En este capítulo estudiaremos el problema de Cauchy y los problemas mixtos para una ecuación hiperbólica del tipo

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\,\nabla u(x, t)) + a(x)\,u(x, t) = f(x, t).$$

Aquí, $(x, t) = x_1, \ldots, x_n, t)$ es un punto del espacio $(n+1)$-dimensional R_{n+1}, $x \in R_n$, $t \in R_1$, $\nabla v(x, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$ y $\operatorname{div}(w_1(x, t), \ldots, w_n(x, t)) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}$; por $\Delta v(x, t)$ vamos a entender $\operatorname{div} \nabla v(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$. Convengamos en considerar los datos de los problemas como funciones de valores reales y examinemos sólo aquellas soluciones de los problemas citados que posean valores reales. Con este motivo, por H^k y C^k, $k = 0, 1, \ldots$, entenderemos, en lo sucesivo, espacios reales correspondientes.

§ 1. Propiedades de las soluciones de la ecuación de onda. Problema de Cauchy para la ecuación de onda

1. Propiedades de las soluciones de la ecuación de onda. Examinemos una ecuación de onda

$$\Box u(x, t) \equiv u_{tt} - \Delta u \equiv u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = f(x, t) \tag{1}$$

la cual es la ecuación hiperbólica de segundo orden más sencilla.

Hallemos, ante todo, algunas soluciones especiales de la ecuación de onda homogénea ($\Box\, u = 0$), que dependen sólo de $t/|x|$. Una función $v(x, t) = w(t/|x|)$, que para $|x| \neq 0$ es la solución de la ecuación de onda homogénea, satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$(z^2 - 1)\frac{d^2 w}{dz^2} + (3 - n)\,z\,\frac{dw}{dz} = 0.$$

La solución general de esta ecuación en cada uno de los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +\infty)$ se prefija por la fórmula

$$c_1 \int |z^2 - 1|^{\frac{n-3}{2}}\, dz + c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. De aquí, en particular, obtenemos que para $0 < |x| < -t$, $(z = t/\,|x| < -1)$ la función $v(x, t)$ adquiere la forma

$$v(x, t) = c_1 \ln \left| \frac{t-|x|}{t+|x|} \right| + c_2 \qquad \text{cuando } n = 1,$$

$$v(x, t) = c_1 \ln \left| \frac{|t + \sqrt{t^2 - |x|^2}|}{|x|} \right| + c_2 \qquad \text{cuando } n = 2,$$

$$v(x, t) = c_1 \frac{t}{|x|} + c_2 \qquad \text{cuando } n = 3,$$

etc.

Designemos por K_{x', t', t^0} un cono $\{ |x - x'| < t' - t,\ t^0 < t < t' \}$ de «altura» $t' - t^0$ y vértice en el punto (x', t'); mediante

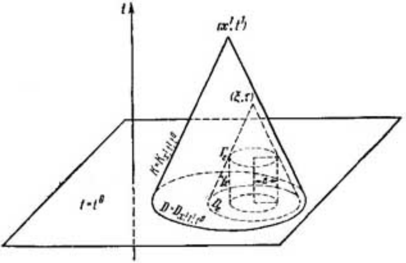

Fig. 2

Γ_{x', t', t^0}, la superficie lateral del cono $\{ |x - x'| = t' - t,\ t^0 \leqslant t \leqslant t' \}$, la cual es la característica (véase § 2, cap. I) de la ecuación de onda; mediante D_{x', t', t^0}, una base del cono $\{ |x - x'| < t' - t^0,\ t = t^0 \}$; mediante S_{x', t', t^0}, el contorno de la base, es decir, la esfera $\{ |x - x'| = t' - t^0;\ t = t^0 \}$.

Sean: (x^1, t^1) un punto de R_{n+1}, K, el cono

$$K_{x^1, t^1, t^0},\ t^0 < t^1, \text{ y } D = D_{x^1, t^1, t^0},$$

la base de este cono (véase fig. 2). Mostremos que si una función $u(x, t)$ es suficientemente suave en $K \cup D$, su valor en un punto arbitrario (x, t) del cono K se determina en el cono $\overline{K}_{x, t, t^0}$, en términos de $\square u$, y en la base de este último $\overline{D}_{x, t, t^0}$, en términos de u y u_t.

Examinemos primero el caso de tres variables espaciales, $n = 3$. Admitamos que $u(x, t) \in C^2(K) \cap C^1(K \cup D)$ y $\Box u \in C(K \cup D)$. Sea (ξ, τ) un punto arbitrario de K, y sea ε un número arbitrario positivo menor que $\tau - t^0$, $0 < \varepsilon < \tau - t^0$.

Designemos con K_ε un dominio $\{\varepsilon < |x - \xi| < \tau - t,\ t^0 < t < \tau - \varepsilon\}$ dispuesto en K. Dividamos el contorno de K_ε en tres partes: $\Gamma_\varepsilon = \{|x - \xi| = \tau - t,\ t^0 \leqslant t \leqslant \tau - \varepsilon\}$, $D_\varepsilon = \{\varepsilon < |x - \xi| < \tau - t^0,\ t = t^0\}$, $\gamma_\varepsilon = \{|x - \xi| = \varepsilon,\ t^0 \leqslant t(\tau - \varepsilon)\}$.

Elijamos una solución especial de la ecuación de onda homogénea que depende sólo de $\frac{t-\tau}{|x-\xi|}$

$$v(x-\xi, t-\tau) = \frac{t-\tau}{|x-\xi|} + 1. \tag{2}$$

Ya que las funciones $u(x, t)$ y $v(x - \xi, t - \tau)$ pertenecen a $C^2(K_\varepsilon)$, tendremos en K_ε

$$v \Box u - u \Box v = -\sum_{i=1}^{3} (u_{x_i} v - u v_{x_i})_{x_i} + (u_t v - u v_t)_t.$$

Integrando esta igualdad en K_ε y teniendo en cuenta que $\Box v = 0$ en K_ε, en virtud de la fórmula de Ostrogradski obtendremos

$$\int_{K_\varepsilon} v \Box u \, dx\, dt = \int_{\Gamma_\varepsilon \cup D \cup \gamma_\varepsilon} \left[-\sum_{i=1}^{3} (u_{x_i} v - u v_{x_i}) n_i + (u_t v + u v_t) n_4 \right] dS = I_{\Gamma_\varepsilon} + I_{D_\varepsilon} + I_{\gamma_\varepsilon}, \tag{3}$$

donde $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ es vector unitario de la normal exterior a ∂K_ε y I_{Γ_ε}, I_{D_ε}, I_{γ_ε} son las integrales extendidas a Γ_ε, D_ε, γ_ε.

Examinemos la integral extendida a Γ_ε. De (2) se desprende que $v|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$. Además, puesto que

$$\nabla v = (t-\tau) \frac{\xi - x}{|\xi - x|^3}, \qquad v_t = \frac{1}{|x-\xi|}, \tag{4}$$

y la normal a Γ_ε $n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x_1 - \xi_1}{|x-\xi|}, \frac{x_2 - \xi_2}{|x-\xi|}, \frac{x_3 - \xi_3}{|x-\xi|}, 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x-\xi}{\tau - t}, 1 \right)$, entonces $\sum_{i=1}^{3} (v_{x_i} n_i) - v_t n_4 \Big|_{\Gamma_\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x-\xi, x-\xi)}{|x-\xi|^3} - \frac{1}{|x-\xi|} = 0$.

Por consiguiente,

$$I_{\Gamma_\varepsilon} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[u \left(\sum_{i=1}^{3} v_{x_i} n_i - v_t n_4 \right) + v \left(u_t n_4 - \sum_{i=1}^{3} u_{x_i} n_i \right) \right] dS = 0. \tag{5}$$

Como en D_ε la normal $n\,(0,\ 0,\ 0,\ -1)$, entonces, en vista de (2) y (4)

$$I_{D_\varepsilon}=\int\limits_{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t^0}\frac{u\,(x,\,t^0)}{|x-\xi|}\,dx+\int\limits_{\varepsilon<|x-\xi|<\tau-t^0}\left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right)u_t\,(x,\,t^0)\,dx.$$

Puesto que las funciones $u\,(x,\,t^0)$ y $u_t\,(x,\,t^0)$ son continuas ($u\in C^1\,(K\cup\bar{D})$), existe un límite de la integral I_{D_ε} para $\varepsilon\to 0$, y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{D_\varepsilon}=\int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0}\frac{u\,(x,\,t^0)}{|x-\xi|}\,dx+$$
$$+\int\limits_{|x-\xi|<\tau-t^0}\left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right)u_t\,(x,\,t^0)\,dx. \qquad (6)$$

En la superficie γ_ε la normal $n=\left(\frac{-x+\xi}{|x-\xi|},\ 0\right)=\left(\frac{\xi-x}{\varepsilon},\ 0\right)$. Por lo tanto, teniendo en cuenta (4), obtenemos

$$I_{\gamma_\varepsilon}=-\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,v\,dS_x+\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon}dt\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial n}\,u\,dS_x=$$
$$=-\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon}\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}+1\right)dt\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS_x+\int\limits_{t^0}^{\tau-\varepsilon}\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\,dt\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}u\,dS_x.$$

Puesto que para $|x-\xi|=\varepsilon$, $t^0\leqslant t\leqslant\tau-\varepsilon$, tienen lugar las desigualdades $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\leqslant M$ y $|u\,(x,\,t)-u\,(\xi,\,t)|\leqslant M\varepsilon$, donde M es una costante ($M=\max\limits_{\substack{|x-\xi|\leqslant\tau-t\\ t^0\leqslant t\leqslant\tau}}|\nabla u|$), entonces

$$\left|\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS_x\right|\leqslant 4\pi\varepsilon^2 M$$

y

$$\left|\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}u\,(x,\,t)\,dS_x-\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}u\,(\xi,\,t)\,dS_x\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon}|u\,(x,\,t)-u\,(\xi,\,t)|\,dS_x\leqslant 4\pi\varepsilon^3 M.$$

Por ello, existe el límite para la integral I_{γ_ε} para $\varepsilon\to 0$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\gamma_\varepsilon}=4\pi\int\limits_{t^0}^{\tau}(t-\tau)\,u\,(\xi,\,t)\,dt. \qquad (7)$$

Pasando en (3) al límite para $\varepsilon \to 0$, en vista de (5), (6) y (7), resulta que para cualquier punto (ξ, τ) de K se tiene

$$4\pi \int_{t^0}^{\tau} (t-\tau)\, u(\xi, t)\, dt =$$

$$= -\int_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{u(x, t^0)}{|x-\xi|}\, dx - \int_{|x-\xi|<\tau-t^0} \left(\frac{\tau-t^0}{|x-\xi|}-1\right) u_t(x, t^0)\, dx +$$

$$+\int_{t^0}^{\tau} dt \int_{|x-\xi|<\tau-t} \left(\frac{t-\tau}{|x-\xi|}+1\right) \Box u(x, t)\, dx.$$

Derivemos esta igualdad respecto a τ:

$$\int_{t^0}^{\tau} u(\xi, t)\, dt = \frac{1}{4\pi(\tau-t^0)} \int_{|x-\xi|=\tau-t^0} u(x, t^0)\, dS_x +$$

$$+\frac{1}{4\pi} \int_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{u_t(x, t^0)}{|x-\xi|}\, dx + \frac{1}{4\pi} \int_{t^0}^{\tau} dt \int_{|x-\xi|<\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\, dx,$$

de donde

$$u(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{4\pi(\tau-t^0)} \int_{|x-\xi|=\tau-t^0} u(x, t^0)\, dS_x\right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi(\tau-t^0)} \int_{|x-\xi|=\tau-t^0} u_t(x, t^0)\, dS_x +$$

$$+\frac{1}{4\pi} \int_{t^0}^{\tau} dt \int_{|x-\xi|=\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\, dS_x.$$

Ya que

$$\int_{t^0}^{\tau} dt \int_{|x-\xi|=\tau-t} \frac{\Box u(x, t)}{|x-\xi|}\, dS_x = \int_{0}^{\tau-t^0} d\lambda \int_{|x-\xi|=\lambda} \frac{\Box u(x, \tau-\lambda)}{|x-\xi|}\, dS_x =$$

$$= \int_{|x-\xi|<\tau-t^0} \frac{\Box u(x, \tau-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\, dx,$$

para cualquier punto (x, t) del cono $K_{x^1,\ t^1,\ t^0}$ tiene lugar la siguiente *fórmula de Kirchhoff*:

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}u(\xi,t^0)\,dS_\xi\right)+$$
$$+\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}u_t(\xi,t^0)\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{\Box u(\xi,t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\,d\xi. \tag{8}$$

Puesto que

$$\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}u(\xi,t^0)\,dS_\xi=\frac{t-t^0}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}u(x+\eta(t-t^0),\ t^0)\,dS_\eta,$$

tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}u(\xi,t^0)\,dS_\xi\right)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}u(x+\eta(t-t^0),\ t^0)\,dS_\eta+$$
$$+\frac{t-t^0}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1}(\nabla u(x+\eta(t-t^0),\ t^0),\ \eta)\,dS_\eta=$$
$$=\frac{1}{4\pi(t-t^0)^2}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}[u(\xi,t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi,t^0)]\,dS_\xi.$$

Por ello, la fórmula de Kirchhoff se puede escribir en la forma

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi(t-t^0)^2}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}[u(\xi,t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi,t^0)]\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|=t-t^0}u_t(\xi,t^0)\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{\Box u(\xi,t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\,d\xi. \tag{9}$$

Las fórmulas (8) y (9) muestran que el valor de la función u en el punto arbitrario (x, t) de K se expresa en $\overline{K}_{x,\ t,\ t^0}$ en términos de $\Box u$, y en $\overline{D}_{x,\ t,\ t^0}$, en términos de u y u_t. Indiquemos que el valor de la función u en el punto $(x, t) \in K$ se determina (para $n = 3$) por los valores de la función $\Box u$ no por todo el cono $\overline{K}_{x,\ t,\ t^0}$ sino sólo en su superficie lateral $\Gamma_{x,\,t,\,t^0}$, y por los valores de las funciones u, u_t, ∇u no por toda la base $\overline{D}_{x,\,t,\,t^0}$, sino sólo en la frontera de ésta, es decir, en la esfera $S_{x,\,t,\,t^0}$. En particular, si para un punto $(x, t) \in \in K$ es que $\square u = 0$ en $\Gamma_{x,\,t,\,t^0}$ y $u = u_t = |\nabla u| = 0$ en $S_{x,\,t,\,t^0}$, entonces en este punto $u(x, t) = 0$.

De lo demostrado se deduce inmediatamente la validez (para $n = 3$) del siguiente teorema en el cual se afirma que la solución u de la ecuación (1) se determina unívocamente en el cono $K_{x^1,\,t^1,\,t^0} = K$ por los valores de u y u_t en la base $D_{x^1,\,t^1,\,t^0} = D$ de este cono.

TEOREMA 1. *Supongamos que las funciones* $u_1(x, t)$ *y* $u_2(x, t)$ *pertenecen a* $C^2(K) \cap C^1(K \cup D)$, $\square u_1 = \square u_2$ *en* K *y* $u_1(x, t^0)|_D = u_2(x, t^0)|_D$, $\left.\frac{\partial u_1(x, t^0)}{\partial t}\right|_D = \left.\frac{\partial u_2(x, t^0)}{\partial t}\right|_D$. *Entonces*, $u_1 \equiv u_2$ *en* K.

Efectivamente, la función $u = u_1 - u_2$ pertenece a $C^2(K) \cap C^1(K \cup D)$, $\square u = 0$ en K y para $x \in D$ $u(x, t^0) = u_t(x, t^0) = 0$. De (9) se desprende que $u(x, t) \equiv 0$ en K, es decir, $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$ en K. El teorema está demostrado.

Una representación correspondiente, así como también la demostración del teorema 1 en el caso de un número arbitrario de variables espaciales, puede ser obtenida mediante el mismo procedimiento. Si la función $u(x, t) \in C^2(K) \cap C^1(K \cup D)$, la función $\square u$ y todas sus derivadas respecto a las variables espaciales hasta el orden $m = \max\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1, 0\right)$ son continuas en $K \cup D$, $u(x, t^0) \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]}(D)$ y $u_t(x, t^0) \in C^m(D)$, entonces el valor de $u(x, t)$ en el punto arbitrario $(x, t) \in K$ se expresa en términos de la función $\square u$ (y de sus derivadas respecto a las variables espaciales hasta el orden m) en $\overline{K}_{x,\,t,\,t^0}$ y en términos de las funciones u y u_t (y de sus derivadas hasta el orden $\left[\frac{n}{2}\right]$ y m, respectivamente) en $\overline{D}_{x,\,t,\,t^0}$. Por ejemplo, para $n > 3$ la representación se obtiene del mismo modo que para el caso $n = 3$; con ello, a título de la solución especial de la ecuación de onda homogénea $v(x - \xi, t - \tau)$ para $\frac{t-\tau}{|x-\xi|} < -1$ se debe tomar la función $\int\limits_{-1}^{z} (\zeta^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}}\, d\zeta$, $z = \frac{t-\tau}{|x-\xi|}$.

Señalemos que en el caso de n pares, $n \geqslant 2$, el valor de la función u en el punto (x, t) se determina por los valores de la función $\square u$ (y de sus derivadas respecto a las variables espaciales) en todo el cono $K_{x,\,t,\,t^0}$, y por los valores de funciones u y u_t (y de sus derivadas respecto a las variables espaciales) en toda la base $D_{x,\,t,\,t^0}$. Si en cambio, el número de variables espaciales es impar, $n > 3$, como también $n = 3$, el valor de la función u en el punto (x, t) se determina por valores de la función $\square u$ y por los de sus derivadas respecto a las variables espaciales sólo en la superficie lateral $\Gamma_{x,\,t,\,t^0}$ del cono, mientras que los valores de las funciones u, u_t y de sus derivadas respecto a las variables espaciales determinan el valor de u sólo en el contorno $S_{x,\,t,\,t^0}$ de la base.

En el caso de una o dos variables espaciales las representaciones correspondientes y, junto con éstas, las demostraciones del teorema 1 se obtienen de la manera más fácil directamente de la fórmula (9) (ó (8)).

Supongamos que la función $u(x, t)$, $x=(x_1, x_2)$, está dada en el cono $K=K_{x^1,\,t^1,\,t^0}$, $x^1=(x_1^1, x_2^1)$ y pertenece a $C^2(K)\cap C^1(K\cup D)$, $D=D_{x^1,\,t^1,\,t_0}$ y, además, $\Box u=u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}\in C(K\cup D)$. Podemos considerar $u(x, t)$ como una función de cuatro variables x_1, x_2, x_3, t, que no depende de x_3, dada en el cono de cuatro dimensiones $K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0}$ donde x_3^1 es arbitraria; con ello $u(x_1, x_2, t)\in \in C^2(K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0})\cap C^1(K_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0}\cup D_{x_1^1,\,x_2^1,\,x_3^1,\,t^1,\,t^0})$ y $u_{tt}-u_{x_1x_1}-u_{x_2x_2}-u_{x_3x_3}\in C(K_{x_1^1,\,\dots,\,t^0}\cup D_{x_1^1,\,\dots,\,t^0})$. En vista de la fórmula (9), para todos los puntos pertenecientes a K, tenemos

$$u(x_1, x_2, t)=\frac{1}{4\pi(t-t^0)^2}\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=(t-t^0)^2}[u(\xi_1, \xi_2, t^0)+$$
$$+(\xi_1-x_1)u_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2, t^0)+(\xi_2-x_2)u_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2, t^0)]\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi(t-t^0)}\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=(t-t^0)^2}u_t(\xi_1, \xi_2, t^0)\,dS_\xi+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{t-t_0}d\rho\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=\rho^2}\frac{\Box u(\xi_1, \xi_2, t-\rho)}{\rho}\,dS_\xi.$$

Ya que

$$\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=\rho^2}g(\xi_1, \xi_2)\,dS_\xi=$$
$$=2\rho\int\limits_{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2<\rho^2}\frac{g(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{\sqrt{\rho^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}, \tag{10}$$

resulta que

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi(t-t^0)}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u(\xi, t^0)+(\xi-x)\cdot\nabla u(\xi, t^0)}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t-t^0}\frac{u_t(\xi, t^0)\,d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2-|x-\xi|^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t-t^0}d\rho\int\limits_{|x-\xi|<\rho}\frac{\Box u(\xi, t-\rho)}{\sqrt{\rho^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi, \tag{11}$$

donde $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $x = (x_1, x_2)$ y (x, t) es un punto cualquiera del cono K_{x^1, t^1, t^0}. Esta fórmula nos da una representación buscada de la función para el caso $n = 2$.

Indiquemos que para todo punto (x, t) del cono K

$$\frac{1}{2\pi(t-t^0)} \int\limits_{|x-\xi|<t-t_0} \frac{u(\xi, t^0) + (\xi - x)\cdot\nabla u(\xi, t^0)}{\sqrt{(t-t^0)^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t-t^0} \frac{u(\xi, t^0)\, d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2 - |x-\xi|^2}}\right).$$

Por esta razon la igualdad (11) se puede escribir en la forma

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t-t^0} \frac{u(\xi, t^0)\, d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2 - |x-\xi|^2}}\right) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t-t^0} \frac{u_t(\xi, t^0)\, d\xi}{\sqrt{(t-t^0)^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{t-t^0} d\rho \int\limits_{|x-\xi|<\rho} \frac{\square u(\xi, t-\rho)}{\sqrt{\rho^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi. \quad (12)$$

La expresión (12) se llama *fórmula de Poisson*. Análogamente, cuando $n = 1$, la representación correspondiente se obtiene con facilidad de la fórmula (11) (ó de (12)). Si $u(x, t) \in C^2(K) \cap C^1(K \cup D)$, donde: $K = K_{x^1, t^1, t^0}$ (un triángulo $\{t - t^1 < x - x^1 < -t + t^1,\ t^0 < t < t^1\}$), $D = D_{x^1, t^1, t^0}$ (un intervalo $(x^1 + t^0 - t^1, x^1 + t^1 - t^0)$), y $\square u = u_{tt} - u_{xx} \in C(K \cup D)$, entonces los valores de la función u en un punto arbitrario $(x, t) \in K$ se expresan por la siguiente *fórmula de D'Alembert*:

$$u(x, t) = \frac{u(x - t + t^0, t^0) + u(x + t - t^0, t^0)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t+t^0}^{x-t^0+t} u_t(\xi, t^0)\, d\xi + \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \square u(\xi, \tau)\, d\xi, \quad (x, t) \in K_{x^1, t^1, t^0}. \quad (13)$$

2. Problema de Cauchy para la ecuación de onda. Designemos, para abreviar, los conjuntos de puntos $\{x \in R_n,\ t > t^0\}$, $\{x \in R_n,\ t \geqslant t^0\}$, $\{x \in R_n,\ t^0 \leqslant t \leqslant t^1\}$, $\{x \in R_n,\ t = t^0\}$ mediante $\{t > t^0\}$, $\{t \geqslant t^0\}$, $\{t^0 \leqslant t \leqslant t^1\}$, $\{t = t^0\}$, respectivamente, y los espacios $C^k(\{t > t^0\})$, $C^k(\{t \geqslant t^0\})$ mediante $C^k(t > t^0)$ y $C^k(t \geqslant t^0)$.

Una función $u(x, t)$, perteneciente a $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geqslant 0)$, se denomina *solución (clásica) del problema de Cauchy para la ecuación de onda en el semiespacio* $\{t > 0\}$, si para todo $x \in R_n$, $t > 0$, ella satisface la ecuación

$$\Box u = f, \tag{14}$$

y, cuando $t = 0$, las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u\,|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_t\,|_{t=0} &= \psi(x), \end{aligned} \tag{15}$$

donde φ, ψ y f son las funciones dadas.

En virtud del teorema 1 del punto anterior, la solución $u(x, t)$ del problema (14), (15) se define unívocamente en cualquier cono $K_{x^1, t^1, 0}$ ($x^1 \in R_n$, $t^1 > 0$), y, consecuentemente, en todo el semiespacio $\{t > 0\}$, en términos de las funciones dadas, f, φ y ψ. De este modo, tiene lugar la siguiente afirmación.

TEOREMA 2. *El problema de Cauchy* (14), (15) *no puede tener más de una solución.*

Pasemos a la cuestión de la existencia de la solución del problema de Cauchy.

Supongamos que la solución $u(x, t)$ del problema (14), (15) existe. De los resultados obtenidos en el punto anterior se deduce que si $f \in C\,(t \geqslant 0)$, entonces la solución se presenta, en el caso de tres variables espaciales ($n = 3$), por la fórmula de Kirchhoff

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t}\varphi(\xi)\,dS_\xi\right) + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t}\psi(\xi)\,dS_\xi + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t}\frac{f(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\,d\xi, \qquad x \in R_3,\ t > 0, \tag{16}$$

en el caso de dos variables espaciales ($n = 2$), por la fórmula de Poisson

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\right) + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|x-\xi|<t}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{|x-\xi|<\tau}\frac{f(\xi, t-\tau)\,d\xi}{\sqrt{\tau^2-|x-\xi|^2}}, \qquad x \in R_2,\ t > 0, \tag{17}$$

y, en el caso de una variable espacial ($n = 1$), por la fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-\tau}^{x+\tau} f(\xi, \tau)\,d\xi, \qquad x \in R_1,\ t > 0. \tag{18}$$

Con este motivo, la demostración de la existencia de la solución del problema (14), (15) se reduce a la búsqueda de condiciones bajo las cuales la función $u(x, t)$, definida por una representación correspondiente, es la solución de este problema.

Examinemos primero el caso de tres variables espaciales ($n = 3$). Es válida la siguiente afirmación.

Si $\varphi \in C^3(R_3)$, $\psi \in C^2(R_3)$ y la función f, como también todas sus derivadas respecto a x_1, x_2, x_3 hasta el segundo orden, inclusive, son continuas en $\{t \geqslant 0\}$, entonces la función u, dada por la fórmula de Kirchhoff (16), es la solución del problema de Cauchy (14), (15); con ello, para todo punto $(X, T) \in \{t > 0\}$ tiene lugar la desigualdad

$$\|u\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})} \leqslant \|\varphi\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} + T\,\||\nabla\varphi|\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} + \\ + T\,\|\psi\|_{C(\overline{D}_{X,T,0})} + \frac{T^2}{2}\|f\|_{C(\overline{K}_{X,T,0})}. \qquad (19)$$

OBSERVACION. De la fórmula (19) se deduce que si la función f es acotada en $\{0 < t < T\}$, la función ψ es acotada en R_3 y la función φ es acotada en R_3 junto con todas sus primeras derivadas, entonces la solución u del problema (14), (15) es acotada en $\{0 < t < T\}$ y

$$\sup_{\{0<t<T\}} |u| \leqslant \sup_{R_3} |\varphi| + T \sup_{R_3} |\nabla\varphi| + T \sup_{R_3} |\psi| + \frac{T^2}{2} \sup_{\{0<t<T\}} |f|$$

Examinemos, ante todo, la función

$$u_g(x, t, \tau) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} g(\xi, \tau)\, dS_\xi, \qquad x \in R_3,\ t > 0,\ \tau > 0, \qquad (20)$$

donde $g(x, \tau) \in C(\tau \geqslant 0)$. Cuando la función g no depende del parámetro τ, $g(x, \tau) = g(x)$, designaremos la función $u_g(x, t, \tau)$ mediante $u_g(x, t)$.

LEMA 1. *Si la función $g(x, \tau)$ y todas sus derivadas respecto a x_1, x_2, x_3 hasta el k-ésimo orden inclusive, $k = 0, 1 \ldots$, pertenecen a $C(\tau \geqslant 0)$, entonces la función $u_g(x, t, \tau)$ y todas sus derivadas respecto a x_1, x_2, x_3, t hasta el k-ésimo orden inclusive son continuas en el conjunto $\{x \in R_3,\ t \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0\}$. Cuando $k \geqslant 2$, la función $u_g(x, t, \tau)$, para cualquier $\tau \geqslant 0$, satisface en $\{t > 0\}$ la ecuación $\Box u_g = 0$ y las condiciones $u_g|_{t=0} = 0$,*

$$\Delta u_g|_{t=0} = 0, \quad u_{gt}|_{t=0} = g(x, \tau).$$

La primera afirmación del lema se deduce de la igualdad

$$u_g(x, t, \tau) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x + t\eta, \tau)\, dS_\eta. \qquad (21)$$

De (21) se deduce también que $u_g|_{t=0} = 0$. Puesto que para $k \geqslant 2$

$$\Delta u_g(x, t, \tau) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x + t\eta, \tau)\, dS_\eta, \tag{22}$$

entonces $\Delta u_g|_{t=0} = 0$.

Derivando (21) respecto a t, obtenemos

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x + t\eta, \tau)\, dS_\eta + \\ + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x + t\eta, \tau), \eta)\, dS_\eta, \tag{23}$$

de donde

$$u_{gt}|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x, \tau)\, dS_\eta = g(x, \tau).$$

Puesto que

$$\frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x + t\eta, \tau) \cdot \eta)\, dS_\eta = \\ = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \frac{\partial g(x + t\eta, \tau)}{\partial n_\eta} dS_\eta = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \frac{\partial g(\xi, \tau)}{\partial n} dS_\xi = \\ = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta g(\xi, \tau)\, d\xi = \frac{I(x, t, \tau)}{4\pi t},$$

donde $I(x, t, \tau) = \int\limits_{|x-\xi|<t} \Delta g(\xi, \tau)\, d\xi$, entonces (23) se puede representar en la forma

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{1}{t} u_g + \frac{I}{4\pi t},$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2} u_g + \frac{1}{t} \frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I}{\partial t} - \frac{I}{4\pi t^2} = \\ = -\frac{u_g}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u_g}{t} + \frac{I}{4\pi t}\right) + \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I}{\partial t} - \\ - \frac{I}{4\pi t^2} = \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-\xi|=t} \Delta g(\xi, \tau)\, dS_\xi = \\ = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x + t\eta, \tau)\, dS_\eta. \tag{24}$$

De (24) y (22) se infiere que $u_{gtt} = \Delta u_g$. El lema está demostrado.

Como el segundo sumando en el segundo miembro de (16) es $u_\psi(x, t)$, entonces en virtud del lema 1 ($\psi \in C^2(R_3)$), pertenece a C^2 $(t \geqslant 0)$, es la solución de la ecuación de onda homogénea y satisface las condiciones iniciales

$$u_\psi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_\psi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi.$$

El primer sumando en el segundo miembro de (16) es $\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$. Puesto que $\varphi \in C^3(R_3)$, la función $\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \in C^2(t \geqslant 0)$ es la solución de la ecuación de onda homogénea

$$\Box\left(\frac{\partial}{\partial t} u_\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial t} \Box\, u_\varphi = 0$$

y satisface las condiciones iniciales

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\right)\bigg|_{t=0} = \Delta u_\varphi|_{t=0} = 0.$$

Designemos por $F(x, t)$ el tercer sumando del segundo miembro de (16) y transformémoslo de la manera siguiente:

$$F(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-\xi|<t} \frac{f(\xi, t-|x-\xi|)}{|x-\xi|}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^t \frac{d\rho}{\rho} \int\limits_{|x-\xi|=\rho} f(\xi, t-\rho)\, dS_\xi =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int\limits_{|x-\xi|=t-\tau} f(\xi, \tau)\, dS_\xi\right) d\tau = \int\limits_0^t G(x, t, \tau)\, d\tau,$$

donde $G(x, t, \tau) = u_f(x, t-\tau, \tau)$. En vista del lema 1, la función $G(x, t, \tau)$ y todas sus derivadas respecto a x_1, x_2, x_3, t hasta el segundo orden inclusive son continuas en el conjunto $\{x \in R_3,\ t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$ y para cualquier $\tau \geqslant 0$

$$G_{tt} - \Delta G = 0 \quad \text{cuando} \quad t \geqslant \tau,$$

$$G|_{t=\tau} = 0, \quad G_t|_{t=\tau} = f(x, \tau).$$

Entonces, la función $F(x, t) = \int\limits_0^t G(x, t, \tau)\, d\tau$ es continua en $\{t \geqslant 0\}$ junto con la primera derivada respecto a t, y todas las derivadas respecto a x_1, x_2, x_3 hasta el segundo orden inclusive. Y como

$$F_t = G|_{\tau=t} + \int_0^t G_t(x, t, \tau)\, d\tau = \int_0^t G_t(x, t, \tau)\, d\tau,$$

entonces, $F \in C^2$ $(t \geqslant 0)$. Además,

$$\Delta F(x, t) = \int_0^t \Delta G(x, t, \tau)\, d\tau$$

y

$$F_{tt} = G_t|_{\tau=t} + \int_0^t G_{tt}(x, t, \tau)\, d\tau = f + \int_0^t \Delta G(x, t, \tau)\, d\tau.$$

Por consiguiente, la función $F(x, t)$ satisface la ecuación $\square F = f$ y las condiciones iniciales homogéneas $F|_{t=0} = 0$, $F_t|_{t=0} = 0$.

Se ha demostrado, pues, que la función

$$u(x, t) = \frac{\partial u_\varphi(x, t)}{\partial t} + u_\psi(x, t) + \int_0^t u_f(x, t-\tau, \tau)\, d\tau,$$

dada por la fórmula (16), es la solución del problema (14), (15).

Demostremos ahora la desigualdad (19). Sea (X, T) un punto arbitrario del semiespacio $\{t > 0\}$. En vista de (20), para todo punto (x, t) del cono $K_{X, T, 0}$ y todo $\tau > 0$

$$|u_g(x, t, \tau)| \leqslant t \max_{|x-\xi|=t} |g(\xi, \tau)| \leqslant T \max_{|x-\xi|=t} g(\xi, \tau) \tag{25}$$

Por lo tanto,

$$\|u_\psi\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})} \leqslant T \max_{(x, t) \in K_{X, T, 0}} \max_{|x-\xi|=t} |\psi(\xi)| =$$

$$= T \max_{|x-X| \leqslant T} |\psi| = T \|\psi\|_{C(\bar{D}_{X, T, 0})} \tag{26}$$

y

$$\left\| \int_0^t u_f(x, t-\tau, \tau)\, d\tau \right\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})} \leqslant \int_0^T (t-\tau) \max_{|x-\xi|=t-\tau} |f(\xi, \tau)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})} \int_0^T (T-\tau)\, d\tau = \frac{T^2}{2} \|f\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})}. \tag{27}$$

Análogamente, en virtud de (23)

$$\left\| \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right\|_{C(\bar{K}_{X, T, 0})} \leqslant \|\varphi\|_{C(\bar{D}_{X, T, 0})} + T \| |\nabla\varphi| \|_{C(\bar{D}_{X, T, 0})}. \tag{28}$$

La desigualdad (19) se deduce directamente de (26)—(28).

Señalemos que las condiciones, impuestas a las funciones φ, ψ, f, para las cuales está demostrada la existencia de la solución del problema de Cauchy, en sentido determinado no pueden ser debilitadas. El siguiente ejemplo muestra que la condición de pertenencia de la función φ al espacio $C^2(R_3)$ no es suficiente para que exista la solución del problema (14), (15).

Supongamos que la función φ pertenece a $C^2(R_3)$ y depende sólo de $|x|$, $\varphi(x) = \alpha(|x|)$. Sea que existe también la solución $u(x, t)$ del problema (14), (15) con la función citada $\varphi(x)$ y las funciones $\psi \equiv 0$ y $f \equiv 0$. Entonces, en virtud de (16)

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|x-\xi|=t} \alpha(|\xi|)\, dS_\xi\right).$$

Sea $|x| \neq 0$. Puesto que para todos los puntos ξ de la esfera $\{|x-\xi| = t\}$ tiene lugar la igualdad $|\xi^2| = |x|^2 + t^2 + 2|x|t\cos\theta$, donde θ es un ángulo entre los vectores x y $\xi - x$, entonces

$$\int\limits_{|x-\xi|=t} \alpha(|\xi|)\, dS_\xi =$$

$$= t^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \alpha\left(\sqrt{t^2+|x|^2+2|x|t\cos\theta}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$= 2\pi t^2\int_{-1}^{+1} \alpha\left(\sqrt{t^2+|x|^2+2|x|t\lambda}\right) d\lambda = \frac{2\pi t}{|x|}\int\limits_{|t-|x||}^{t+|x|} \rho\alpha(\rho)\, d\rho.$$

Por esto,

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2|x|}\int\limits_{|t-|x||}^{t+|x|} \rho\alpha(\rho)\, d\rho\right) =$$

$$= \frac{1}{2|x|}\left((t+|x|)\,\alpha(t+|x|) - (t-|x|)\,\alpha(|t-|x||)\right) =$$

$$= \frac{t}{2|x|}\left(\alpha(t+|x|) - \alpha(|t-|x||)\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha(t+|x|) + \alpha(|t-|x||)\right).$$

De aquí, en virtud de la continuidad de la solución, $u(0, t) = t\alpha'(t) + \alpha(t)$. Y como la función $u(0, t) \in C^2(t > 0)$, la función $\alpha(|x|)$ debe pertenecer a $C^3(|x| > 0)$, lo que, por supuesto, no se infiere de la pertenencia de la función φ al espacio $C^2(R_3)$.

Sea, ahora, $n = 2$. Mostremos que *si* $\varphi(x_1, x_2) \in C^3(R_2)$, $\psi(x_1, x_2) \in C^2(R_2)$ *y la función* $f(x_1, x_2, t)$ *es continua en* $\{t > 0\}$ *junto con todas las derivadas respecto a las variables* x_1 *y* x_2 *hasta el segundo orden inclusive, entonces la función* $u(x_1, x_2, t)$, *dada por la fórmula de Poisson* (17), *es la solución del problema* (14), (15). *Con ello, para todo punto* (X, T) *del semiespacio* $\{t > 0\}$ *es válida la desigualdad* (19).

De acuerdo con la fórmula (10), para cualquier x_3

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \varphi(\xi_1, \xi_2)\, dS_\xi\right) + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S_t(x_1, x_2, x_3)} \psi(\xi_1, \xi_2)\, dS_\xi + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau}\int\limits_{S_\tau(x_1, x_2, x_3)} f(\xi_1, \xi_2, t-\tau)\, dS_\xi, \qquad (17')$$

donde $S_\rho(x_1, x_2, x_3)$ es una esfera de radio ρ y con el centro en el punto (x_1, x_2, x_3): $(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 = \rho^2$. Como acabamos de demostrar, la función en el segundo miembro de la igualdad (17') es la solución del problema: $u_{tt} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = f(x_1, x_2, t)$ en $\{t > 0\}$, $u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2)$, y para ella se cumple la desigualdad (19). Y ya que la función u no depende de x_3, será, para $n = 2$, la solución del problema (14), (15).

Cuando $n = 1$, se comprueba inmediatamente que *la función $u(x, t)$, definida por la fórmula de D'Alembert* (18), *es la solución del problema* (14), (15), *si $\varphi \in C^2(R_1)$, $\psi \in C^1(R_1)$ y la función $f(x, t)$ y su primera derivada respecto a x son continuas en $\{t \geqslant 0\}$. Con ello, para todos los puntos (X, T) del semiplano $\{t > 0\}$ tiene lugar la desigualdad*

$$\|u\|_{C(\overline{K}_{X, T, 0})} \leqslant \|\varphi\|_{C(\overline{D}_{X, T, 0})} + T\|\psi\|_{C(\overline{D}_{X, T, 0})} + \frac{T^2}{2}\|f\|_{C(\overline{K}_{X, T, 0})}$$

($K_{X, T, 0}$ es un triángulo $\{t + X - T < x < T + X - t,\ 0 < t < T\}$ y $D_{X, T, 0} = \{X - T < x < X + T,\ t = 0\}$, su base).

En caso de haber más de tres variables espaciales ($n > 3$), así como para $n = 3$, se establece que si $\varphi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(R_n)$, $\psi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(R_n)$ y la función f es continua en el conjunto $(t \geqslant 0)$ junto con sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$-ésimo orden inclusive, entonces la función u, definida por la representación correspondiente, es la solución del problema (14), (15).

TEOREMA 3. *Si $\varphi(x) \in C^{m+3}(R_n)$, $\psi(x) \in C^{m+2}(R_n)$ donde $m = \max\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1,\ 0\right)$, y la función $f(x, t)$ es continua en $\{t \geqslant 0\}$ junto con sus derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el orden $m + 2$ inclusive, entonces la solución $u(x, t)$ del problema* (14), (15) *existe. Con ello, para cualquier punto (X, T)* del semiespacio $\{t > 0\}$

se efectúa la desigualdad

$$\|u\|_{C(\overline{K}_{x,T,0})} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{C^{m+1}(\overline{D}_{x,T,0})} + \|\psi\|_{C^{m}(\overline{D}_{x,T,0})} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^{\alpha} f\|_{C(\overline{K}_{x,T,0})})$$

con la constante C que sólo depende de T.

Ya hemos indicado en el punto anterior que de la fórmula de Poisson (cuando $n = 2$) y de la representación correspondiente (cuando cualquier n par es mayor que 2) se deduce que el valor de la solución del problema de Cauchy (14), (15) en el punto (x, t), $t > 0$, depende de los valores de la función f (y de los valores de las derivadas de ésta respecto a las variables espaciales, cuando $n > 2$) por todo el cono $\overline{K}_{x,t,0}$, así como también de los valores de funciones iniciales φ y ψ (y de los de sus derivadas) por toda la base $\overline{D}_{x,t,0}$ de este cono. En el caso de cualquier $n \geqslant 3$ impar (también cuando $n = 3$) el valor de la solución en el punto (x, t) se determina por los valores de la función f, y cuando $n > 3$, también por los valores de sus derivadas respecto a las variables espaciales sólo en la superficie lateral $\Gamma_{x,t,0}$ del cono $K_{x,t,0}$, y por los valores de funciones iniciales φ y ψ y de las derivadas de éstas en el contorno de la base del cono, es decir, en la esfera $S_{x,t,0}$.

Por este motivo, el cono $\overline{K}_{x,t,0}$ (en el caso de un número par de variables espaciales, $n \geqslant 2$) y la superficie cónica $\Gamma_{x,t,0}$ (en el caso de $n \geqslant 3$ impar) se suelen llamar *campo de dependencia del segundo miembro de la ecuación* de la solución del problema de Cauchy (14), (15) en el punto (x, t). Por analogía, la bola $D_{x,t,0}$ ubicada en el plano inicial (cuando $n \geqslant 2$ es par) y el contorno de la bola, es decir, la esfera $S_{x,T,0}$ (cuando $n \geqslant 3$ es impar) se suelen llamar *campo de dependencia de los datos iniciales* de la solución del problema de Cauchy en el punto (x, t).

Cuando $n = 1$, de la fórmula de D'Alembert (18) se deduce que la solución del problema de Cauchy en el punto (x, t) depende sólo de los valores de la función f en el triángulo $K_{\alpha,t,0}$, de los valores de función inicial ψ en la base de este triángulo $\overline{D}_{x,t,0}$ y de los valores de las funciones φ en el contorno de la base, es decir, en los puntos $(x + t, 0)$ y $(x - t, 0)$.

Supongamos que para cierto $R > 0$ las funciones iniciales φ y ψ son nulas, si $|x| \geqslant R$, y la función f es nula cuando $|x| + t \geqslant R$. Entonces, la solución u del problema de Cauchy es nula para todo $(x, t) \in \{|x| \geqslant R + t,\ t \geqslant 0\}$, puesto que el cono $K_{x,t,0}$ para tales (x, t) no tiene puntos comunes con el conjunto $\{|x| + t < R,\ t > 0\}$, y la base del cono $\overline{D}_{x,t,0}$ no tiene puntos comunes con la bola $\{|x| < R,\ t = 0\}$. (Esta afirmación sigue siendo válida incluso cuando f es nula sólo para $|x| \geqslant R + t$.)

En el caso de un número par de variables espaciales el conjunto $\{|x| \geqslant R + t,\ t \geqslant 0\}$ es, hablando en general, un conjunto al máximo posible en el cual $u = 0$. Por ejemplo, si, para $n = 2$, suponemos que la función ψ es positiva en el círculo $\{|x| < R\}$, y que las φ y f son nulas, de la fórmula de Poisson se desprende que $u(x, t) > 0$ para todo $(x, t) \in \{|x| < R + t,\ t > 0\}$.

Cuando el número de variables espaciales $n \geqslant 3$ es impar, la función $u(x, t)$ se anula no sólo en el conjunto $\{|x| \geqslant R + t,\ t \geqslant 0\}$ sino también en el conjunto $\{|x| \leqslant t - R,\ t \geqslant R\}$, ya que para $(x, t) \in \{|x| \leqslant t - R,\ t \geqslant R\}$ la superficie cónica $\Gamma_{x, t, 0}$ no tiene puntos comunes con el conjunto $\{|x| + t < R,\ t > 0\}$, mientras que el contorno de la base $S_{x, t, 0}$ no tiene puntos comunes con la bola $\{|x| < R,\ t = 0\}$. El conjunto $G = \{|x| \geqslant R + t,\ t \geqslant 0\} \cup \{|x| \leqslant t - R,\ t \geqslant R\}$ es, en general, un conjunto máximo en el cual $u = 0$. Por ejemplo, si, cuando $n = 3$, la función $\psi(x) > 0$ para $|x| < R$, y las funciones φ y f son nulas, de la fórmula de Kirchhoff se desprende que $u(x, t) > 0$ en el dominio $\{||x| - t| < R,\ t > 0\}$ complementario a G.

Si el término independiente $f(x, t)$ en la ecuación (14) está definido no por todo el semiespacio $\{t > 0\}$ sino solamente en la banda $\{0 < t < T\} = \Pi_T$ para cierto $T > 0$, entonces el problema de Cauchy para la ecuación (14) se considera en la banda Π_T.

Una función $u(x, t)$, perteneciente a $C^2(0 < t < T) \cap C^1(0 \leqslant t < T)$, se denomina *solución del problema de Cauchy* (14), (15) *en la banda* Π_T, si para todos los puntos $(x, t) \in \Pi_T$ ella satisface la ecuación (14), y para $t = 0$, las condiciones iniciales (15). Para el problema de Cauchy en una banda tienen lugar, por supuesto, los teoremas de existencia e unicidad, análogos a teoremas correspondientes para el problema de Cauchy en un semiespacio. El problema de Cauchy en la banda Π_T no puede tener más que una sola solución y, por ejemplo, cuando $n = 3$, para que exista la solución del problema de Cauchy en Π_T, es suficiente que $\varphi \in C^3(R_3)$, $\psi \in C^2(R_3)$, y la función f sea continua en $\{0 \leqslant t < T\}$ junto con todas sus derivadas respecto a las variables x_1, x_2, x_3 hasta el segundo orden inclusive; con ello, la solución del problema se representa en Π_T por la fórmula de Kirchhoff.

A la par con el problema de Cauchy en el semiespacio $\{t > 0\}$ se puede también examinar este problema en los subespacios $\{t > t^0\}$ o bien $\{t < t^0\}$ para t^0 cualquiera. Una función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $C^2(t > t^0) \cap C^1(t \geqslant t^0)$, se llama *solución del problema de Cauchy en el semiespacio* $\{t > t^0\}$ *para la ecuación de onda*, si en $\{t > t^0\}$ ella satisface la ecuación $\Box u = f$, y para $t = t^0$, las condiciones iniciales $u|_{t=t^0} = \varphi$, $u_t|_{t=t^0} = \psi$. De modo semejante se determina la solución del problema de Cauchy en el semiespacio $\{t < t^0\}$. El problema de Cauchy en el semiespacio $\{t > t^0\}$ se reduce al problema de Cauchy, sustituyendo t por $t - t^0$, en el semiespacio $\{t > 0\}$. Sustituyendo t por $t^0 - t$, reducimos el problema de Cauchy en el semiespacio $\{t < t^0\}$ al problema de Cauchy en el semiespacio $\{t > 0\}$. Mediante la sustitución de t por t/a (a es una constante positiva) al problema de Cauchy (14), (15) se reduce el problema de Cauchy en el semiespacio $\{t > 0\}$ para la ecuación $\frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u = f$.

Supongamos que D es un dominio n-dimensional del plano $\{t = 0\}$ y el dominio Q, ubicado en el semiespacio $\{t > 0\}$, está constituido por los puntos (x, t) que son vértices de los conos $K_{x,t,0}$, cuyas bases (las bolas $D_{x,t,0}$) pertenecen a D. Si, en particular, D es la bola $\{| x - x^0 | < R\}$, el dominio Q será el cono $K_{x^0,R,0}$; si D es el cubo $\{| x_i - x_i^0 | < a,\ i = 1, \ldots, n\}$, Q será una pirámide cuya base estará constituida por dicho cubo y con el vértice en el punto (x^0, a); si D es todo el plano $\{t = 0\}$, Q será el semiespacio $\{t > 0\}$.

Una función $u(x, t)$, perteneciente a $C^2(Q) \cap C^1(Q \cup D)$, se llama *solución del problema de Cauchy en Q para la ecuación de onda*, si ella satisface en Q la ecuación $\Box u = f$, y para $t = 0$, $x \in D$, las condiciones iniciales $u|_{t=0} = \varphi$, $u_t|_{t=0} = \psi$.

Del teorema 1 del punto antecedente se deduce inmediatamente el teorema de unicidad de la solución para el problema de Cuachy en Q: el problema de Cauchy en Q no puede tener más que una sola solución.

No es difícil ver que en el caso que consideramos es también válido el teorema de existencia, es decir, el teorema 3. Por ejemplo, para $n = 3$ la solución del problema de Cauchy en Q existe, si $\varphi \in C^3(D)$, $\psi \in C^2(D)$, y la función f es continua en $Q \cup D$ junto con las derivadas respecto a las variables espaciales hasta el segundo orden inclusive. Con ello, la solución $u(x, t)$ se define por la fórmula de Kirchhoff (16).

Señalemos que la solución del problema de Cauchy (14), (15) en el semiespacio $\{t > 0\}$ en el dominio Q coincide con la del problema de Cauchy en Q para la ecuación (14) con las funciones iniciales φ y ψ consideradas sólo en D.

§ 2. Problemas mixtos

1. Unicidad de solución. Sea D un dominio acotado del espacio n-dimensional R_n ($x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto de este espacio). En el espacio $(n+1)$-dimensional $R_{n+1} = R_n \times \{-\infty < t < +\infty\}$ examinemos un cilindro acotado $Q_T = \{x \in D,\ 0 < t < T\}$ de altura $T > 0$. Designemos con Γ_T la superficie lateral $\{x \in \partial D,\ 0 < t < T\}$ del cilindro Q_T, y con D_τ, la sección $\{x \in D,\ t = \tau\}$ de este cilindro por el plano $t = \tau$; en particular, la base superior del cilindro Q_T es $D_T = \{x \in D,\ t = T\}$ y su base inferior, $D_0 = \{x \in Q,\ t = 0\}$.

En el cilindro Q_T, para cierta $T > 0$, examinemos una ecuación hiperbólica

$$\mathscr{L}u \equiv u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)u = f(x,\ t) \tag{1}$$

donde $k(x) \in C^1(\overline{D})$, $a(x) \in C(\overline{D})$, $k(x) \geqslant k_0 = \text{const} > 0$.

La función $u(x,\ t)$, perteneciente al espacio $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, que satisface la ecuación (1) en Q_T, las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi, \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi, \tag{3}$$

en D_0, y una de las condiciones límites

$$u|_{\Gamma_T} = \chi \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

en Γ_T, donde σ es una función continua en Γ_T, se llama *solución (clásica) del primer o, respectivamente, del tercer problema mixto para la ecuación* (1).

Si es que $\sigma \equiv 0$ en Γ_T, el tercer problema mixto se denomina *segundo problema mixto.*

Ya que el caso de las condiciones límites no homogéneas se reduce fácilmente al de las condiciones límites homogéneas, en lo sucesivo vamos a considerar condiciones límites homogéneas

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{4}$$

y

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0. \tag{5}$$

Admitamos que el coeficiente $a(x)$ en la ecuación (1) es no negativo en Q_T y la función σ en la condición límite (5) depende sólo de x, $\sigma = \sigma(x)$, y es no negativa en Γ_T.

Sea la función $u(x,\ t)$ una solución de uno de los problemas (1)—(4) ó (1), (2), (3), (5), con la particularidad de que el segundo miembro $f(x,\ t)$ de la ecuación (1) pertenece a $L_2(Q_T)$. Elijamos δ, $0 < \delta < T$, arbitrario. Multipliquemos (1) por la función $v(x,\ t)$ que pertenece a $C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$ y satisface la condición

$$v|_{D_{T-\delta}} = 0, \tag{6}$$

e integremos la igualdad por el cilindro $Q_{T-\delta}$. Puesto que $u_{tt}v = (u_tv)_t - u_tv_t$, y $v \operatorname{div}(k\nabla u) = \operatorname{div}(kv\nabla u) - k\nabla u\nabla v$, entonces, teniendo en cuenta la condición inicial (3) y la condición (6), empleando la fórmula de Ostrogradski, obtendremos

$$\int\limits_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{T-\delta}} ((u_t v)_t - \operatorname{div}(kv\nabla u))\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{D_{T-\delta}} u_t v\,dx - \int\limits_{D_0} u_t v\,dx - \int\limits_{\Gamma_{T-\delta}} k\frac{\partial u}{\partial n} v\,dS\,dt + \int\limits_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt = -\int\limits_{D_0} \psi v\,dx -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_{T-\delta}} kv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt + \int\limits_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt. \qquad (7)$$

Si $u(x, t)$ es la solución del tercero (o segundo) problema mixto, entonces, en virtud de (5), de la última igualdad fluye que $u(x, t)$ satisface la identidad integral

$$\int\limits_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt + \int\limits_{\Gamma_{T-\delta}} k\sigma uv\,dS\,dt = \int\limits_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt + \int\limits_{D_0} \psi v\,dx,$$

cualesquiera que sean $v(x, t)$ de $C^1(\bar{Q}_{T-\delta})$, para las cuales se cumple la condición (6), y, por consiguiente, para cualesquiera $v(x, t)$ de $H^1(Q_{T-\delta})$ que satisfagan la condición (6).

Si la función $u(x, t)$ es una solución del primer problema mixto, supondremos, además, que $v(x, t)$ satisface la condición

$$v|_{\Gamma_{T-\delta}} = 0. \qquad (8)$$

De (7) resulta que $u(x, t)$ satisface la identidad integral

$$\int\limits_{Q_{T-\delta}} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\,dx\,dt = \int\limits_{D_0} \psi v\,dx + \int\limits_{Q_{T-\delta}} fv\,dx\,dt$$

cualesquiera que sean $v \in H^1(Q_{T-\delta})$ para las cuales se cumplen las condiciones (6) y (8).

Empleando las identidades obtenidas, introduzcamos los conceptos de soluciones generalizadas para los problemas mixtos en cuestión. Supongamos que $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ y $\psi(x) \in L_2(D)$.

Una función u, perteneciente al espacio $H^1(Q_T)$, se denomina *solución generalizada en Q_T del primer problema mixto* (1)—(4), si satisface la condición inicial (2), la condición límite (4), y la identidad

$$\int_{Q_T} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\, dx\, dt = \int_{D_0} \psi v\, dx + \int_{Q_T} fv\, dx\, dt \qquad (9)$$

cualesquiera que sean $v \in H^1(Q_T)$ para las cuales se cumple la condición (4) y la que sigue

$$v|_{D_T} = 0. \qquad (10)$$

Una función u, perteneciente al espacio $H^1(Q_T)$, se llama *solución generalizada en Q_T del tercero (del segundo, cuando $\sigma = 0$) problema mixto* (1), (2), (3), (5), si ella satisface la condición inicial (2) y la identidad

$$\int_{Q_T} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\, dx\, dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma uv\, dS\, dt =$$

$$= \int_{D_0} \psi v\, dx + \int_{Q_T} fv\, dx\, dt \qquad (11)$$

cualesquiera que sean $v \in H^1(Q_T)$ para las cuales se cumple la condición (10).

Indiquemos que análogamente a las soluciones clásicas, las soluciones generalizadas poseen la siguiente propiedad. Si u es la *solución generalizada del problema* (1)—(4) *ó* (1), (2), (3), (5) *en el cilindro Q_T, ésta también lo será para el problema correspondiente en el cilindro $Q_{T'}$*, cualesquiera que sea $T' < T$.

En efecto, si la función u es solución generalizada en Q_T de uno de los problemas en consideración, entonces para todo $T' < T$ $u \in H^1(Q_{T'})$ (en el caso del primer problema mixto $u|_{\Gamma_{T'}} = 0$) y para ella tendrá lugar la identidad integral correspondiente, cualesquiera que sean v que pertenezcan a $H^1(Q_T)$ y satisfagan la condición $v|_{D_T} = 0$ (y en el caso del primer problema mixto, también la condición $v|_{\Gamma_T} = 0$).

No es difícil comprobar que si la función v pertenece a $H^1(Q_{T'})$, $v|_{D_{T'}} = 0$ y $v = 0$ en $Q_T \setminus Q_{T'}$, entonces $v \in H^1(Q_T)$ y $v|_{D_T} = 0$; y si, adicionalmente, $v|_{\Gamma_{T'}} = 0$, será nula también $v|_{\Gamma_T}$. Por ello, la función u satisface la identidad integral por cuyo intermedio se determina la solución generalizada del correspondiente problema mixto en $Q_{T'}$.

Señalemos, además, que el concepto de solución generalizada del problema mixto se ha introducido como concepto generalizado de la solución clásica (para $f \in L_2(Q_T)$), siendo establecida, en este caso, la siguiente afirmación: *una solución clásica en Q_T de cada uno de los problemas* (1)—(4) *y* (1), (2), (3), (5) *con $f \in L_2(Q_T)$ es solución* *generalizada del problema correspondiente en $Q_{T-\delta}$, para cualquier* $\delta \in (0, T)$.

A la par con las soluciones clásicas y generalizadas de los problemas mixtos se puede introducir el concepto de solución en casi todo punto (en c.t.p. o casi siempre). Una función u se llama *solución en c.t.p. del problema mixto* (1) — (4) o *del tercero (del segundo, cuando* $\sigma = 0$) *problema mixto* (1), (2), (3), (5), si ella pertenece a $H^2(Q_T)$, satisface en Q_T (para casi todo $(x, t) \in Q_T$)) la ecuación (1), satisface las condiciones iniciales (2) y (3) y una de las condiciones límites ó (5), respectivamente.

De la definición se deduce inmediatamente que si la solución clásica del problema (1) — (4) o de (1), (2), (3), (5) pertenece al espacio $H^2(Q_T)$, será la solución en c.t.p. del problema correspondiente. Además, si la solución en c.t.p. del problema (1)—(4) (o del problema (1), (2), (3), (5)) pertenece a $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, será solución clásica de este problema (la función $u_{tt} - \operatorname{div}(k \nabla u) + au - f$ es continua y es nula casi siempre en Q_T; por lo tanto, es nula siempre en Q_T).

Como hemos mostrado antes, la solución clásica del primero o tercero (segundo) problema mixto para la ecuación (1) en Q_T para $f \in L_2(Q_T)$, es la solución generalizada del problema correspondiente en $Q_{T-\delta}$ para cualquiera $\delta \in (0, T)$. De modo análogo se demuestra que la solución en c.t.p. del primero o tercero (segundo) problema mixto para la ecuación (1) en Q_T es la solución generalizada del problema correspondiente en Q_T.

Tiene lugar la siguiente afirmación, en cierto sentido inversa.

LEMA 1. *Si la solución generalizada del problema* (1)—(4) *ó del* (1), (2), (3), (5) *pertenece al espacio* $H^2(Q_T)$, *será la solución en c.t.p. del problema correspondiente. Si la solución generalizada del problema* (1)—(4) *o del* (1), (2), (3), (5) *pertenece a* $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, *será la solución clásica del problema correspondiente.*

Demostremos a la vez ambas afirmaciones del lema.

Supongamos que la solución generalizada del problema (1)—(4) o del (1), (2), (3), (5) pertenece a $H^2(Q_T)$ (o bien a $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$). Entonces, para demostrar las afirmaciones del lema basta establecer que en Q_T la función u satisface la ecuación (1), en D_0 la condición inicial (3), y en el caso del tercero (segundo) problema mixto, también la condición límite (5) en Γ_T.

Tomemos una función arbitraria $v \in C^1(\overline{Q}_T)$ y, valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski, transformemos (9) o, respectivamente, (11) de la manera siguiente

$$\int_{Q_T} (-\operatorname{div} k\nabla u + au + u_{tt} - f)\, v\, dx\, dt = 0.$$

Si $u \in H^2(Q_T)$, entonces $-\operatorname{div}(k\nabla u)+au+u_{tt}-f \in L_2(Q_T)$, y, como el conjunto $\dot{C}^1(Q_T)$ es siempre denso en $L_2(Q_T)$, la función u satisfará la ecuación (1) casi siempre en Q_T.

Si $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, entonces $-\operatorname{div}(k\nabla u)+$ $+au+u_{tt}-f \in L_2(Q')$ siendo Q' un subdominio arbitrario, $Q' \Subset Q$; ya que el conjunto de funciones $\dot{C}^1(\overline{Q}_T)$ es siempre denso en $L_2(Q')$, de la arbitrariedad de Q' se desprende que la función u satisface en Q_T la ecuación (1). (Puesto que la función $-\operatorname{div}(k\nabla u)+$ $+au+u_{tt}$ es continua en Q_T, la función f será también continua en Q_T, es decir, la función u satisface en todo punto la ecuación (1).)

Tomemos una función arbitraria v que pertenece a $C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$ para cierto $\delta \in (0, T)$ y que satisface las condiciones (6) y (8). Si $u \in H^2(Q_T)$, entonces de (9), o respectivamente, de (11), mediante la fórmula de Ostrogradski, obtenemos la igualdad

$$\int_{D_0}(u_t-\psi)\,v\,dx=0.$$

Esta misma igualdad es válida también si $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup$ $\cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, puesto que en este caso $-\operatorname{div} k\nabla u+u_{tt}=f-$ $-au \in L_1(Q_T)$ y $u \in C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$. Como por cualquier función g de $\dot{C}^1(\overline{D}_0)$ (el conjunto de tales funciones es siempre denso en $L_2(D_0)$) se puede construir una función v que pertenezca a $C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$ y satisfaga las condiciones (6), (8) y la condición $v\,|_{D_0}=g$, entonces la función u satisface la condición inicial (3).

Tomemos ahora, para cualquier $\delta \in (0, T)$, una función arbitraria $v \in C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$ que satisface la condición (6). Entonces de (11) obtenemos

$$\int_{\Gamma_{T-\delta}} kv\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)dS\,dt=0.$$

Pero, para toda función g, continuamente diferenciable y terminal en Γ_T (el conjunto de tales funciones es siempre denso en $L_2(\Gamma_T)$), se puede hallar un $\delta \in (0, T)$ y una función $v \in C^1(\overline{Q}_{T-\delta})$, que satisfaga la condición (6) y la condición $v\,|\,\Gamma_{T-\delta}=g/k$. Por ello, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\right.$ $\left.+\sigma u\right)|_{\Gamma_T}=0$. El lema está demostrado.

Demostremos ahora el siguiente teorema de unicidad.

TEOREMA 1. *Cada uno de los problemas* (1)—(4) y (1), (2), (3), (5) *no puede tener más de una solución generalizada.*

Sea u una solución generalizada del problema (1)—(4) o del problema (1), (2), (3), (5) para $f=0$ en Q_T, $\varphi=0$, $\psi=0$ en D_0. Mostremos que $u=0$ en Q_T.

Tomemos arbitrariamente $\tau \in (0, T)$ y examinemos la función

$$v(x, t) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(x, \theta)\, d\theta, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Se comprueba inmediatamente que la función v tiene en Q_T derivadas generalizadas

$$v_t = \begin{cases} -u, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T, \end{cases}$$

y

$$v_{x_i} = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u_{x_i}(x, \theta)\, d\theta, & 0 < t < \tau \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Por consiguiente, $v(x, t) \in H^1(Q_T)$. Con ello, $v|_{D_T} = 0$, y para el caso cuando u es una solución generalizada del primer problema mixto, $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Sustituimos la función v en la identidad (9), si u es una solución generalizada del problema (1)—(4), o en la identidad (11), si u es una solución generalizada del problema (1), (2), (3), (5). Entonces, para el primer problema mixto, obtenemos la igualdad

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(k\nabla u \int\limits_t^\tau \nabla u\, d\theta - a u v_t + u_t u \right) dx\, dt = 0,$$

y para el tercero (segundo) problema, la igualdad

$$\int\limits_{Q_\tau} \left(k\nabla u \int\limits_t^\tau \nabla u\, d\theta - a v v_t + u_t u \right) dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x, t) \int\limits_t^\tau u(x, \theta)\, d\theta\, dS\, dt = 0$$

(recordemos que en el dominio Q_τ $v_t = -u \in H^1(Q_\tau)$, y por consiguiente, $v_t|_{\Gamma_T} \in L_2(\Gamma_\tau)$).

Puesto que

$$\int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x,t)\int_t^\tau \nabla u(x,\theta)\,d\theta\,dt\,dx=$$

$$=\int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x,t)\Big[\int_t^\tau \nabla u(x,\theta)\,d\theta\Big]\,dt\,dx=$$

$$=\int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x,\theta)\,d\theta\int_0^\theta \nabla u(x,t)\,dt\,dx=$$

$$=\int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x,\theta)\,d\theta\int_0^\tau \nabla u(x,t)\,dt\,dx-$$

$$-\int_D k(x)\int_0^\tau \nabla u(x,\theta)\,d\theta\int_\theta^\tau \nabla u(x,t)\,dt\,dx=$$

$$=\int_D k(x)\left|\int_0^\tau \nabla u(x,t)\,dt\right|^2 dx-\int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x,t)\int_t^\tau \nabla u(x,\theta)\,d\theta\,dt\,dx,$$

entonces

$$\int_{Q_\tau} k(x)\nabla u(x,t)\int_t^\tau \nabla u(x,\theta)\,d\theta\,dt\,dx=\frac{1}{2}\int_D k(x)\left|\int_0^\tau \nabla u(x,t)\,dt\right|^2 dx.$$

Ya que de modo análogo

$$\int_{\Gamma_T} k\sigma u(x,t)\int_t^\tau u(x,\theta)\,d\theta\,dS\,dt=$$

$$=\int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^\tau u(x,t)\,dt\right)^2 dS-\int_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x,t)\int_t^\tau u(x,\theta)\,d\theta\,dS\,dt,$$

entonces

$$\int_{\Gamma_\tau} k\sigma u(x,t)\int_t^\tau u(x,\theta)\,d\theta\,dS\,dt=\frac{1}{2}\int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^\tau u(x,t)\,dt\right)^2 dS.$$

Además,

$$\int_{Q_T} avv_t\,dx\,dt=-\int_{D_0} av^2\,dx-\int_{Q_\tau} av_tv\,dx\,dt.$$

Por eso,

$$\int_{Q_\tau} avv_t\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_{D_0} av^2\,dx.$$

Análogamente, tenemos

$$\int_{Q_\tau} uu_t\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{D_\tau} u^2\,dx.$$

Por consiguiente, si u es una solución del primer problema mixto, obtenemos

$$\int_D k(x)\left|\int_0^\tau \nabla u(x,\,t)\,dt\right|^2 dx + \int_{D_0} av^2\,dx + \int_{D_\tau} u^2\,dx = 0,$$

y si u es una solución del tercero (segundo) problema mixto, entonces

$$\int_D k(x)\left|\int_0^\tau \nabla u(x,\,t)\,dt\right|^2 dx + \int_{D_0} av^2\,dx + \int_{D_\tau} u^2\,dx +$$
$$+\int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^\tau u(x,\,t)\,dt\right)^2 dS = 0.$$

Como $k(x) > 0$, $a(x) \geqslant 0$ en Q_T y $\sigma(x) \geqslant 0$ en Γ_T, entonces de estas dos igualdades se deduce que $\int_{D_\tau} u^2\,dx = 0$. Puesto que τ es un número arbitrario del intervalo $(0,\,T)$, $u = 0$ en Q_T. El teorema queda demostrado.

Según fue demostrado, las soluciones clásicas de los problemas (1)—(4) y (1), (2), (3), (5) son también soluciones generalizadas de estos problemas en $Q_{T-\delta}$ para cualquier $\delta \in (0,\,T)$. Por eso, del teorema 1 se deduce inmediatamente la siguiente afirmación.

COROLARIO 1. *Cada uno de los problemas* (1)—(4) y (1), (2), (3), (5) *no puede tener más de una solución clásica.*

Puesto que las soluciones en c.t.p. de los problemas (1)—(4) y (1)—(3), (5) son también soluciones generalizadas de estos problemas, entonces del teorema 1 se desprende

COROLARIO 2. *Cada uno de los problemas* (1)—(4) *y* (1), (2), (3), (5) *no puede tener más de una solución en c.t.p.*

2. Existencia de solución generalizada. Demostremos ahora la existencia de las soluciones de los problemas (1)—(4) y (1), (2), (3), (5). Emplearemos para esto el *método de Fourier*, según el cual la solución del problema mixto se busca en forma de una serie respecto a las funciones propias del problema elíptico de contorno correspondiente.

Sea $v(x)$ una función propia generalizada del primer problema de contorno

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(k\nabla v) - av = \lambda v, \qquad x \in D, \\ v|_{\partial D} = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

o del tercero (segundo, cuando $\sigma = 0$) problema de contorno

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(k\nabla v) - av = \lambda v, \qquad x \in D, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma v\right)\Big|_{\partial D} = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

(λ es el valor propio correspondiente). Quiere decir, que en el caso del primer problema de contorno $v \in \mathring{H}^1(D)$ y para todo $\eta \in \mathring{H}^1(D)$

$$\int_D (k\nabla v \nabla \eta + av\eta)\, dx + \lambda \int_D v\eta\, dx = 0, \tag{14}$$

y en el caso del tercero (segundo) problema de contorno $v \in H^1(D)$ y para todo $\eta \in H^1(D)$

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta + av\eta)\, dx + \int_{\partial D} k\sigma v\eta\, dS + \lambda \int_D v\eta\, dx = 0. \tag{15}$$

Examinemos el sistema $v_1, v_2, \ldots$, que es ortonormado en $L_2(D)$ compuesto de todas las funciones propias generalizadas del problema (12) o, respectivamente, del problema (13); $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ es una sucesión de los valores propios correspondientes (consideramos, como siempre, que la sucesión de valores propios es no creciente, con la particularidad de que cada valor propio se repite en esta sucesión tantas veces cual es su multiplicidad). Según lo demostrado en el § 1, cap. IV, el sistema $v_1, v_2, \ldots$ es una base ortonormal en $L_2(D)$ y $\lambda_k \to -\infty$ cuando $k \to \infty$. En el caso de los primero, tercero (cuando $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D) y segundo (cuando $a \not\equiv 0$ en D) problemas de contorno (recordemos que $k(x) \geqslant k_0 > 0$, $a(x) \geqslant 0$ en D y $\sigma(x) \geqslant 0$ en ∂D) el primer valor propio $\lambda_1 < 0$, es decir, $0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$ Si $a(x) \equiv 0$ en D, para el segundo problema del contorno $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \ldots$

Supongamos que las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ en (2) y (3) pertenecen a $L_2(D)$, y la función $f(x, t) \in L_2(Q_T)$. De acuerdo con el teorema de Fubini, $f(x, t) \in L_2(D)$ para casi todo $t \in (0, T)$. Las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, así como también la función $f(x, t)$ para casi todos los valores de $t \in (0, T)$, las desarrollaremos en las series de Fourier según el sistema $v_1(x), v_2(x), \ldots$ de funciones propias generalizadas del problema (12) (al examinar el problema

(1)—(4)) o del problema (13) (al examinar el problema (1), (2), (3), (5)),

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k v_k(x), \qquad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k v_k(x), \qquad f(x,t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, v_k(x), \tag{16}$$

donde $\varphi_k=(\varphi, v_k)_{L_2(D)}$, $\psi_k=(\psi, v_k)_{L_2(D)}$ y $f_k(t)=\int\limits_D f(x,t)\,v_k(x)\,dx$, $k=1, 2, \ldots$ Puesto que $|f_k(t)|^2\leqslant\int\limits_D f^2(x,t)\,dx\cdot\int\limits_D v_k^2\,dx=$ $=\int\limits_D f^2(x,t)\,dx$, entonces $f_k(t)\in L_2(0, T)$, $k=1, 2, \ldots$ De acuerdo con la igualdad de Parseval — Steklov

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2=\|\varphi\|^2_{L_2(D)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^2=\|\psi\|^2_{L_2(D)} \tag{17}$$

y para casi todo $t\in(0, T)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t)=\int\limits_D f^2(x,t)\,dx.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T f_k^2(t)\,dt=\int\limits_{Q_T} f^2\,dx\,dt. \tag{17'}$$

A título de funciones iniciales en (2) y (3) tomemos primero las funciones $\varphi_k v_k(x)$ y $\psi_k v_k(x)$, es decir, k-ésimas «armónicas» de las series (16), y a título de la función en el segundo miembro de la ecuación (1), la función $f_k(t) v_k(x)$, $k\geqslant 1$. Examinemos la función

$$u_k(x,t)=U_k(t)\,v_k(x), \tag{18}$$

donde

$$U_k(t)=\varphi_k\cos\sqrt{-\lambda_k}\,t+\frac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}}\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\,t+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int\limits_0^t f_k(\tau)\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\,(t-\tau)\,d\tau; \tag{19}$$

y en el caso $\lambda_1 = 0$

$$U_1(t) = \varphi_1 + \psi_1 t + \int_0^t f_1(\tau)(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \lim_{\lambda_1 \to 0} \Big(\varphi_1 \cos \sqrt{-\lambda_1}\,t + \frac{\psi_1}{\sqrt{-\lambda_1}} \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda_1}\,t +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}} \int_0^t f_1(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda_1}\,(t-\tau)\,d\tau \Big).$$

La función $U_k(t)$ pertenece, evidentemente, a $H^2(0, T)$, satisface, cuando $t = 0$, las condiciones iniciales $U_k(0) = \varphi_k$, $U'_k(0) = \psi_k$, y para casi todo $t \in (0, T)$ es una solución de la ecuación

$$U''_k - \lambda_k U_k = f_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Mostremos que si $v_k(x)$ y λ_k son la función propia generalizada y el valor propio correspondiente del problema (12) (o del problema (13)), entonces la función $u_k(x, t)$ es la solución generalizada del primero (tercero o segundo, correspondientemente) problema mixto para la ecuación

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + au = f_k(t)\,v_k(x)$$

con las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi_k v_k(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi_k v_k(x).$$

Efectivamente, la función $u_k(x, t) \in H^1(Q_T)$ en D_0; ella satisface la condición inicial (2) y, en el primer problema de contorno, también la condición límite (4). Mostremos que la función $u_k(x, t)$ en el primer problema mixto satisface la identidad integral

$$\int_{Q_T} (k\nabla u_k \nabla v + au_k v - u_{kt} v_t)\,dx\,dt =$$

$$= \psi_k \int_{D_0} v_k(x)\,v\,dx + \int_{Q_T} f_k(t)\,v_k(x)\,v\,dx\,dt \tag{9_k}$$

para todas las funciones v que pertenecen al espacio $H^1(Q_T)$ y que satisfacen las condiciones (4) y (10), mientras que para el segundo y el tercero problemas mixtos dicha función satisface la identidad integral

$$\int_{Q_T} (k\nabla u_k \nabla v + au_k v - u_{kt} v_t)\,dx\,dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma u_k v\,dS\,dt =$$

$$= \psi_k \int_{D_T} v_k(x)\,v\,dx + \int_{Q_T} f_k(t)\,v_k(x)\,v\,dx\,dt \tag{11_k}$$

para todas las v de $H^1(Q_T)$ que satisfagan la condición (10). Es suficiente, obviamente, establecer la validez de las identidades (9_h) y (11_h) sólo para todas las funciones v que son continuamente diferenciables en $\overline{Q}_T$ y que satisfacen las condiciones (4) y (10), y la (10), respectivamente.

En virtud de (10), (18) y (19) tenemos

$$\int_{Q_T} u_{ht}v_t\,dx\,dt = \int_D v_h(x)\left[\int_0^T U_h'(t)\,v_t\,dt\right]dx =$$

$$= \int_D v_h(x)\left[-\psi_h v(x, 0) - \int_0^T U_h''(t)\,v\,dt\right]dx =$$

$$= -\psi_h \int_D v_h(x)\,v(x, 0)\,dx - \lambda_h \int_{Q_T} u_h v\,dx\,dt - \int_{Q_T} f_h(t)\,v_h(x)\,v\,dx\,dt.$$

Por ello, en el caso del primer problema mixto la identidad (9_h) se infiere de (14):

$$\int_{Q_T} (k\nabla u_h\nabla v + au_h v - u_{ht}v_t)\,dx\,dt =$$

$$= \int_0^T U_h(t)\,dt \int_D (k(x)\,\nabla v_h\nabla v + av_h v +$$

$$+ \lambda_h v_h v)\,dx + \psi_h \int_D v_h(x)\,v(x, 0)\,dx + \int_{Q_T} f_h(t)\,v_h(x)\,v\,dx\,dt =$$

$$= \psi_h \int_D v_h(x)\,v(x, 0)\,dx + \int_{Q_T} f_h(t)\,v_h(x)\,v\,dx\,dt.$$

Por analogía, en el caso del tercer (segundo) problema mixto la identidad (11_h) se infiere de (15):

$$\int_{Q_T} (k(x)\,\nabla u_h\nabla v + au_h v - u_{ht}v_t)\,dx\,dt + \int_{\Gamma_T} k(x)\,\sigma u_h v\,dS\,dt =$$

$$= \int_0^T U_h(t)\,dt\left[\int_D (k(x)\,\nabla v_h\nabla v + av_h v + \lambda_h v_h v)\,dx + \int_{\partial D} k(x)\,\sigma v_h v\,dS\right] +$$

$$+ \psi_h \int_D v_h(x)\,v(x, 0)\,dx + \int_{Q_T} f_h(t)\,v_h(x)\,v\,dx\,dt =$$

$$= \psi_h \int_D v_h(x)\,v(x, 0)\,dx + \int_{Q_T} f_h(t)\,v_h(x)\,v\,dx\,dt.$$

Si tomamos a título de funciones iniciales en (2) y (3) las sumas parciales de las series de (16), a saber, $\sum\limits_{h=1}^{N}\varphi_h v_h(x)$ y $\sum\limits_{h=1}^{N}\psi_h v_h(x)$ para cierto N, y a título de la función f en (1), la suma parcial de su serie de Fourier, a saber, $\sum\limits_{h=1}^{N} f_h(t), v_h(x)$, entonces la solución generalizada del problema (1)—(4) ((1), (2), (3), (5)) será representada por la función

$$S_N(x, t) = \sum_{h=1}^{N} u_h(x, t) = \sum_{h=1}^{N} U_h(t)\, v_h(x).$$

En particular, en el primer problema mixto esta función satisface la identidad

$$\int\limits_{Q_T}(k\nabla S_N\nabla v + aS_N v - S_{Nt}v_t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_D \sum_{h=1}^{N}\psi_h v_h(x)\, v(x, 0)\,dx + \int\limits_{Q_T}\sum_{h=1}^{N} f_h(t)\, v_h(x)\, v(x, t)\,dx\,dt \quad (21)$$

para cualquier $v \in H^1(Q_T)$ que satisface las condiciones (4) y (10), y en el caso del tercero (segundo) problema, la identidad

$$\int\limits_{Q_T}(k\nabla S_N\nabla v + aS_N v - S_{Nt}v_t)\,dx\,dt + \int\limits_{\Gamma_T} k\sigma S_N v\,dS\,dt =$$

$$= \int\limits_D \sum_{h=1}^{N}\psi_h v_h(x)\, v(x, 0)\,dx + \int\limits_{Q_T}\sum_{h=1}^{N} f_h(t)\, v_h(x)\, v\,dx\,dt \quad (22)$$

para cualquier $v \in H^1(Q_T)$ que satisface la condición (10).

Por esta razón es natural esperar que con ciertas suposiciones respecto a φ, ψ y f, la solución del problema (1)—(4) ((1), (2), (3), (5)) pueda ser representada en forma de la serie

$$u(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} U_h(t)\, v_h(x), \quad (23)$$

donde $v_1, v_2, \ldots$ son funciones propias generalizadas del problema (12) ((13), respectivamente)

TEOREMA 2. *Sean $f \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(D)$ y $\varphi \in \mathring{H}^1(D)$ en el caso del primer problema mixto (1)—(4), y $\varphi \in H^1(D)$, en el caso del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (3), (5). Entonces, la solución generalizada u del problema correspondiente existe y se representa por la serie (23) convergente en $H^1(Q_T)$. Entonces, tiene lugar la* *desigualdad*

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{H^1(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}), \tag{24}$$

en la cual la constante positiva C no depende de φ, ψ y f.

De la fórmula (19) se desprende que para todo $t \in [0, T]$

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + |\psi_k|\,|\lambda_k|^{-1/2} + |\lambda_k|^{-1/2}\int_0^T |f_k(t)|\,dt \quad \text{para } k > 1$$

y

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + C_1|\psi_1| + C_1\int_0^T |f_1(t)|\,dt$$

(en el caso del segundo problema mixto $C_1 = T$ cuando $a \equiv 0$, en todos los demás casos $C_1 = 1/\sqrt{|\lambda_1|}$). Por ello, para todo $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 3\varphi_k^2 + 3\psi_k^2|\lambda_k|^{-1} + 3|\lambda_k|^{-1}\left(\int_0^T |fk|\,dt\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C(T)\left(\varphi_k^2 + \psi_k^2|\lambda_k|^{-1} + |\lambda_k|^{-1}\int_0^T f_k^2\,dt\right) \quad \text{para} \quad k > 1, \tag{25}$$

$$U_1^2(t) \leqslant C(T)\left(\varphi_1^2 + \psi_1^2 + \int_0^T f_1^2\,dt\right). \tag{25'}$$

Ya que, para cualquier k, $k = 1, 2, \ldots, \left|\frac{dU_k}{dt}\right| \leqslant |\varphi_k|\,|\lambda_k|^{1/2} + |\psi_k| + \int_0^T |f_k|\,dt$, entonces para todo $t \in [0, T]$

$$\left|\frac{dU_k}{dt}\right|^2 \leqslant C(T)\left(\varphi_k^2|\lambda_k| + |\psi_k|^2 + \int_0^T f_k^2\,dt\right). \tag{26}$$

Puesto que la función φ pertenece en el primer problema mixto al espacio $\mathring{H}^1(D)$ (en el tercer problema mixto, al espacio $H^1(D)$), del teorema 3, p. 3, § 1, cap. IV, se deduce que la serie de Fourier (16) de esta función compuesta según el sistema de las funciones propias del problema (12) (o del (13), respectivamente) converge hacia ella en la norma del espacio $H^1(D)$. Con ello, existe una constante $C > 0$ tal que para todas las φ de $\mathring{H}^1(D)$ (o bien, respectivamente, de $H^1(D)$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2|\lambda_k| \leqslant C_1\|\varphi\|_{H^1(D)}^2. \tag{27}$$

Examinemos la suma parcial $S_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$ de la serie (23). Para todo $t \in [0, T]$ esta suma y su derivada respecto a t (en virtud del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, las funciones $U_k(t)$ y $U_k'(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, son continuas en $[0, T]$) pertenecen a $\mathring{H}^1(D_t)$ (o a $H^1(D_t)$).

Al estudiar los problemas (1)—(4) en el espacio $\mathring{H}^1(D_t)$, resulta cómodo introducir el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u \nabla v + auv)\, dx.$$

Al estudiar los problemas (1), (2), (3), (5), introduzcamos en el espacio $H^1(D_t)$ el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u\nabla v + auv)\, dx + \int_{\partial D_t} k\sigma uv\, dS,$$

si (o) $a \not\equiv 0$ en D, o bien $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D, y un producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u\nabla v + uv)\, dx,$$

si es que $a \equiv 0$ en D y $\sigma \equiv 0$ en ∂D.
Puesto que en el caso del primero y tercero problemas mixtos (para $\sigma \not\equiv 0$) y en el del segundo problema mixto (para $a \not\equiv 0$), los sistemas de funciones $v_1/\sqrt{-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{-\lambda_2}$, ... están ortonormados en los productos escalares correspondientes, y en el caso del segundo problema mixto resulta ortonormado, para $a \equiv 0$, el sistema de funciones $v_1/\sqrt{1-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{1-\lambda_2}$, ..., entonces para todo $t \in [0, T]$ y para cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$, en virtud de (25), tenemos

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t) \|^2_{H^1(D_t)} = \Big\| \sum_{k=M+1}^{N} U_k(t) v_k(x) \Big\|^2_{H^1(D_t)} =$$
$$= \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t) |\lambda_k| \leqslant C(T) \sum_{k=M+1}^{N} \Big(\varphi_k^2 |\lambda_k| + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt \Big),$$

si (o) $a \not\equiv 0$ en D, o $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D y

$$\| S_N(x, t) - S_M(x, t) \|^2_{H^1(D_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)(1-\lambda_k) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+|\lambda_2|}{|\lambda_2|} C(T) \sum_{k=M+1}^{N} \Big(\varphi_k^2 (1+|\lambda_k|) + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2\, dt \Big).$$

si $a\equiv 0$ en D y $\sigma\equiv 0$ en ∂D. De este modo en cualquier caso se tiene

$$\|S_N(x,t)-S_M(x,t)\|^2_{H^1(D_t)}\leqslant$$
$$\leqslant C_2\sum_{h=M+1}^{N}\left(\varphi_h^2(1+|\lambda_h|)+\psi_h^2+\int_0^T f_h^2\,dt\right)\quad(28)$$

para todo $t\in[0,T]$. Análogamente, en vista de (26), para todo $t\in[0,T]$

$$\left\|\frac{\partial S_N}{\partial t}-\frac{\partial S_M}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D_t)}=\left\|\sum_{h=M+1}^{N}U_h'(t)\,v_h(x)\right\|^2_{L_2(D_t)}=$$
$$=\sum_{h=M+1}^{N}U_h'^2(t)\leqslant C_3\sum_{h=M+1}^{N}\left(\varphi_h^2|\lambda_h|+\psi_h^2+\int_0^T f_h^2\,dt\right).\quad(28')$$

Junto con estas desigualdades tienen también lugar las siguientes

$$\|S_N(x,t)\|^2_{H^1(D_t)}=\left\|\sum_{h=1}^{N}U_h(t)\,v_h(x)\right\|^2_{H^1(D_t)}\leqslant$$
$$\leqslant C_4\sum_{h=1}^{N}\left(\varphi_h^2(1+|\lambda_h|)+\psi_h^2+\int_0^T f_h^2\,dt\right).\quad(29)$$

$$\left\|\frac{\partial S_N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D_t)}=\left\|\sum_{h=1}^{N}U_h'(t)\,v_h(x)\right\|^2_{L_2(D_t)}=\sum_{h=1}^{N}U_h'^2(t)\leqslant$$
$$\leqslant C_5\sum_{h=1}^{N}\left(\varphi_h^2(|\lambda_h|+1)+\psi_h^2+\int_0^T f_h^2\,dt\right).\quad(29')$$

que son válidas para todo $t\in[0,T]$ y para cualesquiera $N\geqslant 1$.

Sumando las desigualdades (28) y (28′) integramos respecto a $t\in(0,T)$, obtenemos la desigualdad

$$\|S_N(x,t)-S_M(x,t)\|^2_{H^1(Q_T)}\leqslant$$
$$\leqslant C_6\sum_{h=M+1}^{N}\left(\varphi_h^2(1+|\lambda_h|)+\psi_h^2+\int_0^T f_h^2\,dt\right).\quad(30)$$

De acuerdo con (17), (17′) y (27), las series $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\varphi_h^2\,(1+|\lambda_h|)$, $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\psi_h^2$ y $\sum\limits_{h=1}^{\infty}\int\limits_0^T f_h^2\,dt$ son convergentes. Por eso, de (30) se infiere que la serie (23) converge en $H^1(Q_T)$ y, por tanto, su suma $u \in H^1(Q_T)$. La función $u(x, t)$ satisface, obviamente, la condición inicial (2), y, en el caso del primer problema mixto, la condición límite (4). Pasando al límite para $N \to \infty$ en la igualdad (21) (en el caso del problema (1)—(4)) o en la igualdad (22) (en el caso del problema (1), (2), (3), (5)), resulta que u satisface la identidad (9) y, respectivamente la (11). Así pues, u es una solución generalizada del primer y, respectivamente, del tercer problema mixto. Sumando las desigualdades (29) y (29'), integradas respecto a $t \in (0, T)$, mediante (17), (17') y (27) obtenemos las desigualdades (24). El teorema está demostrado.

3. Método de Galerkin. La existencia de soluciones generalizadas de los problemas mixtos se demuestra también por otros métodos que no dependen del punto 2 y que no emplean las propiedades de las funciones propias. Este punto está dedicado precisamente a uno de los métodos citados para demostrar los teoremas de existencia, a saber, al método de Galerkin que, a la vez, es uno de los métodos para resolver de modo aproximado los problemas mixtos. Indiquemos que a diferencia del método de Fourier, el de Galerkin permite estudiar los problemas mixtos en el caso cuando los coeficientes dependen no sólo de las variables espaciales x, sino también del tiempo t. Examinemos, para concretar, el primer problema mixto (1)—(4). Suponemos, como antes, que $\varphi \in \mathring{H}^1(D)$, $\psi \in L_2(D)$, $f \in L_2(Q_T)$.

El método de Galerkin consiste en lo siguiente.

Sea $v_1(x)$, $v_2(x)$, . . . un sistema arbitrario de funciones de $C^1(\overline{D})$ que satisfacen la condicion límite $v_k|_{\partial D} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Se supone que este sistema es linealmente independiente y completo en $\mathring{H}^1(D)$, es decir, una variedad lineal tendida sobre el sistema es siempre densa en $\mathring{H}^1(D)$. Para un m entero y arbitrario en el subespacio de dimensión finita V_m del espacio $L_2(D)$, tendido sobre las funciones v_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, se resuelve un problema que se obtiene del problema (1)—(4) mediante la proyección ortogonal en el subespacio citado, es decir, se busca una función $w_m(x, t)$ (de $H^1(Q_T)$) la cual pertenece, para todo $t \in [0, T]$, al subespacio V_m, satisface las condiciones (2) y (3) con funciones iniciales $\varphi^m(x) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k v_k(x)$, $\psi^m(x) = \sum_{k=1}^{m} \psi_k v_k(x)$ (que son proyecciones ortogonales en V_m de las funciones $\varphi(x)$, y $\psi(x)$, respectivamente) y que es tal que para casi todo $t \in (0, T)$ las proyecciones ortogonales en V_m (en el producto escalar de $L_2(D)$) de las funciones $f(x, t)$ y $w_{m_{tt}} - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + aw_m$ coinciden. Esto significa que se buscan unas funciones

$c_1(t), \ldots, c_m(t)$ (de $H^2(0, T)$) (que satisfacen las condiciones $c_k(0) = \varphi_k$, $c_k'(0) = \psi_k$, $k = 1, \ldots, m$) tales que la función $w_{m_{tt}} - \operatorname{div}(k \nabla w_m) + aw_m - f$, donde

$$w_m(x, t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) v_k(x), \tag{31}$$

para casi todo $t \in (0, T)$ (para los cuales $f \in L_2(D_t)$), es ortogonal en $L_2(D)$ al subespacio V_m, es decir,

$$\int_D (w_{mtt} - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + aw_m) v_k \, dx = \int_D f v_k \, dx \tag{32}$$

para $k = 1, \ldots, m$.

El método de Galerkin consiste en que la solución u del problema (1)—(4) es aproximada por las soluciones w_m de los problemas «proyectados». Para fundamentarlo es indispensable demostrar que la solución w_m de cada uno de estos problemas existe (y es única) y que la sucesión w_m, $m = 1, 2, \ldots$, en cierto sentido (débilmente en $H^1(Q_T)$) converge hacia u.

Con el fin de no complicar los razonamientos, examinemos un caso de condiciones iniciales homogéneas ($\varphi = 0$, $\psi = 0$). Entonces $\varphi_k = \psi_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, es decir

$$c_k(0) = c_k'(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{33}$$

Las igualdades (32) es un sistema, lineal respecto a las funciones $c_1(t), \ldots, c_m(t)$, de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes

$$\sum_{s=1}^{m} (c_s''(t)(v_k, v_s)_{L_2(D)} + c_s(t)(v_k, v_s)_{\mathring{H}^1(D)}) = f_k(t), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{34}$$

donde

$$f_k(t) = \int_D f(x, t) v_k(x) \, dx \in L_2(0, T) \left((h, g)_{\mathring{H}^1(D)} = \right.$$
$$\left. = \int_D (k\nabla h \nabla g + ahg) \, dx \right).$$

Demostremos que el sistema (34) tiene una única solución que pertenece a $H^2(0, T)$ (todas las coordenadas pertenecen a $H^2(0, T)$) y satisface las condiciones iniciales (33).

Puesto que el sistema de funciones $v_1, v_2, \ldots$ es linealmente independiente, para todo $m \geqslant 1$ el determinante de la matriz con los elementos $(v_k, v_s)_{L_2(D)}$, $k, s = 1, \ldots, m$, es distinto de cero (una afirmación análoga fue demostrada en el p. 9, § 1, cap. IV). Por ello, el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias (34) puede ser resuelto respecto a las derivadas superiores. Por consiguiente, el problema (34), (33) es equivalente al problema

$$c'(t) = Ac(t) + F(t), \quad c(0) = 0, \tag{35}$$

donde $c(t) = (c_1'(t), \ldots, c_m'(t), c_1(t), \ldots, c_m(t))$, $F(t) = (F_1(t), \ldots, F_{2m}(t))$, $(F_1(t), \ldots, F_m(t)) = \|(\varphi_k, \varphi_s)_{L_2(D)}\|^{-1} (f_1(t), \ldots, f_m(t))$, $F_{m+1}(t) \equiv \ldots \equiv F_{2m}(t) \equiv 0$, y

$$A = -\begin{Vmatrix} 0, & \|(\varphi_k, \varphi_s)_{L_2(D)}\|^{-1} \cdot \|(\varphi_k, \varphi_s)_{\dot{H}^1(D)}\| \\ I, & 0 \end{Vmatrix}$$

es una matriz de orden $2m$ (I — es una matriz unitaria de m-ésimo orden). Es evidente que el vector $F(t) \in L_2(0, T)$ ($F_i(t) \in L_2(0, T)$, $i = 1, \ldots, 2m$).

Para demostrar la afirmación es suficiente mostrar que el problema (35) tiene una única solución que pertenece al espacio $H^1(0, T)$. Sustituyamos, como siempre, el problema (35) por un sistema equivalente de ecuaciones integrales

$$c(t) = \int_0^t Ac(\tau)\, d\tau + \int_0^t F(\tau)\, d\tau \tag{36}$$

con un término independiente $\int_0^t (F\tau)\, d\tau$, que pertenece a $H^1(0, T)$ y, consecuentemente, continuo en $[0, T]$: si $c(t)$ es una solución del problema (35), perteneciente a $H^1(0, T)$, entonces, debido al teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, es continua en $[0, T]$ y satisface el sistema (36); si $c(t)$ es una solución del sistema (36), continua en $[0, T]$, ella pertenece, evidentemente, a $H^1(0, T)$ y es solución del problema (35). Mientras tanto, la existencia (y unicidad) de la solución (continua en $[0, T]$) del sistema de ecuaciones integrales (36) se establece en el Curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, al demostrar el teorema de existencia de la solución del problema de Cauchy en un sistema lineal normal de ecuaciones diferenciales ordinarias (véase, por ejemplo, L. S. Pontriaguin, «Ecuaciones diferenciales ordinarias»).

De este modo queda establecida la existencia y la unicidad, para cualquier $m = 1, 2, \ldots$, de las funciones $w_m(x, t)$ del tipo (31), que satisfacen las igualdades (32) y condiciones iniciales

$$w_m|_{t=0} = \frac{\partial w_m}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Multipliquemos (32) por $c_k'(t)$, integremos por $(0, \tau)$, donde τ es un número arbitrario de $[0, T]$, y sumemos según k desde 1 hasta m. De resultas obtenemos la igualdad

$$\int_{Q_\tau} (w_{mtt} - \operatorname{div}(k\nabla w_m) + aw_m)\, w_{mt}\, dx\, dt = \int_{Q_\tau} f w_{mt}\, dx\, dt. \tag{37}$$

Como $w_{mtt}w_{mt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}w_{mt}^2\right)$, $\operatorname{div}(k\nabla w_m)\,w_{mt}=\operatorname{div}(kw_{mt}\nabla w_m)-$
$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}|\nabla w_m|^2\right)$ y $aw_mw_{mt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}aw_m^2\right)$,
resulta que

$$\int_{Q_\tau}(w_{mtt}-\operatorname{div}(k\nabla w_m)+aw_m)\,w_{mt}\,dx\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{D_\tau}(w_{mt}^2+k|\nabla w_m|^2+aw_m^2)\,dx.$$

Advirtiendo que en el subespacio $\widetilde{H}^1(Q_T)$ del espacio $H^1(Q_T)$, compuesto por las funciones que se anulan en $\Gamma_T\cup D_0$, se puede introducir una norma, equivalente a la ordinaria,

$$\|w\|_{\widetilde{H}^1(Q_T)}=\left(\int_{Q_T}(w_t^2+k|\nabla w|^2+aw^2)\,dx\,dt\right)^{1/2},$$

obtendremos

$$2\int_0^T d\tau\int_{Q_\tau}(w_{mtt}-\operatorname{div}(k\nabla w_m)+aw_m)\,w_{mt}\,dx=\|w_m\|^2_{\widetilde{H}^1(Q_T)}.$$

Por eso, de la igualdad (37) se tiene

$$\|w_m\|^2_{\widetilde{H}^1(Q_T)}=2\int_0^T d\tau\int_0^\tau dt\int_D f(x,t)\,w_{mt}(x,t)\,dx=$$
$$=2\int_{Q_T}(T-t)\,f(x,t)\,w_{mt}(x,t)\,dx\,dt\leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)}\|w_{mt}\|_{L_2(Q_T)}\leqslant$$
$$\leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)}\|w_m\|_{\widetilde{H}^1(Q_T)},$$

de donde

$$\|w_m\|_{\widetilde{H}^1(Q_T)}\leqslant 2T\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

De este modo, el conjunto de funciones w_m, $m=1, 2, \ldots$, es acotado en $\widetilde{H}^1(Q_T)$. Del teorema 3, p. 8, § 3, cap. II, se desprende que este conjunto es débilmente compacto en $\widetilde{H}^1(Q_T)$, es decir, se puede extraer de él una subsucesión (desígnémosla de nuevo por w_m) que en $\widetilde{H}^1(Q_T)$ converja débilmente hacia cierta función $u\in\widetilde{H}^1(Q_T)$.

La función u es la solución generalizada que buscamos del problema mixto. Para demostrar esto será suficiente, evidentemente, comprobar que para toda $v\in\widetilde{\widetilde{H}}^1(Q_T)$ (designemos así un subespacio del espacio $H^1(Q_T)$ compuesto de las funciones que se anulan en $D_T\cup\Gamma_T$)

tiene lugar la identidad integral (9) (en la cual $\psi = 0$):

$$\int_{Q_T} (k\nabla u\nabla v + auv - u_t v_t)\, dx\, dt = \int_{Q_T} fv\, dx\, dt. \tag{38}$$

Para ello, a su vez, hace falta establecer la identidad (38) para algún conjunto de funciones $\mathscr{M}$, siempre denso en $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$.

A título de $\mathscr{M}$ tomemos un conjunto de todas las combinaciones lineales de las funciones $v_k(x)\,\theta(t)$, donde $k = 1, 2, \ldots,$ y $\theta(t)$, una función arbitraria de $C^1([0, T])$, que satisface la condición $\theta(T) = 0$. Mostremos, primero, que la igualdad (38) es válida para cualquier función $v(x, t) = v_k(x)\,\theta(t)$, y, por tanto, para cualquier v de $\mathscr{M}$, y cerciorémonos, luego, de que el conjunto $\mathscr{M}$ es siempre denso en $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$.

Integrando por $(0, T)$ la igualdad (32), multiplicada por $\theta(t)$, siendo $m \geqslant k$, obtendremos

$$\int_{Q_T} [(k\nabla w_m\nabla v_k + aw_m v_k)\,\theta - w_{mt}v_k\theta']\, dx\, dt = \int_{Q_T} fv_k\theta\, dx\, dt.$$

De aquí se deduce (38), puesto que para $m \to \infty$ w_m converge débilmente en $H^1(Q_T)$ hacia u.

Mostremos que $\mathscr{M}$ es siempre denso en $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$. Basta establecer para esto que toda función $\eta(x, t)$ de $C^2(\overline{Q}_T)$ que satisface la condición

$$\eta|_{\Gamma_T \cup D_T} = 0 \tag{39}$$

(el conjunto de estas funciones es siempre denso en $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$), pueda ser aproximada en la métrica del espacio $H^1(Q_T)$ por las funciones de $\mathscr{M}$. Definamos la norma en el espacio $\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)$ mediante la ecuación

$$\|f\|_{\tilde{\tilde{H}}^1(Q_T)} = \Big(\int_{Q_T} (f_t^2 + |\nabla f|^2\, dx\, dt)\Big)^{1/2}.$$

Señalemos que el conjunto $\mathscr{M}$ puede considerarse como un conjunto de todas las combinaciones lineales de las funciones $v_k^*(x,)$ $\theta(t)$, donde $\theta(t)$ es una función arbitraria de $C^1([0, T])$ que se anula para $t = T$, y $v_1^*, v_2^*, \ldots,$ es una base ortonormal del espacio $\mathring{H}^1(D)$ (en el producto escalar $(f, g)_{\mathring{H}^1(D)} = \int_D \nabla f\nabla g\, dx$), obtenido como resultado de ortonormar el sistema $v_1, v_2, \ldots$ por el método de Gramm—Schmidt (véase p. 5, § 2, cap. II).

Sea $\eta(x, t)$ una función arbitraria de $C^2(\overline{Q}_T)$ que satisface la condición (39). Puesto que para todo $t \in [0, T]$ las funciones $\eta(x, t)$ y $\eta_t(x, t)$ pertenecen a $\mathring{H}^1(D)$, éstas pueden ser desarrolladas en las siguientes series de Fourier, convergentes en la métrica de $\overset{\circ}{H}{}^1(D)$:

$$\eta(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \eta_h(t)\, v_h^*(x),$$
$$\eta_t(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \eta_h'(t)\, v_h^*(x) \tag{40}$$

donde

$$\eta_h(t) = \int_D \nabla\eta(x, t)\, \nabla v_h^*(x)\, dx. \tag{41}$$

Con ello,

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\eta_h^2(t) + \eta_h'^2(t)\right) = \int_D \left(|\nabla\eta(x, t)|^2 + |\nabla\eta_t(x, t)|^2\right) dx,\ t\in[0, T]. \tag{42}$$

Designemos por $\eta_N(x, t)$ la suma parcial de la serie (40):

$$\eta_N(x, t) = \sum_{h=1}^{N} \eta_h(t)\, v_h^*(x). \tag{43}$$

De (41) y (43) se infiere que para todo $N \geqslant 1$ la función $\eta_t - \eta_{Nt} \in \overset{\circ}{H}{}^1(D_t)$, cualquiera que sea $t \in [0, T]$. Por eso, en vista de la desigualdad de Steklov (p. 6, § 5, cap. III)

$$\| \eta_t - \eta_{Nt} \|_{L_2(D_t)} \leqslant C \| \eta_t - \eta_{Nt} \|_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)},$$

donde $C > 0$ es una constante que sólo depende del dominio D. Por consiguiente, para todo $N \geqslant 1$

$$\| \eta_t - \eta_{Nt} \|^2_{L_2(D_t)} + \| \eta - \eta_N \|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \| \eta_t - \eta_{Nt} \|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)} + \| \eta - \eta_N \|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)} = \sum_{h=N+1}^{\infty} (\eta_h^2(t) + C^2\eta_h'^2(t)).$$

cualquiera que sea $t \in [0, T]$.

En virtud de (42), para cualquier $t \in [0, T]$ $\sum_{h=N+1}^{\infty} (\eta_h^2(t) + C^2\eta_h'^2(t)) \downarrow 0$ cuando $N \to \infty$. Por ello, debido al teorema de Levi (teorema 3, p. 6, §1, cap. II), obtenemos que para $N \to \infty$

$$\| \eta - \eta_N \|^2_{\widetilde{\overset{\circ}{H}}{}^1(Q_T)} = \int_0^T \left(\| \eta_t - \eta_{Nt} \|^2_{L_2(D_t)} + \| \eta - \eta_N \|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)} \right) dt \to 0.$$

La afirmación está demostrada.

Señalemos que debido a la unicidad de la solución generalizada u del problema (1)—(4) (teorema 1), de lo demostrado se deduce que no sólo alguna subsucesión de la sucesión w_m, $m = 1, 2, \ldots$, sino que también la propia sucesión converge débilmente en $H^1(Q_T)$ hacia u.

4. Suavidad de las soluciones generalizadas. Existencia de la solución en casi todo punto y de la solución clásica. Al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas, limitémonos a la consideración del primero y segundo (para la condición límite (5) $\sigma \equiv 0$) problemas mixtos para un caso particular de la ecuación (1), es decir, de la ecuación de onda (en (1) $k \equiv 1$, $a \equiv 0$), aunque, cuando los coeficientes de esta ecuación y de la función σ sean suficientemente suaves, mediante el mismo procedimiento también se establecen resultados análogos en el caso general.

Sea $u(x, t)$ una solución generalizada del primer o del segundo problemas mixtos para la ecuación de onda

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t) \tag{44}$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi \tag{45}$$

y (o)

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{46}$$

en el caso del primer problema mixto, o

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0 \tag{47}$$

en el caso del segundo problema mixto.

En los puntos anteriores se ha mostrado que los problemas (44)—(46) y (44), (45), (47) tienen (únicas) soluciones generalizadas, si $\psi \in L_2(D)$, $f \in L_2(Q_T)$ y la función φ pertenece al espacio $\mathring{H}^1(D)$ (para el primer problema mixto) o al espacio $H^1(D)$ (para el segundo problema mixto). Con ello (véase el p. 2), cada una de estas soluciones generalizadas $u(x, t)$ se representa por la serie convergente en $H^1(Q_T)$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) v_k(x), \tag{48}$$

donde

$$U_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\, t + \frac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}} \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\, t +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\,(t-\tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

(para el segundo problema mixto

$$U_1(t)=\varphi_1+t\psi_1+\int_0^t (t-\tau)\,f_1(\tau)\,d\tau=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\Big(\varphi_1\cos\sqrt{-\lambda}\,t+\frac{\psi_1}{\sqrt{-\lambda}}\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\,t+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\int_0^t f_1(\tau)\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\,(t-\tau)\,d\tau\Big),$$

$$\varphi_k=(\varphi,\,v_k)_{L_2(D)},\qquad \psi_k=(\psi,\,v_k)_{L_2(D)},$$

$$f_k(t)=\int_{D_t} f(x,\,t)\,v_k(x)\,dx,\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\tag{50}$$

mientras que v_1, v_2, ... y λ_1, λ_2 ... son las sucesiones de las funciones propias generalizadas y de los valores propios correspondientes del primero (si se examina el problema (44)—(46)) o del segundo (si se examina el problema (44), (45), (47)) problema de contorno para el operador de Laplace en D (recordemos que en el primer problema de contorno $\lambda_k<0$ para todos los $k=1,\,2,\,\ldots$, y en el segundo problema de contorno $\lambda_k<0$ para $k=2,\,3,\,\ldots$ y $\lambda_1=0$ siendo $v_1=\mathrm{const}=1/\sqrt{|D|}$).

Supongamos que el contorno ∂D del dominio D pertenece a la clase C^s para cierto $s\geqslant 1$. Entonces, en virtud del teorema 7, p. 4, § 2, cap. IV, las funciones propias $v_k(x)$, $k=1,\,2,\,\ldots$, del primero y segundo problemas de contorno para el operador de Laplace pertenecen a los espacios $H^s_{\mathscr{D}}(D)$ y $H^s_{\mathscr{N}}(D)$, respectivamente, es decir, pertenecen a $H^s(D)$ y satisfacen en ∂D las condiciones límites

$$v_k|_{\partial D}=\ldots=\Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]}v_k\Big|_{\partial D}=0,\qquad k=1,\,2,\,\ldots,$$

en el primer problema de contorno y las condiciones límites

$$\frac{\partial v_k}{\partial n}\Big|_{\partial D}=\ldots=\frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}v_k\Big|_{\partial D}=0,\qquad k=1,\,2,\,\ldots$$

en el segundo problema de contorno para $s>1$. Recordemos que $H^1_{\mathscr{N}}(D)=H^1(D)$.

Supongamos también que en el caso del primer problema mixto (44)—(46) $\varphi\in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi\in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$ y f pertenece al subespacio $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ del espacio $H^{s-1}(Q_T)$ que se compone, cuando $s>1$, de todas las funciones $f \in H^{s-1}(Q_T)$, para las cuales

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} f|_{\Gamma_T} = 0.$$

Cuando $s=1$, $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T) = \tilde{H}^0_{\mathscr{D}}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

Al examinar el segundo problema mixto (44), (45), (47), supondremos que $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$ y f pertenece al subespacio $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ del espacio $H^{s-1}(Q_T)$ que se compone, cuando $s > 2$, de todas las funciones $f \in H^{s-1}(Q_T)$, para las cuales

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]-1} f\Big|_{\Gamma_T} = 0.$$

Cuando $s=2$, $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T) = \tilde{H}^1_{\mathscr{N}}(Q_T) = H^1(Q_T)$; para $s=1$ $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T) = \tilde{H}^0_{\mathscr{N}}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

En este punto demostraremos que de acuerdo con las suposiciones hechas las soluciones generalizadas de los problemas mixtos pertenecen al espacio $H^s(Q_T)$ y, para s suficientemente grandes, son soluciones clásicas.

TEOREMA 3. *Supongamos que para un cierto $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$ en el caso del primer problema mixto (44)—(46) $\varphi \in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, y en el caso del segundo problema mixto (44), (45), (47) $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. Entonces, la serie (48) converge en $H^s(D_t)$, uniformemente según $t \in [0, T]$, hacia la solución generalizada $u(x, t)$. Además, para cualquier $p = 1, \ldots, s$, la serie obtenida de (48) mediante la derivación término término a respecto a t, realizada p veces, converge en $H^{s-p}(D_t)$, uniformemente según $t \in [0, T]$, y para todo $t \in [0, T]$ se verifican desigualdades*

$$\sum_{p=0}^{s} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^p}{\partial t^p} (U_k(t) v_k(x)) \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant C \left(\|\varphi\|^2_{H^s(D)} + \|\psi\|^2_{H^{s-1}(D)} + \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)} \right). \qquad (51)$$

La afirmación del teorema de que una serie obtenida de (48) mediante derivación término a término respecto a t, realizada p veces, converge uniformemente según $t \in [0, T]$ en $H^{s-p}(D_t)$, $p = 0, \ldots, s$, significa que para cualquier $t \in [0, T]$ la subsucesión de las trazas $\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^p}{\partial t^p} (U_k(t) v_k(x))|_{D_t}$ en D_t de p-ésimas derivadas respecto a t de las sumas parciales de la serie (48) (cada una de estas sumas parciales pertenece a $H^1(Q_T)$) converge en $H^{s-p}(D_t)$ y esta convergencia según $t \in [0, T]$, es uniforme, es decir,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\partial^p}{\partial t^p} (U_k(t) v_k(x)) \right\|_{H^{s-p}(D_t)} \to 0 \quad \text{para} \quad M, N \to \infty.$$

Entonces, tal sucesión de sumas parciales de la serie (48) converge también en $H^s(Q_T)$, y de la acotación (51) se deduce la desigualdad

$$\|u\|_{H^s(Q_T)} \leqslant C' (\|\varphi\|_{H^s(D)} + \|\psi\|_{H^{s-1}(D)} + \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)}). \tag{52}$$

De este modo, es válida la siguiente afirmación.

COROLARIO 1. *Supongamos que para un cierto* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$ *y en el caso del primer problema mixto* (44)—(46) $\varphi \in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *y en el caso del segundo problema mixto* (44), (45), (47) $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Entonces, la solución generalizada de cada uno de estos problemas pertenece a* $H^s(Q_T)$ *y la serie* (48) *converge hacia ella en* $H^s(Q_t)$. *Se verifica, además, la desigualdad* (52).

Para todo $p = 0, \ldots, s-1$, la función $\frac{\partial^p u}{\partial t^p}$ tiene su traza en D_t, cualquiera que sea $t \in [0, T]$, y la serie obtenida de la serie (48) mediante la derivación término a término respecto a t, realizada p veces, converge en $H^{s-p}(D_t)$ hacia $\left.\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right|_{D_t}$ uniformemente según $t \in [0, T]$. Puesto que, para $p = s$ la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^s}{\partial t^s} (U_k(t) v_k(x)) \mid_{D_t}$, compuesta de las trazas en D_t de las funciones $\frac{\partial^s (U_k v_k)}{\partial t^s}$, también, pertenecientes a $H^1(Q_T)$ converge en $L_2(D_t)$ (uniformemente según $t \in [0, T]$), entonces su límite, para todo $t \in [0, T]$, puede llamarse traza en D_t de la s-ésima derivada respecto a t de la solución generalizada $u(x, t)$.

Antes de proceder a la demostración del teorema 3, demostremos la siguiente afirmación auxiliar.

LEMA 2. *Si* $f \in H^q(Q_T)$, $q \geqslant 0$, y $g \in L_2(D)$, *entonces, la función*

$$h(t) = \int_{D_t} f(x, t) g(x) \, dx$$

pertenece a $H^q(0, T)$ *y se efectúan las igualdades*

$$\frac{d^p h(t)}{dt^p} = \int_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g(x) \, dx, \quad 0 \leqslant p \leqslant q.$$

Puesto que para $p=0, 1, \ldots, q\ \frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in L_2(Q_T)$, entonces, en vista del teorema de Fubini, para casi todo $t \in (0, T)$ las funciones $g(x)\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}$ son integrables en D_t y las funciones

$$h^{(p)}(t) = \int\limits_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g(x)\, dx, \qquad p=0, \ 1, \ \ldots, q$$

$(h^{(0)}(t) = h(t))$, son integrables en $(0, T)$. Ya que, además,

$$\Big(\int\limits_{D_t} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g(x)\, dx\Big)^2 \leqslant \int\limits_{D_t} \Big(\frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p}\Big)^2 dx \cdot \|g\|^2_{L_2(D)},$$

entonces $h^{(p)}(t) \in L_2(0, T)$, $p=0, \ldots, q$.

Para una función arbitraria $\eta(x, t) \in \dot{C}^q(\overline{Q}_T)$

$$\int\limits_{Q_T} \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} \eta(x, t)\, dx\, dt = (-1)^p \int\limits_{Q_T} f(x, t) \frac{\partial^p \eta(x, t)}{\partial t^p} dx\, dt,$$

por esta razón, siendo arbitrarias $\eta_1(t) \in \dot{C}^q([0, T])$ y $\eta_2(x) \in \dot{C}^q(\overline{D})$, se verifica la igualdad

$$\int\limits_0^T \eta_1(t) \Big(\int\limits_D \frac{\partial^p f}{\partial t^p} \eta_2(x)\, dx\Big) dt = (-1)^p \int\limits_0^T \frac{d^p \eta_1(t)}{dt^p} \Big(\int\limits_D f\eta_2(x)\, dx\Big) dt.$$

El conjunto $\dot{C}^q(\overline{D})$ es siempre denso en $L_2(D)$. Por eso, la última igualdad tiene también lugar para $\eta_2 \in L_2(D)$ arbitraria y, en particular, para $\eta_2 = g$. De este modo, para toda $\eta_1(t) \in \dot{C}^q([0, T])$

$$\int\limits_0^T \eta_1 h^{(p)}\, dt = (-1)^p \int\limits_0^T \frac{d^p \eta_1}{dt^p} h\, dt, \qquad p=1, \ldots, q.$$

Esto significa que para $p = 1, \ldots, q$ la función $h^{(p)}(t)$ es la solución generalizada de p-ésimo orden de la función $h(t)$, es decir, $\frac{d^p h}{dt^p} = h^{(p)} \in L_2(0, T)$. El lema está demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3. Del lema 2 se desprende que las funciones $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, dadas por la fórmula (50), pertenecen al espacio $H^{s-1}(0, T)$ y, consecuentemente (véase el teorema 3, p. 2, § 6, cap. III), para $s \geqslant 2$, al espacio $C^{s-2}([0, T])$. Por consiguiente, las funciones U_k, $k = 1, 2, \ldots$, que están dadas por (49) y que satisfacen en $(0, T)$ las ecuaciones $U_k'' - \lambda_k U_k = f_k$, pertenecen al espacio $H^{s+1}(0, T)$ y, por tanto, al espacio $C^s([0, T])$.

Entonces, en virtud de las propiedades de las funciones propias $v_k(x)$, las sumas parciales $s_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$ de la serie (48) pertenecen al espacio $H^s(Q_T)$ y para todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^s_{\mathscr{D}}(D_t)$ en el caso del problema (44)—(46) (o al espacio $H^s_{\mathscr{N}}(D_t)$, en el caso del problema (44), (45), (47)).

Además, cuando $p = 1, \ldots, s$, la función $\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}$ pertenece al espacio $H^{s-p+1}(Q_T)$, y para todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^{s}_{\mathscr{D}}(D_t)$ $(H^s_{\mathscr{N}}(D_t))$. Por esto, según el lema 3, p. 5, § 2, cap. IV, y a consecuencia de la ortogonalidad de las funciones propias $v_k(x)$ en $L_2(D)$ y $H^1(D)$, tenemos, para todo $t \in [0, T]$, cualquier $p = 0, \ldots, s$ y cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$, las siguientes desigualdades

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} - \frac{\partial^p S_M}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1' \left\| \Delta^{\frac{s-p}{2}} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(S_N - S_M) \right\|^2_{L_2(D_t)} =$$

$$= C_1 \left\| \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\frac{s-p}{2}} \frac{d^p U_k(t)}{dt^p} v_k(x) \right\|^2_{L_2(D_t)} = C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2,$$

si $s - p$ es par y

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} - \frac{\partial^p S_M}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1' \left\| \Delta^{\frac{s-p-1}{2}} \frac{\partial^p}{\partial t^p}(S_N - S_M) \right\|^2_{H^1(D_t)} =$$

$$= C_1' \left\| \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\frac{s-p-1}{2}} \frac{d^p U_k(t)}{dt^p} v_k(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2,$$

si $s - p$ es impar. Es decir, para todo $t \in [0, T]$, cualquier $p = 0, \ldots, s$, y cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$,

$$\left\| \frac{\partial^p (S_N - S_M)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2. \tag{53}$$

Análogamente, para todo $t \in [0, T]$, cualquier $p = 0, \ldots, s$ y cualquier $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k(t)}{dt^p} \right)^2$$

en el caso del primer problema mixto ($\lambda_1 \neq 0$), y

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} = \left\| \frac{\partial^p (U_1 v_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{\partial^p U_1}{\partial t^p} \right)^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{|D|}} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} + 2 \left\| \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=2}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right)$$

en el caso del segundo problema mixto ($\lambda_1 = 0$). De este modo, para todo $t \in [0, T]$, $p = 0, \ldots, s$, $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_3 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{h=1}^{N} |\lambda_h|^{s-p} \left(\frac{d^p U_h}{dt^p} \right)^2 \right).$$

Sumando las últimas desigualdades según p, desde cero hasta s, obtendremos

$$\sum_{p=0}^{s} \left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{s-p}(D_t)} \leqslant C_3 \sum_{p=0}^{s} \left[\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{h=1}^{N} |\lambda_h|^{s-p} \left(\frac{d^p U_h}{dt^p} \right)^2 \right]. \tag{54}$$

Hagamos ahora uso del siguiente lema cuya demostración daremos a conocer más abajo.

LEMA 3. *Si para un cierto $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$ y $\varphi \in H^s_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ en el caso del primer problema mixto (44)—(46), o bien $\varphi \in H^s_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^{s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ en el caso del segundo problema mixto (44), (45), (47), entonces, para cualquier $p \leqslant s$ la serie*

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{d^p U_h(t)}{dt^p} \right)^2 |\lambda_h|^{s-p}$$

converge uniformemente según $t \in [0, T]$ y

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{d^p U_h}{dt^p} \right)^2 |\lambda_h|^{s-p} \leqslant C \left(\|\varphi\|^2_{H^s(D)} + \|\psi\|^2_{H^{s-1}(D)} + \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)} \right), \tag{55}$$

donde la constante $C > 0$ depende sólo de Q_T.

Debido a este lema, de las desigualdades (53) se deduce que para todo $p = 0, 1, \ldots, s$ la sucesión $\left. \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right|_{D_t}$ converge en $H^{s-p}(D_t)$ uniformemente según $t \in [0, T]$, y de las desigualdades (54), en virtud de la evidente acotación $\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2 \leqslant \mathrm{const}\ (\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \|\psi\|^2_{L_2(D)} + \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)})$ se desprende la desigualdad (51). El teorema está demostrado.

Del corolario 1 se desprende que, siendo $s = 2$, la solución generalizada de cada uno de los problemas mixtos en consideración pertenece a $H^2(Q_T)$ y, por tanto, es la solución en casi todo punto.

Señalemos que en las condiciones del teorema 3, además de la suavidad de las funciones dadas, se supone el cumplimiento de las siguientes condiciones

$$\varphi|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]}\varphi|_{\partial D} = 0, \quad \psi|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}\psi|_{\partial D} = 0 \tag{56}$$

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} f|_{\Gamma_T} = 0 \tag{57}$$

en el caso del primer problema mixto, y de las condiciones

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1}\varphi\Big|_{\partial D} = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]}\psi\Big|_{\partial D} = 0 \tag{58}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]} f\Big|_{\Gamma_T} = 0 \tag{59}$$

en el caso del segundo problema mixto. Notemos que algunas de las condiciones de este especie son necesarias para que sea válida la afirmación del teorema 3.

Efectivamente, por ejemplo, en el caso del primer problema mixto para $s \geqslant 2$, del hecho de que $\varphi(x) = u(x, t)|_{t=0}$ se representa por la serie (48), convergente en $H^s(D_0)$, mientras que $\psi(x) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$ (u es una solución casi por doquier) se representa por la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{dU_k(t)}{dt}\Big|_{t=0} v_k(x)$, convergente en $H^{s-1}(D_0)$, se deduce el cumplimiento de las condiciones (56). Puesto que la serie (48) converge en $H^s(Q_T)$ hacia la solución en casi todo punto $u(x, t)$ y, por consiguiente, las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(t)\,\Delta v_k(x)$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{d^2U_k(t)}{dt^2} v_k(x)$ convergen en $H^{s-2}(Q_T)$ hacia Δu y u_{tt}, respectivamente, entonces $f = u_{tt} - \Delta u$ satisface, para $s \geqslant 3$, las condiciones

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]} f|_{\Gamma_T} = 0.$$

En el teorema 3 se ha exigido, para s par, la condición adicional $\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} f|_{\Gamma_T} = 0$. Esta condición es en realidad superflua. Para simplificar, mostremos esto para $s = 2$.

COROLARIO 2. *Sea $\partial D \in C^2$ y $f \in H^1(Q_T)$, y supongamos que en el caso del problema (44)—(46) $\varphi \in H^2_{\mathscr{D}}(D)$, $\psi \in H^1_{\mathscr{D}}(D)$, y en el caso del problema (44), (45), (47) $\varphi \in H^2_{\mathscr{N}}(D)$, $\psi \in H^1_{\mathscr{N}}(D)$. Entonces, para $p = 0, 1, 2$, una serie, obtenida de (48) mediante derivación realizada p veces término a término respecto a t, converge en $H^{2-p}(D_t)$ uniformemente según $t \in [0, T]$ y la suma $u(x, t)$ de la serie (48) es una solución casi por doquier del problema (44)—(46) o, respectivamente, del problema (44), (45), (47). Con ello, para $s = 2$ se verifican las desigualdades (51), cualquiera que sea $t \in [0, T]$.*

En vista del teorema 3, basta demostrar esta afirmación para las condiciones iniciales homogéneas: $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Puesto que para $k > 1$

$$U_k(t) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{|\lambda_k|}\left(f_k(t) - f_k(0)\cos\sqrt{-\lambda_k}\, t\right) -$$

$$- \frac{1}{|\lambda_k|}\int_0^t f_k'(\tau)\cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau,$$

$$U_k'(t) = \int_0^t f_k(\tau)\cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} f_k(0)\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}\, t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}\int_0^t f_k'(\tau)\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau,$$

$$U_k''(t) = f_k(t) + \lambda_k U_k(t) =$$

$$= f_k(0)\cos\sqrt{-\lambda_k}\, t + \int_0^t f_k'(\tau)\cos\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau,$$

entonces,

$$\lambda_k^2 U_k^2(t) \leqslant \text{const}\left(f_k^2(t)+f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right),$$

$$|\lambda_k|(U_k'(t))^2 \leqslant \text{const}\left(f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right),$$

$$(U_k''(t))^2 \leqslant \text{const}\left(f_k^2(0)+T\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau\right).$$

Y como, en virtud del lema 2 y del hecho de que f pertenece al espacio $H^1(Q_T)$, las series $\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T (f_k'(\tau))^2\,d\tau$ y $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t)$ convergen uniformemente según $t\in[0, T]$, entonces, de las desigualdades (53) y (54) se deduce la validez de la afirmación que vamos a demostrar.

Señalemos que si $f=0$, de la correlación

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(D_t)}+\|\,|\nabla u|\,\|^2_{L_2(D_t)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{dU_k(t)}{dt}\right)^2+|\lambda_k|U_k^2(t)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(\psi_k\cos\sqrt{|\lambda_k|}\,t-\varphi_k\sqrt{|\lambda_k|}\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_k|}\,t)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\psi_k\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda_k|}\,t+\varphi_k\sqrt{|\lambda_k|}\cos\sqrt{|\lambda_k|}\,t\right)^2\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k^2+|\lambda_k|\varphi_k^2)=\|\psi\|^2_{L_2(D)}+\|\,|\nabla\varphi|\,\|_{L_2(D)}$$

se deduce que para las soluciones, cualquiera que sea $t\in[0, T]$, tiene lugar la igualdad

$$\int_{D_t}\left(\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2+|\nabla u(x,t)|^2\right)dx=\int_D(\psi^2+|\nabla\varphi|^2)\,dx,$$

que se denomina *«ley de conservación de la energía»*.

TEOREMA 4. *Sea* $\partial D\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}$ *y supongamos que el caso del problema* (44)—(46) $\varphi\in H_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, $\psi\in H_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D)$, $f\in\widetilde{H}_{\mathscr{D}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_T)$, *y en el caso del problema* (44), (45), (47) $\varphi\in H_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, $\psi\in H_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D)$, $f\in\widetilde{H}_{\mathscr{N}}^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_T)$. *Entonces, la serie* (48) *converge en* $C^2(\overline{Q}_T)$ *y su suma* $u(x, t)$ *es la solución clásica del problema* *correspondiente. Además, se verifican las desigualdades*

$$\|u\|_{C^p(\overline{Q}_T)} \leqslant C\,(\|\varphi\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+p+1}(D)} + \|\psi\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+p}(D)} + \\ + \|f\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]-p}(Q_T)}), \quad p=0,\ 1,\ 2. \qquad (60)$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\partial D \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$, las funciones propias generalizadas $v_1(x)$, $v_2(x)$, . . . del primero y segundo problemas de contorno para el operador de Laplace en D pertenecen al espacio $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$ y, por tanto, en virtud del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, al espacio $C^2(\overline{D})$. Por eso, las sumas parciales $S_N(x, t)$, $N=1, 2, \ldots$, de la serie (48) pertenecen a $C^2(\overline{Q}_T)$.

Según el teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, y la desigualdad (53), para todo $t \in [0, T]$ y $1 \leqslant M < N$ tenemos

$$\|S_N - S_M\|^2_{C^2(\overline{D}_t)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N - S_M)\right\|^2_{C^1(\overline{D}_t)} + \\ + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(S_N - S_M)\right\|^2_{C(\overline{D}_t)} \leqslant C\left(\|S_N - S_M\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D_t)} + \right. \\ \left. + \left\|\frac{\partial}{\partial t}(S_N - S_M)\right\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(D_t)} + \left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}(S_N - S_M)\right\|^2_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(D_t)}\right) \leqslant \\ \leqslant C_4 \sum_{p=0}^{2} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p} \left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2,$$

de donde proviene que

$$\|S_N - S_M\|^2_{C^2(\overline{Q}_T)} \leqslant C_4 \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{p=0}^{2} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p} \left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2.$$

Conforme al lema 3, las series de términos comunes $\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2 |\lambda_k|^{\left[\frac{n}{2}\right]+3-p}$, $p=0,\ 1,\ 2$ convergen uniformemente en $[0, T]$, por lo que la serie (48) converge en $C^2(\overline{Q}_T)$. De este modo, $u \in C^2(\overline{Q}_T)$. Según el teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, para $p=0,\ 1,\ 2$

$$\|u\|_{C^p(\overline{Q}_T)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{q=0}^{p} \left\|\frac{\partial^q u}{\partial t^q}\right\|_{C^{p-q}(\overline{D}_t)} \leqslant \\ \leqslant C \max_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{q=0}^{p} \left\|\frac{\partial^q u}{\partial t^q}\right\|_{H^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+p-q}(D_t)},$$

Por esta razón, las desigualdades (60) se deducen de las desigualdades (51) en las que $s = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 + p$. El teorema queda demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3. Es cómodo realizarla en dos etapas. Primero establezcamos su validez cuando $f = 0$, y luego, cuando $\varphi = \psi = 0$.

Sea $f = 0$. De las fórmulas (49) se desprende que para todo $t \in [0, T]$ y $k = 1, 2, \ldots$ (en el caso del primer problema mixto) y $k = 2, 3, \ldots$ (en el caso del segundo problema mixto)

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + \frac{|\psi_k|}{\sqrt{|\lambda_k|}},$$

y en el caso del segundo problema mixto

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + T|\psi_1|.$$

Además, para todo $t \in [0, T]$ tenemos

$$\left|\frac{d^pU_k}{dt^p}\right| \leqslant |\varphi_k|\,|\lambda_k|^{p/2} + |\psi_k|\,|\lambda_k|^{(p-1)/2}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

cualquiera que sea $p = 1, 2, \ldots$ (si $\lambda_1 = 0$, entonces $(\lambda_1)^0 = 1$). Por lo tanto, para todo $t \in [0, T]$

$$\left(\frac{d^pU_k}{dt^p}\right)^2 |\lambda_k|^{s-p} \leqslant 2\left(\varphi_k^2 |\lambda_k|^s + \psi_k^2 |\lambda_k|^{s-1}\right)$$

cualesquiera que sean $k \geqslant 1$ y p, $0 \leqslant p \leqslant s$. Por ello, la afirmación del lema 3 (cuando $f = 0$) se deduce de la convergencia de las series numéricas $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 |\lambda_k|^s$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 |\lambda_k|^{s-1}$ y de las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 |\lambda_k|^s \leqslant C \|\varphi\|^2_{H^s(D)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2 |\lambda_k|^{s-1} \leqslant C \|\psi\|_{H^{s-1}(D)},$$

en las cuales la constante $C > 0$ no depende ni de φ ni de ψ (teorema 8, p. 5, § 2, cap. IV).

Para demostrar la validez del lema 3 cuando $\varphi = \psi = 0$, nos harán falta varias afirmaciones auxiliares.

LEMA 4. *Sea $\partial D \ni C^2$. Entonces*

1) *Si la función $f(x, t)$ pertenece al espacio $\tilde{H}^q_{\mathscr{D}}(Q_T)$, $q \geqslant 2$, para cualquier p, $p = 1, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ pertenece al espacio $\tilde{H}^{q-p}_{\mathscr{D}}(Q_T)$;*

2) *si la función $f(x, t)$ pertenece al espacio $\tilde{H}^q_{\mathscr{N}}(Q_T)$, $q \geqslant 2$, para cualquier p, $p = 1, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ pertenece al espacio $\tilde{H}^{q-p}_{\mathscr{N}}(Q_T)$.*

Para demostrar la primera afirmación del lema es, en realidad, suficiente establecer que si $G \in H^2(Q_T)$ y $G|_{\Gamma_T}=0$, entonces $G_t|_{\Gamma_T}=0$.

Para demostrar la segunda afirmación basta mostrar que si $G \in H^3(Q_T)$ y $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, entonces $\frac{\partial}{\partial n} G_t|_{\Gamma_T}=0$.

Demostremos la primera afirmación. Como $G|_{\Gamma_T}=0$, tenemos, para cualquier i, $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\int_{Q_T} G_{x_i t}\eta\, dx\, dt = -\int_{Q_T} G_{x_i}\eta_t\, dx\, dt = \int_{Q_T} G\eta_{x_i t}\, dx\, dt = -\int_{Q_T} G_t\eta_{x_i}\, dx\, dt,$$

donde η es una función arbitraria de $C^2(\overline{Q}_T)$ que satisface las condiciones $\eta|_{D_0}=\eta|_{D_T}=0$. Por otra parte, para cualquier i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int_{Q_T} G_{x_i t}\eta\, dx\, dt = \int_{\Gamma_T} G_t\eta n_i\, dS\, dt - \int_{Q_T} G_t\eta_{x_i}\, dx\, dt,$$

donde n_i es el coseno del ángulo entre la normal (exterior) a Γ_T y el eje Ox_i.

Así pues, para todas las funciones $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_T)$ que satisfagan las condiciones $\eta|_{\partial D_0}=\eta|_{\partial D_T}=0$, se verifican las desigualdades

$$\int_{\Gamma_T} G_t\eta n_i\, dS\, dt = 0, \qquad i=1, \ldots, n. \tag{61}$$

Cubramos la superficie cerrada $\overline{\Gamma}_T$ con un número finito de bolas (abiertas, $(n+1)$-dimensionales) $V_1, \ldots, V_m$ de tal manera que para todo $j=1, \ldots, m$ se halle un número $i=i(j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tal que en $\overline{\Gamma}_{Tj}$, donde $\Gamma_{Tj}=\Gamma_T \cap V_j$, sea que la función $|n_{i(j)}(x)|>0$. Tomemos un cierto j, $1 \leqslant j \leqslant m$, arbitrario y una función arbitraria $\eta(x, t) \in \dot{C}^2(\overline{\Gamma}_{Tj})$, prolongada (en Γ_T) por cero fuera de Γ_{Tj}. De (61) se infiere que

$$\int_{\Gamma_{Tj}} G_t n_{i(j)}(x)\,\eta(x, t)\, dS\, dt = 0.$$

Puesto que el conjunto de funciones $n_{i(j)}(x)\,\eta(x, t)$ es, para $\eta(x, t)$ de $\dot{C}^2(\overline{\Gamma}_{Tj})$ arbitrarias, siempre denso en $L_2(\Gamma_{Tj})$, entonces $G_t|_{\Gamma_{Tj}}=0$. Por consiguiente, $G_t|_{\Gamma_T}=0$. La primera afirmación queda así demostrada.

Análogamente se demuestra la segunda afirmación. En efecto, como $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, entonces para toda $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$, $\eta|_{D_0}=\eta|_{D_T}=0$, tenemos

$$\int\limits_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx \, dt = -\int\limits_{Q_T} \Delta G \cdot \eta_t \, dx \, dt = \int\limits_{Q_T} \nabla G \cdot \nabla \eta_t \, dx \, dt =$$

$$= -\int\limits_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx \, dt.$$

Por otra parte,

$$\int\limits_{Q_T} \Delta G_t \cdot \eta \, dx \, dt = \int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial G_t}{\partial n} \cdot \eta \, dS \, dt - \int\limits_{Q_T} \nabla G_t \cdot \nabla \eta \, dx \, dt,$$

de donde

$$\int\limits_{\Gamma_T} \frac{\partial}{\partial n} G_t \cdot \eta \, dS \, dt = 0$$

para cualquier $\eta \in C^2(\overline{\Gamma}_T)$. Por consiguiente, $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$. El lema está demostrado.

LEMA 5. *Si $\partial D \in C^2$ y la función $f(x, t)$ pertenece al espacio $\tilde{H}^q_{\mathscr{D}}(Q_T)$ o bien al $\tilde{H}^q_{\mathscr{N}}(Q_T)$, para cierto $q \geqslant 2$, entonces, para cualquier $t \in [0, T]$ y $p = 1, \ldots, q-1$ la traza de la función $\frac{\partial^p f}{\partial t^p}$ en D_t pertenece a $H^{q-p-1}_{\mathscr{D}}(D_t)$ o, respectivamente, a $H^{q-p-1}_{\mathscr{N}}(D_t)$.*

Según el lema 4, para demostrar el lema 5 basta demostrar la afirmación siguiente. Si la función $G(x, t) \in H^2(Q_T)$, entonces para todo $t \in [0, T]$ se tiene $G|_{D_t} \in H^1(D_t)$; si $G \in H^2(Q_T)$ y $G|_{\Gamma_T} = 0$, entonces para todo $t \in [0, T]$ tendremos $G|_{D_t} \in \mathring{H}^1(D_t)$.

En virtud del teorema de las trazas (teorema 1, p. 1, § 5, cap. III), para todo $t \in [0, T]$ resulta que $G|_{D_t} \in L_2(D_t)$ y $G_{x_i}|_{D_t} \in L_2(D_t)$, $i = 1, \ldots, n$. Tomemos una función arbitraria $\eta_1(t)$ de $C^1([0, T])$ y una función arbitraria $\eta_2(x)$ de $\dot{C}^1(\overline{D})$. Según la fórmula de Ostrogradski, para cualquier $i = 1, \ldots, n$

$$\int\limits_{Q_T} G_{x_i} \eta_1 \eta_2 \, dx \, dt = -\int\limits_{Q_T} G \eta_1 \eta_{2x_i} \, dx \, dt, \tag{62}$$

es decir,

$$\int\limits_0^T \eta_1(t) \left[\int\limits_{D_t} (G_{x_i} \eta_2 + G \eta_{2x_i}) \, dx \right] dt = 0.$$

Ya que el conjunto $C^1([0, T])$ es siempre denso en $L_2(0, T)$, y la función $\int\limits_{D_t} (G_{x_i} \eta_2 + G \eta_{2x_i}) \, dx$ pertenece, debido al lema 2, al espacio

$H^1(0, T)$ y, consecuentemente, es continua en $[0, T]$, entonces, para la función arbitraria $\eta_2(x) \in \dot{C}^1(\overline{D})$

$$\int_{D_t} G_{x_i}\eta_2\,dx = -\int_{D_t} G\eta_{2x_i}\,dx, \tag{63}$$

cualquiera que sea $t \in [0, T]$.

Por lo tanto, para $t \in [0, T]$ cualquiera, $G\,|_{D_t} \in H^1(D_t)$ y la traza en D_t de la función $G_{x_i}(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, es la derivada generalizada de G respecto a x_i.

Sea, ahora, $G \in H^2(Q_T)$ y $G\,|_{\Gamma_T} = 0$. En este caso las igualdades (62) también se verifican para cualquier función $\eta_2(x)$ de $C^1(\overline{D})$. Por eso, para toda $\eta_2(x)$ de $C^1(\overline{D})$ también tienen lugar las igualdades (63) cualquiera que sea $t \in [0, T]$.

Según lo demostrado, para todo $t \in [0, T]$, $G\,|_{D_t} \in H^1(D_t)$, por lo que para cualquier $\eta_2(x) \in C^1(\overline{D})$, a la par con las igualdades (63), también se cumplen las igualdades

$$\int_{D_t} G_{x_i}\eta_2\,dx = \int_{\partial D_t} G\eta_2 n_i\,dS - \int_{D_t} G\eta_{2x_i}\,dx.$$

De este modo, siendo $\eta_2(x)$ de $C^1(\overline{D})$ arbitraria

$$\int_{\partial D_t} G\eta_2 n_i\,dS = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

De estas igualdades se deduce (véase la demostración del lema 4) que en el contorno ∂D_t del dominio D_t la traza de la función $G(x, t)|_{D_t}$ es nula. El lema está demostrado.

OBSERVACIÓN. De la demostración del lema 5 proviene inmediatamente que es válida la siguiente afirmación. Si $\partial D \in C^2$ y $f(x, t) \in H^q(Q_T)$, entonces $f\,|_{D_t} \in H^{q-1}(D_t)$, cualquiera que sea $t \in [0, T]$.

LEMA 6. *Sea $v_1, v_2, \ldots$ una base ortonormal del espacio $L_2(D)$. Entonces, para toda función $G(x, t) \in L_2(Q_T)$ es válida la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(\int_{D_t} G(x, t)\, v_k(x)\,dx \right)^2 dt = \|G\|^2_{L_2(Q_T)}.$$

Puesto que para casi todo $t \in (0, T)$ la función $G(x, t) \in L_2(D_t)$, entonces para estos valores de t

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{D_t} G(x, t)\, v_k(x)\,dx \right)^2 = \|G(x, t)\|^2_{L_2(D_t)}.$$

Integrando esta correlación en $(0, T)$, de acuerdo con el teorema de Levi, obtenemos la igualdad necesaria. El lema está demostrado.

Pasemos ahora a la demostración del lema 3 cuando $\varphi = \psi = 0$. De (49) y (50) tenemos

$$U_k(t) = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int_{Q_t} f(x, \tau)\, v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{49'}$$

$\Big($para el segundo problema mixto $U_1(t) = \frac{1}{\sqrt{|D|}} \int_{Q_t} (t-\tau)\, x \times$

$\times f(x, \tau)\, dx\, d\tau\Big)$.

Supongamos al principio que $p = 0$. Puesto que las funciones f y v_k pertenecen al espacio $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ (o bien $\tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{N}}(Q_T)$), y $\Delta^\mu v_k = \lambda_k^\mu v_k$ para cualquier $\mu = 1, \ldots, [s/2]$, entonces, si $s-1$ es par, para todo $t \in [0, T]$

$$|\lambda_k|^{s/2} U_k(t) =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_T} f(x, \tau)\, \Delta^{\frac{s-1}{2}} v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_T} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, \tau) \cdot v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau = \tilde{\alpha}_k(t),$$

donde

$$\tilde{\alpha}_k^2(t) \leqslant \int_0^t \operatorname{sen}^2 \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, d\tau \cdot \int_0^t d\tau \Big(\int_{D_\tau} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, \tau) \cdot v_k(x)\, dx \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant T \int_0^T \Big(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, t) \cdot v_k(x)\, dx \Big)^2 dt.$$

Ya que $\Delta^{\frac{s-1}{2}} f \in L_2(Q_T)$, en virtud del lema 6, la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \Big(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, t)\, v_k(x)\, dx \Big)^2 dt$ converge y

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \Big(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, t)\, v_k(x)\, dx \Big)^2 dt =$$

$$= \int_{Q_T} (\Delta^{\frac{s-1}{2}} f)^2\, dx\, dt \leqslant C' \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Por consiguiente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_k^2(t)$ converge uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}_k^2(t) \leqslant TC' \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)} C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Cuando $s-1$ es impar,

$$|\lambda_k|^{s/2} U_k(t) =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} |\lambda_k|^{1/2} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, \tau) v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_k|}(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, \tau) v_k(x)\, d(\cos \sqrt{|\lambda_k|}(t-\tau)\, dx =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \Big\{ \int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) v_k(x)\, dx -$$

$$- \cos \sqrt{|\lambda_k|}\, t \int_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, 0) v_k(x)\, dx -$$

$$- \int_0^t \cos \sqrt{|\lambda_k|}(t-\tau) \Big[\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x, \tau) v_k(x)\, dx \Big] d\tau =$$

$$= \widetilde{\widetilde{\alpha}}{}_k^{(1)}(t) + \widetilde{\widetilde{\alpha}}{}_k^{(2)}(t) + \widetilde{\widetilde{\alpha}}{}_k^{(3)}(t) = \widetilde{\widetilde{\alpha}}_k(t),$$

donde

$$|\widetilde{\widetilde{\alpha}}{}_k^{(1)}(t)|^2 = \Big| \int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) v_k(x)\, dx \Big|^2,$$

$$|\widetilde{\widetilde{\alpha}}{}_k^{(2)}(t)|^2 \leqslant \Big| \int_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, 0) v_k(x)\, dx \Big|^2,$$

$$|\widetilde{\widetilde{\alpha}}{}_k^{(3)}(t)|^2 \leqslant T \int_0^T \Big(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t(x, t) v_k(x)\, dx \Big)^2 dt.$$

La función $\Delta^{\frac{s-2}{2}} f \in H^1(Q_T)$, por eso, para todo $t \in [0, T]$ se tiene $\Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) \in L_2(D_t)$ y

$$\| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) \|^2_{L_2(D_t)} \leqslant \text{const} \, \| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) \|^2_{H^1(Q_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \, \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Por lo tanto, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widetilde{\widetilde{\alpha}}^{(2)}(t)|^2$ converge uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1} |\widetilde{\widetilde{\alpha}}_k^{(2)}(t)|^2 \leqslant C^{(2)} \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Dado que para toda función $G(x, t) \in H^1(Q_T)$, siendo $|t'-t''| \to 0$, $t' \in [0, T]$, $t'' \in [0, T]$:

$$\| G \|^2_{L_2(D_{t'})} - \| G \|^2_{L_2(D_{t''})} = 2 \int\limits_{t''}^{t'} \int\limits_{D_\tau} G(x, \tau) G_\tau(x, \tau)\, dx\, d\tau = o(1),$$

lo que se debe a la continuidad absoluta de la integral, entonces, la función $\| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f \|^2_{L_2(D_t)}$ es continua en $[0, T]$. Por lo tanto, para todo $t \in [0, T]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int\limits_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, t) v_k(x)\, dx \Big)^2 =$$
$$= \| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f \|^2_{L_2(D_t)} \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)},$$

con la particularidad de que, de acuerdo al teorema de Dini, la serie en el primer miembro de esta igualdad (en vista del lema 2, los términos de esta serie son continuos en $[0, T]$) converge uniformemente en $[0, T]$. De aquí se deduce que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widetilde{\widetilde{\alpha}}^{(1)}(t)|^2$ converge uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widetilde{\widetilde{\alpha}}^{(1)}(t)|^2 \leqslant C^{(1)} \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Luego, la función $\Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t \in L_2(Q_T)$, por lo que, según el lema 6,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T \Big(\int\limits_{D_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t(x, t) v_k(x)\, dx \Big)^2 dt =$$
$$= \| \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_t \|_{L_2(Q_T)} \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Así pues, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\tilde{\alpha}}^{(3)}(t)|^2$ converge uniformemente en el segmento $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\tilde{\alpha}}^{(3)}(t)|^2 \leqslant C^{(3)} \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

De este modo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\alpha}}_k^2(t)$ converge uniformemente en $[0, T]$ y su suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\alpha}}_k^2(t) \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

La afirmación del lema 3 para $p = 0$ está demostrada.

Del modo análogo esta afirmación se demuestra para $p = 1$. De acuerdo con (49'), (50) para $s - 1$ pares

$$|\lambda_k|^{\frac{s-1}{2}} \frac{dU_k}{dt} =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_t} f(x, \tau) \Delta^{\frac{s-1}{2}} v_k(x) \cos \sqrt{|\lambda_k|}(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-1}{2}} \int_{Q_T} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, \tau) \cdot v_k(x) \cos \sqrt{|\lambda_k|}(t-\tau)\, dx\, d\tau = \tilde{\beta}_k(t).$$

Ya que

$$\tilde{\beta}_k^2(t) \leqslant T \int_0^T dt \left(\int_{D_t} \Delta^{\frac{s-1}{2}} f(x, t) v_k(x)\, dx \right)^2,$$

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\beta}_k^2(t)$, igual que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^2(t)$, converge uniformemente $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\beta}_k^2(t) \leqslant C \| f \|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Cuando $s - 1$ es impar,

$$|\lambda_k|^{\frac{s-1}{2}} \frac{dU_k}{dt} =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} |\lambda_k|^{\frac{1}{2}} \int_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x, \tau) v_k(x) \cos \sqrt{|\lambda_k|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau =$$

$$= (-1)^{\frac{s-2}{2}} \Big(\operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_h|}\, t \cdot \int\limits_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x,\,0)\, v_h(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_t} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x,\,\tau)\, v_k(x) \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda_h|}\,(t-\tau)\, dx\, d\tau \Big) =$$

$$= \widetilde{\widetilde{\beta}}{}_k^{(2)}(t) + \widetilde{\widetilde{\beta}}{}_k^{(3)}(t) = \widetilde{\widetilde{\beta}}_k(t).$$

Puesto que

$$|\widetilde{\widetilde{\beta}}{}_k^{(2)}(t)|^2 \leqslant \Big(\int\limits_{D_0} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f(x,\,0)\, v_k(x)\, dx \Big)^2,$$

$$|\widetilde{\widetilde{\beta}}{}_k^{(3)}(t)|^2 \leqslant T \int\limits_0^T \Big(\int\limits_{D_\tau} \Delta^{\frac{s-2}{2}} f_\tau(x,\,\tau)\, v_k(x)\, dx \Big)^2 d\tau,$$

entonces, las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\widetilde{\widetilde{\beta}}{}_k^{(s)}(t))^2$ (lo mismo que las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \times$ $\times\, (\widetilde{\widetilde{\alpha}}{}_k^{(s)}(t))^2$), $s = 2,\, 3$, y, por tanto, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\beta}}{}_k^2(t)$ convergen uniformemente en $[0,\, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\widetilde{\beta}}{}_k^2(t) \leqslant C\, \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

La afirmación del lema 3 para $p = 1$ está demostrada.

Sea, ahora, $p \geqslant 2$. Dado que la función $U_h(t)$ satisface la ecuación diferencial $U_h'' - \lambda_h U_h = f_h$, cuando p es par, $2 \leqslant p \leqslant s$,

$$\frac{d^p U_h}{dt^p} = \lambda_h^{\frac{p}{2}} U_h + \lambda_h^{\frac{p-2}{2}} f_h + \lambda_h^{\frac{p-4}{2}} \frac{d^2 f_h}{dt^2} + \ldots + \frac{d^{p-2} f_h}{dt^{p-2}},$$

y cuando p es impar, $2 < p \leqslant s$,

$$\frac{d^p U_h}{dt^p} = \lambda_h^{\frac{p-1}{2}} \frac{dU_h}{dt} + \lambda_h^{\frac{p-3}{2}} \frac{df_h}{dt} + \ldots + \frac{d^{p-2} f_h}{dt^{p-2}}.$$

Por esta razón, la afirmación del lema 3, para $p \leqslant s$ cualquiera, quedará demostrada, si comprobamos que, para todo q, $0 \leqslant q \leqslant s-2$, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{s-2-q} \Big(\frac{d^q f_k}{dt^q} \Big)^2$ converge uniformemente en $[0,\, T]$ y tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{s-2-q} \Big(\frac{d^q f_k}{dt^q} \Big)^2 \leqslant C\, \|f\|_{H^{s-1}(Q_T)}^2,$$

en la que la constante $C > 0$ depende sólo de Q_T.

Cuando $s-q$ es par, en virtud de los lemas 2 y 5 tenemos para cualquier $t\in[0,\ T]$

$$|\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{d^q f_k}{dt^q}=|\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}}\int\limits_{D_t}\frac{\partial^q f(x,\ t)}{\partial t^q}v_k(x)\,dx=$$

$$=(-1)^{\frac{s-q-2}{2}}\int\limits_{D_t}\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f(x,\ t)}{\partial t^q}v_k(x)\,dx=\widetilde{\gamma}_k(t).$$

Puesto que $\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\in H^1(Q_T)$, entonces para cualquier $t\in[0,\ T]\times$ $\times\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\in L_2(D_t)$ y la función $\left\|\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f(x,\ t)}{\partial t^q}\right\|^2_{L_2(D_t)}$ es continua en $[0,\ T]$. Por eso, la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{\gamma}_k^2(t)$ converge uniformemente en $[0,\ T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\gamma}_k^2(t)=\left\|\Delta^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f(x,\ t)}{\partial t^q}\right\|^2_{L_2(D_t)}\leqslant C\,\|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

Sea $s-q$ impar. Entonces, para todo $t\in[0,\ T]$

$$|\lambda_k|^{\frac{s-q-2}{2}}\frac{\partial^q f_k}{\partial t^q}=$$

$$=(-1)^{\frac{s-q-3}{2}}|\lambda_k|^{\frac{1}{2}}\int\limits_{D_t}\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f(x,\ t)}{\partial t^q}v_k(x)\,dx=\sqrt{|\lambda_k|}\,\widetilde{\widetilde{\gamma}}_k(t).$$

Puesto que $\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\in\widetilde{H}^2_{\mathscr{D}}(Q_T)$ (o bien $\widetilde{H}^2_{\mathscr{N}}(Q_T)$), entonces, en vista del lema 5, para cualquier $t\in[0,\ T]\ \Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\in\mathring{H}^1(D_t)$ (o bien $H^1(D_t)$), con la particularidad de que la función $\left\|\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\right\|^2_{H^1(D_t)}$ es continua en $[0,\ T]$. Ya que para todo $t\in[0,\ T]$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\widetilde{\gamma}}_k^2(t)\,(|\lambda_k|+1)=\left\|\Delta^{\frac{s-q-3}{2}}\frac{\partial^q f}{\partial t^q}\right\|^2_{H^1(D_t)},$$

entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)(|\lambda_k|+1)$ y, con mayor razón, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)|\lambda_k|$ convergen uniformemente en $[0, T]$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\gamma}}_k^2(t)|\lambda_k| \leqslant \left\| \Delta^{\frac{s-q-3}{2}} \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant C \|f\|^2_{H^{s-1}(Q_T)}.$$

El lema está demostrado.

Como ya indicamos, sin las condiciones del tipo (56), (57) (en el primer problema mixto) y (58), (59) (en el segundo problema mixto), impuestas a las funciones dadas, los teoremas 3 u 4 no son válidos. No obstante, si queremos establecer la suavidad de las soluciones generalizadas y no la convergencia en el espacio correspondiente de la serie de Fourier, las condiciones (56), (57) y, respectivamente, las (58), (59) pueden ser considerablemente debilitadas. Examinemos, por ejemplo, el caso del primer problema mixto.

TEOREMA 3'. *Supongamos que para un cierto* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^s$, $\varphi \in H^s(D)$, $\psi \in H^{s-1}(D)$, $f \in H^{s-1}(Q_T)$ *y que se han cumplido las siguientes condiciones de concordancia:*

$$\varphi|_{\partial D} = \ldots = \left[\Delta^{\left[\frac{s-1}{2}\right]} \varphi + \sum_{i=0}^{\left[\frac{s-3}{2}\right]} \Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]-i} \frac{\partial^{2i} f}{\partial t^{2i}} \right]\Big|_{\partial D_0} = 0 \qquad (64)$$

y para $s \geqslant 2$

$$\psi|_{\partial D} = \ldots = \left[\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-1} \psi + \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]-2} \Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-2-i} \frac{\partial^{2i+1} f}{\partial t^{2i+1}} \right]\Big|_{\partial D_0} = 0 \qquad (65)$$

(*consideramos que para* $s < 0$ $\sum_{i=0}^{s} a_i = 0$). *Entonces, la solución generalizada del primer mixto (44)—(46) pertenece a* $H^s(Q_T)$.

Las condiciones de concordancia (64) y (65) en el teorema 3′ tienen la forma

$$\varphi|_{\partial D} = 0,$$

cuando $s = 1$, o bien la forma

$$\varphi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0,$$

cuando $s = 2$, o bien la forma

$$\varphi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D} = 0, \qquad (\Delta\varphi + f)|_{\partial D_0} = 0.$$

cuando $s = 3$.

Ya que $f \in H^{s-1}(Q_T)$, en virtud de la observación al lema 5, su traza $f|_{D_0}$ pertenece a $H^{s-2}(D_0)$. Por lo tanto, para $s \geqslant 3$ cualquiera que sea $i=0, \ldots, \left[\frac{s-3}{2}\right]$ existe una traza, $\Delta^{\left[\frac{s-3}{2}\right]-i} \times \times \frac{\partial^{2i} f}{\partial t^{2i}}\Big|_{\partial D}$ que pertenece a $L_2(\partial D_0)$. y para $s \geqslant 4$, cualquiera que sea $i=0, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right]-2$, existe una traza $\Delta^{\left[\frac{s}{2}\right]-2-i} \frac{\partial^{2i+1} f}{\partial t^{2i+1}}\Big|_{\partial D_0}$.

DEMOSTRACIÓN. Cuando $s=1$, la afirmación del teorema es obvia. Cuando $s=2$, la afirmación se desprende del corolario 2 al teorema 3. Demostrémosla para $s=3$; cuando $s>3$, la demostración es la misma.

Junto con el problema (44)—(46) examinemos el que sigue:

$$v_{tt}-\Delta v=f_t, \tag{66}$$

$$v|_{t=0}=\psi, \tag{67}$$

$$v_t|_{t=0}=\Delta\varphi+f|_{D_0}. \tag{68}$$

Las condiciones del teorema garantizan la existencia de la solución generalizada $v(x, t)$ del problema (66)—(68). En virtud del corolario 2 al teorema 3, la función $v(x, t)$ pertenece a $H^2(Q_T)$ y es la solución en casi todo punto del problema (66)—(68). Mostremos que $v=u_t$.

La función

$$w(x, t)=\varphi(x)+\int_0^t v(x, \tau)\, d\tau,$$

pertenece, evidentemente, a $H^2(Q_T)$ y

$$\nabla w=\nabla\varphi+\int_0^t \nabla v(x, \tau)\, d\tau, \qquad w_t=v.$$

En virtud de que v es una solución generalizada del problema (66)—(68), la función w satisface la identidad integral

$$\int_{Q_T}(\nabla w_t \nabla\eta-w_{tt}\eta_t)\, dx\, dt=\int_{D_0}(f+\Delta\varphi)\,\eta\, dx+\int_{Q_T} f_t\eta\, dx\, dt \tag{69}$$

para todo $\eta \in H^1(Q_T)$ que satisfagan las condiciones

$$\eta|_{D_t}=0, \quad \eta|_{\Gamma_T}=0. \tag{70}$$

Sea $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$ y que satisface las condiciones

$$\eta|_{D_t}=\eta_t|_{D_t}=0, \quad \eta|_{\Gamma_T}=0. \tag{71}$$

Entonces,

$$\int_{Q_T} (\nabla w_t \nabla\eta - w_{tt}\eta_t)\,dx\,dt = -\int_{Q_T} (\nabla w\,\nabla\eta_t - w_t\eta_{tt})\,dx\,dt -$$

$$-\int_{D_0} (\nabla\varphi\,\nabla\eta - \psi\eta_t)\,dx = -\int_{Q_T} (\nabla w\,\nabla\eta_t - w_t\eta_{tt})\,dx\,dt +$$

$$+\int_{D_0} (\Delta\varphi\cdot\eta + \psi\eta_t)\,dx$$

y

$$\int_{Q_T} f_t\eta\,dx\,dt = -\int_{Q_T} f\eta_t\,dx\,dt - \int_{D_0} f\eta\,dx.$$

Sustituyendo estas igualdades en (69), obtenemos

$$\int_{Q_T} (\nabla w\,\nabla\eta_t - w_t\eta_{tt})\,dx\,dt = \int_{D_0} \psi\eta_t\,dx + \int_{Q_T} f\eta_t\,dx\,dt.$$

Ya que para toda función $\zeta(x, t)$, que pertenezca a $C^2(\overline{Q}_T)$ y que satisfaga las condiciones (70), existe una función $\eta(x, t)$ (que pertenece a $C^2(\overline{Q}_T)$ y que satisface las condiciones (71)) tal que $\zeta = \eta_t$ ($\eta(x, t) = -\int_t^T \zeta(x, \tau)\,d\tau$), entonces la función w satisface la identidad integral

$$\int_{Q_T} (\nabla w\,\nabla\zeta - w_t\zeta_t)\,dx\,dt = \int_{D_0} \psi\zeta\,dx + \int_{Q_T} f\zeta\,dx\,dt$$

para cualesquiera $\zeta(x, t)$ que pertenezcan a $C^2(\overline{Q}_T)$ y que satisfagan las condiciones (70) y, por lo tanto, para cualesquiera ζ de $H^1(Q_T)$ que satisfagan las condiciones (70). En vista de la unicidad de la solución generalizada del problema (44)—(46), $w = u$ y, consecuentemente, $v = u_t$.

Así pues, $u \in H^2(Q_T)$, $u_t \in H^2(Q_T)$. Dado que u es una solución en casi todo punto del problema (44)—(46), para casi todo $t \in [0, T]$ la función $u(x, t)$ es la solución en casi todo punto del primer problema de contorno para la ecuación de Poisson

$$\Delta u = f_1, \quad x \in D_t, \quad u|_{D_t} = 0,$$

donde $f_1 = (f + u_{tt})|_{D_t}$. Puesto que, según el corolario 2 del teorema 3, $u_{tt}|_{D_t} = v_t|_{D_t} \in H^1(D_t)$, entonces $f_1 \in H^1(D_t)$ y, de acuerdo con el teorema 4, p. 3, § 2, cap. IV, para casi todo $t \in [0, T]$

$u \in H^3(D_t)$ y

$$\|u\|_{H^3(D_t)} \leqslant \mathrm{const}\, \|f_1\|_{H^1(D_t)} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, [\|f\|_{H^1(D_t)} + \|u_{tt}\|_{H^1(D_t)}] \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, [\|f\|_{H^2(Q_T)} + \|\psi\|_{H^2(D)} + \|\Delta\varphi + f\|_{H^1(D_0)} +$$
$$+ \|f_t\|_{H^1(Q_T)}] \leqslant \mathrm{const}\, [\|f\|_{H^2(Q_T)} + \|\psi\|_{H^2(D)} + \|\varphi\|_{H^3(D)}].$$

Por consiguiente, $u \in H^3(Q_T)$. El teorema queda demostrado.

§ 3. Solución generalizada del problema de Cauchy

En la banda $\Pi_T = \{x \in R_n, 0 < t < T\}$ examinemos, para cierto $T > 0$, la ecuación hiperbólica

$$u_{tt} - \operatorname{div}(k(x) \nabla u) + a(x) u = f, \tag{1}$$

donde $k(x) \in C^1(R_n)$, $a(x) \in C(R_n)$, $\inf\limits_{x \in R_n} k(x) = k_0 > 0$, $\sup\limits_{x \in R_n} \times$ $\times\, k(x) = k_1 < \infty$; vamos también a considerar que $a(x) \geqslant 0$.

La función $u(x, t)$, que pertenece a $C^2(\Pi_T) \cap C^1(\Pi_T \cup \{t = 0\})$, se llama *solución clásica del problema de Cauchy* para la ecuación (1) en la banda Π_T, si en Π_T ella satisface la ecuación (1) y, cuando $t = 0$, las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{3}$$

Designemos mediante $Q_{T,R}$ (para $R > 0$ arbitrario) un cilindro $\{|x| < R, \ 0 < t < T\}$, mediante $S_{T,R}$ su superficie lateral $\{|x| = R, 0 < t < T\}$ y mediante $D_{\tau,R}$, $\tau \in [0, T]$, el conjunto $\{|x| < R, t = \tau\}$; en particular, $D_{0,R}$ es la base inferior y $D_{T,R}$ la superior del cilindro $Q_{T,R}$.

Sea $u(x, t)$ una solución clásica del problema de Cauchy (1)—(3) en la banda $\Pi_{T+\delta}$ para un cierto $\delta > 0$, con la función $f(x, t)$ perteneciente, para todo $R > 0$, al espacio $L_2(Q_{T,R})$. Multipliquemos (1) por una función arbitraria $v(x, t)$ que para cierto $R_0 = R_0(v) > 0$ satisface la siguiente condición:

$$v(x, t) \in H^1(Q_{T,R_0}), \quad v(x, t) = 0 \text{ en } \Pi_T \setminus Q_{T,R_0}$$
$$v|_{D_{T,R_0}} = 0, \quad v|_{S_{T,R_0}} = 0, \tag{4}$$

e integremos la igualdad obtenida en la banda Π_T. Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski, obtenemos

$$\int_{\Pi_T} (k\nabla u\, \nabla u + auv - u_t v_t)\, dx\, dt =$$

$$= \int_{\Pi_T} fv\, dx\, dt + \int_{R_n} \psi(x)\, v(x, 0)\, dx \qquad (5)$$

(en esta igualdad la integración se realiza en realidad no por toda la banda Π_T y por el plano $\{x \in R_n,\ t = 0\}$, sino sólo por el cilindro Q_{T,R_0} y por su base inferior D_{0,R_0}, respectivamente).

Sea $f(x, t) \in L_2(Q_{T,R})$ y sea $\psi(x) \in L_2(|x| < R)$ para todo $R > 0$. Introduzcamos la siguiente definición.

La función u se denomina *solución generalizada del problema de Cauchy* (1)—(3) *en la banda* Π_T, si ella pertenece a $H^1(Q_{T,R})$ para cualquier $R > 0$ satisface la identidad integral (5) para todas las v que satisfacen la condición (4) para cierto $R_0 = R_0(v) > 0$, y satisface, además, la condición inicial (2) (es decir, $u(x, t)|_{D_{0,R}} = \varphi(x)$, cualquiera que sea $R > 0$).

A la par con los conceptos de la solución clásica y la solución generalizada del problema de Cauchy (1)—(3), se puede enunciar el concepto de la solución en casi todo punto de este problema.

La función u se llama *solución en casi todo punto de* Π_T *del problema de Cauchy* (1)—(3), si ella pertenece a $H^2(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$, satisface la ecuación (1) para casi todo $(x, t) \in \Pi_T$, y satisface las condiciones iniciales (2) y (3) (es decir, $u|_{D_{0,R}} = \varphi$, $u_t|_{D_{0,R}} = \psi$ cualquiera que sea $R > 0$).

Más arriba ya se ha mostrado que una solución clásica en $\Pi_{T+\delta}$ (siendo $\delta > 0$ arbitrario) del problema (1)—(3) con f perteneciente a $L_2(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$, es la solución generalizada en Π_T de dicho problema. Análogamente se demuestra que la solución en casi todo punto del problema (1)—(3) (en Π_T) es también la solución generalizada (en Π_T) de este problema.

Igual que en el caso de los problemas mixtos, es fácil mostrar (compárese con el lema 1, p. 1, § 2) que si la solución generalizada en Π_T del problema (1)—(3) pertenece a $H^2(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$, entonces será la solución en casi todo punto, y al pertenecer a $C^2(\Pi_T) \cap C^1(\Pi_T \cup \{t = 0\})$, será la solución clásica.

Demostremos, ahora, el teorema de existencia y unicidad de la solución generalizada del problema (1)—(3). Para ello nos hará falta la siguiente afirmación auxiliar.

Tomemos un número $\gamma > \sqrt{k_1}$ $(k_1 = \sup\limits_{x \in R_n} k(x) < \infty)$. Sea t_1 un número arbitrario mayor que T, y sea x^0 un punto arbitrario de R_n. Designemos con $K_{t_1,\tau}(x^0)$, donde $\tau \in [0, T]$, un cono truncado

$\{|x-x^0|<\gamma(t_1-t),\ 0<t<\tau\}$ dispuesto en Π_T, con $\Gamma_{t_1,\tau}(x^0)$ su superficie lateral, $\Gamma_{t_1,\tau}(x^0)=\{|x-x^0|=\gamma(t_1-t),\ 0<t<\tau\}$, y mediante $D_{\theta,\gamma(t_1-\theta)}(x^0)$ el conjunto $\{|x-x^0|<\gamma(t_1-\theta),\ t=\theta\}$, $0\leqslant\theta\leqslant\tau$ (entonces, $D_{0,\gamma t_1}(x^0)$ y $D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}(x^0)$ son las bases inferior y superior del cono). Si x^0 es el origen de coordenadas del espacio R_n, el cono $K_{t_1,\tau}(x^0)=K_{t_1,\tau}(0)$ lo designaremos por $K_{t_1,\tau}$, y la superficie $\Gamma_{t_1,\tau}(0)$, por $\Gamma_{t_1,\tau}$. En este caso, $D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}(0)=D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}$ y, en particular, $D_{0,\gamma t_1}$ y $D_{T,\gamma(t_1-T)}$ son las bases inferior y superior del cono $K_{t_1,T}$.

LEMA 1. *Supongamos que para ciertos $t_1>T$ y $x^0\in R_n$, la función $u(x,t)\in H^1(K_{t_1,T}(x^0))$, $u|_{D_{0,\gamma t_1}(x^0)}=0$ y*

$$\int\limits_{K_{t_1,T}(x^0)}(k(x)\nabla u\nabla v+auv-u_tv_t)\,dx\,dt=0 \tag{6}$$

para todo v que satisfacen la condición siguiente

$$v\in H^1(K_{t_1,T}(x_0))\quad v=0\quad\text{en}\quad \Pi_T\setminus K_{t_1,T}(x^0),$$
$$v|_{D_{T,\gamma(t_1-T)}(x^0)}=0,\qquad v|_{\Gamma_{t_1,T}(x^0)}=0.$$

Entonces, $u=0$ en $K_{t_1,T}(x^0)$.

Es evidente que la validez del lema 1 es suficiente establecerla para $x^0=0$.

Tomemos $\tau\in[0,T]$ arbitrario y examinemos en $K_{t_1,T}$ la función

$$v(x,t)=\begin{cases}\int\limits_t^{\theta(x)}u(x,z)\,dz & \text{en}\quad K_{t_1,\tau},\\ 0 & \text{en}\quad K_{t_1,T}\setminus K_{t_1,\tau},\end{cases}$$

donde

$$\theta(x)=\begin{cases}t_1-\dfrac{|x|}{\gamma} & \text{para}\quad \gamma(t_1-\tau)<|x|<\gamma t_1,\\ \tau & \text{para}\quad |x|<\gamma(t_1-\tau)\end{cases}$$

($t=\theta(x)$, $|x|<\gamma t_1$, es la ecuación de la superficie $\Gamma_{t_1,\tau}\cup\bar D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}$). La función $v(x,t)$ pertenece a $H^1(K_{t_1,T})$, $v|_{\Gamma_{t_1,\tau'}}=0$, $v|_{D_{\tau',\gamma(t_1-\tau')}}=0$ para cualquier $\tau'\in[\tau,T]$ y las derivadas generalizadas de la función v tienen la forma

$$\nabla v=\begin{cases}\int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz+u(x,\theta(x))\nabla\theta & \text{en}\quad K_{t_1,\tau},\\ 0 & \text{en}\quad K_{t_1,T}\setminus K_{t_1,\tau},\end{cases} \tag{7}$$

$$v_t=\begin{cases}-u(x,t) & \text{en}\quad K_{t_1,\tau},\\ 0 & \text{en}\quad K_{t_1,T}\setminus K_{t_1,\tau}.\end{cases} \tag{8}$$

He aquí el modo más fácil de convencernos de esto. Puesto que $u \in H^1(K_{t_1, T})$, existe una sucesión u_s, $s = 1, 2, \ldots$, de funciones de $C^1(\overline{K}_{t_1, T})$, convergente en $H^1(K_{t_1, T})$ hacia u. Examinemos la sucesión de funciones $v_1, v_2, \ldots$, pertenecientes a $C^1(\overline{K}_{t_1, T})$

$$v_m(x, t) = \begin{cases} \zeta_m(t) \int\limits_t^{\theta(x)} u_m(x, z)\, dz & \text{en} \quad K_{t_1, \tau}, \\ 0 & \text{en} \quad K_{t_1, T} \setminus K_{t_1, \tau}, \end{cases}$$

donde $\zeta_m(t)$ es igual a 1 cuando $t < \tau(1 - 1/m)$ y es nula cuando $t > \tau$, $0 \leqslant \zeta_m(t) \leqslant 1$, $\zeta_m(t) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $\left|\frac{d\zeta_m}{dt}\right| \leqslant C_0 m$. Para cualquier $\tau' \in [\tau, T]$ $v_m|_{\Gamma_{t_1, \tau'} \cup D_{\tau', \gamma(t_1 - \tau')}} = 0$. Mostremos que la sucesión v_m, $m = 1, 2, \ldots$, converge en $H^1(K_{t_1, T})$ hacia v. Efectivamente, es evidente que la sucesión v_m, $m = 1, 2, \ldots$, converge hacia v en $L_2(K_{t_1, T})$; la sucesión ∇v_m, $m = 1, 2, \ldots$,

$$\nabla v_m = \begin{cases} \zeta_m(t) \int\limits_t^{\theta(x)} \nabla u_m(x, z)\, dz + \zeta_m(t)\, u_m(x, \theta(x)) \nabla\theta \\ \qquad\qquad \text{en} \quad K_{t_1, \tau}, \\ 0 \qquad\qquad \text{en} \quad K_{t_1, T} \setminus K_{t_1, \tau}, \end{cases}$$

converge en $L_2(K_{t_1, T})$ hacia una función vector ∇v, prefijada por la fórmula (7) (es decir, $(v_m)_{x_i} \to v_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, cuando $m \to \infty$), y como

$$C_0^2 m^2 \int\limits_{K_{t_1, \tau} \setminus K_{t_1, \tau(1-1/m)}} \Big(\int\limits_t^{\theta(x)} u_m(x, z)\, dz \Big)^2 dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant C_0^2 T^2 \int\limits_{K_{t_1, \tau} \setminus K_{t_1, \tau(1-1/m)}} u_m^2(x, z)\, dx\, dz \leqslant$$
$$\leqslant 2C_0^2 T^2 \Big[\int\limits_{K_{t_1, T}} (u - u_m)^2\, dx\, dt + \int\limits_{K_{t_1, \tau} \setminus K_{t_1, \tau(1-1/m)}} u^2\, dx\, dt \Big] \to 0$$

cuando $m \to \infty$, entonces la sucesión $v_{1t}, v_{2t}, \ldots$,

$$v_{mt} = \begin{cases} -\zeta_m(t)\, u_m(x, t) + \zeta_m'(t) \int\limits_\tau^{\theta(x)} u_m(x, z)\, dz & \text{en} \quad K_{t_1, \tau} \\ 0 & \text{en} \quad K_{t_1, T} \setminus K_{t_1, \tau}, \end{cases}$$

converge en $L_2(K_{t_1, T})$ hacia la función v_t, prefijada por la fórmula (8).

Sustituyendo la función v en la indentidad (6), obtenemos

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\,u(x,\theta(x))\nabla u(x,t)\nabla\theta\,dx\,dt-$$
$$-\int\limits_{K_{t_1,\tau}} a(x)\,v_t\,v\,dx\,dt+\int\limits_{K_{t_1,\tau}} u_t u\,dx\,dt=0. \qquad (9)$$

Dado que $v|_{\Gamma_{t_1,\tau}\cup D_{\tau,\gamma(t_1-\tau)}}=0$,

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} avv_t\,dx\,dt=-\frac{1}{2}\int\limits_{D_{0,\gamma t_1}} av^2\,dx\leqslant 0. \qquad (10)$$

Puesto que $u|_{D_{0,\gamma t_1}}=0$, por analogía tenemos

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} uu_t\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} u^2(x,\theta(x))\,dx. \qquad (11)$$

Como

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$
$$=\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\int\limits_t^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$
$$=\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx-$$
$$-\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\int\limits_0^{t}\nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$
$$=\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left|\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt\right|^2 dx-$$
$$-\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\int\limits_0^{\theta(x)}\nabla u(x,z)\int\limits_z^{\theta(x)}\nabla u(x,t)\,dt\,dz\,dx,$$

entonces, conforme a (7)

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int\limits_{t}^{\theta(x)} \nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left|\int\limits_{0}^{\theta(x)} \nabla u(x,t)\,dt\right|^2 dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\left[\left|\int\limits_{0}^{\theta(x)} \nabla u(x,t)\,dt+u(x,\theta(x))\nabla\theta\right|^2-\right.$$

$$\left.-2u(x,\theta(x))\nabla\theta\int\limits_{0}^{\theta(x)} \nabla u(x,t)\,dt-u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\right]dx\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\,u(x,\theta(x))\nabla\theta\,\nabla u(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\,u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\,dx.$$

Por eso,

$$\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\nabla u(x,t)\int\limits_{t}^{\theta(x)} \nabla u(x,z)\,dz\,dt\,dx+$$

$$+\int\limits_{K_{t_1,\tau}} k(x)\,u(x,\theta(x))\nabla u\cdot\nabla\theta\,dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} k(x)\,u^2(x,\theta(x))\,|\nabla\theta|^2\,dx\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{k_1}{2\gamma^2}\int\limits_{|x|<\gamma t_1} u^2(x,\theta(x))\,dx. \qquad (12)$$

Sustituyendo las correlaciones (10)—(12) en (9), obtendremos la desigualdad $\left(1-\frac{k_1}{\gamma^2}\right)\int\limits_{|x|<\gamma t_1} u^2(x,\theta(x))\,dx\leqslant 0$, de la cual se infiere que $\int\limits_{D_{\tau,\,\gamma(t_1-\tau)}} u^2(x,\tau)\,dx=0$, de donde, por ser $\tau\in(0,T)$ arbitrario, resulta que $u=0$ en $K_{t_1,T}$. El lema está demostrado.

Del lema 1 se deduce inmediatamente el teorema de unicidad de la solución generalizada para el problema de Cauchy (1)—(3) y, por consiguiente, la unicidad de la solución en casi todo punto y de la solución clásica.

TEOREMA 1. *El problema de Cauchy (1)—(3) no puede tener más de una solución generalizada, más de una solución en casi todo punto y más de una solución clásica.*

Sean u_1 y u_2 soluciones generalizadas (y, en particular, soluciones en casi todo punto) del problema (1)—(3) ($f \in L_2(Q_{T,R})$ $\psi \in L_2(|x| < R)$ para todo $R > 0$). Entonces, su diferencia $u_1 - u_2$ satisface las condiciones del lema 1, cualesquiera que sean $t_1 > T$ y $x^0 \in R_n$. Por eso, $u_1 = u_2$.

Si u_1 y u_2 son soluciones clásicas del problema (1)—(3), su diferencia $u_1 - u_2$ será la solución clásica del problema (1)—(3) con las funciones nulas f, φ y ψ; por ello, $u_1 - u_2$ es la solución generalizada y, por tanto, $u_1 = u_2$. El teorema queda demostrado.

Sean $\varphi \in H^1(|x| < R)$, $\psi \in L_2(|x| < R)$, $f \in L_2(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$. Elijamos, para cada m, $m = 1, 2, \ldots$, una función $\zeta_m(x, t)$, indefinidamente diferenciable en $\overline{\Pi}_T$, que es igual a 1 en $K_{8mT,T}$, y nula en $\Pi_T \setminus K_{8(m+1/2)T,T}$ y designemos mediante $u_m(x, t)$ una solución generalizada en el cilindro $Q_{T,8(m+1)T\gamma}$ del siguiente problema mixto:

$$\begin{aligned} u_{mtt} - \operatorname{div}(k(x)\nabla u_m) + a(x) u_m &= f_m(x, t), \\ u_m|_{D_{0,8(m+1)T\gamma}} &= \varphi_m(x), \\ u_{mt}|_{D_{0,8(m+1)T\gamma}} &= \psi_m(x), \\ u_m|_{S_{T,8(m+1)T\gamma}} &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

donde $\varphi_m(x) = \varphi(x)\zeta_m(x, 0)$, $\psi_m(x) = \psi(x)\zeta_m(x, 0)$, $f_m(x, t) = f(x, t)\zeta_m(x, t)$. Esto significa que la función u_m pertenece a $H^1(Q_{T,8(m+1)T\gamma})$, satisface la condición inicial $u_m|_{D_{0,8(m+1)T\gamma}} = 0$, y para toda v de $H^1(Q_{T,8(m+1)T\gamma})$ para las cuales $v|_{D_{T,8(m+1)T\gamma}} = 0$ y $v|_{S_{T,8(m+1)T\gamma}} = 0$, satisface la indentidad integral

$$\int\limits_{Q_{T,8(m+1)T\gamma}} (k(x)\nabla u_m \nabla v + a u_m v - u_{mt} v_t)\, dx\, dt = \int\limits_{Q_{T,8(m+1)T\gamma}} f_m v\, dx\, dt + \\ + \int\limits_{D_{0,8(m+1)T\gamma}} \psi_m(x) v(x, 0)\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Dado que $\varphi_m \in \mathring{H}^1(D_{0,8(m+1)T\gamma})$ ($\varphi \in H^1(D_{0,8(m+1)T\gamma})$) y es nula para $8(m + {}^1/_2)T\gamma < |x| < 8(m+1)T\gamma$), de acuerdo con el teorema 1 del párrafo anterior, las soluciones generalizadas u_m existen.

Tomemos un punto arbitrario $x^0 \in R_n$ para el cual $|x^0| = (8m + 6)T\gamma$ y sustituyamos en la identidad (14) una función arbitraria v que satisface la siguiente condición:

$$v \in H^1(K_{2T,\,T}(x^0)), \qquad v=0 \quad \text{en} \quad \Pi_T \setminus K_{2T,\,T}(x^0),$$
$$v|_{D_{T,\,T\gamma}(x^0)}=0, \qquad v|_{\Gamma_{2T,\,T}(x^0)}=0$$

(no es difícil comprobar que esta función v pertenece a $H^1(Q_{T,\,8(m+1)T\gamma})$ y que sus trazas en $D_{T,\,8(m+1)T\gamma}$ y $S_{T,\,8(m+1)T\gamma}$ son nulas). En virtud del lema 1 resulta que $u_m=0$ en $K_{2T,\,T}(x^0)$. Ya que x^0 es un punto arbitrario de una esfera n-dimensional $\{|x|=(8m+6)T\gamma,\ t=0\}$, entonces $u_m=0$ en la capa cilíndrica $\{(8m+5)T\gamma<|x|\leq(8m+7)T\gamma,\ 0<t<T\}$.

Designemos con $\tilde{u}_m(x,t)$ una función que es igual a $u_m(x,t)$ en $Q_{T,\,(8m+6)T\gamma}$ y es nula en $\Pi_T\setminus Q_{T,\,(8m+6)T\gamma}$, $m=1,2,\ldots$ Evidentemente, la función $\tilde{u}_m$, $m=1,2,\ldots$, pertenece al espacio $H^1(Q_{T,\,R})$ y

$$\tilde{u}_m|_{D_{0,\,R}}=\varphi_m \tag{15}$$

cualquiera que sea $R>0$.

Tomemos una función arbitraria v que satisface la condición (4) en la cual $R_0=R_0(v)>0$. Si $R_0<(8m+7)T\gamma$, se puede sustituir la función v en (14). Y como $u_m(x,t)=\tilde{u}_m(x,t)$ en $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}$, resulta que

$$\int_{\Pi_T}(k\nabla\tilde{u}_m\nabla v+a\tilde{u}_m v-\tilde{u}_{mt}v_t)\,dx\,dt=$$
$$=\int_{\Pi_T}f_m v\,dx\,dt+\int_{R_n}\psi_m(x)\,v(x,0)\,dx. \tag{16}$$

Sea $R_0>(8m+7)T\gamma$. Puesto que $\tilde{u}_m=u_m$ en $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}$ y $\tilde{u}_m=0$ en $\Pi_T\setminus Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ (en $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}\setminus Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ $\tilde{u}_m=u_m=0$), entonces

$$\int_{\Pi_T}(k\nabla\tilde{u}_m\cdot\nabla v+a\tilde{u}_m v-\tilde{u}_{mt}v_t)\,dx\,dt=$$
$$=\int_{Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}}(k\nabla u_m\cdot\nabla v+a u_m v-u_{mt}v_t)\,dx\,dt.$$

Tomemos una función $\zeta_m(x)$, indefinidamente diferenciable en $\overline{\Pi}_T$, que es igual a 1 en $Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$ y es nula en $\Pi_T\setminus Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}$. Sustituyendo la función $v\zeta_m$ en (14), obtenemos ($u_m=0$ en $Q_{T,\,(8m+7)T\gamma}\setminus Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}$, $f_m=0$ en $\Pi_T\setminus Q_{T,\,(8m+4)T\gamma}$, y $\psi_m=0$ en

$\{|x| > (8m+4)\,T\gamma\})$

$$\int\limits_{Q_{T,\,(8m+5)T\gamma}} (k\nabla u_m \cdot \nabla v + a u_m v - u_{mt} v_t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{T,\,8(m+1)T\gamma}} (k\nabla u_m \cdot \nabla (v\tilde{\zeta}_m) + a u_m (v\tilde{\zeta}_m) -$$

$$- u_{mt}(v\tilde{\zeta}_m)_t)\,dx\,dt = \int\limits_{\Pi_T} f_m v\,dx\,dt + \int\limits_{R_n} \psi_m(x)\,v(x,\,0)\,dx.$$

De este modo, la función $\tilde{u}_m$ satisface la identidad integral (16) cualesquiera que sean v, para las cuales se cumple la condición (4) con cierto $R_0 = R_0(v) > 0$. Por consiguiente, la función $\tilde{u}_m$ es la solución generalizada en Π_T del problema de Cauchy (1)—(3) con las funciones $\varphi = \varphi_m$, $\psi = \psi_m$, $f = f_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Como la función $\tilde{u}_{m'} - \tilde{u}_m$ (consideramos que $m' > m$) es la solución generalizada en Π_T del problema de Cauchy (1)—(3) con las funciones $\varphi = \varphi_{m'} - \varphi_m = 0$ para $|x| < 8\,mT\gamma$, $\psi = \psi_{m'} - \psi_m = 0$, para $|x| < 8mT\gamma$, y $f = f_{m'} - f_m = 0$ en $K_{8mT,\,T}$, entonces, en virtud del lema 1, $\tilde{u}_{m'} - \tilde{u}_m = 0$ en $K_{8mT,\,T}$. Es decir, para todo $m' \geqslant m$ se tiene $\tilde{u}_{m'} = \tilde{u}_m$ en $K_{8mT,\,T}$, y, por lo tanto, en $Q_{T,\,(8m-1)\,T\gamma}$. Quiere decir, que la sucesión de las funciones $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots$ converge en casi todo punto en Π_T, hacia una función u, con la particularidad de que para cualquier $R > 0$ existe un número $N = N(R)$ $\Big(N(R) = 1 + \left[\frac{R + T\gamma}{8T\gamma}\right]\Big)$ tal que en $Q_{T,\,R}$ $u = \tilde{u}_m = u_m$ para todo $m \geqslant N$. De (15) y (16) se desprende que $u\,|_{t=0} = \varphi$ (cualquiera que sea $R > 0$, para $m \geqslant N(R)$ $\varphi_m = \varphi$ en $D_{0,\,R}$ y $\varphi_m = \tilde{u}_m\,|_{D_{0,\,R}} = u\,|_{D_{0,\,R}}$) y u satisface la identidad integral (5), cualesquiera que sean v para las cuales fue cumplida la condición (4) con cierto $R_0 = R_0(v) > 0$.

Por consiguiente, u es una solución generalizada en Π_T del problema de Cauchy (1)—(3). Así pues, queda establecido el

TEOREMA 2. *Si* $\varphi(x) \in H^1(|x| < R)$, $\psi(x) \in L_2(|x| < R)$ *y* $f \in L_2(Q_{T,\,R})$ *para cualquier* $R > 0$, *entonces en* Π_T *existe una solución generalizada del problema de Cauchy* (1)—(3).

Señalemos que está también demostrada la afirmación siguiente. Para cualquier $R > 0$ existe tal $N = N(R)$ que la solución generalizada u del problema (1)—(3) en el cilindro $Q_{T,\,R}$ coincide con las soluciones u_m de los problemas mixtos (13) para todo $m \geqslant N$.

Examinemos ahora un caso particular de la ecuación (1), es decir, la ecuación de onda ($k \equiv 1$, $a \equiv 0$ en (1))

$$u_{tt} - \Delta u = f. \qquad (17)$$

Supongamos que para un cierto $s > 1$ entero $\varphi \in H^s(|x| < R)$, $\psi \in H^{s-1}(|x| < R)$, $f \in H^{s-1}(Q_{T,R})$, cualquiera que sea $R > 0$. Entonces, según el teorema 3, p. 4 del párrafo anterior, la solución generalizada $u_m(x, t)$ del problema mixto (13) (siendo $k \equiv 1$, $a \equiv 0$) pertenece a $H^s(Q_{T,8(m+1)T\gamma})$

$$\varphi_m = \zeta_m(x, 0)\,\varphi(x) \in H^s_{\mathscr{D}}(D_{0,\,8(m+1)T\gamma}),$$

$$\psi_m = \zeta_m(x, 0)\,\psi(x) \in H^{s-1}_{\mathscr{D}}(D_{0,\,8(m+1)T\gamma}),$$

$$f_m = \zeta_m f \in \tilde{H}^{s-1}_{\mathscr{D}}(Q_{T,\,8(m+1)T\gamma})).$$

Por consiguiente, la solución u del problema de Cauchy (17), (2), (3), generalizada en Π_T, pertenece a $H^s(Q_{T,R})$ para todo $R > 0$.

Así pues, queda demostrado el siguiente.

TEOREMA 3. *Si, para un cierto* $s > 1$ entero, $\varphi \in H^s(|x| < R)$, $\psi \in H^{s-1}(|x| < R)$, $f \in H^{s-1}(Q_{T,R})$ *cualquiera que sea* $R > 0$, *la solución generalizada del problema de Cauchy* (17), (2), (3) *pertenece a* $H^s(Q_{T,R})$ *para todo* $R > 0$.

Puesto que la solución generalizada del problema de Cauchy, perteneciente, para todo $R > 0$, al espacio $H^2(Q_{T,R})$, es una solución en casi todo punto del mismo problema, entonces del teorema 3 (para $s = 2$) se deduce la afirmación siguiente.

TEOREMA 4. *Si* $\varphi \in H^2(|x| < R)$, $\psi \in H^1(|x| < R)$, $f \in H^1(Q_{T,R})$ *para todo* $R > 0$, *entonces existe en* Π_T una solución en casi todo punto del problema de Cauchy (17), (2), (3).

Indiquemos que las órdenes de la suavidad de las funciones iniciales y del segundo miembro de la ecuación, que garantizan la existencia de la solución generalizada del problema de Cauchy o de la solución en casi todo punto, no dependen (teorema 2, 4) de la dimensión del espacio.

Sea $s = \left[\frac{n}{2}\right] + 3$. En virtud del teorema 4, p. 4 del párrafo anterior, la solución generalizada $u_m(x, t)$ del problema mixto (13) (siendo $k \equiv 1$, $a \equiv 0$) es la solución clásica de este problema. Por consiguiente, la solución generalizada $u(x, t)$ del problema (17), (2), (3) es la solución clásica del mismo problema.

De este modo, queda demostrado el siguiente

TEOREMA 5. *Si* $\varphi \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(|x| < R)$, $\psi \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(|x| < R)$, $f \in H^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(Q_{T,R})$ *para todo* $R > 0$, *entonces la solución clásica del problema de Cauchy* (17), (2), (3) *existe.*

A título de complemento de los teoremas 4 y 5 sobre la existencia de la solución en casi todo punto y de la solución clásica del problema de Cauchy (17), (2), (3) demostremos la siguiente afirmación.

TEOREMA 6. *Sea u una solución en casi todo punto del problema* (17), (2), (3) *en* Π_T *o la solución clásica de este problema con* $f \in L_2(Q_{T,R})$ *para todo* $R > 0$. *Entonces, para todo* $R > 0$ *y todo* t, $0 < t < \min(R, T)$, *se verifica la desigualdad*

$$E_R^{1/2}(t) \leqslant E_R^{1/2}(0) + 2\sqrt{t}\, \|f\|_{L_2(K_{R,T})}, \tag{18}$$

donde

$$E_R(t) = \int\limits_{D_{t,\, R-t}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx, \tag{19}$$

$$D_{\tau,\, R-\tau} = \{|x| < R - \tau,\ t = \tau\},$$

$$K_{R,\tau} = \{|x| < R - t,\ 0 < t < \tau\}, \quad \tau \in (0, \min(R, T)].$$

Tomemos arbitrariamente $\tau \in (0, \min(R, T))$ e integremos en el cono truncado $K_{R,\tau}$ la igualdad (17), multiplicada por u_t

$$\int\limits_{K_{R,\tau}} (u_{tt}u_t - u_t\Delta u)\, dx\, dt = \int\limits_{K_{R,\tau}} f u_t\, dx\, dt.$$

Según la fórmula de Ostrogradski tenemos

$$\int\limits_{D_{\tau,\, R-\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx - \int\limits_{D_{0,\, R}} (\psi^2 + |\nabla\varphi|^2)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{R,\tau}} \Big[(u_t^2 + |\nabla u|^2) n_0 - 2u_t \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} n_i\Big] dS = 2 \int\limits_{K_{R,\tau}} f u_t\, dx\, dt,$$

donde $\Gamma_{R,\tau}$ es la superficie lateral del cono $K_{R,\tau}$, es decir, $\Gamma_{R,\tau} = \{|x| = R - t,\ 0 < t < \tau\}$ y

$$(n_0, n_1, \ldots, n_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}(R-t)}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{2}(R-t)}\right)$$

es el vector de la normal exterior a $\Gamma_{R,\tau}$. Ya que en $\Gamma_{R,\tau}$

$$(u_t^2 + |\nabla u|^2 n_0 - 2u_t \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} n_i =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{u_t x_i}{R-t}\right)^2 - 2\frac{u_t x_i}{R-t} u_{x_i} + u_{x_i}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_t x_i}{R-t} - u_{x_i}\right)^2 \geqslant 0,$$

entonces

$$E_R(\tau) \leqslant E_R(0) + 2 \int_{K_{R,\tau}} |f|\,|u_t|\,dx\,dt \leqslant E_R(0) +$$

$$+ 2\|f\|_{L_2(K_{R,\tau})} \left(\int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2\,dx\,dt \right)^{1/2}. \qquad (20)$$

Dado que $2\,|ab| = 2\left| a\sqrt{2\tau}\frac{b}{\sqrt{2\tau}}\right| \leqslant 2\tau a^2 + \frac{b^2}{2\tau}$, entonces de (20) se deduce que para todo $t \in (0, \tau)$

$$E_R(t) \leqslant E_R(0) + 2\tau \|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})} + \frac{1}{2\tau} \int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt.$$

Integrando esta desigualdad respecto de $t \in (0, \tau)$, obtendremos

$$\int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt \leqslant \tau E_R(0) + 2\tau^2 \|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt,$$

de donde

$$\int_{K_{R,\tau}} (u_t^2 + |\nabla u|^2)\,dx\,dt \leqslant 2\tau E_R(0) + 4\tau^2 \|f\|^2_{L_2(K_{R,\tau})} \leqslant$$

$$\leqslant (2\sqrt{\tau}\, E_R^{1/2}(0) + 2\tau \|f\|_{L_2(K_{R,\tau})})^2. \qquad (21)$$

La desigualdad (18) se desprende de (20) y (21). El teorema queda demostrado.

PROBLEMAS DEL CAPITULO V

Sea $u(x, t) = (x_1, x_2) \in R_2$, una solución clásica del problema de Cauchy

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi \qquad (1)$$

con las funciones iniciales terminales φ y ψ: $\varphi = \psi = 0$ para $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 > R_0^2$.

1. Muéstrese que la función $u(x, t)$ es analítica en el cono $\{|x| < t - R_0,\ t > R_0$.

2. Demuéstrese que existe una constante positiva C tal que para la solución $u(x, t)$ del problema (1) tiene lugar la siguiente acotación

$$|u(x, t)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{t}\,(1 + \sqrt{|t - |x||})},$$

cualesquiera que sean $x \in R_2$ y $t \geqslant 0$.

Con ello, si $\varphi = 0$ y $\psi \geqslant 0$, $\psi \not\equiv 0$, existen tales constantes positivas C_0 y T que para cualesquiera $t \geqslant T$ y $|x| \leqslant t - R_0$

$$u(x, t) \geqslant \frac{C_0}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{|t-|x||})}.$$

3. Muéstrese que para todo $R > 0$ existe tal $T > 0$ que para todo $(x, t) \in \{|x| \leqslant R, t \geqslant T\}$ la solución $u(x, t)$ del problema (1) se representa en forma de una serie convergente

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(x)}{t^{m+1}};$$

hállense c_0 y c_1.

Demuéstrese que si para el círculo $K_0 = \{|x - x^0| < r_0\}$ (x^0 es un punto de R_2, r_0, un número positivo) y para todos los números naturales l es que $t^l u(x, t) \to 0$ uniformemente según $x \in K_0$, entonces $u = 0$.

4. Sea $\varphi \in C^2(R_2)$ y $\psi \in C^1(R_2)$ y supongamos que todas las segundas derivadas de la función φ y todas las primeras derivadas de la función ψ pertenecen a la clase $C^\alpha(R_2)$ (véase el problema 17, cap. III) para cierto $\alpha > 1/2$. Demuéstrese que en este caso existe una solución clásica del problema de Cauchy (1).

5. Sea $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$, una solución (clásica) del problema de Cauchy

$$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \qquad u|_{t=0} = \varphi, \quad u_t|_{t=0} = \psi \tag{2}$$

con funciones iniciales φ y ψ terminales.

Muéstrese que para todo $x \in R_3$ y $t > 0$

$$|u(x, t)| \leqslant C/t,$$

donde C es una constante positiva.

6. Supóngase que la función $u(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$, pertenece a $C^3(Q \setminus \{x^0, t^0\})$ (donde Q es un dominio del espacio de cuatro dimensiones R_4, y (x^0, t^0), un punto del dominio Q), y que satisface en $Q \setminus \{x^0, t^0\}$ la ecuación de onda (2). Demuéstrese que u pertenece a $C^2(Q)$ (es decir, u puede ser complementariamente definida en el punto (x^0, t^0) de tal modo que ella se haga dos veces continuamente diferenciable en Q).

7. Supóngase que la función $u(x, t) = v(x - nt)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $n = (n_1, n_2, n_3)$ es un vector constante, pertenece a $C^3(R_4 \setminus L)$ (donde L es una recta definida por la ecuación $x - nt = 0$) y que satisface fuera de L la ecuación de onda (2). Demuéstrese que si $u(x, t) = o(1/r)$, donde r es la distancia del punto (x, t) a la recta L, entonces $u(x, t) \in C^2(R_4)$ (es decir, u puede ser complementariamente definida en L de tal modo que ella se haga continuamente diferenciable dos veces en R_4).

8. Sea $u(x, t)$ una solución clásica o generalizada en $\{t > 0\}$ del problema de Cauchy para una ecuación de onda

$$u_{tt} = \Delta u + f(x, t), \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{4}$$

y sea $u_R(x, t)$ una solución clásica o, respectivamente, generalizada del segundo problema mixto para la ecuación de onda en el cilindro $\{|x| < R + 1, t >$

$> 0)$, $R > 0$,

$$(u_R)_{tt} = \Delta u_R + f_R,$$

$$u_R|_{t=0} = \varphi_R, \quad u_{Rt}|_{t=0} = \psi_R, \quad \left.\frac{\partial u_R}{\partial n}\right|_{|x|=R+1} = 0,$$

con la particularidad de que para $|x| < R$ $\varphi_R = \varphi$, $\psi_R = \psi$ y para $|x| < R$, $t < R$ $f_R = f$. Muéstrese que en cualquier cilindro $Q_T = \{|x \in D_0, 0 < t < T\}$, donde D_0 es un dominio arbitrario n-dimensional y T es un número positivo arbitrario, la diferencia $u - u_R = 0$, cuando R es suficientemente grande.

9. La solución del primer problema mixto para una ecuación de onda en el cilindro $Q_T = \{x \in D_0, 0 < t < T\}$ se puede definir de la manera siguiente: la función $u(x, t)$ se llama solución clásica del primer problema mixto para la ecuación de onda (3), si ella pertenece a $C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup D_0) \cap C(Q_T) \cup \cup \Gamma_T 0 \cup \overline{D}_0)$, satisface en Q_T la ecuación (3), en D_0, las condiciones iniciales (4) y en Γ_T satisface la condición límite

$$u|_{\Gamma_T} = \chi. \tag{5}$$

Demuéstrese la unicidad de esta solución.

10. Demuéstrese la existencia y unicidad en el cilindro $Q_T = \{x \in D_0, 0 < t < T\}$ de la solución generalizada del tercer problema mixto (véase p. 1, § 2) para la ecuación de onda

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t)$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u\right\}\Big|_{\Gamma_T} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

($\varphi \in H^1(D_0)$, $\psi \in L_2(D_0)$, $f \in L_2(Q_T)$) en caso de una función $\sigma(x)$, continua en ∂D_0 (sin suponer que es no negativa).

11. Una función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $H^1(Q_T)$, se llama solución generalizada del problema

$$u_{tt} = \Delta u, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right\}\Big|_{\Gamma_T} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

donde $\sigma(x) \in C(\partial D_0)$, $\sigma(x) \geqslant 0$, $\varphi \in H^1(D)$, $\psi \in L_2(D)$, si ella satisface la condición inicial $u|_{t=0} = \varphi$ y la identidad integral

$$\int\limits_{Q_T} (u_t v_t - \nabla u \nabla v)\, dx\, dt = \int\limits_{\Gamma_T} \sigma u v_t\, dS\, dt + \int\limits_{D_0} \psi v\, dx + \int\limits_{\partial D_0} \sigma \varphi v\, dS$$

cualesquiera que sean v de $C^1(\overline{Q}_T)$ para las cuales $v_t \in C^1(\overline{Q}_T)$ y $v|_{t=T} = 0$.

Demuéstrese la existencia y unicidad de la solución generalizada de este problema.

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO V

V. S. Vladimirov, Ecuaciones de la física matemática, «Naúka», 1971 (en ruso).

R. Curant, D. Hilbert, Métodos de la física matemática, vols I, II, «Gostejizdat», 1951 (en ruso).

O. A. Ladyzhénskaya, Problemas de contorno de la física matemática, «Naúka». 1973 (en ruso).
O. A. Ladyzhénskaya, Problema mixto para la ecuación hiperbólica, «Gostejizdat», 1953 (en ruso).
I. G. Petrovski, Conferencias sobre las ecuaciones en derivadas parciales, Fismatgiz, 1961 (en ruso).
I. G. Petrovski, On the diffusion of waves and lacunas for hyperbolic equations. Compendio matemático 17, (1945), 289—370.
S. L. Sóbolev, Ecuaciones de la física matemática, Fismatgiz, 1954 (en ruso)
S. L. Sóbolev, Aplicaciones del análisis funcional en la física matemática. Ediciones de la universidad estatal de Leningrado, 1950 (en ruso).
V. A. Steklov, Sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de una ecuación diferencial, Ediciones de la Universidad de Jarcov, 1956.
A. Tíjonov, A. Samarsky, Ecuaciones de la física matemática, Editorial Mir.

En este capítulo estudiaremos el problema de Cauchy y los problemas mixtos para una ecuación parabólica del tipo

$$u_t = \operatorname{div}(k(x)\nabla u(x, t)) + a(x)u(x, t) = f(x, t).$$

Aquí, $(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)$ es un punto del espacio $(n+1)$-dimensional R_{n+1}, $x \in R_n$, $t \in R_1$; $\nabla v(x, t) = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)$ y $\operatorname{div}(w_1(x, t), \ldots, w_n(x, t)) = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial w_n}{\partial x_n}$; por $\Delta v(x, t)$ se comprenderá $\operatorname{div}\nabla v(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$. Convengamos en considerar los datos de los problemas como funciones de valores reales y examinaremos sólo soluciones de valores reales de los problemas citados. Por este motivo, los espacios funcionales $C^{p,q}$, $H^{p,q}$ que serán empleados en lo sucesivo, los vamos a considerar de valores reales*).

§ 1. Propiedades de las soluciones de la ecuación de la conducción de calor. Problema de Cauchy para la ecuación de la conducción de calor

1 Propiedades de las soluciones de la ecuación de la conducción de calor. Examinemos la ecuacion de la conducción de calor

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \Delta u = f(x, t), \tag{1}$$

que es la ecuación parabólica más sencilla.

Ante todo, construyamos en el semiespacio $\{t > 0\} = \{x \in R_n, t > 0\}$ ciertas soluciones especiales de la ecuación homogénea de la conducción de calor

$$\mathscr{L}u \equiv u_t - \Delta u = 0. \tag{1$_0$}$$

*) Las definiciones de los espacios $C^{p,q}$ y $H^{p,q}$ se han dado en los p.p. 1 y 2, § 7, cap. III, respectivamente.

Examinemos primero el caso de una sola variable espacial, $n = 1$. Una función $u(x, t) = w(x^2/t)$, que sólo depende de x^2/t y que es en $\{t > 0\}$ la solución de la ecuación $u_t - u_{xx} = 0$, satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$4zw''(z) + (2+z)w'(z) = 0.$$

La solución general de esta ecuación en el semieje $(0, \infty)$ se prefija mediante la fórmula $c_1 \int_0^z e^{-\zeta/4}\zeta^{-1/2}\,d\zeta + c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. En este caso la función $c_1 \int_0^{x^2/t} e^{-\zeta/4}\zeta^{-1/2}\,d\zeta + c_2$ será la solución de la ecuación (1_0) (para $n = 1$) en los dominios $\{x > 0,\ t > 0\}$ y $\{x < 0,\ t > 0\}$.

Hagamos $c_2 = 0$, $c_1 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}$ para $x > 0$, y $c_1 = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$ para $x < 0$. No es difícil comprobar que la función obtenida es indefinidamente diferenciable en el semiplano $\{x \in R_1,\ t > 0\}$ y, por lo tanto, satisface en este semiplano la ecuación (1_0). Entonces, la misma ecuación será también satisfecha por cualquier derivada (respecto de x o t) de esta función, en particular, por la primera derivada respecto de x que es la función $U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

Sea, ahora, $n > 1$. Para construir en este caso las soluciones buscadas de la ecuación (1_0), señalemos que si las funciones $v_i(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, son soluciones de (1_0), para $n = 1$, en el semiplano $\{x \in R_1,\ t > 0\}$, entonces la función $v(x, t) = v_1(x_1, t)\, v_2(x_2, t) \ldots \ldots v_n(x_n, t)$ será la solución de la ecuación (1_0) en el semiespacio $\{x \in R_n,\ t > 0\}$. Por eso, en particular, la función

$$U(x, t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\frac{x_i^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}$$

es la solución de la ecuación (1_0) en el semiespacio $\{t > 0\}$. De aquí se deduce que si (x^0, t^0) es un punto arbitrario de R_{n+1}, la función

$$U(x - x^0,\ t - t^0) = \frac{e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4(t-t^0)}}}{(2\sqrt{\pi(t-t^0)})^n}$$

será la solución de la ecuación (1_0) en el semiespacio $\{t > t^0\} = \{x \in R_n,\ t > t^0\}$. Esta función lleva el nombre de *solución fundamental de la ecuación de la conducción de calor* con peculiaridad en el punto $(x^0,\ t^0)$).

Subrayemos las siguientes propiedades de la solución fundamental.

Si la función $U(x-x^0, t-t^0)$ es prolongada por cero en el semiespacio $\{t<t^0\}=\{x\in R_n, t<t^0\}$, entonces la función obtenida será indefinidamente diferenciable en $R_{n+1}\setminus\{x^0, t^0\}$.

Para todo $x^0\in R_n$, $t>t^0$

$$\int_{R_n} U(x-x^0, t-t^0)\,dx=\frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{R_n} e^{-|\xi|^2}\,d\xi=1. \tag{2}$$

La función $U(x-x^0, t-t^0)$, como función de las variables $(x^0, t^0)=(x_1^0, \ldots, x_n^0, t^0)$, es en el semiespacio $\{t^0<t\}=\{x^0\in R_n, t^0<t\}$ la solución de la ecuación

$$\mathcal{L}^*_{x^0, t^0}U(x-x^0, t-t^0)=-\frac{\partial U}{\partial t^0}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{02}} \tag{1_0^*}$$

Examinemos la banda $\{0<t<T\}=\{x\in R_n, 0<t<T\}$ que está limitada por las características de la ecuación (1). Al igual que en el caso de las ecuaciones de Laplace y de onda, emplearemos las soluciones especiales construidas (solución fundamental) para dar la representación en esta banda de una función arbitraria $u(x, t)$, perteneciente a $C^{2,1}(0<t<T)\cap C(0\leqslant t<T)$, en términos de las funciones $\mathcal{L}u=u_t-\Delta u$ y $u(x, 0)$ la que constituye el valor de $u(x, t)$ en el plano $\{t=0\}=\{x\in R_n, t=0\}$. Realizando esta operación supondremos que las funciones $u(x, t)$ y $\mathcal{L}u(x, t)$ son acotadas en $\{0<t<T\}$.

Veamos las funciones $\zeta_N(x)=\zeta_N(|x|)$, $N=1, 2, \ldots$, que son indefinidamente diferenciables en R_n y que satisfacen las condiciones siguientes: $\zeta_N(x)\equiv 1$ cuando $|x|<N$, $\zeta_N(x)\equiv 0$ cuando $|x|>N+1$, y $|\zeta_N(x)|\leqslant C_0|\nabla\zeta_N|\leqslant C_0$, $|\Delta\zeta_N|\leqslant C_0$, donde la constante C_0 no depende de N.

Sea (ξ, τ) un punto arbitrario de la banda $\{0<t<T\}$. Puesto que las funciones $\zeta_N(x)$, $u(x, t)$, $N=1, 2, \ldots$, y $U(\xi-x, \tau-t)$ pertenecen a $C^{2,1}(0<t<\tau)$, entonces, en virtud de (1_0^*) y la correlación

$$\mathcal{L}(u(x, t)\zeta_N(x))=\zeta_N\mathcal{L}u-2\nabla\zeta_N\cdot\nabla u-u\Delta\zeta_N$$

para todo $(x, t)\in\{0<t<\tau\}$ tiene lugar la igualdad

$$\begin{aligned}U(\xi-x, \tau-t)&(\zeta_N(x)\mathcal{L}u(x, t)-2\nabla\zeta_N(x)\cdot\nabla u(x, t)-u(x, t)\Delta\zeta_N(x))=\\&=U(\xi-x, \tau-t)\mathcal{L}(u(x, t)\zeta_N(x))-u(x, t)\zeta_N(x)\times\\&\qquad\times\mathcal{L}^*_{x,t}(u(\xi-x, \tau-t))=(u\zeta_N U)_t+\\&\qquad\qquad+\sum_{i=1}^{n}(u\zeta_N U_{x_i}-(u\zeta_N)_{x_i}U)_{x_i}.\end{aligned}$$

Integrémosla en el cilindro $\{|x| < N+1,\ \varepsilon < t < \tau - \varepsilon\}$ para cierto $\varepsilon \in (0, \tau/2)$. Valiéndonos de la fórmula de Ostrogradski, obtenemos

$$\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{|x|<N+1} \zeta_N(x) \mathscr{L} u(x, t) \cdot U(\xi - x, \tau - t)\, dx =$$

$$= \int_{|x|<N+1} u(x, \tau-\varepsilon) \zeta_N(x) U(\xi - x, \varepsilon)\, dx -$$

$$- \int_{|x|<N+1} u(x, \varepsilon) \zeta_N(x) U(\xi - x, \tau - \varepsilon)\, dx +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t) \cdot \Delta\zeta_N(x) \cdot U(\xi - x, \tau - t)\, dx +$$

$$+ 2 \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} \nabla u(x, t) \cdot \nabla\zeta_N(x) U(\xi - x, \tau - t)\, dx =$$

$$= \int_{|x|<N+1} u(x, \tau-\varepsilon) \zeta_N(x) U(\xi - x, \varepsilon)\, dx -$$

$$- \int_{|x|<N+1} u(x, \varepsilon) \zeta_N(x) U(\xi - x, \tau - \varepsilon)\, dx -$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t)\, \Delta\zeta_N(x) \cdot U(\xi - x, \tau - t)\, dx -$$

$$- 2 \int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{N<|x|<N+1} u(x, t)\, \nabla\zeta_N(x) \cdot \nabla_x U(\xi - x, \tau - t)\, dx =$$

$$= I_{1, \varepsilon, N} + I_{2, \varepsilon, N} + I_{3, \varepsilon, N} + I_{4, \varepsilon, N}. \qquad (3)$$

Pasemos en la igualdad (3) al límite, primero para $N \to \infty$, y luego, para $\varepsilon \to +0$.

Dado que para todo $N = 1, 2, \ldots,$ y todo $(x, t) \in \{0 < t < \tau\}$ $\zeta_N(x) \mathscr{L}u(x, t)| \leqslant C_0 \cdot \sup\limits_{\{0<t<T\}} |\mathscr{L}u|$ ($\mathscr{L}u$ es acotada en $\{0 < t < T\}$), entonces, en virtud de (2), para todo $t \in (0, \tau)$

$$\int_{R_n} |\zeta_N(x) \mathscr{L}u(x, t) U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |\mathscr{L}u(x, t)|.$$

Por consiguiente, según el teorema de Lebesgue tenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int_{|x|<N+1} \zeta_N(x)\,\mathcal{L}u(x,\ t)\cdot U(\xi-x,\ \ \tau-t)\,dx=$$

$$=\int_{0}^{\tau} dt \int_{R_n} \mathcal{L}u(x,\ t)\cdot U(\xi-x,\ \tau-t)\,dx. \qquad (4)$$

Puesto que para todo $N=1,\ 2,\ \ldots$ y todo $(x,\ t)\in\{0<t<\tau\}\times$ $\times\,|\,\zeta_N(x)\,u(x,\ t)\,|\leqslant C_0\cdot\sup_{\{0<t<T\}}|\,u(x,\ t)\,|$ (u es acotada en $\{0<t<T\}$), entonces para todo $t\in(0,\ \tau)$

$$\int_{R_n} |\,\zeta_N(x)\,u(x,\ t)\cdot U(\xi-x,\ \tau-t)\,dx\leqslant C_0\sup_{\{0<t<T\}}|\,u(x,\ t)\,|,$$

de donde

$$\lim_{N\to\infty}\int_{|x|<N+1}\zeta_N(x)\,u(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx=$$

$$=\int_{R_n} u(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx$$

y

$$\lim_{N\to\infty}\int_{|x|<N+1}\zeta_N(x)\,u(x,\ \varepsilon)\,U(\xi-x,\ \tau-t)\,dx=$$

$$=\int_{R_n} u(x,\ \varepsilon)\,U(\xi-x,\ \tau-\varepsilon)\,dx.$$

Mas, la función $u(x,\ t)$ es continua y acotada en $\{0\leqslant t\leqslant\tau\}$, por esta razón

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} I_{1,\,\varepsilon,\,N}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R_n} u(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx=$$

$$=\frac{1}{(\pi)^{n/2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R_n} u(\xi+2\sqrt{\varepsilon}\,\eta,\ \tau-\varepsilon)\,e^{-|\eta|^2}\,d\eta=$$

$$=u(\xi,\ \tau)\frac{1}{(\pi)^{n/2}}\int_{R_n} e^{-|\eta|^2}\,d\eta=u(\xi,\ \tau) \qquad (5)$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} I_{2,\,\varepsilon,\,N}=\int_{R_n} u(x,\ 0)\,U(\xi-x,\ \tau)\,dx. \qquad (6)$$

Puesto que para todo $N=1, 2, \ldots$ y todo $(x, t) \in \in \{0<t<\tau\}$ $|u(x, t)\Delta\zeta_N(x)| \leqslant C_0 \sup\limits_{\{0<t<T\}} |u(x, t)|$, entonces, para todo $t \in (0, \tau)$

$$\int\limits_{R_n} |u(x, t)\Delta\zeta_N(x) \cdot U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |u|.$$

Por consiguiente

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} |I_{3,\varepsilon,N}| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to\infty}\lim_{N\to\infty} \int\limits_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{N<|x|<N+1} |u(x, t)\Delta\zeta_N(x) \cdot U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\tau-\varepsilon} dt \lim_{N\to\infty} \int\limits_{N<|x|<N+1} |u(x, t)|\, U(\xi - x, \tau - t)\, dx = 0. \qquad (7)$$

Examinemos, por fin, en (3) el sumando $I_{4,\varepsilon,N}$. Puesto que para todo $(x, t) \in \{0<t<\tau\}$ y todo $N=1, 2, \ldots$ $|\nabla\zeta_N \cdot u| \leqslant \leqslant C_0 \sup\limits_{\{0<t<T\}} |u(x, t)|$ entonces para cualquier $t \in (0, \tau)$

$$\int\limits_{R_n} |u(x, t)\nabla\zeta_N(x) \cdot \nabla_x U(\xi - x, \tau - t)|\, dx \leqslant C_0 \int\limits_{R_n} |u(x, t)|\, |\nabla_x U|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_0 \sup_{\{0<t<T\}} |u| \int\limits_{R_n} \frac{|x-\xi|\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(\tau-t)}}}{2(\tau-t)\left(2\sqrt{\pi(\tau-t)}\right)^n}\, dx =$$

$$= \frac{C_0 \sup |u|}{\pi^{n/2}\sqrt{\tau-t}} \int\limits_{R_n} |\eta|\, e^{-|\eta|^2}\, d\eta = \frac{C_1}{\sqrt{\tau-t}},$$

donde C_1 es una constante que no depende de N. Por esto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} I_{4,\varepsilon,N} = 0. \qquad (8)$$

De las correlaciones (3)—(8) se infiere la representación buscada de la función u.

De este modo, resulta válida la siguiente afirmación.

Si la función $u(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(0<t<T) \cap C(0 \leqslant t < < T)$ y es acotada en $\{0<t<T\}$, mientras que la función $\mathscr{L}u$ es también acotada en $\{0<t<T\}$, entonces para cualquier punto (x, t) de $\{0<t<T\}$ tiene lugar la siguiente igualdad

$$u(x, t) = \int\limits_{R_n} u(\xi, 0)\, U(x-\xi, t)\, d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R_n} \mathscr{L}u(\xi, \tau)\, U(x-\xi, t-\tau)\, d\xi. \qquad (9)$$

Empleando la representación (9), establezcamos varias propiedades de las soluciones de la ecuación de la conducción de calor.

TEOREMA 1. *Si la función $u(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(Q)$ y $\mathcal{L}u = u_t - \Delta u = 0$ en Q, donde Q es un dominio del espacio $(n+1)$-dimensional R_{n+1}, entonces $u(x, t) \in C^\infty(Q)$, y la función $u(x, t^0)$, siendo función de las variables $x_1, \ldots, x_n$, es analítica en $Q \cap \{t = t^0\}$, cualquiera que sea t^0.*

Sea (x^0, t^0) un punto arbitrario de Q. Vamos a suponer que $t^0 > 0$ (lo que siempre se puede lograr trasladando el origen de coordenadas). Tomemos tal $\delta = \delta(x^0, t^0) > 0$ que el cilindro

$Q_{x^0, t^0, 2\delta} = \{|x - x^0| < 2\delta, \ |t - t^0| < 2\delta\} \Subset Q \cap \{t > 0\}$, y sea $\zeta(x, t)$

una función indefinidamente diferenciable en R_{n+1} que es igual a la unidad en $Q_{x^0, t^0, \delta} = \{|x - x^0| < \delta, \ |t - t^0| < \delta\}$ y es nula fuera de $Q_{x^0, t^0, 2\delta}$. En estas circunstancias, la función $\tilde{u}(x, t)$, igual a $u(x, t)\,\zeta(x, t)$ en $Q_{x^0, t^0, 2\delta}$ y nula fuera de $Q_{x^0, t^0, 2\delta}$, pertenece a $C^{2,1}\{0 < t < T\} \cap C(0 \leqslant t \leqslant T)$ para $T > t^0 + 2\delta$, es acotada en $\{0 < t < T\}$, coincide en $Q_{x^0, t^0, \delta}$ con la función $u(x, t)$ y $\tilde{u}(x, 0) = 0$; además, la función $\mathcal{L}(\tilde{u}(x, t))$ es acotada en $\{0 < t < T\}$ y $\mathcal{L}(\tilde{u}) = 0$ cuando $(x, t) \in Q_{x^0, t^0, \delta}$ y cuando $(x, t) \in \{0 < t < T\} \setminus Q_{x^0, t^0, 2\delta}$. En vista de (9), para todos los puntos $(x, t) \in Q_{x^0, t^0, \delta}$ tenemos

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R_n} U(x - \xi, t - \tau)\, \mathcal{L}(\tilde{u}(\xi, \tau))\, d\xi =$$

$$= \int_{t^0 - 2\delta}^{t^0 - \delta} d\tau \int_{|x^0 - \xi| < 2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t - \tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}} d\xi +$$

$$+ \int_{t^0 - \delta}^{t} d\tau \int_{\delta < |x^0 - \xi| < 2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t - \tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}} d\xi,$$

donde $g(\xi, \tau) = \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} \mathcal{L}(\tilde{u}(\xi, \tau))$.

De esta representación se deduce inmediatamente que $u(x, t) \in C^\infty(Q_{x^0, t^0, \delta})$. De esta manera, la primera afirmación del teorema ((x^0, t^0) es un punto arbitrario del dominio Q) queda demostrada.

Mostremos ahora que la función

$$u(x, t^0) = \int_{t^0-2\delta}^{t^0-\delta} d\tau \int_{|x^0-\xi|<2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} d\xi +$$

$$+ \int_{t^0-\delta}^{t^0} d\tau \int_{\delta<|x^0-\xi|<2\delta} \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} d\xi =$$

$$= \int_D \frac{g(\xi, \tau)}{T(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} d\xi\, d\tau, \qquad (10)$$

donde el dominio $D = \{|x^0 - \xi| < 2\delta,\ t^0 - 2\delta < \tau < t^0\} \setminus \{|\xi - x^0| \leqslant \delta,\ t^0 - \delta \leqslant \tau \leqslant t^0\}$ es analítico en cierto entorno del punto x^0. Con este objeto examinemos en el espacio $(3n+1)$-dimensional (real) R_{3n+1} de variables x, y, ξ, τ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$) un dominio $D_1 = \{|x_1 - x^0| < \delta/4,\ |y| < \delta/4,\ (\xi, \tau) \in D\}$ y una función de valores complejos, dada en D_1

$$G(x, y, \xi, \tau) = \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{1}{4(t^0-\tau)} \sum_{k=1}^{n} (x_k + iy_k - \xi_k)^2} =$$

$$= \frac{g(\xi, \tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2-|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}} e^{-i\frac{(x-\xi,\, y)}{4(t^0-\tau)}}.$$

Indiquemos que cuando $y=0$, la función G coincide (para $|x-x^0|<\delta/4$, $(\xi, \tau) \in D$) con el integrando en (10).

La función G y sus derivadas G_{x_k} y G_{y_k}, $k=1, \ldots, n$ pertenecen, evidentemente, a $C(\overline{D}_1 \setminus \{\tau = t^0\})$ (aquí, $\{\tau = t^0\} = \{x \in R_n,\ y \in R_n,\ \xi \in R_n,\ \tau = t^0\}$). Examinemos las funciones G, G_{x_k}, G_{y_k}, $k=1, \ldots, n$, en el subdominio $D_1' = \{|x - x^0| < \delta/4,\ |y| < \delta/4,\ \delta < |\xi - x^0| < 2\delta,\ t^0 - \delta < \tau < t^0\}$ del dominio D_1. Puesto que en D_1' $|\xi - x| = |\xi - x^0 + x^0 - x| \leqslant |\xi - x^0| + |x^0 - x| \leqslant 9\delta/4$, $|\xi - x| \geqslant |\xi - x^0| - |x^0 - x| \geqslant 3\delta/4$ y $|y| < \delta/4$, entonces, para todos los puntos (x, y, ξ, τ) de D_1'

$$|G| \leqslant \frac{g_0}{(t^0-\tau)^{n/2}} e^{-\frac{\delta^2}{8(t^0-\tau)}},$$

$$|G_{x_k}|=|G_{y_k}|\leqslant g_0\frac{|x-\xi|+|y|}{2\,(t^0-\tau)^{\frac{n}{2}+1}}e^{\frac{|y|^2-|x-\xi|^2}{4(t^0-\tau)}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{5g_0\delta}{4\,(t^0-\tau)^{\frac{n}{2}+1}}e^{-\frac{\delta^2}{8(t^0-\tau)}},\qquad k=1,\ \ldots,\ n$$

donde $g_0=\max\limits_{(\xi,\,\tau)\in\overline{D}}|g(\xi,\tau)|$.

Por consiguiente, las funciones G, G_{x_k}, G_{y_k}, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, pertenecen a $C(\overline{D}_1')$ $(G(x,\,y,\,\xi,\,t^0)=G_{x_k}(x,\,y,\,\xi,\,t^0)=G_{y_k}(x,\,y,\,\xi,\,t^0)=$ $=0,\ k=1,\ \ldots,\ n)$ y, consecuentemente, pertenecen a $C(\overline{D}_1)$.

Además, como la función G es analítica según cada una de las variables $x_1+iy_1,\ \ldots,\ x_n+iy_n$ (para cualquier $\tau<t^0$), entonces, para todo k, $k=1,\ \ldots,\ n$, satisface en D_1 la condición de Cauchy—Riemann

$$(\operatorname{Re}G)_{x_k}=(\operatorname{Im}G)_{y_k},\qquad(\operatorname{Re}G)_{y_k}=-(\operatorname{Im}G)_{x_k}.$$

Así pues la función de valores complejos

$F(x,\,y)=$

$$=\int\limits_D G(x,\,y,\,\xi,\,\tau)\,d\xi\,d\tau=\int\limits_D\frac{g(\xi,\,\tau)}{(t^0-\tau)^{n/2}}e^{-\frac{1}{4(t^0-\tau)}\sum\limits_{h=1}^{n}(x_h+iy_h-\xi_h)^2}\,d\xi\,d\tau$$

es continuamente diferenciable en el dominio $V=\{\,|x-x^0|<$ $<\delta/4,\ |y|<\delta/4$ del espacio R_{2n}, con la particularidad de que todo $(x,\,y)\in V$ y para cualquier k, $k=1,\ \ldots,\ n$,

$$(\operatorname{Re}F)_{x_k}=(\operatorname{Im}F)_{y_k},\qquad(\operatorname{Re}F)_{y_k}=-(\operatorname{Im}F)_{x_k}.$$

Por eso, para todo punto $(x^1,\,y^1)$ del dominio V la función $F(x_1^1,\ \ldots,\ x_{k-1}^1,\ \ x_k,\ \ x_{k+1}^1,\ \ldots,\ x_n^1,\ \ y_1^1,\ \ldots,\ y_{k-1}^1,\ \ y_k,\ \ y_{k+1}^1,\ \ldots$ $\ldots,\ y_n^1)$ de dos variables (reales) x_k e y_k es función analítica de la variable compleja x_k+iy_k en el punto $x_k^1+iy_k^1$, $k=1,\ \ldots,\ n$. Es fácil mostrar*) que en este caso $F(x,\,y)$ es una función analítica de n variables complejas $x_1+iy_1,\ \ldots,\ x_n+iy_n$ en el dominio V. Y como, para $|x-x^0|<\delta$ la función $F(x,\,0)$ coincide con la función que estudiamos $u(x,\,t^0)$, la afirmación del teorema queda demostrada.

OBSERVACIÓN. Una función $u(x,\,t)$ que en cierto dominio Q del espacio R_{n+1} satisface a la ecuación homogénea de la conducción de calor, no tiene que ser obligatoriamente analítica respecto de t.

---

*) Véanse, por ejemplo, *V. S. Vladimirov*, «Métodos de la teoría de funciones de varias variables complejas», «Naúka», 1964, pág. 42, o *B. V. Shabat*, «Introducción al análisis complejo», «Naúka», 1969, pág. 273 (en ruso).

Por ejemplo, la función $u(x, t)$, igual a $t^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ para $|x| > 1$, $t > 0$, y nula para $|x| > 1$, $t \leqslant 0$, satisface en $\{|x| > 1, -\infty < t < \infty\}$ la ecuación (1_0), sin embargo no es analítica respecto de t (pertenece, por supuesto, a $C^\infty(|x| > 1, -\infty < t < \infty)$).

2. Problema de Cauchy para la ecuación de la conducción de calor. Una función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $C^{2,1}(0 < t < T) \cap C(0 \leqslant t < T)$, se denomina *solución (clásica) del problema de Cauchy para la ecuación* (1), *si en* $\{0 < t < T\}$ ella satisface la ecuación (1), y para $t = 0$ satisface también la condición unicial

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{11}$$

donde $f(x, t)$ y $\varphi(x)$ son funciones dadas.

Demostremos, ante todo, el siguiente teorema de unicidad.

TEOREMA 2. *El problema de Cauchy* (1), (11) *no puede tener más de una solución clásica acotada en* $\{0 < t < T\}$.

Supongamos que $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son dos soluciones clásicas del problema (1), (11) acotadas en $\{0 < t < T\}$. En este caso, la función $u = u_1 - u_2$ será la solución, acotada en $\{0 < t < T\}$, de la ecuación homogénea de la conducción de calor (1_0) que satisface a condición inicial homogénea

$$u|_{t=0} = 0 \tag{11_0}$$

Por consiguiente, para la función u en la banda $\{0 < t < T\}$ es válida la representación (9), obtenida en el punto precedente, de la cual se deduce inmediatamente que $u \equiv 0$ en $\{0 < t < T\}$. El teorema está demostrado.

Designemos mediante $M_\sigma = M_\sigma(T)$, $\sigma \geqslant 0$ el conjunto de todas las funciones $u(x, t)$ dadas en $\{0 \leqslant t < T\}$, con la particularidad de que para cada una de estas funciones existen unas constantes positivas A y a (dependientes de la propia función) tales que

$$|u(x, t)| \leqslant Ae^{a|x|^\sigma} \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in \{0 \leqslant t < T\}.$$

Está claro que el conjunto M_σ es un espacio lineal cualquiera que sea $\sigma \geqslant 0$, siendo, para $\sigma \leqslant \sigma'$, $M_\sigma \subset M_{\sigma'}$; M_0 es el conjunto de todas las finciones acotadas en $\{0 \leqslant t < T\}$, y M_2 es el conjunto de todas las funciones para cada una de las cuales existen unas constantes positivas A y a tales que

$$|u(x, t)| \leqslant Ae^{a|x|^2} \tag{12}$$

para todos los $(x, t) \in \{0 \leqslant t < T\}$.

En el teorema se establece la unicidad de la solución del problema de Cauchy (1), (11) en el conjunto de funciones acotadas M_0. La unicidad de solución tiene lugar, en realidad, también en M_2 y, consecuentemente, en cualquier M_σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$. A saber, tiene lugar la siguiente afirmación que hace el teorema 2 más general.

TEOREMA 2'. *El problema de Cauchy* (1), (11) *no puede tener más de una solución perteneciente a* M_2*).

Para demostrar el teorema 2 necesitaremos en la siguiente afirmación auxiliar.

LEMA 1. *Supongamos que para un cierto* $T>0$ *la función* $u(x, t)$ *es en la banda* $\{0<t<T\}$ *una solución del problema* (1_0), (11_0) *y satisface la igualdad* (12) *con unas constantes* $a>0$ y $A>0$. *Entonces,* $u=0$ *en la banda* $\{0<t<T_1\}$ *donde* $T_1=\min\{T, 1/5a\}$.

Tomemos $\varepsilon>0$ arbitrario y examinemos en $\{0<t<T_1\}$ dos funciones

$$w_{\pm}(x, t)=\pm u(x, t)+\varepsilon\left(t+\frac{1}{(T_1-t)^{n/2}}e^{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}}\right).$$

Estas funciones pertenecen, evidentemente, a $C^{2,1}(0<t<T_1)\cap$ $\cap C(0\leqslant t<T_1)$. Puesto que $u|_{t=0}=0$, para todo $x\in R_n$

$$w_{+}(x, 0)=\varepsilon T_1^{-n/2}e^{\frac{|x|^2}{4T_1}}>0, \tag{13}$$

ya que $\mathcal{L}u=0$ en $\{0<t<T_1\}$, para todos los puntos $(x, t)\in$ $\in\{0<t<T_1\}$ resulta

$$\mathcal{L}(w_{\pm})=\pm\mathcal{L}_2(u)+\varepsilon\mathcal{L}(t+(T_1-t)^{-n/2}e^{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}})=\varepsilon>0 \tag{14}$$

Sea (x^0, t^0) un punto arbitrario de la banda $\{0<t<T_1\}$ Elijamos $R>0$ tan grande que el punto (x^0, t^0) pertenezca al cilindro $\{|x|<R, 0<t<T_1\}$ y que las funciones $w_{\pm}(x, t)$ en la superficie lateral $\{|x|=R, 0<t<T_1\}$ de este cilindro sean positivas

$$w_{\pm}(x, t)|_{|x|=R}>0, \quad 0<t<T_1 \tag{15}$$

(lo último siempre se puede lograr, puesto que $w_{\pm}|_{|x|=R}=$ $=\pm u|_{|x|=R}+\varepsilon(t+(T_1-t)^{-n/2}e^{\frac{R^2}{4(T_1-t)}})\geqslant -Ae^{aR^2}+\varepsilon T_1^{-n/2}e^{\frac{R^2}{4T_1}}\geqslant$ $\geqslant -Ae^{aR^2}+\varepsilon(5a)^{\frac{n}{2}}e^{\frac{5aR^2}{4}}\to+\infty$ cuando $R\to+\infty$).

Demostremos ahora que si una función $w(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(\{|x|<R, 0<t<T_1\})\cap C(\{|x|\leqslant R, 0\leqslant t<T_1\})$ y satisface las condiciones

$$w(x, 0)\geqslant 0 \text{ cuando } |x|\leqslant R, \tag{13'}$$

$$\mathcal{L}w(x, t)>0 \text{ en } \{|x|<R, 0<t<T_1\} \tag{14'}$$

y

$$w|_{|x|=R}\geqslant 0 \text{ para } 0\leqslant t<T_1. \tag{15'}$$

---

*) Se puede mostrar que, siendo $\sigma>2$ cualquiera, la solución del problema (1), (11), en el conjunto M_σ no es la única.

entonces

$$w(x, t) \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in \{|x| < R,\ 0 < t < T_1\}. \quad (16')$$

Supongamos, al contrario, que en $\{|x| < R,\ 0 < t < T_1\}$ existe un punto (x', t') tal que $w(x', t') < 0$. Designemos con (x'', t'') un punto de $\{|x| \leqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant t'\}$, donde la función $w(x, t)$ $(w(x, t) \in C(\{|x| \leqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant t'\}))$ alcanza su mínimo, es decir,

$$w(x'', t'') = \min_{\{|x| \leqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant t'\}} w(x, t) \leqslant w(x', t') < 0.$$

En virtud de (13') y (15') $(x'', t'') \in \{|x| < R,\ 0 < t \leqslant t'\}$. Si $(x'', t'') \in \{|x| < R,\ 0 < t < t'\}$, entonces $\frac{\partial w(x'', t'')}{\partial t} = 0$ y $\frac{\partial^2 w(x'', t'')}{\partial x_i^2} \geqslant$ $\geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, de donde se infiere que $\mathscr{L}w(x'', t'') \leqslant 0$, lo que contradice a (14'). Si $(x'', t'') \in \{|x| < R,\ t = t'\}$, $\frac{\partial w(x'', t'')}{\partial t} \leqslant 0$ y $\frac{\partial^2 w(x'', t'')}{\partial x_i^2} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, de donde se infiere que $\mathscr{L}w(x'', t'') \leqslant 0$, lo que de nuevo contradice a (14'). De este modo queda demostrada la desigualdad (16').

Puesto que las funciones $w \pm (x, t)$ satisfacen, en virtud de (13)—(15), las condiciones (13')—(15'), para todo $(x, t) \in \{|x| < R,\ 0 < t < T_1\}$ tienen lugar las desigualdades $w \pm (x, t) \geqslant 0$, de donde proviene que $w \pm (x^0, t^0) \geqslant 0$, es decir,

$$|u(x^0, t^0)| \leqslant \varepsilon \left(t_0 + \frac{1}{(T_1 - t^0)^{n/2}} e^{\frac{|x^0|^2}{4(T_1 - t^0)}}\right).$$

Por ser arbitrarios $\varepsilon > 0$ y el punto (x^0, t^0), de la última desigualdad se deduce que $u(x, t) \equiv 0$ en $\{0 < t < T_1\}$. El lema está demostrado.

DEMOSTREMOS AHORA EL TEOREMA 2. Sean $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ dos soluciones en $\{0 < t < T\}$ del problema (1), (11), pertenecientes a M_2. Entonces, su diferencia $u = u_1 - u_2$ es en $\{0 < t < T\}$ la solución del problema (1_0), (11_0) y satisface para todo $(x, t) \in \{0 \leqslant t < T\}$, la desigualdad (12) con ciertas constantes $A > 0$ y $a > 0$. En vista del lema 1, $u(x, t) = 0$ en $\{0 < t < T_1\}$, donde $T_1 = \min\left(T, \frac{1}{5a}\right)$. Si $T_1 = T$, la afirmación del teorema queda demostrada.

Sea $T_1 = \frac{1}{5a} < T$. En este caso, como la función $u(x, t)$ es continua en $\{0 < t < T\}$, $u\big|_{t = \frac{1}{5a}} = 0$. Por eso, la función $v(x, t) = u\left(x, t + \frac{1}{5a}\right)$ es en la banda $\left\{0 < t < T - \frac{1}{5a}\right\}$ la solución del problema (1_0), (11_0) y satisface en esta banda la desigualdad (12).

Conforme al lema 1, $v(x, t)=0$ en $\{0<t<T_2\}$, donde $T_2=\min\left\{T-\frac{1}{5a}, \frac{1}{5a}\right\}$, de donde se desprende que $u(x, t)=0$ en $\left\{0<t<T_2+\frac{1}{5a}\right\}$. Si $T_2+\frac{1}{5a}<T$ $\left(\text{en este caso, } T_2=\frac{1}{5a}\right)$, entonces, repitiendo los mismos razonamientos, llegamos a que $u(x, t)=0$ en $\left\{0<t<2\cdot\frac{1}{5a}+T_3\right\}$, donde $T_3=\min\left(T-\frac{2}{5a}, \frac{1}{5a}\right)$, etc. Realizados un número finito de pasos, obtenemos que $u=0$ en $\{0<t<T\}$. El teorema queda demostrado.

Pasemos ahora a la demostración del teorema de existencia de la solución del problema de Cauchy (1), (11). Del punto anterior se deduce que si la solución, acotada en $\{0<t<T\}$, del problema (1), (11) con una función $f(x, t)$ acotada en $\{0<t<T\}$ existe, ella tiene la forma

$$u(x, t)=\int_{R_n} U(x-\xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_{R_n} U(x-\xi, t-\tau)\,f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \quad (17)$$

Por eso, la demostración de la existencia de la solución se reduce, naturalmente, a la búsqueda de aquellas condiciones para las funciones φ y f, en las cuales la función $u(x, t)$, prefijada mediante la fórmula (17), es la solución clásica del problema (1), (11).

Designemos con $B(R_n)$, y $B(0<t<T)$ los espacios de Banach de las funciones, continuas y acotadas en R_n, o, respectivamente, en la banda $\{0<t<T\}$, cuya norma tiene por expresión $\|\varphi\|_{B(R_n)}=\sup\limits_{x\in R_n}|\varphi(x)|$ y $\|f\|_{B(0<t<T)}=\sup\limits_{(x,\, t)\in\{0<t<T\}}|f(x, t)|$.

TEOREMA 3. *Si $\varphi(x)$ pertenece a $B(R_n)$ y las funciones $f(x, t)$ y $f_{x_i}(x, t)$, $i=1, \ldots, n$, pertenecen a $B(0<t<T)$, entonces existe la solución clásica $u(x, t)$ del problema* (1), (11) *que pertenece a $B(0<t<T)$ y que se define por la fórmula* (17); *con ello,*

$$\|u\|_{B(0<t<T)}\leqslant\|\varphi\|_{B(R_n)}+T\|f\|_{B(0<t<T)}. \quad (18)$$

El teorema 3 se pone de manifiesto inmediatamente de las dos afirmaciones siguientes.

LEMA 2. *Cuando $\varphi\in B(R_n)$, la función*

$$u_1(x, t)=\int_{R_n} U(x-\xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi \quad (19)$$

es la solución clásica del problema de Cauchy (1_0), (11) *en el semiespacio $\{t>0\}$; además, para todo $x\in R_n$, $t>0$, tienen lugar las desigualdades*

$$\inf_{x\in R_n}\varphi(x)\leqslant u_1(x, t)\leqslant\sup_{x\in R_n}\varphi(x). \quad (20)$$

LEMA 3. *Si f y f_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$ pertenecen a $B\ (0 < t < T)$, la función*

$$u_2(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R_n} U(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi, \quad (x, t) \in \{0 < t < T\}, \tag{21}$$

pertenece a $B\ (0 < t < T)$ y es la solución clásica del problema de Cauchy (1), (11_0) en la banda $\{0 < t < T\}$: en este caso

$$\| u_2 \|_{B(0<t<T)} \leqslant T \| f \|_{B(0<t<T)}. \tag{22}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Para demostrar el lema 2, es suficiente establecer las siguientes propiedades de la función $u_1(x, t)$:

a) $u_1 \in C^{2,1}\ (t > 0)$ y $\mathscr{L} u_1 = 0$ en $\{t > 0\}$,

b) para la función u_1 se verifican las desigualdades (20),

c) la función u_1 pertenece al espacio $C\ (t \geqslant 0)$ y satisface la condición inicial (11).

Tomemos los números arbitrarios δ y T_1, $0 < \delta < T_1$. Puesto que para todo $x \in R_n$, $\xi \in R_n$, $t \in [\delta, T_1]$ cualesquiera que sean $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, y $\beta \geqslant 0$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha U(x-\xi, t) \right| \leqslant C_{\alpha\beta} (1 + |\xi - x|)^{|\alpha| + 2\beta} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4T_1}},$$

donde $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(\delta)$ son ciertas constantes positivas, entonces, la función $u_1(x, t) \in C^\infty\ (\delta < t < T_1)$, con la particularidad de que

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha u_1(x, t) = \int_{R_n} \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} D_x^\alpha U(x-\xi, t) \cdot \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Ya que la función $U(x - \xi, t)$ satisface en la banda $\{\delta < t < T_1\}$ (según (x, t)) la ecuación (1_0), entonces la ecuación (1_0) será satisfecha en dicha banda también por la función $u_1(x, t)$. Por consiguiente, por ser arbitrarios los números $\delta > 0$ y $T_1 > \delta$, la función $u_1(x, t)$ posee la propiedad a).

Puesto que la función U es no negativa, entonces, de acuerdo con (2), para todo $x \in R_n$ y $t > 0$ tenemos las desigualdades

$$u_1(x, t) \leqslant \int_{R_n} U(x-\xi, t) (\sup_{\xi \in R_n} \varphi(\xi))\, d\xi = \sup_{x \in R_n} \varphi(x),$$

$$u_1(x, t) \geqslant \int_{R_n} U(x-\xi, t) (\inf_{\xi \in R_n} \varphi(\xi))\, d\xi = \inf_{x \in R_n} \varphi(x).$$

De estemodo queda demostrada la propriedad b).

Pasemos a la demostración de la propiedad c). Tomemos un punto arbitrario $x^0 \in R_n$ y mostremos que $\lim\limits_{\substack{(x,\, t) \to (x^0,\, 0) \\ (x,\, t) \in \{t > 0\}}} u_1(x, t) = \varphi(x^0)$. En vista de (2), para cualesquiera $(x, t) \in \{t > 0\}$ y para todo $\delta > 0$ tenemos

$$u_1(x, t) - \varphi(x^0) = \int_{R_n} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\, d\xi =$$

$$= \int_{|\xi - x^0| \leq \delta} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\, d\xi +$$

$$+ \int_{|\xi - x^0| > \delta} U(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x^0))\, d\xi = I_{1,\delta} + I_{2\delta}. \quad (23)$$

Por ser φ continua en el punto x^0, según cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (tomémoslo en la igualdad (23)) tal que $|\varphi(\xi) - \varphi(x^0)| < \varepsilon/2$, siempre que $|\xi - x^0| < \delta$. Por esto,

$$|I_{1,\delta}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x^0 - \xi| \leq \delta} U(x-\xi, t)\, d\xi \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{R_n} U(x-\xi, t)\, d\xi = \varepsilon/2. \quad (24)$$

Sea $|x - x^0| < \delta/2$; entonces, para $|\xi - x^0| > \delta$ tenemos $|x - \xi| = |x - x^0 + x^0 - \xi| \geq |x^0 - \xi| - |x - x^0| > \delta - \delta/2 = \delta/2$. Por eso

$$|I_{2,\delta}| \leq \int_{|x^0 - \xi| > \delta} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} (|\varphi(\xi)| + |\varphi(x^0)|)\, d\xi \leq$$

$$\leq \frac{2\|\varphi\|_{B(R_n)}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \int_{|x^0 - \xi| > \delta} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}\, d\xi \leq$$

$$\leq \frac{2\|\varphi\|_{B(R_n)}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8t}}\, d\xi = \mathrm{const}\, e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \leq \varepsilon/2 \quad (25)$$

siempre que $t \in (0, \delta_0)$ para δ_0 lo suficientemente pequeño. Así pues, de (23)—(25) obtenemos que para todos los puntos (x, t) del semiespacio $\{t > 0\}$, para los cuales $|x - x^0|^2 + t^2 < \min(\delta_0^2, \delta^2/4)$, $|u_1(x, t) - \varphi(x^0)| < \varepsilon$. El lema está demostrado.

DEMOSTRACION DEL LEMA 3. Representemos la función $u_2(x, t)$ (véase (21)) en la forma

$$u_2(x, t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t d\tau \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} f(x + 2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi, \quad (26)$$

$$(x, t) \in \{0 < t < T\}.$$

Para demostrar el lema es suficiente comprobar que

a) $u_2(x, t) \in C(0 \leq t - T)$, $u_2(x, 0) = 0$,

b) tiene lugar la desigualdad (22),

c) $u_2(x, t) \in C^{2,1}(0 < t < T)$ y $\mathcal{L}u_2 = f$ en $\{0 < t < T\}$.

Dado que la función $f(x, t)$ es acotada en $\{0 < t < T\}$, entonces

$$|e^{-|\xi|^2} f(x+2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)| \leqslant e^{-|\xi|^2} \|f\|_{B(0<t<T)},$$

y, por tanto (f es continua), la función

$$g(x, t, \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} f(x+2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi$$

es continua y acotada en el conjunto $\{x \in R_n,\ 0 < t < T,\ 0 < \tau \leqslant t\}$ y $g(x, t, t) = f(x, t)$, $|g(x, t, \tau)| \leqslant \|f\|_{B(0<t<T)}$. Por esta causa, la función $u_2(x, t) = \int\limits_0^t g(x, t, \tau)\, d\tau$ pertenece a $C(0 \leqslant t < T)$, $u_2|_{t=0} = 0$ y $\|u_2\|_{B(0<t<T)} \leqslant T\|f\|_{B(0<t<T)}$. Las propiedades a) y b) están demostradas.

Ya que la función $f(x, t)$ tiene en $\{0 < t < T\}$ las derivadas continuas $f_{x_i}(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, y $|f| + |\nabla f| \leqslant \text{const}$ en $\{0 < t < T\}$, la función $g(x, t, \tau)$ tiene las derivadas continuas $g_{x_i}(x, t, \tau)$, $i = 1, \ldots, n$, en el conjunto $\{x \in R_n,\ 0 < t < T,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$. Por lo tanto, la función $u_2(x, t)$ tiene en $\{0 \leqslant t < T\}$ las derivadas continuas $u_{2x_i}(x, t)$, $i = 1, \ldots, n$, con la particularidad de que

$$\begin{aligned} u_{2x_i}(x, t) &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t d\tau \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} f_{x_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} f_{\xi_i}(x+2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} \xi_i f(x+2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\tau, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{27}$$

Puesto que para todo $j = 1, \ldots, n$

$$|e^{-|\xi|^2} \xi_j f_{x_j}(x+2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)| \leqslant |\xi|\, e^{-|\xi|^2} \|f_{x_j}\|_{B(0<t<T)}$$

entonces las funciones $\int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2} \xi_j f(x+2\xi\sqrt{t-\tau}, \tau)\, d\xi$ tienen primeras derivadas respecto a todo $x_1, \ldots, x_n$ que son continuas y acotadas en el conjunto $\{x \in R_n, 0 < t < T, 0 < \tau \leqslant t\}$. En este caso, de (27) se desprende que la función $u_2(x, t)$ tiene todas las derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$ hasta el segundo orden inclusive, continuas en $\{0 \leqslant t < T\}$. Además,

$$\Delta u_2(x,\ t) = \frac{\pi}{\pi^{n/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} \sum_{i=1}^n \xi_i f_{x_i}(x + 2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\, d\xi. \tag{28}$$

Luego, para los puntos arbitrarios (x, t) y $(x, t + \Delta t)$, $\Delta t > 0$, pertenecientes a $\{0 < t < T\}$,

$$\frac{u_2(x,\ t+\Delta t) - u_2(x,\ t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g(x,\ t+\Delta t,\ \tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \frac{g(x,\ t+\Delta t,\ \tau) - g(x,\ t,\ \tau)}{\Delta t}\, d\tau = I_1(\Delta t) + I_2(\Delta t). \tag{29}$$

Dado que en el segmento $[t,\ t + \Delta t]$ la función $g(x,\ t + \Delta t,\ \tau)$ es continua respecto a τ, $I_1(\Delta t) = g(x,\ t + \Delta t,\ t + \theta\Delta t)$ donde $\theta = \theta(x,\ t,\ \Delta t)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Por consiguiente,

$$\lim_{\Delta t \to +0} I_1(\Delta t) = g(x,\ t,\ t) = f(x,\ t). \tag{30}$$

Puesto que la función f tiene derivadas respecto a $x_1, \ldots, x_n$, continuas y acotadas en $\{0 < t < T\}$, la función $g(x,\ t,\ \tau)$ admite en $\{x \in R_n,\ 0 < t < T,\ 0 < \tau < t\}$ una derivada continua respecto a t:

$$g_t(x,\ t,\ \tau) = \frac{1}{\pi^{n/2}\sqrt{t-\tau}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} \sum_{i=1}^n \xi_i f x_i(x + 2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\, d\xi,$$

siendo $|g_t(x,\ t,\ \tau)| \leqslant \text{const}/\sqrt{t-\tau}$. Entonces

$$\left|\frac{g(x,\ t+\Delta t,\ \tau) - g(x,\ t,\ \tau)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} |g_{t'}(x,\ t',\ \tau)|\, dt' \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\text{const}}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{dt'}{\sqrt{t'-\tau}} \leqslant \text{const}/\sqrt{t-\tau},$$

Por esto, en virtud del teorema de Lebesgue,

$$\lim_{\Delta t \to +0} I_2(\Delta t) =$$
$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2} \sum_{i=1}^n \xi_i f_{x_i}(x + 2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau)\, d\xi. \tag{31}$$

De (28)—(31) se deduce que

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{u_2(x,\ t+\Delta t) - u_2(x,\ t)}{\Delta t} = f(x,\ t) + \Delta u_2(x,\ t). \tag{32}$$

Análogamente se demuestra que

$$\lim_{\Delta t \to -0} \frac{u_2(x, t+\Delta t) - u_2(x, t)}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \to -0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t+\Delta t}^{t} g(x, t, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to -0} \int_0^{t+\Delta t} \frac{g(x, t+\Delta t, \tau) - g(x, t, \tau)}{\Delta t}\, d\tau = f(x, t) + \Delta u_2(x, t). \quad (32')$$

Por consiguiente, la función $u_2(x, t)$ tiene una derivada respecto a t que es continua en $\{0 < t < T\}$ e igual a $f + \Delta u_2$. El lema está demostrado.

En el teorema 3 hemos establecido la existencia de una solución clásica del problema de Cauchy (1), (11) con cualesquiera φ de $C(R_n)$ y f de $C(0 < t < T)$ acotadas para las cuales son continuas y acotadas en $\{0 < t < T\}$ todas las derivadas de primer orden respecto a las variables espaciales. Surge la pregunta: ¿para qué el problema de Cauchy (1), (11) sea resoluble, no será suficiente suponer que la función f sólo sea continua y acotada? La condición de que la función tenga derivadas (continuas) respecto a las variables espaciales es, realmente, elevada: se puede demostrar que el problema (1), (11) se resuelve sólo suponiendo que la función $f(x, t)$ (continua y acotada) satisface, en lo que se refiere a las variables espaciales, la condición de Hölder, es decir, para todo punto (x, t) de $\{0 < t < T\}$ existen constantes $M > 0$, $\alpha > 0$ (dependientes de este punto) tales que $|f(x', t) - f(x, t)| \leqslant M|x' - x|^{\alpha}$, cualesquiera que sea $x' \in R_n$. Sin embargo, si la función f es sólo continua (y acotada) en $\{0 < t < T\}$, el problema (1), (11) puede no tener solución (clásica), lo que muestra el ejemplo, que sigue.

Sea $\zeta = \zeta(|x|)$ una función arbitraria indefinidamente diferenciable en R_n, igual a 1 para $|x| < 1/2$ y nula para $|x| > 3/4$. Examinemos el siguiente problema de Cauchy:

$$\mathcal{L}u = u_t - \Delta u = f_0(x), \quad (33)$$

$$u|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \quad (34)$$

donde

$$f_0(x) = -\frac{x_1^2 - x_2^2}{2|x|^2} \zeta(|x|)\left((n+2)(-\ln|x|)^{-1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(-\ln|x|)^{-3/2}\right) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|} \zeta'(|x|)\left((n+3)(-\ln|x|)^{1/2} - \right.$$

$$\left. - (-\ln|x|)^{-1/2}\right) + (x_1^2 - x_2^2)\, \zeta''(|x|)(-\ln|x|)^{1/2},$$

y

$$\varphi_0(x) = (x_1^2 - x_2^2)\, \zeta(|x|)(-\ln|x|)^{1/2}.$$

La función $f_0(x) \in C(R_n) \cap C^\infty(|x| > 0)$ es igual a cero cuando $|x| > 3/4$ y, por lo tanto, es acotada en R_n. La función inicial $\varphi_0(x) \in C^1(R_n) \cap C^\infty(|x| > 0)$ es igual a cero cuando $|x| > 3/4$ y, consecuentemente, es acotada en R_n. Se comprueba directamente (compárese con el ejemplo correspondiente para la ecuación de Poisson, cap. IV, § 3, p. 3) que la función acotada $u(x, t) \equiv \varphi_0(x)$ (ésta no depende de t) satisface, para $|x| > 0$, la ecuación 33. Además, la función $u(x, t)$ satisface, evidentemente, la condición inicial (34).

No obstante, no existe ningún $T > 0$ para el cual la función $u(x, t) \equiv \varphi_0(x)$ pertenezca al espacio $C^{2,1}(0 < t < T)$, puesto que, por ejemplo, $\lim\limits_{|x| \to 0} u_{x_1 x_1}(x, t) = \infty$. Por consiguiente, esta función no es la solución del problema (33), (34).

Demostremos que el problema (33), (34) no tiene, en absoluto, solución en ninguna banda $\{0 < t < T\}$. Supongamos, al contrario, que para cierto $T > 0$ la solución $v(x, t)$ del problema (33), (34) existe en la banda $\{0 < t < T\}$. En este caso, la función $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t) = \varphi_0(x) - v(x, t) \in C^{2,1}(\{|x| > 0, \ 0 < t < T\})$ y satisface en el conjunto $\{|x| > 0, \ 0 < t < T\}$ la ecuación homogénea de la conducción de calor (1_0). Además, dado que $\varphi_0 \in C^1(R_n)$, $w(x, t) \in C^1(T/2 \leqslant t < T)$. De este modo, $w(x, t) \in C^{2,1}(\{0 < |x| \leqslant 1, T/2 \leqslant t < T\}) \cap C^1(\{|x| \leqslant 1, \ T/2 \leqslant t < T\})$ y $w_t - \Delta w = 0$ para todos los puntos (x, t) de $\{0 < |x| < 1, \ T/2 < t < T\}$.

Mostremos que en estas circunstancias la función $w(x, t)$ debe pertenecer al espacio $C^{2,1}(\{|x| < 1, \ T/2 < t < T\})$ lo que no puede tener lugar, ya que la función $v \in C^{2,1}(\{|x| < 1, \ T/2 < t < T\})$, y la función $u(x, t) \equiv \varphi_0(x) \notin C^{2,1}(\{|x| < 1, \ T/2 < t < T\})$.

Así pues, sea $w(x, t) \in C^{2,1}(\{0 < |x| \leqslant 1, \ T/2 \leqslant t < T\}) \cap C^1(\{|x| \leqslant 1, \ T/2 \leqslant t < T\})$ y $\mathscr{L}w = 0$ en $\{0 < |x| < 1, \ T/2 < t < T\}$. Mostremos que $w(x, t) \in C^{2,1}(\{|x| < 1, \ T/2 < t < T\})$. La demostración de esta afirmación repite en cierto sentido los razonamientos aplicados en el p. 1, al establecer la representación (9).

Tomemos un punto arbitrario (ξ, τ) de $\{0 < |x| < 1, \ T/2 < t < T\}$ y ε arbitrario, $\varepsilon \in (0, \tau - T/2)$. En el conjunto $\{0 < |x| < 1, \ T/2 < t < \tau\}$ tiene lugar la igualdad

$$(w(x, t)\, U(\xi - x, \tau - t))_t + \sum_{i=1}^{n} (w U_{x_i} - w_{x_i} U)_{x_i} =$$
$$= U(\xi - x, \tau - t)\, \mathscr{L}w(x, t) - w(x, t)\, \mathscr{L}^*_{x,t} U(\xi - x, \tau - t) = 0.$$

Integremos esta igualdad respecto de $\{\delta < |x| < 1, \ T/2 < t < \tau - \varepsilon\}$, donde δ es un número arbitrario del intervalo $(0, |\xi|)$.

Valiéndose de la fórmula de Ostrogradski, obtenemos

$$\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ T/2)\,U(\xi-x,\ \tau-T/2)\,dx -$$

$$-\int\limits_{T/2}^{\tau-\varepsilon} dx \int\limits_{|x|=1} \left(w(x,\ t)\,\frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x} - \frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n}\,U(\xi-x,\ \tau-t)\right) dS_x -$$

$$-\int\limits_{T/2}^{\tau-\varepsilon} dt \int\limits_{|x|=\delta} \left(w(x,\ t)\,\frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x} - \frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n}\,U(\xi-x,\ \tau-t)\right) dS_x =$$

$$= I_{1,\,\delta} + I_{2,\,\varepsilon} + I_{3,\,\varepsilon,\,\delta}. \qquad (35)$$

Pasemos en (35) al límite, primero para $\varepsilon \to 0$ y luego para $\delta \to 0$. Tomemos arbitrariamente δ_0, $0 < \delta_0 < \min(1-|\xi|,\ |\xi|-\delta)$. Entonces

$$\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx =$$

$$= \int\limits_{|x-\xi|<\delta_0} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\{\delta<|x|<1\}\cap\{|x-\xi|\geqslant\delta_0\}} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx.$$

Puesto que en el conjunto $\{\delta<|x|<1\}\cap\{\delta_0\leqslant|x-\xi|\}$

$$|w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)| \leqslant \max|w(x,\ t)|\exp\left(-\frac{\delta_0^2}{4\varepsilon}\right)\Big/(2\sqrt{\pi\varepsilon})^n,$$

entonces para $\varepsilon \to 0$ $\displaystyle\int\limits_{\{\delta<|x|<1\}\cap\{|x-\xi|\geqslant\delta_0\}} w(x,\tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\varepsilon)\,dx \to 0.$

Por eso,

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{|x-\xi|<\delta_0} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0} \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{|\eta|<\frac{\delta_0}{2\sqrt{\varepsilon}}} w(\xi+2\eta\sqrt{\varepsilon},\ \tau-\varepsilon)\,e^{-|\eta|^2}\,d\eta = w(\xi,\ \tau),$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\delta<|x|<1} w(x,\ \tau-\varepsilon)\,U(\xi-x,\ \varepsilon)\,dx = w(\xi,\ \tau). \tag{36}$$

Luego, evidentemente,

$$\lim_{\delta\to 0} I_{1,\,\delta} = \int\limits_{|x|<1} w(x,\ T/2)\,U(\xi-x,\ \tau-T/2)\,dx, \tag{37}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{2,\,\varepsilon} = \int\limits_{T/2}^{\tau} dt \int\limits_{|x|<1}\left(w(x,\ t)\frac{\partial U(\xi-x,\ \tau-t)}{\partial n_x} - \frac{\partial w(x,\ t)}{\partial n} U(\xi-x,\ \tau-t)\right) dS_x, \tag{38}$$

y como $w\in C^1(\{|x|\leqslant 1,\ T/2\leqslant t\leqslant \tau\})$, tenemos

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} I_{7,\,\varepsilon,\,\delta} = 0. \tag{39}$$

De las correlaciones (35)—(39) se deduce que para todo punto $(x,\ t)$ de $\{0<|x|<1,\ T/2<t<T\}$ tiene lugar la igualdad

$$w(x,\ t) = \int\limits_{|\xi|<1} w(\xi,\ T/2)\,U(x-\xi,\ t-T/2)\,d\xi -$$

$$-\int\limits_{T/2}^{t} d\tau \int\limits_{|\xi|=1}\left(w(\xi,\ \tau)\frac{\partial U(x-\xi,\ t-\tau)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial w(\xi,\ \tau)}{\partial n} U(x-\xi,\ t-\tau)\right) dS_\xi,$$

de la cual inmediatamente se desprende que w pertenece a $C^\infty(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$ y, con mayor razón, a $C^{2,1}(\{|x|<1,\ T/2<t<T\})$. La afirmación está demostrada.

§ 2. Problemas mixtos

1. Unicidad de la solución. Sea D un dominio acotado n-dimensional del espacio R_n ($x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ es un punto de este espacio). Del mismo modo que para los problemas mixtos de las ecuaciones hiperbólicas, examinemos en el espacio $(n+1)$-dimensional $R_{n+1}=R_n\{-\infty<t<+\infty\}$ un cilindro acotado $Q_T=\{x\in D,\ 0<t<T\}$ de altura $T>0$, y sea Γ_T la superficie lateral de este cilindro:

$\Gamma_T=\{x\in\partial D,\ 0<t<T\}$, y D_τ, $\tau\in[0,\ T]$ un conjunto $\{x\in D,\ t=\tau\}$, en particular, $D_0=\{x\in D,\ t=0\}$ es la base inferior del cilindro Q_T, mientras que $D_T=\{x\in D,\ t=T\}$, su base superior.

Consideremos en el cilindro Q_T, para cierto $T>0$, una ecuación parabólica

$$\mathcal{L}u \equiv u_t - \operatorname{div}(k(x)\nabla u) + a(x)\,u = f(x, t), \tag{1}$$

donde $k(x) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $a(x) \in C(\overline{Q}_T)$, $k(x) \geqslant k_0 = \text{const} > 0$.

La función $u(x, t)$, que pertenece al espacio $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$*) y que satisface en Q_T la ecuación (1), en D_0 la condición inicial

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

y en Γ_T, la condición límite

$$u|_{\Gamma_T} = \chi,$$

se llama *solución clásica del primer problema mixto para la ecuación* (1).

La función $u(x, t)$ que pertenece al espacio $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ y que satisface en Q_T la ecuación (1), en D_0 la condición inicial (2), y en Γ_T la condición límite

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\,u\right)\Big|_{\Gamma_T} = \chi,$$

donde $\sigma(x)$ es una función continua en Γ_T, se llama *solución clásica del tercer problema mixto para la ecuación* (1).

Cuando $\sigma \equiv 0$, el tercer problema mixto lleva el nombre de *segundo problema mixto*.

Puesto que el caso de las condiciones límites no homogéneas se reduce fácilmente al de condiciones límites homogéneas, en lo sucesivo consideraremos las siguientes condiciones límites homogéneas

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{3}$$

y

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)\,u\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0. \tag{4}$$

Convengamos en considerar que el coeficiente $a(x)$ en la ecuación (1) es no negativo en Q_T, y la función $\sigma(x)$ en la condición límite (4) es no negativa en Γ_T.

LEMA 1. *Sea $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ y sea $u(x, t)$ una solución clásica del tercero (segundo) problema mixto* (1), (2), (4) *o la solución clásica, perteneciente a $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, del primer problema mixto* (1)—(3). *Entonces, $u(x, t) \in H^{1,0}(Q_T)$***).

Tomemos arbitrariamente $\tau \in (0, T)$ y $\varepsilon \in (0, \tau)$. La igualdad (1), multiplicada por u, la integramos en el cilindro $Q_{\varepsilon,\tau} = \{x \in D,$

*) La definición de espacios $C^{p,q}$ véase en el p. 1, § 7, cap. III.

**) Los espacios $H^{r,0}(Q_T)$ y las propiedades de sus elementos han sido examinados en el p. 2, § 7, cap. III.

$\varepsilon < t < \tau\}$. Puesto que en Q_T tienen lugar las correlaciones: $uu_t = \frac{1}{2}(u^2)_t$, $u \operatorname{div}(k\nabla u) = \operatorname{div}(ku\nabla u) - k|\nabla u|^2$ y $\frac{1}{2}(u^2)_t - \operatorname{div}(ku\nabla u) = fu - au^2 - k|\nabla u|^2 \in L_1(Q_{\varepsilon,\tau})$, entonces, conforme a la fórmula de Ostrogradski, tenemos

$$\frac{1}{2}\int_{D_\tau} u^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} k|\nabla u|^2\,dx\,dt + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} au^2\,dx\,dt - \int_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} ku\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt = \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} fu\,dx\,dt,$$

donde $\Gamma_{\varepsilon,\tau} = \{x \in \partial D,\ \varepsilon < t < \tau\}$. De aquí, cuando $u(x, t)$ es la solución del primer problema mixto,

$$\frac{1}{2}\int_{D_\tau} u^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} k|\nabla u|^2\,dx\,dt + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} au^2\,dx\,dt = \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} fu\,dx\,dt;$$

cuando $u(x, t)$ es la solución del tercero (segundo) problema mixto

$$\frac{1}{2}\int_{D} u^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} k|\nabla u|^2\,dx\,dt + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} au^2\,dx\,dt + \int_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} k\sigma u^2\,dS\,dt = \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} fu\,dx\,d\tau.$$

Por eso,

$$\frac{1}{2}\int_{D_\tau} u^2\,dx + k_0\int_{Q_{\varepsilon,\tau}} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{D_\tau} u^2\,dx + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} k(x)|\nabla u|^2\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\int_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} |f||u|\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{D_\varepsilon} u^2\,dx + \|u\|_{L_2(Q_{\varepsilon,\tau})}\|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

Pasemos en esta desigualdad al límite para $\varepsilon \to 0$. Como resultado, obtenemos

$$\frac{1}{2}\int_{D_\tau} u^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \|u\|_{L_2(Q_\tau)}\|f\|_{L_2(Q_T)} \tag{5}$$

y

$$k_0\int_{Q_\tau} |\nabla u|^2\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \|u\|_{L_2(Q_\tau)}\|f\|_{L_2(Q_T)}. \tag{6}$$

Tomemos arbitrariamente $t \in (0, T)$ e integremos la desigualdad (5) respecto de $\tau \in (0, t)$

$$\int_0^t \int_{D_\tau} u^2\,dx\,d\tau \leqslant T\,\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + 2T\,\|u\|_{L_2(Q_t)}\,\|f\|_{L_2(Q_T)} \leqslant$$

$$\leqslant T\,\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + 2T^2\,\|f\|^2_{L_2(Q_t)} + \frac{1}{2}\,\|u\|^2_{L_2(Q_T)},$$

de donde se deduce que para cualquier $t \in (0, T)$

$$\|u\|^2_{L_2(Q_t)} \leqslant 2T\,\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + 4T^2_{L_2(Q_T)}\|f\|^2_{L_2(Q_T)} = C_0^2.$$

Por consiguiente, $u \in L_2(Q_T)$ y

$$\|u\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_0. \tag{7}$$

Entonces, de (6) tenemos

$$\|\,|\nabla|\,\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{2k_0}\,\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \frac{C_0}{k_0}\,\|f\|_{L_2(Q_T)}$$

para cualquier $\tau \in (0, T)$. Por consiguiente, $|\nabla u| \in L_2(Q_T)$. El lema está demostrado.

OBSERVACIÓN. De las desigualdades (5) y (7) se deduce inmediatamente que para la solución clásica del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) y para la solución clásica, perteneciente a $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, del primer problema mixto tiene lugar la siguiente acotación

$$\|u\|_{L_2(D_\tau)} \leqslant C_1, \quad \tau \in (0, T), \tag{8}$$

donde la constante C_1 sólo depende de T, $\|\varphi\|_{L_2(D)}$ y $\|f\|_{L_2(Q_T)}$.

Sea u la solución clásica del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) o la solución clásica del primer problema mixto (1)—(3), perteneciente a $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, con la particularidad de que la función $f(x, t) \in L_2(Q_T)$. Multipliquemos (1) por una función arbitraria $v(x, t)$ que pertenece a $C^1(\overline{Q}_T)$ y que satisface la condición

$$v|_{D_T} = 0, \tag{9}$$

e integremos la igualdad obtenida en el cilindro $Q_{\varepsilon,\tau}$, donde τ es un número arbitrario de $(0, T)$ y ε, un número arbitrario de $(0, \tau)$. Según la fórmula de Ostrogradski obtenemos

$$\int_{Q_{\varepsilon,\tau}} (-uv_t + k\nabla u\nabla v + auv)\,dx\,dt - \int_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} kv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt +$$

$$+ \int_{D_\tau} uv\,dx = \int_{D_\varepsilon} uv\,dx + \int_{Q_{\varepsilon,\tau}} fv\,dx\,dt. \tag{10}$$

Si u es la solución del primer problema mixto, adicionalmente supondremos que

$$v|_{\Gamma_T}=0. \qquad (11)$$

En este caso la igualdad (10) tomará la forma

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} (-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{D_\tau} uv\,dx=\int\limits_{D_\varepsilon} uv\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} fv\,dx\,dt. \qquad (10')$$

Si u es la solución del tercero (segundo) problema mixto, la igualdad (6) tiene por expresión

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} (-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\tau}} k\sigma uv\,dS\,dt+\int\limits_{D_\tau} uv\,dx=$$

$$=\int\limits_{D_\varepsilon} uv\,dx+\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} fv\,dx\,dt. \qquad (10'')$$

En virtud del lema 1, $u\in H^{1,0}(Q_T)$ y, por lo tanto (véase § 7, cap. III), $u\,|_{\Gamma_T}\in L_2(\Gamma_T)$. Teniendo en cuenta (8) y (9), pasemos en las igualdades (10′) y (10″) al límite para $\varepsilon\to 0$ y $\tau\to T$. De resultas obtenemos las afirmaciones siguientes.

La solución clásica $u(x, t)$, perteneciente a $C^{1,0}(Q_T\cup\Gamma_T)$, del primer problema mixto satisface la identidad integral

$$\int\limits_{Q_T} (-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt=\int\limits_{D_0} \varphi v\,dx+\int\limits_{Q_T} fv\,dx\,dt \qquad (12)$$

para todas las v de $C^1(\overline{Q}_T)$ que satisfacen las condiciones (9) y (11), y, por consiguiente, también *para todas las v de $H^1(Q_T)$ que satisfacen las mismas condiciones* (9) *y* (11).

La solución clásica $u(x, t)$ del tercero (segundo, cuando $\sigma=0$) problema mixto satisface la identidad integral

$$\int\limits_{Q_T} (-uv_t+k\nabla u\nabla v+auv)\,dx\,dt+\int\limits_{\Gamma_T} k\sigma uv\,dS\,dt=$$

$$=\int\limits_{D_0} \varphi v\,dx+\int\limits_{Q_T} fv\,dx\,dt. \qquad (13)$$

para todas las v de $C^1(\overline{Q}_T)$ que satisfacen la condición (9), y, por lo tanto, también *para todas las v de $H^1(Q_T)$ que satisfacen la misma condición* (9).

Empleando las identidades obtenidas, introduzcamos los conceptos de soluciones generalizadas de los problemas mixtos que se consideran. Vamos a suponer que $f(x, t)\in L_2(Q_T)$ y $\varphi(x)\in L_2(D)$.

La función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $H^{1,0}(Q_T)$ se llama *solución generalizada del primer problema mixto* (1)—(3), si satisface la condición límite (3) y la identidad (12) para todas las $v(x, t)$ de $H^1(Q_T)$ que satisfacen las condiciones (9) y (11).

La función $u(x, t)$, perteneciente al espacio $H^{1,0}(Q_T)$, se llama *solución generalizada del tercero* (*segundo, cuando* $\sigma = 0$) *problema mixto* (1), (2), (4), *si* satisface la identidad (13) para todas las $v(x, t)$ de $H^1(Q_T)$ que satisfacen la condición (9).

Junto con las soluciones clásicas y generalizadas de los problemas mixtos se puede introducir el concepto de solución en casi todo punto c.t.p.

La función $u(x, t)$ se llama *solución en c.t.p. del primer problema mixto* (1)—(3) *o del tercero* (*segundo, si* $\sigma = 0$) *problema mixto* (1), (2), (4), si ella pertenece al espacio $H^{2,1}(Q_T)$, satisface, para casi todo $(x, t) \in Q_T$, la ecuación (1), la condición inicial (2) y una de las condiciones límites (3) o, respectivamente (4).

Ya hemos mostrado más arriba que la solución clásica del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) y la solución clásica del primer problema mixto (1)—(3), perteneciente a $C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, son soluciones generalizadas de los problemas mixtos correspondientes. De una manera análoga se demuestra que la solución en c.t.p. del primero, segundo o tercero problema mixto es la solución generalizada del problema correspondiente. Es también fácil establecer que si la solución generalizada del primer problema mixto (1)—(3) o del tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) pertenece a $H^{2,1}(Q_T)$, es la solución en c.t.p. de este problema; si la solución generalizada en el caso del problema (1)—(3) pertenece a $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0)$, y en el caso del problema (1), (2), (4) a $C^{2,1}(Q_T) \cap \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{D}_0) \cap C^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$, entonces será la solución clásica (compárese con el p. 1, § 2, cap. V, donde están dadas las demostraciones de las afirmaciones correspondientes para las soluciones de los problemas mixtos relacionados a la ecuación hiperbólica).

Señalemos además, que la solución generalizada de un problema mixto para la ecuación parabólica, al igual que la solución clásica y la solución en c.t.p. posee la siguiente propiedad: si $u(x, t)$ es una solución generalizada del problema mixto (1)—(3) o del problema (1), (2), (4) en el cilindro Q_T, será también la solución generalizada del problema correspondiente en el cilindro $Q_{T'}$, cualquiera que sea T', $0 < T' < T$. La demostración de esta afirmación es análoga a la de la afirmación correspondiente para las soluciones de los problemas mixtos para una ecuación hiperbólica.

Demos a conocer, ahora, los teoremas de unicidad de las soluciones de los problemas mixtos.

TEOREMA 1. *El primer problema mixto* (1)—(3) *no puede tener más de una solución generalizada.*

El tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) *no puede tener más de una solución generalizada.*

Este teorema se demuestra de igual modo que el de la unicidad de soluciones de los problemas mixtos para una ecuación hiperbólica (teorema 1, p. 1, § 2, cap. V).

Sean $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ dos soluciones generalizadas del problema (1)—(3) o del problema (1), (2), (4). En este caso, la función $u = u_1 - u_2$ será la solución generalizada del problema correspondiente para $f = 0$ y $\varphi = 0$. Hemos de mostrar que $u = 0$ en Q_T.

Examinemos en Q_T la función

$$v(x, t) = \int_t^T u(x, \theta)\, d\theta$$

Directamente se comprueba que la función v tiene en Q_T derivadas generalizadas

$$v_t = -u,$$

$$v_{x_i} = \int_t^T u_{x_i}(x, \theta)\, d\theta, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Puesto que, obviamente, las funciones v, v_t, y v_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$, pertenecen a $L_2(Q_T)$, entonces $v \in H^1(Q_T)$. Con ello, $v|_{D_t} = 0$, $v|_{\Gamma_T} = \int_t^T u|_{\Gamma_T}\, d\theta$, y, en particular, si u es una solución generalizada del primer problema mixto (1)—(3), entonces $v|_{\Gamma_T} = 0$. Sustituyamos la función v en la identidad (12) (si u es solución del primer (1)—(3)) o en la identidad (13) (si u es solución del problema (1), (2), (4)). Entonces, para el primer problema mixto obtenemos la igualdad

$$\int_{Q_T} (u^2(x, t) + k\nabla u(x, t) \cdot \int_t^T \nabla u(x, \theta)\, d\theta - av(x, t)\, v_t(x, t)\, dx\, dt = 0 \tag{14}$$

y para el tercero (segundo) problema mixto, la igualdad

$$\int_{Q_T} (u^2(x, t) + k(x)\nabla u(x, t) \cdot \int_t^T \nabla u(x, \theta)\, d\theta - avv_t)\, dx\, dt + \\ + \int_{\Gamma_T} k\sigma u(x, t) \int_t^T u(x, \theta)\, d\theta\, dS\, dt = 0. \tag{14'}$$

Puesto que (véase la demostración del teorema 1, p. 1, § 2, cap. V)

$$\int_{Q_T} k\nabla u(x, t)\int_t^T \nabla u(x, \theta)\,d\theta\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_D k\left|\int_0^T \nabla u(x, t)\,dt\right|^2 dx \geqslant 0,$$

$$\int_{\Gamma_T} k\sigma u(x, t)\int_t^T u(x, \theta)\,d\theta\,dS\,dt = \frac{1}{2}\int_{\partial D} k\sigma\left(\int_0^T u(x, t)\,dt\right)^2 dS \geqslant 0$$

y

$$\int_{Q_T} avv_t\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int_{D_0} av^2\,dx \leqslant 0,$$

entonces, de (14) y (14') tenemos

$$\int_{Q_T} u^2(x, t)\,dx\,dt \leqslant 0,$$

de donde se infiere que $u = 0$ en Q_T. El teorema queda demostrado.

Ya que la solución en c.t.p. del problema mixto (1)—(3) o del (1), (2), (4) es también solución generalizada del problema correspondiente, del teorema 1 se deduce.

COROLARIO 1. *El primer problema mixto* (1)—(3) *no puede tener más de una solución en c.t.p.*

El tercero (segundo) problema mixto (1), (2), (4) *no puede tener más de una solución en c.t.p.*

Del teorema 1 se deduce, además, la afirmación siguiente.

COROLARIO 2. *El tercero (segundo) problema mixto* (1), (2), (4) *no puede tener más de una solución clásica.*

Efectivamente, sean u_1 y u_2 dos soluciones clásicas del problema (1), (2), (4). Entonces, la diferencia entre ellas será solución clásica (del problema (1), (2), (4) para $\varphi = 0$ y $f = 0 \in L_2(Q_T)$. Por consiguiente, $u_1 - u_2$ es una solución generalizada que, debido al teorema 1, es igual a cero.

Establezcamos, ahora, el teorema de unididad de la solución clásica del primer problema mixto.

TEOREMA 2. *El primer problema clásico mixto* (1)—(3) *no puede tener más de una solución clásica.*

Sean u_1 y u_2 dos soluciones clásicas en el cilindro Q_T del primer problema mixto (1)—(3). Entonces, la función $u = u_1 - u_2$ pertenece a $C^{2,1}(Q_T) \cap C(Q_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, satisface en Q_T la ecuación homogénea

$$\mathcal{L}u = u_t - \operatorname{div}(k\nabla u) + au = 0, \tag{1_0}$$

en Γ_T la condición límite (3) y en D_0 la condición inicial homogénea

$$u|_{t=0} = 0. \tag{2_0}$$

Mostremos que $u(x, t)$ es igual a cero en Q_T.

Supongamos que existe un punto $(x^0, t^0) \in Q_T$ tal que $u(x^0, t^0) \neq 0$. Vamos a considerar que $u(x^0, t^0) > 0$ (si $u(x^0, t^0) < 0$, en lugar de la función u se debe considerar la función $-u$, pues para ella se cumplen (1_0), (2_0) y (3) y $-u(x^0, t^0) > 0$).

Designemos $u(x^0, t^0)$ mediante M y examinemos la función

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{M}{2t^0}(t - t^0).$$

Señalemos ante todo que

$$\mathcal{L}v = -\frac{M}{2t^0} < 0 \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in Q_T. \tag{15}$$

Puesto que $v \in C(\overline{Q}_{t^0})$, existe en $\overline{Q}_{t^0}$ un punto (x^1, t^1) en el cual la función $v(x, t)$ alcanza su valor máximo; con ello, como $v(x^0, t^0) = u(x^0, t^0) = M$, entonces $v(x^1, t^1) \geqslant v(x^0, t^0) = M$.

El punto (x^1, t^1) no puede pertenecer al conjunto $\Gamma_{t^0} \cup D_0$, dado que $v|_{\Gamma_T} = u|_{\Gamma_T} - \frac{M}{2t^0}(t - t^0) = \frac{M}{2t^0}(t^0 - t) \leqslant \frac{M}{2}$ y $v|_{D_0} = u|_{D_0} + \frac{M}{2} = \frac{M}{2}$. Por consiguiente, el punto (x^1, t^1) debe pertenecer al conjunto $Q_{t^0} \cup D_{t^0}$. Supongamos que pertenece a Q_{t^0}. Entonces, $v_t(x^1, t^1) = 0$, $v_{x_i}(x^1, t^1) = 0$ y $v_{x_ix_i}(x^1t^1) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Es decir, $\mathcal{L}v(x^1, t^1) = v_t(x^1, t^1) - k(x^1)\Delta v(x^1, t^1) - \nabla k(x^1)\nabla v \times \times (x^1, t^1) + a(x^1)v(x^1, t^1) \geqslant 0$, lo que contradice a (15). En el caso de que $(x^1, t^1) \in D_{t^0}$, $v_t(x^1, t^1) \geqslant 0$, $v_{x_i}(x^1, t^1) = 0$ y $v_{x_ix_i}(x^1, t^1) \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Es decir, de nuevo $\mathcal{L}v(x^1, t^1) \geqslant 0$. El teorema queda demostrado.

2. Existencia de la solución generalizada. Pasemos ahora a la demostración de la existencia de las soluciones de los problemas (1)—(3) y (1), (2), (4). Igual que en el caso hiperbólico con este fin emplearemos el método de Fourier.

Sea $v(x)$ una función propia generalizada del primer problema de contorno

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D, \qquad v|_{\partial D} = 0 \tag{16}$$

o del tercero (segundo, cuando $\sigma = 0$) problema de contorno

$$\operatorname{div}(k(x)\nabla v) - av = \lambda v, \quad x \in D, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial n} + \sigma(x)v\right)\Big|_{\partial D} = 0 \tag{17}$$

(λ es el valor propio correspondiente). Esto significa que en el primer problema de contorno v pertenece a $\mathring{H}^1(Q)$ y satisface la identidad integral

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta + av\eta)\,dx + \lambda \int_D v\eta\,dx = 0$$

cualquiera que sea $\eta \in \mathring{H}^1(D)$, mientras que en el tercero (segundo) problema de contorno $v \in H^1(D)$ y satisface la identidad integral

$$\int_D (k\nabla v\nabla\eta + av\eta)\,dx + \int_{\partial D} k\sigma v\eta\,dS + \lambda \int_D v\eta\,dx = 0$$

cualquiera que sea $\eta \in H^1(D)$.

Examinemos un sistema $v_1, v_2, \ldots$, ortonormal en $L_2(D)$ y compuesta de todas las funciones propias generalizadas del problema (16) o, respectivamente, del problema (17); $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ es la sucesión de los valores propios correspondientes, la cual consideramos, como siempre, no creciente, con la particularidad de que cada valor propio interviene en esta sucesión tantas veces cual es su multiplicidad. Como fue mostrado en el § 1, cap. IV, el sistema $v_1, v_2, \ldots$ es una base ortonormal en $L_2(D)$ y $\lambda_k \to -\infty$ para $k \to \infty$. Para el primero, tercero (cuando $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D) y segundo (cuando $a \not\equiv 0$ en D) problemas de contorno (recordemos que $a(x) \geqslant 0$ en D y $\sigma(x) \geqslant 0$ en ∂D), el primer valor propio $\lambda_1 < 0$, es decir $0 > \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$ Si $a \equiv 0$ en D, para el segundo problema de contorno $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \geqslant \lambda_3 \geqslant \ldots$

Supongamos que la función inicial φ en (2) pertenece a $L_2(D)$ y la función $f \in L_2(Q_T)$. De acuerdo con el teorema de Fubini, $f(x, t) \in L_2(D_t)$ para casi todo $t \in (0, T)$. Desarrollemos la función φ y la función $f(x, t)$, para casi todos los valores de $t \in (0, T)$, en series de Fourier según el sistema $v_1, v_2, \ldots$ de las funciones generalizadas del problema (16) (si se considera el problema (1), (2), (3)) o del problema (17) (si se considera el problema (1), (2), (4)):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \\ f(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, v_k(x), \end{aligned} \tag{18}$$

donde

$$\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L_2(D)}, \qquad f_k(t) = (f(x, t), v_k(x))_{L_2(D)}, \tag{19}$$

con la particularidad de que las funciones $f_k(t)$ pertenecen a $L_2(0, T)$. Según la igualdad de Parseval—Steklov

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(D)} \tag{20}$$

y para casi todo $t \in (0, T)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t) = \int_D f^2(x, t)\, dx,$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t)\, dt = \int_{Q_T} f^2(x, t)\, dx\, dt. \tag{20'}$$

Examinemos, para cualquier $k = 1, 2, \ldots$, la función

$$U_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t} + \int_0^t f_k(\tau)\, e^{\lambda_k (t-\tau)}\, d\tau, \tag{21}$$

que pertenece a $H^1(0, T)$ y satisface casi siempre en $(0, T)$ la ecuación

$$U_k' - \lambda_k U_k = f_k, \tag{22}$$

y la condición $(H^1(0, T) \subset C([0, T]))$

$$U_k(0) = \varphi_k. \tag{22'}$$

Es fácil (igual que en el caso hiperbólico) comprobar que la función

$$u_k(x, t) = U_k(t)\, v_k(x)$$

es la solución generalizada del primero (si $v_k(x)$ es función propia del problema (16)) o del tercero (segundo) (si $v_k(x)$ es función propia del problema (17)) problema mixto para la ecuación

$$u_t - \operatorname{div}(k \nabla u) + au = f_k(t)\, v_k(x)$$

con la condición inicial

$$u|_{t=0} = \varphi_k v_k(x).$$

Por consiguiente, si en calidad de función inicial en (2) y en el segundo miembro de la ecuación (1) tomamos las sumas parciales de las series (18) $\sum_{k=1}^{N} \varphi_k v_k(x)$ y $\sum_{k=1}^{N} f_k(t)\, v_k(x)$, la solución generalizada del problema (1)—(3), o, respectivamente, del (1), (2), (4) será la función

$$S_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t)\, v_k(x).$$

En particular, para el primer problema mixto $S_N(x, t)$ satisface la igualdad integral

$$\int_{Q_T} (-S_N v_t + k\nabla S_N \cdot \nabla v + aS_N v)\, dx\, dt =$$

$$= \int_{D_0} \sum_{h=1}^{N} \varphi_h v_h(x)\, v(x, 0)\, dx + \int_{Q_T} \sum_{h=1}^{N} f_h(t)\, v_h(x)\, v(x, t)\, dx\, dt, \qquad (23)$$

cualquiera que sea v de $H^1(Q_T)$ que satisfaga las condiciones (9) y (11); en el caso del tercero (segundo) problema mixto, la identidad integral

$$\int_{Q_T} (-S_N v_t + k\nabla S_N \cdot \nabla v + aS_N v)\, dx\, dt + \int_{\Gamma_T} k\sigma S_N v\, dS\, dt =$$

$$= \int_{D_0} \sum_{h=1}^{N} \varphi_h v_h(x)\, v(x, 0)\, dx + \int_{Q_T} \sum_{h=1}^{N} f_h(t)\, v_h(x)\, v(x, t)\, dx\, dt \qquad (23')$$

para toda v de $H^1(Q_T)$ que satisfaga la condición (9).

Mostremos que la solución generalizada del problema (1)—(3) o del problema (1), (2), (4) se prefija mediante la serie

$$u(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} U_h(t)\, v_h(x), \qquad (24)$$

donde, para el problema (1)—(3), $v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ serán las funciones propias del problema (16), mientras que para el problema (1), (2), (4), $v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ serán las funciones propias del problema (17).

TEOREMA 3. *Si $f \in L_2(Q_T)$ y $\varphi \in L_2(D)$, cualquiera de los problemas mixtos (1), (2), (3) o (1), (2), (4) tiene la solución generalizada u. Esta solución se representa por la serie (24) convergente en $H^{1,0}(Q_T)$. En este caso tiene lugar la desigualdad*

$$\| u \|_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C (\| \varphi \|_{L_2(D)} + \| f \|_{L_2(Q_T)}), \qquad (25)$$

donde la constante $C > 0$ no depende de φ y f.

De la fórmula (21) fluye que para todo $t \in [0, T]$

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k|\, e^{\lambda_k t} + \int_0^t |f_k|(\tau)\, |e^{\lambda_k (t-\tau)}|\, d\tau \leqslant |\varphi_k|\, e^{\lambda_k t} +$$

$$+ \frac{\| f_k \|_{L_2(0, T)}}{\sqrt{2\,|\lambda_k|}} \quad \text{para} \quad k > 1$$

y

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + C_1 \| f_1 \|_{L_2(0, T)},$$

donde $C_1 = \sqrt{T}$ para el segundo problema mixto cuando $a \equiv 0$, en los casos restantes $C_1 = 1/\sqrt{2|\lambda_1|}$.

Por eso, para todo $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 2\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t} + \frac{1}{|\lambda_k|}\|f_k\|^2_{L_2(0,T)} \quad \text{para} \quad k > 1 \tag{26}$$

y

$$U_1^2(t) \leqslant 2\varphi_1^2 + 2C_1^2\|f_1\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{26'}$$

Examinemos la suma parcial $S_N(x, t)$ de la serie (24). Para todo $t \in [0, T]$ pertenece al espacio $\mathring{H}^1(D_t)$ en el primer problema mixto o al espacio $H^1(D_t)$, en el tercero (segundo) problema mixto.

Al estudiar el problema (1)—(3), resulta cómodo introducir en el espacio $\mathring{H}^1(D_t)$ el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u\nabla v + auv)\,dx.$$

Al estudiar el problema (1), (2), (4), introduzcamos en el espacio $H^1(D_t)$ el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u\nabla v + auv)\,dx + \int_{\partial D_t} k\sigma uv\,dS,$$

si (o bien) $a \not\equiv 0$ en D, o bien $\sigma \not\equiv 0$ en ∂D, y el producto escalar

$$\int_{D_t} (k\nabla u\nabla v + uv)\,dx,$$

siempre que $a \equiv 0$ en D y $\sigma \equiv 0$ en ∂D. Puesto que en el caso del primero y tercero, para $\sigma \not\equiv 0$, problemas mixtos y en el del segundo problema mixto para $a \not\equiv 0$, los sistemas de funciones $v_1/\sqrt{-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{-\lambda_2}$, ..., son ortonormados en los productos escalares correspondientes, mientras que en el segundo problema mixto, cuando $a \equiv 0$, queda ortonormado el sistema de funciones $v_1/\sqrt{1-\lambda_1}$, $v_2/\sqrt{1-\lambda_2}$, ..., entonces para todo $t \in [0, T]$ y para cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$, en virtud de (26), tenemos

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} U_k(t)\,v_k(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)\,|\lambda_k| \leqslant \sum_{k=M+1}^{N} \left(2e^{2\lambda_k t}\varphi_k^2\,|\lambda_k| + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right).$$

en el caso del primer problema mixto y en el del segundo y tercero problemas, si (o bien) $a \not\equiv 0$ en D, o bien $\sigma(x) \not\equiv 0$ en ∂D,

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \sum_{k=M+1}^{N} U_k^2(t)(1+|\lambda_k|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=M+1}^{N} \left[2e^{2\lambda_k t}\varphi_k^2(1+|\lambda_k|) + \frac{1+|\lambda_k|}{|\lambda_k|}\int_0^T f_k^2(t)\,dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{1+|\lambda_2|}{|\lambda_2|} \sum_{k=M+1}^{N} \left[e^{2\lambda_k t}(1+|\lambda_k|)\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right],$$

si $a \equiv 0$ en D y $\sigma \equiv 0$ en ∂D. Es decir, en ambos casos tiene lugar la desigualdad

$$\|S_N(x, t) - S_M(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t}(1+|\lambda_k|) + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right). \tag{27}$$

Junto con esta desigualdad, debido a (26′) se verifica también, para todo $t \in [0, T]$ y cualquier $N \geqslant 1$, la desigualdad

$$\|S_N(x, t)\|^2_{H^1(D_t)} = \left\|U_1 v_1 + \sum_{k=2}^{N} U_k v_k\right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k^2 e^{2\lambda_k t}(1+|\lambda_k|) + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right). \tag{28}$$

Integrando respecto de $t \in (0, T)$ las desigualdades (27) y (28), obtenemos

$$\|S_N - S_M\|^2_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_3 \sum_{k=M+1}^{N} \left(\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right), \tag{29}$$

$$\|S_N\|^2_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_4 \sum_{k=1}^{N} \left(\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\,dt\right). \tag{30}$$

En virtud de (20) y (20′), la serie con término común $\varphi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t)\,dt$ converge. Por eso, de (29) se desprende que la serie (24) converge en $H^{1,0}(Q_T)$, y, por lo tanto, su suma $u(x, t)$ pertenece a $H^{1,0}(Q_T)$, y en el caso del primer problema mixto, satisface la condición límite (3). Pasando al límite para $N \to \infty$ en la identidad (23) (primer problema) y en la (23') (tercero (segundo) problema), resulta que la función $u(x, t)$ satisface la identidad (12) o (13), respectivamente. Por consiguiente, $u(x, t)$ es la solución generalizada. La desigualdad (25) se deduce de (30), si pasamos al límite para $N \to \infty$ y hacemos uso de las igualdades (20) y (20'). El teorema queda demostrado.

Ha de notarse que análogamente al caso hiperbólico, la existencia de las soluciones generalizadas para los problemas mixtos en cuestión puede ser demostrada con ayuda del método de Galiorkin.

3. Suavidad de las soluciones generalizadas de los problemas mixtos. Existencia de la solución en c.t.p. y de la solución clásica. Al estudiar la suavidad de las soluciones generalizadas, nos limitamos a la consideración del primero y segundo (en la condición límite (4) $\sigma = 0$) problemas mixtos para el caso particular de la ecuación (1), a saber, la ecuación de la conducción de calor (en (1) $k = 1$, $a = 0$), aunque, siendo suficientemente suaves los coeficientes y la función σ, el uso del mismo método conduce a resultados semejantes también en el caso general.

Sea $u(x, t)$ la solución generalizada del primero o del segundo problema mixto para la ecuación de la conducción de calor

$$u_t - \Delta u = f \tag{31}$$

$$u|_{t=0} = \varphi \tag{32}$$

y (o bien)

$$u|_{\Gamma_T} = 0 \tag{33}$$

para el primer problema mixto, o bien

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = 0, \tag{34}$$

para el segundo problema mixto.

Recordemos (véase p. 4, § 2, cap. IV) que si el contorno ∂D del dominio D pertenece a la clase C^r para cierto $r \geqslant 1$, entonces las funciones propias generalizadas $v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, del primero y segundo problemas de contorno para el operador de Laplace pertenecen a los espacios $H^r_{\mathscr{D}}(D)$ y $H^r_{\mathscr{N}}(D)$, respectivamente, o sea, pertenecen a $H^r(D)$ y satisfacen en ∂D para el primer problema de contorno las condiciones límites

$$v_k|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} v_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

y en el segundo problema de contorno, cuando $r > 1$, a las condiciones límites

$$\frac{\partial v_k}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{\left[\frac{r}{2}\right]-1} v_k|_{\partial D} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots;$$

para $r = 1 H^r_{\mathscr{N}}(D) = H^1_{\mathscr{N}}(D) = H^1(D)$.

Designemos mediante $\widetilde{H}^{2l,\,l}_{\mathscr{D}}(Q_t)$, para $l \geqslant 1$ entero, un subespacio del espacio $H^{2l,\,l}(Q_T)$ (véase p. 2, § 7, cap. III) compuesto de todas las funciones f de $H^{2l,\,l}(Q_T)$ para las cuales

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{l-1} f|_{\Gamma_T} = 0;$$

por $\widetilde{H}^{2l,\,l}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ para $l = 0$, entenderemos el espacio $L_2(Q_T)$: $\widetilde{H}^{0,\,0}_{\mathscr{D}}(Q_T) = H^{0,\,0}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

Mediante $\widetilde{H}^{2l,\,l}_{\mathscr{N}}(Q_T)$, para $l \geqslant 1$ entero, designemos un subespacio del espacio $H^{2l,\,l}(Q_T)$ compuesto de todas las funciones f de $H^{2l,\,l}(Q_T)$ para las cuales

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = \ldots \frac{\partial}{\partial n}\Delta^{l-1} f|_{\Gamma_T} = 0;$$

por $\widetilde{H}^{2l,\,l}_{\mathscr{N}}(Q_T)$, para $l = 0$, entenderemos el espacio $L_2(Q_T)$: $\widetilde{H}^{0,\,0}_{\mathscr{N}}(Q_T) = L_2(Q_T)$.

Tiene lugar la siguiente afirmación.

TEOREMA 4. *Supongamos que para cierto* $s \geqslant 1$ $\partial D \in C^{2s}$ *y, en el caso del primer problema mixto* (31)—(33), $\varphi \in H^{2s-1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f \in \widetilde{H}^{2(s-1),\,(s-1)}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, *mientras que en el caso del segundo problema mixto* (31), (32), (34) $\varphi \in H^{2s-1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f \in \widetilde{H}^{2(s-1),\,(s-1)}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. *Entonces, la solución generalizada* $u(x, t)$ *de cada uno de estos problemas pertenece al espacio* $H^{2s,\,s}(Q_T)$ *y la serie* (24) *converge hacia esta solución en* $H^{2s,\,s}(Q_T)$. *Con ello, tiene lugar la siguiente desigualdad*

$$\| u \|_{H^{2s,\,s}(Q_T)} \leqslant C\left(\| \varphi \|_{H^{2s-1}(D)} + \| f \|_{H^{2(s-1),\,s-1}(Q_T)}\right), \tag{35}$$

donde la constante positiva C *no depende de* φ *y* f.

Señalemos que los requisitos del teorema 4 exigen, además de la suavidad de las funciones dadas, el cumplimiento de las siguientes condiciones

$$\varphi|_{\partial D} = \ldots = \Delta^{s-1}\varphi|_{\partial D} = 0$$

y

$$f|_{\Gamma_T} = \ldots = \Delta^{s-2} f|_{\Gamma_T} = 0$$

para el primer problema mixto y las condiciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\partial D} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{s-2} \varphi|_{\partial D} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma_T} = \ldots = \frac{\partial}{\partial n} \Delta^{s-2} f|_{\Gamma_T} = 0$$

para el segundo problema mixto. Estas condiciones son indispensables para que sean válidas las afirmaciones del teorema 4 sobre la convergencia de la serie (24) en $H^{2s,s}(Q_T)$ hacia la solución generalizada del problema mixto correspondiente. No obstante, si sólo nos interesa la suavidad de la solución generalizada (y no la convergencia hacia ella de la serie de Fourier), entonces, igual que en el caso de las ecuaciones hiperbólicas (véase el teorema 3', p. 4, § 2, cap. V), estas condiciones pueden ser considerablemente debilitadas; como en el caso mencionado, pueden ser sustituidas por las condiciones de concordancia en ∂D_0 de las funciones φ y f.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4. Según el lema 2, p. 4, § 2, cap. V, las funciones $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, dadas por la fórmula (19), pertenecen al espacio $H^{s-1}(0, T)$ (y, por lo tanto, cuando $s \geqslant 2$, al espacio $C^{s-2}([0, T])$). Por consiguiente, las funciones $U_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, que están dadas mediante la fórmula (21) y satisfacen en $(0, T)$ las ecuaciones (22), pertenecen al espacio $H^s(0, T)$ y, por lo tanto, al espacio $C^{s-1}([0, T])$. Entonces, en virtud de las propiedades de las funciones propias $v_k(x)$, las sumas parciales $S_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t) v_k(x)$ de la serie (24) pertenecen al espacio $\tilde{H}^{2s,s}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, y, cuando todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^{2s}_{\mathscr{D}}(D_t)$ en el caso del primero o bien al espacio $\tilde{H}^{2s,s}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ y, para todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^{2s}_{\mathscr{N}}(D_t)$, en el caso del segundo problema mixto. Además, cuando $p = 1, \ldots, s$, las funciones $\frac{\partial^p S_N}{\partial t^p}$ pertenecen al espacio $H^{2(s-p), s-p}(Q_T)$, y, para todo $t \in [0, T]$, al espacio $H^{2s}_{\mathscr{D}}(D_t)$ en el caso del primero o bien al espacio $H^{2s}_{\mathscr{N}}(D_t)$, en el caso del segundo problema mixto. Por ello, de acuerdo con el lema 3, p. 5, § 2, cap. IV, y a causa de la ortogonalidad en $L_2(D_t)$ de las funciones propias $v_k(x)$, para todo $t \in [0, T]$, cualquier $p = 0, \ldots, s$ y cualesquiera M y N, $1 \leqslant M < N$, tenemos las siguientes desigualdades

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} - \frac{\partial^p S_M}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant C_1 \left\| \Delta^{s-p} \frac{\partial^p}{\partial t^p} (S_N - S_M) \right\|^2_{L_2(D_t)} =$$

$$= C_1 \left\| \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{s-p} \frac{d^p U_k}{dt^p} v_k(x) \right\|^2_{L_2(D_t)} =$$

$$= C_1 \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2. \qquad (36)$$

Análogamente, para cualesquiera $t \in [0, T]$, $p = 0, \ldots, s$, $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2$$

en el caso del primer problema mixto ($\lambda_1 \neq 0$) y

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} = \left\| \frac{\partial^p (U_1 v_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 \left\| \frac{1}{\sqrt{|D|}} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} + 2 \left\| \frac{\partial^p (S_N - S_1)}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=2}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right)$$

en el caso del segundo problema mixto ($\lambda_1 = 0$). De este modo, en ambos casos para cualesquiera $t \in [0, T]$, $p = 0, \ldots, s$, $N \geqslant 1$

$$\left\| \frac{\partial^p S_N}{\partial t^p} \right\|^2_{H^{2(s-p)}(D_t)} \leqslant C_3 \left(\left(\frac{d^p U_1}{dt^p} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left(\frac{d^p U_k}{dt^p} \right)^2 \right). \qquad (37)$$

Integrando las desigualdades (36) respecto de $t \in (0, T)$ y sumando según $p = 0, \ldots, s$, obtenemos

$$\| S_N - S_M \|^2_{H^{2s,s}(Q_T)} \leqslant C_1 \sum_{p=0}^{s} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left\| \frac{d^p U_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)}. \qquad (38)$$

Por analogía, de (37) obtenemos

$$\| S_N \|^2_{H^{2s,s}(Q_T)} \leqslant C_3 \sum_{p=0}^{s} \left(\left\| \frac{d^p U_1}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{2(s-p)} \left\| \frac{d^p U_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)} \right). \qquad (39)$$

A continuación hagamos uso del siguiente lema cuya demostración daremos a conocer más abajo.

LEMA 2. *Supongamos que para cierto* $q \geqslant 0$ $\partial D \in C^{2q+2}$ *en el primer problema mixto* (31) — (33) $\varphi \in H_{\mathcal{D}}^{2q+1}(D)$, $f \in \tilde{H}_{\mathcal{D}}^{2q,q}(Q_T)$, *mientras que en el caso del segundo problema mixto* (31), (32), (34), $\varphi \in H_{\mathcal{N}}^{2q+1}(D)$, $f \in \tilde{H}_{\mathcal{N}}^{2q,q}(Q_T)$. *Entonces, para cualquier* p, $0 \leqslant p \leqslant q+1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(q+1-p)} \left\| \frac{d^p U_k}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant C \left(\|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)} + \|f\|^2_{H^{2q,q}(Q_T)} \right), \quad (40)$$

donde la constante positiva C no depende de φ *y* f.

Teniendo en cuenta este lema (para $q = s - 1$), de las desigualdades (38) se deduce que la serie (24) converge en $H^{2s,s}(Q_T)$. Por consiguiente, las soluciones generalizadas de los problemas (31)—(33) y (31), (32), (34) pertenecen al espacio $H^{2s,s}$ (e, incluso, a los espacios $\tilde{H}_{\mathcal{D}}^{2s,s}(Q_T)$ o bien $\tilde{H}_{\mathcal{N}}^{2s,s}(Q_T)$, respectivamente). Pasando en (39) al límite para $N \to \infty$, con ayuda de (40) y de las evidentes desigualdades

$$\left\| \frac{d^p U_1}{dt^p} \right\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \text{const} \left(\|\varphi\|^2_{L_2(D)} + \|f\|^2_{H^{2(s-1),s-1}(Q_T)} \right),$$

$p = 0, \ldots, s$, obtenemos la desigualdad (35). El teorema está demostrado.

Puesto que la solución generalizada del problema mixto, perteneciente al espacio $H^{2,1}(Q_T)$, es la solución en c.t.p, entonces, del teorema 4 se infiere para $s = 1$:

COROLARIO. *Supongamos que* $\partial D \in C^2$, $f \in L_2(Q_T)$ *y sea* $\varphi \in H^1(D)$ *(para el primer problema mixto* (31)—(33)) *y* $\varphi \in H^1(D)$ *(para el segundo problema mixto* (31), (32), (34)). *Entonces, la serie* (24) *converge en* $H^{2,1}(Q_T)$ *y su suma es la solución en c.t.p. del problema* (31)—(33) *o, respectivamente, del problema* (31), (32), (34). *Con ello, se verifica la desigualdad*

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q_T)} \leqslant C \left(\|\varphi\|_{H^1(D)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} \right),$$

donde la constante positiva C no depende ni de φ *ni de* f.

Antes de establecer la validez del lema 2, del cual hicimos uso en la demostración del teorema 4, demostremos las siguientes afirmaciones auxiliares.

LEMA 3. *Si* $f(x, t) \in H^{r,0}(Q_T)$, $r \geqslant 1$, *y* $g(t) \in L_2(0, T)$, *la función*

$$h(x) = \int_0^T f(x, t)\, g(t)\, dt$$

pertenece a $H^r(D)$ *y para todo* $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha|\leqslant r$,

$$D_x^\alpha h(x)=\int_0^T D_x^\alpha f(x, t)\, g(t)\, dt. \tag{41}$$

Si en este caso $f|_{\Gamma_T}=0$, entonces $h|_{\partial D}=0$, *mientras que si, para* $r\geqslant 2$ $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, *entonces* $\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{\partial D}=0$.

Advirtamos, ante todo, que del hecho de la pertenencia de la función f al espacio $L_2(Q_T)$ se deduce que $h\in L_2(D)$. En efecto, puesto que $f(x, t)\, g(t)\in L_1(Q_T)$, según el teorema de Fubini, $h\in L_1(D)$ y como, además, $h^2(x)\leqslant \int_0^T f^2(x, t)\, dt\cdot\|g\|^2_{L_2(0, T)}$, entonces $h\in L_2(D)$.

De este modo, la función h, como también las funciones

$$h_\alpha(x)=\int_0^T D_x^\alpha f(x, t)\, g(t)\, dt, \qquad \alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha|\leqslant r,$$

pertenecen a $L_2(D)$.

Tomemos una función arbitraria $\eta(x)$ de $\dot{C}^r(\overline{D})$. Ya que es evidente que $g(t)\,\eta(x)\in H^{r,0}(Q_T)$, para todo α, $|\alpha|\leqslant r$

$$\int_D h_\alpha(x)\,\eta(x)\, dx=\int_{Q_T} D_x^\alpha f(x, t)\cdot\eta(x)\, g(t)\, dx\, dt=$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\int_{Q_T} f(x, t)\cdot D_x^\alpha\eta(x)\cdot g(t)\, dx\, dt=(-1)^{|\alpha|}\int_D h(x)\, D_x^\alpha\eta(x)\, dx$$

Por consiguiente, la función h tiene derivadas generalizadas $D_x^\alpha h=h_\alpha$, $|\alpha|\leqslant r$, pertenecientes a $L_2(D)$, es decir, $h\in H^r(D)$.

Si $f|_{\Gamma_T}=0$, para toda función $\eta(x)\in C^1(\overline{D})$ y cualquier $i=1, 2, \ldots, n$

$$\int_D h_{x_i}\eta\, dx=\int_{Q_T} f_{x_i}(x, t)\,\eta(x)\, g(t)\, dx\, dt=$$

$$=-\int_{Q_T} f(x, t)\cdot\eta_{x_i}(x)\, g(t)\, dx\, dt=-\int_D h\cdot\eta_{x_i}\, dx.$$

Por otra parte, puesto que $h\in H^1(D)$, entonces para $\eta\in C^1(\overline{D})$ arbitraria

$$\int_D h_{x_i}\eta\, dx=\int_{\partial D} h\eta n_i\, dS-\int_D h\eta_{x_i}\, dx,$$

donde $n_i(x)$ son las coordenadas del vector de una normal exterior a ∂D en el punto x. Por lo tanto, para cualquier $\eta(x) \in C^1(\partial D)$

$$\int_{\partial D} h\eta n_i \, dS = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

de donde (compárese con la demostración del lema 4, p. 4, § 2, cap. V) se deduce que $h|_{\partial D} = 0$.

Si $r \geqslant 2$ y $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\Gamma_T} = 0$, entonces (compárese con la demostración del lema 4, p. 4, § 2, cap. V) para toda función $\eta \in C^2(\overline{D})$

$$\int_D \Delta h(x) \cdot \eta(x) \, dx = \int_{Q_T} \Delta f(x, t) \cdot \eta(x) g(t) \, dx \, dt =$$
$$= -\int_{Q_T} \nabla f(x, t) \cdot \nabla \eta(x) g(t) \, dx \, dt = -\int_D \nabla h \cdot \nabla \eta \, dx.$$

Por otra parte, dado que $h \in H^2(D)$, para cualquier $\eta \in C^1(\overline{D})$

$$\int_D \Delta h \cdot \eta \, dx = \int_{\partial D} \frac{\partial h}{\partial n} \eta \, dS - \int_D \nabla h \cdot \nabla \eta \, dx.$$

Por tanto, para cualquier función $\eta \in C^1(\partial D)$

$$\int_{\partial D} \frac{\partial h}{\partial n} \eta \, dS = 0,$$

es decir, $\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0$. El lema está demostrado.

COROLARIO. *Supongamos que la función $g(t) \in L_2(0, T)$, y la función $f(x, t)$ pertenece al espacio $\hat{H}^{2r, r}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ o al espacio $\widetilde{H}^{2r, r}_{\mathscr{N}}(Q_T)$ para cierto $r \geqslant 0$. Entonces, la función $h(x)$ pertenece al espacio $H^{2r}_{\mathscr{D}}(D)$ o al espacio $H^{2r}_{\mathscr{N}}(D)$, respectivamente. En este caso, para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant 2r$, tiene lugar la fórmula* (41).

LEMA 4. *Sea $\partial D \in C^2$. Si para un cierto $q \geqslant 0$ la función $f(x, t) \in \widetilde{H}^{2q, q}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, entonces para todo p, $p = 0, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in \widetilde{H}^{2(q-p), q-p}_{\mathscr{D}}(Q_T)$. Cuando $f \in \widetilde{H}^{2q, q}_{\mathscr{N}}(Q_T)$, para cualquier p, $p = 0, \ldots, q$, $\frac{\partial^p f}{\partial t^p} \in \widetilde{H}^{2(q-p), q-p}_{\mathscr{N}}(Q_T)$.*

Cuando $q = 0$ y $q = 1$, las afirmaciones del lema son evidentes. Para $q \geqslant 2$, la primera afirmación será consecuencia inmediata de la afirmación establecida en la demostración del lema 4, p. 4, § 2, cap. V: *si es que $G \in H^2(Q_T)$ y $G|_{\Gamma_T} = 0$, entonces* $G_t|_{\Gamma_T} = 0$. La segunda afirmación del lema se deduce, evidentemente, de lo siguiente: *si* $G\in H^{4,2}(Q_T)$ *y* $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, *entonces* $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$. Notemos que ella se demuestra de la misma manera que la afirmación análoga en el lema 4, p. 4, § 2, cap. V. En efecto, puesto que $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=0$, para toda $\eta\in C^2(\overline{Q_T})$, $\eta|_{D_0}=\eta|_{D_T}=0$, tenemos

$$\int\limits_{Q_T}\Delta G_t\cdot\eta\,dx\,dt=-\int\limits_{Q_T}\Delta G\cdot\eta_t\,dx\,dt=\int\limits_{Q_T}\nabla G\cdot\nabla\eta_t\,dx\,dt=$$

$$=-\int\limits_{Q_T}\nabla G_t\cdot\nabla\eta\,dx\,dt.$$

Por otra parte

$$\int\limits_{Q_T}\Delta G_t\cdot\eta\,dx\,dt=\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial G_t}{\partial n}\cdot\eta\,dS\,dt-\int\limits_{Q_T}\nabla G_t\cdot\nabla\eta\,dx\,dt.$$

Por ello,

$$\int\limits_{\Gamma_T}\frac{\partial G_t}{\partial n}\cdot\eta\,dS\,dt=0$$

para cualquier $\eta\in C^2(\overline{\Gamma}_T)$, $\eta|_{\partial D_0}=\eta|_{\partial D_T}=0$. Por lo tanto, $\left.\frac{\partial G_t}{\partial n}\right|_{\Gamma_T}=$ $=0$. El lema está demostrado.

LEMA 5. *Sea* $\partial D\in C^2$ *y sea, para cierto* $q\geqslant 0$, $f(x,t)\in\widetilde{H}^{2q,q}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ *o* $f(x,t)\in\widetilde{H}^{2q,q}_{\mathscr{N}}(Q_T)$. Entonces, para cualquier p, $p=0,\ldots,q$,

$$\sum_{h=1}^{\infty}|\lambda_h|^{2(p-q)}\left\|\frac{d^pf_h}{dt^p}\right\|^2_{L_2(0,\,T)}\leqslant C\|f\|^2_{H^{2q,\,q}(Q_T)},\tag{42}$$

donde la constante positiva C *no depende de* f.

Conforme al lema 2, p. 4, § 2, cap. V, para cualquier p, $0\leqslant p\leqslant q$, $\frac{d^pf_h(t)}{dt^p}=\int\limits_D\frac{\partial^pf(x,t)}{\partial t^p}v_h(x)\,dx$, por eso

$$|\lambda_h|^{2(q-p)}\int\limits_0^T\left(\frac{d^pf_h(t)}{dt^p}\right)^2dt=$$

$$=|\lambda_h|^{2(q-p)}\int\limits_D\left(\int\limits_0^T\frac{\partial^pf(x,t)}{\partial t^p}\,\frac{d^pf_h(t)}{pt^p}\,dt\right)v_h(x)\,dx=$$

$$=\lambda_h^{q-p}\int\limits_D\left(\int\limits_0^T\frac{\partial^pf(x,t)}{\partial t^p}\,\frac{d^pf_h(t)}{dt^p}\,dt\right)\Delta^{q-p}v_h(x)\,dx.$$

De acuerdo con el lema 4 la función $\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}$ pertenece al espacio $\widetilde{H}^{2(q-p),\,q-p}_{\mathscr{D}}(Q_T)$ o, respectivamente, a $\widetilde{H}^{2(q-p),\,q-p}_{\mathscr{N}}(Q_T)$; quiere decir, que en virtud del corolalario del lema 3, la función $\int\limits_0^T \frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\times$ $\times\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\,dt$ pertenece a $H^{2(q-p)}_{\mathscr{D}}(D)$ o, respectivamente, a $H^{2(q-p)}_{\mathscr{N}}(D)$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
|\lambda_k|^{2(q-p)}\int\limits_0^T\left(\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\right)^2 dt=&\\
&=\lambda_k^{q-p}\int\limits_D \Delta^{q-p}\left(\int\limits_0^T \frac{\partial^p f}{\partial t^p}\,\frac{d^p f_k}{dt^p}\,dt\right)\cdot v_k\,dx=\\
&=\lambda_k^{q-p}\int\limits_{Q_T}\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\cdot\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\,v_k(x)\,dx\,dt=\\
&=\lambda_k^{q-p}\int\limits_D\int\limits_0^T\left(\Delta_y^{q-p}\frac{\partial^p f(y,t)}{\partial t^p}\right)\left(\int\limits_D\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\,v_k(x)\,dx\right)v_k(y)\,dy\,dt=\\
&=\lambda_k^{q-p}\int\limits_D\left(\int\limits_0^T\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\,g_k^{(p)}(t)\,dt\right)v_k(x)\,dx=\\
&=\int\limits_D\left(\int\limits_0^T\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\,g_k^{(p)}(t)\,dt\right)\Delta^{q-p}v_k(x)\,dx,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

donde la función $g_k^{(p)}(t)=\int\limits_D\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\cdot v_k(x)\,dx$ pertenece, en virtud del lema 2, p. 4, § 2, cap. V, al espacio $L_2(0,T)$. La función $\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\in L_2(Q_T)$. Por eso, $\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f(x,t)}{\partial t^p}\in L_2(D_t)$ para casi todo $t\in(0,T)$ y para casi todo $t\in(0,T)$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(g_k^{(p)}(t))^2=$ $=\left\|\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right\|^2_{L_2(D_t)}$. Por consiguiente,

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k^{(p)}\|^2_{L_2(0,T)}=\left\|\Delta^{q-p}\frac{\partial^p f}{\partial t^p}\right\|^2_{L_2(Q_T)}\leqslant \mathrm{const}\,\|f\|^2_{H^{2q,\,q}(Q_T)}. \tag{44}
$$

Puesto que, en vista del lema 4 y el corolario del lema 3, la función $\int_0^T \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g_k^{(p)}(t)\,dt$ pertenece a $H_{\mathscr{D}}^{2(q-p)}(D)$ o bien, respectivamente, a $H_{\mathscr{N}}^{2(q-p)}(D)$, entonces de (43) tenemos la igualdad

$$|\lambda_k|^{2(q-p)} \int_0^T \left(\frac{d^p f_k(t)}{dt^p}\right)^2 dt =$$

$$= \int_D \Delta^{q-p} \left(\int_0^T \frac{\partial^p f(x, t)}{\partial t^p} g_k^{(p)}(t)\,dt\right) v_k(x)\,dx = \int_0^T (g_k^{(p)}(t))^2\,dt,$$

de la cual, en virtud de (44), se deduce directamente (42). El lema está demostrado.

PASEMOS AHORA A LA DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 2. Dado que la función $f \in H^{2q,q}(Q_T) \subset H^q(Q_T)$, entonces las funciones $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, pertenecen a $H^q(0, T)$ (lema 2, p. 4, § 2, cap. V). Por ello, de acuerdo con (21) y (22), las funciones $U_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, pertenecen a $H^{q+1}(0, T)$. De (22) se deduce que para todo p, $1 \leqslant p \leqslant q+1$

$$\frac{d^p U_k}{dt^p} = \lambda_k^p U_k + \sum_{r=0}^{p-1} \lambda_k^{p-r-1} \frac{d^r f_k}{dt^r}, \qquad t \in (0, T).$$

Por consiguiente, en virtud de la desigualdad (42) del lema 5, para demostrar las desigualdades (40) es suficiente establecer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(q+1)} \|U_k\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \text{const}\,(\|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)} + \|f\|^2_{H^{2q,q}(Q_T)}). \quad (45)$$

Multipliquemos (22) por U_k e integremos la igualdad obtenida respecto de $t \in (0, T)$. Haciendo uso de la condición (22′), obtenemos

$$\frac{1}{2} U_k^2(T) - \frac{1}{2}\varphi_k^2 - \lambda_k \int_0^T U_k^2(t)\,dt = \int_0^T f_k(t)\,U_k(t)\,dt,$$

de donde ($\lambda_k \leqslant 0$) tenemos la desigualdad

$$|\lambda_k|\,\|U_k\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \frac{1}{2}\varphi_k^2 + \|f_k\|_{L_2(0,T)} \|U_k\|_{L_2(0,T)}$$

y, consecuentemente, la desigualdad

$$|\lambda_k|^{2q+2}\|U_k\|^2_{L_2(0,\,T)}\leqslant\frac{1}{2}\varphi_k^2|\lambda_k|^{2q+1}+$$

$$+(|\lambda_k|^q\|f_k\|_{L_2(0,\,T)})(|\lambda_k|^{q+1}\|U_k\|_{L_2(0,\,T)})\leqslant\frac{1}{2}\varphi_k^2|\lambda_k|^{2q+1}+$$

$$+\frac{1}{2}|\lambda_k|^{2q}\|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)}+\frac{1}{2}|\lambda_k|^{2q+2}\|U_k\|^2_{L_2(0,\,T)}.$$

De este modo,

$$|\lambda_k|^{2q+2}\|U_k\|^2_{L_2(0,\,T)}\leqslant\varphi_k^2|\lambda_k|^{2q+1}+|\lambda_k|^{2q}\|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)},$$

y, por tanto, la desigualdad (45) se infiere de la (42) (para $p=0$) y la desigualdad (teorema 8, p. 5, § 2, cap. IV)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2|\lambda_k|^{2q+1}\leqslant\text{const}\,\|\varphi\|^2_{H^{2q+1}(D)}.$$

El lema está demostrado.

Demostremos ahora el teorema de existencia de las soluciones clásicas de los problemas (31)—(33) y (31), (32), (34).

Indiquemos que si $f\in H^{2,1}(Q_T)$, entonces las funciones $U_k(t)$, $k=1,2,\ldots$, definidas por la igualdad (21), pertenecen al espacio $H^2(0,T)$, y, por consiguiente, también al espacio $C^1([0,T])$.

Si $\partial D\in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}$, en vista del teorema 7, p. 4, § 2, cap. IV, las funciones propias $v_k(x)$ del primero o segundo problema de contorno para el operador de Laplace en D pertenecen al espacio $H^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(D)$, y, por tanto (teorema 3, p. 2, § 6, cap. III), también al espacio $C^2(\overline{D})$. Entonces, las sumas parciales S_N de la serie (24) pertenecen al espacio $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

TEOREMA 5. *Sea $\partial D\in C^{2s_0+1}$, donde $2s_0+1\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+3$ y sea $\varphi\in H^{2s_0+1}_{\mathscr{D}}(D)$, $f\in\tilde{H}^{2s_0,\,s_0}_{\mathscr{D}}(Q_T)$, para el primer problema mixto (31)—(33) y $\varphi\in H^{2s_0+1}_{\mathscr{N}}(D)$, $f\in\tilde{H}^{2s_0,\,s_0}_{\mathscr{N}}(Q_T)$, para el segundo problema mixto (31), (32), (34). Entonces, la serie (24) converge en $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ y su suma es la solución clásica del primer problema mixto (31)—(33) o, respectivamente, del segundo problema mixto (31),* (32), (34). *En este caso*

$$\|u\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{H^{2s_0-1}(D)} + \|f\|_{H^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)}\right), \tag{46}$$

donde la constante positiva C no depende de φ *y* f.

Establezcamos al principio las acotaciones requeridas de la función $U_k(t)$ y de su derivada $U_k'(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ De la fórmula (21) se tiene

$$|U_k(t)| \leqslant |\varphi_k| + \frac{1}{\sqrt{2|\lambda_k|}}\|f_k\|_{L_2(0,\,T)} \quad \text{para} \quad k > 1$$

y

$$|U_1(t)| \leqslant |\varphi_1| + C_1\|f_1\|_{L_2(0,\,T)},$$

donde $C_1 = 1/\sqrt{2|\lambda_1|}$ para el primer problema mixto y $C_1 = \sqrt{T}$, para el segundo problema mixto. De (22) se desprende que para todo $t \in [0, T]$

$$|U_k'(t)| \leqslant |\lambda_k||U_k| + |f_k| \leqslant |\lambda_k||\varphi_k| + |f_k| + \\ + \frac{\sqrt{|\lambda_k|}}{\sqrt{2}}\|f_k\|_{L_2(0,\,T)} \quad \text{para} \quad k \geqslant 1.$$

Por esta razón, para todo $t \in [0, T]$

$$U_k^2(t) \leqslant 2|\varphi_k|^2 + \frac{1}{|\lambda_k|}\|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)}, \quad k > 1, \tag{47}$$

$$U_1^2(t) \leqslant 2\varphi_1^2 + 2C_1^2\|f_1\|^2_{L_2(0,\,T)}, \tag{47'}$$

$$U_k'^2(t) \leqslant 3\lambda_k^2\varphi_k^2 + \frac{3}{2}|\lambda_k|\|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)} + 3|f_k|^2, \quad k \geqslant 1. \tag{48}$$

Demostremos la siguiente afirmación auxiliar.

LEMA 6. *Sea* $f(t)$ *una función arbitraria de* $H^1(0, T)$ *y sea* ε *un número arbitrario de* $[0, T]$. *Entonces, para todo* $t \in [0, T]$ *se verifica la desigualdad*

$$f^2(t) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2_{L_2(0,\,T)} + 2\varepsilon\|f'\|^2_{L_2(0,\,T)}. \tag{49}$$

Designemos por α el valor medio de la función f en el intervalo $(0, T)$:

$$\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

y examinemos la función

$$f_\alpha(t) = f(t) - \alpha,$$

continua en $[0, T]$.

Puesto que $\int_0^T f_\alpha(t)\,dt = 0$, existe un punto $t^0 \in (0, T)$ tal que $f_\alpha(t^0) = 0$. Por eso, para cualquier $t \in [0, T]$ y todo $\varepsilon > 0$

$$f_\alpha^2(t) = 2\int_{t^0}^{t} f_\alpha(t) f_\alpha'(t)\,dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f_\alpha^2(t)\,dt + \varepsilon \int_0^T f'^2(t)\,dt$$

Por consiguiente, para cualquier $t \in [0, T]$ y todo ε, $0 < \varepsilon \leqslant T$, tenemos

$$f^2(t) - 2\alpha f(t) + \alpha^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau - 2\alpha\int_0^T f(\tau)\,d\tau + \alpha^2 T\right) +$$

$$+ \varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau + \varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau - \frac{\alpha^2 T}{\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau + \varepsilon\int_0^T f'^2(\tau)\,d\tau - \alpha^2,$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2_{L_2(0,T)} + \varepsilon\|f'\|_{L_2(0,T)} \geqslant 2\alpha^2 - 2\alpha f(t) + f^2(t) =$$

$$= \left(\sqrt{2}\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} f(t)\right)^2 + \frac{f^2(t)}{2} \geqslant \frac{f^2(t)}{2}$$

que coincide con la desigualdad (49). El lema está demostrado.

Examinemos la desigualdad (48) para tales k que $|\lambda_k| \geqslant 1/T$; designemos con k_0 el valor mínimo de todos estos k (recordemos que la sucesión $|\lambda_k|$ es monótona no decreciente). Entonces, en virtud del lema 6, tenemos, para todo $k \geqslant k_0$

$$|f_k(t)|^2 \leqslant 2|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{2}{|\lambda_k|}\|f_k'\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Introduciendo la última desigualdad en (48), obtenemos para todo $t \in [0, T]$ y $k \geqslant k_0$

$$\varphi_k'^2(t) \leqslant 3\lambda_k^2\varphi_k^2 + \frac{15}{2}|\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{6}{|\lambda_k|}\|f_k'\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant$$

$$\leqslant 8\left(\lambda_k^2\varphi_k^2 + |\lambda_k|\,\|f_k\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{|\lambda_k|}\|f_k'\|^2_{L_2(0,T)}\right). \qquad (50)$$

En virtud del teorema 3, p. 2, § 6, cap. III, lema 3, p. 5, § 2, cap. IV y de las desigualdades (47) y (50), para todo $t \in [0, T]$ y cualesquiera M y N, $k_0 \leqslant M < N$, tenemos

$$\| S_N - S_M \|^2_{C^2(\overline{D}_t)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (S_N - S_M) \right\|^2_{C(\overline{D}_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(\| S_N - S_M \|^2_{H^{2s_0+1}(D_t)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(S_N - S_M \right\|^2_{H^{2s_0-1}(D_t)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left(\left\| \sum_{h=M+1}^{N} U_h(t) \Delta^{s_0} v_h(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} + \right.$$

$$+ \left\| \sum_{h=M+1}^{N} U_h'(t) \Delta^{s_0-1} v_h(x) \right\|^2_{H^1(D_t)} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{h=M+1}^{N} \left(|\lambda_h|^{2s_0+1} U_h^2(t) + |\lambda_h|^{2s_0-1} U_h'^2(t) \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum_{h=M+1}^{N} (\varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0+1} + \lambda_h^{2s_0} \| f_h \|^2_{L_2(0,\,T)} + \lambda_h^{2s_0-2} \| f_h' \|^2_{L_2(0,\,T)}).$$

Por consiguiente,

$$\| S_N - S_M \|^2_{C^{2,1}(\overline{Q}_T)} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \sum_{h=M+1}^{N} (\varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0+1} + |\lambda_h|^{2s_0} \| f_h \|^2_{L_2(0,\,T)} + \lambda_h^{2s_0-2} \| f_h' \|^2_{L_2(0,\,T)}). \quad (51)$$

Por analogía, valiéndonos de (47'), obtenemos que para todo $t \in [0, T]$ y cualquier $N \geqslant 1$ son válidas las desigualdades

$$\| S_N \|^2_{C(\overline{D}_t)} \leqslant C_6 \| S_N \|^2_{H^{2s_0-1}(D_t)} \leqslant C_7 \left(U_1^2(t) + \sum_{h=1}^{N} |\lambda_h|^{2s_0-1} U_h^2(t) \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \left(\varphi_1^2 + \| f_1 \|^2_{L_2(0,\,T)} + \sum_{h=1}^{N} (\varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0-1} + \lambda_h^{2s_0-2} \| f_h \|^2_{L_2(0,\,T)} \right),$$

y, por lo tanto, las desigualdades

$$\| S_N \|^2_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant C_9 \left(\varphi_1^2 + \| f_1 \|^2_{L_2(0,\,T)} + \sum_{h=1}^{N} (\varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0-1} + \right.$$

$$\left. + \lambda_h^{2s_0-2} \| f_h \|^2_{L_2(0,\,T)}) \right). \quad (52)$$

Puesto que la función φ pertenece al espacio $H_{\mathscr{D}}^{2s_0+1}(D)$ (en el caso del primer problema mixto) o al espacio $H_{\mathscr{N}}^{2s_0+1}(D)$ (en el caso del segundo problema mixto), entonces la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h^2 |\lambda_h|^{2s_0+1}$

converge. Además, del hecho de que la función φ pertenece al espacio $H_{\mathscr{D}}^{2s_0-1}(D)$ o bien, respectivamente, a $H_{\mathscr{N}}^{2s_0-1}(D)$, se deduce (teorema 8, p. 5, § 2, cap. IV) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2 |\lambda_k|^{2s_0-1} \leqslant \text{const} \|\varphi\|^2_{H^{2s_0-1}(D)}. \tag{53}$$

Como $f \in \widetilde{H}_{\mathscr{D}}^{2s_0, s_0}(Q_T)$ y $f \in \widetilde{H}_{\mathscr{N}}^{2s_0, s_0}(Q_T)$ para los primero y segundo problemas mixtos, respectivamente, entonces, de acuerdo con el lema 5, convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2s_0} \|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)} \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(s_0-1)} \|f_k'\|^2_{L_2(0,\,T)}.$$

Además, dado que la función f pertenece al espacio $\widetilde{H}_{\mathscr{D}}^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)$ o bien, respectivamente, al espacio $\widetilde{H}_{\mathscr{N}}^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)$ y de las desigualdades (42) del lema 5 tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{2(s_0-1)} \|f_k\|^2_{L_2(0,\,T)} \leqslant \text{const} \|f\|^2_{H^{2(s_0-1),\, s_0-1}(Q_T)}. \tag{54}$$

Por eso, de las desigualdades (51) se infiere que la serie (24) converge en $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ y la suma $u(x, t)$ de la serie pertenece a $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ y, por tanto, es la solución clásica del problema mixto correspondiente. De las desigualdades (52)—(54) se deduce que nuestra acotación (46) es correcta. El teorema queda demostrado.

PROBLEMAS DEL CAPITULO VI.

1. Sea D un dominio acotado del espacio R_n, $n > 2$, y sea x^0 un punto de D. Supongamos que la función $u(x, t) \in C^{2,1}(\{x \in D \setminus x^0, 0 < t < T\})$, $T > 0$, satisface en $\{x \in D \setminus x^0, 0 < t < T\}$ una ecuación homogénea de la conducción de calor. Supongamos también que cuando $x \to x^0$, la función $u(x, t)$ $|x - x^0|^{n-2} \to 0$ uniformemente respecto a $t \in (0, T)$. Muéstrese que en este caso la función $u(x, t)$ puede ser complementariamente definida en el conjunto $\{x = x^0, 0 < t < T\}$ de una manera tal que la función obtenida pertenezca a $C^\infty(\{x \in D, 0 < t < T\})$.

2. Supongamos que la función $u(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(t > 0)$ y en el semiespacio $\{t > 0\}$ es la solución de una ecuación homogénea de la conducción de calor. Sea, además, que existe una función $A(x)$ tal que cualquiera que sea $R > 0$, la función $u(x, t) \to A(x)$ (para $t \to \infty$) uniformemente respecto de $x \in \{|x| < R\}$. Demuéstrese que la función $A(x)$ es armónica en R_n.

3. Supóngase que la función $\varphi(x)$ pertenece a $C(R_n)$ y que para todo $x \in$ $\in R_n$ satisface la desigualdad $|\varphi(x)| \leqslant C e^{a|x|^2}$, donde C y a son ciertas constantes positivas. Demuéstrese que en la banda $\left\{x \in R_n,\ 0 < t < \frac{1}{4a}\right\}$ existe

la solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in R_n, \quad 0 < t < \frac{1}{4a}, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{1}$$

Esta solución se da mediante la fórmula de Poisson y pertenece a la clase de unicidad B_2.

Si la función $\varphi(x) \in C(R_n)$ y satisface la condición: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|\varphi(x)| < Ce^{\varepsilon |x|^2} \quad \text{para todo} \quad x \in R_n, \tag{2}$$

entonces de los resultados del problema 3 se desprende que en el semiespacio $\{t > 0\}$ existe la solución del problema de Cauchy para la ecuación homogénea de la conducción de calor con una función inicial $\varphi(x)$, con la particularidad de que esta solución pertenece a la clase de unicidad B_2 y que se da por la fórmula de Poisson.

4. Supóngase que la función $\varphi(x) \in C(R_n)$ y que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una constante $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que se verifique (2). Designemos con $u(x, t)$ la solución del problema de Cauchy (de la clase B_2)

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in R_n, \quad t > 0, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{3}$$

Demuéstrese la siguiente afirmación. Si existe una función $A(x)$ tal que con cualquier $R > 0$

$$\frac{n}{\sigma_n \rho^n} \int\limits_{|x-\xi|<\rho} u(\xi)\, d\xi \to A(x), \quad \text{cuando} \quad \rho \to \infty,$$

uniformemente respecto de $x \in \{|x| < R\}$ (σ_n es el área de la esfera unitaria en R_n), entonces uniformemente respecto a $x \in \{|x| < R\}$ (para cualquier $R > 0$) $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = A(x)$, siendo $A(x)$ una función armónica.

5. Sea $u(x, t)$ una solución (perteneciente a B_2) del problema de Cauchy (3), donde $\varphi(x) \in B(R_n)$ y sea $\lim\limits_{t\to\infty} u(0, t) = A$. Demuéstrese que en este caso para cualquier punto $x \in R_n$ $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = A$.

6. Muéstrese que la solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy (3), donde $\varphi \in B(R_n)$, es una función analítica respecto de (x, t)] en el semiespacio $\{x \in R_n, t > 0\}$.

7. Muéstrese que la solución clásica del primer problema mixto

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in Q_T = \{D \times (0, T)\},$$
$$u|_{D_0} = \varphi(x)$$
$$u|_{\Gamma_T} = 0$$

es la solución generalizada de este problema, si $\partial D \in C^2$.

8. Demuéstrense los teoremas de existencia y unicidad de soluciones generalizadas del primero, segundo y tercero problemas mixtos para la ecuación parabólica (problemas (1)—(3) y (1), (2), (4) del p. 1, § 2) sin hacer suposiciones de que $a(x)$ y $\sigma(x)$ sean no negativas.

9. Supóngase que la función $u(x, t)$ pertenece a $C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, satisface en Q_T la ecuación homogénea de la conducción de calor ($u_t - \Delta u = 0$) y la

condición inicial homogénea ($u \mid_{D_0} = 0$, D_0 es la base inferior del cilindro Q_T). Demuéstrese que en este caso $u \in C^\infty (Q_T \cup D_0)$. Demuéstrese también que para cualquier punto (x, t) del cilindro $\{D' \times (0, T)\}$, donde $D' \Subset D_0$, $\rho = \inf\limits_{\substack{x' \in \partial D' \\ x'' \in \partial D_0}} | x' - x'' | > 0$,

$$| D^\alpha u (x, t) | \leqslant C (\alpha, T) \frac{e^{-\frac{\rho^2}{8T}}}{\rho^{2\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n+2}} \| u \|_{C(\overline{Q}_T)},$$

donde $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_0+\ldots+\alpha_n} u}{\partial t^{\alpha_0} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ y $C(\alpha, T)$ es una constante positiva dependiente sólo del vector α y del número T.

10. Supóngase que la función $\varphi \in B(R_n)$ y D_l, $l = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de dominios del espacio R_n, $D_l \subset D_{l+1}$, $l = 1, \ldots$, $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} D_l = R_n$. Designemos por $u_l(x, t)$ la solución de la ecuación $u_t - \Delta u = 0$ en $D_l \times (0, T)$, continua en $\{\overline{D}_l \times [0, T]\}$ y que satisface la condición inicial $u_l \mid_{D_l} = \varphi$. Supóngase que $\| u_l \|_{C(\overline{D}_l \times [0, T])} \leqslant C$, donde la constante positiva C no depende de l. Entonces, uniformemente respecto de (x, t) de $\overline{D} \times [0, T]$, donde D es un dominio acotado arbitrario de R_n, la sucesión u_l, $l = 1, 2, \ldots$, converge hacia la solución (acotada) del problema de Cauchy en la faja $\{x \in R_n, 0 < t < T\}$ para la ecuación homogénea de conducción de calor con una función inicial φ. Demuéstrese esta afirmación.

LITERATURA ADICIONAL PARA EL CAPITULO VI

V. S. Vladimirov, Ecuaciones de la física matemática. «Naúka», 1971 (en ruso).

A. M. Iljin, A. S. Kaláshnikov, O. A. Oléinik, Ecuaciones lineales de segundo orden del tipo parabólico. УМН 17: 3 (1962), 3—146.

O. A. Ladyzhenskaya, Problemas de contorno de la física matemática, «Naúka», 1973 (en ruso).

O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Uráltseva, Ecuaciones lineales y quazilineales del tipo parabólico, «Naúka», 1967 (en ruso).

V. P. Mijailov, Sobre el problema de Dirichlet para una ecuación parabólica, 1. Compendio matemático 61: 1 (1963), 40—64; 2. Compendio matemático. 62: 2 (1963), 140—159 (en ruso).

I. G. Petrovski, Conferencias sobre las ecuaciones en derivadas parciales, Fismatgiz, 1961 (en ruso).

I. G. Petrovski Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, Compos. mathem. 1 (1935), 389—419.

S. L. Sóbolev. Ecuaciones de la física matemática, Fismatgiz, 1954 (en ruso).

A. N. Tijonov, Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, Compendio matemático 42 (1935), 199—216.

A. N. Tijonov, A. A. Samarski, Ecuaciones de la física matemática. Editorial Mir.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

ECUACIONES DE LA FÍSICA MITEMÁTICA

DE GODUNOV S.

Este libro, escrito por Serguei Godunov, Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, contiene el curso completo de conferencias dictadas por él en las universidades de Moscú y Novosibirsk.

La original selección del material se debe a que el autor durante muchos años estuvo dedicado al estudio de la aplicación de las ecuaciones diferenciales a la mecánica del medio continuo. Ha elaborado diferentes métodos numéricos destinados a resolver estas ecuaciones.

El autor recopiló un material que ha llegado a ser clásico para los especialistas, aunque no se encuentra con frecuencia en los libros de texto ni en las monografías accesibles a un amplio círculo de lectores.

Este texto presenta interés tanto para los que estudian el curso de ecuaciones de la física matemática, como para los que se especializan en la rama de la aplicación de los métodos numéricos en la resolución de estas ecuaciones.

CURSO DE ÁLGEBRA SUPERIOR

DE KUROSH A.

El profesor Alejandro Kurosh fue doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, catedrático, jefe de la Cátedra de Algebra Superior de la Universidad de Moscú. Sus trabajos de investigación en la rama del álgebra superior representan una aportación considerable a la matemática moderna.

Kurosh es autor de una serie de libros como «Teoría de los grupos», «Lecciones de álgebra superior», etc. Casi todos los trabajos publicados por el profesor Kurosh están traducidos a otros idiomas. En este libro se expone el curso de álgebra superior, que representa una de las disciplinas fundamentales de la matemática moderna. El curso de álgebra superior consta, en lo primordial, de dos partes. Una de ellas —el álgebra lineal— está dedicada al estudio de las ecuaciones lineales, es decir, de las ecuaciones del primer grado. La segunda parte —el álgebra de los polinomios— está dedicada al estudio de la ecuación con una incógnita, pero de grado superior.

El material del libro se expone de una manera clara y a un elevado nivel científico. Para ayudar a asimilar mejor los conceptos matemáticos, al final de cada capítulo se dan ejemplos y problemas con resoluciones detalladas.