = \sum_j g_j e_j$, que es equivalente, debido a la independencia lineal del sistema $e_1, e_2, \ldots$, al sistema algebraico de ecuaciones para los coeficientes de Fourier $h_1, \ldots, h_m, \ldots$ del elemento buscado h:

$$h_j - \sum_{i=1} a_{ij} h_j = g_j, \quad j \leqslant n; \quad h_j = g_j, \quad j > n.$$

Como los coeficientes h_j, para $j > n$, son conocidos:

$$h_j = g_j, \quad j > n, \tag{4}$$

el último sistema se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas

$$h_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} h_i = g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

según el cual se hallan h_j, $j \leqslant n$.

De modo análogo, la ecuación (3*) puede ser sustituida por un sistema algebraico equivalente para determinar los coeficientes de Fourier f_j^*, $j = 1, 2, \ldots$, del elemento f^* en términos de los coeficientes de Fourier z_j^*, $j = 1, 2, \ldots$, del elemento $z^* = (I - A_2^*)^{-1} g^*$. En este caso para f_j^*, $j \leqslant n$, obtendremos un sistema algebraico lineal

$$f_j^* - \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} f_i^* = z_j^*, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5*}$$

y f_j^*, $j > n$, se determinan unívocamente a través de f_j^*, $j \leqslant n$, por medio de las fórmulas

$$f_j^* = z_j^* + \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ji} f_i^*, \quad j > n. \tag{4*}$$

3. Primer teorema de Fredholm. Las matrices de los sistemas (5) y (5*) son conjugadas según Hermite. Esto significa que los módulos de los determinantes de estas matrices son iguales. Por consiguiente, si uno de estos sistemas es resoluble con cualquier término independiente (es decir, el determinante correspondiente es distinto de cero), entonces el otro sistema posee también la misma propiedad y las soluciones de los dos sistemas se determinan unívocamente. En praticular, las soluciones de los correspondientes sistemas homogéneos son todas nulas y sólo nulas. O bien: si uno de los sistemas homogéneos ((5) ó (5*)) sólo tiene solución nula (por lo tanto, el determinante correspondiente es diferente de cero), el otro sistema también posee dicha propiedad; en este caso los sistemas (5) y (5*) son resolubles (unívocamente), cualesquiera que sean los términos independientes.

Esta misma propiedad es propia a las ecuaciones (1) y (1*).

En efecto, supongamos que la ecuación (1) (ó (1*)) es resoluble para cualquier g (o g^*) de H. O bien, que en virtud de (2) (ó (2*)), la misma ecuación (3) (ó (3*)) es resoluble para cualquier g (o z^*) de H. En particular, es resoluble también para cualquier g (o z^*) del subespacio tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones (5) (ó (5*)) es resoluble, cualquiera que sea el segundo miembro. Es decir, el determinante del sistema es distinto de cero y los sistemas homogéneos (5) y (5*) sólo tienen soluciones nulas. Entonces, en virtud de (4) y (4*), las ecuaciones homogéneas (1) y (1*) sólo tienen soluciones nulas.

Viceversa, supongamos que una de las ecuaciones homogéneas (1) ó (1*) sólo tiene solución nula. Entonces, el sistema homogéneo correspondiente (5) ó (5*) sólo tiene solución nula. Por lo tanto, los determinantes de ambos sistemas son diferentes de cero. O sea, los sistemas heterogéneos (5) y (5*) son resolubles (unívocamente), cualesquiera que sean los términos independientes. En este caso, en virtud de (4) y (4*), son también resolubles (unívocamente) las ecuaciones (1) y (1*), cualesquiera que sean los términos independientes de H. Esto quiere decir que existen los operadores inversos $(I-A)^{-1}$ y $(I-A^*)^{-1}$, definidos en H.

Mostremos que estos operadores son acotados.

Supongamos que el sistema (5) es unívocamente resoluble (el determinante de la matriz en (5) es diferente de cero) y su solución es $(h_1, \ldots, h_n)$. De la regla de Cramer se deduce que existe tal constante $C>0$, no dependiente del término independiente en (5), que tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 \leqslant C^2 \sum_{j=1}^{n} \Big| g_j + \sum_{i=n+1} a_{ij} g_i \Big|^2. \tag{6}$$

Puesto que

$$\sum_{j=1}^{n} \Big| g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i \Big|^2 \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} \Big(|g_j|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} |g_i|^2 \Big) \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|^2 \left(2 + 2n \|A_1 (I-A_2)^{-1}\|^2\right) = C_1^2 \|g\|^2,$$

resulta que

$$\sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 \leqslant (CC_1)^2 \|g\|^2$$

y

$$\| h \|^2 = \sum_{j=1}^{n} | h_j |^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} | g_j |^2 \leqslant (1 + C^2 C_1^2) \| g^2 \| = C_2^2 \| g \|^2.$$

Por esto, según (2),

$$\| f \| \leqslant C_3 \| g \| \tag{7}$$

donde $C_3 > 0$ no depende de g. Precisamente esto significa que el operador $(I - A)^{-1}$ y, consecuentemente, $(I - A^*)^{-1}$ son acotados: $\| (I - A)^{-1} \| = \| (I - A^*)^{-1} \| \leqslant C_3$.

Queda, pues, demostrada la siguiente afirmación.

TEOREMA 1 (primer teorema de Fredholm). *Sea A un operador lineal totalmente continuo que está definido en H y actúa de H en H. Si una de las ecuaciones (1) ó (1*) tiene solución con cualquier término independiente, la segunda ecuación también tiene solución con cualquier término independiente, con la particularidad de que estas dos soluciones son únicas, es decir, las ecuaciones homogéneas (1) ($g = o$) y (1*) ($g^* = o$) sólo tienen soluciones nulas.*

Si una de las ecuaciones homogéneas (1) ($g = o$) ó (1) ($g^* = o$) sólo tiene solución nula, la otra también tiene sólo solución nula. Además, las ecuaciones (1) y (1*) son unívocamente resolubles, cualesquiera que sean los términos independientes, es decir, existen operadores $(I - A)^{-1}$ y $(I - A^*)^{-1}$, definidos en H, siendo estos operadores acotados.*

4. Segundo teorema de Fredholm. Observemos que en los sistemas (5) y (5*) los rangos de las matrices $B = \| b_{ij} \|$, donde $b_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$ ($\delta_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$) y $B^* = \| \overline{b}_{ji} \|$ son iguales. Por ello, los sistemas homogéneas (5) y (5*) siempre tienen un igual número $k \leqslant n$ de soluciones linealmente independientes. Entonces, en virtud de (2), (4) y (4*), en los conjuntos de todas las soluciones de las ecuaciones homogéneas (1) y (1*) también están contenidas exactamente k soluciones linealmente independientes.

De este modo queda demostrado el

TEOREMA 2 (segundo teorema de Fredholm). *Si la ecuación homogénea (1) (A es un operador totalmente continuo que está definido en H y actúa de H en H) tiene soluciones no nulas, entre éstas habrá solamente un número finito de soluciones linealmente independientes. Además, la ecuación homogénea (1*) tiene la misma cantidad de soluciones linealmente independientes.*

5. Tercer teorema de Fredholm. Pasemos ahora al problema de la resolución de la ecuación (1) en el caso en que la ecuación homogénea (1) pueda tener soluciones no nulas. Según el segundo teorema de Fredholm, la ecuación homogénea (1) tiene un número finito de soluciones linealmente independientes: $f^1, \ldots, f^k$. El mismo número de soluciones linealmente independientes tiene la ecuación homogénea (1*): $f^{1*}, \ldots, f^{k*}$. El sistema $f^1, \ldots, f^k$ (igual que el sistema $f^{1*}, \ldots, f^{k*}$) puede considerarse ortonormal.

TEOREMA 3 (tercer teorema de Fredholm). *Para que la ecuación (1) con el operador totalmente continuo A (que está definido en H y actúa de H en H) tenga solución, es necesario y suficiente que el elemento g sea ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1*).*

Entre todas las soluciones de la ecuación (1) existe la única solución f que es ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1). Cualquier otra solución de la ecuación (1) se presenta como la suma de la solución citada y alguna otra solución de la ecuación homogénea (1). Para la solución f tiene lugar la desigualdad (7) con una constante no dependiente de g.

Supongamos que la ecuación (1) tiene solución. En este caso, en virtud de (2), existe una solución de la ecuación (3) y junto con ella, la del sistema (5).

Supongamos que el rango de la matriz $B = \| b_{ij} \|$, donde $b_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, es igual a $n - k$. En este caso el subespacio R_{n-k} del espacio vectorial n-dimensional tendido sobre los vectores $B_i = (b_{i1}, \ldots, b_{in})$, $i = 1, \ldots, n$, — son columnas de la matriz B, tiene dimensión $n - k$. Puesto que el sistema homogéneo (5*): $\sum_{i=1}^{n} \overline{b}_{ji} f_i^* = 0$, $j = 1, \ldots, n$, puede escribirse en la forma $(\overline{f}^*, B_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, las soluciones de este sistema forman un subespacio k-dimensional ortogonal al subespacio R_{n-k}; designémoslo mediante $R_{n-k}^{\perp}$.

Según el teorema de Kronecker—Capelli, para que el sistema (5) tenga solución, es necesario y suficiente que el rango de la matriz B sea igual al rango de la matriz ampliada que se obtiene agregando a B una columna de términos independientes en (5), es decir, que el vector de los términos independientes pertenezca al espacio R_{n-k}, o (lo que es igual) que sea ortogonal al subespacio $R_{n-k}^{\perp}$.

Tomando en consideración que toda solución f^* de la ecuación homogénea (1*) tiene la forma

$$f^* = f_1^* e_1 + \ldots + f_n^* e_n + f_{n+1}^* e_{n+1} + \ldots,$$

donde el vector $\overline{f}^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$ es la solución del sistema homogéneo (5*) y $f_j^* = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ji} f_i^*$ para $j > n$, y, escribiendo la condición de ortogonalidad de los vectores f^* y el segundo miembro en (5) en la forma

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \Big(g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i\Big) \overline{f_j^*} = \sum_{i=1}^{n} g_i \overline{f_i^*} + \sum_{i=n+1}^{\infty} g_i \overline{f_i^*} = (g, f^*).$$

resulta que si la solución de la ecuación heterogénea (1) existe, el elemento g debe ser ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1*).

Y viceversa, si g es ortogonal a todas las soluciones f^* de la ecuación homogénea (1*), el vector con coordenadas $g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{ij} g_i$, $j = 1, \ldots, n$, es ortogonal a todas las soluciones f^* del sistema homogéneo (4*). Por consiguiente, el sistema (5) y, junto con él, la ecuación (1) tienen solución.

Sea f_0 una solución cualquiera de la ecuación heterogénea (1) y sea $f^1, \ldots, f^k$ un sistema ortonormal de soluciones de la ecuación homogénea (1). Entonces, el elemento $f = f_0 - (f_0, f^1) f^1 - \ldots - (f_0, f^k) f^k$ también será la solución de la ecuación (1), con la particularidad de que ella es ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1). Tal solución es única: si existiera otra solución de este género $(\bar{f})$, su diferencia $f - \bar{f}$, siendo solución de la ecuación homogénea (1), sería ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea (1), incluso ortogonal a sí misma, es decir, $f - \bar{f} = o$.

Supongamos que f' es una solución cualquiera de la ecuación heterogénea (1). Entonces, $f' - f = f''$ es la solución de la ecuación homogénea (1), es decir, $f' = f + f''$.

Demostremos ahora la desigualdad (7). Sea h un elemento de H, correspondiente, según (2), al elemento f. Esto quiere decir que h es una solución de la ecuación (3) que satisface k condiciones

$$0 = (f, f^i) = ((I - A_2)^{-1} h, f^i) = (h, (I - A_2^*)^{-1} f^i), \qquad i = 1, \ldots, k. \quad (8)$$

Ya que la matriz ampliada del sistema (5) tiene el mismo rango $(n - k)$ que la matriz B, algunas k ecuaciones en el sistema (5) son combinaciones lineales de las $n - k$ ecuaciones restantes. Por lo tanto, si excluimos estas k ecuaciones, el sistema obtenido será equivalente al sistema (5).

De modo que el vector n-dimensional $(h_1, \ldots, h_n)$ es una solución de un sistema lineal compuesto de n ecuaciones ($n - k$ ecuaciones de (5) y k ecuaciones (8)), cuyos coeficientes no dependen del segundo miembro en (5). Además, de la unicidad del elemento f se desprende que $(h_1, \ldots, h_n)$ es una solución única de este sistema, es decir, el determinante del sistema obtenido es diferente de cero. Entonces, el vector $(h_1, \ldots, h_n)$ puede ser obtenido según la regla de Cramer. Por consiguiente, para este vector es válida la desigualdad (6), de la cual se deduce directamente la desigualdad (7). El teorema está demostrado.

6. Valores propios y elementos propios de un operador totalmente continuo. Un número λ se llama valor propio del operador lineal A que actúa de H en H, siempre que exista un elemento $f \in H$ tal que

$f \neq o$ y $Af = \lambda f$. En este caso, f se denomina *elemento propio* del operador A. El número $\mu = 1/\lambda$, cuando $\lambda \neq 0$, recibe el nombre de *número característico*. Como a la par con f el elemento cf para cualquier constante $c \neq 0$ es también elemento propio que corresponde al valor propio λ, entonces, los elementos propios se pueden considerar normados, por ejemplo, mediante la condición $\| f \| = 1$.

El número máximo de elementos propios que son linealmente independientes y que corresponden al número característico dado (al valor propio) se llama *multiplicidad* de este número característico del valor propio. Si al número característico (al valor propio) se le asigna un número infinito de elementos propios linealmente independientes, la multiplicidad del número característico (del valor propio) es infinita.

Supongamos que el operador A, definido por todo el H, es totalmente continuo. Entonces, el operador μA (μ es un número complejo arbitrario) también es totalmente continuo. De los teoremas 1, 2 y 3 se deducen las siguientes afirmaciones.

Para que la ecuación

$$f - \mu Af = g \tag{1'}$$

sea resoluble para todo $g \in H$, es necesario y suficiente que μ no sea número característico del operador A (es decir, que $1/\mu$ no sea valor propio). Cuando μ es un número característico, su multiplicidad es finita y $\bar{\mu}$ será un número característico del operador A^* de la misma multiplicidad. En este caso, para que la ecuación (1') sea resoluble, es necesario y suficiente que el elemento g sea ortogonal a todos los elementos propios del operador A^*, correspondientes al valor propio $1/\bar{\mu}$. En estas condiciones existe la única solución de la ecuación (1'), ortogonal a todos los elementos propios de A que corresponden al valor propio $1/\mu$.

Precisamente estas afirmaciones se consideran, habitualmente, como los teoremas de Fredholm.

7. Cuarto teorema de Fredholm. Establezcamos ciertas propiedades de los números característicos de un operador totalmente continuo.

TEOREMA 4 (cuarto teorema de Fredholm). *Para todo $M > 0$ en el círculo $\{|\mu| < M\}$ de un plano complejo puede contenerse sólo una cantidad finita de números característicos del operador totalmente continuo definido en el campo H y que actúa de H en H, o bien (lo que es lo mismo), fuera del círculo $\{|\lambda| < 1/M\}$ puede sólo existir un número finito de valores propios.*

Supongamos, al contrario, que en el círculo $\{|\mu| < M\}$ hay una cantidad infinita de números característicos $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots, \mu_i \neq \mu_j$, $i \neq j$. Sea e_i un elemento propio correspondiente al número característico μ_i, $i = 1, 2, \ldots$

Mostremos que para todo $n \geqslant 1$, el sistema $e_1, \ldots e_n$ es linealmente independiente. Cuando $n = 1$, esta afirmación es evidente. Sea también válida para $n-1$. Supondremos que $e_1, \ldots, e_n$ son linealmente dependientes. Entonces, para ciertas constantes $c_1, \ldots, \ldots, c_{n-1}$ de las cuales no todas son nulas, tenemos que $e_n = c_1e_1 + \ldots + c_{n-1}e_{n-1}$. Pero, $Ae_n = \frac{e_n}{\mu_n} = c_1\frac{e_1}{\mu_1} + \ldots + c_{n-1}\frac{e_{n-1}}{\mu_{n-1}}$, de donde $c_1\left(1-\frac{\mu_n}{\mu_1}\right)e_1 + \ldots + c_{n-1}\left(1-\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\right)e_{n-1} = o$, lo que no puede tener lugar, puesto que $1-\frac{\mu_n}{\mu_k} \neq 0$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Designemos por $\mathfrak{N}_n$ un subespacio tendido sobre los elementos $e_1, \ldots, e_n$. De lo demostrado se deduce que $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{N}_n \subset \subset \ldots$ y que no existe ningún número n para el cual $\mathfrak{N}_n \neq \mathfrak{N}_{n-1}$. Por eso, para todo n existe un elemento $f_n \in \mathfrak{N}_n$, $f_n \perp \mathfrak{N}_{n-1}$, $\| f_n \| = 1$. Como el conjunto $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ es acotado y el operador A es totalmente continuo, del conjunto $Af_1, \ldots, Af_n, \ldots$ se puede extraer una subsucesión fundamental.

Mostremos que en realidad esto no puede hacerse y que esto será, la contradicción que demuestra el teorema.

Para dos números enteros arbitrarios m y n, $m < n$,

$$Af_n - Af_m = \frac{1}{\mu_n} f_n + \frac{1}{\mu_n}(\mu_n Af_n - f_n) - Af_m = \frac{1}{\mu_n} f_n + \sigma_n,$$

donde

$\sigma_n \in \mathfrak{N}_{n-1}$, puesto que $Af_m \in \mathfrak{N}_m \subset \mathfrak{N}_{n-1}$ y $\mu_n Af_n - f_n = = \mu_n A(c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) - (c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) = c_1\left(\frac{\mu_n}{\mu_1} - 1\right)e_1 + \ldots \ldots + c_{n-1}\left(\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} - 1\right)e_{n-1} \in \mathfrak{N}_{n-1}$.

Por ello, $\| Af_n - Af_m \| = \left\| \frac{1}{\mu_n} f_n + \sigma_n \right\| \geqslant \frac{1}{|\mu_n|} \| f_n \| = \frac{1}{|\mu_n|} \geqslant \frac{1}{M}$, es decir, la sucesión $Af_1, \ldots, Af_n, \ldots$ no puede contener una subsucesión fundamental. El teorema está demostrado.

Del teorema 4 se deduce que *un conjunto de números característicos de un operador totalmente continuo es a lo sumo numerable* (¡*también puede ser vacío*!). *Los números característicos, si es que existen, pueden ser numerados en el orden en que los módulos no decrecen*

$$\mu_1, \quad \mu_2, \ldots, \tag{9}$$

$|\mu_i| \leqslant |\mu_{i+1}|$, $i = 1, 2, \ldots$, *con la particularidad de que la frecuencia con que el número característico se encuentra en la sucesión* (9) *es igual a su multiplicidad. El conjunto* (9) *puede contener o bien un número finito de elementos (en particular, puede ser vacío), o bien un número infinito de elementos. En el último caso*

$$|\mu_k| \to \infty \text{ cuando } k \to \infty. \tag{10}$$

A la sucesión (9) *le corresponde una sucesión de los elementos propios correspondientes*

$$e_1, e_2, \ldots, \tag{11}$$

que es linealmente independiente.

En el párrafo siguiente demostraremos que para un operador $A \neq 0$, totalmente continuo y autoconjugado, los conjuntos (9) y (11) no son vacíos.

§ 5. Operadores autoconjugados totalmente continuos

1. Valores propios y elementos propios del operador autoconjugado totalmente continuo. Sea A un operador acotado autoconjugado que actúa de H en H. Puesto que para todo f, $\| f \| = 1$, $|(Af, f)| \leqslant \leqslant \| A \|$, en la esfera unitaria $\| f \| = 1$ existen cotas exactas, superior e inferior, de la forma cuadrática (Af, f) del operador A: $m = = \inf\limits_{\| f \| = 1} (Af, f)$, $M = \sup\limits_{\| f \| = 1} (Af, f)$, siendo $| m | \leqslant \| A \|$, $M \leqslant \| A \|$, $m \leqslant (Af, f) \leqslant M$.

Cuando f es un elemento de H, arbitrario y diferente de cero, el elemento $f/\| f \|$ pertenece a la esfera unitaria. Por eso, $m = = \inf\limits_{f \in H} \frac{(Af, f)}{\| f \|^2}$, $M = \sup\limits_{f \in H} \frac{(Af, f)}{\| f \|^2}$, y, consecuentemente, para todo f de H se cumplen las desigualdades $m \| f \|^2 \leqslant (Af, f) \leqslant M \| f \|^2$.

Como la forma cuadrática del operador A es de valores reales, todos sus *valores propios* (*números característicos*) *son reales*: si λ es el valor propio y f, el elemento propio correspondiente, es decir, $Af = \lambda f$, entonces $\lambda = (Af, f)/ \| f \|^2$. Por lo tanto, $m \leqslant \lambda \leqslant M$.

Los elementos propios f_1 y f_2 del operador A *que corresponden a los valores propios diferentes* λ_1 y λ_2, *son ortogonales*. En efecto, multiplicando, de manera escalar, las igualdades $Af_1 = \lambda_1 f_1$, $Af_2 = \lambda_2 f_2$ por f_2 y f_1, respectivamente, y sustrayendo después una de la otra, obtendremos $(Af_1, f_2) - (f_1, Af_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2)$. Puesto que $(Af_1, f_2) = (f_1, Af_2)$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta $(f_1, f_2) = 0$.

LEMA 1. *Para que el número* $M = \sup\limits_{\| f \| = 1} (Af, f)$ *sea valor propio del operador acotado autoconjugado* A *que actúa de* H *en* H *y para que* f_0 (*considerando* $\| f_0 \| = 1$) *sea un elemento propio correspondiente, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad* $(Af_0, f_0) = M$.

Análogamente, para que el número $m = \inf\limits_{\| f \| = 1} (Af, f)$ *sea valor propio del operador* A *y* f_0 (*considerando* $\| f_0 \| = 1$), *un elemento propio correspondiente, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad* $(Af_0, f_0) = m$.

Si M es un valor propio y f_0, un elemento propio del operador A que corresponde a M, entonces $Af_0 = Mf_0$. Por consiguiente, $(Af_0, f_0) = M(f_0, f_0) = M$. La necesidad está demostrada.

Demostremos la suficiencia. Sea $(Af_0, f_0) = M$ para cierto f_0, $\|f_0\| = 1$, o, lo que es lo mismo, $(Mf_0 - Af_0, f_0) = 0$. Puesto que para todo f de H $0 \leqslant M\|f\|^2 - (Af, f) = (Mf - Af, f)$, para φ arbitrario de H y cualquier t complejo $(M(f_0 + t\varphi) - A(f_0 + t\varphi), f_0 + t\varphi) \geqslant 0$, es decir, $\bar{t}(Mf_0 - Af_0, \varphi) + t\overline{(Mf_0 - Af_0, \varphi)} + |t|^2 (M\varphi - A\varphi, \varphi) \geqslant 0$. Haciendo en esta ecuación $t = -\sigma e^{i\alpha}$, donde $\alpha = \arg(Mf_0 - Af_0, \varphi)$ y σ es real, obtendremos una desigualdad $-2\sigma|(Mf_0 - Af_0, \varphi)| + \sigma^2(M\varphi - A\varphi, \varphi) \geqslant 0$, que es válida para cualquier σ real. De esta desigualdad se deduce la igualdad $(Mf_0 - Af_0, \varphi) = 0$. Por eso, en virtud de la arbitrariedad de φ, $Mf_0 - Af_0 = 0$.

La segunda afirmación del lema se desprende de la primera, si en vez del operador A tomamos el operador $-A$. El lema queda demostrado.

LEMA 2. *Si el operador A, que actúa de H en H, es autoconjugado y totalmente continuo, el número $M = \sup\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$ (por analogía, el número $m = \inf\limits_{\|f\|=1} (Af, f)$), siempre que sea distinto de cero, será el valor propio de este operador.*

Sea $M \neq 0$. Examinemos una forma bilineal hermitiana $(Mf - Af, g)$, $f, g \in H$ y una forma cuadrática $(Mf - Af, f)$, correspondiente a la primera. Para todo f de H tiene lugar la desigualdad $(Mf - Af, f) \geqslant 0$.

Mostremos que existe un elemento f_0, distinto de cero, tal que $(Mf_0 - Af_0, f_0) = 0$. En este caso la afirmación del lema 1 se deduce del lema 1.

Supongamos que tal elemento f_0 no existe. Entonces $(Mf - Af, f)$, $f \in H$ puede reducirse a cero sólo cuando $f = o$. Por eso, la forma bilineal $(Mf - Af, g)$ puede tomarse como nuevo producto escalar en H. Esto significa que para cualesquiera f y g de H se verifica la desigualdad de Buniakovski

$$|(Mf - Af, g)|^2 \leqslant (Mf - Af, f)(Mg - Ag, g). \quad (1)$$

De la definición de M en calidad de una cota exacta superior de la forma cuadrática (Af, f) en la esfera unitaria $\|f\| = 1$ se desprende que existe una sucesión $f_1, f_2, \ldots, \|f_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, para la cual $(Af_n, f_n) \to M$, o bien

$$(Mf_n - Af_n, f_n) \to 0, \qquad n \to \infty. \quad (2)$$

Haciendo en la desigualdad (1) $f = f_n$, $g = Mf_n - Af_n$, obtendremos $\|Mf_n - Af_n\|^4 \leqslant (Mf_n - Af_n, f_n)(M^2 f_n - 2MAf_n + A^2 f_n, Mf_n - Af_n) \leqslant (Mf_n - Af_n, f_n)(|M| + \|A\|)^3$. Por eso, de la correlación (2) se deduce que la sucesión $Mf_n - Af_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como el operador A es totalmente continuo, mientras que la sucesión $f_1, f_2, \ldots$ es acotada ($\| f_i \| = 1$), la sucesión $Af_1, Af_2, \ldots$ será compacta. Por consiguiente, se puede extraer de esta sucesión una subsucesión convergente; vamos a considerar que esta última coincide con $Af_1, Af_2, \ldots$ Luego, la sucesión $Mf_1, Mf_2, \ldots$, y, junto con ella ($M \neq 0$), la sucesión $f_1, f_2, \ldots$ es también convergente. Si designamos por f_0 el límite de la sucesión $f_1, f_2, \ldots$, será evidente que $\| f_0 \| = 1$, y, en virtud de (2), $(Mf_0 - Af_0, f_0) = 0$. El lema está comprobado.

TEOREMA 1. *Para todo operador totalmente continuo y autoconjugado A que es distinto de cero y actúa de H en H (H es un espacio de Hilbert) uno de los números* $\pm 1/\| A \| = \pm 1/ \sup\limits_{\| f \| = 1} | (Af, f) |$ *es el primer (mínimo por su valor absoluto) número característico μ_1, con la particularidad de que $\mu_1 = 1/M$ cuando $M > | m |$, donde $M = \sup\limits_{\| f \| = 1} (Af, f)$, $m = \inf\limits_{\| f \| = 1} (Af, f)$, $\mu_1 = 1/m$ cuando $M < | m |$. Si $M = | m |$, $1/M$ y $1/m$ ambos son los números característicos del operador A con módulos mínimos.*

Todos los elementos f_0 para los cuales es válida la igualdad $(Af_0, f_0)/\| f_0 \|^2 = M$ cuando $M > | m |$, o la igualdad $(Af_0, f_0)/\| f_0 \|^2 = m$ cuando $M \leqslant | m |$, son, y sólo son ellos, los elementos propios correspondientes a μ_1. Si $M = | m |$, los elementos propios, correspondientes al número característico $1/M$, son aquellos elementos f_0, y sólo aquellos, para los cuales $(Af_0, f_0)/ \| f_0 \|^2 = M$ y los elementos propios, correspondientes al número característico $1/m$, son aquellos elementos f_0, y sólo aquellos, para los que $(Af_0, f_0)/ \| f_0 \|^2 = m$.

En particular, si A es un operador no negativo, tenemos

$$\mu_1 = \frac{1}{\| A \|} = \frac{1}{\sup\limits_{\| f \| = 1} (Af, f)} = \inf\limits_{\| f \| = 1} \frac{1}{(Af, f)} = \inf\limits_{f \in H} \frac{\| f \|^2}{(Af, f)},$$

y los valores propios correspondientes a μ_1, normados por la condición $\| f \| = 1$, son aquellos elementos f_0, $\| f_0 \| = 1$, y sólo aquellos, en los cuales la forma cuadrática (Af, f) sobre la esfera unitaria alcanza su cota superior.

Con el objeto de demostrar el teorema 1 es suficiente señalar, en virtud de los lemas 1 y 2, que $\| A \| = N$, donde $N = \sup\limits_{\| f \| = 1} | (Af, f) | = \max (| m |, M)$. Como se ha mostrado arriba, $N \leqslant \| A \|$, por lo que sólo nos queda establecer la validez de la igualdad inversa $\| A \| \leqslant N$.

Ya que para todo $g \in H$ $| (Ag, g) | \leqslant N \| g \|^2$, y como

$$(A (f_1 \pm f_2), f_1 \pm f_2) = (Af_1, f_1) + (Af_2, f_2) \pm 2 \operatorname{Re} (Af_1, f_2),$$

para cualesquiera f_1 y f_2 de H

$$|\mathrm{Re}\,(Af_1,\ f_2)|=\frac{1}{4}\,|(A(f_1+f_2),\ f_1+f_2)-(A(f_1-f_2),\ f_1-f_2)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}(|(A(f_1+f_2),\ f_1+f_2)|+|(A(f_1-f_2),\ f_1-f_2)|)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{N}{4}(\|f_1+f_2\|^2+\|f_1-f_2\|^2)=\frac{N}{2}(\|f_1\|^2+\|f_2\|^2).$$

Haciendo en esta desigualdad $f_1=\sqrt{N}f$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{N}}Af$, donde f es un elemento arbitrario de H, obtenemos $\|Af\|^2\leqslant\frac{N}{2}\left(N\|f\|^2+\right.$ $\left.+\frac{1}{N}\|Af\|^2\right)$, de lo cual se deduce que $\|Af\|\leqslant N\|f\|$. Por esto, $\|A\|\leqslant N$. El teorema queda demostrado.

De este modo, los conjuntos

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots, \tag{3}$$

$$e_1,\ e_2,\ldots \tag{4}$$

de números característicos y de elementos propios, que les corresponden, son no vacíos para el operador autoconjugado totalmente continuo $A\neq 0$. En este caso, todos los números característicos son reales y el sistema de elementos propios puede considerarse ortonormal, puesto que los elementos propios que corresponden a distintos números característicos son ortogonales, mientras que el número finito de elementos propios linealmente independientes, que corresponden a un número característico, puede ser ortonormado.

Sea A un operador autoconjugado totalmente continuo que actúa de H en H. Designemos por H_n un subespacio del espacio H, compuesto de los elementos f que son ortogonales a los primeros n elementos propios del operador A: $(f,\ e_i)=0$, $i=1,\ \ldots,\ n$.

Para todo f de H_n el elemento Af también pertenece a H_n, puesto que $(Af,\ e_i)=(f,\ Ae_i)=\frac{1}{\mu_i}(f,\ e_i)=0$, cualquiera que sea $i=1,\ \ldots,\ n$. Esto significa que A puede considerarse como operador del espacio de Hilbert que actúa de H_n en H_n. Es, por supuesto, autoconjugado y totalmente continuo. Sus números característicos y elementos propios correspondientes coinciden con los números característicos μ_{n+1}, μ_{n+2} y los elementos propios correspondientes e_{n+1}, e_{n+2} del operador A que actúa de H en H. Por ello, según el teorema 1 aplicado al operador A que actúa de H_n en H_n, tenemos

$$|\mu_{n+1}|=\frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1\\ f\in H_n}}|(Af,\ f)|}=\frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1\\ (f,\ e_i)=0\\ i=1,\ \ldots,\ n}}(Af,\ f)}$$

Si el operador A es no negativo,

$$\mu_{n+1}=\frac{1}{\sup\limits_{\substack{\|f\|=1\\(f,\,e_i)=0\\i=1,\,\ldots,\,n}}(Af,\,f)}=\inf_{\substack{(f,\,e_i)=0\\i=1,\,\ldots,\,n}}\frac{\|f\|^2}{(Af,\,f)}. \tag{5}$$

2. Desarrollo en la serie de Fourier según los elementos propios del operador autoconjugado totalmente continuo. Examinemos un sistema ortonormal (4) compuesto de los elementos propios del operador autoconjugado totalmente continuo A que actúa de H en H, $A\neq 0$. Sea P_n un operador de proyección ortogonal en el subespacio tendido sobre los elementos $e_1,\ \ldots,\ e_n$ y sea $A_n=A-AP_n=$ $=A\,(I-P_n)$.

El operador A_n es lineal y acotado: $\|A_n\|\leqslant\|A\|$.

El operador P_n es permutable con A, puesto que para todo $f\in H$

$$\begin{aligned}AP_nf=A\,(f_1e_1+\ \ldots\ +f_ne_n)&=f_1Ae_1+\ \ldots\ +f_nAe_n=\\=\frac{f_1}{\mu_1}e_1+\ \ldots\ +\frac{f_n}{\mu_n}e_n&=\left(f,\ \frac{e_1}{\mu_1}\right)e_1+\ \ldots\ +\left(f,\ \frac{e_n}{\mu_n}\right)e_n=\\&=(f,\ Ae_1)\,e_1+\ \ldots\ +(f,\ Ae_n)\,e_n=\\&=(Af,\ e_1)\,e_1+\ \ldots\ +(Af,\ e_n)\,e_n=P_nAf.\end{aligned}$$

Ya que los operadores A y P_n son permutables y autoconjugados, AP_n será un operador autoconjugado: $(AP_n)^*=P_n^*A^*=$ $=P_nA=AP_n$. Por esta razón, el operador A_n es también autoconjugado.

Además, es totalmente continuo, por ser la suma de dos operadores totalmente continuos, a saber, el operador A y el operador de dimensión finita $AP_n=P_nA$.

Para todo $f\in H$ tenemos

$$A_nf=Af-\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{\mu_k}e_k. \tag{6}$$

Los números $\mu_{n+1},\ \ldots$ y elementos $e_{n+1},\ \ldots$ son los números característicos y los elementos propios correspondientes del operador A_n. En efecto, dado que $(e_p,\ e_k)=0$ cuando $k\neq p$, en virtud de (6), para $p\geqslant n+1$ tenemos $A_ne_p=Ae_p-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(e_p,\,e_k)}{\mu_k}e_k=\frac{e_p}{\mu_p}$.

El operador A_n no tiene otros números característicos. Sean, al contrario, μ y e el número característico y el elemento propio, respectivamente, $\mu A_ne=e$, $\mu\neq\mu_p$, $p\geqslant n+1$. Multiplicando de modo escalar esta igualdad por e_k, $k\leqslant n$, obtenemos $(e,\ e_k)=$ $=\mu\,(A_ne,\ e_k)=\mu\,(e,\ A_ne_k)=0$, puesto que $A_ne_k=0$ cuando

$k \leqslant n$. Por esta razón, en vista de (6), $A_n e = Ae$, es decir, $\mu Ae = e$. De este modo, μ es un número característico y e, un elemento propio del operador A. Como todos los números característicos del operador A están contenidos en la sucesión (3), y dado que $e \perp e_k$, $k = 1, \ldots, n$, entonces μ coincide con uno de los μ_k, $k \geqslant n+1$.

Puesto que μ_{n+1} es el menor número característico, por su valor absoluto, del operador A_n, en virtud del teorema 1, tenemos

$$|\mu_{n+1}| = \frac{1}{\| A_n \|} \tag{7}$$

Cuando las sucesiones (3) y (4) son finitas y se componen de m elementos, entonces, en virtud del teorema 1, el operador $A_m = O$, puesto que no tiene números característicos. En este caso, $A = AP_m$ es un operador de dimensión finita, es decir, para todo $f \in H$

$$Af = \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k}{\mu_k} e_k = \sum_{k=1}^{m} (Af)_k e_k. \tag{8}$$

Supongamos ahora que las sucesiones (3) y (4) son infinitas. De (7) y de la correlación (10) del párrafo anterior se deduce que $\| A_n \| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, para cualquier $f \in H$ $\| A_n f \| \leqslant \| A_n \| \| f \| \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, para todo $f \in H$

$$Af = \lim_{n \to \infty} AP_n f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\mu_k} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Af)_k e_k. \tag{9}$$

Así pues, queda demostrado el siguiente importante teorema

TEOREMA 2 (teorema de Hilbert—Schmidt). *Si A es un operador autoconjugado totalmente continuo que actúa de H en H, y si f es un elemento arbitrario de H, el elemento Af se desarrolla en la serie de Fourier* (9) (*ó* (8)) *según el sistema* (4).

En lo sucesivo necesitaremos varios corolarios del teorema de Hilbert—Schmidt.

De acuerdo con el lema 2, p. 6, § 2, la serie de Fourier $\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ de un elemento arbitrario $f \in H$ según el sistema ortonormal (4) es convergente en H. Por consiguiente, $A \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k A e_k$. Pero, $f_k A e_k = f_k \frac{e_k}{\mu_k} = (f, Ae_k) e_k = (Af, e_k) e_k = (Af)_k e_k$. Por ello, en virtud de (9), tenemos

$$A\left(f - \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k\right) = o. \tag{10}$$

Si el operador A tiene su inversa A^{-1}, de la igualdad (10) se deduce

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$$

para todo elemento $f \in H$, lo que significa que en este caso el sistema (4) es una base ortonormal del espacio H. De esta manera se ha establecido el

COROLARIO 1. *Si un operador autoconjugado totalmente continuo A, que actúa de H en H, tiene operador inverso, el sistema* (4) *será una base ortonormal del espacio H.*

En el caso general, de la ecuación (10) sólo se deduce que para cualquier elemento $f \in H$ existe un elemento $e_0 \in H$, $Ae_0 = 0$ tal que

$$f = e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k. \tag{11}$$

El conjunto $\mathfrak{N}$ de elementos $g \in H$, para los cuales $Ag = 0$, es un subespacio del espacio H; todo elemento de $\mathfrak{N}$ distinto del elemento nulo, es elemento propio del operador A correspondiente al valor propio nulo. Al suponer que el espacio H es separable, podemos construir en $\mathfrak{N}$ una base ortonormal numerable $e_1', e_2', \ldots$ (compuesta de los valores propios del operador A correspondientes al valor propio nulo). En este caso, de (11) se desprende que para todo $f \in H$ tiene lugar el desarrollo

$$f = \sum f_k' e_k' + \sum f_k e_k,$$

donde $f_k' = (f, e_k')$.

De esta manera se establece el

COROLARIO 2. *Para todo operador autoconjugado totalmente continuo A del espacio separable (de Hilbert), que actúa de H en H, existe una base ortonormal del espacio H cuyos elementos son valores propios del operador A.*

En el capítulo precedente fueron introducidos los conceptos de los espacios de Banach y de Hilbert. Estos conceptos sólo se basan sobre ciertas correlaciones entre elementos: basta introducir operaciones de adición de los elementos, que satisfagan ciertos axiomas, y de multiplicación de estos elementos por números, por una norma o, correspondientemente, por un producto escalar. La naturaleza de los elementos de estos espacios no es de importancia y las afirmaciones generales obtenidas en el capítulo precedente son aplicables a todos los espacios, cualesquiera que sean los elementos que los componen. No obstante, las propiedades generales mencionadas no son suficientes para la teoría de ecuaciones diferenciales. Al estudiar las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, resulta natural examinar los así llamados espacios funcionales, es decir, los espacios cuyos elementos son funciones de n variables, reales en el caso que se considera.

En el presente capítulo introduciremos varios espacios funcionales y obtendremos algunas afirmaciones acerca de las relaciones mútuas entre ellos que nos permitirán de unas propiedades de los elementos establecer otras de sus propiedades.

§ 1. Espacios de funciones continuas y de funciones continuamentediferenciables

1. Espacios normados $C(\overline{Q})$ y $C^k(\overline{Q})$. Examinemos un conjunto $C(\overline{Q})$ de todas las funciones continuas en $\overline{Q}$ (Q es un dominio acotado del espacio R_n). Ante todo indiquemos que este conjunto es un espacio lineal. Se comprueba directamente que la funcional $\max\limits_{x\in\overline{Q}} |f(x)|$, definida en $C(\overline{Q})$, satisface todos los axiomas de la norma (p. 2, § 2, cap. II): $\max\limits_{x\in\overline{Q}} |cf| = |c| \max\limits_{x\in\overline{Q}} |f|$; $|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)|$ para todo $x \in \overline{Q}$, por lo tanto, $\max\limits_{x\in\overline{Q}} |f_1(x) +$

$+f_2(x)| \leqslant \max_{x\in\overline{Q}} |f_1(x)| + \max_{x\in\overline{Q}} |f_2(x)|$; $\max_{x\in\overline{Q}} |f(x)| \geqslant 0$, y $\max_{x\in\overline{Q}} |f(x)| = 0$ sólo cuando $f(x) \equiv 0$. Por consiguiente, en $C(\overline{Q})$ se puede introducir la norma

$$\|f\|_{C(\overline{Q})} = \max_{x\in\overline{Q}} |f(x)|. \tag{1}$$

La convergencia según la norma (1) es una convergencia uniforme en $\overline{Q}$.

El espacio $C(\overline{Q})$ con la norma (1) es de Banach, puesto que, según el criterio de Cauchy, una sucesión arbitraria de funciones de $C(\overline{Q})$, fundamental en la norma (1), converge uniformemente hacia cierta función de $C(\overline{Q})$.

Como toda función continua en $\overline{Q}$ es, de acuerdo con el teorema de Weierstrass, un límite de cierta sucesión de polinomios que converge uniformemente en $\overline{Q}$ (es decir, en la norma (1)), el conjunto de todos los polinomios es siempre denso en $C(\overline{Q})$. Mas, un polinomio arbitrario puede ser, a su vez, representado como el límite de la sucesión de polinomios de coeficientes reales que converge uniformemente en $\overline{Q}$. Por esta razón, en $C(\overline{Q})$ un conjunto numerable de todos los polinomios de coeficientes reales es también siempre denso. Esto quiere decir que el espacio $C(\overline{Q})$ es separable.

Examinemos en $C(\overline{Q})$ el conjunto $\dot{C}(\overline{Q})$ compuesto de todas las funciones que se reducen a cero en el contorno ∂Q del dominio Q. Evidentemente, $\dot{C}(\overline{Q})$ es una variedad lineal en $C(\overline{Q})$. Esta variedad es cerrada (en la norma (1)), puesto que una función de $\dot{C}(\overline{Q})$ sirve de límite para la sucesión de funciones de $\dot{C}(\overline{Q})$ convergente uniformemente en $\overline{Q}$. Por lo tanto, $\dot{C}(\overline{Q})$ es un subespacio del espacio $C(\overline{Q})$.

Examinemos ahora en $C(\overline{Q})$ los subconjuntos $C^k(\overline{Q})$, $k = 1, 2, \ldots$ compuestos de todas las funciones que en el dominio Q tienen todas las derivadas de un orden hasta k inclusive y estas derivadas son continuas en $\overline{Q}$. El conjunto $C^k(\overline{Q})$ es un espacio lineal. Además, en $C^k(\overline{Q})$ se puede introducir la siguiente norma

$$\|f\|_{C^k(\overline{Q})} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \max_{x\in\overline{Q}} |D^\alpha f(x)|. \tag{2}$$

La convergencia según esta norma es uniforme en $\overline{Q}$ para las funciones y para todas sus derivadas hasta el k-ésimo orden inclusive. Es evidente que el espacio $C^k(\overline{Q})$ (con la norma (2)) es de Banach.

Sea $\omega_h(|x-y|)$ cierto núcleo de mediación (véase el cap. I, Introducción) y $f \in C(\overline{Q})$. Examinemos, para $h>0$, la función

$$f_h(x) = \int_Q f(y)\omega_h(|x-y|)\,dy, \quad x \in R_n. \tag{3}$$

Las funciones $f_h(x)$, $h>0$, se llaman *funciones medias* para la función $f(x)$ (*funciones mediadas para* $f(x)$). De la propiedad a) del núcleo de mediación y del teorema 7, p. 7, § 1, cap. II, se deduce que $f_h(x) \in C^\infty(R_n)$, cualquiera que sea $h>0$. Además, $f_h(x) \equiv 0$ fuera de Q^h (Q^h es la unión de las bolas $\{|x-x^0|<h\}$ respecto a todo $x^0 \in Q$).

Mostremos que *cuando* $f \in C(\overline{Q})$, la función $f_h(x)$ *tiende a* $f(x)$, *para* $h \to 0$, *uniformemente en cualquier subdominio* Q', *estrictamente interior del dominio* Q, $Q' \Subset Q$.

Efectivamente, para h suficientemente pequeños (menores que la distancia entre $\partial Q'$ y ∂Q), de las propiedades b), c) y a) del núcleo de mediación tenemos, cuando $x \in Q'$:

$$\begin{aligned}|f_h(x)-f(x)| &= \\ &= \left|\int_{|x-y|<h} f(y)\,\omega_h(|x-y|)\,dy - f(x)\int_{|x-y|<h}\omega_h(|x-y|)\,dy\right| \leqslant \\ &\leqslant \max_{|x-y|\leqslant h}|f(y)-f(x)|\int_{|x-y|<h}\omega_h(|x-y|)\,dy = \\ &= \max_{|x-y|\leqslant h}|f(y)-f(x)|.\end{aligned}$$

Por consiguiente, de la continuidad uniforme de $f(x)$ en Q obtenemos:

$$\|f_h - f\|_{C(\overline{Q'})} \to 0 \text{ cuando } h \to 0.$$

Ya que, para $f \in C^k(\overline{Q})$, cuando $x \in Q'$ y h suficientemente pequeños,

$$\begin{aligned}D_x^\alpha f_h(x) &= \int_Q f(y)\,D_x^\alpha\omega_h(|x-y|)\,dy = \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_Q f(y)\,D_y^\alpha\omega_h(|x-y|)\,dy = \\ &= \int_Q D_y^\alpha f(y)\cdot\omega_h(|x-y|)\,dy, \quad |\alpha| \leqslant k,\end{aligned}$$

entonces, de la afirmación demostrada tenemos:

si $f \in C^k(\overline{Q})$, *para cualquier* $Q' \Subset Q$

$$\|f_h - f\|_{C^k(\overline{Q'})} \to 0 \text{ *cuando* } h \to 0.$$

2. Fórmulas de integración por partes. Supongamos que en el dominio Q (contorno $\partial Q \in C^1$) está dado el vector $A(x) = (A_1(x), \ldots, A_n(x))$ cuyas coordenadas $A_i(x) \in C(\overline{Q}) \cap C^1(Q)$, $i = 1, \ldots, n$. Del curso de Análisis se sabe que si la función div $A(x) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ es continua en $\overline{Q}$, o, incluso, integrable respecto a Q, tiene lugar la siguiente *fórmula de Ostrogradski*:

$$\int_Q \operatorname{div} A(x)\, dx = \int_{\partial Q} A(x)\, n(x)\, dS, \tag{4}$$

donde n es un vector unitario de la normal al contorno ∂Q, exterior con relación al dominio Q.

Sea $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, $v \in C^1(\overline{Q})$ y sea la función $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ integrable en Q. Puesto que $v\Delta u = v \cdot \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v (\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + \ldots + u_{x_n} v_{x_n})$, entonces, de acuerdo con la fórmula de Ostrogradski (4), tenemos

$$\int_Q v\Delta u\, dx = \int_{\partial Q} v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS - \int_Q \nabla u \nabla v\, dx, \tag{5}$$

dado que $\nabla u \cdot n \big|_{\partial Q} = \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial Q}$.

Si las dos funciones, u y v, pertenecen a $C^2(Q) \cap C^1(Q)$, y las funciones Δu y Δv son integrables en Q, a la par con (5) tiene lugar la fórmula

$$\int_Q u\Delta v\, dx = \int_{\partial Q} u \frac{\partial v}{\partial n}\, dS - \int_Q \nabla v \nabla u\, dx. \tag{5'}$$

Sustrayendo, término a término, (5') de (5), obtenemos la igualdad

$$\int_Q (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial Q} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS. \tag{6}$$

Las fórmulas (5) y (6) llevan el nombre *de Green.*

§ 2. Espacios de funciones integrables

Como hemos mostrado arriba, el conjunto de funciones continuas en $\overline{Q}$ es un espacio de Banach con la norma $\max_{x \in \overline{Q}} |f(x)|$. Sin embargo, resulta frecuentemente más cómodo examinar en este conjunto normas integrales, por ejemplo, $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$ ó $\left(\int\limits_Q |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ (no es difícil comprobar que en este caso se cumplen todos los axiomas de la norma). Examinemos un espacio con la norma $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$, cuyos elementos están constituidos por funciones continuas en $\overline{Q}$. Este espacio normado no es completo. En efecto, de la definición de la integral lebesguiana se deduce que para toda función $f(x)$, integrable en el dominio Q, existe una sucesión $f_m(x)$ de funciones continuas en $\overline{Q}$ que en la norma dada converge hacia $f(x)$: $\int\limits_Q |f_m(x) - f(x)|\,dx \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esto significa que si deseamos obtener un espacio normado (de Banach) completo, con la norma $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$, que contenga todas las funciones continuas (o, incluso, indefinidamente diferenciables) en $\overline{Q}$, hemos de incluir en él todas las funciones integrables en Q. Pero, en este caso, la funcional $\int\limits_Q |f(x)|\,dx$ deja de ser la norma, puesto que no satisface el último axioma (véase p. 2, § 2, cap. II) de la norma, ya que $\int\limits_Q |f(x)|\,dx = 0$ para toda $f(x) = 0$ casi siempre en Q.

Sin embargo, en virtud del teorema 3, p. 4, § 1, cap. II, la igualdad $\int\limits_Q |f(x)|\,dx = 0$ es válida sólo para aquellas funciones $f(x)$ que son nulas en casi todo punto (c.t.p.) en Q. Por lo tanto, para que se cumpla el último axioma de la norma, tenemos que *identificar* todas las funciones que en c.t.p. en Q son iguales. Para ello se puede: o bien tomar por elementos del espacio las clases de funciones en cada una de las cuales están contenidas todas las funciones iguales en c.t.p., o bien (lo que de hecho es lo mismo) introducir una nueva definición de la igualdad de funciones: *las funciones son iguales, si sus valores coinciden en casi todo punto*. Puesto que resulta más cómodo operar con las funciones que con sus clases, en lo sucesivo consideraremos iguales las funciones cuyos valores coinciden en casi todo x (y no necesariamente en todos) de Q. Como con tal definición de la igualdad de las funciones éstas no varían, al variar arbitrariamente sus valores en cualquier conjunto fijado de medida nula, en este caso, es natural considerar que las funciones están dadas casi siempre. Además, si una función f es nula casi siempre, la consideramos función nula. Análogamente, si una función coincide en c.t.p. con otra función continua definida en todos los puntos, la primera se considerará función continua. Si dicha función coincide casi siempre con la función definida en todo punto y continuamente diferenciable hasta el orden k, la consideraremos continuamente diferenciable hasta el k-ésimo orden. En conformidad con la noción introducida de la igualdad, por elementos del espacio $C^k(\overline{Q})$, $k \geqslant 0$ también tomaremos las funciones que son continuamente diferenciables hasta el k-ésimo orden y están definidas casi siempre en Q. Es decir, una función $f(x)$ pertenece a $C^k(\overline{Q})$, si coincide en casi todo punto con la función definida en todo punto de $\overline{Q}$, y continúa en $\overline{Q}$ junto con todas las derivadas hasta el k-ésimo orden inclusivo. Aquí, por valor en cierto punto de un elemento en el espacio $C(\overline{Q})$ (y, con mayor razón, de la función en $C^k(\overline{Q})$) vamos a entender el valor que toma en este punto una función continua que está definida en todo punto y coincide casi siempre en Q con el elemento citado.

1. Espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Examinemos un conjunto de funciones de valores complejos que son integrables en Q. Es evidente que este conjunto es (incluso en la nueva comprensión de la igualdad de funciones) un espacio lineal y la funcional $\int\limits_Q |f(x)|\, dx$ satisface todos los axiomas de la norma. Designemos con $L_1(Q)$ este espacio lineal normado:

$$\|f\|_{L_1(Q)} = \int\limits_Q |f(x)|\, dx. \tag{1}$$

Designemos mediante $L_2(Q)$ un conjunto de funciones medibles de valores complejos (recordemos que las funciones que coinciden casi siempre se identifican) en las que el cuadrado del módulo es integrable en el dominio Q. Mostremos que $L_2(Q)$ es un espacio lineal. Sean c_1 y c_2 números arbitrarios y, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ ciertas funciones arbitrarias de $L_2(Q)$. Dado que una función medible $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ satisface la desigualdad $|c_1f_1(x) + c_2f_2(x)|^2 \leqslant 2|c_1|^2|f_1(x)|^2 + 2|c_2|^2|f_2(x)|^2$, entonces, según el teorema 5, p. 6, § 1, cap. II, la función $|c_1f_1(x) + c_2f_2(x)|^2$ es integrable, o sea $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) \in L_2(Q)$.

Una función $f_1(x)\overline{f_2(x)}$, en la que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ pertenecen a $L_2(Q)$, es integrable, por ser medible y $|f_1(x)f_2(x)| \leqslant \frac{1}{2}(|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)$. Por eso, a un par de funciones f_1 y f_2 se le puede asignar el número

$$(f_1, f_2)_{L_2(Q)} = \int\limits_Q f_1(x)\overline{f_2(x)}\, dx. \tag{2}$$

Es fácil comprobar que la fórmula (2) define un producto escalar en $L_2(Q)$. Una norma engendrada por este producto escalar tiene por expresión

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \Big(\int_Q |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}. \tag{3}$$

Siendo $|f| = |f|\cdot 1 \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2+1)$, en el caso de un dominio acotado Q la función $f(x)$, perteneciente a $L_2(Q)$, pertenece también a $L_1(Q)$. Esto quiere decir que para un dominio acotado $L_2(Q) \subset L_1(Q)$. Es evidente también que $C(\overline{Q}) \subset L_2(Q) \subset L_1(Q)$ en el caso de un dominio acotado Q.

TEOREMA 1. *$L_1(Q)$ es un espacio de Banach con la norma* (1); *$L_2(Q)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar* (2).

Para demostrar el teorema es suficiente establecer que los espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$ son completos en las normas correspondientes.

1. Supongamos que una sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones pertenecientes a $L_1(Q)$ es fundamental en $L_1(Q)$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que $\|f_k - f_m\|_{L_1(Q)} < \varepsilon$, cualesquiera que sean $k, m \geqslant N(\varepsilon)$. Tomemos $\varepsilon = 2^{-k}$, siendo k un número entero, y designemos con N_k el número $N(2^{-k})$, y sea, además, $N_k \leqslant N_{k+1}$. Entonces, para $m \geqslant N_k$

$$\|f_{N_k} - f_m\|_{L_1(Q)} < 2^{-k}, \tag{4}$$

y, en particular, $\|f_{N_k} - f_{N_{k+1}}\|_{L_1(Q)} < 2^{-k}$. Por eso, la serie

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|f_{N_k} - f_{N_{k+1}}\|_{L_1(Q)}$ converge.

Por consiguiente, según el corolario del p. 6, § 1, cap. II, en c.t.p. de Q la serie $\sum\limits_{k+1}^{\infty} (f_{N_{k+1}} - f_{N_k})$ converge hacia cierta función de $L_1(Q)$ y, consecuentemente, la sucesión f_{N_k}, $k = 1, 2, \ldots$ converge casi siempre en Q, cuando $k \to \infty$, hacia cierta función $f \in L_1(Q)$:

$$f_{N_k}(x) \to f(x), \quad k \to \infty.$$

Mostremos que $\|f_m - f\|_{L_1(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Efectivamente, de (4) se desprende que para $m \geqslant N_r$ y $k \geqslant r$

$$\|f_m - f_{N_k}\|_{L_1(Q)} \leqslant \|f_m - f_{N_r}\|_{L_1(Q)} + \|f_{N_r} - f_{N_k}\|_{L_1(Q)} \leqslant 2\cdot 2^{-r} = 2^{1-r}.$$

Pasando en esta desigualdad al límite para $k \to \infty$ y basándonos en el lema de Fatou (teorema 4, p. 6, § 1, cap. II) obtendremos la desigualdad $\|f_m - f\|_{L_1(Q)} \leqslant 2^{1-k}$, que es válida para todo $m \geqslant N_r$.

Para m suficientemente grandes podemos escoger un número r lo suficientemente grande y, por ello, $\| f_m - f \|_{L_1(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Así pués, $L_1(Q)$ es un espacio completo.

2. Supongamos ahora que las funciones de una sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, pertenecen a $L_2(Q)$ y esta sucesión es fundamental en la norma de $L_2(Q)$. Como al demostrar la primera parte del teorema, hallemos una sucesión numérica $N_1 \leqslant N_2 \leqslant \ldots \leqslant N_k \leqslant \ldots$ tal que

$$\| f_{N_k} - f_m \|_{L_2(Q)} < 2^{-k} \tag{4'}$$

para todo $m \geqslant N_k$, y, en particular, $\| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L_2(Q)} < 2^{-k}$. De la desigualdad de Buniakovski se deduce que $\| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L_1(Q)} \leqslant \leqslant \sqrt{|Q|} \| f_{N_{k+1}} - f_{N_k} \|_{L_2(Q)} < \sqrt{|Q|}\, 2^{-k}$ y, por eso, existe tal función $f(x) \in L_1(Q)$ que $f_{N_k}(x) \to f(x)$, cuando $k \to \infty$ en c.t.p. de Q. Por lo tanto, también $|f_{N_k}|^2 \to |f|^2$ para $k \to \infty$ en c.t.p. de Q. Además,

$$\| f_{N_k} \|_{L_2(Q)} \leqslant \| f_{N_k} - f_{N_1} \|_{L_2(Q)} + \| f_{N_1} \|_{L_2(Q)} \leqslant \frac{1}{2} + \| f_{N_1} \|_{L_2(Q)}.$$

Por eso, según el lema de Fatou, $f(x) \in L_2(Q)$.

Mostremos que $\| f_m - f \|_{L_2(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. Para $m \geqslant N_r$ y $k \geqslant r$ tiene lugar la siguiente desigualdad que se deduce de (4'):

$$\| f_m - f_{N_k} \|_{L_2(Q)} \leqslant \| f_m - f_{N_r} \|_{L_2(Q)} + \| f_{N_r} - f_{N_k} \|_{L_2(Q)} \leqslant 2^{1-r}.$$

Pasando en esta desigualdad al límite para $k \to \infty$, basándonos en el lema de Fatou obtenemos otra vez la desigualdad $\| f_m - f \|_{L_2(Q)} \leqslant \leqslant 2^{1-r}$, que es válida para todo $m \geqslant N_r$. Como el número r puede ser tomado suficientemente grande y, si m es lo suficientemente grande, obtenemos que $\| f_m - f \|_{L_2(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Notemos que al demostrar el teorema 1 hemos establecido simultáneamente la validez de la siguiente afirmación. *De cualquier sucesión de funciones convergente hacia cierta función f en $L_1(Q)$ o en $L_2(Q)$ se puede extraer una subsucesión que converge hacia f en casi siempre.*

2. Densidad del conjunto $C(\overline{Q})$ en $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Separabilidad de los espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Continuidad en la media de los elementos en $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$.

TEOREMA 2. *Un conjunto de funciones continuas en $\overline{Q}$ es siempre denso en $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$.*

1. Sea una función $f(x) \in L_1(Q)$. Sin disminuir la generalidad de nuestros razonamientos podemos considerarla de valores reales, perteneciente a $\Lambda_1(Q)$. En este caso, según la definición de integrabilidad de la función $f(x)$, existe una sucesión de funciones $f_k(x)$,

$k = 1, 2, \ldots$, continuas en $\overline{Q}$, que posee las propiedades siguientes: $f_k(x) \uparrow f(x)$ en c.t.p. de Q, y $\int\limits_Q f_k dx \to \int\limits_Q f dx$, cuando $k \to \infty$. Como $\int\limits_Q |f - f_k| \, dx = \int\limits_Q (f - f_k) \, dx$, resulta que $\| f - f_k \|_{L_1(Q)} \to 0$ $\to 0$ cuando $k \to \infty$, lo que se trataba de demostrar.

2. Sea una función $f(x) \in L_2(Q)$. Entonces, pertenece a $L_1(Q)$. Igual que en el primer caso, podemos considerar que es una función de valores reales de $\Lambda_1(Q)$, no negativa casi siempre. Tomemos una sucesión monótona no decreciente $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C(\overline{Q})$ que en c.t.p. converge hacia $f(x)$. Al sustituir, en caso de necesidad, la sucesión dada por la otra, $f_k^+(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, podemos considerar las funciones $f_k(x)$ adicionalmente no negativas. Pero entonces, $f_k^2(x) \uparrow f^2(x)$ en c.t.p. de Q cuando $k \to \infty$. Según la definición de la integral, de la función $f^2(x)$ se tiene que $\int\limits_Q f_k^2 \, dx \to$ $\to \int\limits_Q f^2 dx$, es decir, $\| f_k \|^2_{L_2(Q)} \to \| f \|^2_{L_2(Q)}$. Puesto que $f_k f \leqslant$ $\leqslant f^2$, según el teorema de Lebesgue (teorema 6, p. 7, § 1, cap. II), $\lim\limits_{k \to \infty} (f_k, f)_{L_2(Q)} = \| f \|^2_{L_2(Q)}$. Esto quiere decir que $\| f_k - f \|^2_{L_2(Q)} =$ $= \| f_k \|^2_{L_2(Q)} - 2 \, (f_k, f)_{L_2(Q)} + \| f \|^2_{L_2(Q)} \to 0$ para $k \to \infty$. El teorema está demostrado.

Indiquemos que si una sucesión de funciones de $C(\overline{Q})$ converge hacia cierta función en la norma del espacio $C(\overline{Q})$, será también convergente hacia la misma en las normas de los espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Por consiguiente, toda función continua en $\overline{Q}$ puede ser aproximada mediante una sucesión de polinomios con coeficientes racionales en las normas de $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. En este caso, del teorema 2 se deduce que un conjunto numerable de polinomios con coeficientes racionales es siempre denso en $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$. Es decir, tiene lugar

TEOREMA 3. *Los espacios $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$ son separables.*

Una función $f(x)$ perteneciente al espacio $L_2(Q)$ (y prolongada por cero fuera de Q) se llama *continua en la media (cuadrática) o en la norma del espacio $L_2(Q)$*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\| f(x + z) - f(x) \|_{L_2(Q)} < \varepsilon$, cualquiera que sea z, $|z| < \delta$.

Una función $f(x)$ perteneciente al espacio $L_1(Q)$ (y prolongada por cero fuera de Q) se llama *continua en la media o en la norma del espacio $L_1(Q)$*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\| f(x + z) -$ $- f(x) \|_{L_1(Q)} < \varepsilon$, cualquiera que sea z, $|z| < \delta$.

Del teorema 2 se deduce la siguiente afirmación.

TEOREMA 4. *Toda función de $L_2(Q)$ es continua en la media (cuadrática). Toda función de $L_1(Q)$ es continua en la media.*

Sea una función $f \in L_2(Q)$ (cuando $f \in L_1(Q)$, la demostración es la misma). Tomemos el número $a > 0$ tan grande que $Q \Subset S_a$, donde S_a es una bola $\{|x| < a\}$. La función $F(x)$, que es igual a $f(x)$ cuando $x \in Q$, y es nula cuando $x \in S_{2a} \setminus Q$, pertenece a $L_2(S_{2a})$, puesto que $f(x) \in L_2(Q)$. Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Debido al teorema 2, existe una función $\widetilde{F}(x)$ que es continua en $\overline{S}_{2a}$ y que satisface la desigualdad $\| F(x) - \widetilde{F}(x) \|_{L_2(S_{2a})} < \varepsilon/3$. A cuenta de la multiplicación de la función $\widetilde{F}(x)$ por una función cortante adecuada del dominio S_a, se puede considerar que $\widetilde{F}(x) \equiv 0$ para todo $x \in S_{2a} \setminus S_a$. Por ello, para $|z| \leqslant a$ $\| F(x + z) - \widetilde{F}(x + z) \|_{L_2(S_{2a})} = \| F(x) - \widetilde{F}(x) \|_{L_2(S_{2a})} \leqslant \varepsilon/3$. Ya que la función $\widetilde{F}(x)$ es uniformemente continua en $\overline{S}_{2a}$, existe un $\delta > 0$ $(\delta < a)$ tal que $\| \widetilde{F}(x + z) - \widetilde{F}(x) \|_{L_2(S_{2a})} \leqslant \varepsilon/3$, una vez que $|z| < \delta$. Por lo tanto, cuando $|z| < \delta$

$$\| f(x+z) - f(x) \|_{L_2(Q)} = \| F(x+z) - F(x) \|_{L_2(S_{2a})} \leqslant$$
$$\leqslant \| F(x+z) - \widetilde{F}(x+z) \|_{L_2(S_{2a})} + \| \widetilde{F}(x+z) - \widetilde{F}(x) \|_{L_2(S_{2a})} +$$
$$+ \| \widetilde{F}(x) - F(x) \|_{L_2(S_{2a})} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

El teorema está demostrado.

3. **Mediación de las funciones de $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$.** Para las funciones de $L_1(Q)$ y $L_2(Q)$, lo mismo que para las funciones de $C(\overline{Q})$, se pueden definir funciones mediadas.

Sea $\omega_h(|x - y|)$ un núcleo de mediación (cap. I, Introducción) y sea $f(x) \in L_1(Q)$. La función

$$f_h(x) = \int_Q f(y)\, \omega_h(|x - y|)\, dy, \quad h > 0, \tag{5}$$

se llama *función media para la función f* (*función mediada para f*).

De la propiedad a) del núcleo de mediación y del teorema 7, p. 7, § 1, cap. II, se deduce que $f_h(x) \in C^\infty(R_n)$ para $h > 0$. Además, $f_h(x) = 0$ fuera de Q^h.

TEOREMA 5. *Cuando* $f(x) \in L_1(Q)$ $(L_2(Q))$, $\| f_h - f \|_{L_1(Q)} \to 0$ $(\| f_h - f \|_{L_2(Q)} \to 0)$, *si* $h \to 0$.

La demostración de ambas afirmaciones es análoga, por lo que nos detendremos, por ejemplo en el caso $f \in L_2(Q)$. Vamos a considerar que la función f se prolonga por cero fuera de Q. Las propiedades b) y c) del núcleo de mediación, la desigualdad de Buniakovski, la propiedad d) del núcleo de mediación, aplicadas de manera consecutiva, nos dan:

$$|f_h(x)-f(x)|^2=$$
$$=\Big|\int\limits_{|x-y|<h} f(y)\,\omega_h(|x-y|)\,dy - f(x)\int\limits_{|x-y|<h}\omega_h(|x-y|)\,dy\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{|x-y|<h}\omega_h^2(|x-y|)\,dy\int\limits_{|x-y|<h}|f(y)-f(x)|^2\,dy\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\text{const}}{h^n}\int\limits_{|z|<h}|f(x+z)-f(x)|^2\,dz.$$

De acuerdo con el corolario del teorema de Fubini (p.11, § 1, cap. II),

$$\|f_h-f\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\frac{\text{const}}{h^n}\int\limits_Q dx\int\limits_{|z|<h}|f(x+z)-f(x)|^2\,dx=$$
$$=\frac{\text{const}}{h^n}\int\limits_{|z|<h}dz\int\limits_Q|f(x+z)-f(x)|^2\,dx. \qquad (6)$$

Tomemos arbitrariamente $\varepsilon>0$. Según el teorema sobre la continuidad en la media (teorema 4), habrá tal $\delta>0$ que $\|f(x+z)-f(x)\|_{L_2(Q)}<\varepsilon$, siempre que $|z|\leqslant h<\delta$. Por esta razón para estos h de (6) se desprende la desigualdad $\|f_h-f\|_{L_2(Q)}\leqslant\leqslant\text{const}\cdot\varepsilon$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Señalemos que al demostrar el teorema 5 no hemos empleado el hecho de que el núcleo de mediación es no negativo. Por consiguiente, si una función $f_h(x)$, media para $f(x)$, la definimos mediante la fórmula (5), donde $\omega_h(|x-y|)=\frac{1}{h^n}\,\omega_1\left(\frac{|x-y|}{h}\right)$, mientras que $\omega_1(t)$, $-\infty<t<\infty$, es una función par indefinidamente diferenciable que es nula cuando $|t|\geqslant1$ y para la cual tiene lugar $\int\limits_{R_n}\omega_1(|x|)\,dx=1$ (compárese con la definición del núcleo de mediación en la Introducción, cap. I), entonces el teorema 5 es también válido en este caso.

TEOREMA 6. *El conjunto $\dot{C}^\infty(\overline{Q})$ es siempre denso en $L_1(Q)$ y en $L_2(Q)$.*

Sea $f(x)\in L_2(Q)$ (el caso en que $f\in L_1(Q)$ es análogo). Fijemos $\varepsilon>0$ arbitrario. De acuerdo con el teorema sobre la continuidad absoluta de la integral lebesguiana (teorema 9, p. 10, § 1, cap. II), existe tal $\delta>0$ que $\int\limits_{Q\setminus Q_h}|f|^2\,dx<\varepsilon^2/4$.

Esto significa que la función $F(x)$, que es terminal en Q, pertenece a $L_2(Q)$ y es igual a $f(x)$ para $x \in Q_\delta$ y nula para $x \in Q \setminus Q_\delta$, satisface la desigualdad $\|F-f\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon/2$. En virtud del teorema 5, se puede hallar $h_0 > 0$ tal que $\|F_h - F\|_{L_2(Q)} \leqslant \varepsilon/2$ para todo $0 < h \leqslant h_0$. Cuando h es lo suficientemente pequeño, la función media F_h para la función terminal F pertenece al conjunto $\dot{C}^\infty(\overline{Q})$ y

$$\|f - F_h\|_{L_2(Q)} \leqslant \|f - F\|_{L_2(Q)} + \|F - F_h\|_{L_2(Q)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

El teorema está demostrado.

Puesto que para todo $k \geqslant 0$ tenemos $\dot{C}^\infty(\overline{Q}) \subset \dot{C}^k(Q) \subset L_2(Q)$, entonces los $\dot{C}^k(\overline{Q})$ son siempre densos en $L_2(Q)$, cualquiera que sea $k \geqslant 0$.

4. Espacios lineales $L_{1,loc}$, $L_{2,loc}$. Designemos mediante $L_{1,loc}(Q)$ un conjunto de funciones integrables en cada subdominio Q' estrictamente interior con relación al dominio Q, $Q' \Subset Q$.

Designemos mediante $L_{2,loc}(Q)$ un conjunto de funciones medibles en Q en las cuales el módulo del cuadrado es integrable en cada subdominio Q' estrictamente interior con relación a Q, $Q' \Subset Q$.

Está claro que $L_{1,loc}(Q)$ y $L_{2,loc}(Q)$ son espacios lineales. Además, $L_1(Q) \subset L_{1,loc}(Q)$, $L_2(Q) \subset L_{2,loc}(Q)$. La función $\frac{1}{(1-|x|)^m}$, por ejemplo, pertenece a $L_{1,loc}(|x|<1)$ y al $L_{2,loc}(|x|<1)$ para todo m y al mismo tiempo ella pertenece a $L_1(|x|<1)$ sólo cuando $m<1$, y a $L_2(|x|<1)$, sólo cuando $m<1/2$.

§ 3. Derivadas generalizadas

1. Propiedades más sencillas de las derivadas generalizadas. Supongamos que una función $f(x)$ continua en Q tiene una derivada $f_{x_i}(x)$ continua en Q. Entonces, para cualquier función $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q f\overline{g}_{x_i}\,dx = -\int_Q f_{x_i}\overline{g}\,dx.$$

Resulta que mediante esta igualdad se define completamente la derivada f_{x_i} de la función f: no es difícil mostrar que si para la función continua $f(x)$ existe una función continua $h_i(x)$ tal que con toda $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ se cumple la igualdad

$$\int_Q f\overline{g}_{x_i}\,dx = -\int_Q h_i\overline{g}\,dx, \tag{1}$$

entonces la función $f(x)$ tiene en Q la derivada f_{x_i} y para todo $x \in Q f_{x_i} = h_i$. Así pues, valiéndose de la identidad (1), se puede dar otra definición para la derivada de la función $f(x)$ que será equivalente (en la clase de funciones continuas) a la ordinaria. Si en la igualdad (1) desistimos de la continuidad de las funciones $f(x)$ y $h_i(x)$ y, en lugar de esto, exigimos que sean integrables ellas mismas o sus cuadrados (lo último nos es más cómodo) y entendiendo las integrales en (1) en el sentido de Lebesgue, ampliaremos de este modo la clase de funciones para las cuales podemos introducir la noción de la derivada; la función h_i se denomina derivada generalizada de la función f respecto a x_i en el dominio Q.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un vector cuyas componentes son enteras no negativas. Una función $f^\alpha(x) \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$ se llama *α-ésima derivada generalizada en el dominio Q* de la función $f(x) \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$, si para cualquier función $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q f(x)\,\overline{D^\alpha g(x)}\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f^\alpha(x)\,\overline{g(x)}\,dx. \tag{2}$$

Mostremos, ante todo, que la función $f(x)$ puede tener solamente una derivada generalizada $f^\alpha(x)$ (recordemos que las funciones se consideran iguales, si coinciden en c.t.p.).

En efecto, sean $f_1^\alpha(x)$ y $f_2^\alpha(x)$ dos derivadas generalizadas de la función $f(x)$. En vista de (2), para un subdominio arbitrariamente fijado Q', $Q' \Subset Q$, y una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q}')$ tenemos la igualdad $\int_{Q'} (f_1^\alpha - f_2^\alpha)\,\overline{g}\,dx = 0$. Pero, $f_1^\alpha - f_2^\alpha \in L_2(Q)'$ por lo cual, en virtud del teorema 6, p. 3 del párrafo anterior, $f_1^\alpha - f_2^\alpha = 0$ en c.t.p. de Q' y, por lo tanto, en c.t.p. de Q.

Sea una función $f(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$. De la fórmula de Ostrogradski tenemos la igualdad

$$\int_Q f(x)\,\overline{D^\alpha g(x)}\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q D^\alpha f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \tag{3}$$

para cualquier función $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$. Es decir, la función $f(x)$ tiene una derivada generalizada $f^\alpha(x)$, igual a $D^\alpha f(x)$. En particular, la función $f(x)$, igual a una constante (en c.t.p.) en Q, admite cualquier derivada generalizada $f^\alpha(x) = 0$, $|\alpha| > 0$.

En lo sucesivo vamos a designar mediante $D^\alpha f$ la derivada generalizada f^α de la función f. Para las derivadas generalizadas (principalmente, de los órdenes primero y segundo) emplearemos también las designaciones f_{x_i}, $f_{x_i x_j}$, ... y $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$, ...

Como para las funciones suaves $g(x)$ la derivada $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ no depende del orden de derivación, *la derivada generalizada tampoco depende del orden de derivación*, lo que se desprende de la unicidad de la derivada generalizada y de la fórmula (2).

De la definición inmediatamente se deduce también que si las funciones $f_i(x)$, $i = 1, 2$, admiten derivadas generalizadas $D^\alpha f_i$, la función $c_1 f_1 + c_2 f_2$, siendo las constantes c_i arbitrarias, tiene derivada generalizada $D^\alpha (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 D^\alpha f_1 + c_2 D^\alpha f_2$.

EJEMPLO 1. Una función $f(x) = |x_1|$ en la bola $Q = \{|x| < 1\}$ admite primeras derivadas generalizadas $f_{x_1} = \operatorname{sign} x_1$, $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \ldots, n$.

En efecto, para cualquier función $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$

$$\int_Q |x_1| \bar{g}_{x_1}\, dx = \int_{Q^+} x_1 \bar{g}_{x_1}\, dx - \int_{Q^-} x_1 \bar{g}_{x_1}\, dx,$$

donde $Q^+ = Q \cap (x_1 > 0)$, $Q^- = Q \cap (x_1 < 0)$. La fórmula de Ostrogradski nos da ($x_1 \bar{g} = 0$ sobre ∂Q y cuando $x_1 = 0$):

$$\int_Q |x_1| \bar{g}_{x_1}\, dx = -\int_{Q^+} \bar{g}\, dx + \int_{Q^-} \bar{g}\, dx = -\int_Q \operatorname{sign} x_1 \cdot \bar{g}\, dx.$$

Por ello, una derivada generalizada de la función $|x_1|$ respecto a x_1 existe y es igual a la función $\operatorname{sign} x_1$. Ya que, para $i \geqslant 2$

$$\int_Q |x_1| \bar{g}_{x_i}\, dx = \int_Q (|x_1| \bar{g})_{x_i} dx = 0 = -\int_Q 0 \cdot \bar{g}\, dx,$$

la función $|x_1|$ admite derivadas generalizadas respecto a x_i, $i = 2, \ldots, n$, iguales a cero.

Indiquemos que en el dominio Q la función $|x_1|$ no tiene derivadas clásicas respecto a x_1 (cuando $x_1 = 0$, la derivada no existe).

EJEMPLO 2. Una función $f(x) = \operatorname{sign} x_1$ tiene en la bola $Q = \{|x| < 1\}$ primeras derivadas generalizadas $f_{x_i} = 0$, $i = 2, \ldots, n$, pero no admite derivada generalizada f_{x_1}. La existencia de las derivadas generalizadas f_{x_i}, $i = 2, \ldots, n$, se establece de la misma manera que en el ejemplo 1. Demostremos que la función f no admite derivada generalizada respecto a x_1. Supongamos, al contrario, que existe una función $\omega \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$ que es derivada generalizada de la función f respecto a x_1. En este caso, para una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q \omega \bar{g}\, dx = -\int_Q (\operatorname{sign} x_1)\bar{g}_{x_1}\, dx = -\int_{Q^+} \bar{g}_{x_1}\, dx + \int_{Q^-} \bar{g}_{x_1}\, dx =$$
$$= 2 \int_{Q \cap \{x_1 = 0\}} \bar{g}\, dx_2 \ldots dx_n. \quad (4)$$

De esta igualdad se desprende ante todo que $\omega = 0$ (casi siempre) en Q. Efectivamente, sustituyendo en (4) la función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$, que es nula en Q^-, obtendremos la igualdad $\int_{Q^+} \omega \bar{g}\, dx = 0$, de la cual se desprende que $\omega = 0$ (casi siempre) en Q^+. Del mismo modo se demuestra que $\omega = 0$ (en c.t.p.) en Q^-. Por consiguiente, para cualquier $g(x) \in \dot{C}^1(Q)$ $\int_Q \omega \bar{g}\, dx = 0$, es decir $\int_{Q \cap \{x_1=0\}} \bar{g}(x)\, dx_2 \ldots dx_n = 0$. No obstante, la última igualdad no puede tener lugar para ninguna función $g(x) \in \dot{C}^1(Q)$.

La derivada generalizada $D^\alpha f$, a diferencia de una derivada clásica, se define por la identidad (2) *de manera global*, inmediatamente en Q. Sin embargo, *en cualquier subdominio $Q' \subset Q$ la función $D^\alpha f$ también será derivada generalizada de la función f*, puesto que la función $g(x)$, perteneciente a $\dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q}')$ y prolongada por cero fuera de Q', pertenece a $\dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$ (de hecho, esta propiedad la hemos aprovechado ya, al demostrar la unicidad de una derivada generalizada). Por esta causa, si la función $f(x)$ tiene en Q la derivada generalizada $D^\alpha f$ y, además, $f(x) = c$ (en c.t.p.) en $Q' \subset Q$, entonces, $D^\alpha f = 0$ (casi siempre) en Q'. En particular, una derivada generalizada (si existe) de la función $f(x)$, terminal en Q (es decir, para cierto Q'', $Q'' \Subset Q$, $f(x) = 0$ en c.t.p. de $Q \setminus Q''$), es terminal en Q y, por lo tanto, pertenece a $L_2(Q)$.

Supongamos que la función $f(x)$, perteneciente a $L_{2,\,\mathrm{loc}}(Q)$, tiene la derivada generalizada $D^\alpha f = F$, y la función $F(x)$ tiene la derivada generalizada $D^\beta F = G$. En este caso *existe la derivada generalizada $D^{\alpha+\beta} f$ y, además, $D^{\alpha+\beta} f = G$.*

En efecto, sea $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha+\beta|}(\overline{Q})$. Como $D^\beta g \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$, tenemos

$$\int_Q f\overline{D^{\alpha+\beta} g}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q D^\alpha f \overline{D^\beta g}\, dx =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int_Q F\overline{D^\beta g}\, dx = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_Q D^\beta F \bar{g}\, dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_Q G\bar{g}\, dx,$$

lo que se trataba de demostrar.

A diferencia de una derivada clásica, la derivada generalizada $D^\alpha f$ se define directamente para el orden $|\alpha|$, sin suponer que existen las correspondientes derivadas inferiores. Mostremos que realmente, las derivadas inferiores pueden no existir.

EJEMPLO 3. En una bola $Q = \{|x| < 1\}$ examinemos una función $f(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ en la que $\varphi(x_1) = \operatorname{sign} x_1$. De los resultados del ejemplo 2 se deduce que $f(x)$ no admite las derivadas generalizadas f_{x_1} y f_{x_2}.

Mostremos que, a pesar de esto, existe la derivada generalizada $f_{x_1x_2}$. Tomemos una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^2(\overline{Q})$. Tenemos

$$\int_Q \overline{g}_{x_1x_2} f\, dx = \int_Q \varphi(x_1)\, \overline{g}_{x_1x_2}\, dx + \int_Q \varphi(x_2)\, \overline{g}_{x_1x_2}\, dx.$$

Como que

$$\int_Q \varphi(x_1)\, \overline{g}_{x_1x_2}\, dx = -\int_{Q\cap\{x_1<0\}} \overline{g}_{x_1x_2}\, dx + \int_{Q\cap\{x_1>0\}} \overline{g}_{x_1x_2}\, dx = 0,$$

y, por analogía, $\int_Q \varphi(x_2)\, \overline{g}_{x_1x_2}\, dx = 0$, entonces

$$\int_Q f\overline{g}_{x_1x_2}\, dx = 0 = \int_Q 0\cdot\overline{g}\, dx.$$

Así pues, la derivada generalizada $f_{x_1x_2}$ existe y es igual a 0.

2. Derivadas generalizadas y funciones medias. Criterio de existencia de la derivada generalizada. Supongamos que la función $f(x) \in L_2(Q)$, ω_h es cierto núcleo de mediación y

$$f_h(x) = \int_Q \omega_h(|x-y|)\, f(y)\, dy, \qquad h > 0,$$

es una función mediada para la función $f(x)$, $f_h(x) \in \dot{C}^\infty(R_n)$.

LEMA 1. *Si una función $f(x)$ de $L_2(Q)$ tiene la derivada generalizada $D^\alpha f \in L_2(Q)$, para cualquier punto $y \in Q$ tenemos (cuando $h > 0$ es lo suficientemente pequeño):*

$$(D^\alpha f)_h(y) = D^\alpha f_h(y) \tag{5}$$

y para el subdominio $Q' \Subset Q$ arbitrario, cuando $h \to 0$

$$\| D^\alpha f_h - D^\alpha f \|_{L_2(Q')} \to 0. \tag{6}$$

Si la función $f(x)$ es complementariamente terminal en Q (y prolongada por cero fuera de Q), la fórmula (5) tiene lugar para todo $y \in \overline{Q}$ (siempre que $h > 0$ sean suficientemente pequeños) y

$$\| D^\alpha f_h - D^\alpha f \|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0. \tag{7}$$

Sustituyendo en la fórmula (2), a título de la función $g(x)$ el núcleo de mediación $\omega_h(|x-y|)$, $y \in Q$, para $h > 0$ lo suficientemente pequeño (h es menor que la distancia del punto y al contorno ∂Q) obtendremos, en virtud del teorema 7, p. 7, § 1, cap. II, la fórmula (5)

$$(D^\alpha f)_h(y) = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f(x)\, D_x^\alpha \omega_h(|x-y|)\, dx =$$
$$= \int_Q f(x)\, D_y^\alpha \omega_h(|x-y|)\, dx = D_y^\alpha f_h(y).$$

Cuando $Q' \Subset Q$, existe $h_0 > 0$ tal que para $h \leqslant h_0$ la fórmula (5) se realiza en todo $y \in \overline{Q'}$. En caso de que $f(x)$ sea terminal ($D^\alpha f$ también es terminal en este caso y pertenece a $L_2(Q)$), existe, de nuevo, tal $h_0 > 0$ que para $h \leqslant h_0$ la fórmula (5) tiene lugar para todo $y \in \in \overline{Q}$. Por eso, las correlaciones (6) y (7) se desprenden del teorema 5, p. 3, § 2.

COROLARIO. *Si todas las primeras derivadas generalizadas de la función f son nulas, $f =$ const.*

En efecto, cuando h son suficientemente pequeños, en cualquier subdominio $Q' \Subset Q$ tenemos $(f_{x_i})_h = 0$, $i = 1, \ldots, n$. En virtud de (5), $(f_h)_{x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, es decir, para tales h $f_h =$ const $= c(h)$ en Q'. Dado que $\| f_h - f \|_{L_2(Q')} = \| c(h) - f \|_{L_2(Q')} \to 0$ cuando $h \to 0$ (teorema 5, p. 3, § 2), entonces, $\| c(h_1) - c(h_2) \|_{L_2(Q')} = |c(h_1) - c(h_2)| \sqrt{|Q'|} \to 0$ cuando $h_1, h_2 \to 0$. Por consiguiente, $c(h) = f_h$ converge uniformemente en Q' (y, con mayor razón, en $L_2(Q')$) hacia cierta constante, es decir, $f =$ const en Q' y, por lo tanto, en Q.

Valiéndonos del lema 1, demostremos el siguiente criterio de existencia de la derivada generalizada para la función $f \in L_2(Q)$.

TEOREMA 1. *Para que exista la derivada generalizada $D^\alpha f$ de la función $f \in L_2(Q)$, es necesario y suficiente que para cualquier subdominio $Q' \Subset Q$ existan tales constantes $C(Q')$ y $h_0(Q')$ que $\| D^\alpha f_h \|_{L_2(Q')} \leqslant C(Q')$, cualquiera que sea $h < h_0(Q')$.*

La necesidad está demostrada en el lema 1.

Demostremos la suficiencia. Tomemos un sistema de dominios $Q_1 \Subset Q_2 \Subset \ldots \Subset Q_m \Subset \ldots \Subset Q$ tal que cualquier punto $x \in Q$ pertenezca a cierto dominio Q_i (y, por lo tanto, también a todo Q_j para $j > i$). Ya que $\| D^\alpha f_h \|_{L_2(Q_1)} \leqslant C(Q_1)$ para $h < h_0(Q_1)$, el conjunto $\{D^\alpha f_h\}$ para estos h es débilmente compacto (teorema 3, p. 8, § 3, cap. II). Por eso, se puede hallar una sucesión de valores de h, $h_{1,1}, \ldots, h_{1,k}, \ldots$, $h_{1,k} \downarrow 0$ cuando $k \to \infty$, tal que la sucesión de funciones $D^\alpha f_{h_{1,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge débilmente en $L_2(Q_1)$. Por analogía, de la sucesión $h_{1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, se puede extraer una subsucesión $h_{2,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, tal que en $L_2(Q_2)$ la sucesión de funciones $D^\alpha f_{h_{2,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, será de convergencia débil. En este caso el límite débil de esta sucesión en Q_1 coincide, por supuesto, con el límite débil de la sucesión $D^\alpha f_{h_{1,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, etc. La sucesión diagonal $D^\alpha f_{h_{k,k}}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge débilmente hacia cierta función $\omega(x) \in L_{2,\,loc}(Q)$ en el espacio $L_2(Q_i)$, cualquiera que sea $i = 1, 2, \ldots$ Por lo tanto, en $L_2(Q')$ la sucesión $D^\alpha f_{h_{(k,k)}}$ converge débilmente hacia ω, cualquiera que sea $Q' \Subset Q$.

Tomemos una función arbitraria $g \in \dot{C}^{|\alpha|}(\overline{Q})$ y sea Q' un dominio fuera del cual $g(x) = 0$, $Q' \Subset Q$. Para todo $k = 1, 2, \ldots$ tiene lugar la igualdad

$$\int_Q D^{\alpha} f_{h_{k,k}} \overline{g}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f_{h_{k,k}} D^{\alpha} \overline{g}\, dx,$$

en la cual la integración se efectúa, de hecho, no en todo el dominio Q, sino en Q'. Como la sucesión $D^\alpha f_{h_{(k,k)}}$, $k = 1, 2, \ldots$ converge débilmente en $L_2(Q')$ hacia ω, mientras que la sucesión $f_{h_{(k,k)}}$, $k = 1, 2, \ldots$ converge fuertemente (y, por lo tanto, también débilmente) hacia la función f, en esta igualdad se puede pasar al límite para $k \to \infty$:

$$\int_Q \omega \overline{g}\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f D^{\alpha} \overline{g}\, dx.$$

Esto significa que la función f tiene la derivada generalizada $D^\alpha f$ igual a la función ω. El teorema queda demostrado.

3. Existencia de la derivada generalizada en una acumulación de dominios. En el p. 1 se ha señalado que si $D^\alpha f$ es una derivada generalizada de la función f en Q, también será derivada generalizada de esta función en cualquier subdominio $Q' \subset Q$. El presente punto está dedicado a la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Si una función f tiene derivadas generalizadas $D^\alpha f$ en los dominios Q_1 y Q_2 y si $Q_1 \cup Q_2 = Q$ es también un dominio (es decir, un conjunto conexo), entonces en Q existe la derivada generalizada $D^\alpha f$.*

Tomemos un punto arbitrario $x \in Q$. Sea $S_\rho(x)$ una bola de radio $\rho > 0$ y con el centro en el punto x, mientras que $\rho_1 = \min_{y \in \partial Q_1} |x - y|$, y $\rho_2 = \min_{y \in \partial Q_2} |x - y|$. Cuando $x \in Q_1 \setminus Q_2$, $S_{\rho_1/2}(x) \Subset Q_1$. Si $x \in Q_2 \setminus Q_1$, $S_{\rho_2/2}(x) \Subset Q_2$. En el caso de que $x \in Q_1 \cap Q_2$ y $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, entonces $S_{\rho/2}(x) \Subset Q_1$ y $S_{\rho/2}(x) \Subset Q_2$.

Todos los puntos del dominio Q los dividamos en dos clases: a la primera clase le asignemos todos los puntos de $Q_1 \setminus Q_2$ y aquellos puntos de $Q_1 \cap Q_2$, para los cuales $\rho_1 < \rho_2$, $\rho = \rho_1$; a la segunda clase, todos los puntos restantes, es decir, todos los puntos de $Q_2 \setminus Q_1$ y aquellos de $Q_1 \cap Q_2$, para los cuales $\rho_2 \leqslant \rho_1$, $\rho = \rho_2$.

De esta manera hemos obtenido un cubrimiento del dominio Q con las bolas $S_{\rho/2}(x)$: si x es de primera clase, $\rho = \rho_1$; si x pertenece a la segunda clase, $\rho = \rho_2$.

Sea Q' un subdominio arbitrario estrictamente interior del dominio Q, $Q' \Subset Q$. Extrayamos del cubrimiento $\overline{Q}'$ con las bolas $S_{\rho/2}(x)$ un subcubrimiento finito. Una parte de las bolas de este subcubrimiento, cuyos centros se ubican en los puntos de la primera clase, forman un conjunto abierto $Q_1' \Subset Q_1$, las restantes, un conjunto abierto $Q_2' \Subset Q_2$. De este modo, para el dominio Q' hemos hallado dos conjuntos abiertos, Q_1' y Q_2', los cuales poseen las siguientes propiedades: a) Q_i', $i = 1, 2$, es la suma de un número finito de bolas, b) Q' pertenece al dominio $Q_1' \cup Q_2'$ y $Q_1' \Subset Q_1$, $Q_2' \Subset Q_2$. En vista de que en Q_1 y Q_2 existe la derivada generalizada $D^\alpha f$, según el teorema 1, existen tales constantes $C(Q_1')$, $C(Q_2')$, $h_0(Q_1')$ y $h_0(Q_2')$ que para $h < h_0 = \min(h_0(Q_1'), h_0(Q_2'))$ $\| D^\alpha f_h \|_{L_2(Q_1')} \leqslant C(Q_1')$, $\| D^\alpha f_h \|_{L_2(Q_2')} \leqslant \leqslant C(Q_2')$, donde f_h es una función media para la función f en el dominio Q. Por ello

$$\| D^\alpha f_h \|^2_{L_2(Q')} \leqslant \| D^\alpha f_h \|^2_{L_2(Q_1')} + \\ + \| D^\alpha f_h \|^2_{L_2(Q_2')} \leqslant C_1^2(Q_1') + C_2^2(Q_2') = C_2(Q')$$

para todo $h < h_0$.

Resulta, pues, que según el teorema 1, la función f admite una derivada generalizada del orden α en Q (naturalmente, en Q_1 y Q_2) que coincide con $D^\alpha f$. El teorema queda demostrado.

4. Derivadas generalizadas y relaciones de diferencias finitas. Supongamos que una función $f(x)$ es terminal en Q y pertenece a $L_2(Q)$. Prolonguémosla por cero fuera de Q y examinemos, para $h \neq 0$, una relación de diferencias

$$\delta_h^k f(x) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{h} \tag{8}$$

$k = 1, \ldots, n$. Está claro que $\delta_h^k f(x) \in L_2(Q)$ para todo $h \neq 0$. Si la función $g(x) \in L_2(Q)$ (y es prolongada por cero fuera de Q), entonces, para todo h de módulo suficientemente pequeño (menor que la distancia entre el contorno del dominio Q y el del dominio Q', fuera del cual $f = 0$) tiene lugar la fórmula de «integración por partes»

$$(\delta_h^h f,\ g)_{L_2(Q)} =$$
$$= \frac{1}{h}\int_Q \left(f(x_1, \ldots, x_{k-1},\ x_k + h,\ x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x)\right)\bar{g}(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{h}\int_Q f(x)\left(\bar{g}(x_1, \ldots, x_{k-1},\ x_k - h,\ x_{k+1}, \ldots, x_n) - \bar{g}(x)\right)dx =$$
$$= -(f,\ \delta_{-h}^k g)_{L_2(Q)}. \qquad (9)$$

TEOREMA 3. *Supongamos que una función $f(x)$, terminal en Q, pertenece a $L_2(Q)$.*

a) *Si existe una derivada generalizada f_{x_k}, siendo $k = 1, \ldots, n$, para todo $h \neq 0$ de módulo suficientemente pequeño $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q)} \leqslant \leqslant \|f_{x_k}\|_{L_2(Q)}$ y, además,*

$$\|\delta_h^k f - f_{x_k}\|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0. \qquad (10)$$

b) *Si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $h \neq 0$ de módulo suficientemente pequeño $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q)} \leqslant C$, entonces en Q existe la derivada generalizada f_{x_k} de la función f y, además, tiene lugar la desigualdad $\|f_{x_k}\|_{L_2(Q)} \leqslant C$ y la correlación* (10).

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN a). Supongamos al principio que $f \in \dot{C}^1(\bar{Q})$. Sin perder la generalización, se puede considerar que $k = n$. En este caso

$$\delta_h^n f = 0\,\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h} \frac{\partial f(x',\ \xi_n)}{\partial \xi_n}\,d\xi_n,$$

donde, como siempre, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Por consiguiente (sea, para concretar, $h > 0$),

$$|\delta_h^n f(x)|^2 \leqslant \frac{1}{h^2}\left(\int_{x_n}^{x_n+h} \left|\frac{\partial f(x',\ \xi_n)}{\partial \xi_n}\right| d\xi_n\right)^2 \leqslant \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_n+h} \left|\frac{\partial f(x',\ \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n,$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_h^n f(x)|^2\,dx_n \leqslant \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \int_{x_n}^{x_n+h} \left|\frac{\partial f(x',\ \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial f(x',\ x_n)}{\partial x_n}\right|^2 dx_n.$$

Integrando la última desigualdad respecto a $x' \in R_{n-1}$, obtenemos

$$\| \delta_h^n f \|_{L_2(Q)} \leqslant \| f_{x_n} \|_{L_2(Q)}. \tag{11}$$

Luego,

$$\delta_h^n f(x) - f_{x_n}(x) = \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n+h} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n - \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n+h} \left(\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n} \right) d\xi_n.$$

Por eso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_h^n f(x) - f_{x_n}(x))^2 \, dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \int_{x_n}^{x_n+h} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} - \frac{df(x', x_n)}{\partial x_n} \right|^2 d\xi_n =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial f(x', x_n + \eta)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n} \right)^2 dx_n.$$

Integrando esta desigualdad respecto a $x' \in R_{n-1}$, obtenemos

$$\| \delta_h^n f - f_{x_n} \|_{L_2(Q)}^2 \leqslant \frac{1}{h} \int_0^h d\eta \int_Q \left(\frac{\partial f(x', x_n + \eta)}{\partial x_n} - \frac{df(x', x_n)^2}{\partial x_n} \right)^2 dx. \tag{12}$$

Las desigualdades (11) y (12) obtenidas hasta ahora para las funciones $f \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ son válidas también para las funciones terminales de $L_2(Q)$ que tienen en Q derivadas generalizadas f_{x_n}. Para convencerse de esto es suficiente aproximar la función $f(x)$ por su función mediada que tenga el radio de mediación ρ lo suficientemente pequeño, aprovechar para la última las desigualdades (11) y (12) (la función mediada será terminal en Q) y pasar en ellas al límite cuando $\rho \to 0$.

De esta manera, la primera desigualdad del punto a), coincidente con (11), queda demostrada.

Con objeto de demostrar la correlación (10) emplearemos el teorema de la continuidad media (cuadrática) de la función perteneciente a $L_2(Q)$ (teorema 4, p. 2, § 2), del cual se desprende que para cualquier

$\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $|\eta| \leqslant |h| \leqslant \delta$, se tiene

$$\int_Q \left(\frac{\partial f(x', x_n+\eta)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n} \right)^2 dx \leqslant \varepsilon^2.$$

Por esta razón, de (12) se deduce la desigualdad $\| \delta_h^n f - f_{x_n} \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \leqslant \varepsilon^2$, siempre que $|h| \leqslant \delta$. La afirmación a) está demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN b). Según el teorema 3, p. 8, § 3, cap. II, el conjunto $\{\delta_h^n f\}$, cuando $|h|$ son pequeñas, es débilmente compacto en $L_2(Q)$. Por eso, en él se puede elegir una sucesión $\delta_{h_p}^k f$, $p = 1, 2, \ldots$, que sea débilmente convergente hacia cierta función $\omega \in L_2(Q)$ $h_p \to 0$ para $p \to \infty$. Además, $\| \omega \|_{L_2(Q)} \leqslant C$. Luego, en vista de (9), $(\delta_{h_p}^k f, g)_{L_2(Q)} = -(f, \delta_{-h_p}^k g)_{L_2(Q)}$, cualquiera que sea la función $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$. Cuando $p \to \infty$, el primer miembro de la igualdad tiende a (ω, g) y el segundo miembro, según el teorema de Lebesgue, a $-(f, g_{x_k})$. Por esta causa, la derivada generalizada f_{x_k} existe y $f_{x_k} = \omega$. El teorema está demostrado.

En lo sucesivo necesitaremos también la afirmación siguiente.

Sea Q un dominio de una conexión del espacio R_n que contiene el origen de coordenadas y es simétrico respecto al plano $x_n = 0$ (es decir, para cualquier punto $x = (x', x_n)$, perteneciente a Q, el punto $(x' - x_n)$ también pertenece a Q), y sea, además, $\delta > 0$ un número tan pequeño que el conjunto Q_δ es un dominio. Introduzcamos las designaciones:

$$Q^+ = Q \cap \{x_n > 0\}, \quad Q^- = Q \cap \{x_n < 0\}, \quad (Q_\delta)^+ = Q_\delta \cap \{x_n > 0\}.$$

TEOREMA 4. *Sea una función $f(x) \in L_2(Q^+)$ y sea $f(x) = 0$ en $Q^+ \setminus (Q_\delta)^+$.*

a) *Si en Q^+ existe la derivada generalizada f_{x_k} para cierto $k < n$, entonces, para todo $h \neq 0$ de módulo suficientemente pequeño*

$$\| \delta_h^k f \|_{L_2(Q^+)} \leqslant \| f_{x_k} \|_{L_2(Q^+)}$$

y

$$\| \delta_h^k f - f_{x_k} \|_{L_2(Q^+)} \to 0 \quad \textit{para} \quad h \to 0. \tag{10'}$$

b) *Si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $h \neq 0$ de módulo suficientemente pequeño $\| \delta_h^k f \|_{L_2(Q^+)} \leqslant C$, $k < n$, entonces en Q^+ existe la derivada generalizada f_{x_k}, con la particularidad de que $\| f_{x_k} \|_{L_2(Q^+)} \leqslant C$, y tiene lugar la correlación (10').*

En el dominio Q definamos una función $F(x)$ del modo siguiente: $F(x) = f(x)$ en Q^+ y $F(x) = f(x' - x_n)$ en Q^-. Es obvio que

$F \in L_2(Q)$ y $F(x)=0$ fuera de Q_δ. Además, $\|\delta_h^k F\|^2_{L_2(Q)} = 2\|\delta_h^k f\|^2_{L_2(Q^+)}$, $k<n$, $0<|h|<\delta$.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN a). Supongamos que la función f tiene en Q^+ una derivada generalizada f_{x_k}. Mostremos, ante todo, que en este caso la función F tiene en Q la derivada generalizada F_{x_k}. En efecto, tomemos una función arbitraria $g(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ y, para $\delta > 0$ arbitrario, otra función, $\zeta_\delta(x_n) \in C^1(-\infty, +\infty)$, par, $\zeta_\delta(-x_n) = \zeta(x_n)$, que satisface, para todo x_n, la desigualdad $|\zeta_\delta(x_n)| \leqslant 1$, es igual a 1 cuando $x_n \geqslant \delta$, y nula cuando $0 \leqslant x_n \leqslant \delta/2$.

De la igualdad

$$\int_Q F(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= \int_{Q^+} f(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx + \int_{Q^-} f(x', -x_n)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= \int_{Q^+} f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} (\zeta_\delta(x_n)\, [g(x', x_n) + g(x', -x_n)]\, dx$$

y de la definición de la derivada generalizada de la función f en el dominio Q^+ tenemos (la función $\zeta_\delta(x_n)\,(g(x', x_n) + g(x', -x_n)) \in \dot{C}^1(\overline{Q}^+)$)

$$\int_Q F(x)\, g_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, dx =$$

$$= -\int_{Q^+} f_{x_k}(x)\, \zeta_\delta(x_n)\, (g(x', x_n) + g(x', -x_n))\, dx =$$

$$= -\int_{Q^+} f_{x_k}(x', x_n)\, \zeta_\delta(x_n)\, g(x)\, dx - \int_{Q^-} f_{x_k}(x', -x_n)\, \zeta_\delta(x_n)\, g(x)\, dx.$$

Pasando en esta igualdad (en conformidad con el teorema de Lebesgue) al límite para $\delta \to 0$, resulta que la función igual a $f_{x_k}(x)$ en Q^+ y a $f_{x_k}(x', -x_n)$ en Q^-, es una derivada generalizada F_{x_k} en Q de la función F, teniendo lugar al mismo tiempo la ecuación $\|F_{x_k}\|^2_{L_2(Q)} = 2\|f_{x_k}\|^2_{L_2(Q^+)}$.

En virtud del teorema 3, $\|\delta_h^k F\|_{L_2(Q)} \leqslant \|F_{x_k}\|_{L_2(Q)}$. Por ello, $\|\delta_h^k f\|^2_{L_2(Q^+)} = \frac{1}{2}\|\delta_h^k F\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{1}{2}\|F_{x_k}\|^2_{L_2(Q)} = \|f_{x_k}\|_{L_2(Q^+)}$. Ya que $\|\delta_h^k F - F_{x_k}\|^2_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\|\delta_h^k f - f_{x_k}\|^2_{L_2(Q^+)}$ y dado que $\|\delta_h^k F - F_{x_k}\|_{L_2(Q)} \to 0$

cuando $h\to 0$, entonces $\|\delta_h^k f - f_{x_k}\|_{L_2(Q^+)}\to 0$ para $h\to 0$. La afirmación a) está demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN b). Supongamos que para todo $h\neq 0$ de módulo suficientemente pequeño $\|\delta_h^k f\|_{L_2(Q^+)}\leqslant C$, $k<n$. En este caso para todos estos $h\,\|\delta_h^k F\|^2_{L_2(Q)}\leqslant 2\cdot C^2$. De acuerdo con el teorema 3, en Q existe la derivada generalizada F_{x_k} y $\|F_{x_k}\|^2_{L_2(Q)}\leqslant 2\cdot C^2$. Esto quiere decir, en Q^+ existe la derivada generalizada f_{x_k}, $\|f_{x_k}\|^2_{L_2(Q^+)}\leqslant C^2$ y se cumple la correlación (10′). El teorema está demostrado.

§ 4. Espacios $H^k(Q)$

1. Espacio lineal $H^k_{\text{loc}}(Q)$. Espacio de Hilbert $H^k(Q)$. Un conjunto de funciones de $L_{2,\text{ loc}}(Q)$ que admiten todas las derivadas generalizadas hasta el orden k, $k\geqslant 1$, inclusive (de $L_{2,\text{ loc}}(Q)$), lo designaremos mediante $H^k_{\text{loc}}(Q)$. Designemos con $H^k(Q)$ un subconjunto $H^k_{\text{loc}}(Q)$ cuyos elementos, a la par con todas las derivadas generalizadas hasta el orden k inclusive, pertenecen a $L_2(Q)$.

Por $H^k_{\text{loc}}(Q)$ y $H^k(Q)$, para $k=0$, vamos a entender $L_{2,\text{ loc}}(Q)$ y $L_2(Q)$, respectivamente: $H^0_{\text{loc}}(Q)=L_{2,\text{ loc}}(Q)$, $H^0(Q)=L_2(Q)$.

Está claro que $H^k_{\text{loc}}(Q)$ y $H^k(Q)$ son espacios lineales. Mostremos que $H^k(Q)$ es un espacio de Hilbert provisto de un producto escalar

$$(f,\ g)_{H^k(Q)}=\sum_{|\alpha|\leq k}\int_Q D^\alpha f D^\alpha \bar{g}\,dx. \tag{1}$$

Para comprobar esta afirmación basta establecer que $H^k(Q)$ es completo en la norma, engendrada por este producto escalar,

$$\|f\|_{H^k(Q)}=\sqrt{\sum_{|\alpha|\leq k}\int_Q |D^\alpha f|^2\,dx}. \tag{2}$$

Sea f_m, $m=1, 2, \ldots$, una sucesión arbitraria de elementos de $H^k(Q)$, fundamental respecto a la norma (2):

$$\|f_s-f_m\|^2_{H^k(Q)}=\sum_{|\alpha|\leq k}\int_Q |D^\alpha f_s-D^\alpha f_m|^2\,dx\to 0 \quad \text{para} \quad m,\ s\to\infty.$$

Por ello, para cualquier α, $|\alpha|\leqslant k$, cuando m, $s\to\infty$

$$\int_Q |D^\alpha f_s-D^\alpha f_m|^2\,dx\to 0, \tag{3}$$

y, en particular (cuando $\alpha = 0$),

$$\int\limits_Q |f_s - f_m|^2\,dx \to 0 \tag{4}$$

A causa de que $L_2(Q)$ es completo, de (4) se deduce la existencia de una función $f \in L_2(Q)$ hacia la cual (en $L_2(Q)$) converge la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, y de (3), la existencia, para cualquier α, $|\alpha| \leqslant k$, de una función $f^\alpha \in L_2(Q)$ hacia la cual converge (en $L_2(Q)$) la sucesión $D^\alpha f_m$, $m = 1, 2, \ldots$

Puesto que cada función $f_m(x)$ admite todas las derivadas generalizadas hasta el k-ésimo orden inclusive, pertenecientes a $L_2(Q)$, para cualquier α, $|\alpha| \leqslant k$, tenemos:

$$(f_m, D^\alpha g)_{L_2(Q)} = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha f_m, g)_{L_2(Q)},$$

cualquiera que sea la función $g \in \dot{C}^k(\overline{Q})$. Pasando en esta igualdad al límite para $m \to \infty$ (de la convergencia fuerte se desprende la convergencia débil), obtenemos que la función f^α es la α-ésima derivada generalizada de la función f. De este modo, $f \in H^k(Q)$ y $\|f_m - f\|_{H^k(Q)} \to 0$ cuando $m \to \infty$. La afirmación está demostrada.

OBSERVACIÓN. A veces resulta más cómodo considerar el conjunto de todas las funciones de valores reales pertenecientes a $H^k(Q)$, $k = 0, 1, \ldots$ ($H^0(Q) = L_2(Q)$). Este conjunto es, por supuesto, un espacio (real) de Hilbert provisto del producto escalar (1). Llamémoslo espacio real $H^k(Q)$, conservando para él la misma designación.

Indiquemos algunas propiedades de los espacios $H^k(Q)$.

1. Si el dominio $Q' \subset Q$ y $f \in H^k(Q)$, entonces $f \in H^k(Q')$.

2. Si $f \in H^k(Q)$ y $a(x) \in C^k(\overline{Q})$, entonces la función $af \in H^k(Q)$. En este caso cualquier derivada generalizada $D^\alpha(af)$, $|\alpha| \leqslant k$, se calcula según las reglas habituales de derivación de un producto. En particular, $(af)_{x_i} = a_{x_i}f + af_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

3. Si $f \in H^k(Q)$ y $f_h(x)$ es una función media para la función f, entonces para cualquier dominio Q', $Q' \Subset Q$, $\|f_h - f\|_{H^k(Q')} \to 0$ cuando $h \to 0$. Si la función f es complementariamente terminal en Q, resulta que $\|f_h - f\|_{H^k(Q)} \to 0$ cuando $h \to 0$.

4. Si la función $f \in H^k(Q)$ es terminal en Q, una función igual a f en Q y nula fuera de Q pertenecerá a $H^k(Q')$, cualquiera que sea el dominio Q', $Q' \supset Q$.

Las propiedades 1—4 se deducen directamente de la definición de los espacios $H^k(Q)$ y de las propiedades de las derivadas generalizadas.

5. Supongamos que la transformación $y = y(x)$ ($y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$), $i = 1, \ldots, n$, representa biunívocamente el dominio Q en el dominio Ω y sea $x = x(y)$ ($x_i = x_i(y_1, \ldots, y_n)$), $i = 1, \ldots$

..., n), la transformación correspondiente inversa. Supongamos que para cierto $k \geqslant 1$ $y_i(x) \in C^k(\overline{Q})$, $x_i(y) \in C^k(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$. En este caso, para que la función $F(x) = f(y(x))$ (en la que $f(y)$ es una función definida en Ω) pertenezca al espacio $H^k(Q)$, es necesario y suficiente que la función $f(y)$ pertenezca al espacio $H^k(\Omega)$. Las derivadas de la función $F(x)$ se calculan según las reglas habituales para derivar funciones compuestas. Por ejemplo, para las derivadas de primer orden tienen lugar las fórmulas

$$F_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{y_j}(y(x)) \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

Además, existen tales constantes C_1 y C_2, dependientes de las funciones $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, que:

a) $\| F \|_{H^k(Q)} \leqslant C_1 \| f \|_{H^k(\Omega)}$, b) $\| f \|_{H^k(\Omega)} \leqslant C_2 \| F \|_{H^k(Q)}$.

La transformación inversa $x = x(y)$ satisface las mismas condiciones que la transformación $y = y(x)$, por lo que podemos limitarnos a la demostración de la suficiencia y de la desigualdad a).

Sea $k = 1$ y $f(y) \in H^1(\Omega)$. De la observación al teorema 8, p. 8, § 1, cap. II, se deduce que tanto la función $F(x)$ como las funciones $F_i(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{y_j}(y(x)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, pertenecen a $L_2(Q)$. Cuando $f_h(y)$ es una función mediada para $f(y)$, la función $F(h, x) = f_h(y(x))$ pertenece a $C^1(\overline{Q})$, con la particularidad de que $\frac{\partial F(h, x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} f_{hy_j}(y(x)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Sea el subdominio $Q' \Subset Q$, mientras que Ω' su imagen. En este caso, $\Omega' \Subset \Omega$. Como $\| f_h - f \|_{L_2(\Omega)} \to 0$ y $\| f_{hy_i} - f_{y_i} \|_{L_2(\Omega')} \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, cuando $h \to 0$, entonces, en virtud de la observación al teorema 8, p. 8, § 1, cap. II, $\| F(h, x) - F(x) \|_{L_2(Q)} \to 0$ y $\| F_{x_i}(h, x) - F_i(x) \|_{L_2(Q')} \to 0$, $i = 1, \ldots, n$, cuando $h \to 0$, cualquiera que sea $Q' \Subset Q$. Esto significa que en las igualdades $(F(h, x), g_{x_i}(x))_{L_2(Q)} = -(F_{x_i}(h, x), g(x))_{L_2(Q)}$ $i = 1, \ldots, n$, donde g es una función arbitraria de $\dot{C}^1(\overline{Q})$ (Q' se elige de manera que sea $g = 0$ en $Q \setminus Q'$), se puede pasar al límite para $h \to 0$: $(F, g_{x_i})_{L_2(Q)} = -(F_i, g)_{L_2(Q)}$. Por ello, la función F tiene todas las primeras derivadas generalizadas de $L_2(Q)$, es decir, pertenece a $H^1(Q)$; al mismo tiempo se realizan las igualdades (5) y, por lo tanto, también la desigualdad a) cuando $k = 1$.

Supongamos ahora que $k = 2$. Ya hemos demostrado que $F(x) \in H^1(Q)$ y tienen lugar las fórmulas (5). Los segundos miembros de éstas, siendo funciones de y, pertenecen a $H^1(\Omega)$, en virtud de la propiedad 2. Por lo tanto, las funciones $F_{x_i}(x)$ también pertenecen a $H'(Q)$. Resulta que $F \in H^2(Q)$ y, cuando $k = 2$, se cumple la desigualdad a). Considerando las terceras derivadas como derivadas de las segundas, etc., llegamos a la conclusión de que la afirmación es válida para cualquier k.

En el punto 2 emplearemos la siguiente propiedad.

6. Si el dominio Q es un paralelepípedo rectángulo, el conjunto $C^\infty(\overline{Q})$ (y, por esta misma razón, $C^k(\overline{Q})$) en el espacio $H^k(Q)$ es siempre denso.

Es suficiente demostrar esta afirmación para el paralelepípedo $\Pi_a = \{|x_i| < a_i, i = 1, \ldots, n\}$, donde $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Tomemos una función arbitraria $f \in H^k(\Pi_a)$ y un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Cualquiera que sea α, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$, la función $D^\alpha f \in L_2(\Pi_a)$, por lo que, según el teorema 2, p. 2, § 2, existe una función $\varphi_\alpha(x) \in C(\overline{\Pi}_a)$ tal que $\| D^\alpha f - \varphi_\alpha \|_{L_2(\Pi_a)} < \varepsilon$.

En el paralelepípedo $\Pi_{a\sigma} = \{|x_i| < a_i\sigma, i = 1, \ldots, n\}$, donde $\sigma > 1$, $\Pi_a \Subset \Pi_{a\sigma}$, examinemos una función $F_\sigma(x) = f(x/\sigma)$. En virtud de la propiedad 4, $F_\sigma \in H^k(\Pi_{a\sigma})$ y, por esta misma razón, $F_\sigma \in H^k(\Pi_a)$. Puesto que

$$\| D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x) \|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant$$
$$\leqslant \| D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} + \| \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_a)}$$

y, de acuerdo con el teorema 8, p. 8, § 1, cap. II,

$$\| D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} =$$
$$= \left\| \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}} D^\alpha f(x/\sigma) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \right\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} \leqslant \left\| \left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) D^\alpha f(x/\sigma) \right\|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} +$$
$$+ \| D^\alpha f(x/\sigma) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_{a\sigma})} \leqslant$$
$$\leqslant \sigma^{n/2} \left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) \| D^\alpha f \|_{L_2(\Pi_a)} + \sigma^{n/2}\varepsilon,$$

entonces

$$\| D^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x) \|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant \sigma^{n/2} \left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) \| D^\alpha f \|_{L_2(\Pi_a)} +$$
$$+ \sigma^{n/2}\varepsilon + \| \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_a)}.$$

Por ello, para cualquier α, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$,

$$\| D^\alpha f(x) - D^\alpha F_\sigma(x) \|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant \| D^\alpha f - \varphi_\alpha \|_{L_2(\Pi_a)} + \| D^\alpha F_\sigma - \varphi_\alpha \|_{L_2(\Pi_a)} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(1 + \sigma^{n/2}) + \sigma^{n/2} \left(1 - \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}}\right) \| D^\alpha F \|_{L_2(\Pi_a)} +$$
$$+ \| \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x/\sigma) \|_{L_2(\Pi_a)}.$$

La función $\varphi_\alpha(x)\in C(\overline{\Pi}_a)$ y, por lo tanto, $\|\varphi_\alpha(x)-$ $-\varphi_\alpha(x/\sigma)\|_{L_2(\Pi_a)}\to 0$ cuando $\sigma\to 1$. Por eso, existe tal $\sigma=\sigma_0>1$ que para todo α, $0\leqslant|\alpha|\leqslant k$, $\|D^\alpha f(x)-D^\alpha F_{\sigma_0}(x)\|_{L_2(\Pi_a)}$. Por consiguiente,

$$\|f-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant C\varepsilon.$$

Tomemos ahora la función media $(F_{\sigma_0})_h(x)$ para la función $F_{\sigma_0}(x)\in H^k(\Pi_{a\sigma_0})$. De la propiedad 3 se desprende que $\|F_{\sigma_0})_h-$ $-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\to 0$ cuando $h\to 0$. Por consiguiente, se puede hallar un $h=h_0$ tal que $\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant\varepsilon$. La función $(F_{\sigma_0})_{h_0}(x)\in$ $\in C^\infty(\overline{\Pi}_a)$ y

$$\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-f\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant\|(F_{\sigma_0})_{h_0}-F_{\sigma_0}\|_{H^k(\Pi_a)}+$$
$$+\|F_{\sigma_0}-f\|_{H^k(\Pi_a)}\leqslant(C+1)\varepsilon.$$

La afirmación está demostrada.

2. Sobre la prolongación de funciones. Supongamos que la función $f(x)$ está definida en el dominio Q y que éste está contenido en el dominio Q'. Se denomina *prolongación* de la función $f(x)$ en Q' una función $F(x)$ definida en Q' y coincidente con $f(x)$ en Q. Observemos, ante todo, que para cualquier función $f(x)$ existe una prolongación. Por ejemplo, se puede hacer que $F(x)$ sea nula en $Q'\setminus Q$. Esta prolongación la ya hemos empleado en el caso cuando $f(x)\in$ $\in L_2(Q)$. Sin embargo, si $f(x)$ es una función suave en Q, por ejemplo, $f\in H^k(Q)$ (o $f\in C^k(\overline{Q})$) para cierto $k\geqslant 1$, resulta natural buscar su prolongación $F(x)$ en las clases de funciones igualmente suaves en Q': de $H^k(Q')$ (o de $C^k(\overline{Q}'))$. Mostremos que en ciertas condiciones impuestas al contorno del dominio Q, tales prolongaciones existen.

Supongamos, al principio, que el dominio Q' es un cubo K_a de arista $2a>0$, $K_a=\{|y_i|<a,\ i=1,\ldots,n\}$ (designaremos aquí las variables independientes $y_1,\ldots,y_n$) y el dominio Q, es un paralelepípedo $K_a^+=K_a\cap\{y_n>0\}$. La prolongación $Z(y)$ de una función $z(y)\in C^k(\overline{K_a^+})$ la determinaremos en $K_a^-=K_a\cap$ $\cap\{y_n<0\}$ de la manera siguiente:

$$Z(y)=\sum_{i=1}^{k+1}A_iz(y',-y_n/i),\qquad (6)$$

donde $y'=(y_1,\ldots,y_{n-1})$, mientras que $A_1,\ldots,A_{k+1}$ es una solución del sistema algebraico lineal de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1/i)^sA_i=1,\ s=0,\ \ldots,\ k.\qquad (7)$$

Observemos que si $y \in K_a^-$, los puntos $(y', -y_n/i)$ de (6) se encuentran en K_a^+ para todos los $i = 1, \ldots, k+1$. El determinante del sistema 7 (determinante de Vandermonde) es distinto de cero, por lo que (7) admite la única solución $A_1, \ldots, A_{k+1}$.

Hagamos la función $Z(y)$ igual al $\lim\limits_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^+}} z(y)$, para cualquier $y^0 = (y^{0\prime}, 0) \in K_a \cap \{y_n = 0\}$. De este modo, la función $Z(y)$ estará definida en todo K_a. Ya que $z(y) \in C^k(\overline{K}_a^+)$, debido a (6), $Z(y) \in C^k(\overline{K}_a^-)$. Mostremos, primeramente, que $Z(y) \in C(\overline{K}_a)$.

Pasando en (6) al límite para $y \to y^0$, $y \in K_a^-$, en virtud de 7, obtenemos

$$\lim_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^-}} Z(y) = \sum_{i+1}^{k+1} A_i \lim_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^+}} z(y) = \sum_{i=1}^{k+1} A_i z(y^0) = Z(y^0).$$

Esto significa que $Z(y) \in C(\overline{K}_a)$.

De acuerdo con (6), siendo $y \in K_a^-$, para cualquier vector de números enteros $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant k$, tenemos

$$D^\alpha Z(y) = \sum_{i=1}^{k+1} A_i (-1/i)^{\alpha_n} D^\alpha z(y', -y_n/i). \tag{8}$$

Pasando al límite para $y \to y^0$, $y \in K_a^-$, en las igualdades (8) con cualquier α, para los que $|\alpha| = 1$, obtenemos

$$\lim_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^-}} D^\alpha Z(y) = \lim_{\substack{y \to y^0 \\ y \in K_a^+}} D^\alpha Z(y)$$

Entonces, en los puntos del plano $K_a \cap \{y_n = 0\}$ existen todas las primeras derivadas de la función $Z(y)$ y ellas coinciden con los valores límites correspondientes. Por lo tanto, $Z(y) \in C^1(\overline{K}_a)$. Repitiendo estos razonamientos, en virtud de (7) obtenemos que $Z(y) \in C^l(\overline{K}_a)$ para todo $l \leqslant k$.

De la igualdad (8) se deduce que, con cualquier α, $|\alpha| \leqslant k$, para todo $y \in K_a^-$

$$|D^\alpha Z(y)|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} A_i^2 \frac{1}{i^{2\alpha_n}} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} |D^\alpha z(y', -y_n/i)|^2 =$$

$$= C_0 \sum_{i=1}^{k+1} |D^\alpha z(y' -y_n/i)|^2.$$

Integrando esta desigualdad respecto a $y \in K_a^-$, obtenemos

$$\int\limits_{K_a^-} |D^\alpha Z|^2 dy \leqslant C_0 \sum_{i=1}^{k+1} \int\limits_{K_a^-} |D^\alpha z(y', -y_n/i)|^2 dy =$$

$$= C_0 \sum_{i=1}^{k+1} i \int\limits_{K_a^+ \cap \{y_n < a/i\}} |D^\alpha z(y)|^2 dy \leqslant C' \int\limits_{K_a^+} |D^\alpha z(y)|^2 dy.$$

Como $Z(y) = z(y)$ para $y \in K_a^+$, resulta

$$\int\limits_{K_a} |D^\alpha Z(y)|^2 dy = \int\limits_{K_a^+} |D^\alpha Z(y)|^2 dy +$$

$$+ \int\limits_{K_a^-} |D^\alpha Z(y)|^2 dy \leqslant C'' \int\limits_{K_a^+} |D^\alpha z(y)|^2 dy.$$

Sumando estas desigualdades respecto a todo α, $|\alpha| \leqslant k$, obtendremos la desigualdad

$$\|Z\|_{H^k(K_a)} \leqslant C_1 \|z\|_{H^k(K_a^+)} \tag{9}$$

en la que la constante $C_1 > 0$ no depende de la función $z(y)$.

Así pues, hemos construido la prolongación $Z(y) \in C^k(\overline{K}_a)$ de la función $z(y)$ de $C^k(\overline{K}_a^+)$ y para ella tiene lugar la desigualdad (9).

Supongamos ahora que la función $z(y) \in H^k(K_a^+)$. Según la propiedad 6 del punto precedente, existe una sucesión $z_s(y)$, $s = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^k(\overline{K}_a^+)$, convergente hacia $z(y)$ en la norma de $H^k(K_a^+)$: $\|z_s - z\|_{H^k(K_a^+)} \to 0$ cuando $s \to \infty$. Designemos por $Z_s(y)$ la prolongación de la función $z_s(y)$ en K_a, obtenida por el método que acabamos de exponer, $Z_s(y) \in C^k(\overline{K}_a)$. En vista de (9) tenemos la desigualdad $\|Z_s - Z_p\|_{H^k(K_a)} \leqslant C_1 \|z_s - z_p\|_{H^k(K_a^+)}$, la cual nos muestra que la sucesión de funciones Z_s, $s = 1, 2, \ldots$, es fundamental en la norma de $H^k(K_a)$. Esto es indicio de que existe una función $Z(y) \in H^k(K_a)$ hacia la cual la sucesión converge en la norma de $H^k(K_a)$. Ya que $Z(y) = z(y)$ para $y \in K_a^+$, la función $Z(y)$ será prolongación de la función $z(y)$ en K_a. La función $Z(y)$, obviamente, satisface la desigualdad (9).

Así pues, está demostrado el siguiente lema.

LEMMA 1. *Para cualquier función $z(y) \in H^k(K_a^+)$ ($C^k(\overline{K}_a^+)$) existe una prolongación $Z(y) \in H^k(K_a)$ ($C^k(\overline{K}_a)$) y se realiza la desigualdad* (9).

Observemos que como para las funciones $Z_s(y)$, $s = 1, 2, \ldots$, tiene lugar la igualdad (6) y, por otro lado, $z_s \to z$ en $H^k(K_a^+)$ y $Z_s \to Z$ en $H^k(K_a^-)$, la ecuación citada es válida también para las funciones $Z(y)$.

LEMA 2. *Supongamos que la función* $f(x) \in H^k(Q)$ (*o* $C^k(\overline{Q})$) *y para cualquier punto* $\xi \in \partial Q$ *existe una función* $F_\xi(x)$, *definida en una bola* $S_r(\xi) = \{|x - \xi| < r\}$ *de cierto radio* $r = r(\xi) > 0$, *tal que* $F_\xi(x) = f(x)$ *para* $x \in Q \cap S_r(\xi)$ *y* $F_\xi(x) \in H^k(S_r(\xi))$ ($C^k(S_r(\xi))$) (*la función* $F_\xi(x)$ *la llamaremos prolongación de la función* $f(x)$ *en la bola* $S_r(\xi)$). *Supongamos, además, que tiene lugar la desigualdad*

$$\|F_\xi\|_{H^k(S_r(\xi))} \leqslant C_2 \|f\|_{H^k(Q)} \tag{10}$$

con una constante C_2 *que no depende de la función* $f(x)$.

Entonces, para todo $\rho > 0$ *existe la prolongación* $F(x)$ *de la función* $f(x)$ *en el dominio* Q^ρ*) *que posee las propiedades:* $F(x) \in H^k(Q^\rho)$ ($C^k(\overline{Q}^\rho)$), $F(x) = 0$ *fuera de* $Q^{\rho/2}$; *existe una constante* $C_3 > 0$, *dependiente sólo del dominio* Q *y el número* ρ, *tal que*

$$\|F\|_{H^k(Q^\rho)} \leqslant C_3 \|f\|_{H^k(Q)}. \tag{11}$$

Según la condición del lema, para todo punto $\xi \in \overline{Q}$ existe una bola $S_r(\xi)$, $r = r(\xi)$, en la que está definida: o bien la propia función $f(x) \in H^k(S_r(\xi))$ ($C^k(\overline{S}_r(\xi))$) cuando $\xi \in Q$, o bien su prolongación de la misma clase. Suponemos que $r(\xi) < \rho$. La totalidad de las bolas $S_{r/3}(\xi)$ para todos los posibles $\xi \in \overline{Q}$ cubre el conjunto $\overline{Q}$. Por consiguiente (recordemos que el dominio Q es acotado) de este cubrimiento se puede extraer un subcubrimiento finito $S_{r_1/3}(x^1), \ldots, S_{r_N/3}(x^N)$, donde $r_i = r(x^i)$.

Sea una función $\theta_i(x) \in C^\infty(R_n)$, $\theta_i(x) = 1$ en $S_{r_i/3}(x^i)$ y $\theta_i(x) = 0$ fuera de la bola $S_{r_i/2}(x^i)$, $i = 1, \ldots, N$. Designemos mediante $\sigma_i(x)$ una función $1 - \theta_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, y construyamos las funciones

$$\gamma_1(x) = \theta_1(x),\ \gamma_2(x) = \sigma_1(x)\,\theta_2(x), \ldots,$$
$$\gamma_i(x) = \sigma_1(x) \ldots \sigma_{i-1}(x)\,\theta_i(x),\ i \leqslant N.$$

Es obvio que $\gamma_i(x) \in C^\infty(R_n)$,

$$\gamma_i(x) = 0 \quad \text{en} \quad \bigcup_{j<i} S_{r_j/3}(x^j) \tag{12}$$

y

$$\gamma_i(x) = 0 \ \text{fuera de} \ S_{r_i/2}(x^i). \tag{13}$$

Además,

$$\gamma_1(x) + \ldots + \gamma_i(x) = (1 - \sigma_1(x)) + \sigma_1(x)(1 - \sigma_2(x)) + \ldots$$
$$\ldots + \sigma_1(x) \ldots \sigma_{i-1}(x)(1 - \sigma_i(x)) = 1 - \sigma_1(x) \ldots \sigma_i(x),$$

*) Q^ρ es una acumulación de bolas $\{|x - x^0| < \rho\}$ respecto a todo $x^0 \in Q$.

por eso,

$$\gamma_1(x) + \ldots + \gamma_l(x) = 1 \tag{14}$$

para $x \in \bigcup_{i \leq l} S_{r_i/3}(x^i)$, y, en particular, para $x \in S_{r_l/3}(x^l)$.

Definamos las funciones $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, para todo $x \in R_n$ de la manera siguiente: en $S_{r_i}(x^i)$ la función $f_i(x)$ coincide o bien con $f(x)$, o bien con su prolongación $F_{x^i}(x)$ en $S_{r_i}(x^i)$; fuera de $S_{r_i}(x^i)$ la función $f_i(x)$ es igual a $f(x)$, si $x \in Q$, y es nula cuando $x \notin Q$.

En virtud de (13) y las propiedades 2 y 4 del punto anterior, la función $\gamma_i(x) f_i(x) \in H^k(Q^\rho)$ $(C^k(\overline{Q}^\rho))$. Por lo tanto, la función

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \gamma_i(x) \tag{15}$$

pertenece a $H^k(Q^\rho)$ $(C^k(\overline{Q}^\rho))$.

Sea x un punto arbitrario de Q y $S_{r_l/3}(x^l)$, la primera bola del cubrimiento finito elegido conteniente el punto x. Puesto que $f_i(x) = f(x)$ para todo $i = 1, \ldots, N$, y de (12) $\gamma_i(x) f(x) = 0$ cuando $i > l$, entonces, debido a (14), $F(x) = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i(x) f(x) = f(x)$. Esto significa que la función $F(x)$ de (15) es la prolongación de la función $f(x)$. La igualdad $F(x) \equiv 0$ fuera de $Q^{\rho/2}$ se deduce de (13) y (15), dado que $r_i < \rho$, $i = 1, \ldots, N$. La desigualdad (11) se desprende directamente de (10) y (15). El lema está demostrado.

TEOREMA 1 (sobre la prolongación). *Sean Q y Q' dominios acotados, $Q \Subset Q'$, y sea que $\partial Q \in C^k$. Entonces, para toda función $f(x) \in H^k(Q)$ $(C^k(\overline{Q}))$ existe una prolongación $F(x) \in H^k(Q')$ $(\dot{C}^k(\overline{Q}'))$ que es terminal en Q'. En este caso*

$$\| F \|_{H^k(Q')} \leq C \| f \|_{H^k(Q)}, \tag{16}$$

donde la constante $C > 0$ sólo depende de Q y Q'.

Tomemos un punto arbitrario $\xi \in \partial Q$. En cierto entorno U_ξ de este punto la ecuación de ∂Q puede ser representada (enumerando las variables, si fuera necesario) en la forma $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ con una función $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C^k(\overline{D})$, donde el dominio $(n-1)$-dimensional D es una proyección de $\partial Q \cap U_\xi$ en el plano $x_n = 0$. Consideramos que $x_n > \varphi$ en el dominio $Q \cap U_\xi$. El cambio de variables

$$y_i = x_i - \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad y_n = x_n - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{17}$$

representa biunívocamente U_ξ sobre un entorno Ω del origen de coordenadas para las variables $y_1, \ldots, y_n$. Sea K_a un cubo $\{|y_i| < a, i = 1, \ldots, n\}$, perteneciente al dominio Ω, y sea U_ξ^* la imagen del cubo en la transformación (17). La imagen del dominio $Q \cap U_\xi^*$ será, en este caso, un paralelepípedo $K_a^+ = K_a \cap \{y_n > 0\}$ y la función $f(x)$, definida en $Q \cap U_\xi^*$, se transformará en la función $z(y) = f(y_1 + \xi_1, \ldots, y_{n-1} + \xi_{n-1}, y_n + \varphi(y_1 + \xi_1, \ldots, y_{n-1} + \xi_{n-1})$, perteneciente, en virtud de la propiedad 5 del punto anterior, a $H^k(K_a^+)$ $(C^k(K_a^+))$.

De acuerdo con el lema 1, existe una prolongación $Z(y)$ de la función $z(y)$ en el cubo K_a. Esta prolongación engendra, en virtud de una transformación inversa a (17)

$$x_i = y_i + \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad x_n = y_n + \varphi(y_1 + \xi_1, \ldots, y_{n-1} + \xi_{n-1})$$

la prolongación $F^\xi(x)$ de la función $f(x)$, perteneciente a $Q \cap U_\xi^*$, en U_ξ^*, y, con mayor razón, en la bola $S_r(\xi)$ (que está contenida en U_ξ^*) de radio $r = r(\xi) > 0$ y centro en el punto ξ. En vista de la propiedad 5, punto 1, tienen lugar las desigualdades

$$\|F_\xi\|_{H^k(S_r(\xi))} \leqslant \|F_\xi\|_{H^k(U_\xi^*)} \leqslant C_3 \|Z\|_{H^k(K_a)},$$

$$\|z\|_{H^k(K_a^+)} \leqslant C_4 \|f\|_{H^k(U_\xi^* \cap Q)} \leqslant C_4 \|f\|_{H^k(Q)},$$

donde las constantes C_3 y C_4 dependen sólo de la función $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ de (17) y de sus derivadas hasta el k-ésimo orden inclusive. De estas desigualdades y de la (9) se desprende la desigualdad (10). La afirmación del teorema se deduce ahora del lema 2, si tomamos ρ menor que la distancia entre los contornos ∂Q y $\partial Q'$ de los dominios Q y Q'.

OBSERVACIÓN. Al demostrar el teorema 1, hemos construido la prolongación $F(x)$ en el dominio Q' de la función $f(x)$ perteneciente a $H^k(Q)$. Esta prolongación satisface no sólo (16), sino también las desigualdades

$$\|F\|_{H^s(Q')} \leqslant C \|f\|_{H^s(Q)},$$

cualesquiera que sean $s \leqslant k$.

Hasta ahora obteníamos prolongaciones de una función de un dominio en el otro dominio más amplio. En lo sucesivo necesitaremos una prolongación suave de funciones a partir del contorno.

Sea dada una función continua $f(x)$ en el contorno ∂Q del dominio Q. Llamaremos *prolongación* de la función $f(x)$ en Q la función $F(x)$ continua en $\overline{Q}$, si para $x \in \partial Q$ $F(x) = f(x)$. Es válida la siguiente afirmación.

TEOREMA 2. *Si para* $k \geqslant 1$ *el contorno* $\partial Q \in C^k$, *entonces para toda función* $f(x) \in C^k(\partial Q)$ *existe la función* $F(x)$ *de* $C^k(\overline{Q})$ *que es una* *prolongación de la función $f(x)$ en Q, teniendo lugar, en este caso, la desigualdad*

$$\| F \|_{C^k(\overline{Q})} \leqslant C \| f \|_{C^k(\partial Q)},$$

donde la constante $C > 0$ no depende de f.

Ya que $\partial Q \in C^k$, para todo punto $\xi \in \partial Q$ existe un número $\rho = \rho(\xi) > 0$ tal que un trozo del contorno $\partial Q \cap S_\rho(\xi)$ ($S_\rho(\xi)$ es una bola de radio ρ y centro en el punto ξ) se proyecta unívocamente en un dominio D_ξ de uno de los planos coordenados, sea del plano $x_n = 0$ (lo que siempre se puede lograr cambiando la numeración de las variables) y que la ecuación de la superficie $\partial Q \cap S_\rho(\xi)$ tenga la forma $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D_\xi$, donde $\varphi(x') \in C^k(\overline{D}_\xi)$.

Escojamos un número $r = r(\xi) > 0$ suficientemente pequeño de tal manera que una bola $(n-1)$-dimensional $\{|x' - \xi'| < r\} \Subset D_\xi$. Entonces, la función de n variables $F_\xi(x) = f(x', \varphi(x'))$ (que no depende de x_n) está definida en una bola cerrada $\overline{S_r(\xi)}$, pertenece a $C^k \overline{S_r(\xi)}$) y coincide con f en $\partial Q \cap S_r(\xi)$. Además, $\| F_\xi \|_{C^k(\overline{S_r(\xi)})} \leqslant C(\xi) \| f \|_{C^k(\partial Q)}$, donde la constante $C(\xi)$ no depende de f.

El conjunto de bolas $S_{r/3}(\xi)$ cubre el contorno ∂Q, cualquiera que sea $\xi \in \partial Q$. Escojamos de este conjunto un cubrimiento finito del contorno $S_{r_1/3}(x^1), \ldots, S_{r_N/3}(x^N)$, donde $r_i = r(x^i)$.

Definamos, para cualquier $i = 1, \ldots, N$, una función $f_i(x)$ del modo siguiente: hagámosla igual a $F_{x^i}(x)$ en la bola $S_{r_i}(x^i)$ y nula fuera de $S_{r_i}(x^i)$, si $x \notin \partial Q$, e igual a $f(x)$ cuando $x \in \partial Q$. Entonces, para todo $i = 1, \ldots, N$, las funciones $f_i(x)\gamma_i(x)$ (donde $\gamma_i(x)$ es una función construida al efectuar la demostración del lema 2) pertenecen a $C^k(R_n)$ y, por lo tanto, a $C^k(\overline{Q})$. Por consiguiente, la función

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(x) f_i(x)$$

también pertenece a $C^k(\overline{Q})$.

Tomemos al azar un punto $x \in \partial Q$ y supongamos que la primera bola del cubrimiento finito elegido del contorno que contiene este punto es la bola $S_{r_l/3}(x^l)$. Ya que $f_i(x) = f(x)$ para todo $i = 1, \ldots, N$, de las correlaciones (12) y (14) se deduce que $F(x) = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i(x) f(x) = f(x)$. Así pues, la función $F(x)$ es una prolongación de $C^k(\overline{Q})$ de la función $f(x)$. En cuanto a la acotación requerida, ésta es consecuencia de las correspondientes desigualdades para las funciones $F_{x^i}(x)$. El teorema queda demostrado.

3. Densidad de $C^\infty(\overline{Q})$ en $H^k(Q)$. Espacios $\mathring{H}^k(Q)$. Supongamos que el contorno ∂Q del dominio Q pertenece a la clase C^k.

TEOREMA 3. *Un conjunto de funciones $C^\infty(\overline{Q})$ (y, con mayor razón, $C^k(\overline{Q})$) es siempre denso en e espacio $H^k(Q)$.*

Tomemos un dominio Q' respecto al cual Q es un dominio estrictamente interior, $Q \Subset Q'$. Sea $f(x)$ una función arbitraria de $H^k(Q)$. En virtud del teorema 1 del anterior, existe una prolongación $F(x)$ de la función $f(x)$ de Q a Q', perteneciente a $H^k(Q')$. Según la propiedad 3 (del p. 1), tiene lugar una correlación

$$\| F_h - f \|_{H^k(Q)} = \| F_h - F \|_{H^k(Q)} \to 0 \text{ cuando } h \to 0,$$

donde $F_h(x)$ es una función media para $F(x)$. Como $F_h(x) \in C^\infty(\overline{Q})$, el teorema queda demostrado.

El conjunto $C^k(\overline{Q})$ es una variedad lineal en $H^k(Q)$. Del teorema 3 se deduce que si el contorno del dominio $\partial Q \in C^k$, la adherencia del conjunto $C^k(\overline{Q})$ en la norma del espacio $H^k(Q)$ coincide con $H^k(Q)$.

Sea S una superficie $(n-1)$-dimensional contenida en $\overline{Q}$. El subconjunto $\dot{C}^k_S(\overline{Q})$ de las funciones de $C^k(\overline{Q})$ que se reducen a cero en los lugares donde Q corta cierto entorno (cada función tiene su propio entorno) de la superficie S es también una variedad lineal en $H^k(Q)$. La adherencia de $\dot{C}^k_S(\overline{Q})$ en la norma del espacio $H^k(Q)$ es un subespacio de $H^k(Q)$. Designémoslo mediante $\mathring{H}^k_S(Q)$.

En el caso si $S = \partial Q$, el subespacio $\mathring{H}^k_{\partial Q}(Q)$ se designará por $\mathring{H}^k(Q)$ (la norma en $\mathring{H}^k(Q)$ es la norma del espacio $H^k(Q)$). Del teorema 6, p. 3, § 2, se deduce que para $k = 0$ el subespacio $\mathring{H}^k(Q) = \mathring{H}^0(Q)$ coincide con el espacio $H^0(Q) = L_2(Q)$. En el punto 1 del párrafo siguiente será demostrado que para $k \geqslant 1$ el subespacio $\mathring{H}^k(Q)$ no coincide con $H^k(Q)$.

Si Q' es un dominio que contiene otro dominio Q, $Q \subset Q'$, toda función $f(x)$ de $\dot{C}^k(\overline{Q})$, prolongada por cero en $Q' \setminus Q$, pertenece a $\dot{C}^k(\overline{Q'})$. Por ello, de la definición del espacio $\mathring{H}^k$ proviene que la función $f(x)$ de $\mathring{H}^k(Q)$, prolongada por cero en $Q' \setminus Q$, pertenece a $\mathring{H}^k(Q')$.

4. Separabilidad del espacio $H^k(Q)$. Vamos a considerar el contorno ∂Q del dominio Q perteneciente a la clase C^k.

TEOREMA 4. *El espacio $H^k(Q)$ es separable.*

Al principio examinemos un cubo $K = \{ |x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n\}$. Un sistema numerable de funciones $(2\pi)^{-n/2} e^{i(m, x)}$, donde $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, n$, $(m, x) =$

$= m_1 x_1) + \ldots + m_n x_n$, es ortonormal en $L_2(K)$. A toda función $f(x) \in L_2(K)$ se le puede asignar una serie de Fourier

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_m f_m e^{i(m,x)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s \leqslant |m| < s+1} f_m e^{i(m,x)}, \tag{18}$$

donde $f_m = \frac{(f(x),\, e^{i(m,x)})_{L_2(K)}}{(2\pi)^{n/2}}$ son coeficientes de Fourier de la función $f(x)$, y $|m|^2 = m_1^2 + \ldots + m_n^2$.

Sea la función $f(x) \in \dot{C}^\infty(\overline{K})$. Indiquemos, ante todo, que para cualquier m tiene lugar la desigualdad

$$|f_m| \leqslant (2\pi)^{n/2} \|f\|_{C(\overline{K})} = C_0. \tag{19}$$

Hagamos $m' = (m_1, \ldots, m_{n-1})$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $K' = \{|x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n-1\} \subset R_{n-1}$. Cuando $m_n \neq 0$, tenemos

$$f_m = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_K f(x) e^{i(m,x)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{K'} e^{i(m',x')} dx' \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x', x_n) e^{ix_n m_n}\, dx_n \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(-\frac{1}{im_n} \right)^p \int_K \frac{\partial^p f(x)}{\partial x_n^p} e^{i(m,x)}\, dx,$$

para p natural, de donde $|f_m| \leqslant \frac{(2\pi)^{n/2} \|f\|_{C^p(\overline{K})}}{|m_n|^p}$, y, por consiguiente, en vista de (19)

$$|f_m| \leqslant \frac{\|f\|_{C^p(\overline{K})} 2^p (2\pi)^{n/2}}{(1+|m_n|)^p} = \frac{C_p'}{(1+|m_n|)^p},$$

cualquiera que sea p natural.

A la par con esta desigualdad tienen lugar, por supuesto, las desigualdades

$$|f_m| \leqslant \frac{C_p'}{(1+|m_i|)^p}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

y, por lo tanto, las desigualdades

$$|f_m| \leqslant C_p' \min_i \left\{ \frac{1}{(1+|m_i|)^p} \right\} = \frac{C_p'}{(1+\max_i |m_i|)^p}. \tag{20}$$

Como $\max |m_i| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} |m|$, de (20) se desprenden las siguientes desigualdades, válidas para todo m y cualquier p natural

$$|f_m| \leqslant \frac{C_p'}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}|m|\right)^p} \leqslant \frac{C_p}{(1+|m|)^p} \tag{21}$$

Tomemos $p=n+2$. El número de sumandos en la suma $\sum\limits_{s\leqslant|m|<s+1} f_m e^{i(m,\,x)}$, igual al número de puntos m de coordenadas enteras en la capa esférica $s\leqslant|m|<s+1$ no supera el número de tales puntos en un cubo de arista $2(s+1)$, es decir, no es superior a $(2(s+1))^n$. Por eso,

$$\left|\sum_{s\leqslant|m|\leqslant s+1} f_m e^{i(m,\,x)}\right| \leqslant \sum_{s\leqslant|m|<s+1} |f_m| \leqslant \frac{C_{n+2}2^n(1+s)^n}{(1+s)^{n+2}} = \frac{C_{n+2}2^n}{(1+s)^2}.$$

Esto significa que la serie (18) en $\overline{K}$ es uniformemente convergente.
Haciendo $p=n+3$, para cualquier r, $1\leqslant r\leqslant n$, obtenemos

$$\left|\sum_{s\leqslant|m|<s+1} im_r f_m e^{i(m,\,x)}\right| \leqslant \frac{C_{n+3}2^n(1+s)^{n+1}}{(1+s)^{n+3}} = \frac{C_{n+3}2^n}{(1+s)^2}.$$

Por lo tanto, una serie obtenida de la serie (18), al derivarla, término a término, respecto a x_r, $r=1, \ldots, n$, converge en $\overline{K}$ uniformemente. De igual manera se demuestra que las series obtenidas de la (18), al derivarla l veces, $l=2, 3, \ldots$, término a término, son en $\overline{K}$ uniformemente convergentes.
Designemos por $g(x)$ una suma de la serie (18)

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_m f_m e^{i(m,\,x)}.$$

Se ha demostrado más arriba que $g(x) \in C^\infty(\overline{K})$. Por lo tanto, $\varphi(x) = g(x) - f(x) \in C^\infty(\overline{K})$. Mostremos que en $\overline{K}$ $\varphi(x) \equiv 0$.
Como $\left(g(x), \frac{e^{i(m,\,x)}}{(2\pi)^{n/2}}\right)_{L_2(K)} = f_m$, para todo m

$$\int_K \varphi(x)\, e^{i(m,\,x)}\, dx = 0.$$

Fijemos arbitrariamente $m'=(m_1, \ldots, m_{n-1})$ y escribamos esta igualdad en la forma

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{im_nx_n}\left[\int_{K'} \varphi(x', x_n)\, e^{i(m',\,x')}\, dx'\right] dx_n = 0.$$

Como la función $\varphi_{m'}(x_n) = \int\limits_{K'} \varphi(x', x_n) e^{i(m', x')} dx'$, indefinidamente diferenciable respecto a x_n, $|x_n| \leqslant \pi$ es en el producto escalar de $L_2(-\pi, \pi)$ ortogonal a las funciones $e^{im_nx_n}$ para cualesquiera $m_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces, cualquiera que sea m', tenemos $\varphi_{m'}(x_n) = 0$ para todo x_n, $|x_n| \leqslant \pi$. Introduzcamos las designaciones: $m'' = (m_1, \ldots, m_{n-2})$, $x'' = (x_1, \ldots, x_{n-2})$, $K'' = K' \cap \{x_{n-1} = 0\}$. Para todo m'' fijado, cualquier x_n, $|x_n| \leqslant \pi$, y todo $m_{n-1} = 0, \pm 1, \ldots$, tenemos

$$0 = \int\limits_{K'} \varphi(x', x_n) e^{i(m', x')} dx' =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ix_{n-1}m_{n-1}} dx_{n-1} \int\limits_{K''} \varphi(x'', x_{n-1}, x_n) e^{i(x'', m'')} dx''.$$

Por consiguiente,

$$\int\limits_{K''} \varphi(x'', x_{n-1}, x_n) e^{i(m'', x'')} dx'' = 0$$

para cualesquiera x_{n-1}, x_n, $|x_{n-1}| \leqslant \pi$, $|x_n| \leqslant \pi$, y todo m''. Continuando este proceso, obtendremos la igualdad $\varphi(x) = 0$ en $\overline{K}$.

Hemos demostrado de este modo que toda función $f(x) \in \dot{C}^\infty(\overline{K})$ se desarrolla en la serie (18) que junto con las derivadas de cualquier orden es uniformemente convergente en $\overline{K}$. Es evidente, que esta afirmación es también válida para cualquier cubo $K_a = \{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n\}$.

Pasemos ahora a la demostración del teorema. Tomemos un número $a > 0$ tan grande que el dominio $Q \Subset K_a$. De acuerdo con el teorema 1, p. 2, toda función $f(x) \in H^k(Q)$ puede ser prolongada mediante una función $F(x) \in H^k(K_a)$, terminal en K_a. De la propiedad 3, p. 1, se deduce que toda función $F(x)$ de esta índole puede ser aproximada en la norma de $H^k(K_a)$, valiéndose de las funciones medias $F_h(x)$ que son indefinidamente diferenciables y, para h suficientemente pequeños, terminales en K_a.

Según lo demostrado, toda función $F_h(x)$ (siendo h suficientemente pequeños) puede ser en $\overline{K}_a$ aproximada uniformemente, junto con todas las derivadas (y, por lo tanto, también en la norma de $H^k(K_a)$) por medio de las sumas parciales de la serie de Fourier de dicha función. Por consiguiente, cualquier función $F_h(x)$ puede ser aproximada en la norma de $H^k(Q)$ mediante combinaciones lineales del sistema $e^{i\frac{\pi}{a}(m, x)}$ con coeficientes cuyas partes reales e imaginarias sean números racionales. Así pues, está construido un conjunto siempre denso en $H^k(Q)$.

§ 5. Propiedades de las funciones de $H^1(Q)$ y $\dot{H}^1(Q)$

1. Traza de las funciones. Sea Q un dominio en R_n y S, una superficie suave $(n-1)$-dimensional perteneciente a $\overline{Q}$. Cuando en Q está dada una función $f(x)$ definida en cada punto (es decir, si la igualdad de las funciones se entiende como la igualdad de sus valores en cada punto), podemos considerar el valor de esta función en S como una función $f|_{x\in S}$, definida en cada punto de S, cuyos valores coinciden con los de $f(x)$ para todo $x \in S$. Si examinamos en Q una función dada en c.t.p. (es decir, las funciones son iguales, si coinciden en c.t.p.), el valor de f en la superficie fijada S se determina de manera no unívoca: ya que mes $S = 0$, la función puede tener en S un valor arbitrario. No obstante, en determinado sentido, se puede hablar de los valores que una función, definida en c.t.p., toma en las superficies $(n-1)$-dimensionales.

Supongamos, para simplificar, que la superficie $S = S(x_n)$ es la intersección del dominio Q con el plano $x_n = \text{const}$. Entonces, en virtud del teorema de Fubini*), para casi todo x_n existe un valor $f|_{x\in S(x_n)}$ de la función f en $S(x_n)$, definido casi siempre en S (la igualdad de las funciones de la $(n-1)$-ésima variable se entiende, por supuesto, como la igualdad de sus valores en c.t.p. en el sentido de la medida $(n-1)$-dimensional). Es obvio, además, que el valor que toma en $S(x_n)$ una función continua en $\overline{Q}$, para casi todo x_n, es una función continua en $S(x_n)$, y el valor que toma en $S(x_n)$ una función de $L_2(Q)$ para casi todo x_n pertenece a $L_2(S(x_n))$.

Al estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales se plantean con frecuencia condiciones a las cuales la solución debe satisfacer en cierta superficie fijada $(n-1)$-dimensional, por ejemplo, en ∂Q (las así llamadas condiciones límites). Es por eso, necesitaremos generalizar la noción del valor que toma una función definida en c.t.p. de la superficie $(n-1)$-dimensional S, esto es, la noción de la traza de una función en S. Esta noción se puede introducir unívocamente para una función que está definida en casi todo punto y satisface ciertas condiciones de suavidad. En particular, esta noción se introduce con facilidad para una función continua en $\overline{Q}$.

Llamaremos *traza $f|_S$ de la función f de $C(\overline{Q})$ en una superficie $(n-1)$-dimensional S* al valor que toma en esta superficie una función continua en $\overline{Q}$ la cual casi siempre coincide con f (es decir, por traza de una función continua en S entendemos su valor extendido unívocamente según la continuidad en S). En este caso, la igualdad de las funciones dadas en S se entiende, como de costumbre, como la igualdad en casi todo punto en el sentido de la medida $(n-1)$-dimensional.

*) Para precisar, en virtud del lema 4, p. 11, § 1, cap. II.

El concepto de la traza de una función en S se puede introducir también para las funciones pertenecientes a algunos espacios provistos de normas integrales, en particular, para las funciones de los espacios $H^k(Q)$, cuando $k \geqslant 1$. Puesto que todos los $H^k(Q)$, para $k \geqslant 1$, están incluidos en $H^1(Q)$, será suficiente introducir este concepto para las funciones de $H^1(Q)$.

Sea S una superficie de la clase C^1 (véase cap. I, Introducción) ubicada en $\overline{Q}$, y sea S_1 un trozo simple de S que se proyecta unívocamente en cierto dominio D del plano $\{x_n = 0\}$ y descrito por la ecuación

$$x_n = \varphi(x'), \text{ donde } x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad \varphi(x') \in C^1(\overline{D}).$$

El dominio Q es acotado, por lo que puede considerarse dispuesto en un cubo $\{0 < x_i < a, \ i = 1, \ldots, n\}$ para cierto $a > 0$. Supongamos al principio, que la función $f(x)$ pertenece a $\dot{C}^1(\overline{Q})$ y hagámosla igual a cero fuera de $\overline{Q}$. De acuerdo con la fórmula de Newton—Leibniz

$$f(x)|_{S_1} = f(x', \varphi(x')) = \int_0^{\varphi(x')} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n.$$

Por ello, según la desigualdad de Buniakovski

$$|f|_{S_1}|^2 \leqslant \varphi(x') \int_0^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n \leqslant a \int_0^a \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n.$$

Multiplicando esta desigualdad por $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ y integrando en D, obtenemos la desigualdad

$$\|f\|_{L_2(S_1)}^2 = \int_{S_1} |f|_{S_1}|^2 \, dS_1 \leqslant C^2 \|f\|_{H^1(Q)}^2, \tag{1}$$

con la constante $C > 0$ que no depende de la función f.

Ya que la superficie S puede ser cubierta por un número finito de trozos simples, o sea, trozos del tipo S_1 (que se proyectan, quizás, en otros planos coordenados), sumando las desigualdades correspondientes (1), obtendremos la desigualdad

$$\|f\|_{L_2(S)} \leqslant C \|f\|_{H^1(Q)}, \tag{2}$$

donde la constante $C > 0$ no depende de la función f.

La desigualdad (2) tiene lugar también para toda función $f(x) \in C^1(\overline{Q})$. Para demostrar esta afirmación, es suficiente hacer uso del teorema 1, p. 2, § 4, sobre la prolongación (suponiendo, naturalmente, que $\partial Q \in C^1$) y la desigualdad (2) para una función terminal de C^1.

Sea $f \in H^1(Q)$. Del teorema 3, p. 3, § 4, se deduce que existe una sucesión de funciones $f_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, de $C^1(\overline{Q})$ que converge en la norma de $H^1(Q)$ hacia f. Para las funciones $f_p - f_q$ la desigualdad (2) tiene la forma

$$\| f_p - f_q \|_{L_2(S)} \leqslant C \| f_p - f_q \|_{H^1(Q)}. \tag{3}$$

Como $\| f_p - f_q \|_{H^1(Q)} \to 0$ cuando $p, q \to \infty$, también $\| f_p - f_q \|_{L_2(S)} \to 0$ cuando $p, q \to \infty$. Esto significa que la sucesión de las trazas $f_p|_S$ de las funciones f_p en S es fundamental en $L_2(S)$. En vista de que $L_2(S)$ es completo, existe una función $f_S(x) \in L_2(S)$ tal que hacia ella converge la sucesión de las trazas $f_p|_S$ cuando $p \to \infty$. Pasando en (3) al límite para $p \to \infty$, obtenemos

$$\| f_q - f_S \|_{L_2(S)} \leqslant C \| f_q - f \|_{H^1(Q)}. \tag{4}$$

Mostremos que la función $f_S(x)$ no depende de cómo se elige la sucesión $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, que en la norma de $H^1(Q)$ aproxima la función $f(x)$. En efecto, sea $\tilde{f}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, otra sucesión de funciones en $C^1(\overline{Q})$ para la cual $\| f - \tilde{f}_k \|_{H_1, Q} \to 0$ cuando $k \to \infty$, y sea $\tilde{f}_S(x)$ el límite en la norma de $L_2(S)$ para la sucesión $\tilde{f}_k|_S$, $k = 1, 2, \ldots, \ldots$ Entonces, en virtud de las desigualdades (3) y (4)

$$\| f_S - \tilde{f}_S \|_{L_2(S)} \leqslant \| f_S - f_q \|_{L_2(S)} + \| f_q - \tilde{f}_q \|_{L_2(S)} + \| \tilde{f}_q - \tilde{f}_S \|_{L_2(S)} \leqslant$$
$$\leqslant C \left(\| f - f_q \|_{H^1(Q)} + \| f_q - \tilde{f}_q \|_{H^1(Q)} + \| \tilde{f}_q - \tilde{f}_S \|_{H^1(Q)} \right).$$

Puesto que el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero cuando $q \to \infty$, resulta que $f_S = \tilde{f}_S$.

La función $f_S(x)$ (como elemento de $L_2(S)$) la llamaremos *traza de la función $f(x) \in H^1(Q)$ en la superficie S* y la designaremos por el símbolo $f|_S$ ($\| f|_S \|_{L_2(S)}$ la designaremos mediante $\| f \|_{L_2(S)}$).

De este modo, el concepto de traza de una función se ha determinado para cualquier elemento f de $H^1(Q)$.

Mostremos que este concepto es realmente una generalización del concepto del valor de una función en una superficie $(n-1)$-dimensional. Sea, para simplificar, $S = S(x_n)$ la intersección del dominio Q con el plano $x_n = \text{const}$ y sea que la función $f \in H^1(Q)$. Tomemos una sucesión $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ de funciones de $C^1(\overline{Q})$ que en la norma del espacio $H^1(Q)$ converge hacia f. Según la definición, el papel de traza $f|_{S(x_n)}$ para todo x_n lo desempeña en $L_2(S(x_n))$ la sucesión de funciones $f_m|_{S(x_n)}$. Puesto que la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, converge en $L_2(Q)$ hacia f, entonces, según la observación al teorema 1, p. 1, § 2, en esta sucesión se puede escoger una subsucesión f_{m_k}, $k = 1, \ldots$, que converge hacia f en c.t.p. de Q. Es decir, para casi todo x_n la sucesión $f_{m_k}|_{S(x_n)}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge hacia el valor de la función f en $S(x_n)$ casi siempre en el sentido de la medida $(n-1)$-dimensional. Por consiguiente, la traza y el valor de la función f en $S(x_n)$ coinciden para casi todo x_n.

Así pues, disponemos de los conceptos de traza en S de las funciones continuas en $\overline{Q}$ y de las funciones pertenecientes a $H^1(Q)$. Comprobemos que si la función f pertenece tanto a $C(\overline{Q})$ como a $H^1(Q)$, su traza, como la traza de una función de $C(\overline{Q})$ (designémosla por $f|'_S$) y su traza, como la traza de una función de $H^1(Q)$ (designémosla por $f|''_S$), coinciden. Efectivamente, en virtud del teorema 1, p. 2 del párrafo anterior, la función f puede ser prolongada en el dominio Q', $Q \Subset Q'$, de tal manera que la prolongación F pertenezca tanto a $C(\overline{Q}')$ como a $H^1(Q')$. Examinemos las funciones $F_h(x)$ que son medias para la función F. Ya que $F_h \to F$ para $h \to 0$, tanto en la norma del espacio $C(\overline{Q})$ (véase p. 1, § 1) como en la norma del espacio $H^1(Q)$ (véase p. 1, § 4, propiedad 3), entonces, cuando $h \to 0$, $F_h(x)|_S \to f|'_S$ en la norma del espacio $C(\overline{S})$ y $F_h(x)|_S \to f|''_S$ en la norma del espacio $L_2(S)$. Por consiguiente $f|'_S = f|''_S$.

La traza $f|_S$ de la función $f(x) \in \mathring{H}^1_S(Q)$ (véase la definición de este espacio en el p. 3, § 4) es nula, puesto que la función $f|_S$ es el límite en la norma de $L_2(S)$ para funciones nulas en S (es decir, para las trazas en S de las funciones pertenecientes a $\mathring{C}^1_S(\overline{Q})$). En particular, la traza $f|_{\partial Q}$ de la función $f(x) \in \mathring{H}^1(Q)$ es nula. De aquí, entre otras cosas, se desprende la afirmación del p. 3 del párrafo anterior sobre que $\mathring{H}^k(Q) \neq H^k(Q)$ cuando $k \geqslant 1$: una función igual a la unidad, perteneciente a cualquier $H^k(Q)$, $k \geqslant 1$, es continua en $\overline{Q}$, por lo cual su traza en ∂Q es igual a 1: por consiguiente, no existe ningún $k \geqslant 1$ para el cual esta función pertenezca a $\mathring{H}^k(Q)$.

La traza $f|_S$ de la función $f \in H^1(Q)$ satisface la desigualdad (2). Para demostrar esta afirmación, es suficiente en la desigualdad (2) escrita para las funciones $f_p(x)$ ($f_p(x) \in C^1(\overline{Q})$, $\|f_p - f\|_{H^1(Q)} \to 0$ cuando $p \to \infty$), pasar al límite para $p \to \infty$.

Hasta ahora suponíamos que el contorno $\partial Q \in C^1$. No obstante, si $S \Subset Q$, este requisito resulta superfluo cuando tratamos de hallar la traza de la función en S y demostrar la desigualdad (2). En efecto, en este caso existirá un dominio $Q' \Subset Q$ tal que $\partial Q' \in C^1$ y $S \in Q'$.

Así hemos demostrado el teorema.

TEOREMA 1. *Supongamos que una superficie $(n-1)$-dimensional S es de la clase C^1 o pertenece a Q', $Q' \Subset Q$, o bien, en lugar de esto, sea $S \subset \overline{Q}$ y, complementariamente, $\partial Q \in C^1$. Entonces, toda función*

$f(x) \in H^1(Q)$ tiene en esta superficie una traza $f|_S$, perteneciente a $L_2(S)$, y, además, tiene lugar la desigualdad (2).

Sea una función $f(x) \in H^k(Q)$, $k > 1$. Como toda derivada generalizada $D^\alpha f$, del orden $|\alpha| < k$, pertenece a $H^1(Q)$, entonces, de acuerdo con el teorema 1, en cualquier superficie $(n-1)$-dimensional S de la clase C^1 existe una traza de esta derivada $D^\alpha_\xi f|_S$ que pertenece a $L_2(S)$. Además, tienen lugar las desigualdades

$$\| D^\alpha f \|_{L_2(S)} \leqslant C \| f \|_{H^{|\alpha|+1}(Q)} \leqslant C \| f \|_{H^k(Q)} \tag{5}$$

donde la constante $C > 0$ no depende de la función f.

2. Fórmula de integración por partes. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen a $H^1(Q)$ y $\partial Q \in C^1$. En este caso para todo $i = 1, \ldots, n$ es válida la fórmula de integración por partes

$$\int_Q f_{x_i} g \, dx = \int_{\partial Q} f g n_i \, dS - \int_Q f g_{x_i} \, dx, \tag{6}$$

donde $n_i = \cos(n, x_i)$ es coseno del ángulo entre la normal n, exterior a la superficie ∂Q, y el eje x_i, mientras que las funciones f y g, que se encuentran bajo el signo integral en ∂Q, son las trazas de estas funciones en ∂Q. De este modo, desde el punto de vista de la aplicación de la fórmula (6), el comportamiento de las funciones de $H^1(Q)$ es igual que el de las funciones de $C^1(\overline{Q})$.

Para demostrar la igualdad (6), tomemos (teorema 3, p. 3, § 4) las sucesiones $f_p(x)$ y $g_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{Q})$ que en la norma de $H^1(Q)$ convergen hacia las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Para f_p y g_p la igualdad (6) es válida:

$$\int_Q f_{px_i} g_q \, dx = \int_{\partial Q} f_p g_q n_i \, dS - \int_Q f_p g_{qx_i} \, dx.$$

Pasando en esta desigualdad al límite para $p \to \infty$ y $q \to \infty$ (recordemos que $\| f_p - f \|_{L_2(\partial Q)} \to 0$, $\| g_q - g \|_{L_2(\partial Q)} \to 0$), obtendremos la igualdad (6).

De (6) se deduce directamente que si $g \in H^1(Q)$ y las componentes $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ del vector $f(x)$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ pertenecen a $H^1(Q)$, tiene lugar la igualdad

$$\int_Q g \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial Q} g (f \cdot n) \, dS - \int_Q f \cdot \nabla g \, dx, \tag{7}$$

3. Propiedades de las trazas de funciones de $H^1(Q)$. Criterio de pertenencia al subespacio $\mathring{H}^1(Q)$. Sea Γ_0 un trozo simple de una superficie de clase C^1 ubicada en $\overline{Q}$. Supongamos que el trozo Γ_0 es suficientemente pequeño (es decir, está contenido dentro de una bola de radio r_0 suficientemente pequeño) y que se proyecta unívocamente en cierto dominio D del plano coordenado $\{x_n = 0\}$, con la particularidad de que $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D$ es la ecuación de Γ_0, $\varphi(x') \in C^1(\overline{D})$.

Designemos por Γ_δ la superficie $\{x' \in D,\ x_n = \varphi(x') + \delta\}$ y mediante Ω_δ el dominio $\{x' \in D,\ \varphi(x') < x_n < \varphi(x') + \delta\}$ para $\delta < 0$, o bien el dominio $\{x' \in D,\ \varphi(x') + \delta < x_n < \varphi(x')\}$ para $\delta < 0$. Observemos que cuando $|\delta|$ es suficientemente pequeño (y siéndolo también r_0), al menos uno de los dominios, $\Omega_{+|\delta|}$ ó $\Omega_{-|\delta|}$, está contenido en Q.

Sea $x \in \Omega_\delta \subset Q$, entonces para cualquier función $f \in C^1(\overline{Q})$ tenemos

$$f(x',\ \varphi(x')+\delta) - f(x',\ \varphi(x')) = \int\limits_{\varphi(x')}^{\varphi(x')+\delta} \frac{\partial f(x',\ x_n)}{\partial x_n}\, dx_n,$$

de donde

$$|f(x',\ \varphi(x')+\delta) - f(x',\ \varphi(x'))|^2 \leqslant \left| \delta \int\limits_{\varphi(x')}^{\varphi(x')+\delta} \left| \frac{\partial f(x',\ x_n)}{\partial x_n} \right|^2 dx_n \right|.$$

Multiplicando esta desigualdad por $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\ldots+\varphi_{x_{n-1}}^2}$ e integrando en el dominio D, obtenemos

$$\| f(x^\delta) - f(x^0) \|_{L_2(\Gamma_\delta)} \leqslant C\sqrt{|\delta|}\, \| f \|_{H^1(\Omega_\delta)}, \tag{8}$$

donde $x^0 = (x',\ \varphi(x')) \in \Gamma_0$, $x^\delta = x^\delta(x^0) = (x',\ \varphi(x') + \delta) \in \Gamma_\delta$, y $C^2 = \max\limits_{x' \in \overline{D}} \sqrt{1+\varphi_{x_1}^2+\ldots+\varphi_{x_{n-1}}^2}$.

Es obvio que a la par con la desigualdad (8) tiene lugar también la desigualdad

$$\| f(x^\delta) - f(x^0) \|_{L_2(\Gamma_0)} \leqslant C_1\sqrt{|\delta|}\, \| f \|_{H^1(\Omega_\delta)}. \tag{9}$$

Aproximando la función $f \in H^1(Q)$ por las funciones de clase $C^1(\overline{Q})$, en virtud de la definición de traza de una función de $H^1(Q)$, llegamos a que las desigualdades (8) y (9) son válidas para todas las funciones de $H^1(Q)$.

Estas desigualdades expresan cierta continuidad de las trazas de las funciones del espacio $H^1(Q)$ en las superficies Γ_δ en dependencia del desplazamiento de estas últimas.

Si la traza de la función f en Γ_0 es igual a cero, $f|_{\Gamma_0} = 0$, de (9) se deduce que para cualesquiera ρ y δ, $0 < \delta \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, donde ρ_0 es tal que $\Omega_{\rho_0} \subset Q$ (para concretar, consideramos que $\rho_0 > 0$) tiene lugar la desigualdad

$$\| f \|_{L_2(\Gamma_\delta)}^2 \leqslant C^2\delta \| f \|_{H^1(\Omega_\delta)}^2 \leqslant C^2\rho \| f \|_{H^1(\Omega_\rho)}^2.$$

Integrando esta desigualdad respecto a $\delta \in (0, \rho)$, en vista de la continuidad absoluta de la integral, obtenemos

$$\|f\|_{L_2(\Omega_\rho)} = o(\rho) \quad \text{para} \quad \rho \to 0. \tag{10}$$

Hemos demostrado, pues, que si $f \in H^1(Q)$, $f|_{\Gamma_0} = 0$ y $\Omega\rho \subset Q$ (en particular, Γ_0 puede ser un trozo del contorno ∂Q), se verifica la correlación (10).

LEMA 1. Sea $f \in H^1(Q)$ y su traza en el contorno, $f|_{\partial Q} = 0$. En este caso

$$\|f\|_{L_2(Q \setminus Q_\delta)} = O(\delta) \quad \text{cuando} \quad \delta \to 0. \tag{11}$$

Puesto que el contorno $\partial Q \in C^1$, para todo punto $y \in \partial Q$ existe tal bola $S_{2r}(y)$, de radio $2r$, $r = r(y) > 0$ y con el centro en este punto, que el trozo del contorno $\partial Q \cap S_{2r}(y)$ se proyecta unívocamente en un dominio $(n-1)$-dimensional $D_{2r}(y)$ dispuesto en uno de los planos coordenados, digamos, en el plano $\{x_n = 0\}$. Con ello, la ecuación del trozo de $\partial Q \cap S_{2r}(y)$ tiene la forma $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D_{2r}(y)$, $\varphi(x') \in C^1(\overline{D}_{2r}(y))$. Designemos con $\Gamma_0 = \Gamma_0(y)$ la superficie $\partial Q \cap S_r(y)$ y con $\Gamma_\delta = \Gamma_\delta(y)$ y $\Omega_\delta = \Omega_\delta(y)$ una superficie «paralela» y el dominio que la corresponde que se han construido según Γ_0 por el método descrito más arriba. Elijamos $\delta_0 = \delta_0(y)$ de tan pequeño valor absoluto que el dominio $\Omega_{\delta_0} = \Omega_{\delta_0}(y) \subset Q \cap S_{2r}(y)$.

Como la distancia entre $\partial Q \setminus S_{2r}(y)$ y $\overline{\Omega}_{\delta_0}(y)$ es positiva, mientras que la distancia entre $\partial Q \cap \overline{S}_{2r}(y)$ y $\Gamma_\delta(y)$, donde $\delta \in (0, \delta_0)$ cuando $\delta_0 > 0$, y $\delta \in (\delta_0, 0)$ cuando $\delta_0 < 0$, es, evidentemente, mayor que $\gamma|\delta|$ con cierta constante $\gamma = \gamma(y)$, $0 < \gamma < 1$, entonces puede elegirse $\gamma_0 = \gamma_0(y)$, $0 < \gamma_0 < 1$ de tal manera que para cualesquiera δ tenga lugar la desigualdad

$$\inf_{\substack{x \in \partial Q \\ \xi \in \Gamma_\delta}} |x - \xi| > \gamma_0 |\delta|. \tag{12}$$

Del cubrimiento del contorno ∂Q con las bolas $S_r(y)$, $y \in \partial Q$, escojamos un cubrimiento finito $S_{r_1}(x^1), \ldots, S_{r_N}(x^N)$. Existe evidentemente, un número $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \min\limits_{1 \le m \le N} |\delta_0(x^m)|$, tal que

$$Q \setminus Q_{\delta_1} \subset \bigcup_{m=1}^{N} \Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m). \tag{13}$$

Además, en virtud de (12), para todo δ, $0 < \delta < \delta_1$, y $m = 1, \ldots, N$

$$(Q \setminus Q_{\gamma_1\delta}) \cap \Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m) \subset \Omega_{\delta \cdot \operatorname{sign} \delta_0(x^m)}(x^m) \tag{14}$$

donde $\gamma_1 = \min\limits_{1 \le m \le N} \gamma_0(x^m)$.

De (13) y (14) se deduce que para cualquier $f \in H^1(Q)$ tienen lugar, cuando $0 < \delta < \delta_1$, las desigualdades

$$\|f\|^2_{L_2(Q\setminus Q_{\gamma_1\delta})} \leqslant \sum_{m=1}^{N} \|f\|^2_{L_2((Q\setminus Q_{\gamma_1\delta}) \cap \Omega_{\delta_0(x^m)}(x^m))} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{N} \|f\|^2_{L_2(\Omega_{\delta \cdot \operatorname{sign}\delta_0(x^m)}(x^m))}.$$

Puesto que $f|_{\partial Q} = 0$, de la última desigualdad y de la correlación (10) se desprende (11). El lema está demostrado.

TEOREMA 2. *Para que una función del espacio $H^1(Q)$ pertenezca al subespacio $H^1(Q)$, es necesario y suficiente que su traza en el contorno del dominio sea igual a cero.*

Como la necesidad es obvia, nos limitaremos a la demostración de la suficiencia. Sea una función $f \in H^1(Q)$ y $f|_{\partial Q} = 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. En vista del lema 1 y el teorema 9, p. 10, § 1, cap. II, sobre la continuidad absoluta de la integral, existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tan pequeño que

$$\|f\|_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} < \varepsilon\delta, \quad \|f\|_{H^1(Q\setminus Q_\delta)} < \varepsilon.$$

Puesto que para la función $f \in H^1(Q)$ (teorema 3, p. 3 del párrafo anterior; recordemos que $\partial Q \in C^1$) existe una sucesión $f_p(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{Q})$ que en la norma de $H^1(Q)$ converge hacia f (y, con mayor razón, en la norma de $H^1(Q\setminus Q_\delta)$), se puede hallar un número $N = N(\delta) = N(\delta(\varepsilon))$ tal que

$$\begin{aligned} &\|f - f_N\|_{H^1(Q)} < \varepsilon, \\ &\|f_N\|_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} < 2\varepsilon\delta, \\ &\|f_N\|_{H^1(Q\setminus Q_\delta)} < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{15}$$

Tomemos la función

$$\zeta_\delta(x) = \int_{Q_{\delta/2}} \omega_{\delta/3}(|x-y|)\,dy,$$

donde $\omega(|x-y|)$ es un núcleo de mediación. De las propiedades del núcleo de mediación se deduce que $\zeta_\delta(x) \in C^\infty(R_n)$, $\zeta_\delta(x) = 1$ para $x \in Q_{5\delta/6}$ y, con mayor razón, para $x \in Q_\delta$, $\zeta_\delta(x) = 0$ fuera de $Q_{\delta/6}$, es decir, $\zeta_\delta(x) \in \dot{C}^\infty(\overline{Q})$. Además, para todo $x \in R_n$ $0 \leqslant \zeta_\delta(x) \leqslant 1$, $|\nabla\zeta_\delta| \leqslant C/\delta$ con la constante $C > 0$ no dependiente de δ.

En vista de (15) tenemos

$$\|f_N - f_N\zeta_\delta\|_{H^1(Q)} = \|f_N - f_N\zeta_\delta\|_{H^1(Q\setminus Q_\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant (\|f_N(1-\zeta_\delta)\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + \||\nabla f_N|(1-\zeta_\delta) + |f_N||\nabla\zeta_\delta|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)})^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (\|f_N\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + 2\||\nabla f_N|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)} + 2\|f_N|\nabla\zeta_\delta|\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)})^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(8\varepsilon^2 + \frac{2C^2}{\delta^2}\|f_N\|^2_{L_2(Q\setminus Q_\delta)}\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon(8+8C^2)^{1/2} = C_1\varepsilon.$$

Las funciones $f_{N(\delta(\varepsilon))}(x)\,\zeta_{\delta(\varepsilon)}(x)$ pertenecen a $\dot{C}^1(\overline{Q})$ y

$$\|f_{N(\delta(\varepsilon))}(x)\,\zeta_{\delta(\varepsilon)}(x) - f(x)\|_{H^1(Q)} \leqslant \|f - f_{N(\delta(\varepsilon))}\|_{H^1(Q)} +$$

$$+ \|f_{N(\delta(\varepsilon))} - f_{N(\delta(\varepsilon))}\zeta_{\delta(\varepsilon)}\|_{H^1(Q)} < (1+C_1)\,\varepsilon.$$

Por consiguiente, la función $f(x) \in \dot{H}^1(Q)$. El teorema queda demostrado.

4. Sobre la compacidad de conjuntos en $L_2(Q)$.

TEOREMA 3. *Un conjunto acotado en $H^1(Q)$ es compacto en $L_2(Q)$.*

Sea el conjunto $\mathcal{M}$ acotado en $H^1(Q)$, es decir, para todo $f \in \mathcal{M}$ se tiene:

$$\|f\|_{H^1(Q)} \leqslant C. \tag{16}$$

Supongamos al principio que $\mathcal{M} \subset \dot{H}^1(Q)$. Prolonguemos todas las funciones de $\mathcal{M}$ por cero fuera de Q. En el caso que se considera las prolongaciones obtenidas pertenecen a $\dot{H}^1(Q')$, cualquiera que sea el dominio $Q' \supset Q$.

Cuando $f_h(x)$ es una función media para la función $f(x) \in \mathcal{M}$, resulta válida la desigualdad (6) p. 3, § 2:

$$\|f_h - f\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{C_0}{h^n} \int_{|z|<h} dz \int_Q |f(x+z) - f(x)|^2\,dx. \tag{17}$$

Para la función $f(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$, también prolongada por cero fuera de (Q), se realiza la igualdad $f(x+z) - f(x) = \int_0^1 \frac{df(x+tz)}{dt}\,dt =$

$= \int_0^1 (\nabla f(x+tz)\cdot z)\,dt$, cualquiera que sea el vector z. Por lo tanto,

$$|f(x+z) - f(x)|^2 \leqslant |z|^2 \int_0^1 |\nabla f(x+tz)|^2\,dt$$

y, por lo tanto,

$$\int_Q |f(x+z) - f(x)|^2\,dx \leqslant |z|^2\,\|f\|^2_{H^1(Q)}. \tag{18}$$

La desigualdad (18) es también válida para cualquier función $f \in \mathscr{M}$ de lo que podemos convencernos pasando al límite.

De (17) y (18) se desprende que

$$\| f_h - f \|^2_{L_2(Q)} \leqslant C_0 \| f \|^2_{H^1(Q)} \frac{h^2}{h^n} \int\limits_{|z|<h} dz \leqslant C_1^2 h^2,$$

donde la constante C_1 no depende, en virtud de (16), ni de h ni de f.

Si, ahora, mostramos que para todo $h > 0$ fijado el conjunto $\mathscr{M}_h$, compuesto de funciones medias $f_h(x)$ de todas las funciones $f(x) \in \mathscr{M}$, es compacto en $C(\overline{Q})$ (y, con mayor razón, en $L_2(Q)$), la afirmación del teorema fluirá del corolario al teorema 2, p. 7, § 3, cap. II.

De acuerdo con la propiedad d) del núcleo de mediación (véase cap. I, Introducción)

$$| f_h(x) | \leqslant \frac{C_0}{h^n} \int\limits_{Q} | f(x) | \, dx \leqslant C_0' \| f \|_{L_2(Q)} \leqslant C_0' \| f \|_{H^1(Q)} \leqslant \text{const}$$

y

$$\left| \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \right| \leqslant \frac{C_1}{h^{n+1}} \int\limits_{Q} | f(x) | \, dx \leqslant \text{const}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

con una constante que no depende de f, en virtud de (16). La aplicación del teorema de Arzelá demuestra que el conjunto $\{f_h(x)\} = \mathscr{M}_h$*) es compacto en $C(\overline{Q})$.

Sea, ahora, $\mathscr{M} \subset H^1(Q)$. Designemos por $\mathscr{M}'$ un conjunto de funciones $F(x)$ de $\mathring{H}^1(Q')$ obtenidas como resultado de una prolongación, según el teorema 1, p. 2, § 4, de las funciones $f(x)$ de $\mathscr{M}$ a cierto dominio Q', $Q \Subset Q'$. Ya que $\| F \|_{H^1(Q')} \leqslant \text{const} \; \| f \|_{H^1(Q)}$ (con una constante que no depende de f), el conjunto $\mathscr{M}'$ es acotado

*) Sea un conjunto $\mathfrak{M}$ de funciones continuas en $\overline{Q}$ equiacotado y equicontinuo: $\| g \|_{C(\overline{Q})} \leqslant \text{const}$ para todo $g \in \mathfrak{M}$, y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que con cualesquiera x', x'' de $\overline{Q}$ tales que $| x' - x'' | < \delta$ será $| g(x') - g(x'') | < \varepsilon$ para todo $g \in \mathfrak{M}$ (en nuestro caso $\mathfrak{M} = \mathscr{M}_h$, y la equicontinuidad de $\mathscr{M}_h$ se desprende de la equiacotación de las derivadas). Mostremos que el conjunto $\mathfrak{M}$ es compacto en $C(\overline{Q})$.

Sea $\{g_k\}$ una sucesión infinita arbitraria de funciones de $\mathfrak{M}$. Para cada m natural tomemos en $\overline{Q}$ un conjunto finito de puntos $\{x_q^m\}$, $q = 1, \ldots, p(m)$, tal que para cualquier $x \in \overline{Q}$ exista un punto de este conjunto que diste de x a una distancia menor que $\delta(2^{-m})$. Extrayamos de la sucesión $\{g_k\}$ una subsucesión $\{g_{k_1}\}$ que sea convergente en cada punto del conjunto $\{x_q^1\}$; entonces, $\| g_{k_1} - g_{l_1} \|_{C(\overline{Q})} < 3 \cdot 2^{-1}$ cuando $k_1, l_1 \geqslant N_1$. Extrayamos de $\{g_{k_1}\}$ una subsucesión $\{g_{k_2}\}$ que sea convergente en cada punto del conjunto $\{x_q^2\}$, etc. De este modo, para cualquier m tenemos una sucesión $\{g_{k_m}\}$ que posee la propiedad: $\| g_{k_m} - g_{l_m} \|_{C(\overline{Q})} < 3 \cdot 2^{-m}$ cuando k_m, $l_m \geqslant N_m$. Es obvio que una sucesión diagonal $\{g_{m_m}\}$ es fundamental en $C(\overline{Q})$.

en $\mathring{H}^1(Q')$. El mismo es compacto en $L_2(Q')$, según lo demostrado. Esto quiere decir que el conjunto $\mathcal{M}$ es compacto en $L_2(Q)$. El teorema queda demostrado.

5. **De la compacidad del conjunto de trazas de las funciones de $H^1(Q)$.**

TEOREMA 4. *Si un conjunto de funciones es acotado en $H^1(Q)$, el conjunto de sus trazas en la superficie $(n-1)$-dimensional $\Gamma \subset \overline{Q}$ de la clase C^1 es compacto en $L_2(\Gamma)$.*

Sea $\mathcal{M}$ un conjunto acotado en $H^1(Q)$ y $\mathcal{M}_\Gamma$, un conjunto de trazas en Γ de las funciones de $\mathcal{M}$. Designemos por $\mathcal{M}'$ un conjunto, acotado en $H^1(Q')$, compuesto de las prolongaciones en $Q' \Supset Q$ de las funciones de $\mathcal{M}$ (teorema 1, p. 2, § 4, $\partial Q \in C^1$).

Sea Γ_0 un trozo de la superficie Γ que se proyecta unívocamente en el dominio D del plano $\{x_n = 0\}$ y sea $x_n = \varphi(x')$, $x' \in D$, la ecuación de Γ_0, $\varphi(x') \in C^1(\overline{D})$. Existe tal $\delta > 0$ que el dominio $\Omega_{2\delta} = \{x' \in D,\ \varphi(x') < x_n < \varphi(x') + 2\delta\}$ pertenece a Q'.

Para toda función $f(x) \in C^1(\overline{Q}')$ y para cualesquiera puntos $x = (x', x_n) \in \Gamma_0$ y $(x', y_n) \in \Omega_{2\delta}$, tenemos:

$$f(x', y_n) - f(x) = \int_{x_n}^{y_n} \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\, d\xi_n.$$

De esta ecuación se deduce que

$$|f(x)|^2 \leqslant 2\,|f(x', y_n)|^2 + 4\delta \int_{x_n}^{x_n+2\delta} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

Integremos la última desigualdad respecto a $y_n \in (\delta, 2\delta)$:

$$\delta\,|f(x)|^2 \leqslant 2 \int_{\delta}^{2\delta} |f(x', y_n)|^2\, dy_n + 4\delta^2 \int_{x_n}^{x_n+2\delta} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

y, después, la desigualdad obtenida la integramos por x en la superficie Γ_0 (es decir, la multiplicamos por $\sqrt{1+\varphi_{x_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ e integramos en D):

$$\delta \int_{\Gamma_0} |f|^2\, dS \leqslant \text{const}\left(2 \int_{Q'} |f|^2\, dx + 4\delta^2 \int_{Q'} |\nabla f|^2\, dx\right).$$

Puesto que podemos dividir la superficie Γ en un número finito de trozos y para cada uno de éstos es válida la desigualdad que acabamos de obtener, sumando estas desigualdades, tenemos

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant \frac{C_1'}{\delta}\, \|f\|^2_{L_2(Q')} + C_2'\delta\, \|f\|^2_{H^1(Q')},$$

donde las constantes C_1' y C_2' no dependen ni de f ni de δ. Del modo habitual, nos convencemos de que esta desigualdad es válida no sólo para toda función $f \in C^1(\overline{Q}')$ sino para cualquier función de $H^1(Q')$.

En virtud de la observación al teorema sobre la prolongación de una función (véase p. 2, § 4), de la última desigualdad tenemos otra desigualdad

$$\|f\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant \frac{C_1}{\delta}\|f\|^2_{L_2(Q)} + C^2\delta\|f\|^2_{H^1(Q)} \tag{19}$$

que es válida para toda $f \in H^1(Q)$.

De acuerdo con el teorema 3 (del párrafo anterior) el conjunto $\mathcal{M}$ es compacto en $L_2(Q)$. Por eso, de cualquier sucesión infinita de elementos del conjunto $\mathcal{M}$ se puede extraer una subsucesión f_p, $p=1, 2, \ldots$, fundamental en $L_2(Q)$: para todo $\varepsilon > 0$ existe tal N que para todo $p \geqslant N$ y $q \geqslant N$ $\|f_p - f_q\|_{L_2(Q)} < \varepsilon$. Pero en este caso la sucesión de trazas $f_p|_S$, $p = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $L_2(S)$, dado que para $p, q \geqslant N$ de la desigualdad (19), escrita para $f_p - f_q$, y de la desigualdad (16) tendremos

$$\|f_p - f_q\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \frac{C_1\varepsilon^2}{\delta} + C_2\delta\|f_p - f_q\|^2_{H^1(Q)} \leqslant \varepsilon(C_1 + 4C_2C^2) = C_3\varepsilon,$$

siempre que tomamos $\delta = \varepsilon$. El teorema está demostrado.

6. Normalizaciones equivalentes de los espacios $H^1(Q)$ y $\mathring{H}^1(Q)$. Supongamos que en un dominio Q, $\partial Q \in C^1$, está definida una matriz simétrica real $P(x) = (p_{ij}(x))$, $i, j = 1, \ldots, n$, que es continua en $\overline{Q}$. Esto significa que las funciones de valores reales $p_{ij}(x) \in C(\overline{Q})$ y $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Supongamos, además, que en Q está dada una función real $q(x) \in C(\overline{Q})$, y en ∂Q, una función real $r(x) \in C(\partial Q)$.

Definamos en $H^1(Q)$ una forma bilineal hermitiana (p. 4, § 2, cap. II)

$$W(f, g) = \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} \bar{g}_{x_j}\, dx + \int_Q q f \bar{g}\, dx + \int_{\partial Q} r f \bar{g}\, dS \tag{20}$$

(en la última, integral, por supuesto, $f = f|_{\partial Q}$, $g = g|_{\partial Q}$).

TEOREMA 5. *Si una matriz $P(x)$ está positivamente definida, es decir, si para cualquier vector completo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y para todo $x \in \overline{Q}$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \tag{21}$$

con la constante $\gamma > 0$, las funciones $q(x) \geqslant 0$ en $\overline{Q}$, $r(x) \geqslant 0$ en ∂Q y (o) $q(x) \not\equiv 0$, o bien $r(x) \not\equiv 0$, entonces, la forma bilineal (20) *define en $H^1(Q)$ un producto escalar equivalente al producto escalar de la forma*

$$(f, g)_{H^1(Q)} = \int_Q (\nabla f \nabla \overline{g} + f\overline{g})\, dx. \tag{22}$$

Según la definición (véase p. 4, § 2, cap. II), para demostrar el teorema se debe establecer la existencia de dos constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que las desigualdades

$$W(f, f) \leqslant C_1^2 \| f \|^2_{H^1(Q)}, \quad \| f \|^2_{H^1(Q)} \leqslant C_2^2 W(f, f) \tag{23}$$

tengan lugar para todo $f \in H^1(Q)$.

Indiquemos, ante todo, que por las condiciones del teorema, cada uno de los tres sumandos en la expresión para $W(f, f)$ (en (20) $g = f$) es no negativo.

Puesto que

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} \overline{f}_{x_j}\, dx \leqslant A \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} |f_{x_i}|\,|f_{x_j}|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant An \int_Q |\nabla f|^2\, dx \leqslant An \| f \|^2_{H^1(Q)},$$

donde $A = \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \| p_{ij} \|_{C(\overline{Q})}$,

$$\int_Q q\, |f|^2\, dx \leqslant A_1 \| f \|^2_{L_2(Q)} \leqslant A_1 \| f \|^2_{H^1(Q)},$$

donde $A_1 = \| q \|_{C(\overline{Q})}$, y, conforme a la desigualdad (2) del punto 1

$$\int_{\partial Q} r\, |f|^2\, dS \leqslant A_2 \| f \|^2_{L_2(\partial Q)} \leqslant C^2 A_2 \| f \|^2_{H^1(Q)},$$

donde $A_2 = \| r \|_{C(\partial Q)}$, entonces la primera de las desigualdades (23) se verifica con la constante $C_1^2 = An + A_1 + A_2 C^2$.

Demostremos la validez de la segunda desigualdad en (23). Supongamos, al contrario, que la constante necesaria C_2^2 no existe. Entonces, para todo $m \geqslant 1$ entero existe una función $f_m(x) \in H^1(Q)$ tal que $\| f_m \|^2_{H^1(Q)} > mW(f_m, f_m)$, o, lo que es lo mismo, existe una función $g_m(x) \in H^1(Q)$ $(g_m = f_m / \| f_m \|_{H^1(Q)})$ para cual

$$\| g_m \|_{H^1(Q)} = 1 \tag{24}$$

y

$$W(g_m, g_m) = \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} g_{m x_i} \overline{g}_{m x_j}\, dx +$$

$$+ \int_Q q\, |g_m|^2\, dx + \int_{\partial Q} r\, |g_m|^2\, dS < 1/m.$$

De esta desigualdad se desprende que cada uno de los tres sumandos en $W(g_m, g_m)$ es menor que $1/m$ y, por lo tanto (emplearemos la desigualdad (21)) tienen lugar las desigualdades

$$\int_Q |\nabla g_m|^2\,dx < \frac{1}{m\gamma}, \quad \int_Q q\,|g_m|^2\,dx < \frac{1}{m}, \quad \int_{\partial Q} r\,|g_m|^2\,dS < \frac{1}{m}. \quad (25)$$

En vista de (24), la sucesión g_m, $m = 1, 2, \ldots$, es acotada en $H^1(Q)$ y por ello (teorema 3, p. 4) se puede extraer de ésta una subsucesión fundamental en $L_2(Q)$. Sin menoscabar la generalidad de razonamiento, vamos a considerar que la propia sucesión g_m, $m = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $L_2(Q)$, es decir, $\| g_m - g_p \|_{L_2(Q)} \to 0$ cuando $m, p \to \infty$.

Como, en virtud de la primera de las desigualdades (25),

$$\begin{aligned}\| g_m - g_p \|^2_{H^1(Q)} &= \| g_m - g_p \|^2_{L_2(Q)} + \| |\nabla (g_m - g_p)| \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \\ &\leqslant \| g_m - g_p \|^2_{L_2(Q)} + 2 \| |\nabla g_m| \|^2_{L_2(Q)} + 2 \| |\nabla g_p| \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \\ &\leqslant \| g_m - g_p \|^2_{L_2(Q)} + \frac{2}{m\gamma} + \frac{2}{p\gamma},\end{aligned}$$

entonces $\| g_m - g_p \|_{H^1(Q)} \to 0$ cuando $m, p \to \infty$, es decir, la sucesión g_m, $m = 1, 2, \ldots$, es también fundamental en $H^1(Q)$. Por ello, esta sucesión converge en la norma de $H^1(Q)$ hacia cierto elemento $g \in H^1(Q)$. Pasando en la igualdad (24) y desigualdades (25) al límite para $m \to \infty$, obtendremos las siguientes correlaciones:

a) $\| g \|_{H^1(Q)} = 1$,

b) $\int_Q |\nabla g|^2\,dx = 0$,

c) $\int_Q q\,|g|^2\,dx = 0$,

d) $\int_{\partial Q} r\,|g|^2\,dS = 0$.

De las igualdades b) y a) fluye que $g = \text{const} = 1/\sqrt{|Q|}$ en Q y $g|_{\partial Q} = 1/\sqrt{|Q|}$ en ∂Q. Pero, esto contradice, si $q(x) \not\equiv 0$, a la igualdad c) o bien, si $r(x) \not\equiv 0$, a la igualdad d). El teorema queda demostrado.

Sea $P(x) = p(x)\,E$, donde E es una matriz unitaria. Del teorema 5 se desprende

COROLARIO. *La forma bilineal*

$$W(f, g) = \int_Q (p\nabla f \nabla \bar{g} + q f \bar{g})\,dx + \int_{\partial Q} r(x)\, f \bar{g}\,dS,$$

donde $p(x) \in C(\overline{Q})$, $q(x) \in C(\overline{Q})$, $r(x) \in C(\partial Q)$, $p(x) \geqslant \text{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$ *en* $\overline{Q}$, $r(x) \geqslant 0$ *en* ∂Q *y* (o) $q(x) \not\equiv 0$ *en* Q, *o bien* $r(x) \not\equiv 0$ *en* ∂Q, *define en* $H^1(Q)$ *un producto escalar equivalente al producto escalar expresado por* (22).

TEOREMA 6. *Si* $P(x)$ *es una matriz positivamente definida y la función* $q(x) \geqslant 0$ *en* $\overline{Q}$, *la forma bilineal hermitiana*

$$W_1(f, g) = \int_Q \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij} f_{x_i} \overline{g}_{x_j}\, dx + \int_Q q f \overline{g}\, dx$$

define en $\mathring{H}^1(Q)$ *un producto escalar equivalente al producto escalar* (22).

Como $\mathring{H}^1(Q) \subset H^1(Q)$, del teorema 5 se deduce que en $\mathring{H}^1(Q)$ se puede introducir un producto escalar equivalente al producto escalar (22), por medio de la forma bilineal (20) para $r(x) \equiv 1$ en ∂Q y $q(x) \geqslant 0$ en $\overline{Q}$. Mas, para $f(x)$ y $g(x)$, pertenecientes a $\mathring{H}^1(Q)$, los valores de las formas bilineales W y W_1 coinciden. El teorema queda demostrado.

Sea $P(x) = p(x)E$. Del teorema 6 se desprende

COROLARIO. La forma bilineal

$$W(f, g) = \int_Q (p \nabla f \nabla \overline{g} + q f \overline{g})\, dx,$$

donde $p(x) \in C(\overline{Q})$, $q(x) \in C(\overline{Q})$, $p(x) \geqslant \text{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$ *en* $\overline{Q}$ *define en* $\mathring{H}^1(Q)$ *un producto escalar equivalente al producto escalar* (22).

En particular, el producto escalar

$$(f, g)'_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q \nabla f \nabla \overline{g}\, dx$$

es equivalente al producto escalar (22).

De la última afirmación se deduce directamente *la desigualdad de Steklov*

$$\| f \|^2_{L_2(Q)} \leqslant \text{const} \int_Q |\nabla f|^2\, dx$$

que es válida para cualquier función $f \in \mathring{H}^1(Q)$.

§ 6. Propiedades de las funciones de $H^k(Q)$

En este párrafo estudiaremos la interacción entre los espacios $H^k(Q)$ y $C^1(\overline{Q})$. Mostraremos que si una función pertenece al espacio $H^k(Q)$, siendo k suficientemente grande, pertenece también al espacio $C^l(\overline{Q})$ (es decir, puede cambiarse en un conjunto de medida nula de tal manera que sea continua en $\overline{Q}$, junto con todas las derivadas hasta l-ésimo orden).

Para obtener este resultado necesitaremos representar una función, suficientemente suave en Q, mediante una integral en Q respecto a ciertas combinaciones de las derivadas de la función.

1. Representación de las funciones mediante integrales.

TEOREMA 1. Supongamos que una función $f(x) \in C^2(\overline{Q})$ y la dimensión del espacio $n \geqslant 2$. En este caso, para todo punto $x \in Q$ tiene lugar la igualdad

$$f(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\Delta f(\xi)\,d\xi + \\ + \int_{\partial Q} \left(f(\xi)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial f(\xi)}{\partial n_\xi} U(x-\xi) \right) dS_\xi, \quad (1)$$

donde

$$U(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\,\sigma_n\,|x|^{n-2}} & para \quad n > 2, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|} & para \quad n = 2, \end{cases} \quad (2)$$

y $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ *es el área de la superficie de una esfera unitaria* $(n-1)$*-dimensional*).*

La función $U(x-\xi)$ (que lleva el nombre de solución fundamental para el operador de Laplace), siendo función de ξ, satisface, para $\xi \neq x$, la igualdad $\Delta_\xi U(\xi - x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2}\right) U(\xi - x) = 0$, lo que se pone de manifiesto mediante la derivación inmediata.

Fijemos un punto arbitrario $x \in Q$ y escojamos $\varepsilon > 0$ tan pequeño que la bola $\{|\xi - x| \leqslant \varepsilon\} \subset Q$. En el dominio $Q_\varepsilon = Q \setminus \{|x - \xi| \leqslant \varepsilon\}$ para la función $U(\xi - x)$ (que se toma por

---

*) La igualdad (1) se realiza también en el caso unidimensional ($Q = (a, b)$). A una identidad fácilmente comprobable $f(x) = \frac{1}{2}\int_a^b |x-\xi|\, f''(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2} \times \times (f(a) + f(b)) - \frac{1}{2}((a-x)\,f'(a) + (b-x)\,f'(b))$, se le puede dar la forma (1) al introducir la función $U(x-\xi) = \frac{1}{2}|x-\xi|$. No obstante, no utilizaremos la igualdad (1) en el caso cuando $n = 1$.

una función de la variable ξ) y para una función arbitraria $f(\xi) \in C^2(\overline{Q})$ tiene lugar la fórmula de Green (véase p. 2, § 1).

$$\int_{Q_\varepsilon} \Delta f(\xi) U(x-\xi)\, d\xi = \int_{\partial Q} \left(U(\xi - x) \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} - \right.$$
$$\left. - f(\xi) \frac{\partial U(\xi - x)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi + \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \left(U(\xi - x) \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} - \right.$$
$$\left. - f(\xi) \frac{\partial U(\xi - x)}{\partial n_\xi} \right) dS_\xi. \quad (3)$$

Dado que en la esfera $|\xi - x| = \varepsilon$, $\frac{\partial}{\partial n_\xi} = -\frac{\partial}{\partial |\xi - x|}$, entonces, el segundo sumando del segundo miembro en (3) tiene (para $n > 2$) la forma

$$-\frac{1}{(n-2)\sigma_n \varepsilon^{n-2}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} dS_\xi + \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} f(\xi)\, dS_\xi =$$
$$= f(x) + \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} (f(\xi) - f(x))\, dS_\xi -$$
$$- \frac{1}{(n-2)\sigma_n \varepsilon^{n-2}} \int_{|\xi - x| = \varepsilon} \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} dS_\xi = f(x) + O(\varepsilon), \quad (4)$$

dado que el área de la esfera $|\xi - x| = \varepsilon$ es igual a $\sigma_n \varepsilon^{n-1}$, y para $|\xi - x| = \varepsilon$ tenemos $f(\xi) - f(x) = O(\varepsilon)$ y $\left| \frac{\partial f(\xi)}{\partial n} \right| \leqslant \text{const.}$

La función $U(\xi - x)$ es integrable en Q, por lo cual el límite, para $\varepsilon \to 0$, del primer miembro en la igualdad (3) es igual a la integral en Q de la función $U(\xi - x)\, \Delta f(\xi)$. Pasando en (3) al límite para $\varepsilon \to 0$, y valiéndonos de (4), obtendremos la igualdad (1) para $n > 2$. Para $n = 2$ la demostración es igual, a excepción de que el segundo sumando del segundo miembro en (3), a diferencia de (4), es igual a $f(x) + O(\varepsilon \ln \varepsilon)$. El teorema está demostrado.

2. Continuidad y diferenciabilidad continua de funciones de $H^k(Q)$. En el teorema 1 del párrafo anterior hemos obtenido la expresión para una función arbitraria $f \in \dot{C}^2(\overline{Q})$ en términos de la integral de las segundas derivadas de esta función por el dominio Q. Cuando la función es más suave, $f \in \dot{C}^k(\overline{Q})$, $k > 2$, a la par con (1) ésta puede expresarse también en términos de las derivadas de k-ésimo orden. Para obtener estas expresiones, necesitaremos la siguiente sencilla afirmación.

LEMA 1. *Sea $n \geqslant 3$. Entonces, para todo μ (real) la función*

$$u_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\mu+2}}{(\mu+2)(\mu+n)} & para \quad \mu \neq -2,\ \mu \neq -n, \\ (\ln|x|)/(n-2) & para \quad \mu = -2, \\ -\dfrac{\ln|x|}{|x|^{n-2}(n-2)} & para \quad \mu = -n \end{cases}$$

satisface la ecuación $\Delta u_\mu = |x|^\mu$, cualquiera que sea $x \in R_n$, $x \neq 0$.

Recurriendo a cálculos inmediatos, podemos convencernos de que el lema enunciado es válido.

Sea la función $f \in \dot{C}^2(\overline{Q})$. En virtud de la fórmula (1), para $x \in Q$ tenemos

$$f(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\Delta f(\xi)\,d\xi.$$

En particular, para $n = 2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_Q \Delta f(\xi)\ln|x-\xi|\,d\xi, \tag{5}$$

para $n = 3$

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_Q \frac{\Delta f(\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi, \tag{6}$$

para $n > 3$

$$f(x) = -\frac{1}{(n-2)\,\sigma_n}\int_Q \frac{\Delta f(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}}\,d\xi. \tag{7}$$

Sea $n = 4$, y la función $f(x) \in \dot{C}^3(\overline{Q})$. Empleando la igualdad $\frac{1}{|x-\xi|^2} = \frac{1}{2}\Delta_\xi \ln|x-\xi|$ (lema 1) e integrando por partes, obtenemos de (7):

$$f(x) = \frac{1}{4\sigma_4}\int_Q \Delta f\cdot\Delta_\xi \ln|x-\xi|\,d\xi = \frac{1}{4\sigma_4}\int_Q \nabla(\Delta f(\xi))\,\nabla_\xi \ln|x-\xi|\,d\xi. \tag{8}$$

Si $n = 5$, de (7) y de la igualdad $|x-\xi|^{-3} = -\frac{1}{2}\nabla_\xi\frac{1}{|x-\xi|}$ (lema 1) obtendremos para la función $f(x) \in \dot{C}^3(\overline{Q})$ la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{2\cdot 3\sigma_5}\int_Q \Delta f(\xi)\,\Delta_\xi\frac{1}{|x-\xi|}\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot 3\sigma_5}\int_Q \nabla(\Delta f(\xi))\,\nabla_\xi\frac{1}{|x-\xi|}\,d\xi \tag{9}$$

y así sucesivamente. Sea $f(x) \in \dot{C}^{2p}(\overline{Q})$, $p \geqslant 2$. Entonces, de las igualdades

$$\frac{1}{|x-\xi|^{4p-4}} = C'_{4p-2}\Delta_\xi^{p-1}\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}}, \quad \frac{1}{|x-\xi|^{4p-3}} = $$
$$= C'_{4p-1}\Delta_\xi^{p-1}\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}},$$

que son válidas para $n > 4p-3$ y que se desprenden del lema 1, en virtud de (7), tenemos

$$f(x) = C''_{4p-2}\int_Q \frac{\Delta^p f(\xi)}{|x-\xi|^{2p-2}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n=4p-2 \qquad (10_{4p-2})$$

y

$$f(x) = C''_{4p-1}\int_Q \frac{\Delta^p f(\xi)}{|x-\xi|^{2p-1}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n=4p-1, \qquad (10_{4p-1})$$

donde C'_i y C''_i son ciertas constantes absolutas. Puesto que $n > 4p-1$, $p \geqslant 2$

$$\frac{1}{|x-\xi|^{4p-2}} = C'_{4p}\Delta_\xi^{p}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}}\right) \quad \text{y} \quad \frac{1}{|x-\xi|^{4p-1}} =$$
$$= C'_{4p+1}\Delta_\xi^{p}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}}\right),$$

para $f \in \dot{C}^{2p+1}(\overline{Q})$, $p \geqslant 2$, de (7) resulta

$$f(x) = C''_{4p}\int_Q \nabla(\Delta^p f(\xi))\,\nabla_\xi\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-2}}\right)d\xi \quad \text{para} \quad n=4p \qquad (10_{4p})$$

y

$$f(x) = C''_{4p+1}\int_Q \nabla(\Delta^p f(\xi))\,\nabla_\xi\left(\frac{1}{|x-\xi|^{2p-1}}\right)d\xi \quad \text{para} \quad n=4p+1 \qquad (10_{4p+1})$$

donde C'_i y C''_i son constantes absolutas.

Ya que $\left|\nabla_\xi \frac{1}{|x-\xi|^s}\right| = \frac{s}{|x-\xi|^{s+1}}$ cuando $s \geqslant 1$, de las expresiones (6), (8), (9) (10_{4p-2})—(10_{4p+1}) se obtienen las desigualdades

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-2}\int_Q \frac{|\Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p-2}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n=4p-2, \quad p>1, \qquad (11_{4p-2})$$

$$|f(x)| \leqslant C_{4p-1}\int_Q \frac{|\Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{2p-1}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n=4p-1, \quad p \geqslant 1; \qquad (11_{4p-1})$$

para toda $f\in \dot{C}^{2p}(\overline{Q})$, y las desigualdades

$$|f(x)|\leqslant C_{4p}\int\limits_Q \frac{|\nabla\Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{4p-1}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n=4p,\ p\geqslant 1 \qquad (11_{4p})$$

$$|f(x)|\leqslant C_{4p+1}\int\limits_Q \frac{|\nabla\Delta^p f(\xi)|}{|x-\xi|^{4p}}\,d\xi \quad \text{para} \quad n=4_{p+1},\ p\geqslant 1, \qquad (11_{4p+1})$$

para toda $f\in \dot{C}^{2p+1}(\overline{Q})$, siendo C_i constantes absolutas.

Haciendo uso de la desigualdad de Buniakovski, obtendremos de (5):

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_Q|\Delta f|^2\,d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_Q|\ln|x-\xi||^2\,d\xi\Big)^{1/2}\leqslant C\|f\|_{H^2(Q)},\quad n=2,$$

de (11_{4p-2})

$$|f(x)|\leqslant C_{4p-2}\Big(\int\limits_G|\Delta^p f|^2\,d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_Q\frac{d\xi}{|x-\xi|^{4p-4}}\Big)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant C\|f\|_{H^{2p}(Q)},\qquad n=4p-2>2,$$

y, análogamente, de $(11_{4p-1})-(11_{4p+1})$

$$|f(x)|\leqslant C\|f\|_{H^{2p}(Q)},\qquad n=4p-1\geqslant 3,$$
$$|f(x)|\leqslant C\|f\|_{H^{2p+1}(Q)},\qquad n=4p\geqslant 4,$$
$$|f(x)|\leqslant C\|f\|_{H^{2p+1}(Q)},\qquad n=4p+1\geqslant 5,$$

donde la constante C, depende de n y del dominio Q.

Así pues, la desigualdad

$$\|f\|_{C(\overline{Q})}\leqslant C\|f\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(Q)} \qquad (12)$$

se cumple para todas las $f\in\dot{C}^{[\frac{n}{2}]+1}(\overline{Q})$, $n\geqslant 1$, con una constante que no depende de f. La validez de esta desigualdad para $n=1$ se pone de manifiesto inmediatamente, si cualquier función $f(x)\in$ $\in\dot{C}^1([a,b])$ la representamos en la forma

$$f(x)=\frac{1}{2}\int\limits_a^b \operatorname{sign}(x-\xi)\cdot f'(\xi)\,d\xi.$$

Si la función $f\in\dot{C}^{l+1+[\frac{n}{2}]}(\overline{Q})$ para cierto $l>0$, a la par con (12) ella satisface también la desigualdad

$$\|f\|_{C^l(\overline{Q})}\leqslant C_l\|f\|_{H^{l+1+[\frac{n}{2}]}(Q)}, \qquad (13)$$

en la cual la constante $C_l>0$ no depende de f.

En efecto, para todo vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de coordenadas enteras no negativas, $|\alpha| \leqslant l$, en virtud de (12) tenemos

$$\|D^\alpha f\|_{C(\overline{Q})} \leqslant C \|D^\alpha f\|_{H^{1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C \|f\|_{H^{1+|\alpha|+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \leqslant C \|f\|_{H^{1+l+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}.$$

Sumando estas desigualdades respecto a todo α, $|\alpha| \leqslant l$, obtendremos la desigualdad (13).

Sea, ahora, $f \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ y sea $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, una sucesión de funciones de $\dot{C}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(\overline{Q})$ que converge en la norma de $H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ hacia f. En virtud de (13)

$$\|f_m - f_s\|_{C^l(\overline{Q})} \leqslant C \|f_m - f_s\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)} \to 0$$

para $m, s \to \infty$, es decir, la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, resulta ser fundamental en la norma de $C^l(\overline{Q})$. Esto significa que la función límite f pertenece a $C^l(\overline{Q})$. Pasando en la desigualdad $\|f_m\|_{C^l(\overline{Q})} \leqslant C \|f_m\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}$ al límite para $m \to \infty$, llegamos a la conclusión de que la desigualdad (13) es válida para cualquier $f \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$.

Sea una función $f \in H_{\mathrm{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. Tomemos arbitrariamente un subdominio $Q' \Subset Q$ y construyamos una función $\zeta(x) \in \dot{C}^\infty(\overline{Q})$ que en Q' sea igual a 1. La función $f \cdot \zeta \in \mathring{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$, por eso pertenece a $\dot{C}^l(\overline{Q})$ y, consecuentemente, la función f pertenece a $C^l(\overline{Q'})$. Por ser Q' arbitrario, la función f pertenece a $C^l(Q)$. De este modo queda demostrada la afirmación siguiente.

TEOREMA 2. *Cualquier función del espacio* $H_{\mathrm{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ *pertenece al espacio* $C^l(Q)$, *es decir,* $H_{\mathrm{loc}}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q) \subset C^l(Q)$.

Sea, ahora, $f \in H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. Supongamos que $\partial Q \subset C^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$. Entonces, en virtud del teorema sobre la prolongación para un dominio (cualquiera) Q', $Q' \Supset Q$, existe una función F, perteneciente a $\overset{\circ}{H}^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')$, que en Q coincide con f, con la particularidad de que $\|F\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')} \leqslant C'\|f\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}$, donde la constante C' no depende de f. La función $F \in C^l(\overline{Q}')$ y para ella tiene lugar la desigualdad $\|F\|_{C^l(\overline{Q}')} \leqslant C''\|F\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q')}$ (desigualdad (13) para la función F en el dominio Q'). Por lo tanto, $f \in C^l(\overline{Q})$ y se cumple la desigualdad

$$\|f\|_{C^l(\overline{Q}')} \leqslant C'C''\|f\|_{H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)}.$$

De este modo queda demostrada la siguiente afirmación.

TEOREMA 3. *Si es que $\partial Q \in C^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$, entonces $H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q) \subset C^l(\overline{Q})$. En este caso para toda función $f \in H^{l+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ tiene lugar la desigualdad* (13) *en la cual la constante $C > 0$ no depende de f.*

§ 7. Espacios $C^{r,0}$ y $C^{2s,s}$ Espacios $H^{r,0}$ y $H^{2s,s}$

Hasta ahora examinábamos espacios funcionales (C^k, H^k, $k = 0, 1, \ldots$), compuestos de funciones cuyas propiedades diferenciales son iguales con relación a todas las variables independientes: H^k, por ejemplo, consta de todas las funciones, pertenecientes a L_2, cuyas derivadas generalizadas hasta el k-ésimo orden inclusive pertenecen a L_2. En la teoría de ecuaciones diferenciales también se emplean conjuntos de funciones que tienen diferentes propiedades diferenciales respecto a diferentes variables. En particular, en el capítulo sexto dedicado a las ecuaciones parabólicas serán empleados los espacios de funciones que vamos a introducir a continuación.

Sea D un dominio acotado del espacio R_n ($x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto en R_n) y sea $Q_T = \{x \in D,\ 0 < t < T\}$ un cilindro de altura $T > 0$ en el espacio $R_{n+1} = R_n \times \{-\infty < t < \infty\}$.

1. Espacios de Banach $C^{r,0}(\overline{Q}_T)$ y $C^{2s,s}(\overline{Q}_T)$. Designemos con $C^{r,0}(\overline{Q}_T)$, donde $r \geqslant 1$ es un número entero, un conjunto de todas las funciones $f(x, t)$ continuas en $\overline{Q}_T$ y que admiten derivadas $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, continuas en $\overline{Q}_T$, para cualesquiera (enteros y no negativos) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant r$.

Designemos con $C^{2s,s}(\overline{Q}_T)$, donde $s \geqslant 1$ es un número entero, un conjunto de todas las funciones $f(x, t)$ continuas en $\overline{Q}_T$ y que admiten derivadas $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}}$, continuas en $\overline{Q}_T$, para cualesquiera (enteros y no negativos) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta\leqslant 2s$.

Por $C^{r,0}(\overline{Q}_T)$ para $r=0$ y por $C^{2s,s}(\overline{Q}_T)$ para $s=0$, vamos a entender un espacio $C^{0,0}(\overline{Q}_T)=C(\overline{Q}_T)$.

Está claro que el conjunto $C^{r,0}(\overline{Q}_T)$, $r\geqslant 0$, es un espacio de Banach cuya norma es

$$\|f\|_{C^{r,0}(\overline{Q}_T)}=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=r}\max_{\overline{Q}_T}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right|,$$

y el conjunto $C^{2s,s}(\overline{Q}_T)$, $s\geqslant 0$, es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{C^{2s,s}(\overline{Q}_T)}=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta\leqslant 2s}\max_{\overline{Q}_T}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}\right|.$$

2. Espacios de Hilbert $H^{r,0}(Q_T)$ y $H^{2s,s}(Q_T)$. Designemos con $H^{r,0}(Q_T)$, donde $r\geqslant 1$ es un número entero, un conjunto de todas las funciones $f(x,t)$, pertenecientes a $L_2(Q_T)$, cuyas derivadas generalizadas $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant r$ (entero y no negativo), existen y pertenecen a $L_2(Q_T)$. Designemos con $H^{2s,s}(Q_T)$, donde $s\geqslant 1$ es un número entero, un conjunto de todas las funciones $f(x,t)$, pertenecientes a $L_2(Q_T)$, cuyas derivadas generalizadas $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}$, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ (entero y no negativo) tales que $\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2\beta\leqslant 2s$, existen y pertenecen a $L_2(Q_T)$.

Por $H^{r,0}(Q_T)$ para $r=0$ y por $H^{2s,s}(Q_T)$ para $s=0$, vamos a entender el espacio $H^{0,0}(Q_T)=L_2(Q_T)$.

Indiquemos al principio las siguientes propiedades de los conjuntos $H^{r,0}(Q_T)$ y $H^{2s,s}(Q_T)$ que se deducen inmediatamente de las definiciones.

1. Un conjunto $H^{r,0}(Q_T)$, $r\geqslant 0$, es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f,g)_{H^{r,0}(Q_T)}=\int_{Q_T}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant r}\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\cdot\overline{\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}g}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}}\,dx\,dt,$$

mientras que el conjunto $H^{2s,s}(Q_T)$, $s\geqslant 0$, es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f,g)_{H^{2s,s}(Q_T)}=\int_{Q_T}\sum_{2\beta+\alpha_1+\ldots+\alpha_n\leqslant 2s}\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}\times$$

$$\times\overline{\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta}g}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\beta}}}\,dx\,dt.$$

2. Cualesquiera que sean r y s, $0 \leqslant r \leqslant 2s$. $H^{2s,s}(Q_T) \subset H^{2s,0}(Q_T) \subset H^{r,0}(Q_T)$.

3. Si $f(x, t) \in H^{r,0}(Q_T)$, para

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = r' \leqslant r, \quad \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in H^{r-r',0}(Q_T).$$

4. Si $f(x, t) \in H^{2s,s}(Q_T)$, para $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 2\beta \leqslant 2s'$, donde $s' \leqslant s$, la función $\dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}} \in H^{2(s-s'), s-s'}(Q_T)$.

Mostremos ahora que las funciones de los espacios $H^{r,0}(Q_T)$ y $H^{2s,s}(Q_T)$, siendo suficientemente suave el contorno ∂D del dominio D, pueden ser prolongadas, conservando la suavidad, a los dominios más amplios que Q_T. Para precisar, establezcamos la validez de la afirmación siguiente.

5. Sea D' un dominio arbitrario de R_n tal que $D \Subset D'$, y sean t^0 y t^1 números arbitrarios que satisfacen las desigualdades $t^0 < 0$, $t^1 > T$. Designemos por Q'_{t^0, t^1} el cilindro $\{x \in D', t^0 < t < t^1\}$. Si $\partial D \in C^r$, $r \geqslant 1$, para cualquier función $f \in H^{r,0}(Q_T)$, existe una prolongación $F \in H^{r,0}(Q'_{t^0, t^1})$ que es terminal en Q'_{t^0, t^1}, y, además, tiene lugar la desigualdad

$$\| F \|_{H^{r,0}(Q'_{t^0, t^1})} \leqslant C \| f \|_{H^{r,0}(Q_T)}, \tag{1}$$

en la cual la constante positiva C no depende de la función f. Si $\partial D \in C^{2s}$, $s \geqslant 1$, para cualquier función $f \in H^{2s,s}(Q_T)$ existe una prolongación $F \in H^{2s,s}(Q'_{t^0, t^1})$ que es terminal en Q'_{t^0, t^1}, y, además, tiene lugar la desigualdad

$$\| F \|_{H^{2s,s}(Q'_{t^0, t^1})} \leqslant C \| f \|_{H^{2s,s}(Q_T)}, \tag{2}$$

donde la constante positiva C no depende de f.

La prolongación buscada F de la función f de $H^{r,0}(Q_T)$, o de $H^{2s,s}(Q_T)$, se construye en dos etapas: primero se halla la prolongación F_1 de la función f por la superficie lateral del cilindro Q_T a un cilindro más amplio $Q'_T = \{x \in D', 0 < t < T\}$ y de la misma altura T; luego, la función F_1 se prolonga por la base superior $\{x \in D', t = T\}$ y por la inferior $\{x \in D', t = 0\}$ del cilindro Q'_T.

Para construir la función F_1 emplearemos el mismo esquema que al prolongar las funciones de $H^k(D)$ a D' (véase p. 2, § 4). Hagamos uso, además, de la prolongación, construida en el p. 2, § 4, de las funciones desde un paralelepípedo rectángulo.

Designemos por $\Pi_{a,T}$, $a > 0$, un paralelepípedo rectángulo $\{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n, 0 < t < T\}$, y por $\Pi^+_{a,T}$ y $\Pi^-_{a,T}$, los paralelepípedos rectángulos $\{|x_i| < a,\ i = 1, \ldots, n-1,\ 0 < x_n < a,\ 0 < t < T\}$ y $\{|x_i| < a,\ i = 1, \ldots, n-1,\ -a < x_n < 0,\ 0 < t < T\}$, respectivamente. Sea la función $z(x, t) \in C^k(\overline{\Pi}_{a,T})$ para cierto $k \geqslant 1$. La prolongación $Z(x, t)$ de la función $z(x, t)$ en el paralelepípedo $\Pi_{a,T}$ se define en el paralelepípedo $\Pi^-_{a,T}$ de la manera siguiente:

$$Z(x, t) = \sum_{i=1}^{k+1} A_i z\left(x', -\frac{x_n}{i}, t\right), \tag{3}$$

donde $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ y $A_1, \ldots, A_{k+1}$ es la solución del sistema algebraico lineal

$$\sum_{i=1}^{k+1} A_i \left(-\frac{1}{i}\right)^s = 1, \quad s = 0, 1, \ldots, k.$$

Al demostrar el lema 1 p. 2, § 4, hemos establecido que $Z(x, t) \in C^k(\overline{\Pi}_{a,T})$ y para cualesquera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, \alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \beta \geqslant 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta \leqslant k$,

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} Z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^\beta} \right\|_{L_2(\Pi_{a,T})} \leqslant C \left\| \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\beta} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial t^\beta} \right\|_{L_2(\Pi^+_{a,T})},$$

donde la constante $C > 0$ no depende de z. Por ello, para todo $r \leqslant k$

$$\|Z\|_{H^{r,0}(\Pi_{a,T})} \leqslant C \|z\|_{H^{r,0}(\Pi^+_{a,T})}, \tag{4}$$

y para todo s, $2s \leqslant k$

$$\|Z\|_{H^{2s,s}(\Pi_{a,T})} \leqslant C \|z\|_{H^{2s,s}(\Pi^+_{a,T})}, \tag{5}$$

donde la constante positiva C no depende de z.

Puesto que en el espacio $H^{r,0}(\Pi^+_{a,T})$ y en el espacio $H^{2s,s}(\Pi^+_{a,T})$ el conjunto $C^\infty(\overline{\Pi}^+_{a,T})$ y, consecuentemente, el conjunto $C^k(\overline{\Pi}^+_{a,T})$ son siempre densos para todo $k \geqslant r$ o para todo $k \geqslant 2s$, respectivamente (esta afirmación se demuestra como la afirmación análoga para el espacio $H^k(D)$, véase la propiedad 6 p. 1, § 4), entonces, en virtud de que los conjuntos mencionados son completos, de lo dicho se desprende que también para cualquier función z, perteneciente a $H^{r,0}(\Pi^+_{a,T})$ o a $H^{2s,s}(\Pi^+_{a,T})$, existe la prolongación Z a $\Pi_{a,T}$, perteneciente a $H^{r,0}(\Pi_{a,T})$ o, respectivamente, a $H^{2s,s}(\Pi_{a,T})$, con la particularidad de que la función Z se define en $\Pi^-_{a,T}$ por la fórmula 3 y se cumple la desigualdad (4) o la (5), respectivamente. Reiterando textualmente los razonamientos aplicados al demostrar el teorema 1 (p. 2, § 4), obtendremos una función $F_1(x, t)$ que es prolongación de la función $f(x, t)$ en el cilindro Q'_T, con la particularidad de que si $f \in H^{r,0}(Q_T)$, entonces $F_1 \in H^{r,0}(Q'_T)$ y tendrá lugar la desigualdad

$$\|F_1\|_{H^{r,0}(Q'_T)} \leqslant C_1 \|f\|_{H^{r,0}(Q_T)},$$

mientras que si $f \in H^{2s,s}(Q_T)$, entonces $F_1 \in H^{2s,s}(Q'_T)$ y se verifica la desigualdad

$$\|F_1\|_{H^{2s,s}(Q'_T)} \leqslant C_2 \|f\|_{H^{2s,s}(Q_T)}$$

(las constantes positivas C_1 y C_2 en estas desigualdades no dependen de f). Además, la función $F_1 = 0$ en $Q'_T \setminus Q''_T$, donde $Q''_T = \{x \in \in D'', 0 < t < T\}$, y D'' es un dominio en R_n tal que $D \Subset D'' \Subset D'$.

Construyamos ahora la prolongación F que necesitamos de la función f en el cilindro Q'_{t^0, t^1}.

En el caso cuando $f \in H^{r,0}(Q_T)$, a título de F tomemos una función igual a F_1 en Q'_T y que es nula en $Q'_{t^0,t^1} / Q'_T$. Es evidente que la función F pertenece a $H^{r,0}(Q'_{t^0,t^1})$ y es terminal en Q'_{t^0,t^1}; en este caso tiene lugar la desigualdad (1).

Cuando la función $f \in H^{2s,s}(Q_T)$, su prolongación F en el cilindro Q'_{t^0,t^1} la definiremos por la ecuación $F = \zeta(t) F_2(x, t)$, en la que $\zeta(t) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$, $\zeta(t) = 1$ para $t \in (0, T)$, $\zeta(t) = 0$ para $t > > \frac{T+t^1}{2}$ y para $t < \frac{t^0}{2}$; en cuanto a la función $F_2(x, t)$, ella es igual a $F_1(x, t)$ en Q'_T, igual a $\sum\limits_{i=1}^{s+1} A'_i F_1\left(x, \frac{tT}{it^0}\right)$ en $\{x \in D',$ $t^0 < t < 0\}$ e igual a $\sum\limits_{i=1}^{s+1} A''_i F_1\left(x, T - \frac{t-T}{i} \cdot \frac{T}{t^1 - T}\right)$ en $\{x \in D',$ $T < t < t^1\}$, donde $A'_1, \ldots, A'_{s+1}$ es la solución del sistema algebraico lineal de ecuaciones $\sum\limits_{i=1}^{s+1} A'_i \left(\frac{T}{it^0}\right)^p = 1$, $p = 0, \ldots, s$, mientras que $A''_1, \ldots, A''_{s+1}$ es la solución del sistema $\sum\limits_{i=1}^{s+1} A''_i \left(-\frac{T}{i(t^1-T)}\right)^p$, $p = 0, \ldots, s$. Es evidente que la función $F \in H^{2s,s}(Q'_{t^0,t^1})$ es terminal en Q'_{t^0,t^1} y tiene lugar la desigualdad (2).

De la propiedad 5, en virtud del lema 1 p. 2, § 3, obtenemos inmediatamente la validez de la afirmación siguiente (véase en el p. 3, § 4 la afirmación correspondiente para el espacio H^k).

6. Si el contorno $\partial D \in C^r$, $r \geqslant 1$, el conjunto $C^\infty(\overline{Q}_T)$ es siempre denso en $H^{r,0}(Q_T)$. Cuando $\partial D \in C^{2s}$, $s \geqslant 1$, el conjunto $C^\infty(\overline{Q}_T)$ es siempre denso en $H^{2s,s}(Q_T)$.

7. Sea $f(x, t) \in H^{1,0}(Q_T)$ y sea S una superficie $(n-1)$-dimensional de clase C^1 perteneciente a $\overline{D}$; en particular, S puede coincidir con el contorno ∂D del dominio D.

Designemos con $\Gamma_{S,T}$ la superficie cilíndrica $\{x \in S, 0 < t < T\}$; la superficie lateral $\Gamma_{\partial D,T} = \{x \in \partial D, \ 0 < t < T\}$ del cilindro Q_T la designaremos con Γ_T.

De acuerdo con la propiedad 6 ($\partial D \in C^1$), existe una sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{Q}_T)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \| f_k - f \|_{H^{1,0}(Q_T)} = 0$. Ya que las funciones $f_k(x, t)$, $k = 1, \ldots$, siendo funciones de x, pertenecen a $C^1(\overline{D})$ para todo $t \in [0, T]$, tienen lugar, para todo $t \in [0, T]$, las desigualdades

$$\| f_k - f_s \|^2_{L_2(S)} \leqslant C^2 \| f_k - f_s \|^2_{H^1(D)}, \quad k, s = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

en las que C, siendo constante positiva, depende sólo del dominio D y de la superficie S (véase la desigualdad (3) p. 1, § 5). Integrando (6) respecto de $t \in (0, T)$, obtendremos las desigualdades

$$\| f_k - f_s \|_{L_2(\Gamma_{S,T})} \leqslant C \| f_k - f_s \|_{H^{1,0}(Q_T)}, \quad k, s = 1, 2, \ldots$$

Puesto que la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $H^{1,0}(Q_T)$, de las últimas desigualdades fluye que en la superficie $\Gamma_{S,T}$ una sucesión de valores de estas funciones $f_k|_{(x,t)\in\Gamma_{S,T}}$, $k = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $L_2(\Gamma_{S,T})$. Por consiguiente, existe una función $f_{\Gamma_{S,T}} \in L_2(\Gamma_{S,T})$ hacia la cual converge en $L_2(\Gamma_{S,T})$ la sucesión $f_k|_{(x,t)\in\Gamma_{S,T}}$, $k = 1, \ldots$, con la particularidad (lo que se comprueba con facilidad reiterando los razonamientos correspontes del p.1, § 5) de que la función $f_{\Gamma_{S,T}}$ no depende de cómo se elija la sucesión f_k, $k = 1, 2, \ldots$, que aproxima la función f.

Es natural llamar la función $f_{\Gamma_{S,T}}$ *traza de la función* f (de $H^{1,0}(Q_T)$) en la superficie cilíndrica $\Gamma_{S,T}$ y designarla con el símbolo $f|_{\Gamma_{S,T}}$.

Como en el p. 1, § 5, nos convencemos sin dificultad de que

$$\| f \|_{L_2(\Gamma_{S,T})} \leqslant C \| f \|_{H^{1,0}(Q_T)}$$

(aquí, $\| f \|_{L_2(\Gamma_{S,T})} = \| f|_{\Gamma_{S,T}} \|_{L_2(\Gamma_{S,T})}$) donde $C > 0$ no depende de f.

Indiquemos que si $\mathcal{M}$ es un conjunto acotado arbitrario de funciones de $H^{1,0}(Q_T)$, el conjunto $\mathcal{M}'$ de las trazas de estas funciones en $\Gamma_{S,T}$ será, a causa de la última desigualdad, acotado en $L_2(\Gamma_{S,T})$ pero, a diferencia del caso referente al espacio $H^1(Q_T)$, no es compacto.

El concepto de traza introducido permite extender a las funciones de $H^{1,0}(Q_T)$ la fórmula de integración por partes. A saber, para cualesquiera dos funciones f y g de $H^{1,0}(Q_T)$ tiene lugar la fórmula de integración por partes (fórmula de Ostrogradski)

$$\int_{Q_T} f_{x_i} g\,dx\,dt = \int_{\Gamma_T} fgn_i\,dS\,dt - \int_{Q_T} fg_{x_i}\,dx\,dt,$$

donde n_i es la i-ésima coordenada de un vector (unitario) n-dimensional de la normal exterior a la superficie ∂D, $i = 1, 2, \ldots, n$, y las funciones f, g que se encuentran bajo el signo de la integral, extendida por la superficie lateral Γ_T del cilindro Q_T, son trazas de las funciones f y g en Γ_T. La demostración de esta fórmula se obtiene con facilidad (compárese con el p. 2, § 5), aproximando en $H^{1,0}(Q_T)$ las funciones f y g por las funciones de $C^1(\overline{Q}_T)$.

Cuando $f \in H^{r,0}(Q_T)$, $r \geqslant 1$, cualquier derivada de esta función respecto a $x_1, \ldots, x_n$ de orden inferior a r tiene una traza sobre la superficie lateral Γ_T del cilindro Q_T. Cuando $f \in H^{2s,s}(Q_T)$, $s \geqslant 1$, tiene traza en la superficie lateral Γ_T del cilindro Q_T cualquier derivada $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^{\beta}}$, para $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 2\beta < 2s$.

§ 8. Ejemplos de operadores en espacios funcionales

1. Operadores integrales. Ecuación integral de Fredholm. Sea Q un dominio acotado del espacio n-dimensional R_n. Examinemos en $Q \times Q$ una función medible $K(x, y)$. Sea la función $f(y)$ tal que para casi todo $x \in Q K(x, y) f(y) \in L_1(Q)$ (por ejemplo, $f = 0$). A toda $f(y)$ de este tipo la pondremos en correspondencia una función

$$g(x) = \int_Q K(x, y) f(y)\,dy. \tag{1}$$

Esta representación puede considerarse como un operador (lineal, evidentemente) que actúa de $L_1(Q)$ en $L_1(Q)$, de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$, etc. La función $K(x, y)$ se denomina *núcleo* de este operador. El operador en cuestión puede ser definido, por supuesto, no en todo el espacio, por ejemplo, para un operador que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$ el papel de campo de definición lo desempeña un conjunto de aquellas funciones de $C(\overline{Q})$ para las cuales $g(x) \in C(\overline{Q})$. No obstante, es facil ver que si el núcleo $K(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, el operador está definido siempre (en $L_1(Q)$, en $L_2(Q)$, en $C(\overline{Q})$) y es acotado.

Vamos a considerar el operador con el núcleo $K(x, y) = K_0(x, y)\,|x-y|^{-\alpha}$, donde $K_0(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, y $0 \leqslant \alpha < n$, y definido por la fórmula (1), como un operador que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$ y como un operador que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, designándolo en ambos casos con K:

$$g = Kf. \tag{2}$$

El operador K se llama *operador integral de Fredholm*. De acuerdo con los resultados del p. 12, § 1, cap. II, para toda función $f \in C(\overline{Q})$ la función $g \in C(\overline{Q})$. Esto significa que el operador K, que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$, está definido en todo $C(\overline{Q})$.

Puesto que las funciones $\int\limits_Q |K(x, y)|\,dy$ y $\int\limits_Q |K(x, y)|\,dx$ son continuas en $\overline{Q}$, ellas son acotadas, es decir,

$$A = \max\left\{\max_{y\in\overline{Q}} \int\limits_Q |K(x, y)|\,dx,\ \max_{x\in\overline{Q}} \int\limits_Q |K(x, y)|\,dy\right\} < \infty \tag{3}$$

Como para todo punto $x \in Q$ tiene lugar

$$|g(x)| \leqslant \|f\|_{C(\overline{Q})} \int\limits_Q |K(x, y)|\,dy \leqslant A\,\|f\|_{C(\overline{Q})},$$

entonces $\|g\|_{C(\overline{Q})} \leqslant A\,\|f\|_{C(\overline{Q})}$. Quiere decir, el operador K, que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$, es acotado y $\|K\| \leqslant A$.

Sea $f(x) \in L_2(Q)$. Puesto que las funciones $|f(y)|^2 \int\limits_Q |K(x, y)|\,dx$ y $\int\limits_Q |K(x, y)|\,dx$ pertenecen a $L_1(Q)$ (la última pertenece incluso a $C(\overline{Q})$), entonces, según el corolario del teorema de Fubini, las funciones $K(x, y)\,|f(y)|^2$ y $K(x, y)$ pertenecen a $L_1(Q \times Q)$. Por lo tanto, al espacio $L_1(Q \times Q)$ pertenece también la función $K(x, y)\,f(y)$, ya que $|K(x, y)\,f(y)| \leqslant \frac{|K(x, y)|}{2} + \frac{|K(x, y)|\,|f(y)|^2}{2}$. En este caso, de acuerdo con el teorema de Fubini, las funciones $g(x) = \int\limits_Q K(x, y)\,f(y)\,dy$, $\int\limits_Q |K(x, y)|\,dy$ y $\int\limits_Q |K(x, y)|\,|f(y)|^2\,dy$ pertenecen a $L_1(Q)$. Para casi todo $x \in Q$ tenemos la desigualdad

$$|g(x)|^2 \leqslant \int\limits_Q |K(x, y)|\,dy \cdot \int\limits_Q |K(x, y)|\,|f(y)|^2\,dy \leqslant$$

$$\leqslant A \int\limits_Q |K(x, y)|\,|f(y)|^2\,dy,$$

de la cual se deduce que $g(x) \in L_2(Q)$. Integrando esta desigualdad en Q y aprovechando el teorema de Fubini, obtendremos

$$\|g\|^2_{L_2(Q)} \leqslant A \int_Q dx \int_Q |K(x, y)| \, |f(y)|^2 \, dy =$$

$$= A \int_Q |f(y)|^2 \left(\int_Q |K(x, y)| \, dx \right) dy \leqslant A^2 \|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

De este modo, el operador K, que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, está definido en todo el $L_2(Q)$, es acotado y $\|K\| \leqslant A$.

LEMA 1. *El operador K que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$ es totalmente continuo. El operador K que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$ es totalmente continuo.*

1. Examínemos primero un operador K que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$. Una función $K_N(x, y)$ definida para cualquier $N > 0$ por la igualdad

$$K_N(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{para } |x-y| \geqslant N^{-1} \\ K_0(x, y) N^{\alpha} & \text{para } |x-y| < N^{-1}, \end{cases}$$

pertenece a $C(\overline{Q \times Q})$. Como para un punto arbitrario $x \in \overline{Q}$ tiene lugar la desigualdad

$$\int_Q |K(x, y) - K_N(x, y)| \, dy =$$

$$= \int_{Q \cap \{|x-y| < N^{-1}\}} |K_0(x, y)| \left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha}} - N^{\alpha} \right) dy \leqslant$$

$$\leqslant B \int_{|x-y| < N^{-1}} \frac{dy}{|x-y|^{\alpha}} = B \int_{|\xi| < N^{-1}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha}} =$$

$$= B\sigma_n \int_0^{N^{-1}} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1-n}} = \frac{B\sigma_n}{(n-\alpha) N^{n-\alpha}},$$

donde $B = \|K_0\|_{C(\overline{Q \times Q})}$, σ_n es el área de la superficie de una esfera unitaria $(n-1)$-dimensional, entonces respecto a todo $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal N que

$$\max_{x \in \overline{Q}} \int_Q |K(x, y) - K_N(x, y)| \, dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puesto que $K_N(x, y) \in C(\overline{Q \times Q})$, existe un polinomio $P(x, y)$ tal que $|P(x, y) - K_N(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2|Q|}$ para todo $(x, y) \in \overline{Q \times Q}$.

Esto significa que

$$\max_{x\in\overline{Q}} \int_Q |K(x, y)-P(x, y)|\,dy \leqslant \max_{x\in\overline{Q}} \int_Q |K(x, y)-K_N(x, y)|\,dy + \\ + \max_{x\in\overline{Q}} \int_Q |K_N(x, y)-P(x, y)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad (4)$$

De manera análoga se establece que

$$\max_{y\in\overline{Q}} \int_Q |K(x, y)-P(x, y)|\,dx < \varepsilon. \qquad (4')$$

El polinomio $P(x, y)$ y la función $G(x, y)=K(x, y)-P(x, y)= = \frac{K_0(x, y)-P(x, y)|x-y|^\alpha}{|x-y|^\alpha}$ se pueden considerar como núcleos de los operadores integrales del tipo (2). Designemos estos operadores con P y G, respectivamente. En este caso tendremos la ecuación

$$K = P + G,$$

y, en virtud de (4) y (4'), la acotación

$$\| G \| < \varepsilon.$$

Así pues, el operador K está representado como una suma del operador G cuya norma es tan pequeña como se quiera y del operador P de medida finita (este último transforma $L_2\,(Q)$ en un conjunto de polinomios cuyo grado no es superior al del polinomio $P\,(x, y)$). Por eso, en virtud del teorema 4 p. 9, § 3, cap. II, K es totalmente continuo.

2. Examinemos ahora el operador K que actúa de $C\,(\overline{Q})$ en $C\,(\overline{Q})$. Ya que K es acotado, cualquier conjunto $\mathscr{M}$, acotado en $C\,(\overline{Q})$, se transforma por él en un conjunto acotado $\mathscr{M}'$. En vista de los resultados obtenidos en el p. 12, § 1, cap. II, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que $\int_Q |K(x', y)-K(x'', y)|\,dy < \varepsilon$, siempre que $|x' - - x''| < \delta$. Por ello, para $|x' - x''| < \delta$

$$|g(x')-g(x'')| \leqslant \int_Q |K(x', y)-K(x'', y)|\,|f(y)|\,dy \leqslant \varepsilon \|f\|_{C(\overline{Q})}.$$

Resulta pues, que el conjunto $\mathscr{M}'$ de funciones continuas en $\overline{Q}$ es equiacotado y equicontinuo. Por consiguiente, según el teorema de Arzelá, es compacto. El lema está demostrado.

La ecuación $\varphi = \mu K\varphi + f$, donde μ es un parámetro complejo y K, un operador integral de Fredholm, es decir, una ecuación

$$\varphi(x) = \mu \int_Q K(x, y)\,\varphi(y)\,dy + f(x), \qquad (5)$$

se llama *ecuación integral de Fredholm* (de segundo género).

Consideremos la ecuación (5) en $L_2(Q)$ ($f \in L_2(Q)$ y busquemos la solución de φ en $L_2(Q)$).

En virtud del lema 1, para la ecuación (5) son válidos los teoremas de Fredholm (pp. 3—7, § 4, cap. II). En particular, si μ no es el número característico del operador K (la cantidad de tales números es a lo sumo un conjunto numerable), existe un operador acotado $(I - \mu K)^{-1}$, es decir, la ecuación (5) tiene la única solución $\varphi \in \in L_2(Q)$, cualquiera que sea el término independiente $f \in L_2(Q)$.

Si el núcleo $K(x, y)$ posee la propiedad de que $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, entonces el operador K que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$ es *autoconjugado*.

En efecto, según el teorema de Fubini, para cualesquiera φ y ψ de $L_2(Q)$

$$(K\varphi, \psi)_{L_2(Q)} =$$

$$= \int\limits_Q \int\limits_Q K(x, y)\, \varphi(y)\, dy\, \overline{\psi(x)}\, dx = \int\limits_Q \varphi(y) \left(\int\limits_Q K(x, y)\, \overline{\psi(x)}\, dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_Q \varphi(y) \left(\int\limits_Q \overline{K(y, x)\, \psi(x)\, dx} \right) dy = (\varphi, K\psi)_{L_2(Q)}.$$

Por esta razón, para el operador K son válidos los resultados demostrados en el § 5, cap. II, para un operador general autoconjugado totalmente continuo. En particular, todos los valores propios y números característicos del operador K son reales y en el espacio $L_2(Q)$ existe una base ortonormal compuesta de valores propios de este operador (corolario 2 del teorema 2, p. 2, § 5, cap. II).

2. Operadores diferenciales. Supongamos que en un dominio n-dimensional Q está definida una función mediable acotada $a_\alpha(x)$ para todo vector de números enteros $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, $|\alpha| \leqslant k$, donde $k \geqslant 1$. Un operador lineal de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$ que le asigna a la función f una función

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(x)\, D^\alpha f(x) \tag{6}$$

se denomina *operador lineal diferencial* (de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$). Vamos a considerar que el operador $\mathcal{L}$ es del orden k, es decir, por lo menos uno de los coeficientes $a_\alpha(x)$, para $|\alpha| = k$, es distinto de cero (un conjunto en el que $a_\alpha(x) \neq 0$ no es conjunto de medida nula).

El operador $\mathcal{L}$ por supuesto, no está definido en todo el $L_2(Q)$. No obstante, un conjunto de funciones f, para las cuales tiene sentido la expresión (6) ($D^\alpha f$ es una derivada generalizada), contiene $H^k(Q)$. Por ello, $H^k(Q)$ se puede tomar como campo de definición de este operador.

Si todas las funciones $a_\alpha(x)$, $|\alpha| \leqslant k$, son continuas en $\overline{Q}$, la fórmula (6) define también el operador lineal de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$ (operador lineal diferencial que actúa de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$). A título de campo de definición del operador $\mathscr{L}$ se puede tomar, en este caso, $C^k(\overline{Q})$.

Como caso particular del operador $\mathscr{L}$, que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$ (de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$), puede considerarse el operador D^α, $|\alpha| = k$, que a la función f de $H^k(Q)$ (de $C^k(\overline{Q})$) pone en correspondencia su derivada generalizada (clásica). El operador D^α, que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, no es acotado, ya que él transforma una sucesión $f_m(x) = e^{im(x_1+\ldots+x_n)}$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $H^k(Q)$, acotada en $L_2(Q)$ ($\|f_m\|_{L_2(Q)} = \sqrt{|Q|}$, $m = 1, 2, \ldots$), en otra sucesión $g_m(x) = (im)^{|\alpha|} e^{im(x_1+\ldots+x_n)}$, $m = 1, 2, \ldots$, no acotada en $L_2(Q)$ ($\|g_m\|_{L_2(Q)} = m^{|\alpha|}\sqrt{|Q|} \to \infty$ cuando $m \to \infty$).

De modo análogo se puede demostrar que también $\mathscr{L}$, $k \geqslant 1$, que actúa de $L_2(Q)$ en $L_2(Q)$, no es acotado, como tampoco son acotados los operadores D^α y $\mathscr{L}$ de $C(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$.

El operador $\mathscr{L}$, considerado como un operador que actúa de $H^k(Q)$ en $L_2(Q)$, o de $C^k(\overline{Q})$ en $C(\overline{Q})$, será acotado, puesto que para toda $f \in H^k(Q)$ $(C^k(\overline{Q}))$

$$\|\mathscr{L}f\|_{L_2(Q)} \leqslant \text{const}\,\|f\|_{H^k(Q)} \quad (\|\mathscr{L}f\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \text{const}\,\|f\|_{C^k(\overline{Q})}).$$

PROBLEMAS DEL CAPITULO III.

1. Una bola $s = \{\|x\| < 1\}$ del espacio de Banach llamaremos *estrictamente convexa*, si para cualesquiera puntos x e y, $x \neq y$, de la esfera unitaria $\|x\| = \|y\| = 1$, y para cualquier $\alpha \in (0, 1)$ el punto $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$, es decir, $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < 1$.

¿Será la bola unitaria estrictamente convexa en los espacios $C(\overline{Q})$, $L_1(Q)$, $L_2(Q)$?

2. Sea x un punto de la esfera unitaria en $C(\overline{Q})$ $(L_1(Q))$. Hállese el conjunto de todos los puntos y de la esfera unitaria para los cuales todos los puntos del segmento $\alpha x + (1-\alpha)y$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, pertenezcan a esta esfera.

3. Un conjunto $\dot{C}^k(\overline{Q})$ es una variedad lineal en $C^k(\overline{Q})$. Designemos por $\mathring{C}^k(\overline{Q})$ la adherencia de este conjunto según la norma $\max\limits_{x \in \overline{Q}} \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha f(x)|$: $\mathring{C}^k(\overline{Q}) = \overline{\dot{C}^k(\overline{Q})}$). ¿De qué funciones consta $\mathring{C}^k(\overline{Q})$?

4. Muéstrese que si $\partial Q \in C^k$, $C^\infty(\overline{Q})$ será siempre denso en $C^k(\overline{Q})$.

Sea B un espacio de Banach y sean $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$ subespacios suyos. Suele decirse que B es una suma directa de $\mathscr{M}$ y $\mathscr{N}$: $B = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$, si cualquier elemento f de B se representa unívocamente como la suma $f_1 + f_2$, donde $f_1 \in \mathscr{M}$, y $f_2 \in \mathscr{N}$. Si un espacio de Hilbert $H = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$, y, al mismo tiempo $\mathscr{M} \perp \mathscr{N}$, entonces $\mathscr{M}$ (y $\mathscr{N}$) se llama complemento ortogonal a $\mathscr{N}$ (respectivamente a $\mathscr{M}$) en H.

5. Represéntese el espacio $C^k([a, b])$ como la suma directa del subespacio $\dot{C}^k([a, b])$ y de algún subespacio $\mathscr{N}$. Hállese la dimensión de $\mathscr{N}$.

6. Un conjunto de funciones de $L_2(Q)$ iguales a cero (casi siempre) en el dominio Q', $Q' \subset Q$, es un subespacio del especio $L_2(Q)$. Hállese su complemento ortogonal.

7. En el plano $x = (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \operatorname{sen} \varphi)$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, examinemos la función $f(x) = r^{\alpha}\varphi$. ¿Para qué α la función $f \in H'(Q)$, donde el dominio Q es a) un círculo $\{r < 1\}$, b) $\{r < 1, \varphi \neq 0\}$?

8. Supongamos que la sucesión $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^k(\overline{Q})$ es débilmente convergente en $L_2(Q)$ hacia una función f, y la sucesión $D^{\alpha} f_m$, $m = 1, 2, \ldots$, para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = k$, es acotada en $L_2(Q)$. Muéstrese que la función f admite la derivada generalizada $D^{\alpha} f$.

9. Supongamos que la sucesión $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{Q})$ es débilmente convergente en $L_2(Q)$ y las sucesiones $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $m = 1, 2, \ldots$, son acotadas en $L_2(Q)$. Muéstrese que la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, converge fuertemente en $L_2(Q)$. Dese un ejemplo de la sucesión que satisfaga las condiciones enunciadas y que sea no compacta en $H^1(Q)$.

10. Muéstrese que si una sucesión $f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, de funciones de $\dot{C}^k(\overline{Q})$, $k \geqslant 1$, converge débilmente en $L_2(Q)$ hacia la función f, y para todo $\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = k$, $\| D^{\alpha} f_m \|_{L_2(Q)} \leqslant \text{const}$, $m = 1, 2, \ldots$, entonces, a) $f \in \mathring{H}^k(Q)$, b) la sucesión f_m, $m = 1, 2, \ldots$, en $H^{k-1}(Q)$ converge fuertemente hacia f.

11. Demuéstrese que para toda función $f(x)$ de $H^k(K)$ (de $C^k(\overline{K})$), donde K es un cubo n-dimensional, existe una prolongación terminal $F(x)$ en el dominio más amplio Q, $Q \Supset K$, que pertenece a $H^k(Q)$ ($C^k(\overline{Q})$). En este caso tiene lugar la desigualdad $\| F \|_{H^k(Q)} \leqslant C \| f \|_{H^k(K)}$ en la cual la constante $C > 0$ no depende de f.

12. Sea x^0 un punto del dominio Q de un espacio n-dimensional R_n, $n > 1$. Muéstrese que la adherencia de una variedad lineal de funciones continuamente derivables en $\overline{Q}$, que se reducen a cero en un entorno (para cada función se tiene su propio entorno) del punto x^0, coincide con $H^1(Q)$.

13. Demuéstrese que un conjunto $\widetilde{H}^1(a, b)$ de todas las funciones f de $H^1(a, b)$ para las cuales $f(a) = f(b)$, es un subconjunto del espacio $H^1(a, b)$. Muéstrese que tienen lugar las siguientes incorporaciones $\mathring{H}^1(a, b) \subset \widetilde{H}^1(a, b) \subset \subset H^1(a, b)$. Hállense los complementos ortogonales de $\mathring{H}^1(a, b)$ en $\widetilde{H}^1(a, b)$ y de $\widetilde{H}^1(a, b)$, en $H^1(a, b)$ y constrúyanse bases ortonormales de los espacios $\mathring{H}^1(a, b)$ $\widetilde{H}^1(a, b)$ y $H^1(a, b)$.

Sea la función $f \in L_2(K)$, donde K es un cubo $\{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n\}$. De acuerdo con el teorema de Fubini, para casi todo $x_n = \xi \in (-a, a)$ está definida una función $f(x', \xi)$, perteneciente a $L_2(K')$, donde K' es un cubo $(n-1)$-dimensional $\{|x_i| < a, i = 1, \ldots, n-1\}$. Esta función la llamaremos valor de la función f en la sección $K \cap \{x_n = \xi\}$. De modo análogo, para casi todo $x' = \xi' \in K'$ está definida una función $f(\xi', x_n)$ que pertenece a $L_2(-a, a)$. Llamaremos esta función valor de la función f en la sección $K \cap \{x' = \xi\}$.

Para la función $f \in H^1(K)$ existe una traza $f|_{x_n = \xi}$ de $L_2(K')$, cualesquiera que sea $x_n = \xi \in [-a, a]$.

14. Demuéstrese que si $f \in H^1(K)$, entonces para casi todo $\xi' \in K'$ su valor $f(\xi', x_n)$ en la sección $K \cap \{x' = \xi'\}$ pertenece al espacio $H^1(-a, a)$, para casi todo $\xi \in (-a, a)$ la traza $f|_{x_n = \xi}$ y el valor $f(x', \xi)$ de la función f en la sección $K \cap \{x_n = \xi\}$ pertenecen a $H^1(K')$.

15. Demuéstrese que un conjunto de trazas de todas las funciones de $H^1(Q)$ en la superficie $(n-1)$-dimensional $S \subset \overline{Q}$ no coincide con $L_2(S)$.

16. Demuéstrense las siguientes afirmaciones:

a) si una función $f \in H^1(Q)$, la función $|f|$ también pertenece a $H^1(Q)$,

b) si las funciones $f_1, \ldots, f_N$ pertenecen a $H^1(Q)$, las funciones $\max \times \times f_1, \ldots, f_N)$ y $\min(f_1, \ldots, f_N)$ también pertenecen a $H^1(Q)$.

17. Diremos que una función $f(x)$ pertenece a la clase $C^\alpha(Q)$ para cierto α, $0 < \alpha < 1$, si para todo subdominio Q' estrictamente interior, $Q' \Subset Q$, existe una constante $C = C(Q')$ tal que para todos los puntos x' y x'' de $\overline{Q'}$ tiene lugar la desigualdad $|f(x') - f(x'')| \leqslant C\,|x' - x''|^\alpha$. Si para cierta constante C, esta desigualdad se cumple en todos los x' y x'' de $\overline{Q}$, diremos que la función $f(x)$ pertenece a la clase $C^\alpha(\overline{Q})$.

Demuéstrese que si $f \in H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ (Q es un dominio n-dimensional), $f \in C^\alpha(Q)$ para cualquier $\alpha < [n/2]+1-n/2$, y si la función $f \in \overset{\circ}{H}{}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ o $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ y $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, entonces $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ para cualquier $\alpha < < [n/2]+1-n/2$.

18. Demuéstrese que todo conjunto acotado en $H^{k+1+\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$ (Q es un dominio n-dimensional, $\partial Q \in C^{k+1+\left[\frac{n}{2}\right]}$) es compacto en $C^k(\overline{Q})$.

19. Supongamos que las funciones $k(x)$, $a(x)$, $\rho(x)$ pertenecen a $C(\overline{Q})$, $\sigma(x) \in C(\partial Q)$, $k(x) > 0$, $a(x) \geqslant 0$, $\rho(x) \geqslant 0$ en $\overline{Q}$, $\sigma(x) \geqslant 0$ en ∂Q. Muéstrese que las formas bilineales definidas en $H^1(Q)$

$$W_1(f, g) = \int_Q (k\nabla f \nabla \overline{g} + af\overline{g})\,dx + \left(\int_Q \rho f\,dx\right)\left(\int_Q \rho\overline{g}\,dx\right),$$

para $a + \rho \not\equiv 0$ y

$$W_2(f, g) = \int_Q (k\nabla f \nabla \overline{g} + af\overline{g})\,dx + \left(\int_{\partial Q} \sigma f\,dS\right)\left(\int_{\partial Q} \sigma\overline{g}\,dS\right),$$

si (o) $a \not\equiv 0$ ó $\sigma \not\equiv 0$, definen on $H^1(Q)$ productos escalares equivalentes al producto

$$(f, g)_{H^1(Q)} = \int_Q (\nabla f \nabla \overline{g} + f\overline{g})\,dx.$$

20. Supongamos que una función $k(x) \in C^1([0, 1])$ y $k(x) > 0$ cuando $x > 0$. Denotemos con $H_k(0, 1)$ una completación del conjunto de todas las funciones de $C^1([0, 1])$ que se reducen a cero para $x = 1$ según una norma generada por el producto escalar $\int_0^1 k(x) f'(x) \overline{g}'(x)\,dx$. Demuéstrese que $H_k(0, 1) \subset L_2(0, 1)$ cuando, y sólo cuando, $\lim_{x \to +0} k(x) \cdot x^{-2} > 0$.

21. Muéstrese que en el espacio $\overset{\circ}{H}{}^k(Q)$ los productos escalares $(f, g)' = = \int_Q \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f D^\alpha \overline{g}\,dx$ y $(f, g)'' = \int_Q \sum_{|\alpha| = k} D^\alpha f D^\alpha \overline{g}\,dx$ son equivalentes.

22. Sea $f \in L_2(0, 1)$. Una funcional lineal $l_f(u) = (f, u)_{L_2(Q)}$ es acotada en $\mathring{H}^k(0, 1)$ cualquiera que sea $k \geqslant 0$. Según el teorema de Riesz, existe un elemento (único) $F \in \mathring{H}^k(0, 1)$ tal que para todos los $u \in \mathring{H}^k(0, 1)$ se tiene $l_f(u) = (F, u)_{\mathring{H}^k(0,1)}$. Hállese F y pruébese que $F \in \mathring{H}^k(0, 1) \cap H^{2k}(0, 1)$. (A título de un producto escalar tómense a) producto escalar $(f, g) = \int\limits_0^1 f^{(k)}\bar{g}^{(k)}\,dx$, b) producto escalar $(f, g) = \int\limits_0^1 (f^{(k)}\bar{g}^{(k)} + f\bar{g})\,dx$, donde $f^{(k)} = \dfrac{d^k f}{dx^k}$).

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO III

O. V. Bésov, V. P. Iljin, S. M. Nikólski, Representaciones integrales de funciones y teoremas de inmersión, «Naúka», 1975 (en ruso).

S. M. Nikólski, Aproximación de las funciones de varias variables y teoremas de inmersión, «Naúka», 1969 (en ruso).

S. L. Sóbolev, Aplicaciones del análisis funcional en la física matemática, Edición de la universidad estatal de Leningrado, 1950 (en ruso).