§ 1. Soluciones generalizadas de los problemas de contorno. Problemas de valores propios

1. Soluciones clásicas y generalizadas de los problemas de contorno. Sea dada en un dominio n-dimensional Q una ecuación elíptica

$$\mathcal{L}u \equiv \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - a(x)u = f(x), \tag{1}$$

cuyos coeficientes son de valores reales y satisfacen las condiciones $a(x) \in C(\overline{Q})$, $k(x) \in C^1(\overline{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$ para todo $x \in Q$.

La función $u(x)$ y el término independiente $f(x)$ de la ecuación, hablando en general, pueden ser de valores complejos.

La función $u(x)$ de $C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ se llama *solución (solución clásica) del primer problema de contorno o del problema de Dirichlet* para la ecuación (1), si en Q ella satisface la ecuación (1) y en el contorno ∂Q, la condición

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{2}$$

donde $\varphi(x)$ es una función prefijada.

La función $u(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ se llama *solución (solución clásica) del tercer problema de contorno* para la ecuación (1), si en Q ella satisface la ecuación (1) y en el contorno ∂Q, la condición

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\Big|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{3}$$

ponde $\sigma(x)$ es una función prefijada de $C(\partial Q)$ y $\varphi(x)$ es una función prefijada. Convengamos en considerar $\sigma(x) \geqslant 0$.

Si la función $\sigma(x)$ en (3) es idénticamente igual a cero, el tercer problema de contorno se denomina *segundo problema de contorno* o *problema de Neumann*.

Cuando $n = 1$, la ecuación (1) es una ecuación diferencial ordinaria

$$\mathcal{L}u \equiv (k(x)u')' - a(x)u = f(x). \tag{1_1}$$

En este caso el dominio Q representa en sí un intervalo (α, β), y las condiciones límites del primer y tercer problemas de contorno tienen, respectivamente, la forma

$$u|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad u|_{x=\beta} = \varphi_1 \tag{2_1}$$

y

$$(-u'+\sigma_0 U)|_{x=\alpha}=\varphi_0,\ (u'+\sigma_1 u)|_{x=\beta}=\varphi_1, \qquad (3_1)$$

donde φ_0, φ_1, $\sigma_0 \geqslant 0$, $\sigma_1 \geqslant 0$ son ciertas constantes dadas.

Sea la función $u(x)$ una solución clásica en el dominio Q del primer problema de contorno (1), (2). Multipliquemos la identidad (1) por una función arbitraria $\overline{v(x)} \in \dot{C}^1(Q)$ e integremos en Q la igualdad obtenida. Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski obtendremos

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v}+au\bar{v})\,dx=-\int_Q f\bar{v}\,dx \qquad (4)$$

(la integral que surge al realizar la operación por el contorno ∂Q es igual a cero, por ser la función v terminal).

Si suponemos, además, que las derivadas parciales de la solución $u_{x_i} \in L_2(Q)$, $i=1, \ldots, n$, es decir, que $u(x) \in H^1(Q)$, y $f(x) \in \in L_2(Q)$, la identidad integral (4) tendrá lugar no sólo para todas las funciones $v(x) \in \dot{C}^1(\overline{Q})$ sino también para todas las $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Para cerciorarse de esto tomemos una función arbitraria v de $\mathring{H}^1(Q)$ y una sucesión $v_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, de funciones de $\dot{C}^1(\overline{Q})$ que en la norma de $H^1(Q)$ converge hacia la función v. Para toda función $v_k(x)$ se cumple la igualdad (4). Pasando en esta igualdad al límite para $k \to \infty$, llegamos a la conclusión de que la igualdad (4) es también válida para la función v.

De este modo, si $f \in L_2(Q)$, la solución clásica u del problema (1), (2), perteneciente al espacio $H^1(Q)$, satisface la identidad integral (4) para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

Introduzcamos la siguiente definición.

La función $u \in H^1(Q)$ se llama *solución generalizada del problema* (1), (2) para $f \in L_2(Q)$, si ella satisface la identidad (4) para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ y la condición límite (2). En la condición límite (2) la igualdad se entiende como igualdad de elementos pertenecientes a $L_2(\partial Q)$, siendo $u|_{\partial Q}$ una traza de la función u.

Señalemos que el concepto enunciado de una solución generalizada no es en plena medida una generalización del concepto clásico correspondiente, pues para que una solución clásica $u(x)$ sea generalizada, se le deben imponer ciertas condiciones adicionales de carácter «integral», a saber, suponer que $u \in H^1(Q)$ y $\mathscr{L}u \in L_2(Q)$, donde $\mathscr{L}$ es un operador en (1).

Del modo análogo se puede introducir el concepto de la solución generalizada del tercer (segundo) problema de contorno para la ecuación (1). Sea la función $u(x)$ una solución clásica del tercer problema de contorno (1), (3). Supongamos que el segundo miembro

$f(x)$ en la ecuación (1) pertenece a $L_2(Q)$, y la función $\varphi(x)$ en la condición límite (3) pertenece a $L_2(\partial Q)$. Multipliquemos la identidad (1) por una función arbitraria $\overline{v(x)}$ de $H^1(Q)$ e integremos la igualdad obtenida en el dominio Q. Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski obtendremos la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\,dS = -\int_Q f\bar{v}\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS, \qquad (5)$$

la cual es satisfecha por la solución clásica $u(x)$ para todas las $v(x) \in \in H^1(Q)$.

Introduzcamos la siguiente definición.

Una función $u \in H^1(Q)$ se denomina *solución generalizada del tercer (del segundo, si $\sigma(x) \equiv 0$) problema de contorno para la ecuación* (1), siendo $f \in L_2(Q)$, $\varphi \in L_2(\partial Q)$, si para ella se cumple la identidad (5) cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$.

Enunciando las definiciones de soluciones generalizadas, suponíamos que las funciones v en (4) y (5) son de valores complejos. No obstante, pueden ser, del mismo modo, consideradas de valores reales. En efecto, si la función u de $H^1(Q)$ satisface, por ejemplo, la identidad (4) para todas las v de valores complejos de $\mathring{H}^1(Q)$, es obvio que satisfacerá la misma identidad para todas las v de valores reales de $\mathring{H}^1(Q)$. Y viceversa, supongamos que la función u de $H^1(Q)$ satisface la identidad (4) para todas las v de valores reales de $\mathring{H}^1(Q)$. En este caso, la identidad (4) es también válida para cualquier $v = = \mathrm{Re}\, v + i\, \mathrm{Im}\, v$ de valores reales del espacio $\mathring{H}^1(Q)$, ya que (4) es válida para las funciones $\mathrm{Re}\, v$ y $\mathrm{Im}\, v$, pertenecientes a $\mathring{H}^1(Q)$.

Indiquemos que de hecho ya nos hemos chocado (en el caso bidimensional) con soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación (1), al obtener, en el p. 1, § 3, cap. I, las condiciones de equilibrio para una membrana: las identidades integrales (4) y (5), que figuraban en la definición de las soluciones generalizadas, coinciden con las identidades (4) y (1), p. 1, § 3, cap I.

Las definiciones de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación (1) pueden también ser extendidas, por supuesto, al caso unidimensional. La función u del espacio $H^1(\alpha, \beta)$ que satisface las condiciones límites (2_1) (del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, se desprende que $u \in C([\alpha, \beta])$, será la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (1_1), si para cualquier $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ se cumple la igualdad

$$\int_\alpha^\beta (ku'\bar{v}' + au\bar{v})\,dx = -\int_\alpha^\beta f\bar{v}\,dx. \qquad (4_1)$$

Una función u de $H^1(\alpha, \beta)$ es la solución generalizada del tercer (segundo) problema de contorno para la ecuación (1_1), si para toda $v \in H^1(\alpha, \beta)$ se cumple la igualdad

$$\int_\alpha^\beta (ku'\bar{v}' + au\bar{v})\,dx + k(\beta)\,\sigma_1 u(\beta)\,\bar{v}(\beta) + k(\alpha)\,\sigma_0 u(\alpha)\,\bar{v}(\alpha) =$$

$$= -\int_\alpha^\beta f\bar{v}\,dx + k(\beta)\,\varphi_1\bar{v}(\beta) + k(\alpha)\,\varphi_0\bar{v}(\alpha). \qquad (5_1)$$

En este párrafo se estudian las soluciones generalizadas de los problemas de contorno. Puesto que las soluciones generalizadas son elementos del espacio de Hilbert $H^1(Q)$, usaremos ampliamente los resultados generales correspondientes obtenidos en el capítulo segundo.

La investigación de las soluciones clásicas de los problemas de contorno es una tarea mucho más complicada y es natural dividirla en dos problemas más simples: primero construir una solución generalizada y luego, al establecer (admitiendo ciertas suposiciones) su suavidad, mostrar que es una solución clásica. La demostración de la suavidad de las soluciones generalizadas será llevada a cabo en el punto siguiente.

2. Existencia y unicidad de la solución generalizada en el caso más simple. El estudio de las cuestiones relacionadas con la existencia y la unicidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno es más conveniente empezarlo por el caso en que las condiciones límites son homogéneas (es decir, la función φ es igual a cero). Por definición, la solución generalizada del problema de contorno (1), (2) para $\varphi = 0$ es una función u de $\mathring{H}^1(Q)$, que satisface para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ la identidad integral (4):

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx = -\int_Q f\bar{v}\,dx.$$

La solución generalizada del tercer (segundo) problema de contorno (1), (3) para $\varphi = 0$ es una función $u \in H^1(Q)$, que para toda $v \in H^1(Q)$ satisface la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\,dS = -\int_Q f\bar{v}\,dx. \qquad (6)$$

Sea $a(x) \geqslant 0$ en Q. Entonces, según el corolario del teorema 6, p. 6, § 5, cap. III, en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ se puede introducir un producto escalar que sea equivalente al producto ordinario $\Big((u, v) =$

$$= \int_Q (\nabla u\, \Delta \bar{v} + u\bar{v})\, dx\Big)$$

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v})\, dx. \tag{7}$$

Por lo tanto, a la identidad (4) se le puede dar la forma siguiente

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \tag{8}$$

Para f fijada de $L_2(Q)$, $(f, v)_{L_2(Q)}$ será una funcional lineal definida en $\mathring{H}^1(Q)$, $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Como

$$|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

donde la constante positiva C no depende de f y v, esta funcional es acotada y su norma no supera a $C\,\|f\|_{L_2(Q)}$.

De acuerdo con el teorema de Riesz (teorema 1, p. 2, § 3, cap. II), en $\mathring{H}^1(Q)$ existe una función F_1 para la cual $(f, v)_{L_2(Q)} = (F_1, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ cualquiera que sea $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Tal función es única y satisface la desigualdad $\|F_1\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\,\|f\|_{L_2(Q)}$. Por consiguiente, en $\mathring{H}^1(Q)$ existe una única función $u = F_1$ que satisface la identidad (8).

De esta manera queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 1. *Cuando $a(x) \geqslant 0$ en Q, para toda $f \in L_2(Q)$, existe también una sola solución generalizada del problema* (1), (2) *(para $\varphi = 0$). Con ello,*

$$\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\,\|f\|_{L_2(Q)}, \tag{9}$$

donde la constante positiva C no depende de f.

Si $a(x) \geqslant 0$ en Q y si por lo menos una de las funciones $a(x)$ o $\sigma(x)$ no es idénticamente nula, entonces, de acuerdo con el corolario del teorema 5, p. 6, § 5, cap. III, en $H^1(Q)$ se puede introducir el producto escalar

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + au\bar{v})\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\, dS, \tag{10}$$

que sea equivalente al producto ordinario.

Por consiguiente, se puede escribir (6) en la forma

$$(u, v)_{H^1(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \tag{11}$$

Puesto que para $f \in L_2(Q)$ fijada la funcional $(f, v)_{L_2(Q)}$, lineal respecto a $v \in H^1(Q)$, es acotada: $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant$ $\leqslant C\,\|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{H^1(Q)}$, donde la constante $C > 0$ no depende de f ni de v, entonces, según el teorema de Riesz, en $H^1(Q)$ existe una función F_2 para la cual $(f, v)_{L_2(Q)} = (-F_2, v)_{H^1(Q)}$ cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$, con la particularidad de que esta función es única y $\|F_2\|_{H^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}$. Por consiguiente, en $H^1(Q)$ existe la única función $u = F_2$ que satisface la identidad (11).

De esta manera queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Cuando $a(x) \geqslant 0$ en Q y por lo menos una de las funciones $a(x)$ o $\sigma(x)$ no es idénticamente nula, entonces, para toda $f \in L_2(Q)$ también existe una sola solución generalizada del problema* (1), (3) *(para $\varphi = 0$). Con ello*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}, \tag{12}$$

donde la constante positiva C no depende de f.

OBSERVACION. Si la función f tiene valores reales, las soluciones examinadas en los teoremas 1 y 2 de los problemas de contorno también tienen valores reales. En efecto, sea $u = \mathrm{Re}\, u + i\, \mathrm{Im}\, u$ una solución generalizada de cualquiera de estos problemas de contorno. Puesto que los coeficientes de la ecuación y de la función f son reales, la función $\mathrm{Re}\, u$ es también una solución generalizada del mismo problema, lo que se deduce de (4) (o de (6)) (las funciones v en (4) y (6) se pueden considerar como funciones de valores reales). Por eso, de la unicidad de la solución se desprende que $u = \mathrm{Re}\, u$.

3. Funciones propias y valores propios. Una función $u(x)$, que no es idénticamente nula, se llama *función propia del primer problema de contorno para el operador $\mathscr{L} = \mathrm{div}\,(k(x)\nabla) - a(x)$*, si existe un número λ tal que la función $u(x)$ sea una solución clásica del problema siguiente:

$$\mathscr{L}u = \lambda u, \quad x \in Q, \tag{13}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{14}$$

El número λ se llama *valor propio* (correspondiente a la función propia $u(x)$).

Es evidente que a cada función propia le corresponde un valor propio único. La correspondencia recíproca no es unívoca. En particular, si $u(x)$ es una función propia, la función $cu(x)$ para cualquier constante $c \neq 0$ es también propia, correspondiente al mismo valor propio. Por esta causa se puede hablar de funciones propias, normadas, por ejemplo, mediante la condición $\|u\|_{L_2(Q)} = 1$.

Sea λ un valor propio y sea $u(x)$ una función propia del primer problema de contorno y sea, además, $u(x) \in \mathring{H}^1(Q)$. Multiplicando (13) por $\bar{v} \in \mathring{H}^1(Q)$ arbitraria e integrando la igualdad obtenida en el dominio Q, llegamos a la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v}) + au\bar{v}\, dx = -\lambda \int_Q u\bar{v}\, dx, \tag{15}$$

a la cual la función u satisface para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

Una función $u \in \mathring{H}^1(Q)$ distinta de cero se llama *función generalizada propia del primer problema de contorno para el operador* $\mathcal{L}$, si existe un número λ tal que la función u satisface la identidad integral (15) para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$; el número λ se denomina *valor propio* (correspondiente a la función generalizada propia u)

Vamos a considerar que $\| u \|_{L_2(Q)} = 1$.

Una función $u(x)$ que no es idénticamente nula se llama *función propia del tercer* (*segundo*) *problema de contorno para el operador* $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$, si existe un número λ (*valor propio* correspondiente a $u(x)$) tal que la función $u(x)$ sea una solución clásica del problema siguiente:

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad x \in Q,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right|_{\partial Q} = 0.$$

Es fácil ver que la función propia del tercer (segundo) problema de contorno para toda $v \in H^1(Q)$ satisface la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + au\bar{v})\,dx + \int_{\partial Q} k\sigma u\bar{v}\,dS = -\lambda \int_Q u\bar{v}\,dx. \tag{16}$$

Una función $u \in H^1(Q)$ distinta de cero se llama *función generalizada propia del tercer* (*segundo*) *problema de contorno para el operador* $\mathcal{L}$, si existe un número λ (*valor propio* correspondiente a u) tal que para toda $v \in H^1(Q)$ la función u satisface la identidad integral (16).

Vamos a considerar que $\| u \|_{L_2(Q)} = 1$.

En adelante en este párrafo consideraremos sólo funciones generalizadas propias y los valores propios que les corresponden. Nos será cómodo examinar las identidades (15) y (16), que definen las funciones generalizadas propias, como igualdades de los productos escalares en el espacio $L_2(Q)$ y en los espacios $\mathring{H}^1(Q)$ o $H^1(Q)$, respectivamente.

Sea $m = \min\limits_{x \in \bar{Q}} a(x)$ (aquí no suponemos que $a(x) \geqslant 0$). Entonces la función

$$\tilde{a}(x) = a(x) - m + 1 \quad 1 \text{ en } Q.$$

Por eso, el producto escalar (equivalente al ordinario) puede ser dado en $\mathring{H}^1(Q)$ por la igualdad

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u\nabla\bar{v} + \tilde{a}u\bar{v})\,dx, \tag{17}$$

y en $H^1(Q)$, por la igualdad

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla \bar{v} + \tilde{a} u \bar{v})\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma u \bar{v}\, dS. \tag{18}$$

Luego, las identidades (15) y (16) se pueden escribir en la forma

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = (-\lambda - m + 1)(u, v)_{L_2(Q)} \tag{19}$$

y

$$(u, v)_{H^1(Q)} = (-\lambda - m + 1)(u, v)_{L_2(Q)}. \tag{20}$$

Establezcamos ante todo la validez de las siguientes afirmaciones.

LEMA 1. *Existe un operador lineal acotado A que actúa de $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$, cuyo campo de definición es $L_2(Q)$, para el cual tiene lugar la igualdad*

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)}, \tag{21}$$

cualquiera que sea $v \in \mathring{H}^1(Q)$.

El operador A tiene un operador inverso A^{-1}. El operador A, si es considerado como un operador que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$, es autoconjugado, positivo y totalmente continuo.

LEMA 1'. *Existe un operador lineal acotado A' que actúa de $L_2(Q)$ en $H^1(Q)$, cuyo campo de definición es $L_2(Q)$, para el cual tiene lugar la igualdad*

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (A'u, v)_{H^1(Q)}, \tag{21'}$$

cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$.

El operador A' tiene un operador inverso A'^{-1}. El operador A', si es considerado como un operador que actúa de $H^1(Q)$ en $H^1(Q)$, es autoconjugado, positivo y totalmente continuo).*

Demostremos el lema 1. La demostración del lema 1' se efectúa de igual manera.

Para toda función (fijada) $u \in L_2(Q)$ lineal respecto a v, $v \in \mathring{H}^1(Q)$, la funcional $l(v) = (u, v)_{L_2(Q)}$ es acotada, puesto que

$$|l(v)| = |u, v|_{L_2(Q)} \leqslant \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)}$$

Por esta razón, según el teorema de Riesz, existe la única función $U \in \mathring{H}^1(Q)$, $\|U\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant C\|u\|_{L_2(Q)}$, tal que $l(v) = (U, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Esto equivale a que en $L_2(Q)$ está dado un operador A (lineal, evidentemente): $Au = U$, para el cual tiene lugar (21). Como $\|Au\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\|u\|_{L_2(Q)}$, el opera-

*) El tipo de los operadores A y A' depende, por supuesto, de cómo se definen en $\mathring{H}^1(Q)$ y en $H^1(Q)$, respectivamente, los productos escalares. Aquí se emplean los productos escalares (17) y (18).

dor A que actúa de $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ es acotado. Si para cierta u de $L_2(Q)$ $Au = 0$, entonces, en vista de (21), para toda $v \in \mathring{H}^1(Q) \times \times (u, v)_{L_2(Q)} = 0$, es decir, $u = 0$. Esto significa que el operador A^{-1} existe.

De (21) se deduce que el operador A que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ es autoconjugado: $(Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = (u, v)_{L_2(Q)} = \overline{(v, u)}_{L_2(Q)} = (Av, u)_{\mathring{H}^1(Q)} = (u, Av)_{\mathring{H}^1(Q)}$. De (21) también se desprende que el operador A es positivo.

Mostremos que el operador A que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ es totalmente continuo. Elijamos en $\mathring{H}^1(Q)$ un conjunto de funciones arbitrario acotado. En virtud del teorema 3, p. 4, § 5, cap. III, este conjunto es compacto en $L_2(Q)$. Quiere decir, de cualesquiera de sus subconjuntos infinitos se puede extraer una sucesión u_s, $s = 1, 2, \ldots$, fundamental en $L_2(Q)$. Puesto que el operador A que actúa de $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ es acotado y, por lo tanto, continuo, la sucesión Au_s, $s = 1, 2, \ldots$, es fundamental en $\mathring{H}^1(Q)$. El lema está demostrado.

De acuerdo con el lema 1, la identidad (19) se puede escribir en forma de una ecuación operacional en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$:

$$-(\lambda + m - 1)\,Au = u, \quad u \in \mathring{H}^1(Q). \tag{22}$$

De acuerdo con el lema 1', la identidad (20) se puede escribir en la forma de una ecuación operacional en el espacio $H^1(Q)$:

$$-(\lambda + m - 1)\,A'u = u, \quad u \in H^1(Q). \tag{22'}$$

Así pues, el número λ es el valor propio del primer (segundo, correspondientemente) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$, y u, es la función propia generalizada que se le asigna a λ, cuando, y sólo cuando, $-(\lambda + m - 1)$ es el número característico del operador autoconjugado totalmente continuo A que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ (A' actúa de $H^1(Q)$ en $H^1(Q)$), y u es un elemento que corresponde a este número característico.

Por eso, de los resultados obtenidos en el § 5, cap. II, se infiere que existe a lo sumo un conjunto numerable de valores propios del primer (tercer) problema de contorno; este conjunto no tiene puntos límites finitos, todos los valores propios son reales; a todo valor propio le corresponde un número finito (multiplicidad del valor propio) de funciones propias ortogonales entre sí en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$); las funciones propias correspondientes a diferentes valores propios son ortogonales en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$).

Señalemos que para todo valor propio λ del primer (tercer) problema de contorno se puede elegir exactamente k (k es la multiplicidad de λ) funciones propias reales ortogonales a pares en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$). Sea $u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u$ una función propia, correspondiente al valor propio λ. Puesto que λ y los coeficientes $k(x)$ y $a(x)$ son reales, las funciones $\operatorname{Re} u$ e $\operatorname{Im} u$, como se ve de (15) y (16) (las funciones v en el (15) y (16) pueden considerarse reales) son también funciones propias correspondientes al mismo número λ. En este caso, no es difícil ver que el número máximo de funciones reales propias, ortogonales a pares, es igual a k.

Sea

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots \tag{23}$$

una sucesión que contiene todos los valores propios del primer (tercer) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$, con la particularidad de que cada valor propio se repetirá tantas veces como es la multiplicidad del operador. Sea

$$u_1, u_2, \ldots, u_s, \ldots \tag{24}$$

un sistema de funciones propias generalizadas ($\| u_s \|_{L_2(Q)} = 1$) ortogonales entre sí en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $\mathring{H}^1(Q)$; cada u_s corresponde al valor propio λ_s:

$$-(\lambda_s + m - 1) A u_s = u_s, \quad s = 1, \ldots, \tag{25}$$

para el primer problema de contorno y

$$-(\lambda_s + m - 1) A' u_s = u_s, \quad s = 1, \ldots, \tag{25'}$$

para el tercer problema de contorno.

Multiplicando de modo escalar (25) ((25')) en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) por u_s, obtendremos, en virtud de (21) ((21')), las igualdades

$$\| u_s \|^2_{\mathring{H}^1(Q)} = -(\lambda_s + m - 1) \| u_s \|^2_{L_2(Q)} = -(\lambda_s + m - 1), \tag{26}$$

$$\| u_s \|^2_{H^1(Q)} = -(\lambda_s + m - 1) \| u_s \|^2_{L_2(Q)} = -(\lambda_s + m - 1), \tag{26'}$$

las cuales (los productos escalares en $\mathring{H}^1(Q)$ y en $H^1(Q)$ están definidos por las fórmulas (17) y (18)) pueden escribirse en la forma

$$\int_Q k |\nabla u_s|^2 \, dx + \int_Q (a + \lambda_s) |u_s|^2 \, dx = 0 \tag{27}$$

para el primer problema de contorno y

$$\int_Q k |\nabla u_s|^2 \, dx + \int_Q (a + \lambda_s) |u_s|^2 \, dx + \int_{\partial Q} k\sigma |u_s|^2 \, dS, \tag{27'}$$

para el tercer problema de contorno.

De la igualdad (27) se deduce que para todo $s = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$\lambda_s < -m = -\min_{x \in \overline{Q}} a(x) \tag{28}$$

De la igualdad (27') se deduce que para todo $s = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$\lambda_s \leqslant -m = -\min_{x \in \overline{Q}} a(x), \tag{28'}$$

con la particularidad de que para cualquier $s = 1, \ldots$ tiene lugar una desigualdad rigurosa, si (o) $a(x) \not\equiv \text{const}$, o $\sigma(x) \not\equiv 0$. Si, en cambio, $\sigma(x) \equiv 0$ (segundo problema de contorno) y $a(x) \equiv \text{const}$, $a(x) \equiv m$, entonces entre los valores propios del segundo problema de contorno existe un valor, igual a $-m$, con la función propia igual a const $= 1/\sqrt{|Q|}$. La multiplicidad de este valor propio es 1, puesto que debido a (27') todas las funciones propias que le corresponden satisfacen la igualdad $\int_Q k|\nabla u|^2\,dx = 0$, es decir, son constantes.

De (26) ((26')) se deduce que el sistema

$$\frac{u_1}{\sqrt{1-m-\lambda_1}}, \ldots, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}, \ldots \tag{$\widetilde{24}$}$$

es ortonormado en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$). En vista del corolario 1 del teorema 2, p. 2, § 5, cap. II, el sistema es la base ortonormal en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$). Y como el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ ($H^1(Q)$) es de dimensiones infinitas, el conjunto $(\widetilde{24})$ y, consecuentemente, (23) es infinito. Por ello, $\lambda_s \to -\infty$ cuando $s \to \infty$.

Multipliquemos de modo escalar (25) ((25')) en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) por u_j, $j \neq s$. Valiéndonos de (21) ((21')), obtenemos la igualdad $-(\lambda_s + m - 1)(u_s, u_j)_{L_2(Q)} = 0$, es decir, el sistema (24) es ortonormado en $L_2(Q)$. Ya que una variedad lineal tendida en el sistema $(\widetilde{24})$ (y, por lo tanto, en el sistema (24)) es siempre densa en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$), será también siempre densa en $L_2(Q)$. Por consiguiente, el sistema (24) es la base ortonormal en $L_2(Q)$, es decir cualquier elemento $f \in L_2(Q)$ se desarrolla en una serie de Fourier convergente en $L_2(Q)$

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} f_s u_s, \quad f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}, \tag{29}$$

y se verifica la igualdad de Parseval—Steklov

$$\|f\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2.$$

Sea una función $f \in \mathring{H}^1(Q)$ $(H^1(Q))$. Ella se desarrolla en una serie de Fourier según la base ortonormal (24), convergente en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$)

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}} \tag{30}$$

en el caso del primer problema de contorno ($f \in \mathring{H}^1(Q)$) y

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}, \tag{30'}$$

en el caso del tercer problema de contorno ($f \in H^1(Q)$). Aquí se verifican las desigualdades de Parseval — Steklov

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \right|^2 = \|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}$$

y, correspondientemente,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \right|^2 = \|f\|^2_{H^1(Q)}.$$

La serie (30) ((30')) converge, claro está, hacia f también en la norma de $L_2(Q)$. Comparando las series (30) y (29), obtenemos $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)} = \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \frac{1}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}$ $\Big(f_s = \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{H^1(Q)} \frac{1}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\Big)$. Por eso,

$$\|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \left(f, \frac{u_s}{\sqrt{1-m-\lambda_s}}\right)_{\mathring{H}^1(Q)} \right|^2 = \sum_{s=1}^{\infty} (1-m-\lambda_s)|f_s|^2 =$$
$$= (1-m)\|f\|^2_{L_2(Q)} - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |f_s|^2$$

$$\left(\|f\|^2_{H^1(Q)} = (1-m)\|f\|^2_{L_2(Q)} - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |f_s|^2\right),$$

de donde, en virtud de (28),

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s||f_s|^2 \leqslant -\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s |f_s|^2 + 2|m| \sum_{s=1}^{\infty} |f_s|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} + (2|m| + |m-1|)\|f\|^2_{L_2(Q)}$$

y, correspondientemente (en virtud de (28′)),

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leqslant \|f\|^2_{H^1(Q)} + (2|m| + |m-1|) \|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

Por consiguiente, tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leqslant C \|f\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} \tag{31}$$

donde λ_s, $s = 1, 2, \ldots$, son los valores propios del primer problema de contorno, mientras que $f \in \mathring{H}^1(Q)$, y la desigualdad

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| |f_s|^2 \leqslant C \|f\|^2_{H^1(Q)} \tag{32}$$

donde λ_s, $s = 1, 2, \ldots$, son los valores propios del tercer problema de contorno, en tanto que $f \in H^1(Q)$. La constante C en (31) y (32) no depende de f. De este modo está demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 3. *Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ del primer o del tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathcal{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$ son reales y $\lambda_s \to -\infty$ cuando $s \to \infty$. Los valores propios del primer y tercer problemas de contorno, para $\sigma \not\equiv 0$, así como del segundo ($\sigma \equiv 0$) problema de contorno para $a(x) \not\equiv \text{const}$ satisfacen la desigualdad $\lambda_s < -\min_{x \in \overline{Q}} a(x)$, cualquiera que sea $s = 1, 2, \ldots$. Los valores propios del segundo problema de contorno, para la función constante $a(x) \equiv m$, satisfacen la desigualdad $\lambda_s \leqslant -m$, $s = 1, 2, \ldots$, con la particularidad de que existe un valor propio de multiplicidad 1, igual a $-m$, con una función propia generalizada $1/\sqrt{|Q|}$. Las funciones propias generalizadas $u_1(x), u_2(x), \ldots$ de los problemas de contorno en cuestión forman en $L_2(Q)$ una base ortonormal, es decir, toda función $f \in L_2(Q)$ se desarrolla en una serie de Fourier (29) convergente en $L_2(Q)$. Para la función $f \in \mathring{H}^1(Q)$ la serie (29) formada según funciones propias generalizadas del primer problema de contorno es convergente en $\mathring{H}^1(Q)$ y tiene lugar la desigualdad (31). Para la función $f \in H^1(Q)$ la serie (29) formada según funciones propias generalizadas del tercer (segundo) problema de contorno es convergente en $H^1(Q)$ y tiene lugar la desigualdad (32).*

4. Propiedades variacionales de los valores propios y de las funciones propias. Puesto que el operador A, que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ y está definido por la igualdad (21), es totalmente continuo, autoconjugado y positivo (lema 1), entonces, de acuerdo con el teorema 1, p. 1, § 5, cap. II, su primer número característico (positivo, evidentemente) es

$$\mu_1 = \inf_{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{(Af, f)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}} = \inf_{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}$$

(la norma del elemento f en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ está concordada con el producto escalar (17)). Con ello, la funcional $\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}/\|f\|^2_{L_2(Q)}$ toma el valor μ_1 cuando $f = u_1$, donde u_1 es el primer elemento propio del operador A. Por esta razón, el primer valor propio del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$ es

$$\lambda_1 = -m + 1 - \inf_{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = - \inf_{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \frac{\int\limits_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx}{\int\limits_Q |f|^2\,dx} \qquad (33)$$

y la cota inferior exacta de la funcional

$$\int\limits_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx \Big/ \int\limits_Q |f|^2\,dx$$

en el espacio $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ se consigue en la primera función propia u_1.

De los resultados del p. 1, § 5, cap. II se desprende que el $(k+1)$-ésimo número característico μ_{k+1} del operador A es igual a $\inf\limits_{\substack{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \\ (f, u_i)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}$. Ya que, de acuerdo con (21), $(f, u_i)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = \mu_i (f, Au_i)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = \mu_i (f, u_i)_{L_2(Q)}$, $i = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\mu_{k+1} = \inf_{\substack{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}$$

Por eso, el $(k+1)$-ésimo valor propio del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$

$$\lambda_{k+1} = -m + 1 - \inf_{\substack{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= - \inf_{\substack{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q) \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \ldots, k}} \frac{\int\limits_Q (k|\nabla f|^2 + a|f|^2)\,dx}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}. \qquad (34)$$

La cota inferior exacta de la funcional

$$\int_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx \Big/ \int_Q |f|^2\,dx$$

en el subespacio del espacio $\mathring{H}^1(Q)$ compuesto por todas las funciones ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las funciones propias $u_1, \ldots, u_k$ de este problema de contorno se consigue en la función propia u_{k+1}.

De modo totalmente análogo, para el tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$

$$\lambda_1 = -m+1-\inf_{f\in H^1(Q)} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = -\inf_{f\in H^1(Q)} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx+\int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}, \qquad (33')$$

$$\lambda_{k+1} = -m+1-\inf_{\substack{f\in H^1(Q)\\ (f,\,u_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\,\ldots,\,k}} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} = -\inf_{\substack{f\in H^1(Q)\\ (f,\,u_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\,\ldots,\,k}} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx+\int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}. \qquad (34')$$

La cota inferior exacta de la funcional

$$\frac{\int_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx+\int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}$$

en $H^1(Q)$ se consigue en la primera función propia u_1. La cota inferior exacta de esta funcional en el subespacio del espacio $H^1(Q)$ compuesto por todos los elementos, ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las funciones propias $u_1, \ldots, u_k$ del problema de contorno correspondiente, se alcanza en la $(k+1)$-ésima función propia u_{k+1}.

Las fórmulas (33) y (33') se pueden reunir en una:

$$\lambda_1 = -\inf_{f\in G} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx+\int_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int_Q |f|^2\,dx}, \qquad (33'')$$

con la particularidad de que λ_1 sea el primer valor propio del tercer (segundo, cuando $\sigma \equiv 0$) problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$, siempre que $G = H^1(Q)$, y λ_1 es el primer valor propio del primer problema de contorno, siempre que $G = \mathring{H}^1(Q)$ (en el caso en que $f \in \mathring{H}^1(Q)$, $\int\limits_{\partial Q} k\sigma \mid f \mid^2 dS = 0$).

Análogamente, se pueden también reunir las fórmulas (34) y (34′):

$$\lambda_{k+1} = - \inf_{\substack{f \in G \\ (f, u_i)_{L_2(Q)} = 0 \\ i = 1, \dots, k}} \frac{\int\limits_Q (k \mid \nabla f \mid^2 + a \mid f \mid^2)\, dx + \int\limits_{\partial Q} k\sigma \mid f \mid^2 dS}{\int\limits_Q \mid f \mid^2 dx}. \tag{34''}$$

El empleo de las fórmulas (34), (34′) y (34″) suele ser a veces dificultoso porque el $(k+1)$-ésimo valor propio λ_{k+1} se calcula, valiéndose de ellas, partiendo de las funciones propias $u_1, \dots, u_k$ conocidas de antemano. Más abajo obtendremos una fórmula para λ_{k+1}, privada de esta inconveniencia.

Tomemos arbitrariamente k funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ de $L_2(Q)$ y designemos con $R(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ un subespacio del espacio $\mathring{H}^1(Q)$, compuesto de las funciones f, ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_k$: $(f, \varphi_s)_{L_2(Q)} = 0$, $s = 1, \dots, k$. Sea

$$d(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = -m + 1 - \inf_{f \in R(\varphi_1, \dots, \varphi_k)} \frac{\| f \|^2_{\mathring{H}^1(Q)}}{\| f \|^2_{L_2(Q)}},$$

y sea d_{k+1} la cota inferior exacta del conjunto numérico $\{d(\varphi_1, \dots, \varphi_k)\}$, tomada respecto a toda clase de sistema $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ de funciones de $L_2(Q)$:

$$d_{k+1} = \inf_{\substack{(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \\ \varphi_s \in L_2(Q) \\ s = 1, \dots, k}} d(\varphi_1, \dots, \varphi_k).$$

Mostremos que $d_{k+1} = \lambda_{k+1}$, donde λ_{k+1} es el $(k+1)$-ésimo valor propio del primer problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$.

Puesto que $d(u_1, \dots, u_k) = \lambda_{k+1}$ (fórmula (34)), entonces $d_{k+1} \leqslant \lambda_{k+1}$. Establezcamos una desigualdad inversa. Para ello es suficiente, al fijar arbitrariamente la elección del sistema $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, construir una función f de $R(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ tal que para ella se tenga $\| f \|_{L_2(Q)} = 1$ y

$$\| f \|^2_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant -\lambda_{k+1} - m + 1.$$

Buscaremos la función f en la forma

$$f=\sum_{s=1}^{k+1} f_s u_s, \quad f_s=(f, u_s)_{L_2(Q)}.$$

En este caso las condiciones $f \in R(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ y $\|f\|_{L_2(Q)}=1$ tomarán la forma

$$(f, \varphi_p)_{L_2(Q)}=\sum_{s=1}^{k+1} f_s (u_s, \varphi_p)_{L_2(Q)}=0, \quad p=1, \ldots, k, \tag{35}$$

$$\|f\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{s=1}^{k+1} |f_s|^2=1. \tag{36}$$

Como el sistema lineal (35) respecto al vector $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ es un sistema homogéneo de k ecuaciones con $k+1$ incógnitas, siempre tendrá una solución no trivial. La condición de normalización (36) siempre puede ser satisfecha en este caso. Dado que en virtud de (26) y (36)

$$\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}=\sum_{s=1}^{k+1} |f_s|^2 \|u_s\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}=\sum_{s=1}^{k+1} |f_s|^2(-\lambda_s-m+1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=1}^{k+1} |f_s|^2(-\lambda_{k+1}-m+1)=-\lambda_{k+1}-m+1$$

(recordemos que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{k+1}$), la función f es la buscada.

Así pues, el $(k+1)$-ésimo valor propio del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$ se prefija por la fórmula

$$\lambda_{k+1}=\inf_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\\ \varphi_s \in L_2(Q)\\ s=1, \ldots, k}} \left(-m+1-\inf_{\substack{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)\\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}\right)=$$

$$=-m+1-\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\\ \varphi_s \in L_2(Q)\\ s=1, \ldots, k}} \inf_{\substack{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)\\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1, \ldots, k}} \frac{\|f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}}=$$

$$=-\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\\ \varphi_s \in L_2(Q)\\ s=1, \ldots, k}} \inf_{\substack{f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)\\ (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1, \ldots, k}} \frac{\int_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\, dx}{\int_Q |f|^2\, dx} \tag{37}$$

que expresa la así llamada propiedad *mini-máxima* de valores propios.

De la misma manera se obtiene la fórmula para el $(k+1)$-ésimo valor propio del tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$

$$\lambda_{k+1} = -m+1-\sup_{\substack{(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)\\ \varphi_i\in L_2(Q)\\ i=1,\ldots,k}}\ \inf_{\substack{f\in H^1(Q)\\ (f,\varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\ldots,k}} \frac{\|f\|^2_{H^1(Q)}}{\|f\|^2_{L_2(Q)}} =$$

$$= -\sup_{\substack{(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)\\ \varphi_i\in L_2(Q)\\ i=1,\ldots,k}}\ \inf_{\substack{f\in H^1(Q)\\ (f,\varphi_i)_{L_2(Q)}=0\\ i=1,\ldots,k}} \frac{\int\limits_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx+\int\limits_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}. \qquad (37')$$

Las fórmulas (37) y (37′) pueden ser reunidas en una:

$$\lambda_{k+1} = -\sup_{\substack{(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)\\ \varphi_i\in L_2(Q)\\ i=1,\ldots,k}}\ \inf_{\substack{f\in G\\ (f,\varphi_i)_{L_2(Q)}=1\\ i=1,\ldots,k}} \frac{\int\limits_Q (k|\nabla f|^2+a|f|^2)\,dx+\int\limits_{\partial Q} k\sigma|f|^2\,dS}{\int\limits_Q |f|^2\,dx}, \qquad (37'')$$

con la particularidad de que λ_{k+1} es el $(k+1)$-ésimo valor propio del primer problema de contorno para el operador $\operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$, siempre que $G = \mathring{H}^1(Q)$, y λ_{k+1}, el $(k+1)$-ésimo valor propio del tercer (segundo, cuando $\sigma \equiv 0$) problema de contorno, si $G = H^1(Q)$.

La propiedad mini-máxima de valores propios presta la oportunidad de comparar los valores propios de diferentes problemas de contorno.

TEOREMA 4.1. *Sean $\lambda_k^{\rm I}$, $\lambda_k^{\rm II}$ y $\lambda_k^{\rm III}$ los k-ésimos valores propios del primero, segundo y tercer (para cierto $\sigma \geqslant 0$) problemas de contorno para el operador $\mathscr{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$. Entonces, $\lambda_k^{\rm I} \leqslant \lambda_k^{\rm III} \leqslant \lambda_k^{\rm II}$ cualquiera que sea $k = 1, 2, \ldots$*

2. *Sea λ_k' el k-ésimo valor propio del primero, segundo o tercer (para cierto $\sigma = \sigma' \geqslant 0$) problemas de contorno para el operador $\mathscr{L}' = \operatorname{div}(k'(x)\nabla) - a'(x)$, y sea λ_k'' el k-ésimo valor propio del primero, segundo o tercer (para cierto $\sigma = \sigma'' \geqslant 0$), respectivamente, de los problemas de contorno para el operador $\mathscr{L}'' = \operatorname{div}(k''(x)\nabla) - a''(x)$. Si $k' \leqslant k''$, $a' \leqslant a''$ en Q y, en el caso del tercer problema de contorno, $\sigma' \leqslant \sigma''$ en ∂Q, entonces $\lambda_k' \geqslant \lambda_k''$ para todo $k = 1, 2, \ldots$*

3. *Sea Q' un subdominio del dominio Q, $Q' \subset Q$, y sean $\lambda_k(Q)$ y $\lambda_k(Q')$ los k-ésimos valores propios del primer problema de contorno para el operador $\mathscr{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$ en Q y, respectivamente, en Q'. Entonces, $\lambda_k(Q) \geqslant \lambda_k(Q')$ para cualquier $k = 1, 2, \ldots$*

DEMOSTRACIÓN 1. Sea $k > 1$. Puesto que el valor de la funcional, que se encuentra bajo el signo inf en (37″), en el caso del tercer problema de contorno ($\sigma \geqslant 0$), no es menor que su valor para el segundo problema de contorno ($\sigma = 0$), mientras que el conjunto G

en ambos casos es el mismo ($H^1(Q)$, será válida la desigualdad $\lambda_k^{III} \leqslant \lambda_k^{II}$. La desigualdad $\lambda_k^{I} \leqslant \lambda_k^{III}$ también se desprende de (37"), ya que el conjunto G, en el que se toma inf, es más amplio para el tercer problema de contorno que para el primer problema de contorno: $H^1(Q) \supset \mathring{H}^1(Q)$.

La afirmación 1, para $k = 1$, se deduce de (34").

2. La afirmación 2 se deduce de (37") (para $k > 1$) y de (34") (para $k = 1$), puesto que el valor de la funcional bajo el signo inf en el caso del operador $\mathscr{L}''$ no es menor que el valor correspondiente en el caso del operador $\mathscr{L}'$.

3. Puesto que el conjunto $\mathring{H}^1(Q)$ contiene un conjunto $\mathring{\tilde{H}}^1(Q)$ de funciones de $\mathring{H}^1(Q)$ que se reducen a cero en $Q \diagdown Q'$, entonces para $k > 1$

$$\lambda_k(Q) = -\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) \\ \varphi_s \in L_2(Q) \\ s=1, \ldots, k-1}} \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q) \\ (f, \varphi_s)_{L_2(Q)}=0 \\ s=1, \ldots, k-1}} T(f) \geqslant$$

$$\geqslant -\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) \\ \varphi_s \in L_2(Q) \\ s=1, \ldots, k-1}} \inf_{\substack{f \in \mathring{\tilde{H}}^1(Q) \\ (f, \varphi_s)_{L_2(Q)}=0 \\ s=1, \ldots, k-1}} T(f) =$$

$$= -\sup_{\substack{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}) \\ \varphi_s \in L_2(Q') \\ s=1, \ldots, k-1}} \inf_{\substack{f \in \mathring{H}^1(Q') \\ (f, \varphi_s)_{L_2(Q')}=0 \\ s=1, \ldots, k-1}} T(f) = \lambda_k(Q'),$$

donde

$$T(f) = \frac{\int_Q (k |\nabla f|^2 + a |f|^2)\, dx}{\int_Q |f|^2\, dx}.$$

Si $k = 1$, entonces

$$\lambda_1(Q) = -\inf_{f \in \mathring{H}^1(Q)} T(f) \geqslant -\inf_{f \in \mathring{\tilde{H}}^1(Q)} T(f) = \lambda_1(Q').$$

El teorema queda demostrado.

5. **Comportamiento asintótico de los valores propios del primer problema de contorno** Primero examinemos los valores propios del primer problema de contorno para el operador de Laplace Δ (el operador $\mathscr{L} = \operatorname{div}(k\nabla) - a$ para $k \equiv 1$, $a \equiv 0$) en un cubo $K_l = \{0 < x_i < l,\ i = 1, \ldots, n\}$ cuya arista $l > 0$. Una función propia generalizada $u(x)$ del primer problema de contorno para el operador Δ en K_l, que corresponde al valor propio λ, se determina como función de $\mathring{H}^1(K_l)$ que para toda v de $\mathring{H}^1(K_l)$ satisface la

identidad

$$\int_{K_l} \nabla u \nabla \bar{v}\, dx = -\lambda \int_{K_l} u\bar{v}\, dx.$$

Es fácil comprobar que la función $u_{m_1, \ldots, m_n}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{\pi m_i x_i}{l}$ para cualesquiera $m_1 > 0, \ldots, m_n > 0$ enteros es una función propia del problema de contorno en cuestión; el valor propio correspondiente es igual a $-\frac{\pi^2}{l^2}(m_1^2 + \ldots + m_n^2)$. El sistema de funciones $u_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ para todo $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, enteros es ortonormal en $L_2(K_l)$. Puesto que toda función de $L_2(K_l)$, ortogonal a todas las $u_{m_1, \ldots, m_n}$, es nula (esta afirmación se demuestra igual que en el p. 4, § 4, cap. III se demostraba la afirmación correspondiente para el sistema de funciones $u_{m_1, \ldots, m_n} = \exp\{i(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)\}$ en el cubo $\{|x_i| < \pi, i = 1, \ldots, n)\}$, entonces este sistema es una base ortonormal en $L_2(K_l)$ y, por lo tanto, contiene todas las funciones propias del primer problema de contorno para el operador Δ en K_l.

De este modo, entre el conjunto de todas las funciones propias del problema en cuestión y el conjunto de todos los puntos $(m_1, \ldots, m_n)$ con coordenadas positivas de números enteros y, consecuentemente, el conjunto de todos los cubos $K_{m_1, \ldots, m_n} = \{m_i - 1 \leqslant x_i \leqslant m_i, i = 1, \ldots, n\}$ existe una correspondencia biunívoca. Además, el valor propio correspondiente a la función $u_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ es igual al cuadrado de la distancia del punto $(m_1, \ldots, m_n)$ al origen de coordenadas multiplicada por $-\pi^2/l^2$. Así pues, la multiplicidad del valor propio λ es igual al número de los puntos con coordenadas de números enteros, dispuestos en la esfera de radio $\sqrt{-\lambda}\, l/\pi$. En particular, el número $-\frac{\pi^2}{l^2} n$ es el primer valor propio; es de multiplicidad 1. A este número corresponde la función propia $u_{1, \ldots, 1}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{n/2} \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{l} \ldots \operatorname{sen} \frac{\pi x_n}{l}$. El siguiente valor propio es igual a $-\frac{\pi^2}{l^2}(n+3)$; es de multiplicidad n. A él corresponden las funciones propias $u_{\underbrace{1, \ldots, 1}_{i-1}, 2, 1, \ldots, 1}(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{n/2} \operatorname{sen} \frac{\pi x_1}{l} \ldots \operatorname{sen} \frac{\pi x_{i-1}}{l} \operatorname{sen} \frac{2\pi x_i}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi x_{i+1}}{l} \ldots \operatorname{sen} \frac{\pi x_n}{l}$, $i = 1, \ldots, n$.

Designemos con $N(\rho)$ el número de valores propios (tomando en consideración la multiplicidad de éstos) que no superan en valor absoluto a cierto $\rho > 0$. $N(\rho)$ es igual al número de los puntos $(m_1, \ldots, m_n)$ de coordenadas enteras positivas para los cuales $m_1^2+\ldots+m_n^2\leqslant\frac{l^2}{\pi^2}\rho$ o, lo que es lo mismo, es igual al volumen del cuerpo $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}$, compuesto de todos los cubos $K_{m_1,\ldots,m_n}$ para los cuales $m_1^2+\ldots+m_n^2\leqslant\frac{l^2}{\pi^2}\rho$. Puesto que $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}\subset S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}=\left\{|x|<\frac{l}{\pi}\sqrt{\rho},\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ n\right\}$, entonces $N(\rho)\leqslant|S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}|=\frac{\sigma_n}{2^n n}\frac{l^n}{\pi^n}\rho^{n/2}$. Como, por otra parte, para $\rho>n\frac{\pi^2}{l^2}$, $M_{\sqrt{\rho}\,l/\pi}\supset S_{\sqrt{\rho}\,l/\pi-\sqrt{n}}$ entonces para $\rho>\frac{n\pi^2}{l^2}$ $N(\rho)\geqslant\frac{\sigma_n}{2^n n}\times$ $\times\left(\frac{l\sqrt{\rho}}{\pi}-\sqrt{n}\right)^n$.

De modo habitual numeremos los valores propios en el orden en que éstos no crecen: $0>\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots$ (con cada valor propio de esta sucesión nos encontramos tantas veces como es su multiplicidad). Tomemos al azar el valor propio λ_s; supongamos que su multiplicidad es igual a p_s, $p_s\geqslant 1$, y sea $\lambda_{s-p_s'},\ \ldots,\ \lambda_s,\ \ldots,\ \lambda_{s+p_s''}$, para ciertos enteros $p_s'\geqslant 0$, $p_s''\geqslant 0$, $p_s'+p_s''+1=p_s$, todos valores propios iguales a λ_s.

El número p_s es igual al volumen de un cuerpo compuesto de los cubos $K_{m_1,\ldots,m_n}$, cuyos vórtices $(m_1,\ldots,m_n)$ están ubicados en la esfera de radio $\frac{l}{\pi}|\lambda_s|^{1/2}$ y centro en el origen de coordenadas. Dado que este cuerpo está contenido en $S_{|\lambda_s|^{1/2}\,l/\pi}\setminus S_{|\lambda_s|^{1/2}\,l/\pi-\sqrt{n}}$, resulta que $p_s\leqslant\frac{\sigma_n}{2^n n}\left[\left(\frac{l}{\pi}|\lambda_s|\right)^{n/2}-\right.$ $\left.-\left(\frac{l}{\pi}|\lambda_s|-\sqrt{n}\right)^{n/2}\right]$.

En particular, teniendo en cuenta que $\lambda_s\to-\infty$ para $s\to\infty$, obtenemos $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{p_s}{|\lambda_s|^{n/2}}=0$.

De la definición de la función $N(\rho)$ se deduce que $s+p_s''=$ $=N(|\lambda_s|)$. Por esto, $\frac{\sigma_n}{n2^n}\left(\frac{l|\lambda_s|}{\pi}-\sqrt{n}\right)^{n/2}\leqslant s+p_s''\leqslant\frac{\sigma_n}{n2^n}\left(\frac{l|\lambda_s|}{\pi}\right)^{n/2}$. Y, como $0\leqslant p_s''\leqslant p_s$, existe el límite de la relación $s/|\lambda_s|^{n/2}$ y éste es igual a $\frac{\sigma_n}{2^n n}l^{n/2}\pi^{-n/2}$. Por consiguiente (recordemos que $\ldots\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1<0$), existen tales constantes C_0 y C_1, $0<C\leqslant C_1$, que para todo $s=1,\ 2,\ \ldots$

$$-\frac{C_1}{l}s^{2/n}\leqslant\lambda_s\leqslant-\frac{C_0}{l}s^{2/n}. \tag{38}$$

Puesto que los valores propios no dependen de cómo se elige el sistema de coordenadas, las desigualdades (38) para los valores propios del primer problema de contorno para el operador de Laplace tienen también lugar en el caso cuando el cubo K_l se sustituye por cualquier otro cubo de arista l. Es fácil ver que los valores propios del primer problema de contorno en un cubo de arista l para el operador $k_0\Delta - a_0$ (donde $k_0 > 0$ y a_0 son constantes) iguales a $-k_0 \frac{\pi^2}{l^2}(m_1^2 + \ldots + m_n^2) - a_0$, donde $m_1, \ldots, m_n$ son números enteros positivos. Por ello, las desigualdades (38) con ciertas constantes C_0 y C_1 (dependientes de k_0) son también válidas para éstas, cualquiera que sea s a partir de cierta s_0 (dependiente de k_0 y a_0).

Examinemos ahora el caso general.

TEOREMA 5. *Sean λ_s, $s = 1, 2, \ldots$, los valores propios del primer problema de contorno para el operador $\mathscr{L} = \operatorname{div}(k(x)\nabla) - a(x)$ en el dominio Q. Existen las constantes C_0 y C_1, $0 < C_0 \leqslant C_1$, y el número s_0 tales que para todo $s \geqslant s_0$ tienen lugar las desigualdades*

$$-C_1 s^{2/n} \leqslant \lambda_s \leqslant -C_0 s^{2/n}. \tag{39}$$

Sean $\overline{\lambda}_s$ y $\underline{\lambda}_s$ los valores propios del primer problema de contorno en Q para los operadores $\overline{\mathscr{L}} = \operatorname{div}(\overline{k}\nabla) - \overline{a} = \overline{k}\Delta - \overline{a}$ y $\underline{\mathscr{L}} = \underline{k}\Delta - \underline{a}$, respectivamente, donde $\overline{k} = \max\limits_{x \in \overline{Q}} k(x)$, $\underline{k} = \min\limits_{x \in \overline{Q}} k(x)$, $\overline{a} = \max\limits_{x \in \overline{Q}} a(x)$, $\underline{a} = \min\limits_{x \in \overline{Q}} a(x)$. En este caso, en virtud de la afirmación 2 del teorema 4, para todo $s = 1, 2, \ldots$ tienen lugar las desigualdades $\overline{\lambda}_s \leqslant \lambda_s \leqslant \underline{\lambda}_s$.

Designemos por K' y K'' tales cubos que $K' \subset Q \subset K''$, y por $\overline{\lambda}'_s$ y $\underline{\lambda}''_s$ los valores propios del primer problema de contorno para el operador $\overline{\mathscr{L}}$ en K' y el operador $\underline{\mathscr{L}}$ en K'', respectivamente. De acuerdo con la afirmación 3 del teorema 4, para todo s tenemos $\overline{\lambda}'_s \leqslant \overline{\lambda}_s$ y $\underline{\lambda}''_s \geqslant \underline{\lambda}_s$. La afirmación del teorema se deduce ahora de que, a partir de cierto $s = s_0$, para $\overline{\lambda}'_s$ y $\underline{\lambda}''_s$ son válidas las desigualdades (39).

6. Resolución de los problemas de contorno en el caso de condiciones límites homogéneas. En el punto 2 estudiamos la cuestión de la existencia y unicidad de las soluciones generalizadas del primer y tercer (segundo) problemas de contorno para la ecuación (1) suponiendo que en Q $a(x) \geqslant 0$.

Examinemos ahora un caso general.

Sea $m = \min\limits_{x \in \overline{Q}} a(x)$. Escribamos las indentidades (4) y (6) de la forma que sigue:

$$(u, v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} + (m-1)(u, v)_{L_2(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}, \tag{4'}$$

$$(u, v)_{H^1(Q)} + (m-1)(u, v)_{L_2(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}, \tag{6'}$$

donde los productos escalares en $\mathring{H}^1(Q)$ y en $H^1(Q)$ están definidos mediante las desigualdades (17) y (18). Según el lema 1 p. 3, la identidad (4') es equivalente en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ a la ecuación operacional

$$u + (m-1)Au = -Af, \tag{40}$$

mientras que la identidad (6') es equivalente, en virtud del lema 1', a la ecuación operacional

$$u + (m-1)A'u = -A'f \tag{40'}$$

en el espacio $H^1(Q)$ (recordemos que $Af \in \mathring{H}^1(Q)$, $A'f \in H^1(Q)$). El operador A, como un operador que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ (A', de $H^1(Q)$ en $H^1(Q)$), es totalmente continuo. Por eso, para estudiar la ecuación (40) ((40')) podemos aprovechar los teoremas de Fredholm (teoremas 1—4, pp. 3—7, § 4, cap. II).

1) Si $-m+1$ no es un número característico del operador A (A'), entonces, en virtud del primer teorema de Fredholm, la ecuación (40) ((40')) es unívocamente soluble para toda $f \in L_2(Q)$. En este caso tiene lugar la desigualdad $\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C_1 \|Af\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)} \times$ $\times$ ($\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|)_{L_2(Q)}$ con la constante $C > 0$ que no depende de f. Puesto que $-m+1$ es el número característico del operador A (A') sólo en aquel único caso cuando el cero es un valor propio del primer (tercer) problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$, entonces podemos considerar establecida la siguiente afirmación.

TEOREMA 6. *Para toda f de $L_2(Q)$ existe la única solución generalizada $u(x)$ de cada uno de los problemas de contorno* (1), (2) *y* (1), (3), *siendo homogéneas las condiciones límites* ($\varphi = 0$), *si el cero no es valor propio del correspondiente problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$. En este caso se verifica la desigualdad*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)},$$

en la que la constante $C > 0$ no depende de f.

2) Si $-m+1$ es un número característico del operador A (A') (en este caso, naturalmente, $m \neq 1$), hagamos uso del tercer teorema de Fredholm. Para que en estas circunstancias las ecuaciones (40) ((40')) sean solubles, es necesario y suficiente que para todas las funciones propias u_p del operador A (A'), correspondientes al número característico $-m+1$, se cumplan las igualdades $(Af, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} =$ $= 0$ ($(A'f, u_p)_{H^1(Q)} = 0$). En este caso existe la única solución u de la ecuación (40) ((40')) que sea ortogonal en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) a todas las funciones u_p, y para esta solución tiene lugar la desigualdad $\|u\|_{\mathring{H}^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$ ($\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\|f\|_{L_2(Q)}$) con la constante $C > 0$ que no depende de f. Cualquier otra solución de la ecua-

ción (40) ((40′)) se representa como la suma de la solución u y cierta combinación lineal de las funciones u_p.

De la definición de los operadores A y A' ((21) y, respectivamente, (21′)) se infiere que la ortogonalidad de las funciones Af ($A'f$) y u_p en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) es equivalente a la ortogonalidad de f y u_p en el espacio $L_2(Q)$. Además, la ortogonalidad en $\mathring{H}^1(Q)$ (en $H^1(Q)$) de la solución u y de la ecuación (40) ((40′)) a la función propia u_p es equivalente a la ortogonalidad de éstas en $L_2(Q)$, puesto que, en virtud de (21) ((21′))

$$(u, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} = (1-m)(Au, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} - (Af, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} =$$
$$= (1-m)(Au, u_p)_{\mathring{H}^1(Q)} = (1-m)(u, u_p)_{L_2(Q)}$$
$$((u, u_p)_{H^1(Q)} = (1-m)(u, u_p)_{L_2(Q)}).$$

Así pues, hemos demostrado el siguiente teorema

TEOREMA 7. *Si el cero es el valor propio del primer o tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$, entonces, para que exista una solución generalizada del problema* (1), (2) *o del* (1), (3), *siendo homogéneas las condiciones límites* ($\varphi = 0$), *es necesario y suficiente que se cumplan los siguientes requisitos:* $(f, u_p)_{L_2(Q)} = 0$ *para todas las funciones propias generalizadas* u_p *del problema correspondiente que respondan al valor propio nulo. Los problemas* (1), (2) *y* (1), (3) *admiten la única solución* u *(cuando* $\varphi = 0$*) que es ortogonal a todas estas funciones propias:* $(u, u_p)_{L_2(Q)} = 0$. *Esta solución satisface la desigualdad*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}$$

con la constante C que no depende de f. Cualquier otra solución se representa como la suma de esta solución y cierta combinación lineal de las funciones u_p.

Del teorema 3 se desprende que cuando $a \equiv 0$ el cero es el valor propio del segundo problema de contorno ($\sigma \equiv 0$) para el operador $\mathcal{L}$; la única función propia correspondiente es igual a $1/\sqrt{|Q|}$. Por esta razón del teorema 7, en particular, se deduce

TEOREMA 8. *Para que exista una solución generalizada del problema*

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0,$$

es necesario y suficiente que

$$\int_Q f\,dx = 0.$$

En esta suposición existe la única solución generalizada u, *que satisface la condición* $\int_Q u\,dx = 0$, *y para esta solución tiene lugar la des-*

igualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)}$$

con la constante $C > 0$ que no depende de f. Cualquier otra solución generalizada $\tilde{u}$ de este problema se representa en la forma $\tilde{u} = u + c_1$, donde c_1 es una constante.

OBSERVACIÓN. Si f tiene valores reales, también tendrán valores reales las funciones que se mencionan en el teorema 6. Esta afirmación se demuestra lo mismo que la afirmación correspondiente en la observación citada a fines del p. 2. Las soluciones que tratamos en los teoremas 7 y 8 también pueden considerarse de valores reales, siempre que, por supuesto, todas las funciones propias correspondientes tengan valores reales y nos limitemos a hacer uso de sus combinaciones lineales con coeficientes reales.

7. Primer problema de contorno para la ecuación elíptica general. Los resultados obenidos en los puntos anteriores se extienden sin dificultad a las ecuaciones elípticas más generales. A título de ejemplo examinemos el siguiente problema de contorno:

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x), \quad x \in Q, \tag{41}$$

$$u|_{\partial Q} = 0, \tag{42}$$

donde los coeficientes reales $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{Q})$, $a_i(x) \in C^1(\overline{Q})$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $i, j = 1, \ldots, n$; la matriz $\| a_{ij}(x) \|$ la consideramos simétrica y positiva (lo que es testimonio de que (41) es una ecuación elíptica), es decir, la matriz con cierta constante $\gamma > 0$ satisface la desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{43}$$

cualesquiera que sean el vector real $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ y el punto $x \in \overline{Q}$.

La solución clásica $u(x)$ del problema (41), (42) se halla de la manera habitual: es una función de $C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ que satisface (41) y (42). Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski, podemos convencernos con facilidad de que si $f \in L_2(Q)$, la solución clásica del problema (41), (42), perteneciente para toda $v \in \dot{H}^1(Q)$ a $\dot{H}^1(Q)$, satisface la identidad integral

$$\int_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \bar{v}_{x_j} \, dx +$$

$$+ \int_Q u \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{v}_{x_i} + \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i x_i} - a \Big) \bar{v} \Big] dx = - \int_Q f \bar{v} \, dx. \tag{44}$$

Una función u de $\mathring{H}^1(Q)$ se llama solución generalizada del problema (41), (42), si para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ ella satisface la identidad integral (44), teniendo en cuenta que $f \in L_2(Q)$.

De acuerdo con el teorema 6, p. 6, § 5, cap. III, en el espacio $\mathring{H}^1(Q)$ se puede introducir un producto escalar que sea equivalente al producto ordinario

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \overline{v}_{x_j}\, dx.$$

Con este motivo la identidad (44) se puede escribir en la forma

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} + \Big(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a\Big) v\Big)_{L_2(Q)} = -(f, v)_{L_2(Q)}. \quad (45)$$

LEMA 2. 1. *Para cualesquiera funciones $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$, continuas en $\overline{Q}$, existe un operador A lineal acotado (que actúa de $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$ y está definido por todo $L_2(Q)$) tal que para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ tenga lugar la igualdad*

$$\Big(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\Big)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\mathring{H}^1(Q)}.$$

2. *El operador A, si se considera como un operador que actúa de $\mathring{H}^1(Q)$, es totalmente continuo.*

Puesto que la funcional lineal $l(v) = \big(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v\big)_{L_2(Q)}$, definida en $\mathring{H}^1(Q)$ $(v \in \mathring{H}^1(Q))$ es acotada, siendo fijada $u \in L_2(Q)$:

$$|l(v)| \leqslant \|u\|_{L_2(Q)} \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v \Big\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)} \|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

donde la constante $C > 0$ sólo depende de $\|a_i\|_{C(\overline{Q})}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces, según el teorema de Riesz, existe la única función $U \in \mathring{H}^1(Q)$ para la cual $l(v) = (U, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$ cualquiera que sea $v \in \mathring{H}^1(Q)$, con la particularidad de que $\|U\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant C \|u\|_{L_2(Q)}$. Esto significa que en $L_2(Q)$ está definido el operador A (lineal, evidentemente) que transforma $L_2(Q)$ en $\mathring{H}^1(Q)$: $Au = U$. Este operador es acotado, $\| A \| \leqslant C$, y para cualesquiera $u \in L_2(Q)$ y $v \in$ $\in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ tiene lugar la igualdad

$$(u, \sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i} + a_0 v)_{L_2(Q)} = (Au, v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}.$$

Mostremos que el operador A, si se considera como un operador que actúa de $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, es totalmente continuo. Tomemos en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ un conjunto acotado arbitrario. Conforme al teorema 3, p. 4, § 5, cap. III, este conjunto es compacto en $L_2(Q)$. Por lo tanto, de cualquier sucesión infinita de sus elementos se puede extraer una subsucesión que sea fundamental en $L_2(Q)$. Ya que el operador A, que actúa de $L_2(Q)$ en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, es acotado (y, consecuentemente, continuo), él transformará esta subsucesión en una sucesión fundamental en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$. Por consiguiente, el operador A, que actúa de $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, es totalmente continuo. El lema queda demostrado.

Puesto que la funcional lineal $(f, v)_{L_2(Q)}$, definida en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ $(v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q))$, es acotada: $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)} \| v \|_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}$, entonces, según el teorema de Riesz, existe el único elemento $F \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ para el cual $(f, v)_{L_2(Q)} = (F, v)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)}$ cualquiera que sea $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$, con la particularidad de que $\| F \|_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}$.

Por eso, valiéndonos del lema 2 (suponemos que $a_0 = $ $= \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a$), la identidad integral (44), que define la solución general, puede ser escrita en forma de una igualdad operacional en el espacio $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$:

$$u + Au = F, \quad u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q). \tag{46}$$

LEMA 3. *Siendo* $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ix_i} - a \geqslant 0$ *en* Q, *la ecuación homogénea* (46) *admite sólo una solución nula.*

Sea u una solución de la ecuación $u + Au = 0$. Multiplicando esta ecuación de modo escalar en $\overset{\circ}{H}{}^1(Q)$ por u, obtenemos $\| u \|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} + (Au, u)_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} = 0$. De aquí se deduce que $\| u \|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(Q)} +$ $+ \operatorname{Re}(Au, u)_{\overset{\circ}{H}{}^1} = 0$.

Puesto que $\operatorname{Re} a_i u_{x_i} \bar{u} = \frac{1}{2}(a_i |u|^2)_{x_i} - \frac{a_{x_i}}{2}|u|^2$ y $u|_{\partial Q} = 0$, resulta:

$$\operatorname{Re}(Au, u)_{\dot{H}^1(Q)} = \operatorname{Re} \int_Q \Big(\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} \bar{u} + \Big(\sum_{i=1}^n a_{ix_i} - a \Big) |u|^2 \Big) dx =$$

$$= \int_Q \Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (a_i |u|^2)_{x_i} + \Big(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ix_i} - a \Big) |u|^2 \Big) dx =$$

$$= \int_Q \Big(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ix_i} - a \Big) |u|^2 dx \geqslant 0.$$

Por ello, $\|u\|^2_{\dot{H}^1(Q)} \leqslant 0$, es decir, $u = 0$

Del lema 3 y del primer teorema de Fredholm se deduce

TEOREMA 9. *Si* $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ix_i} - a \geqslant 0$ *en* Q, *la solución generalizada del problema* (41), (42) *existe y es única para cualquier función* $f \in L_2(Q)$.

8. **Soluciones generalizadas de los problemas de contorno con condiciones límites no homogéneas.** Primero examinemos el problema (1), (2). Recordemos que se llama solución generalizada de este problema a una función u de $H^1(Q)$ que satisface la identidad integral (4) y cuya traza en el contorno ∂Q es igual a la función límite φ.

De la definición de la solución generalizada se deduce una condición natural para la función límite φ. Se debe exigir que ésta pueda ser prolongada en el dominio Q mediante una función del espacio $H^1(Q)$. En lo sucesivo vamos siempre a suponer que esta condición se cumple. En el caso contrario la solución generalizada del problema (1), (2) no puede existir. Del teorema sobre las trazas de funciones de $H^1(Q)$ se infiere que φ debe pertenecer al espacio $L_2(\partial Q)$. Pero esto no es suficiente para que φ pueda ser prolongada en Q mediante una función de $H^1(Q)$; más aun, para ello es incluso insuficiente la continuidad de esta función. A fines del presente punto volveremos a considerar otra vez esta cuestión y obtendremos la condición necesaria y suficiente de esta prolongación para el caso de una circunferencia.

Señalemos que cuando $\varphi \in C^1(\partial Q)$, la prolongación citada existe. Del teorema 2, p. 2, § 4, cap. III, proviene la existencia de la función $\Phi(x)$ de $C^1(\overline{Q})$ y, con mayor razón, de $H^1(Q)$ para la cual $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$, con la particularidad de que tiene lugar la desigualdad $\|\Phi\|_{H^1(Q)} \leqslant C_1 \|\varphi\|_{C^1(\partial Q)}$, donde la constante $C_1 > 0$ no depende de φ.

Así pues, sea que existe la función $\Phi \in H^1(Q)$ para la cual $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$. Empleando la sustitución $u - \Phi = w$, el problema de la búsqueda de la solución generalizada u se reduce al de la búsqueda de una función $w \in \mathring{H}^1(Q)$ que para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ satisface la identidad integral

$$\int_Q (k\nabla w\nabla\bar{v} + aw\bar{v})\,dx = -\int_Q (k\nabla\Phi\nabla\bar{v} + a\Phi\bar{v} + f\bar{v})\,dx. \qquad (4')$$

Indiquemos que si $\Phi \in H^2(Q)$ (cuando $\partial Q \in C^2$, para ello es suficiente que $\varphi \in C^2(\partial Q)$), la identidad (4') se puede escribir en la forma

$$\int_Q (k\nabla w\nabla\bar{v} + aw\bar{v})\,dx = -\int_Q \tilde{f}\bar{v}\,dx,$$

donde $\tilde{f} = f - \operatorname{div}(k\nabla\Phi) + a\Phi$, es decir, el problema que se considera está reducido al problema estudiado en los pp 2 y 4.

Igual que en el p. 2, nos limitemos al caso en que $a(x) \geqslant 0$ en Q. Introduciendo en $\mathring{H}^1(Q)$ un producto escalar expresado por la fórmula (7), escribamos (4') en la forma

$$(w, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = l(v),$$

donde $l(v) = -\int_Q (k\nabla\Phi\nabla\bar{v} + a\Phi\bar{v} + f\bar{v})\,dx$ es una funcional lineal dada en $\mathring{H}^1(Q)$ $(v \in \mathring{H}^1(Q))$. Como

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)}\|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x\in\bar{Q}} k(x)\,\|\,|\nabla\Phi|\,\|_{L_2(Q)}\|\,|\nabla v|\,\|_{L_2(Q)} +$$
$$+ \max_{x\in\bar{Q}} a(x)\cdot\|\Phi\|_{L_2(Q)}\|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})\,\|v\|_{\mathring{H}^1(Q)},$$

donde la constante $C_2 > 0$ depende sólo de los coeficientes k y a, entonces la funcional l es acotada y $\|l\| \leqslant C_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})$. Por esta razón, de acuerdo con el teorema de Riesz, en $\mathring{H}^1(Q)$ existe la única función w que satisface la identidad (4'), con la particularidad de que $\|w\|_{\mathring{H}^1(Q)} = \|l\| \leqslant C_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)})$. En este caso, la función $u = w + \Phi$ es la solución generalizada del problema (1), (2). Además, tiene lugar la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C_3(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\Phi\|_{H^1(Q)}),$$

donde la constante $C_3 > 0$ no depende de f ni de Φ, y, por lo tanto, también la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi\in H^1(Q)\\ \Phi|_{\partial Q}=\varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}). \qquad (47)$$

en la que la constante no depende de f y φ. Si la función límite $\varphi \in C^1(\partial Q)$, de estas desigualdades se desprende la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{C^1(\partial Q)}). \tag{47'}$$

Mostremos que la solución encontrada es única. En efecto, si existe otra solución generalizada u', la diferencia $\tilde{u} = u - u'$ será una función de $\mathring{H}^1(Q)$ que, en virtud de (4), satisface la identidad integral $\int\limits_Q (k\,\nabla\tilde{u}\,\nabla\bar{v} + a\tilde{u}\bar{v})\,dx = 0$ cualquiera que sea $v \in \mathring{H}^1(Q)$. Como el primer miembro de esta igualdad representa un producto escalar en $\mathring{H}^1(Q)$ de las funciones $\tilde{u}$ y v, entonces $\tilde{u} = 0$.

De este modo queda demostrada la siguiente afirmación.

TEOREMA 10. *Si $a(x) \geqslant 0$ en Q y la función φ es un valor límite de cierta función de $H^1(Q)$, entonces el problema* (1), (2) *admite la única solución generalizada u. Esta solución satisface la desigualdad* (47) *y, consecuentemente, para $\varphi \in C^1(\partial Q)$, la* (47').

OBSERVACIÓN. Es fácil comprobar que el conjunto $\mathcal{M}$ de funciones φ, que están definidas en ∂Q y que son las trazas de ciertas funciones Φ de $H^1(Q)$, es un espacio de Banach con la norma $\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = \inf\limits_{\substack{\Phi \in H^1(Q)\\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}$. Por esta razón, la desigualdad (47) se puede escribir en la forma

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{\mathcal{M}}).$$

Examinemos el problema (1), (3). Recordemos que una función u de $H^1(Q)$ se denomina solución generalizada del problema citado, si satisface la identidad integral (5) para cualquier $v \in H^1(Q)$. Se supone que la función límite φ, en este caso, pertenece a $L_2(\partial Q)$.

TEOREMA 11. *Si $a(x) \geqslant 0$ en Q, y (o) $a(x) \not\equiv 0$ en Q, o bien $\sigma(x) \not\equiv 0$ en ∂Q, entonces el problema* (1), (3) *admite la única solución generalizada u cualesquiera que sean $f \in L_2(Q)$ y $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Con ello, tiene lugar la desigualdad*

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}), \tag{48}$$

en la cual $C > 0$ es una constante que no depende de f y φ.

Introduzcamos en $H^1(Q)$ un producto escalar del tipo (10) equivalente al producto ordinario. Entonces, la identidad (5) tomará la forma

$$(u, v)_{H^1(Q)} = l(v),$$

donde

$$l(v) = -\int_Q f\bar{v}\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS$$

es una funcional lineal definida en $H^1(Q)$ ($v \in H^1(Q)$).

Puesto que, de acuerdo con el teorema 1, p. 1, § 5, cap. III

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x \in \bar{Q}} k(x) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)} \|v\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)} \|v\|_{H^1(Q)}$$

con la constante $C > 0$ independiente de f, φ y v, entonces la funcional $l(v)$ es acotada y $\|l\| \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$. Según el teorema de Riesz, existe una función única u de $H^1(Q)$ que satisface la identidad (5), siendo $\|u\|_{H^1(Q)} = \|l\| \leqslant C(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$. El teorema está demostrado.

Ahora, sea en el problema (1), (3) $a(x) \equiv 0$ en Q, y $\sigma(x) \equiv 0$ en ∂Q. Introduzcamos en $H^1(Q)$ un producto escalar equivalente al ordinario

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u \nabla\bar{v} + u\bar{v})\,dx. \tag{49}$$

Entonces, la identidad integral (5) que define la solución generalizada del segundo problema de contorno para el operador div $(k\nabla)$, puede ser escrita en la forma

$$(u, v)_{H^1(Q)} - (u, v)_{L_2(Q)} = l(v), \tag{50}$$

donde

$$l(v) = -\int_Q f\bar{v}\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\bar{v}\,dS \tag{51}$$

es una funcional lineal definida en $H^1(Q)$ ($v \in H^1(Q)$). Puesto que de acuerdo con el teorema 1, p. 1, § 5, cap. III,

$$|l(v)| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} + \max_{x \in \bar{Q}} k(x) \cdot \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)} \|v\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant C'(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}) \|v\|_{H^1(Q)}$$

con la constante $C' > 0$ independiente de f, φ y v, entonces la funcional $l(v)$ es acotada y $\|l\| \leqslant C'(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$. Según el teorema de Riesz, existe en $H^1(Q)$ la única función F' para la cual se efectúa la igualdad

$$l(v) = (F', v)_{H^1(Q)} \tag{52}$$

cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$, siendo

$$\|F'\|_{H^1(Q)} \leqslant C'(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}). \tag{53}$$

En virtud del lema 1′ p. 3 (consideramos que el producto escalar en $H^1(Q)$ está prefijado por la fórmula (49)), existe un operador acotado A', que actúa de $L_2(Q)$ en $H^1(Q)$ y que tiene $L_2(Q)$ como un campo de definición, tal que para toda $v \in H^1(Q)$

$$(u, v)_{L_2(Q)} = (A'u, v)_{H^1(Q)}. \tag{54}$$

Además, el operador A', si se considera como un operador que actúa de $H^1(Q)$ en $H^1(Q)$, es autoconjugado y totalmente continuo.

Haciendo uso de (52) y (54), podemos sustituir la identidad (50) por una ecuación operacional en el espacio $H^1(Q)$ que sea equivalente a ella:

$$u - A'u = F'. \tag{55}$$

Puesto que para la función $u_1(x) \equiv \text{const} = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$ tiene lugar la ecuación $(u_1, v)_{L_2(Q)} = (u_1, v)_{H^1(Q)}$, cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$ (el producto escalar en $H^1(Q)$ está definido por la fórmula (49)), entonces, en virtud a (54), $(A'u_1, v)_{H^1(Q)} = (u_1 v)_{L_2(Q)} = (u_1, v)_{H^1(Q)}$. Esto quiere decir, que 1 es un número característico del operador A', y $u_1 = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$, una función propia correspondiente. Puesto que toda función propia u_1' del operador A', correspondiente al número característico 1, satisface la igualdad $(u_1', u_1')_{H^1(Q)} = (A'u_1', u_1')_{H^1(Q)} = (u_1', u_1')_{L_2(Q)}$, tenemos para ella

$$\int_Q k\,|\nabla u_1'|^2\,dx = 0.$$

Por consiguiente, $u_1' = \text{const}$, es decir, 1 es un número característico de multiplicidad 1 del operador A'.

Según dice el tercer teorema de Fredholm, para que la ecuación (55) sea soluble es necesario y suficiente que la función F' sea en $H^1(Q)$ ortogonal a la función $u_1 = \frac{1}{\sqrt{|Q|}}$: $\left(F', \frac{1}{\sqrt{|Q|}}\right)_{H^1(Q)} = 0$.

De (52) y (51) se deduce que esta condición es equivalente a que

$$-\int_Q f\,dx + \int_{\partial Q} k\varphi\,dS = 0. \tag{56}$$

Si la condición citada se cumple, la ecuación (55) tiene una solución única u, ortogonal en $H^1(Q)$ a las constantes. Será una solución generalizada del problema de contorno que se estudia. Con ello, en virtud de (53), tiene lugar la desigualdad (48) en la que C es una constante independiente de f y φ. Todas las soluciones restantes se diferencian de la función u por los sumandos constantes. Puesto que para una función de $H^1(Q)$ la condición de ortogonalidad a las constantes en el producto escalar (49) es equivalente a la condición de ortogonalidad a las constantes en el producto escalar de $L_2(Q)$, resulta estar establecida la afirmación siguiente.

TEOREMA 12. *Para que exista una solución generalizada del problema* $\operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \varphi$, *es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad* (56). *En este caso, la solución generalizada u, ortogonal a las constantes en el producto escalar de* $L_2(Q)$, *es única y para ella tiene lugar la desigualdad* (48). *Todas las demás soluciones generalizadas del problema se diferencian de u por las constantes.*

OBSERVACIÓN. Si las funciones f y φ tienen valores reales, las soluciones de que se trata en los teoremas 10—12, también son de valores reales.

Al estudiar el primer problema de contorno para la ecuación (1) con condición límite no homogénea surgió el problema siguiente: hallar las condiciones para la función φ de $L_2(\partial Q)$ con las cuales existe su prolongación en el dominio Q y que esta prolongación pertenezca a $H^1(Q)$. Como fue mostrado, la condición suficiente consiste en la pertenencia al espacio $C^1(\partial Q)$. Ahora establezcamos la condición necesaria y suficiente para el caso cuando Q sea un círculo.

Supongamos que el dominio Q $(n = 2)$ es un círculo $\{|x| = \rho < 1\}$, $x = (x_1, x_2) = (\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$. Examinemos en la circunferencia $\partial Q = \{\rho = 1\}$ una función real φ del espacio (real) $L_2(\partial Q)$, $\varphi(\theta) \in L_2(0, 2\pi)$. El desarrollo de la función $\varphi(\theta)$ en una serie de Fourier, convergente en la norma de $L_2(0, 2\pi)$, tiene la forma

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos k\theta\, d\theta, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\operatorname{sen} k\theta\, d\theta, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

son sus coeficiente de Fourier.

Según la igualdad de Parseval — Steklov,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\|\varphi\|^2_{L_2(0,\, 2\pi)} < \infty. \tag{57}$$

Tiene lugar la afirmación siguiente

TEOREMA 13. *Para que la función $\varphi(\theta)$ de $L_2(0, 2\pi)$ sea una traza en la circunferencia $\{|x| = 1\}$ de cierta función de $H^1(|x| < 1)$, es necesario y suficiente que converja la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2). \tag{58}$$

En vista de (57) las sucesiones a_k y b_k, $k = 1, 2, \ldots$, son acotadas. Por lo tanto, la función $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) z^k$, donde $z = x_1 + ix_2$, es analítica en el círculo $\{|z| < 1\}$. Esto quiere decir, que la función

$$w(x) = w(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k)(x_1 + ix_2)^k =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta) \tag{59}$$

pertenece a $C^\infty(|x| < 1)$, con la particularidad de que la serie en (59), así como también las series obtenidas de ésta última por diferenciación término a término, convergen absoluta e uniformemente en el círculo $\{|x| < r\}$, cualquiera que sea $r < 1$.

Para demostrar el teorema 13 nos hará falta la siguiente afirmación.

LEMA 4. *Para que una función $w(x)$, definida por la serie (59), pertenezca al espacio $H^1(|x| < 1)$, es necesario y suficiente que la serie (58) sea convergente.*

Designemos mediante $w_m(x)$ una suma parcial de la serie (59):

$$w_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta).$$

Como todas las funciones del sistema $\rho^k \cos k\theta$, $\rho^k \operatorname{sen} k\theta$, $k = 0, 1, \ldots$, son en $L_2(|x| < 1)$ ortogonales a pares y dado que $\|\rho^k \cos k\theta\|^2_{L_2(|x|<1)} = \|\rho^k \operatorname{sen} k\theta\|^2_{L_2(|x|<1)} = \frac{\pi}{2(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, entonces para cualesquiera p y q, $q > p$,

$$\|w_q - w_p\|^2_{L_2(|x|<1)} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=p+1}^{q} \frac{a_k + b_k^2}{k+1}.$$

Por ello, de la convergencia de la serie (57) se deduce la convergencia de la sucesión $w_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, en $L_2(|x| < 1)$. Por consiguiente, la función $w \in L_2(|x| < 1)$ y la serie (59) converge hacia ella en el espacio $L_2(|x| < 1)$.

Sea la serie (58) convergente. Entonces (cuando $q > p$):

$$\| w_q - w_p \|^2_{H^1(|x|<1)} = \int\limits_{|x|<1} [(w_q - w_p)^2 + |\nabla (w_q - w_p)|^2]\, dx =$$

$$= \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \left[(w_q - w_p)^2 + (w_{q\rho} - w_{p\rho})^2 + \frac{1}{\rho^2} (w_{q\theta} - w_{p\theta})^2 \right] d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{k=p+1}^{q} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} + \pi \sum_{k=p+1}^{q} k (a_k^2 + b_k^2) \to 0$$

para p, $q \to \infty$. Es decir, la sucesión w_m, $m = 1, 2, \ldots$, es convergente en $H^1(|x| < 1)$. Por lo tanto, $w \in H^1(|x| < 1)$.

Sea, ahora, $w \in H^1(|x| < 1)$. Dado que para cualquier $r < 1$ la sucesión de normas

$$\| w_m \|^2_{H^1(|x|<r)} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{m} r^{2k} \frac{a_k^2 + b_k^2}{k+1} + 2 \sum_{k=1}^{m} r^{2k-2} k (a_k^2 + b_k^2) \right), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

tiende, cuando $m \to \infty$, a $\| w \|^2_{H^1(|x|<r)}$ sin decrecer de manera manótona, entonces, para cualquier $r < 1$ y todo m, tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{m} k (a_k^2 + b_k^2) r^{2k} \leqslant \frac{1}{\pi} \| w_m \|^2_{H^1(|x|<r)} \leqslant \frac{1}{\pi} \| w \|^2_{H^1(|x|<r)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \| w \|^2_{H^1(|x|<1)}.$$

Resulta pues, que las sumas parciales de la serie (58) son acotadas:

$$\sum_{k=1}^{m} k (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \| w \|^2_{H^1(|x|<1)}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

es decir, la serie (58) es convergente. El lema está demostrado.

Pasemos a la demostración del teorema (13). La suficiencia se deduce inmediatamente del lema (4), puesto que, en el caso en que la serie (58) sea convergente, la función w de (59) pertenece a $H^1(|x| < 1)$ y su traza en la circunferencia $\{|x| = 1\}$ es igual a φ.

Demostremos la necesidad. Supongamos que existe una función $\Phi \in H^1(|x| < 1)$ para la cual $\Phi|_{\{|x|=1\}} = \varphi$. Entonces, en virtud del teorema 10, existe una solución generalizada de $H^1(|x| < 1)$ del primer problema de contorno para la ecuación (1) con la función límite φ. Sea u una solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (1), cuando $k \equiv 1$ y $a \equiv f \equiv 0$, que satisface la condición $u\,|_{\{|x|=1\}}=\varphi$. En el p. 2 del párrafo que sigue mostraremos que la función u pertenece a $C^\infty(|x|<1)$ y en el círculo $\{|x|<1\}$ satisface la ecuación $\Delta u=0$. Hagamos uso de este resultado y desarrollemos la función $u(x)=u(\rho,\theta)$, para $\rho\in(0,1)$ fijado, en una serie de Fourier respecto a θ que sea uniforme y absolutamente convergente:

$$u(\rho,\theta)=\frac{U_0(\rho)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(U_k(\rho)\cos k\theta+V_k(\rho)\operatorname{sen}k\theta),$$

donde

$$U_k(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\theta)\cos k\theta\,d\theta,\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

$$V_k(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\theta)\operatorname{sen}k\theta\,d\theta,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Las funciones $U_k(\rho)$ (y $V_k(\rho)$), $k=0,1,\ldots$, son indefinidamente diferenciables cuando $0<\rho<1$, y acotadas para $\rho\to+0$. Ya que $u\in H^1(|x|<1)$, en virtud del teorema sobre las trazas de funciones de $H^1(|x|<1)$, para cualquier $k=0,1,\ldots$, tenemos

$$\int_0^{2\pi}(u(\rho,\theta)-\varphi(\theta))\cos k\theta\,d\theta\to$$

$$\to 0\left(\int_0^{2\pi}(u(\rho,\theta)-\varphi(\theta))\operatorname{sen}k\theta\,d\theta\to 0\right)\ \text{cuando}\ \rho\to 1-0.$$

Esto significa que todas las funciones $U_k(\rho)$ ($V_k(\rho)$) son continuas a la izquierda en el punto $\rho=1$, y $U_k(1)=a_k$ ($V_k(1)=b_k$), $k=0,1,\ldots$

Como, para $\rho\in(0,1)$, $\Delta u=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0$, entonces para tales ρ tenemos

$$U_k''(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u_{\rho\rho}(\rho,\theta)\cos k\theta\,d\theta=-\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}u_\rho\cos k\theta\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}u_{\theta\theta}\cos k\theta\,d\theta=-\frac{1}{\rho}U_k'+\frac{k^2}{\rho^2}U_k,\qquad k=0,\ 1,\ \ldots$$

Esto quiere decir que para cualquier $k=0,1,\ldots$ la función $U_k(\rho)$ satisface, cuando $0<\rho<1$, una ecuación diferencial ordinaria (de Euler) $y'' + \frac{1}{\rho} y' - \frac{k^2}{\rho^2}\, y = 0$. Dado que la solución general de esta ecuación tiene por expresión $B\rho^k + C\rho^{-k}$ cuando $k \neq 0$, y $B + C \ln \rho$ cuando $k = 0$, donde B y C son constantes arbitrarias, entonces, $U_k(\rho) = a_k \rho^k$, $k = 0, 1, \ldots$ De la misma manera se demuestra que $V_k(\rho) = b_k \rho^k$, $k = 1, 2, \ldots$

De este modo, la función u, perteneciente a H^1 ($|x| < 1$), coincide con la función w de (59). Y entonces, en vista del lema 4, la serie (58) converge. El teorema está demostrado.

Utilicemos este teorema para construir una función $\varphi(\theta)$, continua en la circunferencia $\{\rho = 1\}$, la cual no puede ser prolongada en el círculo $\{|x| < 1\}$ mediante una función de H^1 ($|x| < 1$). Sea

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^3\theta}{k^2}.$$

Dado que esta serie es uniformemente convergente, la función $\varphi \in C$ ($|x| = 1$). De acuerdo con el teorema 13, dicha función no puede, al mismo tiempo, ser traza de una función de H^1 ($|x| < 1$), ya que la serie (58) para ella (que tiene por expresión $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \frac{1}{(k^2)^2}$ diverge.

9. Método variacional para resolver problemas de contorno. Sea H' un subespacio arbitrario del espacio real $H^1(Q)$, en particular, H' puede coincidir con todo el $H^1(Q)$. Convengamos en considerar que en H' está dado un producto escalar equivalente al producto escalar ordinario en $H^1(Q)$.

Tomemos una función real $f \in L_2(Q)$ y examinemos en H' una funcional

$$E(v) = \|v\|^2_{H'} + 2(f, v)_{L_2(Q)}, \qquad v \in H'. \tag{60}$$

Puesto que $|(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C \|f\|_{L_2(Q)} \|v\|_{H'}$, para toda $v \in H'$

$$E(v) \geqslant \|v\|^2_{H'} - 2|(f, v)_{L_2(Q)}| \geqslant \|v\|^2_{H'} - 2C\|v\|_{H'} \|f\|_{L_2(Q)} =$$
$$= (\|v\|_{H'} - C\|f\|_{L_2(Q)})^2 - C^2\|f\|^2_{L_2(Q)} \geqslant -C^2\|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

Esto implica que el conjunto de valores de la funcional E en H' es acotado por abajo. Designemos por $d = d(H')$ la cota inferior exacta de la funcional E en H':

$$d = \inf_{v \in H'} E(v)$$

Una función u de H' se llama función que *realiza el mínimo* de la funcional E en H', si

$$E(u) = d. \tag{61}$$

Por supuesto, igual que d, la función u depende de cómo se elige el subespacio H'.

Por definición de cota inferior exacta, existe una sucesión v_m, $m=1, 2, \ldots$, de funciones de H' para la cual tiene lugar

$$\lim_{m\to\infty} E(v_m)=d. \tag{62}$$

Toda sucesión de esta especie se llama sucesión que *minimiza* la funcional E en H'.

LEMA 5. *Para todo subespacio H' del espacio $\mathring{H}^1(Q)$ (en particular, H' puede coincidir con $\mathring{H}^1(Q)$) existe la única función u de H' que realiza el mínimo de la funcional E en H'. Toda sucesión que minimiza la funcional E sobre H', converge hacia esta función en la norma de $H^1(Q)$.*

Sea v_m, $m=1, 2, \ldots$, una sucesión arbitraria de H' que minimiza la funcional E en H'. Entonces, respecto a cualquier $\varepsilon>0$ se puede indicar un número $N=N(\varepsilon)$ tal que para todo $m\geqslant N$

$$d\leqslant E(v_m)\leqslant d+\varepsilon. \tag{63}$$

Puesto que

$$\left\|\frac{v_m\pm v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{4}\|v_m\|^2_{H'}+\frac{1}{4}\|v_s\|^2_{H'}\pm\frac{1}{2}(v_m, v_s)_{H'},$$

resulta que

$$\left\|\frac{v_m+v_s}{2}\right\|^2_{H'}+\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{2}(\|v_m\|^2_{H'}+\|v_s\|^2_{H'}).$$

De la última igualdad, recurriendo a (60), obtenemos

$$\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}=\frac{1}{2}(\|v_m\|^2_{H'}+\|v_s\|^2_{H'})-\left\|\frac{v_m+v_s}{2}\right\|^2_{H'}=$$
$$=\frac{1}{2}(E(v_m)+E(v_s))-E\left(\frac{v_m+v_s}{2}\right).$$

Pero, $E\left(\frac{v_m+v_s}{2}\right)\geqslant d$, y las funciones v_m y v_s satisfacen las desigualdades (63) cuando $m, s\geqslant N$. Quiere decir, que para cualesquiera $m, s\geqslant N$ tiene lugar la desigualdad

$$0\leqslant\left\|\frac{v_m-v_s}{2}\right\|^2_{H'}\leqslant\frac{1}{2}(d+\varepsilon+d+\varepsilon)-d=\varepsilon,$$

de la cual se infiere, por ser $\varepsilon>0$ arbitrario, que la sucesión en cuestión es fundamental en $H^1(Q)$. Por lo tanto, en H' existe una función u hacia la cual esta sucesión converge en la norma de $H^1(Q)$. Mas, en este caso $\|v_s\|_{H'}\to\|u\|_{H'}$ y $(f, v_s)_{L_2(Q)}\to(f, u)_{L_2(Q)}$ cuando $s\to\infty$, lo que implica que $E(v_s)\to E(u)$. La igualdad (61) se deduce ahora de la correlación (62).

Mostremos la unicidad de la función u que en H' realiza el mínimo de la funcional E. Supongamos que existan dos funciones de este tipo: u_1 y u_2. Entonces, $u_1, u_2, u_1, u_2, \ldots$ será una sucesión que minimiza la funcional E en H' y no converge en H' lo que contradice a la afirmación que acabamos de demostrar. El lema está demostrado.

Demos a conocer el *método de Ritz*, por medio del cual se construye una sucesión que minimiza la funcional E. Examinemos en H' un sistema arbitrario linealmente independiente de funciones φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, cuya cápsula lineal es siempre densa en H'. En el caso en que $H' = H^1(Q)$, por tal sistema se puede tomar, por ejemplo, el conjunto de todos los monomios $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ en el que α es un vector n-dimensional arbitrario de coordenadas de números enteros no negativos.

Designemos con R_k un subespacio k-dimensional del espacio $H' \subset H^1(Q)$ tendido en el sistema $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, y hallemos un elemento que realice el mínimo de la funcional E en el subespacio R_k (según el lema 5, tal elemento existe). Dado que todo elemento de R_k se representa por la forma $c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k$, siendo c_i ciertas constantes reales, entonces, el problema citado será equivalente al de hallar el mínimo (respecto a $c_1, \ldots, c_k$) de la función

$$F(c_1, \ldots, c_k) = E(c_1\varphi_1 + \ldots + c_k\varphi_k) =$$
$$= \sum_{i, j=1}^{k} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j)_{H'} + 2 \sum_{i=1}^{k} c_i (f, \varphi_i)_{L_2(Q)}.$$

El vector $(c_1, \ldots, c_k)$, en el cual la función F alcanza el mínimo, es una solución del sistema de ecuaciones lineales $\frac{\partial E}{\partial c_i} = 0$, $i = 1, \ldots, k$, o sea, del sistema

$$\sum_{j=1}^{k} (\varphi_i, \varphi_j)_{H'} c_j + (f, \varphi_i)_{L_2(Q)} = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{64}$$

El determinante del sistema (64), que se llama determinante de Gram para el sistema $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, es distinto de cero. En efecto, si fuese igual a cero, de la dependencia lineal de sus renglones se desprendería la existencia de las constantes $\xi_1, \ldots, \xi_k$ $|\xi_1| + \ldots + |\xi_k| \neq 0$ tales que $\xi_1(\varphi_1, \varphi_j)_{H'} + \ldots + \xi_k(\varphi_k, \varphi_j)_{H'} = 0$ para cualquier $j = 1, \ldots, k$. Lo último significaría que la función $\xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_k\varphi_k$ es ortogonal a todas las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, es decir, $\xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_k\varphi_k = 0$, lo cual contradice a la independencia lineal del sistema $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Así pues, el sistema lineal (64) siempre tiene la solución única $c_1^k, \ldots, c_k^k$. En este caso la función

$$v_k = c_1^k\varphi_1 + \ldots + c_k^k\varphi_k \tag{65}$$

de R_k realiza el mínimo de la funcional E en R_k. La sucesión de funciones v_k, $k = 1, 2, \ldots$, se llama *sucesión de Ritz* para la funcional E según el sistema $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

LEMA 6. *La sucesión de Ritz v_k, $k = 1, 2, \ldots$, de la funcional E según el sistema arbitrario linealmente independiente de funciones φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, cuya cápsula lineal es siempre densa en H', es una sucesión que minimiza la funcional E en H'. La sucesión v_k, $k = 1, 2, \ldots$, converge en la norma de $H^1(Q)$ hacia la función u que en H' realiza el mínimo de la funcional E.*

Ya que $R_1 \subset R_2 \ldots \subset R_k \subset \ldots \subset H'$, entonces

$$E(v_1) \geqslant E(v_2) \geqslant \ldots \geqslant E(v_k) \geqslant \ldots \geqslant d. \tag{66}$$

Puesto que la cápsula lineal del sistema φ_k, $k = 1, 2, \ldots$ es siempre densa en H', respecto a todo $\varepsilon > 0$ existirán los números, $k = k(\varepsilon)$ y $c_1'(\varepsilon), \ldots, c_k'(\varepsilon)$, tales que $\| u_\varepsilon - u \|_{H'} \leqslant \varepsilon$, donde $u_\varepsilon = c_1'(\varepsilon)\varphi_1 + \ldots + c_k'(\varepsilon)\varphi_k$ pertenece a R_k. Luego, de (60) se desprende que

$$\begin{aligned} E(u_\varepsilon) &= \| u_\varepsilon \|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon)_{L_2(Q)} = \| u_\varepsilon - u + u \|_{H'}^2 + \\ &\quad + 2(f, u_\varepsilon - u + u)_{L_2(Q)} = E(u) + E(u_\varepsilon - u) + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leqslant \\ &\leqslant d + | E(u_\varepsilon - u) | + 2 \| u_\varepsilon - u \|_{H'} \| u \|_{H'} \leqslant d + \| u_\varepsilon - u \|_{H'}^2 + \\ &\quad + 2C \| f \|_{L_2(Q)} \| u_\varepsilon - u \|_{H'} + 2 \| u_\varepsilon - u \|_{H'} \| u \|_{H'} \leqslant \\ &\leqslant d + \varepsilon^2 + 2C \| f \|_{L_2(Q)} \varepsilon + 2 \| u \|_{H'} \varepsilon \leqslant d + C_1 \varepsilon \end{aligned}$$

con cierta constante $C_1 > 0$. Como el mínimo de E en R_k se alcanza en la función v_k, entonces, para cualquier $s \geqslant k$, en virtud de (66), $d \leqslant E(v_s) \leqslant E(v_k) \leqslant d + C_1\varepsilon$. Esto precisamente significa que $E(v_s) \to d$ cuando $s \to \infty$. La convergencia de la sucesión v_s, $s = 1, 2, \ldots$, hacia la función u se deduce del lema 5. El lema está demostrado.

Establezcamos ahora una importante propiedad de la función u que realiza el mínimo de la funcional E en H'. Tomemos una función $v \in H'$ cualquiera y un número real arbitrario t. La función $w_t = u + tv$ pertenece a H', por lo que el polinomio (respecto a t) $P(t) = E(w_t) = E(u) + 2t((u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)}) + t^2 \| v \|_{H'}^2 \geqslant d$ para cualquier $t \in (-\infty, +\infty)$. Además, $P(0) = E(u) = d$. Por consiguiente,

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} = 2((u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)}) = 0.$$

Así pues, toda función u de H' que realiza el mínimo de la funcional E en H' satisface la identidad

$$(u, v)_{H'} + (f, v)_{L_2(Q)} = 0, \tag{67}$$

cualquiera que sea $v \in H'$.

Hasta ahora nos era indiferente de qué modo se definía en el subespacio H' un producto escalar equivalente al producto escalar ordinario en $H^1(Q)$.

Sea $H' = H^1(Q)$. Tomemos las funciones: $k(x) \in C(\overline{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 = \text{const} > 0$; $a(x) \in C(\overline{Q})$, $a(x) \geqslant 0$ en Q; $\sigma(x) \in C(\partial Q)$, $\sigma(x) \geqslant 0$ en ∂Q. Supongamos que o bien $a(x) \not\equiv 0$ en Q, o bien $\sigma(x) \not\equiv 0$ en ∂Q. El producto escalar en $H^1(Q)$ lo definiremos mediante la ecuación (10):

$$(u, v)_{H^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u\nabla v + auv))\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma uv\, dS.$$

Entonces, la identidad (67) coincide con la identidad (6):

$$\int_Q (k\nabla u\nabla v + auv)\, dx + \int_{\partial Q} k\sigma uv\, dS = -\int_Q fv\, dx,$$

que define la solución generalizada del tercero o del segundo (si $\sigma \equiv 0$) problema de contorno para la ecuación (1) (siendo homogénea la condición límite).

Cuando $H' = \mathring{H}^1(Q)$ y el producto escalar en $\mathring{H}^1(Q)$ está definido por la fórmula (7):

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q (k\nabla u\nabla v + auv)\, dx$$

($k(x)$, $a(x)$ pertenecen a $C(\overline{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$, $a(x) \geqslant 0$), la identidad (67) coincide con la identidad (4) que determina la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (1) (siendo homogénea la condición límite).

De este modo queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 14. *Existe la única función u de $H^1(Q)$ que realiza el mínimo de la funcional E en $H^1(Q)$. Si el producto escalar en $H^1(Q)$ está definido por la igualdad* (10), *la función u será la solución generalizada del tercer o del segundo (cuando $\sigma \equiv 0$) problema de contorno para la ecuación* (1) *(siendo homogénea la condición límite).*

Existe la única función u de $\mathring{H}^1(Q)$ que realiza el mínimo de la funcional E en $\mathring{H}^1(Q)$. Si el producto escalar en $\mathring{H}^1(Q)$ está definido por la fórmula (7), *la función u será la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación* (1).

El teorema 14 nos facilita un método variacional (independiente del método que utilizamos en los teoremas 1 y 2) para demostrar los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones generalizadas consideradas en el p. 2 de los problemas de contorno y nos indica el sentido variacional de las soluciones generalizadas.

Si el subespacio H' coincide con $H'(Q)$ (con $\mathring{H}^1(Q)$) y en $H^1(Q)$ ($\mathring{H}^1(Q)$) se ha introducido un producto escalar que se expresa por la fórmula (10) ((7)) y que es equivalente al producto ordinario, entonces, en virtud del lema 6 y del teorema 14, la sucesión de Ritz v_k, $k = 1, 2, \ldots$, de la funcional E en $H^1(Q)$ ($\mathring{H}^1(Q)$) converge en $H^1(Q)$ hacia la solución generalizada del tercer (primer) problema de contorno para la ecuación (1). Es decir, la sucesión de Ritz puede considerarse como una sucesión que aproxima la solución generalizada de un problema de contorno para la ecuación (1).

De este modo queda demostrado

TEOREMA 15. *Una sucesión de Ritz de la funcional E, dada en $H^1(Q)$ o en $\mathring{H}^1(Q)$ (el producto escalar se prefija por las fórmulas* (10) *ó* (7)), *que está construida según un sistema arbitrario linealmente independiente de funciones cuya cápsula lineal es siempre densa en $H^1(Q)$ o en $\mathring{H}^1(Q)$, respectivamente, converge en $H^1(Q)$ hacia la solución generalizada del problema correspondiente de contorno (tercero o primero) para la ecuación* (1).

§ 2. Suavidad de las soluciones generalizadas. Soluciones clásicas.

En el párrafo anterior hemos estudiado las cuestiones referentes a la resolución de los principales problemas de contorno para ecuaciones elípticas de segundo orden. Pasemos ahora al estudio de la suavidad de las soluciones de estos problemas.

Supondremos que los datos de los problemas que se consideran son de valores reales. Entonces, según lo dicho en el § 1, las soluciones generalizadas de estos problemas también serán de valores reales. Por ello, en lo sucesivo, sin hacer restricciones especiales, vamos a entender por soluciones las funciones de valores reales, es decir, los elementos de los espacios reales $C^k(\overline{Q})$ o $H^k(Q)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas, resulta conveniente destacar un caso unidimensional, dado que los resultados que se obtienen en este caso no son, en general, válidos para $n > 1$. Además, la investigación del caso unidimensional es mucho más sencilla. En particular, cuando $n = 1$, las soluciones generalizadas de los problemas de contorno (ellas pertenecen al espacio $H^1(\alpha, \beta)$) son, en vista del teorema 3 p. 2, § 6, cap. III, funciones continuas en $[\alpha, \beta]$. En el caso unidimensional también se resuelve con facilidad el problema de prolongar una función, dada en el contorno, a un dominio, por medio de una función de $H^1(\alpha, \beta)$: si $\Phi|_{x=\alpha} = \varphi_0$, $\Phi|_{x=\beta} = \varphi_1$, a título de tal prolongación se puede tomar una función lineal

$$\Phi = \frac{x(\varphi_1 - \varphi_0)}{\beta - \alpha} - \frac{\alpha\varphi_1 - \beta\varphi_0}{\beta - \alpha}.$$

1. Suavidad de las soluciones generalizadas en el caso unidimensional. Recordemos que los problemas de contorno para la ecuación

$$\mathcal{L}u \equiv (ku')' - au = f, \quad x \in (\alpha, \beta), \tag{1}$$

planteados de manera clásica, consisten en la búsqueda de la solución $u(x)$ de esta ecuación que satisfaga las condiciones siguientes: $u(x) \in C^2(\alpha, \beta) \cap C([\alpha, \beta])$ y

$$u|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad u|_{x=\beta} = \varphi_1 \tag{2}$$

para el caso del primer problema de contorno; $u(x) \in C^2(\alpha, \beta) \cap C^1([\alpha, \beta])$ y

$$(-u_x + \sigma_0 u)|_{x=\alpha} = \varphi_0, \quad (u_x + \sigma_1 u)|_{x=\beta} = \varphi_1 \tag{3}$$

para el caso del tercer (segundo) problema de contorno. Aquí, $k(x) \in C^1([\alpha, \beta])$, $a(x) \in C([\alpha, \beta])$, $f(x)$ son las funciones dadas, $k(x) \geqslant k_0 > 0$; σ_0, σ_1, φ_0, φ_1 son las constantes dadas.

La solución generalizada del problema (1), (2) ($f \in L_2(\alpha, \beta)$) es una función $u(x)$ de $H^1(\alpha, \beta)$ que satisface la identidad integral

$$\int_\alpha^\beta (ku'v' + auv)\,dx = -\int_\alpha^\beta fv\,dx \tag{4}$$

para cualquier $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ y las condiciones límites (2).

La solución generalizada del problema (1), (3), ($f \in L_2(\alpha, \beta)$) es una función $u(x)$ de $H^1(\alpha, \beta)$ que satisface la identidad integral

$$\int_\alpha^\beta (ku'v' + auv)\,dx + k(\beta)\sigma_1 u(\beta) v(\beta) + k(\alpha)\sigma_0 u(\alpha) v(\alpha) =$$

$$= -\int_\alpha^\beta fv\,dx + k(\beta)\varphi_1 v(\beta) + k(\alpha)\varphi_0 v(\alpha), \tag{5}$$

cualquiera que sea $v \in H^1(\alpha, \beta)$.

Resulta ser válida la siguiente afirmación auxiliar.

LEMA 1. *Cuando $f \in C([\alpha, \beta])$, una función $u(x)$ de $H^1(\alpha, \beta)$, que satisface la identidad integral (4) para cualquier $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$, pertenece al espacio $C^2([\alpha, \beta])$ y es la solución de la ecuación (1) en el intervalo (α, β).*

Como la función $u(x) \in C([\alpha, \beta])$ ($H^1(\alpha, \beta) \subset C([\alpha, \beta])$), entonces, $f + au \in C([\alpha, \beta])$ y $\int_\alpha^x (f(\xi) + a(\xi)u(\xi))\,d\xi \in C^1([\alpha, \beta])$.

Examinemos la función $u_0(x) = \int\limits_0^x \frac{d\eta}{k(\eta)} \int\limits_0^\eta (f(\xi) + a(\xi)\,u(\xi))\,d\xi$.

En virtud de las condiciones impuestas en $k(x)$, la función $u_0(x) \in C^2([\alpha, \beta])$ y, además, en (α, β) ella es la solución de la ecuación diferencial $(ku_0')' = f(x) + a(x)\,u(x)$. Por consiguiente, para toda $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ la función $u_0(x)$ satisface la igualdad

$$\int\limits_\alpha^\beta (ku_0'v' + auv)\,dx = -\int\limits_\alpha^\beta fv\,dx;$$

por lo tanto, una función $u_1 = u - u_0$, perteneciente a $H^1(\alpha, \beta)$, satisface la identidad integral

$$\int\limits_\alpha^\beta ku_1'v'\,dx = 0, \qquad v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta),$$

de la cual se deduce que la función ku_1' tiene en (α, β) una derivada generalizada igual a cero. Por lo tanto, $ku_1' = \text{const}$, es decir, $u_1 \in C^2([\alpha, \beta])$. Por ello, también la función $u(x) \in C^2([\alpha, \beta])$.

Puesto que para toda $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$ $\int\limits_\alpha^\beta ku'v'\,dx = -\int\limits_\alpha^\beta (ku')'\,v\,dx$ entonces, de (4) se infiere que la función $(ku')' - a(x)\,u(x) - f(x)$, continua en $[\alpha, \beta]$, es ortogonal (en el producto escalar de $L_2(\alpha, \beta)$) a toda función de $\mathring{H}^1(\alpha, \beta)$. Por ello, en (α, β) la función $u(x)$ es una solución de la ecuación (1). El lema está demostrado.

La solución generalizada $u(x)$ de cualquiera de los problemas de contorno (sea éste el primero, segundo o tercero) pertenece a $H^1(\alpha, \beta)$ y para ella tiene lugar la identidad (4) para toda $v \in \mathring{H}^1(\alpha, \beta)$. Por eso, en virtud del lema 1, $u(x) \in C^2([\alpha, \beta])$ y $u(x)$ será en (α, β) la solución de la ecuación (1).

De este modo, hemos mostrado que para $f \in C([\alpha, \beta])$, las soluciones generalizadas de los problemas de contorno en cuestión admiten en el segmento $[\alpha, \beta]$ derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive y satisfacen la ecuación (1). Es obvio, además, que en el caso del primer problema de contorno la función $u(x)$ satisface las condiciones límites (2). En el caso del tercero (segundo) problema de contorno, para toda función $v(x) \in H^1(\alpha, \beta)$

$$\int\limits_\alpha^\beta ku'v'\,dx = -\int\limits_\alpha^\beta (ku')'\,v\,dx + k(\beta)\,u'(\beta)\,v(\beta) - k(\alpha)\,u'(\alpha)\,v(\alpha).$$

Esto quiere decir que en vista de la identidad (5),

$$k(\beta)(u'(\beta)+\sigma_1 u(\beta)-\varphi_1)v(\beta)+$$
$$+k(\alpha)(-u'(\alpha)+\sigma_0 u(\alpha)-\varphi_0)v(\alpha)=0$$

cualesquiera que sean $v(\beta)$ y $v(\alpha)$ (recordemos que para cualesquiera $v(\alpha)$ y $v(\beta)$ existe una función $v(x)$ de $H^1(\alpha, \beta)$ que para $x=\alpha$ y $x=\beta$ toma los valores $v(\alpha)$ y $v(\beta)$). Por consiguiente, la función $u(x)$ satisface condiciones límites (3).

Así pues, esta demostrado

TEOREMA 1. *Cuando una función $f(x) \in C([\alpha, \beta])$, las soluciones generalizadas del primer, segundo y tercer problemas de contorno para la ecuación* (1) *pertenecen a $C^2([\alpha, \beta])$ y son soluciones clásicas de los problemas correspondientes.*

Sea $u_s(x)$ una función propia generalizada, por ejemplo, del tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$. Esto significa que $u_s(x) \in H^1(\alpha, \beta)$ y, del mismo modo, $u_s(x) \in C([\alpha, \beta])$, y que para ella, cualquiera que sea $v \in H^1(\alpha, \beta)$, tiene lugar la igualdad

$$\int_\alpha^\beta (ku_s'v'+au_sv)\,dx+k(\beta)\sigma_1 u_s(\beta)\,v(\beta)+k(\alpha)\sigma_0 u_s(\alpha)\,v(\alpha)=$$
$$=-\lambda_s\int_\alpha^\beta u_s v\,dx,$$

donde λ_s es un valor propio. De acuerdo con el teorema 1, la función $u_s(x)$ pertenece a $C^2([\alpha, \beta])$ y es la solución clásica de la ecuación

$$\mathscr{L}u=(ku')'-au=\lambda_s u, \qquad x\in(\alpha, \beta), \tag{6}$$

que satisface las condiciones límites homogéneas (3), es decir, $u_s(x)$ es una función propia clásica del tercer (segundo) problema de contorno para el operador $\mathscr{L}$.

Análogamente se muestra que la función propia generalizada $u_s(x)$ del primer problema de contorno pertenece a $C^2([\alpha, \beta])$ y es la función propia clásica de este problema.

Demostremos que los valores propios de cualquiera de los problemas de contorno en cuestión son de multiplicidad 1. Supongamos que existe un valor propio λ_s, por ejemplo, del tercer problema de contorno, al cual corresponden dos funciones propias $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ que son linealmente independientes.

Como sabemos, la solución general de la ecuación (6) tiene por expresión $C_1u^{(1)}+C_2u^{(2)}$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Esto significa que toda solución de la ecuación (6) debe satisfacer la condición límite $u'(\alpha)-\sigma_0 u(\alpha)=0$, puesto que ambas funciones

$u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ satisfacen esta condición límite. Y a la par con esto, existe una solución de la ecuación (6) que no la satisface, por ejemplo, una solución con condiciones iniciales $u(\alpha) = 0$, $u'(\alpha) = 1$.

De este modo queda demostrado

TEOREMA 2. *Las funciones propias generalizadas del primer, segundo y tercer problemas de contorno para el operador $\mathcal{L}$ pertenecen a $C^2([\alpha, \beta])$ y son funciones propias clásicas de los problemas correspondientes de contorno. Todos los valores propios son de multiplicidad* 1.

2. Suavidad interior de las soluciones generalizadas. Procedamos ahora al estudio de la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para el caso $n > 1$. Para que los pormenores técnicos no obstaculicen la aclaración de la sustancia del problema, nos limitaremos a la consideración del caso particular de la ecuación (1) del párrafo anterior, a saber, estudiaremos la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación de Poisson ($k \equiv 1$, $a \equiv 0$)

$$\Delta u = f. \tag{7}$$

Recordemos que la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (7) es la función $u(x)$ de $H^1(Q)$ que satisface la identidad integral

$$\int_Q \nabla u \nabla v \, dx = -\int_Q fv \, dx, \tag{8}$$

para cualquier $v \in \mathring{H}^1(Q)$, y la condición límite $u|_{\partial Q} = \varphi$ (la función $f \in L_2(Q)$, y la función φ es una traza de cierta función Φ de $H^1(Q)$, es decir, existe una función $\Phi \in H^1(Q)$ tal que $\Phi|_{\partial Q} = \varphi$).

La solución generalizada del tercer (segundo) problema de contorno de la ecuación (7) es una función $u(x)$ de $H^1(Q)$ para la cual se cumple la identidad integral

$$\int_Q \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial Q} \sigma u v \, dS = -\int_Q fv \, dx + \int_{\partial Q} \varphi v \, dS \tag{9}$$

cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$ (la función $f \in L_2(Q)$, y $\varphi \in L_2(\partial Q)$).

De los resultados obtenidos en el párrafo anterior se desprende que la solución generalizada del primer problema de contorno existe, es única y satisface la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\,(\|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi \in H^1(Q) \\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}) \tag{10}$$

con la constante C que no depende ni de f ni de φ.

La solución generalizada $u(x)$ del tercer problema de contorno para $\sigma \geqslant 0$, $\sigma \not\equiv 0$, también existe, es única y satisface la desigualdad

$$\|u\|_{H^1(Q)} \leqslant C\,(\|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)}) \tag{11}$$

con la constante C que no depende ni de f ni de φ.

Examinando el segundo problema de contorno ($\sigma = 0$), supongamos cumplida la condición en que éste sea soluble: $-\int\limits_Q f\,dx + \int\limits_{\partial Q} \varphi\,dS = 0$. Entonces, en la clase de funciones que son ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las constantes existe la única solución generalizada $u(x)$ del segundo problema de contorno y para esta solución tiene lugar la ecuación (11). Puesto que todas las demás soluciones generalizadas se diferencian de $u(x)$ por los sumandos constantes, al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas del segundo problema de contorno podemos limitarnos al estudio de la función $u(x)$.

LEMA 2. *Sea* $f \in L_2(Q) \cap H^k_{loc}(Q)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *y sea la función* $u \in H^1(Q)$ que satisface la identidad integral (8) para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$. *En este caso,* $u \in H^{k+2}_{loc}(Q)$, *y para cualquier par de subdominios* Q' y Q'' *del dominio* Q, tales que $Q' \Subset Q'' \Subset Q$, *tiene lugar la desigualdad*

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C\,(\|f\|_{H^k(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')}) \tag{12}$$

con la constante positiva $C = C(k, Q', Q'')$.

DEMOSTRACIÓN. Sean Q' y Q'' subdominios arbitrarios del dominio Q tales que $Q' \Subset Q'' \Subset Q$. Designemos por $\delta > 0$ la distancia entre los contornos $\partial Q'$ y $\partial Q''$ y examinemos la función $\zeta(x)$ que posee las siguientes propiedades: $\zeta(x) \in C^\infty(R_n)$, $\zeta(x) \equiv 1$ en Q'_δ (y, consecuentemente, en Q'), $\zeta(x) \equiv 0$ fuera de $Q'_{2\delta/3}$.

Sustituyamos en la identidad (8), a título de función $v(x)$, una función $\zeta(x)\,v_0(x)$, donde $v_0(x)$ es una función arbitraria de $\mathring{H}^1(Q'')$ prolongada por cero fuera de Q'' (es obvio que $\zeta(x)\,v_0(x) \in \mathring{H}^1(Q)$). Puesto que $\nabla u \nabla v = \nabla u \nabla(\zeta v_0) = \nabla u\,(\nabla\zeta \cdot v_0 + \zeta \nabla v_0) = \nabla u \cdot \nabla\zeta \cdot v_0 + \nabla(\zeta u)\,\nabla v_0 - u \nabla\zeta \nabla v_0$, la identidad (8) tomará la forma

$$\int\limits_{Q''} \nabla U \nabla v_0\,dx = \int\limits_{Q''} F v_0\,dx + \int\limits_{Q''} u \nabla\zeta \nabla v_0\,dx, \tag{13_0}$$

en la cual la función

$$U(x) = \zeta(x)\,u(x) \tag{14}$$

pertenece a $H^1(Q'')$, es nula fuera de $Q'_{2\delta/3}$ y coincide con $u(x)$ en Q'_δ, mientras que la función

$$F(x) = -f\zeta - \nabla u \cdot \nabla\zeta \tag{15}$$

pertenece a $L_2(Q'')$ y se anula fuera de $Q'_{2\delta/3}$.

Cabe destacar que en realidad la integración en (13_0) se extiende al dominio $Q''_{2\delta/3}$. Por ello, esta igualdad tiene lugar no sólo para cualquier $v_0 \in H^1(Q'')$ sino que también para toda $v_0 \in H^1(Q''_{\delta/2})$ (prolongada arbitrariamente, como un elemento de $L_2(Q'')$, fuera de $Q''_{\delta/2}$).

Elijamos de modo arbitrario una función $v_1(x)$ perteneciente a $H^1(Q'')$ y prolongada por cero fuera de Q''. Para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n$ y h arbitrario, $0 < |h| < \delta/2$, la relación de diferencias finitas

$$\delta^i_{-h} v_1(x) = \frac{v_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - v_1(x)}{-h}$$

será una función de $H^1(Q''_{\delta/2}) \cap L_2(Q'')$. Hagamos en (13_0) $v_0 = \delta^i_{-h} v_1(x)$ para cierto $i = 1, 2, \ldots, n$ y cierto h, $0 < |h| < \delta/2$. Haciendo uso de la fórmula de «integración por partes» (fórmula (9), p. 4, § 3, cap. III), obtenemos la igualdad

$$\int_{Q''} \nabla \delta^i_h U \nabla v_1\, dx = - \int_{Q''_{2\delta/3}} F \delta^i_{-h} v_1\, dx + \int_{Q''} \delta^i_h (u \nabla \zeta) \nabla v_1\, dx. \quad (16_0)$$

Primero demostremos la afirmación del lema para $k = 0$. De (15) se deduce inmediatamente la acotación

$$\| F \|_{L_2(Q'')} \leqslant C'(Q', Q'') (\| f \|_{L_2(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')}).$$

Por esto, de (16_0) obtenemos las siguientes desigualdades (con ayuda del teorema 3, p. 4, § 3, cap. III):

$$\left| \int_{Q''} \nabla \delta^i_h U \nabla v_1\, dx \right| \leqslant (\| F \|_{L_2(Q'')} + C \| u \|_{H^1(Q'')}) \| \, |\nabla v_1| \, \|_{L_2(Q'')} \leqslant$$

$$\leqslant C(Q', Q'') (\| f \|_{L_2(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')}) \| \, |\nabla v_1| \, \|_{L_2(Q'')}.$$

Haciendo $v_1 = \delta^i_h U$ (consideramos que la función U está prolongada por cero fuera de Q), obtenemos:

$$\| \, |\nabla \delta^i_h U| \, \|_{L_2(Q'')} \leqslant C(Q', Q'') (\| f \|_{L_2(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')})$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y, $0 < |h| < \delta/2$.

De acuerdo con el teorema 3, p. 4, § 3, cap. III, de esta desigualdad se desprende que $U \in H^2(Q'')$ y $\| U \|_{H^2(Q'')} \leqslant C(Q', Q'') \times \times (\| f \|_{L_2(Q'')} + \| u \|_{H^1(Q'')})$. Como en el dominio Q' $U = u$, entonces $u \in H^2(Q')$ y para $k = 0$ tiene lugar la desigualdad (12). Puesto que Q' es un subdominio arbitrario estrictamente interior respecto a Q, $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Sea ahora $f \in H^{m+1}_{\mathrm{loc}}(Q)$. Supongamos que la función $u(x)$ posee las propiedades siguientes: $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(Q)$; para cualquier par de subdominios Q_1 y Q_2 del dominio Q, tales que $Q_1 \Subset Q_2 \Subset Q$, se efectúa, cuando $k = m$, la desigualdad (12):

$$\| u \|_{H^{m+2}(Q_1)} \leqslant C(m, Q_1, Q_2)(\| f \|_{H^m(Q_2)} + \| u \|_{H^1(Q_2)}) \qquad (12_m)$$

y para cualesquiera α, $|\alpha| \leqslant m$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y $0 < |h| < \delta/2$, es válida la igualdad

$$\int_{Q''} \nabla \delta_h^i (D^\alpha U) \nabla v_{m+1}\, dx = - \int_{Q''_{2\delta/3}} D^\alpha F \delta_{-h}^i v_{m+1}\, dx + \int_{Q''} \delta_h^i (D^\alpha (u \nabla \zeta)) \nabla v_{m+1}\, dx, \qquad (16_m)$$

donde v_{m+1} es una función arbitraria de $H^1(Q'')$. Señalemos que para el caso $m = 0$ las propiedades citadas ya han sido establecidas.

Puesto que de (14) y (15) se deduce, en virtud de las suposiciones admitidas, que $D^\alpha U \in H^2(Q'')$, y, por otra parte, $D^\alpha F \in H^1(Q'')$, entonces, teniendo en cuenta el teorema 3, p. 4, § 3, cap. III, en (16_m) se puede pasar al límite para $h \to 0$. Como resultado, para cualesquiera α, $|\alpha| = m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos la igualdad

$$\int_{Q''} \nabla D^\alpha U_{x_i} \nabla v_{m+1}\, dx = - \int_{Q''_{2\delta/3}} D^\alpha F (v_{m+1})_{x_i}\, dx + \int_{Q''} D^\alpha (u \nabla \zeta)_{x_i} \nabla v_{m+1}\, dx,$$

de la cual proviene (la función $D^\alpha F$ es nula fuera de $Q''_{2\delta/3}$) que para toda $v_{m+1} \in H^1(Q'')$

$$\int_{Q''} \nabla D^\alpha U_{x_i} \nabla v_{m+1}\, dx = \int_{Q''} D^\alpha F_{x_i} v_{m+1}\, dx + \int_{Q''} D^\alpha (u \nabla v)_{x_i} \nabla v_{m+1}\, dx. \qquad (13_{m+1})$$

La última igualdad coincide con (13_0), si sustituimos en ella $D^\alpha U_{x_i}$ por U, $D^\alpha F_{x_i}$ por F, $D^\alpha (u \nabla \zeta)_{x_i}$ por $u \nabla \zeta$ y v_{m+1} por v_0. Con ello, $D^\alpha U_{x_i} \in H^1(Q'')$ se anula fuera de $Q''_{2\delta/3}$ y coincide con $D^\alpha U_{x_i}$ en Q''_δ, mientras que $D^\alpha F_{x_i} \in L_2(Q'')$ y se anula fuera de $Q''_{2\delta}$. Puesto que la integración en (13_{m+1}) se extiende en realidad al dominio $Q''_{2\delta/3}$, en esta igualdad se puede sustituir $v_{m+1}(x) = \delta_{-h}^j v_{m+2}(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $0 < |h| < \delta/2$, donde v_{m+2} es una función arbitraria de $H^1(Q'')$. Como resultado se obtiene

$$\int_{Q''} \nabla \delta_h^j (D^\alpha U_{x_i}) \nabla v_{m+2}\, dx = - \int_{Q''} D^\alpha F_{x_i} \delta_{-h}^j v_{m+2}\, dx + \int_{Q''} \delta_h^j (D^\alpha (u \nabla \zeta)_{x_i}) \nabla v_{m+2}\, dx. \qquad (16_{m+1})$$

Empleando la desigualdad (12_m) (hagamos en ella $Q_1 = Q''_{2\delta/3}$, y $Q_2 = Q''$), de (15) tenemos

$$\|F\|_{H^{m+1}(Q'')} \leqslant C_1 (\|f\|_{H^{m+1}(Q'')} + \|u\|_{H^{m+2}(Q''_{2\delta/3})}) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 (\|f\|_{H^{m+1}(Q'')} + \|u\|_{H^1(Q'')}).$$

Sustituyendo ahora en (16_{m+1}) $v_{m+2} = \delta_n^i (D^\alpha U_{x_i})$, de nuevo, en virtud del teorema 3, p. 4, § 3, cap. III, resulta que $u \in H^{m+3}_{\text{loc}}(Q)$ y para $u(x)$ es válida la desigualdad (12) cuando $k = m + 1$. El lema está demostrado.

Del lema 2 se infiere la siguiente afirmación.

COROLARIO. *Supongamos que $f \in L_2(Q)$ y la función $u \in H^1(Q)$ satisface, para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$, la identidad integral (8). En este caso, la función $u(x)$ satisface (casi siempre) en Q la ecuación (7).*

Tenemos que demostrar que la suma de las segundas derivadas generalizadas $u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}$ (acabamos de mostrar que estas derivadas existen) c.t.p. de Q es igual a la función f. Sustituyamos en (8), a título de $v(x)$, una función arbitraria de $\mathring{H}^1(Q')$, $Q' \Subset Q$, prolongada por cero fuera de Q'. Puesto que $u \in H^2(Q')$, debido a la fórmula de Ostrogradski, $\int\limits_{Q'} (\Delta u - f)\, v\, dx = 0$, de donde $\Delta u - f = 0$ (casi siempre) en Q', y, por lo tanto, también (casi siempre) en Q.

Ya que las soluciones generalizadas $u(x)$ del primer, segundo y tercer problemas de contorno para la ecuación (7) satisfacen las condiciones del lema 2 y las desigualdades (10) ó (11) (la solución $u(x)$ del segundo problema de contorno se supone ortogonal en $L_2(Q)$ a las constantes), entonces del lema (2) y teorema 2, p. 2, § 6, cap. III, se deduce la afirmación siguiente.

TEOREMA 3. *Cuando $f \in L_2(Q) \cap H^k_{\text{loc}}(Q)$, donde $k \geqslant 0$, las soluciones generalizadas $u(x)$ del primer, segundo y tercer problemas de contorno para la ecuación (7) pertenecen a $H^{k+2}_{\text{loc}}(Q)$ y (casi siempre) en Q satisfacen la ecuación (7). Para cualesquiera subdominios Q' y Q'' del dominio Q, $Q' \Subset Q'' \Subset Q$, existe una constante positiva C, dependiente de Q', Q'' y k, tal que*

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C \left(\|f\|_{H^k(Q'')} + \|f\|_{L_2(Q)} + \inf_{\substack{\Phi \in H^1(Q) \\ \Phi|_{\partial Q} = \varphi}} \|\Phi\|_{H^1(Q)}\right)$$

en el caso del primer problema de contorno y

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q')} \leqslant C (\|f\|_{H^k(Q'')} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial Q)})$$

en el caso del segundo y tercer problemas de contorno (para el segundo problema consideramos que $\int\limits_Q u\, dx = 0$).

Si $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, *entonces* $u(x) \in C^{k+1-\left[\frac{n}{2}\right]}(Q)$. *En particular, cuando* $f \in L_2(Q) \cap C^\infty(Q)$, $u(x) \in C^\infty(Q)$.

Del teorema 3 se desprende que la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación (7) dentro del dominio Q no depende del tipo de condiciones límites, ni de la suavidad del contorno, ni tampoco de la suavidad de la función límite. La suavidad interior sólo se determina por la suavidad del segundo miembro $f(x)$ de la ecuación. El resultado obtenido es altamente exacto: la suavidad de la solución es superior a la del segundo miembro en el valor del orden de la ecuación.

OBSERVACION. Tratando el caso unidimensional hemos demostrado, en particular, que si el segundo miembro de la ecuación (7) es continuo, las soluciones generalizadas tendrán derivadas continuas hasta el segundo orden inclusive. Una afirmación análoga en el caso multidimensional no es válida. Más adelante (en el p. 3 del párrafo que sigue) daremos un ejemplo de una función $f(x)$, continua en $\overline{Q}$, tal que la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación de Poisson (7) no pertenece a $C^2(Q)$ (claro está que ella pertenece a $H^2_{\text{loc}}(Q)$).

3. Suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno. En el punto antecedente hemos establecido la suavidad interior de las soluciones generalizadas, es decir, la pertenencia de éstas a los espacios $H^k_{\text{loc}}(Q)$ o $C^l(Q)$ para ciertos k y l. En este punto estudiaremos la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno por todo el dominio Q, es decir, la pertenencia de las soluciones a los espacios $H^k(Q)$ o $C^l(\overline{Q})$. Es natural, que la suavidad de una solución «hasta el mismo contorno» depende de la suavidad del contorno y de las funciones límites.

Supondremos que para cierto $k \geqslant 0$ el contorno $\partial Q \in C^{k+2}$

Examinemos primero el caso cuando las condiciones límites son homogéneas. Las soluciones generalizadas del primero o del segundo problema de contorno*) con condiciones límites homogéneas (la función φ que es el segundo miembro en las condiciones límites, es nula) para la ecuación (7) son funciones de los espacios $\mathring{H}^1(Q)$ o $H^1(Q)$ que satisfacen la identidad integral (8) para toda v de $\mathring{H}^1(Q)$ o $H^1(Q)$, respectivamente (en el caso del segundo problema de contorno las funciones f y u se suponen ortogonales en el producto escalar de $L_2(Q)$ a las constantes).

*) Para simplificar, nos limitamos a la consideración de soluciones del primer y segundo problemas de contorno. El estudio de la suavidad de las soluciones generalizadas del tercer problema de contorno con ciertos requisitos impuestos en la función $\sigma(x)$ (de (9)) puede ser efectuada del mismo modo.

TEOREMA 4. *Si $f \in H^k(Q)$ y $\partial Q \in C^{k+2}$ para cierto $k \geqslant 0$, entonces, las soluciones generalizadas $u(x)$ del primero y segundo problemas de contorno con condiciones límites homogéneas para la ecuación de Poisson* (7) *pertenecen a $H^{k+2}(Q)$ y satisfacen (en el caso del segundo problema de contorno consideramos que $\int\limits_Q u\,dx = 0$) la desigualdad*

$$\|u\|_{H^{k+2}(Q)} \leqslant C\|f\|_{H^k(Q)} \tag{17}$$

*con la constante $C > 0$ que no depende de f**).

Sea x^0 un punto arbitrario del contorno ∂Q. Elijamos un sistema de coordenadas de modo tal que x^0 sea el origen de coordenadas y una normal al contorno en este punto esté orientada a lo largo del eje Ox_n. Tomemos un número $r = r(x^0)$ tan pequeño que un trazo del contorno $\partial Q \cap (|x| < 4r)$ sea un conjunto conexo que se proyecte unívocamente, a lo largo del eje Ox_n, en cierto dominio D del plano $x_n = 0$; la ecuación de la superficie $\partial Q \cap (|x| < 4r)$ tiene por expresión

$$x_n = \psi(x'), \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D,$$

donde $\psi(x')$ es una función de $C^{k+2}(\overline{D})$, $\psi(0) = 0$, $\psi_{x_1}(0) = \ldots$ $\ldots = \psi_{x_{n-1}}(0) = 0$, con la particularidad de que están cumplidas las desigualdades

$$|\psi_{x_i}| \leqslant \frac{1}{2n}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad x' \in \overline{D}. \tag{18}$$

Entonces el dominio $\Omega = Q \cap (|x| < 3r)$ y, consecuentemente, su subdominio $\Omega' = Q \cap (|x| < r)$ se proyectan a lo largo del eje Ox_n en D.

Designemos con Γ la parte común de los contornos de los dominios Q y Ω, $\Gamma = \partial Q \cap (|x| < 3r)$, y con Γ_0, la parte restante del contorno del dominio Ω. El conjunto de funciones de $H^1(\Omega)$ cuya traza sobre Γ es igual a cero, lo designaremos con $\mathring{H}^1_\Gamma(\Omega)$.

Sea una función $\zeta(x) \in C^\infty(R_n)$, $\zeta(x) \equiv 1$ para $|x| < r$, $\zeta(x) \equiv 0$ para $|x| > 2r$. Entonces, para una función arbitraria $v_0(x)$ de $\mathring{H}^1_\Gamma(\Omega)$ (de $H^1(\Omega)$), la función $v(x)$, igual a la función $\zeta(x)\,v_0(x)$ en Ω y nula en todos los demás puntos del dominio Q, pertenece a $\mathring{H}^1(Q)$ ($H^1(Q)$). Sustituyendo esta función $v(x)$ en (8),

---

*) Para la función $u(x)$, que es solución generalizada del tercer problema de contorno para la ecuación (7) con una condición límite homogénea, tiene lugar la siguiente afirmación: *si $f \in H^k(Q)$, $\partial Q \in C^{k+2}$ y $\sigma(x) \in C^{k+1}(\partial Q)$ ($\sigma \geqslant 0$) para cierto $k \geqslant 0$, entonces $u(x) \in H^{k+2}(Q)$ y se cumple la desigualdad* (17).

obtendremos, igual que en el punto anterior, la igualdad

$$\int_{\Omega} \nabla U \nabla v_0 \, dx = \int_{\Omega} F v_0 \, dx + \int_{\Omega} u \nabla \zeta \nabla v_0 \, dx, \tag{19}$$

donde v_0 es una función arbitraria de $\mathring{H}^1_{\Gamma}(\Omega)$ en el caso del primer problema de contorno y una función arbitraria de $H^1(\Omega)$, en el caso del segundo problema de contorno; las funciones $F(x)$ y $U(x)$ se

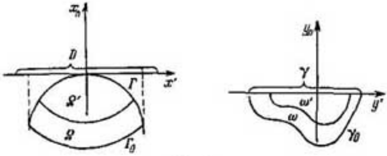

Fig. 1

definen por las igualdades (14) y (15) en las que figura la función $\zeta(x)$ que acabamos de introducir. Es evidente que $U(x) \in H^1(\Omega)$, $F(x) \in L_2(\Omega)$.

La transformación

$$y_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n = 1, \quad y_n = x_n - \psi(x') \tag{20}$$

representa biunívocamente los dominios Ω y Ω' en ciertos dominios ω y ω', siendo unitario el jacobiano correspondiente.

Las imágenes de las superficies Γ y Γ_0 las designaremos mediante γ y γ_0, respectivamente. Las funciones $U(x)$, $u(x)$, ..., definidas en el dominio Ω se convierten, como resultado de la transformación (20), en las funciones $U(y)$, $u(y)$, ... (conservemos para ellas las designaciones anteriores), definidas en el dominio ω. Además, $U(y) = u(y)$ en ω', mientras que para cierto $\delta > 0$ las funciones $U(y)$ y $F(y)$ son nulas en los puntos del conjunto $\omega \setminus \tilde{\omega}_\delta$ donde $\tilde{\omega}_\delta$ es un subdominio del dominio ω que se compone de todos aquellos puntos que distan de γ_0 más de δ.

Puesto que para $x \in \Omega$ ($y \in \omega$) se tiene $U_{x_i} = U_{y_i} - U_{y_n}\psi_{x_i}$, siendo $i = 1, \ldots, n-1$, y $U_{x_n} = U_{y_n}$, entonces

$$\nabla_x U \nabla_x v_0 = \nabla_y U \nabla_y v_0 - \sum_{i=1}^{n-1} (U_{y_i} v_{0_{y_n}} + U_{y_n} v_{0_{y_i}}) \psi_{x_i} + U_{y_n} v_{0_{y_n}} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2,$$

y, por ello, la igualdad (19) en nuevas variables tiene la forma

$$\int_{\omega} \nabla_y U_y v_0 \, dy = \int_{\omega} F v_0 \, dy + \int_{\omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} U_{y_i} v_{0y_j} \, dy +$$

$$+ \int_{\omega} \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} \zeta_{y_j} u v_{0y_i} \, dy, \qquad (21_0)$$

donde $A_{in} = A_{ni} = \psi_{x_i}$ para $i = 1, \ldots, n-1$, $A_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2$, $A_{ij} = 0$ para todos los demás i y j; $B_{ij} = \delta_{ij} - A_{ij}$, $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Es evidente que $A_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\omega})$, $B_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\omega})$ para todo i y j; además, en virtud de (18)

$$|A_{ij}(y)| \leqslant \frac{1}{2n}, \quad i, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad y \in \overline{\omega}. \qquad (22)$$

Ya que las funciones $U(y)$ y $F(y)$ son nulas en $\omega \setminus \widetilde{\omega}_{\delta/2}$, la igualdad (21_0) tiene lugar no sólo para toda $v_0(y)$ de $\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ o de $H^1(\omega)$, sino para cualquier $v_0(y)$ de $\mathring{H}^1_\gamma(\widetilde{\omega}_{\delta/2})$ (prolongada arbitrariamente fuera de $\widetilde{\omega}_{\delta/2}$ como función de $L_2(\omega)$) o, respectivamente, de $H^1(\widetilde{\omega}_{\delta/2})$ (prolongada arbitrariamente fuera de $\widetilde{\omega}_{\delta/2}$ como función de $L_2(\omega)$).

Tomemos una función cualquiera $v_1(y)$, perteneciente a $\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ $(H^1(\omega))$ y prolongada por cero fuera de ω, y hagamos en (21_0) $v_0 = \delta^l_{-h} v_1$ para ciertos $l < n$ y $0 < |h| < \delta/2$ (la función $v_0(y)$ pertenece, evidentemente, a $\mathring{H}^1_\gamma(\widetilde{\omega}_{\delta/2}) \cap L_2(\omega)$, y, correspondientemente, a $H^1(\widetilde{\omega}_{\delta/2}) \cap L_2(\omega)$). La igualdad (21_0) tomará la forma

$$\int_{\widetilde{\omega}} \nabla_y (\delta^l_h U) \nabla_y v_1 \, dy = -\int_{\omega} F \delta^l_{-h} v_1 \, dy +$$

$$+ \int_{\omega} \sum_{i,j=1}^{n} \delta^l_h (A_{ij} U_{y_i}) v_{1y_j} \, dy + \int_{\omega} \sum_{i,j=1}^{n} \delta^l_h (B_{ij} \zeta_{y_j} u) v_{1y_i} \, dy \qquad (23_0)$$

(señalemos que la integración en esta igualdad se efectúa no por todo el dominio ω, sino por su subdominio $\widetilde{\omega}_{\delta/2}$; por ello, todos los integrandos en (23_0) están definidos).

Del teorema 4, p. 4, § 3, cap. III, se deduce que

$$\left| \int_{\omega} F \delta^l_{-h} v_1 \, dy \right| \leqslant \| F \|_{L_2(\omega)} \| v_{1y_l} \|_{L_2(\omega)} \leqslant \| F \|_{L_2(\omega)} \| \, |\nabla v_1| \, \|_{L_2(\omega)}. \quad (24_0)$$

Antes de acotar la segunda integral en el segundo miembro de (23_0), descompongámosla en dos sumandos

$$\int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta_h^l (A_{ij} U_{y_i}) v_{1y_j} dy = \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})_h^l \delta_h^l U_{y_i} v_{1y_j} dy + \\ + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta_h^l (A_{ij}) U_{y_i} v_{1y_i} dy. \qquad (25_0)$$

Haciéndolo, hemos hecho uso de la igualdad, válida para cualesquiera f y g arbitrarias:

$$\delta_h^l (fg) = g_h^l \delta_h^l f + f \delta_h^l g,$$

donde $g_h^l(y) = g(y_1, \ldots, y_{l-1}, y_l + h, y_{l+1}, \ldots, y_n)$.

Acotemos el segundo sumando, usando (22)

$$\left| \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (A_{ij})_h^l \delta_h^l U_{y_i} v_{1y_j} dy \right| \leqslant \frac{1}{2n} \int_\omega \Big(\sum_{i=1}^n |\delta_h^l U_{y_i}| \Big) \Big(\sum_{j=1}^n |v_{1y_j}| dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n} \int_\omega \sqrt{n} \Big(\sum_{i=1}^n (\delta_h^l U_{y_i})^2 \Big)^{1/2} \cdot \sqrt{n} \Big(\sum_{j=1}^n v_{1y_i}^2 \Big)^{1/2} dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \| |\nabla \delta_h^l U| \|_{L_2(\omega)} \| |\nabla v_1| \|_{L_2(\omega)} \qquad (26_0)$$

Acotemos el segundo sumando en (25_0) junto con la tercera integral del segundo miembro de la igualdad (23_0). Dado que las funciones A_{ij} y B_{ij} son continuamente diferenciables de $\bar{\omega}$, entonces

$$\left| \int_\omega \sum_{i,j=1}^n (\delta_h^l A_{ij}) U_{y_i} v_{1y_j} dy + \int_\omega \sum_{i,j=1}^n \delta_h^l (B_{ij} \zeta_{y_j} u) v_{1y_j} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \| u \|_{H^1(\Omega)} \| |\nabla v_1| \|_{L_2(\omega)} \leqslant C_1 \| u \|_{H^1(Q)} \| |\nabla v_1| \|_{L_2(\omega)}, \qquad (27_0)$$

donde la constante C_1 no depende ni de u ni de v_1.

De (23_0), en vista de $(24_0) - (27_0)$, tenemos

$$\left| \int_\omega \nabla (\delta_h^l U) \nabla v_1 dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant (\| F \|_{L_2(\omega)} + \frac{1}{2} \| |\nabla \delta_h^l U| \|_{L_2(\omega)} + C_1 \| u \|_{H^1(Q)}) \| |\nabla v_1| \|_{L_2(\omega)}. \quad (28_0)$$

Haciendo en esta desigualdad $v_1 = \delta_h^l U$, y empleando la desigualdad

$$\| F(y) \|_{L_2(\omega)} = \| F(x) \|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_2 (\| f \|_{L_2(Q)} + \| u \|_{H^1(Q)}) \qquad (29_0)$$

que se desprende de (15) (la constante C_2 depende sólo de la función ζ, es decir, sólo del dominio Q), así como las desigualdades (10) ó (11), en las que $\varphi = 0$ (entonces, en (10) $\inf \| \Phi \|_{H^1(Q)} = 0$), obtendremos la acotación

$$\| |\nabla \delta_h^l U| \|_{L_2(\omega)} \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}, \qquad l = 1, \ldots, n-1,$$

de la cual, a su vez, se deduce (teorema 4, p. 4, § 3, cap. III) que todas las segundas derivadas generalizadas de la función U, a excepción de $U_{y_n y_n}$, pertenecen a $L_2(\omega)$ y para ellas tiene lugar la desigualdad $\| U_{y_i y_j} \|_{L_2(\omega)} \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}$. Por lo tanto, para las derivadas correspondientes de la función $u(y)$ tenemos

$$\| u_{y_i y_j} \|_{L_2(\omega')} \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}.$$

Para acotar $u_{y_n y_n}$ en ω' hagamos uso del corolario al lema 2, conforme con el cual $\Delta_x u = f$ casi siempre en Q, y, por lo tanto, casi siempre en Ω'. Al introducir nuevas variables, esta igualdad tendrá por expresión:

$$\Delta_y u(y) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_n} \psi_{x_i} + u_{y_n y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2 - u_{y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i x_i} = f(y),$$

de donde, para todo $y \in \omega'$

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i}^2\right) u_{y_n y_n} =$$
$$= f(y) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_n} \psi_{x_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_{y_i y_i} + u_{y_n} \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{x_i x_i}. \qquad (30)$$

Puesto que $\psi \in C^{k+2}(\overline{D})$ para $k \geqslant 0$, entonces $u_{y_n y_n} \in L_2(\omega')$ y

$$\| u_{y_n y_n} \|_{L_2(\omega')} \leqslant \mathrm{const} \| f \|_{L_2(Q)}.$$

De este modo queda establecido que para todo punto $x^0 \in \partial Q$ existen números positivos $r = r(x^0)$ y $C = C(x^0)$, tales que $u(x) \in H^2(Q \cap (|x - x^0| < r(x^0))$ y que se efectúa la desigualdad

$$\| u \|_{H^2(Q \cap (|x - x^0| < r(x^0)))} \leqslant C(x^0) \| f \|_{L_2(Q)}.$$

Del cubrimiento del contorno ∂Q compuesto de los conjuntos $\partial Q \cap (|x - x^0| < r(x^0))$ para cualesquiera $x^0 \in \partial Q$ escojamos un subcubrimiento finito $\partial Q \cap (|x - x^i| < r(x^i))$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Entonces, existe un número $\delta_0 > 0$ tal que $Q \setminus Q_{\delta_0} \subset \bigcup_{i=1}^{N} Q \cap$ $\cap (|x - x^i| < r(x^i))$.

Por consiguiente, $u(x) \in H^2(Q \setminus Q_{\delta_0})$ y $\| u \|_{H^2(Q \setminus Q_{\delta_0})} \leqslant$ $\leqslant C_1 \| f \|_{L_2(Q)}$, donde C_1 es una constante positiva. Mas, según el teorema 3, $u(x) \in H^2(Q_{\delta_0/2})$ y $\| u \|_{H^2(Q_{\delta_0/2})} \leqslant C_2 \| f \|_{L_2(Q)}$. Por lo tanto, $u \in H^2(Q)$ y $\| u \|_{H^2(Q)} \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}$, donde la constante $C > 0$ no depende de f. De este modo queda demostrado el teorema 4 para $k = 0$.

Sea k un número natural cualquiera. En virtud del teorema sobre la suavidad interior de soluciones generalizadas (teorema 3) es suficiente, igual que para $k = 0$, establecer que para todo punto límite x^0 existen unos números $r = r(x^0) > 0$ y $C = C(x^0) > 0$ tales que $u(x) \in H^{k+2}(Q \cap (|x - x^0| < r))$ y tiene lugar la desigualdad

$$\| u \|_{H^{k+2}(Q \cap (|x-x^0|<r))} \leqslant C \| f \|_{H^k(Q)}$$

(se puede admitir que x^0 es el origen de coordenadas y el eje Ox_n está dirigido a lo largo de una normal a ∂Q en dicho punto). Para ello, debido a la suavidad de la transformación (20) (suavidad del contorno), basta mostrar que $u(y) \in H^{k+2}(\omega')$ y $\| u \|_{H^{k+2}(\omega')} \leqslant \leqslant C \| f \|_{H^k(Q)}$.

Ya hemos demostrado que $u(y) \in H^2(\omega')$, $\| u \|_{H^2(\omega')} \leqslant \leqslant C \| f \|_{L_2(Q)}$, y, además, se realiza la igualdad (23_0). Siguiendo el esquema, ya usado en la demostración del lema 2 del párrafo anterior, mostremos que para todo $m = 1, 2, \ldots, k$, $u(y) \in H^{m+2}(\omega')$, $\| u \|_{H^{m+2}(\omega')} \leqslant C \| f \|_{H^m(Q)}$ y tiene lugar la igualdad

$$\int_\omega \nabla(\delta_h^l D^\alpha U) \nabla v_{m+1} \, dy =$$

$$= -\int_\omega D^\alpha F \delta_{-h}^l v_{m+1} \, dy + \int_\omega \sum_{i,\, j=1}^{n} \delta_h^l (D^\alpha A_{ij} U_{y_i}) (v_{m+1})_{y_i} \, dy +$$

$$+ \int_\omega \sum_{i,\, j=1}^{n} \delta_h^l (D^\alpha B_{ij} \zeta_{y_j} u) (v_{m+1})_{y_i} \, dy, \qquad (23_m)$$

que es válida para cualesquiera $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$, $|\alpha| \leqslant m$, $l = 1, \ldots, n-1$, $0 < |h| < \delta/2$, $v_{m+1} \in \mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ en el caso del primer problema de contorno, y $v_{m+1} \in H^1(\omega)$, en el caso del segundo problema de contorno. Demostremos esta afirmación para $m = 1$.

Pasemos en la igualdad (23_0) al límite para $h \to 0$ e integremos por partes el primer sumando del segundo miembro de la igualdad obtenida. De resultas tendremos la ecuación

$$\int_\omega \nabla U_{y_l} \nabla v_1 \, dy = \int_\omega F_{y_l} v_1 \, dy + \int_\omega \sum_{i,\, j=1}^{n} (A_{ij} U_{y_i})_{y_l} v_{1 y_i} \, dy +$$

$$+ \int_\omega \sum_{i,\, j=1}^{n} (B_{ij} \zeta_{y_j} u)_{y_l} v_{1 y_i} \, dy, \qquad (21_1)$$

válida para toda $v_1\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ para el primer problema de contorno y de $H^1(\omega)$, para el segundo problema de contorno.

La identidad (21_1) para U_{y_l} se diferencia de la (21_0) para U sólo porque las funciones F, $A_{ij}U_{y_i}$, $B_{ij}\zeta_{y_j}u$ están sustituidas en la primera por F_{y_l}, $(A_{ij}U_{y_i})_{y_l}$, $(B_{ij}\zeta_{y_j}u)_{y_l}$, respectivamente, y la función v_0 está reemplazada por v_1 de las mismas propiedades.

Haciendo en (21_1) $v_1(y)=\delta^s_{-h}v_2(y)$, $s<n$, $0<|h|<\delta/2$, donde $v_2(y)$ es una función arbitraria de $\mathring{H}^1_\gamma(\omega)$ (de $H^1(\omega)$) prolongada por cero fuera de ω, obtendremos una igualdad análoga a (23_0)

$$\int_\omega \nabla(\delta^s_hU_{y_l})\nabla v_2\,dy=$$

$$=-\int_\omega F_{y_l}\delta^s_{-h}v_2\,dy+\int_\omega\sum_{i,j=1}^n\delta^s_h((A_{ij}U_{y_i})_{y_l})(v_2)_{y_j}\,dy+$$

$$+\int_\omega\sum_{i,j=1}^n\delta^s_h((B_{ij}\zeta_{y_j}u)_{y_l})(v_2)_{y_i}\,dy. \qquad (23_1)$$

Como en el caso anterior, acotemos las integrales en el segundo miembro de (23_1). Por analogía con (24_0) tenemos (ya que $u\in H^2(Q)$ y $f\in H^k(Q)$, $k\geqslant 1$, entonces, en vista de (15) $F\in H^1(Q)$, y puesto que $\psi\in C^{k+2}(\bar{D})$, entonces $F(y)\in H^1(\omega)$)

$$\left|\int_\omega F_{y_l}\delta^l_{-h}v_2\,dy\right|\leqslant\|F_{y_l}\|_{L_2(\omega)}\|\,|\nabla v_2|\,\|_{L_2(\omega)}. \qquad (24_1)$$

Por analogía con (25_0) dividamos la segunda integral en el segundo miembro de (23_1) en dos sumandos

$$\int_\omega\sum_{i,j=1}^n\delta^s_h((A_{ij}U_{y_i})_{y_l})(v_2)_{y_j}\,dy=\int_\omega\sum_{i,j=1}^n(A_{ij})^s_h\delta^s_hU_{y_iy_l}(v_2)_{y_j}\,dy+$$

$$+\int_\omega\sum_{i,j=1}^n[\delta^s_h(A_{ij})U_{y_iy_l}+\delta^s_h(A_{ij\,y_l}U_{y_i})](v_2)_{y_j}\,dy. \qquad (25_1)$$

Empleando (22), acotemos el primer sumando en (25_1)

$$\left|\int_\omega\sum_{i,j=1}^n(A_{ij})^s_h\,\delta^s_hU_{y_iy_l}(v_2)_{y_j}\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|\,|\nabla\delta^s_hU_{y_l}|\,\|_{L_2(\omega)}\|\,|\nabla v_2|\,\|_{L_2(\omega)}. \qquad (26_1)$$

Dado que las funciones A_{ij} y B_{ij} pertenecen a $C^{k+1}(\bar{\omega})$, $k \geqslant 1$, por lo tanto, la suma del segundo sumando en (25_1) con la tercera integral en el segundo miembro de (23_1) se acota de la manera siguiente

$$\Big| \int_\omega \Big[\sum_{i,\, j=1}^{n} \delta_h^s(A_{ij}) U_{y_i y_l} + \delta_h^s(A_{ijy_j} U_{y_i}) \Big] v_{2y_j}\, dy +$$

$$+ \int_\omega \sum_{i,\, j=1}^{n} \delta_h^s((B_{ij}\zeta_{y_j} u)_{y_l}) v_{2y_j}\, dy \,\Big| \leqslant \text{const}\, \| u \|_{H^2(Q)} \| \nabla v_2 \|_{L_2(\omega)}. \qquad (27_1)$$

Valiéndose de (24_1) — (27_1), obtenemos de (23_1) la desigualdad

$$\Big| \int_\omega \nabla \delta_h^s U_{y_l} \nabla v_2\, dy \Big| \leqslant$$

$$\leqslant (\| F_{y_l} \|_{L_2(\omega)} + \tfrac{1}{2} \| \,|\nabla \delta_h^s U_{y_l}|\, \|_{L_2(\omega)} + \text{const}\, \| u_2 \|_{H^2(Q)}) \| \,|\nabla v_2|\, \|_{L_2(\omega)},$$

$$l = 1, \ldots, n-1, \ s = 1, \ldots, n-1.$$

Hagamos en esta desigualdad $v_2(y) = \delta_h^s U_{y_l}(y)$, y recurriendo a la acotación

$$\| F \|_{H^1(\omega)} \leqslant C (\| f \|_{H^1(Q)} + \| u \|_{H^2(Q)})$$

que se desprende de (15), y a la acotación (17), ya demostrada para $k = 0$, tenemos:

$$\| \,|\nabla \delta_h^s U_{y_l}|\, \|_{L_2(\omega)} \leqslant \text{const}\, \| f \|_{H^1(Q)},$$

$$s,\ l = 1, \ldots, n-1, \quad 0 < |h| < \delta/2.$$

Quiere decir, que en ω' existen derivadas generalizadas $u_{y_p y_s y_l}$, $p = 1, 2, \ldots, n$, s, $l = 1, \ldots, n-1$, que pertenecen a $L_2(\omega')$ y satisfacen la desigualdad $\| u_{y_p y_s y_l} \| \leqslant \text{const}\, \| f \|_{H^1(Q)}$.

Con el fin de acotar las restantes terceras derivadas $u_{y_p y_n y_n}$, $p = 1, 2, \ldots, n$, hagamos uso de la ecuación (30). Derivándola primero respecto a y_p para $p < n$, resulta que para todo p de este tipo se tiene $u_{y_p y_n y_n} \in L_2(\omega')$ y que $\| u_{y_p y_n y_n} \|_{L_2(\omega')} \leqslant C \| f \|_{H^1(Q)}$. Luego, derivando (30) respecto a y_n, resulta que $u_{y_n y_n y_n} \in L_2(\omega')$ y $\| u_{y_n y_n y_n} \|_{L_2(\omega')} \leqslant C \| f \|_{H^1(Q)}$.

De esta manera hemos demostrado que $u(y) \in H^3(\omega')$, $\| u \|_{H^3(\omega')} \leqslant C \| f \|_{H^1(Q)}$ y para cualesquiera $l, s = 1, \ldots, n-1$, $0 < |h| < \delta/2$ y $v_2 \in \dot{H}^1_\gamma(\omega)$ $(v_2 \in H^1(\omega))$ se realiza la igualdad (23_1). Repitiendo este procedimiento m veces $(m \leqslant k)$, obtendremos: $u \in H^{m+2}(\omega')$, $\| u \|_{H^{m+2}(\omega')} \leqslant C \| f \|_{H^m(Q)}$ y tiene lugar la igualdad (23_m). El teorema está demostrado.

Establezcamos ahora en qué sentido las soluciones generalizadas en consideración satisfacen las condiciones límites. En el primer problema de contorno, de la definición $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)$) se deduce inmediatamente que la solución tiene en ∂Q una traza nula: $u|_{\partial Q} = 0$.

Mostremos que en el caso del segundo problema de contorno la solución satisface la condición límite en el sentido siguiente: $\nabla u|_{\partial Q} \cdot n = 0$, donde n es un vector de la normal exterior a ∂Q, $|n| = 1$, y $\nabla u|_{\partial Q}$ es un vector cuyas componentes $u_{x_i}|_{\partial Q}$, $i = 1, \ldots, n$, son trazas en ∂Q de las funciones u_{x_i} pertenecientes a $H^1(Q)$.

En efecto, como $u \in H^2(Q)$, entonces de la fórmula de Ostrogradski obtenemos de (8) la igualdad

$$\int_{\partial Q} (\nabla u \cdot n)\, v\, dS = \int_{Q} (\Delta u - f)\, v\, dx,$$

que es válida para toda $v \in H^1(Q)$ (aquí, $\nabla u \cdot n = \nabla u|_{\partial Q} \cdot n$). Puesto que $\Delta u = f$ casi siempre en Q, entonces

$$\int_{\partial Q} (\nabla u \cdot n)\, v\, dS = 0,$$

de donde se deduce la igualdad requerida, ya que, en virtud del teorema 2, p. 2, § 4, cap. III, el conjunto de trazas $v|_{\partial Q}$ de una función de $H^1(Q)$ es siempre denso en $L_2(\partial Q)$.

Designemos en lo sucesivo la expresión $\nabla u|_{\partial Q} \cdot n$ mediante $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial Q}$. Señalemos que si $u \in C^1(\overline{Q}) \cap H^2(Q)$, entonces la función $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial Q}$, como elemento de $L_2(\partial Q)$, coincide con la derivada $\frac{\partial u}{\partial n}$, obtenida según una normal, de la función u en el contorno ∂Q. La designación $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial Q}$ resulta también natural en el sentido de que existe una función de $H^1(Q)$ tal que su traza en ∂Q coincide con $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial Q}$ *).

---

*) Es suficiente construir tal función en $Q \setminus Q_\delta$ para cierto $\delta > 0$. Dado que $\partial Q \in C^2$, entonces para todo punto $x \in Q \setminus Q_\delta$ siendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño, existe el único punto $y = y(x) \in \partial Q$, $|y - x| < \delta$, tal que el vector $y - x$ esté orientado a lo largo de la normal $n(y)$ al contorno ∂Q en el punto y. La función $\nabla u(x)\, n(y(x))$ pertenece a $H^1(Q \setminus Q_\delta)$ y su traza en ∂Q es $\nabla u(x) \cdot n(y(x))|_{\partial Q} = \nabla u|_{\partial Q}\, n(x) = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q}$.

Así, pues, *cuando $\partial Q \in C^2$, la solución generalizada del segundo**) *problema de contorno satisface la siguiente condición límite*

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q}=0.$$

De los teoremas 4 y 3 y de los teoremas 2 y 3, p. 2, § 6, cap. III, en particular se desprende,

TEOREMA 5. *Sea $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$. Cuando $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, la solución generalizada del primer problema de contorno para la ecuación (7) con una condición límite homogénea es la solución clásica de este problema. Cuando $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$, la solución generalizada del segundo problema de contorno para la ecuación (7) con una condición límite homogénea es la solución clásica de este problema.*

Examinemos ahora la suavidad de las soluciones generalizadas en todo el dominio para las condiciones límites no homogéneas. Limitémonos al primer problema de contorno.

Sea la función $u(x)$ una solución generalizada del primer problema de contorno, es decir, esta función pertenece a $H^1(Q)$ y satisface, para cualquier $v \in \mathring{H}^1(Q)$, la identidad integral (8) y la condición límite $v|_{\partial Q} = \varphi$.

Supongamos que para un $k \geqslant 0$ tenemos: $f \in H^k(Q)$, $\partial Q \in C^{k+2}$ y la función límite φ es una traza en ∂Q de cierta función Φ de $H^{k+2}(Q)$ (para que φ pueda ser una traza en ∂Q de una función perteneciente a $H^{k+2}(Q)$, es suficiente, en vista del teorema 2, p. 2, § 4, cap. III, que φ pertenezca a $C^{k+2}(\partial Q)$). Mostremos que en este caso $u \in H^{k+2}(Q)$.

Examinemos una función $z = u - \Phi$. Está claro que $z \in \mathring{H}^1(Q)$ y para toda $v \in \mathring{H}^1(Q)$ satisface la identidad integral

$$\int_Q \nabla z \nabla v\, dx = -\int_Q \nabla \Phi \nabla v\, dx - \int_Q fv\, dx$$

o, lo que es lo mismo, en virtud de la fórmula de Ostrogradski, la identidad integral

$$\int_Q \nabla z \nabla v\, dx = -\int_Q f_1 v\, dx,$$

donde $f_1 = f - \Delta\Phi$. Puesto que $f_1 \in H^k(Q)$, entonces, en virtud del teorema 4, $z \in H^{k+2}(Q)$. Por esto, la solución generalizada $u = z + \Phi \in H^{k+2}(Q)$. La afirmación está demostrada.

*) En el tercer problema de contorno, la solución generalizada satisface la siguiente condición límite: $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial Q} = 0$.

4. Suavidad de las funciones propias generalizadas. Sea $u(x)$ una función propia generalizada del primero, segundo o tercero problemas de contorno para el operador de Laplace, y sea λ el valor propio correspondiente. Entonces, para cualquier $v \in \mathring{H}^1(Q)$ tiene lugar la igualdad

$$\int\limits_Q \nabla u \nabla v\, dx = -\lambda \int\limits_Q uv\, dx,$$

que coincide con la igualdad (8) cuando $f = \lambda u$. Puesto que $\lambda u \in H^1(Q)$ y, con mayor razón, $\lambda u \in L_2(Q)$, entonces del teorema 3 proviene que $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(Q)$ y casi siempre en Q se cumple la igualdad

$$\Delta u = \lambda u. \tag{31}$$

De este modo, la función λu que figura en el segundo miembro de (28) pertenece a $H^2_{\mathrm{loc}}(Q) \cap L_2(Q)$. Por ello, aplicando el teorema 3 otra vez, obtendremos: $u \in H^4_{\mathrm{loc}}(Q)$, etc.

Por consiguiente, $u \in H^k_{\mathrm{loc}}(Q)$ para cualquier k. Según el teorema 2, p. 2, § 6, cap. III, $u(x) \in C^\infty(Q)$.

Queda así demostrado

TEOREMA 6. *Las funciones propias generalizadas del primero, segundo y tercero problemas de contorno para el operador de Laplace son indefinidamente diferenciables en Q y satisfacen la ecuación* (31).

La suavidad de las funciones propias generalizadas se determina en todo el dominio por la suavidad del contorno.

TEOREMA 7. *Si, para $k \geqslant 2$, $\partial Q \in C^k$, entonces toda función propia generalizada $u(x)$ del primero o segundo problema de contorno para el operador de Laplace pertenece a $H^k(Q)$ y satisface la condición límite correspondiente* ($u|_{\partial Q} = 0$ *para el primer problema de contorno y* $\partial u/\partial n|_{\partial Q} = 0$, *para el segundo problema de contorno*). *Las funciones propias generalizadas del primer problema de contorno para $k > \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ y del segundo problema de contorno para $k > \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, son funciones propias clásicas**).

Dado que $\partial Q \in C^k$ y $u \in H^1(Q) \subset L_2(Q)$, entonces, en virtud del teorema 4, $u \in H^2(Q)$. Si $\partial Q \in C^3$, en vista del mismo teorema, $u \in H^3(Q)$. Cuando $\partial Q \in C^4$, de la incorporación $u \in H^3(Q)$ se deduce que $u \in H^4(Q)$, etc. De este modo llegamos a que si $\partial Q \in C^k$, entonces u pertenecerá a $H^k(Q)$.

---

*) Para el tercer problema de contorno tiene lugar la siguiente afirmación. *Si $\partial Q \in C^k$ y $\sigma(x) \in C^{k-1}(\partial Q)$ para cierto $k \geqslant 2$, entonces toda función propia $u(x)$ del tercer problema de contorno para el operador de Laplace pertenece a $H^k(Q)$. Con ello, $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial Q} = 0$. Además, si $k > \left[\frac{n}{2}\right] + 2$, entonces las funciones propias generalizadas del tercer problema de contorno son funciones propias clásicas.*

Además, según el teorema 6, las funciones propias generalizadas pertenecen a $C^\infty(Q)$ y satisfacen la ecuación (31).

Si $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$, en virtud del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, $u \in C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{Q}) \subset C(\overline{Q})$; si $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+2$, $u \in C^1(\overline{Q})$. Por consiguiente, conforme a los resultados obtenidos en el p. 1, § 5, cap. III, la función propia u del primer problema de contorno, para $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+1$, satisface en el sentido clásico la condición límite $u|_{\partial Q}=0$, mientras que la función propia u del segundo problema de contorno para $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]+2$ satisface, en el mismo sentido, la condición límite $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial Q}=0$. El teorema queda demostrado.

5. **Sobre el desarrollo en series según funciones propias.** Sea $u_1, u_2, \ldots$ un sistema de todas las funciones propias generalizadas del primero (segundo) problema de contorno para el operador de Laplace, y sea $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ un sistema correspondiente de valores propios. Según lo demostrado (teorema 3, p. 3, § 1), el sistema u_s, $s=1, 2, \ldots$, es la base ortonormal del espacio $L_2(Q)$. Esto significa que una función arbitraria $f \in L_2(Q)$ puede ser representada en forma de una serie de Fourier según cualquiera de estos sistemas, convergente en $L_2(Q)$

$$f=\sum_{m=1}^{\infty} f_m u_m, \quad f_m=(f, u_m)_{L_2(Q)}. \tag{32}$$

Supongamos que para cierto $k \geqslant 1$ la función $f \in H^k(Q)$. Sus series de Fourier respecto de las funciones propias del primero y segundo problemas de contorno convergen, por supuesto, hacia f en $L_2(Q)$. No obstante, en la norma de $H^k(Q)$ y hasta en las normas de $H^{k'}(Q)$, $0<k'<k$, estas series, en el caso general, no convergen. Por ejemplo, la serie de Fourier según el sistema de funciones propias del primer problema de contorno de la función $f_0(x)$, que es igual a 1 en Q, no puede converger en la norma $H^k(Q)$, cualquiera que sea $k \geqslant 1$. En efecto, si esta serie fuese convergente en la norma de $H^1(Q)$, sería infaliblemente convergente hacia $f_0(x)$, lo que está excluido, ya que la suma de una serie con los elementos de $\mathring{H}^1(Q)$ y convergente en $H^1(Q)$ debe pertenecer a $\mathring{H}^1(Q)$.

Para que la serie de Fourier de una función f de $H^k(Q)$ converja a esta función en $H^k(Q)$ se debe exigir que f satisfaga ciertas condiciones límites.

Indiquemos que para que la serie de Fourier (32) de la función f, desarrollada según el sistema de funciones propias del primer problema de contorno para el operador de Laplace converja en la norma del espacio $H^1(Q)$, es suficiente (teorema 3, p. 3 del párrafo anterior) y necesario (como acabamos de demostrar) que $f \in \mathring{H}^1(Q)$.

Designemos por $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$, para $k \geqslant 1$, un subespacio del espacio $H^k(Q)$, compuesto de todas las funciones f para las cuales

$$f|_{\partial Q} = 0, \ \ldots, \ \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} f|_{\partial Q} = 0.$$

Por $H^0_{\mathscr{D}}(Q)$ vamos a entender el espacio $L_2(Q)$. Cabe destacar, que en vista del teorema 2, p. 3, § 5, cap. III, $H^1_{\mathscr{D}}(Q) = \mathring{H}^1(Q)$.

Designemos por $H^k_{\mathscr{N}}(Q)$, para $k \geqslant 2$, un subespacio del espacio $H^k(Q)$, compuesto de todas las funciones f para las cuales

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{\left[\frac{k}{2}\right]-1} f\Big|_{\partial Q} = 0.$$

Por $H^0_{\mathscr{N}}(Q)$ vamos a entender el espacio $L_2(Q)$, y por $H^1_{\mathscr{N}}(Q)$, el espacio $H^1(Q)$.

LEMA 3. *Sea $\partial Q \in C^k$ para cierto $k \geqslant 1$. Existe una constante $C > 0$ tal que para toda función f de $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ o para toda función f de $H^k_{\mathscr{N}}(Q)$, ortogonal a las constantes en el producto escalar de $L_2(Q)$, tiene lugar la desigualdad*

$$\| f \|_{H^k(Q)} \leqslant C \, \| \Delta^{\frac{k}{2}} f \|_{L_2(Q)}, \tag{33}$$

si k es par, y la desigualdad

$$\| f \|_{H^k(Q)} \leqslant C \, \| \Delta^{\frac{k-1}{2}} f \|_{H^1(Q)}, \tag{33'}$$

si k es impar.

Examinemos primero el caso cuando k, $k = 2p$ es par. Demostremos el lema por inducción respecto a p. Establezcamos la acotación (33) para $p = 1$. Sea $f \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^2_{\mathscr{N}}(Q))$. Designemos con F la función Δf. Entonces, $f(x)$ casi siempre en Q satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta f = F. \tag{34}$$

Además, por definición del espacio $H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^2_{\mathscr{N}}(Q))$, $u|_{\partial Q} = 0$ (correspondientemente, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial Q} = 0$).

Multiplicando (34) por $v \in \mathring{H}^1(Q)$ arbitraria y aplicando la fórmula de Ostrogradski, resulta que u es la solución generalizada del primero (segundo) problema de contorno para la ecuación (34). Por ello, la validez de la desigualdad (33) para $k = 2$ se deduce del teorema 4.

Supongamos que la desigualdad (33) se ha establecido para $k = 2p$, y sea $f \in H^{2p+2}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p+2}_{\mathscr{N}}(Q))$. Dado que en este caso la función $F = \Delta f$ pertenece a $H^{2p}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p}_{\mathscr{N}}(Q))$, tenemos

$$\| F \|_{H^{2p}(Q)} \leqslant C_1 \| \Delta^p F \|_{L_2(Q)} = C_1 \| \Delta^{p+1} f \|_{L_2(Q)}.$$

Pero $f(x)$ es la solución generalizada del primero (segundo) problema de contorno para la ecuación (34), por lo que, en virtud del teorema 4,

$$\| f \|_{H^{2p+2}(Q)} \leqslant C_2 \| F \|_{H^{2p}(Q)} \leqslant C \| \Delta^{p+1} f \|_{L_2(Q)}.$$

Sea, ahora, k impar. Para $k = 1$ la igualdad (33') es trivial. Supongamos que esta ecuación está obtenida para $k = 2p - 1$, $p \geqslant 1$. Demostrémosla para $k = 2p + 1$. Sea $f \in H^{2p+1}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p+1}_{\mathscr{N}}(Q))$. Entonces $F(x) = \Delta f \in H^{2p-1}_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^{2p-1}_{\mathscr{N}}(Q))$. Según el teorema 4 y la suposición de inducción tenemos

$$\| f \|_{H^{2p+1}(Q)} \leqslant C_2 \| F \|_{H^{2p-1}(Q)} \leqslant C \| \Delta^{p-1} F \|_{H^1(Q)} = C \| \Delta^p f \|_{H^1(Q)}.$$

El lema está demostrado.

TEOREMA 8. *Sea el contorno $\partial Q \in C^k$, $k \geqslant 1$. Para que una función f sea desarrollable en la serie de Fourier (32) según el sistema de funciones propias del primero (segundo) problema de contorno para el operador de Laplace, convergente en la norma del espacio $H^k(Q)$, es necesario y suficiente que f pertenezca a $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Si $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$, entonces la serie $\sum\limits_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k$ converge y, además, existe una constante positiva C, independiente de f, tal que*

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k \leqslant C \| f \|^2_{H^k(Q)}. \tag{35}$$

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad (31) y el teorema 7 se desprende que si $\partial Q \in C^k$, entonces las funciones propias generalizadas del primero (segundo) problema de contorno para el operador de Laplace pertenecen a $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Por esta razón, si la serie de Fourier de la función $f \in H^k(Q)$, formada según las funciones propias del primero (segundo) problema de contorno, converge en la norma de $H^k(Q)$, entonces $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. La necesidad está demostrada.

Sea, ahora, $f \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$. Mostremos la validez de la desigualdad (35). Supongamos primero que k es par, $k = 2p$, $p \geqslant 1$. Designemos con γ_s los coeficientes de Fourier de la función $\Delta^p f$: $\gamma_s =$

$= (\Delta^p f, u_s)_{L_2(Q)}$. Aplicando la fórmula de Green, tenemos

$$\gamma_s = (\Delta^p f, u_s)_{L_2(Q)} = (\Delta^{p-1} f, \Delta u_s)_{L_2(Q)} =$$
$$= \lambda_s (\Delta^{p-1} f, u_s)_{L_2(Q)} = \dots \lambda_s^p (f, u_s)_{L_2(Q)} = \lambda_s^p f_s, \quad s = 1, 2, \dots$$

Ya que la función $\Delta^p f \in L_2(Q)$, $\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^2 = \| \Delta^p f \|_{L_2(Q)}^2$, por lo que $\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^k = \| \Delta^{\frac{k}{2}} f \|_{L_2(Q)}^2$, y, consecuentemente, tiene lugar la evidente igualdad (35). Si $k = 2p+1$, la función $\Delta^p f \in \overset{\circ}{H}{}^1(Q)\,(H^1 Q))$. Por esta razón, según el teorema 3, p. 3, § 1, se verifica la desigualdad $\sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s^2 |\lambda_s| \leqslant C \| \Delta^p f \|_{H^1(Q)}^2$, de la cual se deduce la (35).

Designemos con $S_m(x)$ una suma parcial de la serie (32). Es obvio que para todo $m = 1, 2, \dots S_m \in H^k_{\mathscr{D}}(Q)\,(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$.

Cuando $k = 2p$, en vista de (33) y (35) (sea $m > l \geqslant 1$), tenemos

$$\| S_m - S_l \|_{H^k(Q)}^2 \leqslant C \| \Delta^p (S_m - S_l) \|_{L_2(Q)}^2 =$$
$$= C \Big\| \sum_{s=l+1}^{m} \lambda_s^p f_s u_s \Big\|_{L_2(Q)}^2 = C \sum_{s=l+1}^{m} \lambda_s^{2p} f_s^2 = C \sum_{s=l+1}^{m} \lambda_s^k f_s^2 \to 0$$

para $m, l \to \infty$. Esto significa que la serie (32) converge hacia f en $H^k(Q)$.

Si $k = 2p + 1$, la demostración se lleva a cabo de manera análoga, empleando las desigualdades (33′). El teorema está demostrado.

TEOREMA 9. *Supongamos que el contorno ∂Q del dominio Q pertenece a C^k para un $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. En este caso, toda función f de $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ $(H^k_{\mathscr{N}}(Q))$ se desarrolla en la serie de Fourier (32) según las funciones propias del primero (segundo) problema de contorno para el operador de Laplace, con la particularidad de que esta serie es convergente en $C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{Q})$.*

Del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, proviene que al espacio $C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{Q})$ pertenecen tanto la función $f(x)$ como todas las funciones propias $u_s(x)$, y, junto con ellas, todas las sumas parciales $S_m(x)$ de la serie (32). Con ello, tiene lugar la desigualdad $\| S_m - S_l \|_{C^{k-\left[\frac{n}{2}\right]-1}(\overline{Q})} \leqslant C \| S_m - S_l \|_{H^k(Q)}$, en la cual la constante C no depende ni de m ni de l. Según el teorema (8), $\| S_m - S_l \|_{H^k(Q)} \to 0$ para $m, l \to \infty$. Por eso,

$\| S_m - S_i \|_{C^{h-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{Q})} \to 0$ cuando $m, \ i \to \infty$. Por lo tanto, la serie (32) converge en $C^{h-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{Q})$. El teorema está demostrado.

6. Generalizaciones. El método con el que estudiamos en los pp. 2 y 3 la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para la ecuación de Poisson, puede aplicarse también al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas de contorno para ecuaciones más generales. Sea, por ejemplo, $u(x)$ una solución generalizada del primer problema de contorno

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div}(k(x) \nabla u) - a(x) u = f, \quad x \in Q, \tag{36}$$

$$u|_{\partial Q} = 0$$

$$(f \in L_2(Q), \ k(x) \in C^1(\overline{Q}), \ a(x) \in C(\overline{Q}), \ k(x) \geqslant k_0 > 0).$$

Si $k(x) \in C^{p+1}(\overline{Q})$, $a(x) \in C^p(\overline{Q})$ y $f(x) \in L_2(Q) \cap H^p_{loc}(Q)$ para cierto $p \geqslant 0$, entonces $u(x) \in H^{p+2}_{loc}(Q)$. En particular, toda función propia generalizada del primer problema de contorno para el operador de Laplace pertenece a $H^{p+2}_{loc}(Q)$.

Si en adición el contorno $\partial Q \in C^{p+2}$ y $f \in H^p(Q)$, entonces $u(x) \in H^{p+2}(Q)$, y, en particular, cualquier función propia generalizada del primer problema de contorno para el operador $\mathcal{L}$ pertenece a $H^{p+2}(Q)$.

Resultados del todo análogos tienen también lugar para soluciones generalizadas del segundo y del tercer problemas de contorno para las ecuaciones (36) y las funciones propias correspondientes del operador $\mathcal{L}$.

§ 3. Soluciones clásicas de las ecuaciones de Laplace y de Poisson

1. Funciones armónicas. Potenciales. Una función real $u(x)$ se llama *armónica* en el dominio Q (o en algún conjunto abierto) del espacio R_n, si es dos veces continuamente diferenciable en Q y en todo punto $x \in Q$ satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

Es fácil dar otra definición equivalente de función armónica, en términos de los espacios H^k (como siempre, las funciones se consideran iguales, si coinciden en casi todo punto).

Una función $u(x)$ perteneciente a $H^1_{loc}(Q)$, donde Q es un dominio del espacio R_n, se llama armónica en Q, si satisface la identidad integral

$$\int_Q \nabla u \nabla v \, dx = 0, \tag{2}$$

cualesquiera que sean las funciones $v \in H^1(Q)$, terminales en Q (es decir, iguales a cero casi siempre en $Q \setminus Q'$ para cierto $Q' \Subset Q$).

Si la función $u(x)$ de $C^2(Q)$ es armónica en el dominio Q, ella, evidentemente, pertenece al espacio $H^1_{loc}(Q)$. Multipliquemos (1) por una función arbitraria $v \in H^1(Q)$, terminal en Q, e integremos la igualdad obtenida en el dominio Q. Mediante la fórmula de Ostrogradski hallamos que la función u satisface la identidad integral (2).

Sea, ahora, que la función $u \in H^1_{loc}(Q)$ y satisface la identidad integral (2) para todas las funciones v que son terminales en Q y pertenecen a $H^1(Q)$. Tomemos un subdominio arbitrario Q' que sea estrictamente interior respecto a Q. Puesto que la función $u \in H^1(Q')$ y satisface la identidad $\int\limits_{Q'} \nabla u \nabla v\, dx = 0$ para toda $v \in \mathring{H}^1(Q')$, entonces, de acuerdo con el lema 2, p. 2 del párrafo anterior y del teorema 2, p. 2, § 6, cap. III, resulta que $u \in C^\infty(Q')$. Además, la función u satisface en Q' la ecuación (1) (véase el corolario al lema 2 del párrafo anterior). Ya que Q' es *arbitrario, la función $u(x)$ pertenece a $C^\infty(Q)$*, y en Q satisface la ecuación (1), es decir, es armónica.

Si la función u es armónica en Q y dos veces continuamente diferenciable en $\overline{Q}$, entonces, integrando la igualdad (1) en Q y haciendo uso del teorema de Ostrogradski, obtenemos la igualdad

$$0 = \int\limits_Q \Delta u\, dx = \int\limits_Q \operatorname{div}(\nabla u)\, dx = \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS, \tag{3}$$

que con frecuencia emplearemos en lo sucesivo.

Sea ξ un punto arbitrario de R_n, y $r = |x - \xi|$. Puesto que para la función f, que sólo depende de r, $\Delta f = f_{rr} + \frac{n-1}{r} f_r$, entonces la función armónica u, que sólo depende de r, satisface la ecuación diferencial ordinaria $u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r = 0$. Una solución general de esta ecuación en el semieje $r > 0$ tiene por expresión $\frac{c_0}{r^{n-2}} + c_1$ cuando $n > 2$, y $c_0 \ln r + c_1$, cuando $n = 2$, donde c_0 y c_1 son constantes arbitrarias. Por ello, todas las funciones que son armónicas por todo el espacio (a excepción del punto $x = \xi$) y que sólo dependen de $|x - \xi|$, tienen por expresiones $\frac{c_0}{|x-\xi|^{n-2}} + c_1$ para $n > 2$ y $c_0 \ln |x - \xi| + c_1$, para $n = 2$ (c_0 y c_1 son constantes arbitrarias).

Una función

$$U(x-\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\,\sigma_n\,|x-\xi|^{n-2}}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln |x-\xi|, & n = 2, \end{cases} \tag{4}$$

que es armónica en $R_n \setminus \{x = \xi\}$ y en la que σ_n es el área de la superficie de una esfera unitaria, se denomina *solución fundamental* de la ecuación de Laplace. Esta función desempeña un papel importante en el estudio de las soluciones de las ecuaciones de Laplace y de Poisson.

Para toda función medible $\rho_0(\xi)$, acotada en el dominio Q, está definida para todo x la función

$$u_0(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\rho_0(\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

llamada *potencial volumétrico de densidad* ρ_0.

Para cualesquiera funciones $\rho_1(\xi)$ y $\rho_2(\xi)$ integrables en ∂Q están definidas para todo $x \in R_n \setminus \partial Q$ las funciones

$$u_1(x) = \int_{\partial Q} U(x-\xi)\,\rho_1(\xi)\,dS_\xi, \tag{6}$$

$$u_2(x) = \int_{\partial Q} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,\rho_2(\xi)\,dS_\xi, \tag{7}$$

llamadas potenciales *de capa simple y de capa doble cuyas densidades son* ρ_1 *y* ρ_2, respectivamente.

Con los potenciales (5), (6) y (7) ya estamos familiarizados. En el p. 1, § 6, cap. III (teorema 1) fue demostrado que toda función $u(x)$ de $C^2(\overline{Q})$ puede ser representada en forma de una suma de tres sumandos: potencial volumétrico de densidad Δu, potencial de capa simple de densidad $-\frac{\partial u}{\partial n}$, y potencial de capa doble de densidad u:

$$u(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi - \int_{\partial Q} U(x-\xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,dS_\xi + \int_{\partial Q} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,u(\xi)\,dS_\xi. \tag{8}$$

Si la función $u \in C^2(\overline{Q})$ y, además, es armónica en Q, entonces de (8) se desprende que para cualquier $x \in Q$

$$u(x) = \int_{\partial Q} \left(\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\,u(\xi) - \frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\,U(x-\xi) \right) dS_\xi. \tag{9}$$

LEMA 1. *El potencial de capa simple y el de capa doble son funciones armónicas en* $R_n \setminus \partial Q$.

Sea x^0 un punto arbitrario de $R_n \setminus \partial Q$, y sea $\delta > 0$ la distancia de este punto al contorno ∂Q. Los integrandos en (6) y (7), siendo funciones de la variable ξ, $\xi \in \partial Q$, pertenecen, para todos x dispuestos en la bola $\{|x - x^0| < \delta/2\}$, a $L_1(\partial Q)$, y siendo funciones de la variable x, para casi todo ξ de ∂Q, pertenecen a C^∞ $(|x-x^0| \leqslant \delta/2)$. Además, para cualesquiera $\xi \in \partial Q$ y x de la bola $\{|x-x^0| < \delta/2\}$ tienen lugar las acotaciones $|D_x^\alpha U(x-\xi)| \leqslant C$, $\left|D_x^\alpha \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\right| \leqslant C$, donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es arbitrario y la constante $C > 0$ sólo depende de δ y α. Por lo tanto,

$$|D_x^\alpha U(x-\xi)\,\rho_1(\xi)| \leqslant C\,|\rho_1(\xi)|,$$
$$\left|D_x^\alpha \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\rho_2(\xi)\right| \leqslant C\,|\rho_2(\xi)|.$$

Entonces, según el teorema 7, p. 7, § 1, cap. II, las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son indefinidamente diferenciables en la bola $\{|x-x^0| < \delta/2\}$ y

$$D^\alpha u_1(x) = \int_{\partial Q} \rho_1(\xi)\, D_x^\alpha U(x-\xi)\, dS_\xi$$

y

$$D^\alpha u_2(x) = \int_{\partial Q} \rho_2(\xi)\, D_x^\alpha \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial n_\xi}\, dS_\xi$$

cualquiera que sea α. En particular,

$$\Delta u_1 = \int_{\partial Q} \rho_1(\xi)\, \Delta_x U(x-\xi)\, dS_\xi = 0$$

y

$$\Delta u_2(x) = \int_{\partial Q} \rho_2(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \Delta_x U(x-\xi)\, dS_\xi = 0,$$

puesto que $\Delta_x U(x-\xi) = 0$ para $x \neq \xi$.

LEMA 2. *Si $\rho_0(\xi) \in C^1(\overline{Q})$, entonces el potencial volumétrico $u_0(x)$ pertenece a $C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ y para todo $x \in Q$ satisface la ecuación de Poisson $\Delta u_0 = \rho_0$.*

Del hecho de que la función ρ_0 es medible y acotada en Q se desprende (véase p. 12, § 1, cap. II) que $u_0 \in C^1(\overline{Q})$ y

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i} = \int_Q \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_i} \rho_0(\xi)\, d\xi = -\int_Q \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \xi_i} \rho_0(\xi)\, d\xi, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Si $\rho_0(\xi) \in C^1(\overline{Q})$, tenemos, en virtud de la fórmula de Ostrogradski,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_i} = \int_Q U(x-\xi) \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_i}\, d\xi - \int_{\partial Q} U(x-\xi)\, \rho_0(\xi)\, n_i(\xi)\, dS_\xi,$$

donde $n_i(\xi) = \cos(\widehat{n, \xi_i})$ es una función continua en ∂Q.

El primer sumando del segundo miembro de esta igualdad es un potencial volumétrico de densidad $\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_i}$, continua en $\overline{Q}$. Por lo tanto, este sumando pertenece a $C^1(\overline{Q})$. El segundo sumando es un potencial de capa simple de densidad $\rho_0 n_i$, continuo en ∂Q, y pertenece, según el lema 1, a $C^\infty(Q)$. Por esta razón, la función $u_0 \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$. Tomemos una función arbitraria ψ de $C^2(\overline{Q})$ que sea terminal en Q. Puesto que $\psi \Big|_{\partial Q} = \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0$, de (8) para todo $x \in Q$:

$$\psi(x) = \int_Q U(x-\xi)\,\Delta\psi(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Aplicando a las funciones ψ y u_0 la fórmula de Green y empleando de manera consecutiva el teorema de Fubini (teorema 10, p. 11, § 1, cap. II) y la igualdad (10), obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_Q \psi(x)\,\Delta u_0(x)\,dx &= \int_Q \Delta\psi(x)\cdot u_0(x)\,dx = \\ &= \int_Q \Delta\psi(x)\left(\int_Q U(x-\xi)\,\rho_0(\xi)\,d\xi\right)dx = \\ &= \int_Q \rho_0(\xi)\left(\int_Q U(x-\xi)\,\Delta\psi(x)\,dx\right)d\xi = \\ &= \int_Q \psi(\xi)\,\rho_0(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

De este modo, para toda función ψ de $C^2(\overline{Q})$, terminal en Q, tiene lugar la igualdad

$$\int_Q \psi(x)\,(\Delta u_0(x) - \rho_0(x))\,dx = 0,$$

de donde se desprende que $\Delta u_0 = \rho_0$ en Q. El lema 2 está demostrado.

2. Propiedades principales de las funciones armónicas. Ahora, establezcamos algunas propiedades importantes de las funciones armónicas.

TEOREMA 1 (primer teorema de la media). *Sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Q, y sea x un punto arbitrario de Q. Entonces, para cualquier r, $0 < r < d$, donde d es la distancia del punto x al contorno ∂Q, se realiza la igualdad*

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{|x-\xi|=r} u(\xi)\,dS_\xi. \tag{11}$$

Puesto que la función $u(\xi) \in C^2(|\xi - x| \leqslant r)$, a esta función puede aplicarse en el dominio $\{|\xi - x| < r\}$ la fórmula (9). En vista de esta fórmula, para $n > 2$ (cuando $n = 2$, los razonamientos son los mismos)

$$u(x) = \int\limits_{|\xi - x| = r} \frac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} dS_\xi -$$

$$- \int\limits_{|\xi - x| = r} \frac{u(\xi)}{(n-2)\sigma_n} \frac{\partial \dfrac{1}{|\xi - x|^{n-2}}}{\partial n_\xi} dS_\xi =$$

$$= \frac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}} \int\limits_{|\xi - x| = r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} dS_\xi + \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{|\xi - x| = r} u(\xi)\, dS_\xi,$$

ya que en la esfera $\{|\xi - x| = r\}$

$$\frac{\partial \dfrac{1}{|\xi - x|^{n-2}}}{\partial n_\xi} = \frac{\partial \dfrac{1}{|\xi - x|^{n-2}}}{\partial |\xi - x|} = -\frac{(n-2)}{|x - \xi|^{n-1}} = -\frac{n-2}{r^{n-1}}.$$

La fórmula (11) ahora se desprende de la (3)

TEOREMA 2 (segundo teorema de la media). *Sea $u(x)$ una función armónica en el dominio Q, y sea x un punto arbitrario de Q. Entonces, para cualquier r, $0 < r < d$, donde d es la distancia del punto x al contorno ∂Q, tiene lugar la igualdad*

$$u(x) = \frac{n}{\sigma_n r^n} \int\limits_{|\xi - x| < r} u(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

De acuerdo con el teorema 1, para todo ρ, $0 < \rho < d$, tiene lugar la igualdad

$$\sigma_n \rho^{n-1} u(x) = \int\limits_{|\xi - x| = \rho} u(\xi)\, dS_\xi.$$

Integrando esta igualdad respecto a ρ, desde 0 hasta r, obtendremos la igualdad (12).

Los teoremas 1 y 2 se llaman teoremas de la media, puesto que en los segundos miembros de las igualdades (11) y (12) figuran valores medios de la función u en la esfera $\{|\xi - x| = r\}$ y en la bola $\{|\xi - x| < r\}$, respectivamente ($\sigma_n r^{n-1}$ es el área de la esfera, $\frac{\sigma_n r^n}{n}$ es el volumen de la bola).

Según lo mostrado, una función armónica en Q es indefinidamente diferenciable en este dominio. Al estudiar las funciones armónicas resulta ser útil el siguiente

LEMA 3. *Supongamos que la función $u(x)$ es armónica en Q y acotada: $|u(x)| \leqslant M$. Entonces, toda derivada $D^\alpha u(x)$ de orden*

$|\alpha| = k$, $k = 1, 2, \ldots$, *satisface, en el punto $x \in Q$, la desigualdad*

$$|D^{\alpha}u(x)| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta}\right)^{k} k^{k}, \tag{13}$$

donde δ es la distancia del punto x al contorno ∂Q.

Demostremos el lema por el método de inducción según k.

Sea, primero, $k = 1$. Mostremos que $|u_{x_i}| \leqslant Mn/\delta$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Ya que la función u_{x_i} es armónica en Q, en virtud del teorema 2 para todo $\delta' < \delta$

$$u_{x_i}(x) = \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int\limits_{|\xi - x| < \delta'} u_{\xi_i}\, d\xi = \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int\limits_{|\xi - x| = \delta'} u(\xi) \cos \alpha_i \, dS_\xi$$

donde α_i es el ángulo formado por el vector $\xi - x$ y el eje $O\xi_i$. Por esto

$$|u_{x_i}(x)| \leqslant \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \int\limits_{|\xi - x| = \delta'} |u(\xi)|\, dS_\xi \leqslant M \frac{n}{\sigma_n \delta'^n} \sigma_n \delta'^{n-1} = Mn/\delta'.$$

Pasando en esta desigualdad al límite para $\delta' \to \delta$, obtendremos la desigualdad requerida.

Supongamos ahora que el lema está demostrado para todas las derivadas $D^{\alpha}u$, donde $|\alpha| \leqslant k - 1$, $k \geqslant 2$. Demostremos la desigualdad (13).

Tomemos dos bolas: $\{|\xi - x| < \delta'\}$ y $\{|\xi - x| < \delta'/k\}$ con centro en el punto x (δ' es un número entero positivo menor que δ). Según la sugerencia de la inducción, para todo punto ξ de la bola $\{|\xi - x| < \delta'/k\}$ y cualquier β, $|\beta| = k - 1$, tiene lugar la desigualdad siguiente

$$|D_\xi^{\beta} u(\xi)| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta' - \delta'/k}\right)^{k-1} (k-1)^{k-1} = M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k-1} k^{k-1}.$$

Así pues, para cualquier β, $|\beta| = k - 1$, la función armónica $D_\xi^{\beta} u(\xi)$ está acotada en la bola $\{|\xi - x| < \delta'/k\}$ por una constante $M(n/\delta')^{k-1}k^{k-1}$. Entonces, según lo demostrado arriba, para las primeras derivadas de esta función tenemos

$$|(D_\xi^{\beta} u(\xi))_{\xi_i}| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k-1} k^{k-1}\left(\frac{n}{\delta'/k}\right) = M\left(\frac{n}{\delta'}\right)^{k} k^{k}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Es decir, para todo α, $|\alpha| = k$, se tiene $|D^{\alpha}u| \leqslant M(n/\delta')^k k^k$. Pasando en esta desigualdad al límite para $\delta' \to \delta$, obtenemos la desigualdad (13). El lema está demostrado.

TEOREMA 3. *De todo conjunto infinito de funciones armónicas en Q, acotadas en dicho dominio por una constante, se puede extraer una sucesión que converja uniformemente en cualquier subdominio estrictamente interior del dominio Q.*

Sea $\mathfrak{M}$ un conjunto infinito de funciones $u(x)$ armónicas en Q y acotadas totalmente en Q: $|u(x)| \leqslant M$. Tomemos una sucesión arbitraria de dominios $Q_1, Q_2, \ldots$, que posee las propiedades siguientes: $Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \ldots$; $Q_i \Subset Q$, $i=1, 2, \ldots$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i = Q$.

El conjunto $\mathfrak{M}$ se compone de las funciones, pertenecientes a $C(\overline{Q}_1)$ y acotadas en total en Q_1. En vista del lema 3, existe una constante $C > 0$, que depende sólo del dominio Q_1, tal que para todas las funciones u de $\mathfrak{M}$ $|\nabla u| \leqslant C$ para $x \in Q_1$. Por esto, el conjunto $\mathfrak{M}$ es continuo en $\overline{Q}_1$ de manera equigradual. Según el teorema de Arzelá, se puede extraer de $\mathfrak{M}$ una sucesión $u_{11}, u_{12}, \ldots$, que sea uniformemente convergente en $\overline{Q}_1$. Dado que esta sucesión es uniformemente acotada y continua en $\overline{Q}_2$ de manera equigradual (en virtud del lema 3), entonces se puede extraer de ella una subsucesión $u_{21}, u_{22}, \ldots$, que sea uniformemente convergente en $\overline{Q}_2$, etc. Es evidente que una sucesión diagonal $u_{11}, u_{22}, \ldots$ es la buscada. El teorema queda demostrado.

TEOREMA 4. *Supongamos que la sucesión de funciones $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots$, armónicas en el dominio Q, converge uniformemente hacia la función $u(x)$ en todo subdominio estrictamente interior con relación a Q. Entonces, la función $u(x)$ es armónica en Q y para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la sucesión $D^\alpha u_1, D^\alpha u_2, \ldots$ converge uniformemente hacia la función $D^\alpha u$ en cualquier subdominio estrictamente interior respecto al dominio Q.*

Sea Q' un subdominio arbitrario estrictamente interior respecto al dominio Q. Entonces, $u(x) \in C(\overline{Q'})$. Tomemos un dominio Q'' tal que $Q' \Subset Q'' \Subset Q$. Está claro que toda función $u_m(x)$ es acotada en Q''.

Según el lema 3, para todo α existe una constante $C > 0$ (que depende sólo de Q', Q'' y $|\alpha|$) tal que se cumpla la desigualdad

$$\| D^\alpha (u_m - u_s) \|_{C(\overline{Q'})} \leqslant C \| u_m - u_s \|_{C(\overline{Q''})},$$

cualesquiera que sean $m, s = 1, 2, \ldots$

Dado que $\| u_m - u_s \|_{C(\overline{Q''})} \to 0$ para $m, s \to \infty$, todas las sucesiones $D^\alpha u_m$, $m = 1, 2, \ldots$, son fundamentales en la norma del espacio $C(\overline{Q'})$. Esto significa que la función $u(x) \in C^\infty(\overline{Q'})$ y para todo α tendremos $\| D^\alpha u_m - D^\alpha u \|_{C(\overline{Q'})} \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Pasando en la igualdad $\Delta u_m = 0$, $x \in Q'$, al límite para $m \to \infty$, obtenemos: $\Delta u = 0$ en Q', es decir, en Q' la función $u(x)$ es armónica y, consecuentemente, también en Q. El teorema está demostrado.

TEOREMA 5. *Una función armónica en Q es analítica en Q.*

Sea una función $u(x)$ armónica en el dominio Q. Tomemos en Q un punto arbitrario x^0 y designemos con $\delta > 0$ la distancia de este punto al contorno ∂Q, y con $S_{\delta/4}(x^0)$, la bola $\{|x-x^0|<\delta/4\}$. La función $u(x)\in C(\overline{Q}_{\delta/2})$, por eso es acotada en $Q_{\delta/2}$; sea $M = \max\limits_{x\in\overline{Q}_{\delta/2}} |u(x)|$.

Como la distancia de cualquier punto de la bola $\overline{S}_{\delta/4}(x^0)$ hasta el contorno $\partial Q_{\delta/2}$ no es menor que $\delta/4$, en virtud del lema 3, para todo punto x de $\overline{S}_{\delta/4}(x^0)$ y todo $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tenemos la desigualdad

$$|D^\alpha u|\leqslant M\,(4n/\delta)^{|\alpha|}\,|\alpha|^{|\alpha|}.$$

Ya que $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k^{k+1/2}}{k!e^k}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (fórmula de Stirling), existe una constante $C>0$ tal que para todo k natural $k^k\leqslant Ce^k k!$ y, consecuentemente, $|\alpha|^{|\alpha|}\leqslant Ce^{|\alpha|}(|\alpha|)!$

Haciendo en la identidad $(x_1+\ldots+x_n)^k=\sum\limits_{|\alpha|=k}\dfrac{(|\alpha|)!}{\alpha!}x^\alpha$ (que es válida para cualquier k natural) $x_1=\ldots=x_n=1$, obtenemos la igualdad $n^k=\sum\limits_{|\alpha|=k}(|\alpha|)!/\alpha!$, de la cual se desprende la desigualdad $(|\alpha|)!/\alpha!\leqslant n^{|\alpha|}$. Por ello, para todo $x\in S_{\delta/4}(x^0)$ y todo α

$$|D^\alpha u|\leqslant CM\,(4n^2e/\delta)^{|\alpha|}\,\alpha!. \tag{14}$$

De (14) se deduce, ante todo, que la serie de Taylor de la función $u(x)$

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha$$

converge absolutamente en la bola $S=\left\{|x-x^0|<\frac{\delta}{4n^2e}\right\}$, por lo que la suma de esta serie es una función analítica en S. Demostremos que en la bola $S'=\left\{|x-x^0|<\frac{\delta}{8n^3e}\right\}$ la serie citada converge hacia la función $u(x)$. Para ello será suficiente mostrar que el término complementario en la fórmula de Taylor de la función u

$$R_N(x)=u(x)-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha u(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha=$$

$$=\sum_{|\alpha|=N}\frac{D^\alpha u(x^0+\theta(x-x^0))}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha,$$

donde $|\theta|<1$, en cualquier punto S' tiende a cero cuando $N\to\infty$. Sabemos que para $x\in S'$ el punto $x^0+\theta(x-x^0)$ también está contenido en S' y, consecuentemente, en la bola $S_{\delta/4}(x^0)$. Por tanto, de (14) se deduce que para todos los x de S'

$$|R_N(x)| \leqslant \sum_{|\alpha|=N} CM\left(\frac{4n^2e}{\delta}\right)^N\left(\frac{\delta}{8n^3e}\right)^N \leqslant \frac{CM}{(2n)^N}n^N = \frac{CM}{2^N}.$$

Por eso, $R_N(x) \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Dado que $x^0 \in Q$ es arbitrario, la función $u(x)$ es analítica en Q. El teorema está demostrado.

En el caso bidimensional, junto con el teorema 5 que establece el carácter analítico de una función armónica como función de dos variables x_1 y x_2, tiene lugar otra afirmación más profunda que liga funciones armónicas con funciones analíticas de una variable compleja $z = x_1 + ix_2$. Para simplificar, nos limitamos al caso de un dominio simplemente conexo.

TEOREMA 6. *Para que la función $u(x_1, x_2)$ sea armónica en el dominio simplemente conexo Q, es necesario y suficiente que exista una función $f(z)$, $z = x_1 + ix_2$, analítica en Q, tal que $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(z)$.*

SUFICIENCIA. Sea $f(z)$ analítica en el dominio Q. Entonces, las funciones $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} f(x_1 + ix_2)$ y $v(x_1, x_2) = \operatorname{Im} f(x_1 + ix_2)$ son indefinidamente diferenciables en Q y satisfacen las condiciones de Cauchy—Riemann

$$u_{x_1} = v_{x_2}, \qquad u_{x_2} = -v_{x_1}. \tag{15}$$

Derivando la primera de las igualdades (15) respecto a x_1, y la segunda, respecto a x_2, y sumando las correlaciones resultantes, obtenemos $\Delta u = 0$, es decir, u es una función armónica.

NECESIDAD. Sea u una función armónica en Q. Examinemos la función

$$v(x) = \int_{L(x^0,\, x)} -u_{x_2}\,dx_1 + u_{x_1}\,dx_2,$$

donde: $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ es un punto fijado de Q, $x = (x_1, x_2)$, y $L(x^0, x)$, una curva arbitraria enderezada que une los puntos x^0 y x y está ubicada en Q (del hecho de que el dominio Q es simplemente conexo se infiere, en virtud de la fórmula de Green, que la función v no depende del contorno de L). La función $v(x) \in C^1(Q)$ es la que satisface las condiciones (15). Por lo tanto, la función $f = u + iv$ es en Q analítica respecto de $x_1 + ix_2$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Una función analítica $f(z)$ según la función armónica $u(x_1, x_2)$, se determina con un error menor que una constante arbitraria puramente imaginaria. En efecto, sean $f_1(z) = u + iv_1$ y $f_2(z) = u + iv_2$ dos funciones analíticas en Q, para las cuales $\operatorname{Re} f_1 = \operatorname{Re} f_2 = u$. En este caso, será analítica en Q la función $f_1 - f_2 = iv$, donde la función (real) $v = v_1 - v_2$. En vista de las condiciones de Cauchy—Riemann, $v_{x_1} = v_{x_2} = 0$, es decir, $v_2 =$

$= v_1 + c$, donde c es una constante arbitraria real. Por eso, $f_2(z) = f_1(z) + ic$. La afirmación queda demostrada.

OBSERVACIÓN 2. Una afirmación análoga al teorema 6 tiene también lugar cuando Q es un dominio arbitrario. Entonces una función f, que es analítica respecto de $x_1 + ix_2$ en Q y está construida a base de la función u, armónica en Q, puede ser plurívoca. Por ejemplo, a la función $\ln |x|$, armónica en el anillo $\{1 < |x| < 2\}$, se le asigna la función plurívoca $\operatorname{Ln} z = \ln |x| + i \operatorname{Arg}(x_1 + ix_2)$ ($z = x_1 + ix_2$) que es analítica en este anillo.

COROLARIO. *Supongamos que una función $z' = F(z) = F_1(x_1, x_2) + iF_2(x_1, x_2)$, $z = x_1 + ix_2$, analítica en el dominio simplemente conexo Q, representa biunívocamente este dominio en algún dominio simplemente conexo Q' de un plano complejo $z' = x_1' + ix_2'$. Si la función $u'(x')$ es armónica en Q', entonces la función $u(x) = u'(F_1(x), F_2(x))$ es armónica en Q.*

En efecto, sea $f'(z')$ una función analítica en Q' para la cual $u'(x') = \operatorname{Re} f'(z')$. Puesto que la función $f(z) = f'(F(z))$ es analítica en Q, la función $u(x) = u'(F_1(x), F_2(x)) = \operatorname{Re} f'(z') = \operatorname{Re} f(z)$ es armónica en Q.

Una propiedad importante de las funciones armónicas, que vamos a enunciar, se deduce del teorema en la media y se denomina principio de máximo.

TEOREMA 7 (principio de máximo). *Supongamos que una función $u(x)$ armónica en Q es continua en $\overline{Q}$. Entonces, o bien $u(x) = \text{const}$ en Q o bien*

$$\min_{x\in\partial Q} u(x) < u(x) < \max_{x\in\partial Q} u(x) \tag{16}$$

para todo $x \in Q$.

Sea $M = \max\limits_{x\in\overline{Q}} u(x)$. Mostremos que si en el dominio Q existe un punto en el que se infringe la desigualdad derecha en (16), entonces la función $u(x) = \text{const} = M$ en Q. Efectivamente, convengamos que tal punto existe. En este caso, en Q hay un punto x^0 en el cual $u = M$. Tomemos en Q un punto arbitrario y y mostremos que $u(y) = M$. Unamos el punto y con el punto x^0 mediante una quebrada L de eslabones finitos (que no se cruzan), totalmente dispuesta en Q. Sea $d > 0$ la distancia entre L y ∂Q. Cubramos la curva L por un número finito de bolas $S_i = \{|x - x^i| < d/2\}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, cuyos centros $x^i \in L \cap S_{i-1}$, $i = 1, \ldots, N$. Aquí, el punto x^0 es el centro de la bola S_0, y el punto $y \in S_N$.

En virtud del segundo teorema en la media (teorema 2)

$$u(x^0) = \frac{n}{\sigma_n (d/2)^n} \int\limits_{|x-x^0|<d/2} u(x)\,dx,$$

es decir,
$$\int_{S_0} (u(x) - u(x^0))\, dx = 0.$$

Ya que el integrando $u(x) - u(x^0)$ es no positivo, la función $u(x) = u(x^0) = M$ en S_0 y, en particular, $u(x^1) = M$. Repitiendo para el punto x^1 y la bola S_1 los mismos razonamientos que hemos usado para el punto x^0 y la bola S_0, mostremos que $u(x) = M$ en S_1 y, en particular, $u(x^2) = M$. Y así sucesivamente. De resultas obtendremos que $u(x) = M$ en S_N y, en particular, $u(y) = M$.

Así pues, queda demostrado que o bien $u(x) = \text{const}$ en Q, o bien para todo x de Q tiene lugar la desigualdad derecha de (16). Aplicando esta afirmación a la función $-u(x)$, obtendremos que o bien $u(x) = \text{const}$ en Q, o bien para todo x de Q tiene lugar la igualdad izquierda de (16). El teorema está demostrado.

COROLARIO. *Del teorema 7 se deduce inmediatamente que para toda función $u(x)$, armónica en Q y continua en $\overline{Q}$, se cumple la igualdad*
$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \|u\|_{C(\partial Q)}. \tag{17}$$

TEOREMA 8. *Supongamos que las funciones $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, pertenecen a $C(\overline{Q})$ y son armónicas en Q. Si la sucesión $u_k|_{\partial Q}$, $k = 1, 2, \ldots$, es uniformemente convergente en ∂Q, la sucesión u_k, $k = 1, 2, \ldots$, será uniformemente convergente en $\overline{Q}$ hacia cierta función armónica en Q.*

Efectivamente, según (17) tenemos para cualesquiera s y m
$$\|u_s - u_m\|_{C(\overline{Q})} \leqslant \|u_s - u_m\|_{C(\partial Q)}.$$

Puesto que la sucesión $u_k|_{\partial Q}$, $k = 1, 2, \ldots$, converge uniformemente en ∂Q, $\|u_s - u_m\|_{C(\partial Q)} \to 0$ cuando $m, s \to \infty$ por eso $\|u_s - u_m\|_{C(\overline{Q})} \to 0$ cuando $m, s \to \infty$. Del hecho de que el espacio $C(\overline{Q})$ es completo se desprende que existe una función continua $u(x)$ hacia la cual en $\overline{Q}$ converge uniformemente la sucesión $u_k(x)$, $k = 1, \ldots$ Del teorema 4 proviene que la función $u(x)$ es armónica en Q. El teorema queda demostrado.

3. Sobre las soluciones clásicas del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson. Recordemos que la función $u(x)$ se llama solución clásica del problema de Dirichlet (primer problema de contorno) para la ecuación de Poisson
$$\Delta u = f, \quad x \in Q, \tag{18}$$
$$u|_{\partial Q} = \varphi, \tag{19}$$
siempre que $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ y satisfaga las correlaciones (18) y (19).

Primero demostremos la unicidad de la solución.

TEOREMA 9. *El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson no puede tener más que una sola solución clásica.*

Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ dos soluciones del problema (18), (19). Entonces, la función $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ es armónica en Q, continua en $\overline{Q}$ y se anula en ∂Q. Por eso, de la desigualdad (17) se deduce que $u = 0$ en Q, es decir, $u_1 = u_2$. El teorema está demostrado.

La existencia de la solución clásica del problema (18), (19) suponiendo que $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$, $\varphi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$, se estableció en el punto 3 del párrafo anterior. En realidad allí demostramos una afirmación más fuerte: para las suposiciones hechas con relación a ∂Q, f y φ, la solución generalizada u del problema (18), (19) pertenece al espacio $H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(Q) \cap H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$. De aquí, en virtud de los teoremas de inmersión, se infiere que $u(x) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, es decir, es la solución clásica. Pero, la pertenencia de esta función a los espacios $H_{\text{loc}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(Q)$ y $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(Q)$ son condiciones mucho más fuertes que la pertenencia a los espacios $C^2(Q)$ y $C(\overline{Q})$, respectivamente. Por eso, es natural esperar que la solución clásica exista para limitaciones mucho menos rigurosas en ∂Q, f y φ.

TEOREMA 10. *Si $\partial Q \in C^2$, $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C(\partial Q)$, el problema (18), (19) tiene solución clásica.*

Ante todo establezcamos la validez del teorema (10) en el caso de una ecuación homogénea (18), es decir, para el problema (1), (19).

LEMA 4. *Si $\partial Q \in C^2$ y $\varphi \in C(\partial Q)$, el problema (1),(19) tiene solución clásica.*

Supongamos al principio que $\partial Q \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$. Puesto que $\varphi \in C \times \times (\partial Q)$, existe una sucesión φ_k, $k = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$ que en ∂Q converge uniformemente hacia la función φ. (Efectivamente, la prolongación continua de la función φ en $\overline{Q}$ puede ser aproximada en $C(\overline{Q})$ por medio de las funciones de $C^\infty(\overline{Q})$, mientras que sus valores en el contorno pertenecen a $C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(\partial Q)$.) Mas, para toda φ_k existe una función $u_k(x)$, armónica en Q, que es la solución clásica del problema (1), (19) con esta función de frontera. Según el teorema (8), la sucesión $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, converge en $\overline{Q}$ uniformemente. Con ello, la función límite $u(x)$ es armónica en Q, continua en $\overline{Q}$ y satisface la condición límite (19), es decir, es solución clásica del problema (1), (19).

Sea, ahora, $\partial Q \in C^2$. Designemos con Φ una prolongación continua de la función límite φ en $\overline{Q}$, y sea $M = \max\limits_{x\in\overline{Q}} |\Phi(x)|$. Tomemos una sucesión de dominios Q_i, $i = 1, 2, \ldots$, que posee las siguientes propiedades: $Q_i \Subset Q_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, \ldots$; $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i = Q$; $\partial Q_i \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. De acuerdo con lo demostrado, para todo $i = 1, 2, \ldots$ en el dominio Q_i existe una solución clásica $v_i(x)$ del problema (1), (19) que satisface la condición límite $v_i|_{\partial Q_i} = \Phi|_{\partial Q_i}$. Además, para todo $i = 1, 2, \ldots$

$$\max_{x\in\overline{Q}_i} \times |v_i(x)| \leqslant M.$$

Designemos por $u_i(x)$ una función dada en $\overline{Q}$, que es igual a $v_i(x)$ en $\overline{Q}_i$ y es nula fuera de $\overline{Q}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ En virtud del teorema 3, la sucesión de funciones $u_2(x)$, $u_3(x)$, ..., armónicas en Q_2, contiene una subsucesión u_{11}, u_{12}, ..., convergente uniformemente en $\overline{Q}_1$. La sucesión u_{11}, u_{12}, ... se compone de funciones que son armónicas en Q_3 (si eliminamos la función $u_2(x)$, que posiblemente está contenida en ella). Por eso, según el teorema 3, de esta última sucesión se puede extraer una subsucesión u_{21}, u_{22}, ..., que sea uniformemente convergente en $\overline{Q}_2$. Y así, sucesivamente.

Tomemos una sucesión diagonal u_{11}, u_{22}, ..., u_{pp}, ... y designemos por Q_{ii}, $i = 1, 2, \ldots$, una subsucesión correspondiente de la subsucesión de dominios Q_m, $m = 1, 2, \ldots$: la función u_{ii} es igual en $\overline{Q}_{ii}$ a v_{ii} y es nula fuera de $\overline{Q}_{ii}$. Es evidente que la sucesión u_{pp}, $p = 1, 2, \ldots$, converge en Q y que esta convergencia es uniforme en cualquier $\overline{Q}_{ii}$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 4, la función límite $u(x)$ es armónica en Q. Además, $|u(x)| \leqslant M$, cualquier que sea $x \in Q$.

Mostremos que la función $u(x)$ es continua en $\overline{Q}$ y satisface la condición límite (19), en otras palabras, demostremos que $u(x)$ es una solución clásica del problema (1), (19).

Elijamos un punto arbitrario $x^0 \in \partial Q$. Ya que $\partial Q \in C^2$, existen un punto $x^1 \notin \overline{Q}$ y $r > 0$ tales que una bola $\{|x - x^1| < r\}$, hace contacto con el contorno ∂Q en el punto x^0, no contiene puntos del dominio Q, mientras que la esfera $\{|x - x^1| = r\}$ tiene sólo un punto (x^0) común con ∂Q. Fijemos cualquier $\varepsilon > 0$. Puesto que la función $\Phi(x)$ es continua en el punto x^0, existe tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ que $|\Phi(x) - \Phi(x^0)| < \varepsilon$ para todos los puntos de la bola $\{|x - x^0| < \delta\}$ que se encuentran fuera de $\overline{Q}$. Como la función

$$w(x) = \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|x - x^1|^{n-2}},$$

armónica para $x \neq x^1$ (para concretar, consideramos el caso en que $n > 2$; si $n = 2$, $w(x) = -\ln r + \ln |x - x^1|$), es no negativa para todo $x \in \overline{Q}$ y se anula sólo en un solo punto x^0 de $\overline{Q}$, se puede hallar $C = C(\delta) > 0$ tal que para todo $x \in \overline{Q}$ serán válidas las desigualdades

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) < \Phi(x) < \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x).$$

Las funciones $u_{pp}(x) + Cw(x)$ y $u_{pp}(x) - Cw(x)$ son armónicas en Q_{pp}, continuas en $\overline{Q}_{pp}$ y, además, para ellas tienen lugar las expresiones $(u_{pp} + Cw)|_{\partial Q_{pp}} = (\Phi + Cw)|_{\partial Q_{pp}} > \Phi(x^0) - \varepsilon$; $(u_{pp} - Cw)|_{\partial Q_{pp}} = (\Phi - Cw)|_{\partial Q_{pp}} < \Phi(x^0) + \varepsilon$. Por ello, según el principio de máximo, en el dominio Q_{pp} tenemos: $u_{pp}(x) + Cw(x) > \Phi(x^0) - \varepsilon$ y $u_{pp}(x) - Cw(x) < \Phi(x^0) + \varepsilon$, es decir,

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) \leqslant u_{pp}(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x)$$

para todo $x \in Q_{pp}$. Por lo tanto, para cualquier $x \in Q$

$$\Phi(x^0) - \varepsilon - Cw(x) \leqslant u(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon + Cw(x).$$

Puesto que $w(x) \to 0$ para todo $x \to x^0$, estas desigualdades engendran, a su vez, las desigualdades siguientes

$$\Phi(x^0) - \varepsilon \geqslant \underline{\lim_{x \to x^0}}\, u(x) \leqslant \overline{\lim_{x \to x^0}}\, u(x) \leqslant \Phi(x^0) + \varepsilon,$$

de donde, por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, se deduce que $u(x)$ es continua en x^0 y $u(x^0) = \Phi(x^0) = \varphi(x^0)$. El lema está demostrado.

DEMOSTREMOS AHORA EL TEOREMA 10. Examinemos la función $u_0(x) = \int\limits_Q U(x - y) f(y)\,dy$, que es un potencial volumétrico de densidad f. Según el lema 2, $u_0(x) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ es en Q la solución de la ecuación (18). De acuerdo con el lema 4, existe la solución clásica $v(x)$ del problema $\Delta v = 0$ en Q, $v|_{\partial Q} = \varphi - u_0|_{\partial Q}$. En este caso, $u = u_0 + v$ es solución clasica del problema (18), (19). El teorema está demostrado.

Valiéndonos del teorema 10, enunciemos la siguiente importante propiedad de las funciones armónicas.

TEOREMA 11 (sobre la eliminación de la singularidad). *Supongamos que la función $u(x)$ es armónica en el dominio $Q \setminus \{x^0\}$, donde x^0 es un punto del dominio Q. Si para $x \to x^0$, $u(x) = o(U(x - x^0))$, donde U es la solución fundamental de la ecuación de Laplace, entonces, existe $\lim\limits_{x \to x^0} u(x) = A$, y la función $u(x)$, definida complementariamente en el punto x^0 por el valor de A, es armónica en Q.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una bola $S_R(x^0) = \{|x - x^0| < R\}$ estrictamente interior respecto de Q. Designemos con $v(x)$ la solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en la bola $S_R(x^0)$ que satisfaga la condición límite $v|_{\partial S_R(x^0)} =$

$= u \mid_{\partial S_R(x^0)}$. La función $u(x) - v(x) = w(x)$ es armónica en $S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$, y $w \mid_{\partial S_R(x^0)} = 0$. Para demostrar el teorema basta mostrar que en todo punto del conjunto $S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$ la función $w = 0$: en este caso la función $u(x)$ coincide con la función $v(x)$ para todos los puntos $x \in S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$ y, por tanto, la función $u(x)$, definida complementariamente en el x^0 por el número $A = v(x^0)$, coincide con la función armónica $v(x)$ por toda la bola $S_R(x^0)$.

Examinemos, siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, dos funciones

$$z_{\pm}(x) = \frac{\varepsilon}{|x - x^0|^{n-2}} \pm w(x)$$

(supongamos, para concretar, que la dimensión del espacio es $n > 2$; cuando $n = 2$, las funciones $z_{\pm}(x) = \varepsilon \ln \frac{2R}{|x - x^0|} \pm w(x)$). Las funciones $z_{\pm}(x)$ son armónicas en $S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$, y $z_{\pm}(x) \mid_{\partial S_R(x^0)} = \varepsilon / R^{n-2} > 0$. Dado que, por la condición, $u(x) = o\left(\frac{1}{|x - x^0|^{n-2}}\right)$ para $x \to x^0$, entonces $z_{\pm}(x) \mid_{|x - x^0| = \rho} = \frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}} \pm w_{|x - x^0| = \rho} = \frac{\varepsilon}{\rho^{n-2}} + o\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right)$. Por lo tanto, cuando $\rho > 0$ son suficientemente pequeños, $z_{\pm}(x) \mid_{|x - x^0| = \rho} > 0$. De acuerdo con el principio de máximo, $z_{\pm}(x) > 0$ para todo x de la capa esférica $\rho \leqslant |x - x^0| \leqslant R$. Sea x^1 un punto cualquiera de $S_R(x^0) \setminus \{x^0\}$. Siendo ρ suficientemente pequeño, este punto pertenece a la capa esférica $\rho \leqslant |x - x^0| \leqslant R$. Por consiguiente, $z_{\pm}(x^1) > 0$, es decir, $|w(x^1)| < \frac{\varepsilon}{|x^1 - x^0|^{n-2}}$, de donde, por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos: $w(x^1) = 0$. El teorema queda demostrado.

En el teorema 10 fue demostrada la existencia de una solución clásica del problema de Dirichlet (18), (19) para cualesquiera $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C(\partial Q)$, $\partial Q \in C^2$. Surge la pregunta: ¿no será suficiente, para que este problema sea soluble, suponer sólo el cumplimiento de la condición $f \in C(\overline{Q})$? La condición $f \in C^1(\overline{Q})$ es realmente exagerada: se puede demostrar que para poder solucionar el problema en cuestión, es suficiente suponer que la función f satisface en $\overline{Q}$ la condición de Hölder de cierto orden positivo*). Sin embargo, como lo demuestra un ejemplo que sigue, no se puede sustituir esta condición por la condición $f \in C(\overline{Q})$.

*) Suele decirse que la función $f(x)$ satisface en Q la condición de Hölder del orden $\alpha > 0$, si existe una constante M tal que para cualesquiera puntos x' y x'' de Q $|f(x') - f(x'')| \leqslant M |x' - x''|^{\alpha}$.

En la bola $Q = \{ |x| < R \}$ de radio $R < 1$ examinemos la ecuación de Poisson

$$\Delta u = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2} \left(\frac{n+2}{(-\ln|x|)^{1/2}} + \frac{1}{2(-\ln|x|)^{3/2}} \right) \qquad (20)$$

cuya función en el segundo miembro (definámosla complementariamente por el cero en el origen de coordenadas) es continua en $\overline{Q}$. La función

$$u(x) = (x_1^2 - x_2^2)(-\ln|x|)^{1/2} \qquad (21)$$

pertenece a $C(\overline{Q}) \cap C^\infty(\overline{Q} \setminus \{0\})$ (el punto $\{0\}$ es el origen de coordenadas) y, como se comprueba con facilidad, satisface en $Q \setminus \{0\}$ la ecuación (20) y la condición límite

$$u|_{|x|=R} = \sqrt{-\ln R}\,(x_1^2 - x_2^2)|_{|x|=R}. \qquad (22)$$

No obstante, la función $u(x)$ no puede ser solución clásica del problema (20), (22): ya que

$$\lim_{|x|\to 0} u_{x_1x_1} = \lim_{|x|\to 0} \Big(2(-\ln|x|)^{1/2} + \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^4(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{2x_1^2}{|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2|x|^2(-\ln|x|)^{1/2}} - \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{4|x|^4(-\ln|x|)^{3/2}}\Big) = \infty,$$

entonces $u(x) \notin C^2(Q)$.

Mostremos que el problema (20), (22) no tiene, en general, ninguna solución clásica.

Supongamos, al contrario, que la solución clásica $v(x)$ de este problema existe. Entonces, la función $w(x) = u(x) - v(x)$ es armónica y continua en $Q \setminus \{0\}$. Según el teorema sobre la eliminación de la singularidad, la función $w(x)$ puede ser definida complementariamente en el origen de coordenadas de manera tal que se haga armónica en Q y, consecuentemente, pertenezca a $C^2(Q)$. Por esta razón, en particular, existe el límite (finito) $\lim\limits_{|x|\to 0} w_{x_1x_1}$. La existencia del límite finito $\lim\limits_{|x|\to 0} v_{x_1x_1}$ se deduce del hecho de que $v(x)$ pertenece al espacio $C^2(\overline{Q})$. Y, por lo tanto, debe existir un límite finito $\lim\limits_{|x|\to 0} u_{x_1x_1} = \lim\limits_{|x|\to 0} w_{x_1x_1} + \lim\limits_{|x|\to 0} v_{x_1x_1}$. Esta contradicción demuestra la afirmación.

Ya usamos varias veces la fórmula (8) que nos proporciona la representación de una función arbitraria $u(x)$ de $C^2(\overline{Q})$ en términos de los valores en Q de su operador de Laplace y de los valores de u y $\frac{\partial u}{\partial n}$ en el contorno ∂Q. En lo sucesivo necesitaremos una fórmula más de este género.

Señalemos, ante todo, que para una función arbitraria $u(x)$ de $C^2(\overline{Q})$ y para cualquier punto $y \notin \overline{Q}$ tiene lugar la igualdad

$$0 = \int_Q U(y-\xi)\,\Delta u(\xi)\,d\xi + \\ + \int_{\partial Q} \left[u(\xi) \frac{\partial U(y-\xi)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} U(y-\xi) \right] dS_\xi, \qquad (23)$$

donde $U(y-\xi)$ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace.

Para demostrar esta igualdad es suficiente hacer uso de la fórmula de Green aplicada a las funciones $u(\xi)$ y $U(y-\xi)$ en el dominio Q:

$$\int_Q [u(\xi)\,\Delta_\xi U(y-\xi) - U(y-\xi)\,\Delta u(\xi)]\,d\xi = \\ = \int_{\partial Q} \left[u(\xi) \frac{\partial U(y-\xi)}{\partial n_\xi} - U(y-\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \right] dS_\xi,$$

teniendo, además, en cuenta el hecho de que la función $U(y-\xi)$ es armónica en Q según ξ.

Tomemos, ahora, puntos cualesquiera $x \in Q$, $y \notin \overline{Q}$ y una función arbitraria $d(y)$ continua fuera de $\overline{Q}$. Multiplicando (23) por $d(y)$ y restando, término a término, la igualdad obtenida de (8), resulta que para toda función u de $C^2(\overline{Q})$ tiene lugar la representación

$$u(x) = \int_Q [U(x-\xi) - d(y)\,U(y-\xi)]\,\Delta u(\xi)\,d\xi + \\ + \int_{\partial Q} \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} (d(y)\,U(y-\xi) - U(x-\xi)) + \right. \\ \left. + u(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} (U(x-\xi) - d(y)\,U(y-\xi)) \right] dS_\xi \qquad (24)$$

cualesquiera que sean $x \in Q$, $y \notin \overline{Q}$ y la función arbitraria $d(y)$ continua fuera de $\overline{Q}$.

Se puede mostrar que haciendo suposiciones bastante amplias respecto al dominio Q existen tal representación $y = y(x)$, que a todo punto $x \in Q$ le pone en correspondencia un punto $y \notin \overline{Q}$, y tal función $d(y(x))$, que para todo $x \in Q$

$$d(y(x))\,U(y(x)-\xi) - U(x-\xi) \equiv 0, \qquad \xi \in \partial Q. \qquad (25)$$

La fórmula (24) nos dará una representación en Q de la función arbitraria $u(x)$ de $C^2(\overline{Q})$ en términos de sus valores en el contorno y del valor del operador de Laplace de esta función en Q. Nos limitaremos al caso en el que Q es una bola; en este caso las funciones $y(x)$ y $d(y(x))$ se hallan fácilmente en forma explícita.

Así pues, sea $Q = \{|\xi| < R\}$, y sea, para concretar, $n > 2$ la dimensión del espacio. Entonces, la condición (25) tendrá por expresión

$$\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{d(y(x))}{|y(x)-\xi|^{n-2}} = 0, \qquad |\xi| = R,$$

o bien, al designar $d^{1/(n-2)}$ por b:

$$\frac{1}{|x-\xi|} = \frac{b(y(x))}{|y(x)-\xi|}, \qquad |\xi| = R. \tag{26}$$

La representación $y = y(x)$, la buscaremos en la forma

$$y = a(x)\,x \tag{27}$$

con una función $a(x)$ por ahora incógnita. La identidad (26) se cumplirá, si las funciones $a(x)$ y $b(y(x))$ están ligadas por la correlación

$$|y(x) - \xi|^2 = b^2(y(x))\,|x-\xi|^2, \qquad |\xi| = R,$$

o por la coorrelación

$$(a^2(x) - b^2(y(x)))\,|x|^2 + (1 - b^2(y(x)))\,R^2 =$$
$$= 2(x, \xi)(a(x) - b^2(y(x))), \qquad |\xi| = R.$$

Hagamos $b(y(x)) = \frac{R}{|x|}$, $a(x) = b^2(y(x)) = \frac{R^2}{|x|^2}$. En este caso, se cumple la identidad (26), y para cualquier $x \in Q$, el punto

$$y = y(x) = a(x)\,x = \frac{R^2}{|x|^2}\,x \tag{28}$$

se encuentra fuera de $\overline{Q}$, puesto que cuando $|x| < R$, $|y| = R^2/|x| > R$.

Para la esfera $\{|\xi| = R\}$ la normal $n_\xi = \xi/|\xi| = \xi/R$, a consecuencia de lo cual

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right) = \left(\nabla_\xi \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}, n_\xi\right) = \frac{n-2}{|x-\xi|^n}(x-\xi, n_\xi) =$$
$$= \frac{(n-2)(x-\xi, \xi)}{R|x-\xi|^n} = \frac{(n-2)((x,\xi) - R^2)}{R|x-\xi|^n}. \tag{29}$$

De un modo análogo se calcula $\frac{\partial}{\partial n_\xi}(1/|y(x) - \xi|^{n-2})$. Por esto, valiéndonos de (26), resulta para $|\xi| = R$

$$\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{b^{n-2}(y(x))}{|y(x)-\xi|^{n-2}}\right) =$$
$$= \frac{(n-2)}{R|x-\xi|^n}\left[(x,\xi) - R^2 - \frac{(y(x),\xi) - R^2}{b^2(y(x))}\right] = \frac{|x|^2 - R^2}{R|x-\xi|^n}(n-2).$$

De este modo, si $u(x) \in C^2(|x| \leqslant R)$, para todo punto x, $|x| < R$, será válida la igualdad

$$u(x) = \int\limits_{|\xi|=R} P_R(x, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi - \int\limits_{|\xi|<R} G_R(x, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi, \qquad (30)$$

donde

$$P_R(x, \xi) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R\, |x - \xi|^n}, \qquad (31)$$

y

$$G_R(x, \xi) = \frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \frac{(R/|x|)^{n-2}}{|(R/|x|)^2 x - \xi)|^{n-2}}\right). \qquad (32)$$

De modo absolutamente igual se establece la representación (30) para el caso bidimensional, es decir, cuando $n = 2$. En este caso la función $P_R(x, \xi)$ tiene la forma (31), y

$$G_R(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|x| \left| \xi - \frac{R^2}{|x^2|} x \right|}{R\, |x - \xi|}. \qquad (32')$$

La función $P_R(x, \xi)$, definida para $|\xi| = R$, $|x| \leqslant R$, por la fórmula (31), se llama *núcleo de Poisson* del primer problema de contorno (problema de Dirichlet) para el operador de Laplace en la bola $\{|x| < R\}$.

La función $G_R(x, \xi)$, definida para $|\xi| \leqslant R$, $|x| \leqslant R$, por la fórmula (32) cuando $n > 2$ y por la (32′), cuando $n = 2$, se llama *función de Green* del primer problema de contorno (problema de Dirichlet) para el operador de Laplace en la bola $\{|x| < R\}$.

LEMA 5. *La función $G_R(x, \xi)$, definida en el dominio $\{x \neq \xi$, $x \neq \xi R^2/|\xi|^2\}$ del espacio R_{2n} por la fórmula (32) para $n > 2$ y por la fórmula (32′) para $n = 2$, es continua en este dominio y posee las siguientes propiedades:*

a) $G_R(x, \xi) \equiv 0$ *cuando* $|x| = R$,

b) $G_R(x, \xi) = G_R(\xi, x)$,

c) $G_R(x, \xi)$ *es armónica respecto de x y de ξ*.

d) *cuando* $|x| \leqslant R$, $|\xi| \leqslant R$ *se tiene:* $0 \leqslant G_R(x, \xi) \leqslant 1/(\sigma_n |x - \xi|^{n-2})$ *para* $n > 2$, *y* $0 \leqslant G_R(x, \xi) \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2R}{|x-\xi|}$ *para* $n = 2$.

La propiedad a) de la función $G_R(x, \xi)$ se deduce directamente de (32) (o de (32′), cuando $n = 2$).

Para cualesquiera x y ξ es válida la igualdad $|R^2\xi - x|\xi|^2|\, |x|^2 = |R^2 x - \xi|x|^2|^2 |\xi|^2$. De ésta se infiere inmediatamente que la condición $\xi = xR^2/|x|^2$ es equivalente a la condición: $x = \xi R^2/|\xi|^2$; por tanto, si el punto (x, ξ) (de R_{2n}) pertenece al dominio de definición de la función $G_R(x, \xi)$, entonces el punto (ξ, x) también pertenece a dicho dominio. Además, de la indicada igualdad se desprende que $\frac{R}{|x|\,|R^2x/|x|^2-\xi|}=\frac{R}{|\xi|\,|R^2\xi/|\xi|^2-x|}$, y, por consiguiente, la igualdad $G_R(x, \xi)=G_R(\xi, x)$. La propiedad b) está demostrada.

De (32) (ó de (32′), cuando $n = 2$) proviene que la función $G_R(x, \xi)$ es armónica respecto a ξ. Dado que la función $G_R(x, \xi)$ es simétrica (propiedad b)), es armónica también respecto a x. La propiedad c) está demostrada.

La desigualdad derecha de la propiedad d) se deduce, cuando $n > 2$, de (32). Para demostrar la desigualdad derecha de la misma propiedad, cuando $n = 2$, indiquemos que siendo $|x| \leqslant R$, $|\xi| \leqslant R$ $|x|$ $|\xi - R^2 x/|x|^2| = |\xi|\,|x| - R^2x/|x|\| \leqslant \leqslant |\xi|\,|x|| + R^2 \leqslant 2R^2$. Por tanto, cuando $|x| \leqslant R$, $|\xi| \leqslant R$ $0 \leqslant \ln \frac{2R^2}{|x|\,|\xi - R^2x/|x|^2|}$, y consecuentemente

$$G_R(x, \xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2R}{|x-\xi|}-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2R^2}{|x|\,|\xi-R^2x/|x|^2|}\leqslant\frac{1}{2\pi}\ln\frac{2R^2}{|x-\xi|}.$$

Ahora, demostremos las desigualdades izquierdas de la propiedad d). Sea primero $x = 0$. Según dice la propiedad b), $G_R(0, \xi) = G_R(\xi, 0)$, por lo que $G_R(0, \xi)=\frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{|\xi|^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right)\geqslant 0$ cuando $n > 2$ y $G_R(\xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|\xi|}\geqslant 0$, cuando $n = 2$.

Ahora tomemos un punto arbitrario x^0, $0 < |x^0| < R$, y una bola $\{|\xi - x^0| < \varepsilon\}$ de radio ε, $0 < \varepsilon < R - |x^0|$, ubicada en otra bola $\{|\xi| < R\}$. De acuerdo con las propiedades a) y b), $G_R(x^0, \xi) \equiv 0$ para $|\xi| = R$. Cuando ε es suficiente pequeño, en la esfera $\{|\xi - x^0| = \varepsilon\}$

$$G_R(x^0, \xi)=\frac{1}{\sigma_n\varepsilon^{n-2}}-\frac{(R/|x^0|)^{n-2}}{\sigma_n|x^0R^2/|x^0|^2-\xi|^{n-2}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}-\frac{1}{(R-|x^0|)^{n-2}}\right)>0 \quad \text{para} \quad n>2$$

y

$$G_R(x, \xi)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|x^0|\,|\xi-R^2x^0/|x^0|^2|}{R}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}+\ln(R-|x^0|)\right)>0 \quad \text{cuando} \quad n=2.$$

Por ello, en virtud del principio de máximo, una función $G_R(x^0, \xi)$, armónica respecto de ξ es mayor que 0 en el dominio $\{|\xi| < R\} \setminus \{|\xi - x^0| \leqslant \varepsilon\}$. Ya que el número $\varepsilon > 0$ puede elegirse arbitrariamente pequeño, de la última desigualdad se desprende la desigualdad izquierda en d). El lema está demostrado.

La representación integral (30) se ha obtenido suponiendo que la función $u(x) \in C^2(|x| \leqslant R)$. El lema 5 permite obtener esta representación con menores exigencias a la función u.

LEMA 6. *Supongamos que la función* $u(x) \in C(|x| \leqslant R) \cap C^2(|x| < R)$ *y la función* $\Delta u(x)$ *es acotada en la bola* $\{|x| < R\}$. *Entonces, para todo punto* x, $|x| < R$, *es válida la igualdad* (30).

Sea x^0 un punto arbitrario de la bola $\{|x| < R\}$, y sean ρ_0 y ρ unos números tales que $|x^0| < \rho_0 \leqslant \rho < R$. Puesto que $u(x) \in C^2(|x| \leqslant \rho)$, en vista de (30) para todo x, $|x| < \rho$, y, en particular, para $x = x$, tenemos

$$u(x^0) = \int\limits_{|\xi|=\rho} P_\rho(x^0, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi - \int\limits_{|\xi|<\rho} G_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi. \qquad (33)$$

En la integral de (33) por la esfera $\{|\xi| = \rho\}$, hagamos un cambio de variables $\xi = \frac{\eta}{R}\rho$:

$$\int\limits_{|\xi|=\rho} P_\rho(x^0, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-1} \int\limits_{|\eta|=R} P_\rho\left(x^0, \frac{\eta\rho}{R}\right) u\left(\frac{\eta\rho}{R}\right) dS_\eta.$$

Puesto que la función $(\rho/R)^{n-1}\, P_\rho(x^0, \eta\rho/R)\, u(\eta\rho/R)$ según las variables $\eta_1, \ldots, \eta_n$, es continua en el conjunto $\{|\eta| = R,\ \rho_0 \leqslant \rho \leqslant R\}$ y para $\rho \to R$ se observa que $(\rho/R)^{n-1}\, P_\rho(x^0, \eta\rho/R)\, u(\eta\rho/R) \to P_R(x^0, \eta)\, u(\eta)$, entonces

$$\lim_{\rho \to R} \int\limits_{|\xi|=\rho} P_\rho(x^0, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi = \int\limits_{|\xi|=R} P_R(x^0, \xi)\, u(\xi)\, dS_\xi. \qquad (34)$$

Examinemos ahora el segundo sumando del segundo miembro en (33). Designemos con $\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)$ una función igual a $G_\rho(x^0, \xi)$ cuando $|\xi| < \rho$ y nula cuando $|\xi| \geqslant \rho$. Entonces:

$$\int\limits_{|\xi|<\rho} G_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi = \int\limits_{|\xi|<R} \widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi.$$

Es evidente que $\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi) \to G_R(x^0, \xi)$ cuando $\rho \to R$, cualquiera que sea $\xi \neq x^0$, $\xi < R$. Además, en virtud de la propiedad d) del lema 5, la función $\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)$ es mayorada por una función que no depende de ρ y es integrable en la bola $\{|\xi| < R\}$:

$$|\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)| \leqslant \frac{M}{\sigma_n |x^0 - \xi|^{n-2}} \quad \text{para} \quad n > 2$$

y

$$|\widetilde{G}_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)| \leqslant \frac{M}{2\pi} \ln \frac{2R}{|x^0 - \xi|} \quad \text{para} \quad n = 2,$$

donde $M = \sup_{|x| \leq R} |\Delta u(x)|$. Por eso, en virtud del teorema de Lebesgue

$$\lim_{\rho \to R} \int_{|\xi| < \rho} G_\rho(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi = \int_{|\xi| < R} G_R(x^0, \xi)\, \Delta u(\xi)\, d\xi. \qquad (35)$$

Pasando en (33) al límite para $\rho \to R$, haciendo uso de (34) y (35), obtendremos la igualdad (30) para cualquier punto de la bola $\{|x| < R\}$. El lema está demostrado.

Del lema 6 se desprende que la solución clásica del problema de Dirichlet

$$\Delta u = f, \quad |x| < R, \qquad (36)$$
$$u|_{\{|x| = R\}} = \varphi$$

para la función φ continua en la esfera $\{|x| = R\}$ y para la función f, acotada y continua en la bola $\{|x| < R\}$, se representa (si es que existe) en la forma

$$u(x) = \int_{|\xi| = R} P_R(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, dS_\xi - \int_{|\xi| < R} G_R(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi. \qquad (37)$$

Señalemos que estas condiciones (como lo demuestra el ejemplo citado más arriba) no garantizan la existencia de la solución clásica.

En virtud del teorema 10, para la existencia de la solución clásica del problema (36) es suficiente exigir que $f(x) \in C^1(|x| \leq R)$. De este modo, del teorema (10) y el lema 6 se deduce la siguiente afirmación.

TEOREMA 12. *Si* $f(x) \in C^1(|x| \leq R)$ y $\varphi(x) \in C(|x| = R)$, *entonces la solución clásica del problema de Dirichlet* (36) *existe y se representa en la forma* (37).

OBSERVACIÓN. Sea Q un dominio simplemente conexo del plano (x_1, x_2), y sea $z' = F(z)$, $z = x_1 + ix_2$, $z' = x_1' + ix_2'$, una función analítica en Q y continuamente diferenciable (respecto de x_1, x_2) en $\overline{Q}$, que realiza la representación biunívoca del dominio Q en el círculo $\{|z'| < R\}$ de radio R $(R = |F(z)||_{z \in \partial Q})$.

Designemos por $u(z) = u(x_1, x_2)$ la solución clásica del problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0, \quad z \in Q, \qquad (38)$$
$$u|_{z \in \partial Q} = \varphi(z),$$

donde $\varphi(z) \in C(\partial Q)$, y por $u'(z') = u'(x_1', x_2')$, la solución clásica del problema de Dirichlet

$$\Delta u' = 0 \quad |z'| < R,$$
$$u'|_{\{|z'| = R\}} = \psi(z'),$$

donde

$$\psi(z') = \varphi(F_{-1}(z')) \quad (F_{-1}(F(z)) \equiv z,\ z \in Q).$$

Según el teorema 12,

$$u'(z') = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{|\zeta'|=R} \frac{R^2 - |z'|^2}{|z' - \zeta'|^2} \psi(\zeta') \, |d\zeta'|.$$

Del teorema de unicidad de la solución clásica del problema de Dirichlet (teorema 9) y del corolario al teorema 6 se infiere que $u(z) = u(F_{-1}(z')) = u'(z')$. Por ello, la solución del problema (38) tiene por expresión

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial Q} \frac{R^2 - |F(z)|^2}{|F(z) - F(\zeta)|^2} \, |F'(\zeta)| \, \varphi(\zeta) \, |d\zeta| =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial Q} \frac{|F(\zeta)|^2 - |F(z)|^2}{|F(\zeta) - F(z)|^2} \, \frac{|F'(\zeta)|}{|F(\zeta)|} \, \varphi(\zeta) \, |d\zeta|.$$

4. Funciones armónicas en dominios no acotados. Sea Q un dominio no acotado del especio R_n y supongamos que su complemento $R_n \setminus D$ contiene por lo menos un punto interior; dispongamos en éste el origen de coordenadas.

Examinemos una representación biunívoca

$$x' = \frac{x}{|x|^2} \tag{39}$$

del dominio $R_n \setminus \{0\}$ de sí mismo. Esta representación se llama *transformación de inversión* (respecto de la esfera $\{|x| = 1\}$), de la cual ya hicimos uso en el punto anterior. Realizándose la representación (39), la esfera $\{|x| = 1\}$ se transforma en sí misma, el dominio $\{0 < |x| < 1\}$ se representa en el dominio $\{|x| > 1\}$ y, viceversa, el dominio $\{|x| > 1\}$ se representa en el dominio $\{0 < |x| < 1\}$. Es evidente, que una representación inversa a (39), tiene la forma

$$x = \frac{x'}{|x'|^2},$$

es decir, también es una transformación de inversión.

Como resultado de la transformación de inversión el dominio Q pasa a un dominio acotado Q'. Indiquemos que el origen de coordenadas es un punto límite de Q'. Cuando ∂Q no es acotada, el origen de coordenadas será también un punto límite del conjunto $\overline{Q}'$. Si, en cambio, ∂Q es acotada, es decir, si Q es la exterioridad de algún conjunto acotado, el origen de coordenadas será un punto límite aislado del dominio Q' y, consecuentemente, punto, interior del conjunto $\overline{Q}'$.

Sea dado en el dominio Q una función $u(x)$. La función $u'(x')$, definida en el dominio Q' por la ecuación

$$u'(x') = \frac{1}{|x'|^{n-2}} u\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right), \tag{40}$$

se denomina *transformación de Kelvin* de la función u.

De las fórmulas (39) y (40) se desprende que

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u'\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \tag{41}$$

es decir, una transformación inversa a (40) es también transformación de Kelvin.

LEMA 7. *Si la función $u(x)$ es armónica en el dominio Q, la función $u'(x')$ es armónica en el dominio Q'.*

Sea Q'_1 un subdominio arbitrario estrictamente interior del dominio Q', y sea Q_1 la preimagen del subdominio en la transformación de inversión. Entonces, el dominio Q_1 es un subdominio acotado estrictamente interior del dominio Q. Como la función u es armónica en Q_1 y pertenece a $C^2(\overline{Q}_1)$, en virtud de la fórmula (9), para todo x de Q_1

$$u(x) = \int\limits_{\partial Q_1} \left[\frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|^{n-2}} + \nu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}\right)\right] dS_\xi,$$

donde

$$\mu(\xi) = \frac{1}{(n-2)\,\sigma_n} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\bigg|_{\partial Q_1}, \quad \nu(\xi) = -\frac{u(\xi)}{(n-2)\,\sigma_n}\bigg|_{\partial Q_1}$$

son funciones continuas en ∂Q_1 (para concretar, consideramos el caso $n>2$; cuando $n=2$, los razonamientos son los mismos). Por ello, en virtud de (40), para todo $x' \in Q'_1$

$$u'(x') = \int\limits_{\partial Q_1} \left[\frac{\mu(\xi)}{|x'|^{n-2}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{n-2}} + \right.$$
$$\left. + \nu(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|x'|^{n-2}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{n-2}}\right)\right] dS_\xi. \tag{42}$$

De la afirmación c) del lema 5 del párrafo anterior se deduce que la función $|x'|^{2-n}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{2-n}$, y, por consiguiente, la función $\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(|x'|^{2-n}\left|\frac{x'}{|x'|^2}-\xi\right|^{2-n}\right)$ son armónicas respecto de x', para $\frac{x'}{|x'|^2} \neq \xi$.

De este modo, la función integrando en (42) y todas sus derivadas respecto de x' son continuas en totalidad de las variables ξ, x' y armónicas respecto de x', para $\xi \in \partial Q_1$ y $x' \in Q'$ (la condición $\frac{x'}{|x'|^2} \notin \partial Q_1$ es equivalente a la condición $x' \notin \partial Q'_1$).

Por lo tanto, para todo punto $x^1 \in Q_1'$ la igualdad (42) se puede derivar respecto a x' bajo el signo de la integral cualquier número de veces, siendo en este caso $\Delta u' = 0$. Ya que Q_1' es arbitrario, el lema queda demostrado.

Así pues, la investigación de las funciones armónicas en un dominio no acotado cuyo complemento tiene puntos interiores se ha reducido, mediante el lema 7, a la exploración de funciones armónicas en el dominio acotado.

Supongamos que el complemento $R_n \setminus Q$ del dominio Q de R_n es acotado. La función armónica $u(x)$, dada en el dominio Q, se llama *regular en la infinidad*, si para $|x| \to \infty$ $u(x) = o(1)$ cuando $n > 2$, y $u(x) = o(\ln |x|)$ cuando $n = 2$.

Supongamos que el complemento del dominio Q tiene puntos interiores (entre ellos, como antes, el origen de coordenadas). Como resultado de la transformación de inversión (39), el dominio Q se convertirá en el dominio acotado Q', que contiene un punto límite aislado, el origen de coordenadas. Si una función armónica, dada en el dominio Q, es regular en la infinidad, entonces en virtud de (40), la transformación de Kelvin $u'(x')$ de esta función es, para $x' \to 0$, $o(|x'|^{2-n})$ cuando $n > 2$ y $o(\ln |x'|)$ cuando $n = 2$, es decir, para $x' \to 0$ $u'(x') = o(U(x'))$, donde U es la solución fundamental de la ecuación de Laplace. En este caso, según el teorema sobre la eliminación de la singularidad, existe $\lim\limits_{x' \to 0} u'(x') = A$, y la función $u'(x')$, definida complementariamente en el origen de coordenadas por el valor de A (conservemos para ella la designación anterior $u'(x')$), es armónica en el dominio $Q_0' = Q' \cup \{0\}$.

De este modo queda demostrada la siguiente afirmación.

LEMA 8. *Supongamos que la función $u(x)$ es armónica en el dominio no acotado Q (cuyo complemento es acotado y contiene puntos interiores) y regular en la infinidad. Entonces, su transformación de Kelvin es armónica en Q_0'.*

Conforme al teorema 5, la función $u'(x')$ es analítica respecto a x' en $Q' \cup \{0\}$. Por ello, en particular, existe un número R_0 tal que la función $u'(x')$ se desarrolla en la bola $\{|x'| < R_0\}$ en una serie de Taylor absolutamente (y uniformemente) convergente (junto con todas las derivadas)

$$u'(x') = \sum_{\alpha} A_\alpha x'^\alpha,$$

donde $A_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u'(0)$, $A_0 = A$. Pero, en este caso, en vista de (39) y (41), para todo x, $|x| > 1/R_0$

$$u(x) = \sum_{\alpha} A_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}}, \tag{43}$$

con la particularidad de que la serie del segundo miembro de esta igualdad converge, para $|x| > 1/R_0$, absoluta e uniformemente junto con todas sus derivadas.

Designemos con $T(x)$ la función $u(x) - \frac{A_0}{|x|^{n-2}}$, es decir, $T(x) = \sum_{|\alpha| \geq 1} A_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}}$ para $|x| > 1/R_0$. Dado que para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $D^\alpha u = D^\alpha \frac{A_0}{|x|^{n-2}} + D^\alpha T(x)$, y como $|D^\alpha T| \leq \frac{C_\alpha}{|x|^{n+|\alpha|-1}}$, donde C_α es una constante positiva, entonces para todo x, $|x| > 1/R_0$,

$$\left| D^\alpha u - D^\alpha \frac{A_0}{|x|^{n-2}} \right| \leq \frac{C_\alpha}{|x|^{n+|\alpha|-1}}. \tag{44}$$

En particular,

$$\left| u(x) - \frac{A_0}{|x|^{n-2}} \right| \leq \frac{\text{const}}{|x|^{n-1}}, \tag{45}$$

$$\left| \nabla u - \frac{A_0(2-n)\,x}{|x|^n} \right| \leq \frac{\text{const}}{|x|^n}.$$

Las afirmaciones sobre el comportamiento (cuando los valores $|x|$ son grandes) de la función $u(x)$, armónica en el dominio Q y regular en la infinidad, establecidas ahora mismo para el caso en que el complemento del dominio Q es acotado y contiene puntos interiores, son válidas siempre, si el complemento del dominio Q es acotado (en particular, Q puede coincidir con todo el espacio R_n). En efecto, ya que nos interesan los valores de $u(x)$ sólo cuando los valores $|x|$ son suficientemente grandes, puede considerarse dada sólo en el dominio $Q_1 = \{|x| > R_1\}$, que es, cuando R_1 se toma suficientemente grande, un subdominio del dominio Q. Pero, Q_1 es un complemento del conjunto $\{|x| \leq R_1\}$ en el cual el origen de coordenadas es un punto interior.

De esta manera queda demostrado el siguiente

TEOREMA 13. *Supongamos que el complemento del dominio Q es acotado. Entonces, para toda función $u(x)$, armónica en Q y regular en la infinidad, existe una constante $R > 0$* tal que para todo x, $|x| > R$, *la función $u(x)$ se desarrolla en la serie* (43) *absoluta e uniformemente convergente junto con todas las derivadas y, además, tengan lugar las desigualdades* (44).

Del teorema (13) se deduce, en particular, que si la función $u(x)$, armónica en el dominio n-dimensional, $n > 2$, Q (que es la exterioridad de un conjunto acotado), decrece en la infinidad, su decrecimiento no es más débil que el de la solución fundamental de la ecuación de Laplace y, además, existe un límite de la función $u(x)\,|x|^{n-2}$ para $|x| \to \infty$. Si $n = 2$, la función $u(x)$, armónica en Q, creciente menos fuertemente que la solución fundamental, es, en realidad, acotada y existe para ella un límite para $|x| \to \infty$.

OBSERVACIÓN. Si el complemento del dominio Q es no acotado, entonces para una función armónica en Q $u(x)$ que satisface la condición

$$u(x) = o(1) \quad \text{para} \quad |x| \to \infty, \qquad x \in Q \quad \text{para} \quad n > 2$$

o bien

$$u(x) = o(\ln |x|) \quad \text{para} \quad |x| \to \infty, \qquad x \in Q \quad \text{para} \quad n = 2$$

las afirmaciones del teorema 13, en general, no tienen lugar. Por ejemplo, cuando $n = 2$, la función $\arg(x_1 + ix_2)$, armónica y acotada en el dominio $R_2 \setminus \{x_2 = 0, x_1 \geqslant 0\}$, no tiene límite para $|x| \to \infty$.

Supongamos que la función $u(x)$ es armónica en todo el espacio R_n. Diremos que $u(x)$ es semiacotada, si es acotada por abajo o por arriba, es decir, si para todo $x \in R_n$ con una constante M se cumple la desigualdad $u(x) \geqslant M$ o la desigualdad $u(x) \leqslant M$, respectivamente.

TEOREMA 14. *Una función semiacotada armónica en R_n, es constante.*

Está claro que una función $-u(x)$ es acotada por abajo, si $u(x)$ es acotada por arriba. Por eso, para demostrar el teorema basta considerar sólo el caso $u(x) \geqslant M$ en R_n. Entonces, para la función $v(x)$ armónica en R_n, $v(x) = u(x) - M \geqslant 0$ en R_n. El teorema será demostrado, si establecemos que $v(x) \equiv \text{const}$.

Elijamos un punto arbitrario $x^0 \in R_n$ y una bola $\{|x| < R\}$ de radio $R > |x^0|$. Puesto que el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en la bola $\{|x| < R\}$ con una función límite $v|_{(|x|=R)}$ admite una solución clásica única, entonces para todo x, $|x| < R$,

$$v(x) = \int_{|\xi|=R} P_R(x, \xi)\, v(\xi)\, dS_\xi,$$

donde $P_R(x, \xi)$ es el núcleo de Poisson del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en la bola $\{|x| < R\}$ (fórmula (31)). En particular, cuando $x = x^0$, tenemos

$$v(x^0) = \int_{|\xi|=R} P_R(x^0, \xi)\, v(\xi)\, dS_\xi = \frac{R^2 - |x^0|^2}{\sigma_n R} \int_{|\xi|=R} \frac{v(\xi)}{|x^0 - \xi|^n}\, dS_\xi.$$

Ya que para $|\xi| = R$

$$R - |x^0| \leqslant |x^0 - \xi| \leqslant R + |x^0|,$$

se tiene (recordemos que la función $v(\xi) \geqslant 0$

$$\frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int\limits_{|\xi|=R} v(\xi)\, dS_\xi \cdot \frac{(R^2-|x^0|^2)\, R^{n-2}}{(R+|x^0|)^n} \leqslant v(x^0) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int\limits_{|\xi|=R} v(\xi)\, dS_\xi \cdot \frac{(R^2-|x^0|^2)\, R^{n-2}}{(R-|x^0|)^n}$$

o, en virtud del primer teorema en la media,

$$\frac{R^{n-2}(R^2-|x^0|^2)}{(R+|x^0|)^n}\, v(0) \leqslant v(x^0) \leqslant \frac{R^{n-2}(R^2-|x^0|^2)}{(R-|x^0|)^n}\, v(0).$$

Pasando en esta igualdad al límite para $R \to \infty$, obtenemos $v(x^0) = v(0)$. Por ser x^0 un punto arbitrario, $v(x) \equiv$ const. El teorema queda demostrado.

COROLARIO. *Si una función $u(x)$ armónica en R_n, satisface, para todo $x \in R_n$, la desigualdad $|u(x)| \leqslant C(1+|x|)^k$, donde C es una constante y k, un número entero no negativo, entonces $u(x)$ es un polinomio de grado no superior a k.*

Cuando $k = 0$, esta afirmación es evidente en el teorema (14). Sea $k > 0$. Tomemos un número arbitrario $R > 1$. En vista del lema 3, p. 2, para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = k$,

$$\max_{|x|\leqslant R} |D^\alpha u| \leqslant k^k \left(\frac{n}{R}\right)^k \max_{|x|\leqslant 2R} |u(x)| \leqslant$$
$$\leqslant Ck^k \left(\frac{n}{R}\right)^k (1+2R)^k \leqslant Ck^k \left(\frac{n}{R}\right)^k (3R)^k = C(3kn)^k.$$

De esta desigualdad se deduce que a función $D^\alpha u$, armónica en R_n, es acotada en R_n, cualquiera que sea α, $|\alpha| = k$. Conforme al teorema 14, las funciones $D^\alpha u$, $|\alpha| = k$, son constantes en R_n. Por tanto, $u(x)$ es un polinomio de grado no superior a k. La afirmación queda demostrada.

Anteriormente hemos establecido algunas propiedades de las funciones armónicas en los dominios no acotados. En particular, fue mostrado que el estudio de la función armónica en el dominio no acotado (cuyo complemento contiene puntos interiores) puede ser reducido, mediante la transformación de Kelvin, al de la función armónica en el dominio acotado.

Examinemos ahora problemas de contorno para la ecuación de Laplace en dominios no acotados. Señalemos ante todo que en este caso las condiciones habituales (las que se han considerado en el dominio acotado) impuestas en la solución son insuficientes para la unicidad. Por ejemplo, todas las funciones $c \ln r$, $c(r^k - r^{-k}) \cos k\theta$, $c(r^k - r^{-k}) \operatorname{sen} k\theta$, $k = 1, 2, \ldots$, donde c es una constante arbitraria, $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r \operatorname{sen}\theta$, son armónicas en el dominio $\{r > 1\} \subset R_2$, continuas en la adherencia de éste y se anulan en el contorno $\{r = 1\}$. Por eso resulta natural incluir en la definición de la solución una condición adicional que caracterice el comportamiento de la solución en la infinidad.

Sea el dominio $Q = R_n \setminus \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$, donde Q_i, $i = 1, \ldots, N$, son dominios acotados con contornos disjuntos.

La función $u(x)$ de $C^2(Q)$ se llama *solución* (clásica) *del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el dominio* Q:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \qquad x \in Q \\ u|_{\partial Q} &= \varphi, \end{aligned} \tag{46}$$

si es armónica en Q, continua en $\overline{Q}$, satisface la condición límite en (46) y es regular en la infinidad.

La función $u(x)$ de $C^2(Q)$ se llama *solución* (clásica) *del tercer problema de contorno para la ecuación de Laplace en* Q:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \qquad x \in Q, \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\, u\right)\Big|_{\partial Q} = \varphi, \end{aligned} \tag{47}$$

si es armónica en Q, continuamente diferenciable en $\overline{Q}$, satisface la condición límite en (47) y es regular en la infinidad.

Cuando $\sigma \equiv 0$, el tercer problema de contorno se denomina *segundo problema de contorno o problema de Neumann*.

Designemos con Q' un dominio acotado que para la transformación de inversión es la imagen del dominio Q (el origen de coordenadas es un punto interior del complemento de Q).

Supongamos que $u(x)$ es la solución del problema (46). Del lema 8 se desprende que la funcion $u'(x')$ que es la transformación de Kelvin de la función $u(x)$ (definida complementariamente según la continuidad en el origen de coordenadas), es armónicas en $Q'_0 = Q' \cup \cup \{0\}$. Además, es evidente que $u'(x') \in C(\overline{Q}'_0)$ y $u'(x')_{x' \in \partial Q'_0} = \varphi'(x')$, donde $\varphi'(x') = \frac{1}{|x'|^{n-2}}\, \varphi\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right)$. Esto significa que $u'(x')$ es la solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el dominio (acotado) Q'_0 con una función límite $\varphi'(x')$.

Y a la inversa, si $u'(x')$ es la solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el dominio Q'_0 con una función límite $\varphi'(x')$, entonces $u(x)$, que es la transformación de Kelvin de $u'(x')$, es armónica en Q, continua en $\overline{Q}$, satisface la condición límite $u|_{\partial Q} = \varphi$, y, como es obvio, es regular en la infinidad, es decir, $u(x)$ es la solución clásica del problema (46).

Por ello, de los teoremas de existencia y unicidad de la solución clásica del problema de Dirichlet en el dominio acotado (teorema 9 y 10) se desprende.

TEOREMA 15. *Para cualquier función límite continua φ existe la única solución clásica del problema de Dirichlet* (46).

El estudio del tercer problema de contorno en el dominio no acotado Q se reduce también, mediante la transformación de Kelvin, al del tercer problema de contorno en el dominio acotado Q'_0. Limitémonos a la demostración del teorema de unicidad.

TEOREMA 16. *El tercer problema de contorno para la ecuación de Laplace en el dominio Q para $\sigma(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \not\equiv 0$, no puede tener más que una solución.*

El segundo problema de contorno para la ecuación de Laplace en el dominio Q, cuando $n > 2$, no puede tener más que una solución; si $n = 2$, la solución (si existe) se determina con precisión hasta un sumando constante.

Supongamos que el tercero (segundo) problema de contorno admite dos soluciones, $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Entonces, la función $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ es armónica en Q, continuamente diferenciable en $\overline{Q}$, satisface la condición límite $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial Q} = 0$ y es regular en la infinidad. Tomemos un número $R > 0$ tan grande que el dominio $\{|x| > R\}$ esté contenido en Q y aprovechemos en el dominio $Q_R = Q \cap \{|x| < R\}$ la fórmula de Green

$$0 = \int\limits_{Q_R} u\Delta u\,dx = -\int\limits_{Q_R} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial n} u\,dS + \\ + \int\limits_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\,dS = -\int\limits_{Q_R} |\nabla u|^2\,dx - \int\limits_{\partial Q} \sigma u^2\,dS + \int\limits_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\,dS.$$

De resultas tenemos la igualdad

$$\int\limits_{Q_R} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\partial Q} \sigma u^2\,dS = \int\limits_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\,dS. \tag{48}$$

En virtud del teorema 13 $u|_{(|x|=R)} = O\left(\frac{1}{R^{n-2}}\right)$ y $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(|x|=R)} = O\left(\frac{1}{R^{n-1}}\right)$ cuando $n > 2$ y $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(|x|=R)} = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$, cuando $n = 2$. Por esto,

$$\int\limits_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\,dS = O\left(\frac{1}{R^{n-2}}\right) \text{ para } n > 2$$

y

$$\int\limits_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} u\,dS = O\left(\frac{1}{R}\right) \text{ para } n = 2$$

Pasando en la igualdad (48) al límite para $R \to \infty$, obtenemos

$$\int_Q |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial Q} \sigma u^2 dS = 0.$$

Puesto que $\sigma \geqslant 0$, esta igualdad es equivalente a otras dos

$$\int_Q |\nabla u|^2 dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\partial Q} \sigma u^2 dS = 0. \tag{49}$$

De la primera igualdad en (49) se desprende que $u \equiv c_0 = \text{const}$ en $\overline{Q}$. Si $n > 2$, en vista de la regularidad de la función $u(x)$ en la infinidad $c_0 = 0$, es decir, $u_1 = u_2$ en Q.

Si $n = 2$ y $\sigma(x) \geqslant 0$, $\sigma(x) \not\equiv 0$ (tercer problema de contorno), la igualdad $c_0 = 0$ se infiere de la segunda correlación en (49).

En el caso $n = 2$ y $\sigma(x) \equiv 0$ (segundo problema de contorno), la función $u(x) \equiv c_0$, donde la constante c_0 es arbitraria es una función armónica regular en Q que satisface la condición límite homogénea $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0$. El teorema queda demostrado.

PROBLEMAS DEL CAPITULO IV

1. Muéstrese que la función $u(x)$, que pertenece a $L_{2\,\text{loc}}(Q)$ y satisface para toda $v \in \dot{C}^\infty(\overline{Q})$ la identidad $\int_Q u \Delta v dx = 0$, es armónica en Q.

2. Hállese el complemento del conjunto de funciones de $L_2(Q)$, armónicas en Q, según la norma del espacio $L_2(Q)$.

3. Supongamos que $u \in H^2_{\text{loc}}(Q) \cap \dot{C}(\overline{Q})$ y $\partial Q \in C^2$. Demuéstrese que si $\Delta u \in L_2(Q)$, entonces $u \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$.

Indiquemos que de los resultados del problema 3 se deduce que la solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson $\Delta u = f$, $u|_{\partial Q} = 0$, en la que el segundo miembro f pertenece a $L_2(Q)$, es una solución generalizada e, incluso, solución en casi todo punto. Por consiguiente, las funciones propias clásicas del primer problema de contorno para el operador de Laplace son funciones propias generalizadas.

4. Sea $\partial Q \in C^2$. En el conjunto de todas las funciones $u(x)$ de $C^2(Q) \cap \dot{C}(\overline{Q})$, para las cuales $\Delta u(x) \in L_2(Q)$, se ha introducido el producto escalar $\int_Q \Delta u \times \Delta \overline{v} dx$. Hállese el complemento de este conjunto según la norma engendrada por dicho producto escalar.

5. Supongamos que el contorno ∂Q del dominio Q pertenece a C^k. Demuéstrense las siguientes afirmaciones.

a) En el espacio de Hilbert $H^k_{\mathscr{D}}(Q)$ se pueden introducir productos escalares equivalentes a un producto ordinario

$$(f, g)'_{H^k_{\mathscr{D}}(Q)} = \begin{cases} (\Delta^{k/2} f, \ \Delta^{k/2} g)_{L_2(Q)} & \text{para} \quad k \text{ par}, \\ (\Delta^{(k-1)/2} f; \ \Delta^{(k-1)/2} g)_{H^1(Q)} & \text{para} \quad k \text{ impar} \end{cases}$$

y

$$(f, g)''_{H^k_{\mathscr{D}}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \bar{g}_s |\lambda_s|^k,$$

donde $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}$, mientras que u_s y λ_s son la s-ésima función propia y el valor propio que le corresponde, del problema de Dirichlet para el operador de Laplace en Q.

b) En el espacio de Hilbert $H^k_{\mathscr{N}}(Q)$ se pueden introducir productos escalares equivalentes a un producto ordinario

$$(f, g)'_{H^k_{\mathscr{N}}(Q)} = \begin{cases} (\Delta^{k/2} f, \Delta^{k/2} g)_{L_2(Q)} + (f, g)_{L_2(Q)} & \text{para } k \text{ pares} \\ (\Delta^{(k-1)/2} f, \Delta^{(k-1)/2} g)_{H^1(Q)} + (f, g)_{L_2(Q)} & \text{para } k \text{ impares} \end{cases}$$

$$(f, g)''_{H^k_{\mathscr{N}}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \bar{g}_s (|\lambda_s|^k + 1),$$

donde $f_s = (f, u_s)_{L_2(Q)}$, mientras que u_s y λ_s son una función propia y el valor propio que le corresponde, del problema de Neumann para el operador de Laplace en Q.

6. Supongamos que $u(x) \in C(\overline{Q})$ y sea que para cualquier punto $x \in Q$ existe un número $r = r(x) > 0$ tal que la bola $S_r(x) = \{|\xi - x| < r\} \subset Q$, y $u(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial S_r(x)} u(\xi)\, dS_\xi$. Muéstrese que la función $u(x)$ es armónica en Q.

7. Supongamos que la función $u(x) \in C^1(Q)$ y sea que para cualquier esfera S, ubicada en Q, $\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$. Muéstrese que la función $u(x)$ es armónica en Q.

8. Muéstrese que el primer valor propio del primer problema de contorno para el operador de Laplace en el dominio Q, $\partial Q \in C^2$, tiene multiplicidad 1 y la función propia que le corresponde no se anula en Q.

9. Muéstrese que la función $u(x)$ que pertenece a $C^2(Q)$ y satisface en el dominio Q la ecuación de Helmholtz $\Delta u + \lambda u = 0$, donde λ es una constante, es analítica en Q.

Señalemos que de los resultados del problema 9 se deduce que las funciones propias de cualquier problema de contorno para el operador de Laplace en Q son analíticas en Q.

10. Sean $\lambda_k(Q_1)$ y $\lambda_k(Q_2)$ los k-ésimos valores propios del primer problema de contorno para el operador de Laplace en los dominios Q_1 y Q_2, $Q_1 \Subset Q_2$. Demuéstrese que $\lambda_k(Q_1) < \lambda_k(Q_2)$ para todo $k = 1, 2, \ldots$

11. Designemos con $\widetilde{L}_2(\partial Q)$ (∂Q es el contorno de un dominio n-dimensional Q) un subespacio del espacio $L_2(\partial Q)$ compuesto de todas las funciones ortogonales (en el producto escalar de $L_2(\partial Q)$) a las constantes. Para cualquier función $\psi(x) \in \widetilde{L}_2(\partial Q)$ existe una solución generalizada única $u(x)$ del problema de Neumann para la ecuación de Laplace en Q con función límite ψ, cuya traza en $\partial Q u|_{\partial Q} = \varphi \in \widetilde{L}_2(\partial Q)$. De este modo, en $\widetilde{L}_2(\partial Q)$ está dado el operador A que pone a cada función $\psi \in \widetilde{L}_2(\partial Q)$ en correspondencia una función $\varphi \in \widetilde{L}_2(\partial Q)$: $A\psi = \varphi$.

Demuéstrense las siguientes afirmaciones.

a) Los valores propios λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, del operador A son positivos; las funciones propias e_k, $Ae_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \ldots$, forman una base ortonormal del espacio $\tilde{L}_2(\partial Q)$.

b) Existe la solución generalizada $u_k(x)$ del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en Q con una función límite $\sqrt{\lambda_k}\, e_k$, $k = 1, 2, \ldots$ El sistema $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, forma una base ortonormal en el espacio con un producto escalar $\int\limits_Q \nabla u, \nabla \bar{v}\, dx$, compuesto de todas las funciones, armónicas en Q, de $H^1(Q)$, cuyas trazas en ∂Q pertenecen a $\tilde{L}_2(\partial Q)$.

c) Para toda función $\psi \in \tilde{L}_2(\partial Q)$, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k \sqrt{\lambda_k} u_k(x)$, donde $\psi_k = (\psi, e_k)_{L_2(\partial Q)}$ converge en $H^1(Q)$ y representa en sí una solución generalizada del problema de Neumann para la ecuación de Laplace en Q con una función límite ψ.

d) Sea la función $\varphi \in L_2(\partial Q)$. Para que exista una solución generalizada $u(x)$ del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en Q con la función límite φ, es necesario y suficiente que converja la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi_k|^2}{\lambda_k}$, donde $\varphi_k = (\varphi, e_k)_{L_2(\partial Q)}$. En este caso $u(x) = \frac{1}{|\partial Q|} \int\limits_{\partial Q} \varphi\, dS + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k u_k(x)$.

e) Hállense los valores propios y las funciones propias del operador A cuando el dominio Q es un círculo $\{|x| < 1\}$ (caso bidimensional), y muéstrese que la condición d) del problema en cuestión coincide en este caso con la condición del teorema 13, p. 8, § 1.

12. Para que una función $f(\varphi)$ que está dada en el contorno $\{r = 1\}$ del círculo unitario $\{r < 1\}$ del plano $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, y pertenece a $L_2(0, 2\pi)$, sea valor límite de cierta función de $H^1(r < 1)$, es necesario y suficiente que converja la integral

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{t^2} \int\limits_0^{2\pi} (f(\varphi + t) - f(\varphi))^2\, d\varphi.$$

Una función $u(x)$ de $C^4(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ que satisface la ecuación

$$\Delta^2 u = f, \quad x \in Q, \tag{1}$$

y las condiciones límite

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0, \tag{2}$$

se llama solución clásica del problema de Dirichlet para la ecuación $\Delta^2 u = f$ en el dominio Q. Una función $u(x)$ de $C^4(Q) \cap C^2(\overline{Q})$ que satisface la ecuación (1) y las condiciones límite

$$u|_{\partial Q} = 0, \quad \Delta u|_{\partial Q} = 0 \tag{3}$$

se llama solución clásica del problema de Riquier para la ecuación $\Delta^2 u = f$ en el dominio Q.

Sea una función $f \in L_2(Q)$. Una función u que pertenece a $\overset{\circ}{H}{}^2(Q)$ y satisface la identidad integral

$$\int_Q \Delta u\, \Delta \bar{v}\, dx = \int_Q f\bar{v}\, dx \tag{4}$$

para toda $v \in \overset{\circ}{H}{}^2(Q)$, la llamaremos solución generalizada del problema de Dirichlet (1), (2). Una función u que pertenece a $H^2_{\mathscr{D}}(Q)$ y satisface la identidad integral (4) para toda $v \in H^2_{\mathscr{D}}(Q)$, la llamaremos solución generalizada de Riquier (1), (3).

13. Sea $\partial Q \in C^2$. Demuéstrense las siguientes afirmaciones.

a) Las soluciones clásicas, pertenecientes a $C^4(\overline{Q})$, $u(x)$ de los problemas (1), (2) y (1), (3), son soluciones generalizadas de los mismos.

b) Las soluciones generalizadas de los problemas (1), (2) y (1), (3) existen para toda $f \in L_2(Q)$ y son únicas.

Sea Q una bola de radio R: $Q = \{|x| < R\}$. Designemos por S_1 una semiesfera $\{|x| = R\} \cap \{x_1 > 0\}$, y por S_2, una semiesfera $\{|x| = R\} \cap \{x_1 \leqslant 0\}$. La función $u(x)$ que pertenece al espacio $C^2(Q) \cap C^1(Q \cup S_1) \cap C(\overline{Q})$ y satisface la ecuación de Poisson

$$\Delta u = f, \quad x \in Q, \tag{5}$$

y también la condición límite

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_1} = 0, \quad u|_{S_2} = 0, \tag{6}$$

se llama solución clásica del problema (5), (6).

Designemos con $\widetilde{H}^1(Q)$ un subespacio del espacio $H^1(Q)$ compuesto de todas las funciones $u \in H^1(Q)$ cuya traza en S_2 es nula. Sea $f \in L_2(Q)$. Se denomina solución generalizada del problema (5), (6) la función $u \in \widetilde{H}^1(Q)$ que satisface la identidad integral

$$\int_Q \nabla u \nabla \bar{v}\, dx = -\int_Q f\bar{v}\, dx$$

para toda $v \in \widetilde{H}^1(Q)$.

14. Demuéstrese que para toda $f \in L_2(Q)$ la solución generalizada del problema (5), (6) existe y es única.

Sea Q un dominio bidimensional acotado con un contorno $\partial Q \in C^3$, y sea $l(x)$, $|l(x)| = 1$, un vector (dado en ∂Q, dos veces continuamente diferenciable) que con el vector de la normal (exterior) a ∂Q forma de ángulo $\alpha(x)$, $|\alpha(x)| < \pi/2$ $(\alpha(x) = (\widehat{n, l}))$. La función $u(x)$ que pertenece a $C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ y satisface la ecuación

$$\Delta u - u = f, \quad x \in Q, \tag{7}$$

y, además, la condición límite

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\partial Q} = 0 \tag{8}$$

se llama solución clásica el problema con derivada inclinada (7), (8).

Designemos con A (x) una función, perteneciente a $C^2(\overline{Q})$, cuyo valor en el contorno ∂Q es $\operatorname{tg}\alpha(x)$. Sea $f \in L_2(Q)$. Se llama solución generalizada del problema (7), (8) una función $u \in H^1(Q)$ que satisface la identidad integral

$$\int_Q (\nabla u \nabla \bar{v} + u\bar{v})\,dx + \int_Q A\,(u_{x_2}\bar{v}_{x_1} - u_{x_1}\bar{v}_{x_2})\,dx + \\ + \int_Q (A_{x_1}u_{x_2} - A_{x_2}u_{x_1})\,\bar{v}\,dx = -\int_Q f\bar{v}\,dx$$

cualquiera que sea $v \in H^1(Q)$.

15. Demuéstrense las siguientes afirmaciones.

a) La solución clásica del problema (7), (8) es una solución generalizada.

b) Si $\alpha(x) \equiv \text{const}$, para toda $f \in L_2(Q)$ existe la única solución generalizada del problema (7), (8); esta solución no depende de cómo se prolonga $(A(x))$ en Q la función $\operatorname{tg}\alpha(x)$.

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO IV

Agmon S., Douglis A. a.o.; Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations satisfying General Boundary Conditions New-York, 1959.

Bers. L. a.o.; Partial Differential Equations New-York, 1964.

A. V. Bitsadze, Problemas de contorno para las ecuaciones elípticas de segundo orden, «Naúka», 1966 (en ruso).

I. N. Vékua, Nuevos métodos para la resolución de ecuaciones elípticas, Gostejizdat, 1948 (en ruso).

I. N. Vékua, Sobre las funciones meta-armónicas, Edición del Instituto matemático de Tbilisi, XII, 1943 (en ruso).

V. S. Vladímirov, Ecuaciones de la física matemática, «Naúka», 1971 (en ruso).

V. A. Iljin, Sobre la convergencia de los desarrollos según funciones propias del operador de Laplace, YMH 13:1 (1958), 87—180 (en ruso).

M. V. Kéldysh, Sobre la complitud del sistema de funciones propias de algunos operadores lineales no autoconjugados, YMH 26: 4 (1971), 15—41, (en ruso).

M. V. Kéldysh, Sobre la resolución y estabilidad del problema de Dirichlet, YMH, 8 (1941), 171—292 (en ruso).

N. M. Krilov, N. N. Bogoliúbov, Application de la méthode de l'algorithme variationel à la solution approchée des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique. Edición de la Academia de Ciencias de la URSS, ОФМН (1930), 43—71 y 105—114.

R. Curant, D. Hilbert, Métodos de la física matemática, vols I, II, Gostejizdat, 1951 (en ruso).

M. A. Lavréntjev, Método variacional en los problemas de contorno para los sistemas de ecuaciones del tipo elíptico, Ediciones de la Academia de Ciencia de la URSS, 1962 (en ruso).

M. A. Lavréntjev, L. A. Lustérnik, Curso de cálculo variacional, «Gostejizdat», 1950 (en ruso).

M. M. Lavréntjev, Sobre el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, Ediciones de la Academia de Ciencias, serie matemática 20 (1956), 819—842, (en ruso).

O. A. Ladyiénskaya, Problemas de contorno de la física matemática, «Naúka», 1973, (en ruso).

O. A. Ladyjénskaya, N. N. Uráltseva, Ecuaciones lineales del tipo elíptico, «Naúka», 1964 (en ruso).

Miranda C., Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico; Berlin, 1955.

I. G. Petróvski, Conferencias sobre las ecuaciones en derivadas parciales, Fismatgiz 1961 (en ruso).

V. A. Steklov, Sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de una ecuación diferencial lineal, Ediciones de la Universidad de Járcov, 1956 (en ruso).

S. L. Sóbolev, Ecuaciones de la física matemática, Fismatgiz, 1954 (en ruso.

S. L. Sóbolev, Aplicaciones del análisis funcional en la física matemática, Ediciones de la Universidad estatal de Leningrado, 1950 (en ruso).

A. Tijonov, A. Samarsky, Ecuaciones de la física matemática, Editorial Mir.