L. ELSGOLTZ

Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional

EDITORIAL MIR · MOSCU

EDITORIAL MIR

Л. ЭЛЬСГОЛЬЦ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Издательство «Наука» МОСКВА

На испанском языке

L. ELSGOLTZ

Ecuaciones Diferenciales y cálculo variacional

1969

EDITORIAL MIR

MOSCU

CDU 517.944 + 519.3 (075.8) = 60

Impreso en la URSS

Indice

PARTE I

ECUACIONES DIFERENCIALES

PARTE II

CALCULO VARIACIONAL

Parte I

Ecuaciones diferenciales

Introducción

Al estudiar un fenómeno físico, con frecuencia no es posible hallar de inmediato las leyes físicas que enlazan las magnitudes que caracterizan dicho fenómeno. Pero, al mismo tiempo, es fácil establecer la dependencia entre esas magnitudes y sus derivadas o sus diferenciales. Así obtenemos ecuaciones que contienen las funciones desconocidas, escalares o vectoriales, bajo el signo de derivada o de diferencial.

Las ecuaciones en las cuales la función desconocida, escalar o vectorial, se encuentra bajo el signo de derivada o de diferencial, se llaman *ecuaciones diferenciales*. Veamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales.

1) $\frac{dx}{dt}=-kx$ es la ecuación de la desintegración radioactiva. (k es la constante de desintegración; x es la cantidad de sustancia no desintegrada en el momento de tiempo t; la velocidad de desintegración $\frac{dx}{dt}$ es proporcional a la cantidad de sustancia que se desintegra).

2) $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ es la ecuación del movimiento de un punto de masa m, bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F}$ dependiente del tiempo, de la posición del punto—determinada por el radio-vector $\mathbf{r}$—, y de su velocidad $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. La fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración.

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=4\pi\rho(x, y, z)$ es la ecuación de Poisson, a la cual satisface, por ejemplo, el potencial $u(x, y, z)$ del campo electrostático; $\rho(x, y, z)$ es la densidad de las cargas.

Si se indican los métodos para hallar las funciones incógnitas, determinadas por las ecuaciones diferenciales, se habrá hallado así la dependencia entre las magnitudes indicadas. La búsqueda de las funciones desconocidas, determinadas por las ecuaciones diferenciales, es precisamente el problema fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Si en una ecuación diferencial las funciones desconocidas, escalares o vectoriales, son funciones de una sola variable, la ecuación diferencial es llamada *ordinaria* (por ejemplo, las ecuaciones 1) y 2)). Si, en cambio, la función desconocida es función de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial se llama *ecuación en derivadas parciales* (por ejemplo, la ecuación 3)).

Se denomina *orden* de la ecuación diferencial al grado de la derivada (o diferencial) máxima de la función desconocida, que figura en la ecuación.

Se llama *solución* de la ecuación diferencial a una función que, al ser sustituida en la ecuación diferencial, la convierte en una identidad.

Por ejemplo, la ecuación de la desintegración radioactiva

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{I.1}$$

tiene la solución

$$x = ce^{-kt}, \tag{I.1$_1$}$$

donde c es una constante arbitraria.

Es evidente que la ecuación diferencial (I.1) aún no determina por completo la ley de desintegración $x = x(t)$. Para su completa determinación hay que conocer la cantidad de sustancia que se desintegra x_0 en un momento inicial t_0. Si x_0 es conocida, entonces, tomando en cuenta la condición $x(t_0) = x_0$, de (I.1$_1$) hallamos la ley de la desintegración radioactiva:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

El proceso de determinación de las soluciones de una ecuación diferencial se llama *integración* de la misma. En el ejemplo anterior hallamos fácilmente la solución exacta, pero, en casos más complejos, con frecuencia es necesario utilizar métodos aproximados de integración de dichas ecuaciones. Estos métodos de aproximación hasta hace poco conducían a cálculos engorrosos, pero ahora las rápidas calculadoras electrónicas son capaces de hacer ese trabajo con una velocidad de varias decenas o aún centenas de miles de operaciones por segundo.

Veamos más detalladamente el problema más complejo, mencionado antes, de la determinación de la ley del movimiento $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ de un punto material de masa m, bajo la acción de una fuerza dada $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. Según la ley de Newton,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}}). \tag{I.2}$$

Por lo tanto, el problema se reduce a la integración de esta ecuación diferencial. Es evidente que la ley del movimiento aún no queda determinada por completo si se dan la masa m y la fuerza $\mathbf{F}$; hay que conocer también la posición inicial del punto

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \tag{I.2$_1$}$$

y su velocidad inicial

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0. \tag{I.2$_2$}$$

Indiquemos un método muy natural para la resolución aproximada de la ecuación (I.2), con las condiciones iniciales (I.2$_1$) y (I.2$_2$). La idea de este método puede servir para la demostración de la existencia de la solución del problema considerado.

Dividamos el segmento de tiempo $t_0 \leqslant t \leqslant T$, en el cual se exige determinar la solución de la ecuación (I.2) que satisface a las condiciones iniciales (I.2$_1$) y (I.2$_2$), en n partes iguales de longitud $h = \frac{T - t_0}{n}$:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, T],$$

donde

$$t_k = t_0 + kh \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En los límites de cada uno de estos pequeños (para grandes valores de n) segmentos de tiempo, la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ varía poco (suponemos que la función vectorial $\mathbf{F}$ es continua); por eso, aproximadamente puede ser considerada constante en cada segmento de tiempo $[t_{k-1}, t_k]$ e igual, por ejemplo, a su valor en el punto frontera izquierdo de cada segmento. Más exactamente, en el segmento $[t_0, t_1]$ la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ se considera constante e igual a $\mathbf{F}(t_0, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$. Admitiendo esto, de la ecuación (I.2) y de las condiciones iniciales (I.2$_1$) y (I.2$_2$), es fácil determinar la ley del movimiento $\mathbf{r}_n(t)$ en el segmento $[t_0, t_1]$ (el movimiento será uniformemente variado) y, por lo tanto, en particular son conocidos los valores $\mathbf{r}_n(t_1)$ y $\dot{\mathbf{r}}_n(t_1)$. Por este mismo método se determina aproximadamente la ley del movimiento $\mathbf{r}_n(t)$ en el segmento $[t_1, t_2]$, considerando en él a la fuerza $\mathbf{F}$ constante e igual a $\mathbf{F}(t_1, \mathbf{r}_n(t_1), \dot{\mathbf{r}}_n(t_1))$. Continuado este proceso, determinamos la solución aproximada $\mathbf{r}_n(t)$ del problema con condiciones iniciales planteado, para la ecuación (I.2) en todo el segmento $[t_0, T]$.

Está claro intuitivamente que cuando $n \to \infty$, la solución aproximada $\mathbf{r}_n(t)$ debe tender a la solución exacta.

Obsérvese que la ecuación vectorial (I.2) de segundo orden puede sustituirse por un sistema equivalente de dos ecuaciones vectoriales de primer orden, si consideramos la velocidad $\mathbf{v}$ como una segunda función vectorial desconocida:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}). \tag{I.3}$$

Cada ecuación vectorial en el espacio tridimensional puede ser sustituida, proyectando sobre los ejes de coordenadas, por tres ecuaciones escalares. Por lo tanto, la ecuación (I.2) es equivalente a un sistema de tres ecuaciones escalares de segundo orden, y el sistema (I.3), a un sistema de seis ecuaciones escalares de primer orden.

Finalmente, podemos sustituir una ecuación vectorial (I.2) de segundo orden en el espacio tridimensional por una ecuación vectorial de primer orden en el espacio de seis dimensiones, cuyas coordenadas son las coordenadas r_x, r_y y r_z del radiovector $\mathbf{r}(t)$ y las v_x, v_y y v_z del vector velocidad $\mathbf{v}$. Los físicos llaman a este espacio, *espacio de fases*. El radiovector $\mathbf{R}(t)$ en dicho espacio tiene coordenadas $(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z)$. En esta notación, el sistema (I.3) toma la forma:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{R}(t)) \tag{I.4}$$

(las proyecciones del vector $\mathbf{\Phi}$ en el espacio de seis dimensiones son las correspondientes proyecciones de los segundos miembros del sistema (I.3) en el espacio tridimensional).

Bajo esta interpretación, las condiciones iniciales ($I.2_1$) y ($I.2_2$) se sustituyen por la condición

$$\mathbf{R}(t_0)=\mathbf{R}_0. \tag{I.4$_1$}$$

La solución de la ecuación (I.4) $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ será una trayectoria en el espacio de fases, en la que cada uno de sus puntos corresponde a cierto estado momentáneo del punto en movimiento: a su posición $\mathbf{r}(t)$ y a su velocidad $\mathbf{v}(t)$.

Si aplicamos el método aproximado arriba expuesto a la ecuación (I.4) con condición inicial ($I.4_1$), entonces en el primer segmento $[t_0, t_1]$ la función vectorial $\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{R}(t))$ debe considerarse constante e igual a $\mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{R}(t_0))$. De este modo, para $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+h$,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{R}(t_0)),$$

de donde, multiplicando por dt e integrando entre los límites t_0 y t, obtenemos una función vectorial lineal $\mathbf{R}(t)$:

$$\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}(t_0)+\mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{R}(t_0))(t-t_0).$$

En particular, para $t=t_1$ tendremos:

$$\mathbf{R}(t_1)=\mathbf{R}(t_0)+h\mathbf{\Phi}(t_0, \mathbf{R}(t_0)).$$

Repitiendo el mismo razonamiento en los segmentos siguientes, obtenemos

$$\mathbf{R}(t_2) = \mathbf{R}(t_1) + h\mathbf{\Phi}(t_1, \mathbf{R}(t_1)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{R}(t_k) = \mathbf{R}(t_{k-1}) + h\mathbf{\Phi}(t_{k-1}, \mathbf{R}(t_{k-1})),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aplicando estas fórmulas n veces, llegamos al valor $\mathbf{R}(T)$.

En este método, la solución buscada $\mathbf{R}(t)$ se sustituye aproximadamente por una función vectorial lineal a trozos, cuyo gráfico es una línea quebrada, llamada *quebrada de Euler*.

Con frecuencia en las aplicaciones prácticas se encuentra un planteo diferente del problema para la ecuación (I.2): las condiciones complementarias se dan no en uno, sino en dos puntos. Este problema se denomina problema *de contorno* o *de frontera*, a diferencia del problema con las condiciones ($\mathrm{I}.2_1$) y ($\mathrm{I}.2_2$), llamado problema con condiciones iniciales, o problema de Cauchy.

Supongamos, por ejemplo, que se pide que el punto material de masa m, el cual se mueve bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$, que se hallaba en el momento inicial $t = t_0$ en la posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, quede en el momento $t = t_1$ en la posición $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$; es decir, que hay que resolver la ecuación (I.2) con las condiciones de frontera $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$. Muchos problemas balísticos se reducen a este problema de frontera. Es evidente que aquí la solución con frecuencia puede no ser única, ya que del punto $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ se puede llegar al punto $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ por la trayectoria rasa y por la pendiente.

La finalidad fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales es la resolución exacta o aproximada de los problemas con condiciones iniciales y de los problemas de contorno; no obstante, a veces se exige aclarar, o no hay más remedio que limitarse a aclarar sólo ciertas propiedades de las soluciones. Por ejemplo, con frecuencia se exige establecer si existen o no soluciones periódicas u oscilantes, valorar la velocidad de crecimiento o decrecimiento de las soluciones, aclarar si cambia mucho o no la solución para pequeñas variaciones de las condiciones iniciales.

Detengámosnos más detalladamente en el último problema, aplicado a la ecuación de movimiento (I.2). En las aplicaciones prácticas, los valores iniciales $\mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}_0$ casi siempre son el resultado de ciertas mediciones y, por consiguiente, inevitablemente se determinan con cierto error. Por eso, surge naturalmente el problema acerca de la influencia de una pequeña variación de las condiciones iniciales sobre la solución buscada.

Si una variación arbitrariamente pequeña de las condiciones iniciales puede producir cambios significativos de la solución, entonces la solución determinada por los valores iniciales inexactos $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}_0$ no tiene generalmente ningún valor práctico, ya que ésta no describe ni siquiera aproximadamente el movimiento del cuerpo considerado. Por lo tanto, surge el problema, de gran importancia práctica, de hallar las condiciones bajo las cuales una pequeña variación de los valores iniciales $\mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}_0$ ocasiona sólo un pequeño cambio de la solución $\mathbf{r}(t)$ que éstos determinan.

Un problema análogo surge también en los problemas en los que se exige aclarar con qué exactitud hay que dar los valores iniciales $\mathbf{r}_0$ y $\dot{\mathbf{r}}_0$ para que el punto en movimiento se desplace con una exactitud dada por la trayectoria exigida o llegue a una región dada.

También es de gran importancia el problema de la influencia de pequeños sumandos en el miembro derecho de la ecuación (I.2), es decir, de fuerzas pequeñas, pero de acción constante.

En algunos casos estas pequeñas fuerzas, que actúan durante un gran intervalo de tiempo, son capaces de alterar fuertemente la solución, por lo que no se las puede despreciar. En otros casos, la variación de la solución por la acción de estas fuerzas es insignificante, y si ella no sobrepasa la exactitud de cálculo exigida, podemos despreciarlas.

Más adelante se expondrán los métodos de integración de las ecuaciones diferenciales y los procedimientos más simples de análisis de sus soluciones.

CAPITULO 1

Ecuaciones diferenciales de primer orden

§ 1. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN RESUELTAS RESPECTO A LA DERIVADA

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado, si se resuelve respecto a la derivada, puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y).$$

Un ejemplo simple de tal ecuación,

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

se analiza en el curso de cálculo integral. En este caso simple, la solución

$$y=\int f(x)\,dx+c$$

contiene una constante arbitraria, que puede determinarse si se conoce el valor $y(x_0)=y_0$; entonces

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Más adelante será demostrado que, bajo algunas limitaciones establecidas sobre la función $f(x,\ y)$, la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

tiene también una solución única, que satisface la condición $y(x_0)=y_0$, y su *solución general*, es decir, el conjunto de soluciones que contiene sin excepción a todas las soluciones, depende de una constante arbitraria.

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$ establece una dependencia entre las coordenadas de un punto y el coeficiente angular de la tangente $\frac{dy}{dx}$ a la gráfica de la solución en ese punto. Conociendo a x y a y, se puede calcular $\frac{dy}{dx}$. Por consiguiente, la ecuación diferencial de la forma considerada determina un campo de direcciones (fig. 1.1), y el problema de la integración de la ecuación diferencial se reduce a hallar las llamadas *curvas integrales*, para las cuales la dirección de las tangentes a éstas coincide en cada punto con la dirección del campo

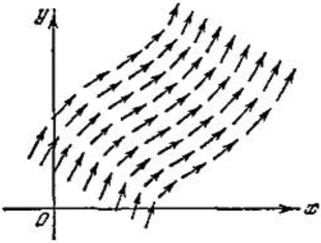

Fig. 1.1

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

En cada punto, diferente del punto (0, 0), el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada es igual a la razón $\frac{y}{x}$, o sea, coincide con el coeficiente angular de la recta dirigida desde el origen de coordenadas al mismo punto (x, y). En la fig. 1.2 está representado con flechas el campo de direcciones determinado por la ecuación estudiada. Evidentemente, en este caso las curvas

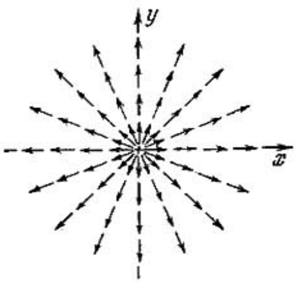

Fig. 1.2

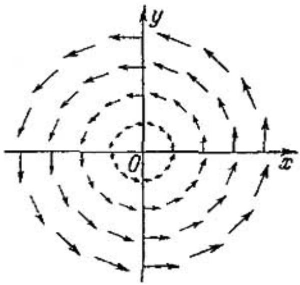

Fig. 1.3

integrales serán las rectas $y=cx$, ya que las direcciones de estas rectas coinciden en todas partes con la dirección del campo.

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Obsérvese que el coeficiente angular de la tangente a las curvas integrales buscadas, $-\frac{x}{y}$, y el coeficiente angular $\frac{y}{x}$ de la tangente a las curvas integrales del ejemplo 1, satisfacen en cada punto la condición de ortogonalidad: $-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=-1$. Por lo tanto, el campo de direcciones definido por la ecuación diferencial considerada es ortogonal al campo representado en la fig. 1.2. Es evidente que las curvas integrales de la ecuación $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ son circunferencias con centro en el origen de coordenadas: $x^2+y^2=c^2$ (fig. 1.3) (más exactamente, semicircunferencias, $y=\sqrt{c^2-x^2}$ e $y=-\sqrt{c^2-x^2}$).

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Para la construcción del campo direccional, hallemos el lugar geométrico de los puntos en los cuales las tangentes a las curvas integrales buscadas conservan una dirección constante. Tales líneas se llaman *isoclinas*. La ecuación de las isoclinas se obtiene considerando $\frac{dy}{dx}=k$, donde k es una constante: $\sqrt{x^2+y^2}=k$, ó $x^2+y^2=k^2$. Por consiguiente, en este caso las isoclinas son circunferencias con centro en el origen de coordenadas, y el coeficiente angular de la tangente a las

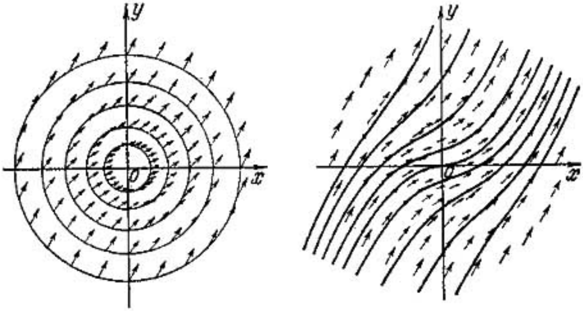

Fig. 1.4

curvas integrales buscadas es igual al radio de dichas circunferencias. Para construir el campo direccional, damos a la constante k ciertos valores determinados (véase la fig. 1.4, parte izquierda). Luego de esto se pueden ya trazar en forma aproximada las curvas integrales buscadas (fig. 1.4, parte derecha).

Ejemplo 4.

$$y'=1+xy.$$

Las isoclinas son las hipérbolas $k=xy+1$, o bien $xy=k-1$; para $k=1$, la hipérbola degenera en el par de rectas $x=0$ e $y=0$ (fig. 1.5). Para $k=0$, obtenemos la isoclina $1+xy=0$. Esta hipérbola divide al plano en partes, en cada una de las cuales y' conserva el signo constante (fig. 1.6). Las curvas integrales $y=y(x)$, al cruzar la hipérbola $1+xy=0$, pasan del campo de crecimiento de la función $y(x)$ al campo de su decrecimiento, o viceversa. Por ello, en las ramas de esta hipérbola se hallan los puntos de máximo y de mínimo de las curvas integrales.

Determinemos seguidamente el signo de la segunda derivada en las diferentes regiones del plano:

$$y'' = xy' + y, \text{ o bien } y'' = x(1 + xy) + y = x + (x^2 + 1)\,y.$$

La curva $x + (x^2 + 1)\,y = 0$ ó,

$$y = -\frac{x}{1 + x^2} \tag{1.1}$$

(fig. 1.7) divide al plano en dos partes, en una de las cuales $y'' < 0$ y, por consiguiente, las curvas integrales son cóncavas hacia las y negativas, y en la otra

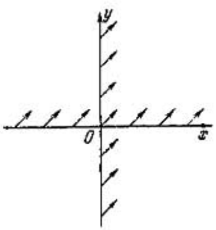

Fig. 1.5

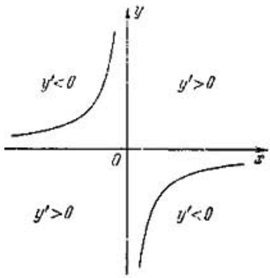

Fig. 1.6

$y'' > 0$, lo que significa que las curvas integrales son cóncavas hacia las y positivas. Al cruzar la curva (1.1), las curvas integrales pasan de la convexidad a la concavidad y, por consiguiente, en esta curva se encuentran los puntos de inflexión de las curvas integrales.

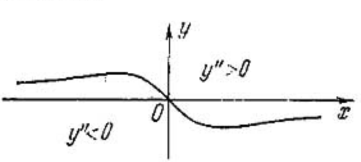

Fig. 1.7

Como resultado del análisis realizado, se conocen el campo de crecimiento y el de decrecimiento de las curvas integrales, la ubicación de los máximos y de los mínimos, la región de convexidad y la de concavidad, así como la disposición de los puntos de inflexión, y la isoclina $k = 1$. Estos datos son suficientes para hacer un esbozo de la disposición de las curvas integrales (fig. 1.8), pero se hubieran podido trazar algunas isoclinas más, lo que nos permitiría precisar más dicha disposición.

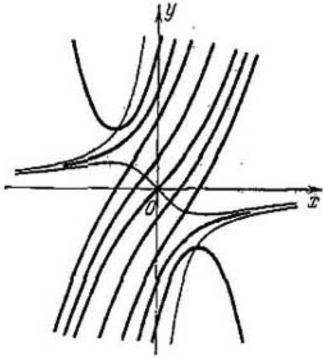

Fig. 1.8

En muchos problemas, en particular en casi todos los problemas de carácter geométrico, las variables x e y son equivalentes. Por ello, en dichos problemas, si éstos se reducen a la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{1.2}$$

es natural considerar, conjuntamente con (1.2), también

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,\ y)}. \tag{1.3}$$

Si ambas ecuaciones tienen sentido, entonces son equivalentes, ya que si la función $y=y(x)$ es solución de la ecuación (1.2), la función inversa $x=x(y)$ es solución de (1.3) y, por lo tanto, las ecuaciones (1.2) y (1.3) poseen curvas integrales comunes.

Si, en cambio, en algunos puntos una de las ecuaciones (1.2) o (1.3) pierde su sentido, entonces en esos puntos es natural sustituirla por la otra ecuación.

Por ejemplo, la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ carece de sentido para $x=0$. Sustituyéndola por la ecuación $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$, cuyo segundo miembro ya no pierde el sentido para $x=0$, hallamos, como complemento a las soluciones encontradas anteriormente $y=cx$ (véase la pág. 18) otra curva integral, $x=0$, de esta ecuación.

§ 2. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES

Las ecuaciones diferenciales del tipo

$$f_2(y)\,dy = f_1(x)\,dx \tag{1.4}$$

se llaman *ecuaciones con variables separadas*. Consideremos que las funciones $f_1(x)$ y $f_2(y)$ son continuas.

Supongamos que $y(x)$ es solución de esta ecuación; entonces, al sustituir $y(x)$ en la ecuación (1.4), obtenemos una identidad que, al ser integrada, da

$$\int f_2(y)\,dy = \int f_1(x)\,dx + c, \tag{1.5}$$

donde c es una constante arbitraria.

Hemos obtenido una ecuación finita *) (1.5), satisfecha por todas las soluciones de la ecuación (1.4). Además, cada solución de la ecuación (1.5) es solución de la (1.4), ya que si una función $y(x)$, al ser sustituida en la ecuación (1.5), la transforma en una identidad, entonces derivando dicha identidad obtenemos que $y(x)$ satisface también a (1.4).

La ecuación finita $\Phi(x, y) = 0$, que determina la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial como función implícita de x, se llama *integral* de la ecuación diferencial considerada.

Si esta ecuación finita determina sin excepción todas las soluciones de la ecuación diferencial dada, entonces se llama *integral general* de dicha ecuación diferencial. Por consiguiente, la ecuación (1.5) es integral general de la ecuación (1.4). Para que (1.5) determine y como función implícita de x, es suficiente exigir que $f_2(y) \neq 0$.

Es posible que en algunos problemas no sea posible expresar las integrales indefinidas $\int f_1(x)\,dx$ y $\int f_2(y)\,dy$ en funciones elementales; pero, a pesar de esto, consideraremos resuelto también en este caso el problema de la integración de la ecuación diferencial (1.4), en el sentido de que lo hemos reducido a un problema más simple, ya estudiado en el curso de cálculo integral: el problema del cálculo de las integrales indefinidas (de cuadraturas **)) .

Si hay que obtener la resolución particular que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, ésta evidentemente se determina por la ecuación

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx,$$

*) Es decir, una ecuación en la que no figuran ni derivadas ni diferenciales (*N. de la Red.*).

**) Como el término "integral" en la teoría de ecuaciones diferenciales se utiliza frecuentemente en el sentido de integral de la ecuación diferencial, entonces para evitar confusiones, para las integrales de las funciones, $\int f(x)dx$, generalmente se utiliza el término "cuadratura".

la cual se obtiene de

$$\int_{y_0}^{y} f_2(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx + c,$$

utilizando las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$.

Ejemplo 1.

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Las variables están separadas, ya que el coeficiente de dx es función sólo de x, y el coeficiente de dy, sólo de y. Integrando, obtenemos

$$\int x\,dx + \int y\,dy = c, \text{ o bien } x^2 + y^2 = c_1^2,$$

que es una familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas (compárese con el ejemplo 2, pág. 18).

Ejemplo 2.

$$e^{x^2}\,dx = \frac{dy}{\ln y}.$$

Integrando, obtenemos

$$\int e^{x^2}\,dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c.$$

Las integrales $\int e^{x^2}\,dx$ y $\int \frac{dy}{\ln y}$ no se resuelven en funciones elementales; sin embargo, la ecuación original se considera integrada, puesto que el problema fue reducido a cuadraturas.

Las ecuaciones del tipo

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy,$$

en las cuales los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores dependientes sólo de x o de y, se llaman *ecuaciones diferenciales con variables separables*, ya que dividiendo entre $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$, éstas se reducen a una ecuación de variables separadas:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy.$$

Obsérvese que la división entre $\psi_1(y)\,\varphi_2(x)$ puede conducir a la pérdida de soluciones particulares, que reducen a cero el producto $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$; si las funciones $\psi_1(y)$ y $\varphi_2(x)$ pueden ser discontinuas, es posible la aparición de soluciones superfluas, que reducen a cero el factor

$$\frac{1}{\psi_1(y)\,\varphi_2(x)}.$$

Ejemplo 3.

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ (compárese con el ejemplo 1, pág. 18). Separamos variables e integramos:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x},$$
$$\ln|y|=\ln|x|+\ln c, \quad c>0.$$

Potenciando, obtenemos $|y|=c|x|$. Si se consideran sólo soluciones lisas *), entonces la ecuación $|y|=c|x|$, donde $c>0$, es equivalente a la ecuación $y=\pm cx$, o bien $y=c_1x$, donde c_1 puede tomar valores positivos o negativos, pero $c_1\neq 0$. Si tomamos en cuenta que al dividir entre y se pierde la solución $y=0$, entonces se puede considerar que en la solución $y=c_1x$, la constante c_1 adquiere también el valor $c_1=0$, para el cual obtenemos la solución anteriormente perdida, $y=0$.

Observación. Si en el ejemplo 3 se considera que las variables x e y son equivalentes, entonces la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, que pierde el sentido para $x=0$, debe ser completada con la ecuación $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$ (véase la pág. 21), la cual evidentemente posee la solución $x=0$, que no está contenida en la solución $y=c_1x$ hallada anteriormente.

Ejemplo 4.

$$x(1+y^2)\,dx-y(1+x^2)\,dy=0.$$

Separamos variables e integramos:

$$\frac{y\,dy}{1+y^2}=\frac{x\,dx}{1+x^2}; \quad \int\frac{y\,dy}{1+y^2}=\int\frac{x\,dx}{1+x^2}+c;$$
$$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln c_1; \quad 1+y^2=c_1(1+x^2).$$

Ejemplo 5.

$$\frac{dx}{dt}=4t\sqrt{x}.$$

Hallar la solución $x(t)$ que satisface la condición $x(1)=1$.

Separamos variables e integramos:

$$\int_1^x\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\int_1^t 2t\,dt, \quad \sqrt{x}=t^2, \quad x=t^4.$$

Ejemplo 6. Como ya fué mencionado en la introducción, se ha establecido que la velocidad de desintegración radioactiva es proporcional a la cantidad x de sustancia aún no desintegrada. Hallar la dependencia de x respecto al tiempo t, si en el momento inicial para $t=t_0$, era $x=x_0$.

Supondremos conocido el coeficiente de proporcionalidad k, llamado constante de desintegración. La ecuación diferencial del proceso tendrá la forma

$$\frac{dx}{dt}=-kx \qquad (1.6)$$

*) Es decir, soluciones que poseen primera derivada continua (*N. de la Red.*).

(el signo — indica que x decrece cuando t aumenta, $k > 0$). Separando variables e integrando, se obtiene

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt; \quad \ln|x| - \ln|x_0| = k(t - t_0),$$

de donde

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Determinemos también el período de semidesintegración τ $\left(\text{o sea, el tiempo durante el cual se desintegra } \frac{1}{2}x_0\right)$. Haciendo $t - t_0 = \tau$, obtenemos $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k\tau}$, de donde $\tau = \frac{\ln 2}{k}$.

No solamente la desintegración radioactiva, sino también cualquier otra reacción monomolecular, en base a la ley de acción de las masas, se describe por la ecuación $\frac{dx}{dt} = -kx$, donde x es la cantidad de sustancia que aún no ha reaccionado.

La ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad k > 0, \tag{1.7}$$

que se diferencia de la (1.6) sólo en el signo del segundo miembro, describe muchos procesos de "reproducción" (o "multiplicación"), por ejemplo, la "reproducción" de la cantidad de neutrones en las reacciones nucleares en cadena, o la reproducción de la cantidad de bacterias, suponiendo que se encuentren en un ambiente óptimo y que, por ello, la velocidad de su crecimiento sea proporcional a la cantidad de bacterias presentes.

La solución de la ecuación (1.7) que satisface la condición $x(t_0) = x_0$ tiene la forma $x = x_0 e^{k(t-t_0)}$ y, a diferencia de las soluciones de (1.6), $x(t)$ no disminuye, sino que crece exponencialmente con el incremento de t.

Ejemplo 7.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho(\rho - 2)(\rho - 4).$$

Trazar las curvas integrales sin integrar la ecuación; ρ y φ son las coordenadas polares.

La ecuación tiene las soluciones evidentes $\rho = 0$, $\rho = 2$ y $\rho = 4$. Para $0 < \rho < 2$, $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$; para $2 < \rho < 4$, $\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$ y para $\rho > 4$, $\frac{d\rho}{d\varphi} > 0$.

Por lo tanto, las curvas integrales son las circunferencias $\rho = 2$ y $\rho = 4$, y las espirales que se "envuelven", al aumentar φ, en la circunferencia $\rho = 2$ y se "desenvuelven" de la circunferencia $\rho = 4$. Las curvas integrales cerradas, en entornos suficientemente pequeños de las cuales todas las curvas integrales son espirales, se llaman *ciclos límite*. En el presente ejemplo las circunferencias $\rho = 2$ y $\rho = 4$ son ciclos límite.

Ejemplo 8. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y = ax^2$.

Se denominan *trayectorias ortogonales* de una familia dada de curvas a las líneas que cortan en ángulo recto las curvas de dicha familia. Los coeficientes angulares y'_1 e y'_2 de las tangentes a las curvas de la familia dada y a las trayectorias ortogonales buscadas, deben satisfacer en cada punto a la condición de ortogonalidad $y'_2 = -\frac{1}{y'_1}$. Para la familia de parábolas $y = ax^2$, hallamos $y' = 2ax$, o bien, puesto que $a = \frac{y}{x^2}$, $y' = \frac{2y}{x}$. Por consiguiente la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales buscadas tiene la forma $y' = -\frac{x}{2y}$.

Separando variables, hallamos $2y\,dy + x\,dx = 0$, e integrando, obtenemos la familia de elipses

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c^2$$

(fig. 1.9).

E j e m p l o 9. Sea $u = xy$ el potencial de las velocidades de una corriente líquida plano-paralela. Hallar la ecuación de las líneas de la corriente.

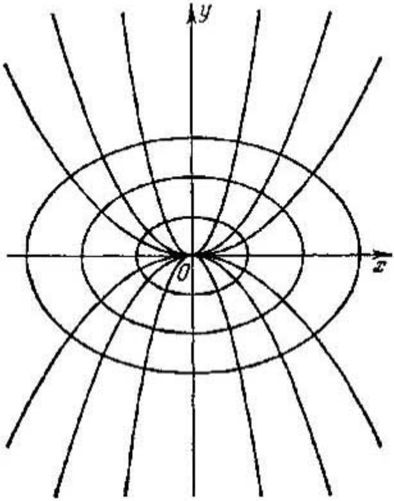

Fig. 1.9

Las líneas de la corriente son las trayectorias ortogonales de la familia de líneas equipotenciales $xy = c$. Hallamos el coeficiente angular de la tangente a las líneas equipotenciales: $xy' + y = 0$, $y' = -\frac{y}{x}$. En consecuencia, la ecuación diferencial de las líneas de la corriente tiene la forma $y' = \frac{x}{y}$, o bien $y\,dy = x\,dx$; integrando, obtenemos $x^2 - y^2 = c$, que es una familia de hipérbolas.

E j e m p l o 10. Una esfera metálica hueca homogénea, de radio interior r_1 y exterior r_2, se encuentra en estado térmico estacionario. Su temperatura en la superficie interior es igual a T_1, y en la exterior, a T_2. Hallar la temperatura T a la distancia r del centro de la esfera, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

Por simetría se deduce que T es sólo función de r.

Puesto que entre dos esferas concéntricas que tienen por centro común el de la esfera original (sus radios pueden variar desde r_1 hasta r_2) la cantidad de calor permanece constante, entonces a través de cada esfera pasa una misma cantidad de calor Q. Por lo tanto, la ecuación diferencial que describe el proceso considerado tiene la forma

$$-4\pi k r^2 \frac{dT}{dr} = Q,$$

donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica.

Separando variables e integrando, obtenemos la dependencia buscada de T respecto a r:

$$4\pi k\, dT = -\frac{Q\, dr}{r^2};$$

$$4\pi k \int_{T_1}^{T} dT = -Q \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r^2},$$

$$4\pi k (T - T_1) = Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Para la determinación de Q utilizamos la condición: $T = T_2$ cuando $r = r_2$:

$$Q = \frac{4\pi k (T_2 - T_1)}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1}} = \frac{4\pi k (T_2 - T_1)\, r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

§ 3. ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES

Muchas ecuaciones diferenciales pueden ser reducidas a ecuaciones con variables separables mediante una sustitución de variables. A dicho grupo pertenecen, por ejemplo, las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

donde a y b son magnitudes constantes, las cuales se transforman en ecuaciones con variables separables por medio de la sustitución $z = ax + by$. Efectivamente, pasando a las nuevas variables x y z, tendremos

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z),$$

o bien

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

con lo que hemos separado las variables. Integrando, obtenemos

$$x=\int \frac{dz}{a+bf(z)}+c.$$

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx}=2x+y.$$

Haciendo $z=2x+y$, tendremos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2, \qquad \frac{dz}{dx}-2=z.$$

Separando variables e integrando, se obtiene

$$\frac{dz}{z+2}=dx, \quad \ln|z+2|=x+\ln c, \quad z=-2+ce^{x},$$

$$2x+y=-2+ce^{x}, \quad y=ce^{x}-2x-2.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-y}+1.$$

Haciendo $x-y=z$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx}, \quad 1-\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z}+1;$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{z}, \quad z\,dz=-dx, \quad z^2=-2x+c, \quad (x-y)^2=-2x+c.$$

A ecuaciones con varibles separables se reducen también las *ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden*, que tienen la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

En efecto, después de la sustitución $z=\frac{y}{x}$, o bien $y=xz$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z, \quad x\frac{dz}{dx}+z=f(z), \quad \frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\ln|x|+\ln c, \quad x=ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}$$

Obsérvese que el segundo miembro de la ecuación homogénea es una función homogénea de variables x e y de grado nulo de homogeneidad; por eso la ecuación del tipo

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0$$

será homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas de x e y, del mismo grado de homogeneidad, puesto que en este caso

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

Haciendo $y=xz$, $\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$ y sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos

$$x\frac{dz}{dx}+z=z+\operatorname{tg} z, \quad \frac{\cos z\,dz}{\operatorname{sen} z}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln|\operatorname{sen} z|=\ln|x|+\ln c, \quad \operatorname{sen} z=cx, \quad \operatorname{sen}\frac{y}{x}=cx.$$

Ejemplo 4.

$$(x+y)\,dx-(y-x)\,dy=0.$$

Haciendo $y=xz$, $dy=x\,dz+z\,dx$, obtenemos

$$(x+xz)\,dx-(xz-x)(x\,dz+z\,dx)=0,$$
$$(1+2z-z^2)\,dx+x(1-z)\,dz=0,$$
$$\frac{(1-z)\,dz}{1+2z-z^2}+\frac{dx}{x}=0, \quad \frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2|+\ln|x|=$$
$$=\frac{1}{2}\ln c, \quad x^2(1+2z-z^2)=c, \quad x^2+2xy-y^2=c.$$

Las ecuaciones del tipo

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{1.8}$$

pueden reducirse a ecuaciones homogéneas, si trasladamos el origen de coordenadas al punto de intersección (x_1, y_1) de las rectas

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{y} \quad a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Efectivamente, el miembro independiente en las ecuaciones de estas rectas en las nuevas coordenadas $X=x-x_1$, $Y=y-y_1$, será igual a cero; los coeficientes de las coordenadas permanecen invariables; $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$, y la ecuación (1.8) toma la forma

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right),$$

o bien

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right)=\varphi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

que ya es una ecuación homogénea.

Este método no se puede aplicar sólo en el caso de paralelismo de las rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$. Pero en este caso los coeficientes de las coordenadas son proporcionales:

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$, y la ecuación (1.8) se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y);$$

por consiguiente, como se demuestra en la pág. 27, el cambio de variables $z=a_1x+b_1y$ transforma la ecuación considerada en una ecuación con variables separables.

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $x-y+1=0$, $x+y-3=0$, obtenemos $x_1=1$, $y_1=2$. Haciendo $x=X+1$, $y=Y+2$, tendremos

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}.$$

El cambio de variables $z=\frac{Y}{X}$, o bien $Y=zX$ conduce a una ecuación de variables separables:

$$z+X\frac{dz}{dX}=\frac{1-z}{1+z}, \quad \frac{(1+z)\,dz}{1-2z-z^2}=\frac{dX}{X},$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2|=\ln|X|-\frac{1}{2}\ln c,$$

$$(1-2z-z^2)X^2=c, \quad X^2-2XY-Y^2=c,$$

$$x^2-2xy-y^2+2x+6y=c_1.$$

§ 4. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Se llama *ecuación diferencial lineal de primer orden* a una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a su derivada. La ecuación lineal tiene la forma

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x), \tag{1.9}$$

donde $p(x)$ y $f(x)$ se considerarán en lo sucesivo funciones continuas de x en la región en que se exige integrar la ecuación (1.9).

Si $f(x)\equiv 0$, la ecuación (1.9) se llama lineal homogénea. En la ecuación lineal homogénea las variables se separan:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=0, \text{ de donde } \frac{dy}{y}=-p(x)\,dx,$$

e integrando, obtenemos

$$\ln|y|=-\int p(x)\,dx+\ln c_1, \quad c_1>0,$$

$$y=ce^{-\int p(x)\,dx}, \quad c\neq 0. \tag{1.10}$$

Al dividir entre y se perdió la solución $y\equiv 0$; sin embargo, ésta puede ser incluida en la familia de soluciones hallada (1.10), si se considera que c puede tomar también el valor 0.

Para integrar la ecuación lineal no homogénea

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x) \qquad (1.9)$$

puede ser aplicado el así llamado *método de variación de la constante*. Al aplicar dicho método, primeramente se integra la ecuación homogénea correspondiente (o sea, la que tiene el mismo primer miembro):

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=0,$$

cuya solución general, como fue indicado anteriormente, tiene la forma

$$y=ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Cuando c es constante, la función $ce^{-\int p(x)\,dx}$ es la solución de la ecuación homogénea. Probemos ahora satisfacer la ecuación no homogénea considerando c como función de x, o sea, realizando en escencia la sustitución de variables

$$y=c(x)\,e^{-\int p(x)\,dx},$$

donde $c(x)$ es una nueva función desconocida de x.

Calculando la derivada

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)\,dx}-c(x)\,p(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}$$

y sustituyéndola en la ecuación no homogénea inicial (1.9), se obtiene

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)\,dx}-c(x)\,p(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}+p(x)\,c(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}=f(x),$$

o bien

$$\frac{dc}{dx}=f(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

de donde, integrando, se halla

$$c(x)=\int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx+c_1$$

y, por consiguiente,

$$y=c(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}=c_1e^{-\int p(x)\,dx}+e^{-\int p(x)\,dx}\int f(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx. \qquad (1.11)$$

De este modo, la solución general de la ecuación lineal no homogénea es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente

$$c_1 e^{-\int p(x)\,dx}$$

y de la solución particular de la ecuación no homogénea

$$e^{-\int p(x)\,dx} \int f(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx$$

que se obtiene de (1.11) si $c_1 = 0$.

Obsérvese que en ejemplos concretos no es conveniente utilizar la fórmula (1.11), compleja y difícil de recordar; es más sencillo repetir cada vez todas las operaciones expuestas más arriba.

Ejemplo 1.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Integramos la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln c, \quad y = cx.$$

Consideramos c como función de x; entonces $y = c(x)\,x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}x + c(x)$ y, sustituyendo en la ecuación inicial obtenemos, luego de simplificar,

$$\frac{dc}{dx}x = x^2, \text{ o bien } dc = x\,dx,\ c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$y = c_1 x + \frac{x^3}{2}.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \operatorname{sen} x.$$

Integramos la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx,$$

$$\ln|y| = \ln|\operatorname{sen} x| + \ln c, \quad y = c \operatorname{sen} x.$$

Variamos la constante

$$y = c(x) \operatorname{sen} x, \quad y' = c'(x) \operatorname{sen} x + c(x) \cos x.$$

Sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos

$$c'(x) \operatorname{sen} x + c(x) \cos(x) - c(x) \cos x = 2x \operatorname{sen} x,$$

$$c'(x) = 2x, \quad c(x) = x^2 + c_1,$$

$$y = x^2 \operatorname{sen} x + c_1 \operatorname{sen} x.$$

E j e m p l o 3. En un circuito eléctrico con autoinducción tiene lugar el paso de corriente alterna. La tensión U es una función dada del tiempo, $U = U(t)$, la resistencia R y la autoinducción L son constantes; la intensidad inicial de la corriente $I(0) = I_0$ es dada. Hallar la dependencia de la intensidad de la corriente $I = I(t)$ respecto al tiempo.

Aplicando la ley de Ohm para un circuito eléctrico con autoinducción, obtenemos

$$U - L\frac{dI}{dt} = RI.$$

La solución de esta ecuación lineal que satisface la condición inicial $I(0) = I_0$, de acuerdo con (1.11), tiene la forma

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left[I_0 + \frac{1}{L}\int_0^t U(t)\, e^{\frac{R}{L}t}\, dt\right]. \qquad (1.12)$$

Para una tensión constante $U = U_0$, obtenemos

$$I = \frac{U_0}{R} + \left(I_0 - \frac{U_0}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Es interesante el caso de tensión alterna sinusoidal: $U = A \operatorname{sen} \omega t$. En este caso, según (1.12), obtenemos

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0 + \frac{A}{L}\int_0^t e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\, dt\right)$$

La integral del segundo miembro se toma fácilmente.

Muchas ecuaciones diferenciales pueden ser reducidas a ecuaciones lineales mediante un cambio de variables. Por ejemplo, la *ecuación de Bernoulli*, que tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = f(x)\, y^n, \quad n \neq 1,$$

o bien

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)\, y^{1-n} = f(x), \qquad (1.13)$$

con el cambio de variables $y^{1-n} = z$, se reduce a una ecuación lineal. Efectivamente, derivando $y^{1-n} = z$, hallamos $(1-n)\, y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$, y sustituyendo en (1.13), obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)\, z = f(x).$$

Ejemplo 4.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}.$$

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}+x^2,\quad y^2=z,\quad 2y\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}+x^2$$

y se prosigue como en el ejemplo 1 de la pág. 32.

La ecuación

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y+q(x)\,y^2=f(x),$$

llamada *ecuación de Riccati*, en general no se integra en cuadraturas, pero por sustitución de variables puede ser transformada en una ecuación de Bernoulli, si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación. Efectivamente, haciendo $y=y_1+z$, se obtiene

$$y_1'+z'+p(x)(y_1+z)+q(x)(y_1+z)^2=f(x)$$

o, como $y_1'+p(x)\,y_1+q(x)\,y_1^2=f(x)$, tendremos la ecuación de Bernoulli

$$z'+[p(x)+2q(x)\,y_1]\,z+q(x)\,z^2=0.$$

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}.$$

En este ejemplo no es difícil hallar la solución particular $y_1=\frac{1}{x}$. Haciendo $y=z+\frac{1}{x}$, obtenemos $y'=z'-\frac{1}{x^2}$, $z'-\frac{1}{x^2}=\left(z+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x^2}$, o bien $z'=z^2+2\frac{z}{x}$, que es una ecuación de Bernoulli.

$$\frac{z'}{z^2}=\frac{2}{xz}+1,\quad u=\frac{1}{z},\quad \frac{du}{dx}=-\frac{z'}{z^2},$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{2u}{x}-1,\quad \frac{du}{u}=-\frac{2dx}{x},$$

$$\ln|u|=-2\ln|x|+\ln c,\ u=\frac{c}{x^2},\quad u=\frac{c(x)}{x^2},$$

$$\frac{c'(x)}{x^2}=-1,\quad c(x)=-\frac{x^3}{3}+c_1,$$

$$u=\frac{c_1}{x^2}-\frac{x}{3},\quad \frac{1}{z}=\frac{c_1}{x^2}-\frac{x}{3},\quad \frac{1}{y-\frac{1}{x}}=\frac{c_1}{x^2}-\frac{x}{3},$$

$$y=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{c_1-x^3}.$$

§ 5. ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES

Puede suceder que el primer miembro de la ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1.14}$$

sea la diferencial total de cierta función $u(x, y)$:

$$du(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

y que, por consiguiente, la ecuación (1.14) tome la forma

$$du(x, y) = 0.$$

Si la función $y(x)$ es solución de la ecuación (1.14), entonces

$$du(x, y(x)) \equiv 0,$$

de donde

$$u(x, y(x)) = c, \tag{1.15}$$

donde c es una constante. Recíprocamente, si cierta función $y(x)$ convierte en identidad la ecuación finita (1.15), entonces, derivando la identidad obtenida, tendremos $du(x, y(x)) = 0$ y, por consiguiente, $u(x, y) = c$, donde c es una constante arbitraria, es integral general de la ecuación inicial.

Si las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ están dadas, la constante c se determina de (1.15): $c = u(x_0, y_0)$ y

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \tag{1.15$_1$}$$

es la integral particular buscada. Si $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \neq 0$ en el punto (x_0, y_0), entonces la ecuación (1.15$_1$) determina y como función implícita de x.

Para que el primer miembro de la ecuación (1.14)

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

sea la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, como se sabe, es necesario y suficiente que

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \tag{1.16}$$

Si esta condición, señalada por primera vez por Euler, se cumple, entonces la ecuación (1.14) se integra fácilmente. En efecto,

$$du = M\,dx + N\,dy.$$

Por otra parte,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x, y),$$

de donde

$$u(x, y)=\int M(x, y)\,dx+c(y).$$

Al calcular la integral $\int M(x, y)\,dx$, la magnitud y se considera constante; por eso, $c(y)$ es una función arbitraria de y.

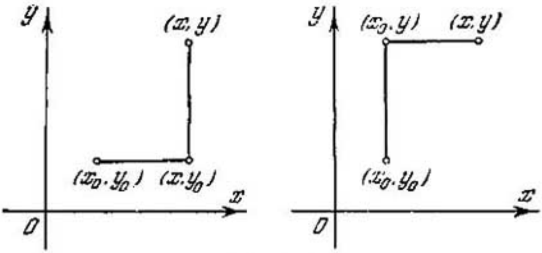

Fig. 1.10

Para determinar la función $c(y)$, derivamos la función hallada $u(x, y)$ respecto a y y, como $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x, y)$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,dx\right)+c'(y)=N(x, y).$$

De esta ecuación se determina $c'(y)$, e integrando se halla $c(y)$.

Como es sabido del curso de análisis matemático, se puede determinar aún más fácilmente la función $u(x, y)$ por su diferencial total $du=M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy$, tomando la integral curvilínea de $M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy$ desde cierto punto fijo (x_0, y_0) hasta un punto con coordenadas variables (x, y), por cualquier camino:

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy.$$

Con frecuencia, en calidad de camino de integración es cómodo tomar una línea quebrada, compuesta por dos segmentos paralelos a los ejes de coordenadas (fig. 1.10); en este caso

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M\,dx+N\,dy=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} M\,dx+\int_{(x, y_0)}^{(x, y)} N\,dy,$$

o bien

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M\,dx + N\,dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y)} N\,dy + \int_{(x_0, y)}^{(x, y)} M\,dx.$$

Ejemplo 1.

$$(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=0.$$

El primer miembro de la ecuación es la diferencial total de cierta función $u(x, y)$, puesto que

$$\frac{\partial (x+y+1)}{\partial y} \equiv \frac{\partial (x-y^2+3)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+1, \quad u=\frac{x^2}{2}+xy+x+c(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+c'(y), \; x+c'(y)=x-y^2+3,$$

$$c'(y)=-y^2+3, \quad c(y)=-\frac{y^3}{3}+3y+c_1,$$

$$u=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{y^3}{3}+3y+c_1.$$

Por lo tanto, la integral general tiene la forma

$$3x^2+6xy+6x-2y^3+18y=c_2. \tag{1.17}$$

Se puede utilizar también el otro método de determinación de la función $u(x, y)$:

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy.$$

Como punto inicial (x_0, y_0) escogemos, por ejemplo, el origen de coordenadas, y en calidad de camino de integración, la quebrada de la fig. 1.11. Entonces

$$u(x, y)=\int_{(0, 0)}^{(x, 0)} (x+1)\,dx+\int_{(x, 0)}^{(x, y)} (x-y^2+3)\,dy=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y$$

y la integral general tiene la forma

$$\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=c,$$

o bien como en (1.17).

En algunos casos, si el primer miembro de la ecuación

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{1.14}$$

no es diferencial total, resulta fácil escoger una función $\mu(x, y)$, luego del producto por la cual el primer miembro de (1.14) se transforma en una diferencial total:

$$du=\mu M\,dx+\mu N\,dy.$$

Esta función μ se llama *factor integrante*. Obsérvese que la multiplicación por el factor integrante $\mu(x, y)$ puede conducir a que aparezcan soluciones particulares superfluas, que reducen este factor a cero.

Ejemplo 2.

$$x\,dx + y\,dy + (x^2 + y^2)\,x^2\,dx = 0.$$

Es evidente que después de multiplicar por el factor $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$, el primer miembro se transforma en diferencial total. Efectivamente, luego del producto por $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$, obtenemos

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + x^2\,dx = 0,$$

o integrando: $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \frac{x^3}{3} = \ln c_1$. Multiplicando por 2 y potenciando, tendremos

$$(x^2+y^2)\,e^{\frac{2}{3}x^3} = c.$$

Es claro que no siempre el factor integrante se escoge tan fácilmente. En general, para hallar dicho factor es necesario escoger por lo menos una solución particular no idénticamente nula de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$$

o, en forma desarrollada,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x},$$

la cual, después de dividir entre μ y de cambiar de miembro algunos términos, se reduce a

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (1.18)$$

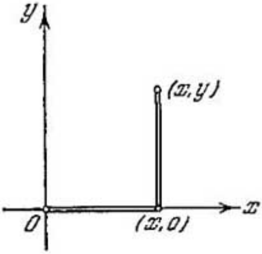

Fig. 1.11

En general, la integración de esta ecuación en derivadas parciales no es un problema menos simple que la integración de la ecuación inicial. Sin embargo, a veces la elección de la solución particular de (1.18) no presenta dificultades.

Aparte de ello, considerando que el factor integrante es función de un solo argumento (por ejemplo, es función sólo de $x+y$ o de x^2+y^2, o función sólo de x o de y, etc.), se puede integrar ya sin dificultad la ecuación (1.18) e indicar las condiciones bajo las cuales existe un factor integrante del tipo considerado. Con esto se obtienen clases de ecuaciones para las cuales el factor integrante puede ser hallado fácilmente.

Por ejemplo, encontremos las condiciones bajo las cuales la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ tiene factor integrante que depende sólo de x, $\mu = \mu(x)$. En este caso, la ecuación (1.18) se simplifica y toma la forma

$$-\frac{d \ln \mu}{dx} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

de donde, considerando $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ función continua de x, obtenemos

$$\ln \mu = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\, dx + \ln c,$$

$$\mu = c e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} \tag{1.19}$$

Se puede considerar $c = 1$, ya que es suficiente tener sólo un factor integrante.

Si $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ es función sólo de x, entonces existe un factor integrante que depende sólo de x, y es igual a (1.19). En caso contrario, no existe ningún factor de la forma $\mu(x)$.

La condición de existencia de un factor integrante que depende sólo de x se cumple, por ejemplo, para la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = f(x), \quad \text{o bien} \quad [p(x)\,y - f(x)]\,dx + dy = 0.$$

Efectivamente, $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$ y, por lo tanto, $\mu = e^{\int p(x)\,dx}$. De manera análoga se pueden hallar las condiciones de existencia de factores integrantes de la forma

$$\mu(y), \ \mu(x \pm y), \ \mu(x^2 \pm y^2), \ \mu(xy), \ \mu\left(\frac{y}{x}\right) \text{ etc.}$$

Ejemplo 3. ¿Tiene la ecuación

$$x\,dx + y\,dy + x\,dy - y\,dx = 0 \tag{1.20}$$

un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$?

Designemos $x^2 + y^2 = z$. La ecuación (1.18) para $\mu = \mu(x^2 + y^2) = \mu(z)$ toma la forma

$$2(My - Nx)\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y},$$

de donde

$$\ln|\mu| = \frac{1}{2}\int \varphi(z)\,dz + \ln c,$$

o bien

$$\mu = ce^{\frac{1}{2}\int \varphi(z)\,dz} \qquad (1.21)$$

donde

$$\varphi(z) = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}.$$

Para la existencia de un factor integrante del tipo dado, es necesario —y, en caso de que $\varphi(z)$ sea continua, suficiente— que $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}$ sea función sólo de $x^2 + y^2$. En nuestro caso,

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{My - Mx} = -\frac{2}{x^2 + y^2};$$

por lo tanto, el factor integrante $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ existe y es igual a (1.21). Para $c = 1$, obtenemos:

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Multiplicando la ecuación (1.20) por $\mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, la reducimos a la forma

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0,$$

o bien

$$\frac{\frac{1}{2}\,d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\,d\ln(x^2 + y^2) + d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = 0.$$

Integrando, obtenemos

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + \ln c$$

y, luego de potenciar, tendremos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{-\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}},$$

o, en coordenadas polares $\rho = ce^{-\varphi}$, que es una familia de espirales logarítmicas.

Ejemplo 4. Hallar la forma de un espejo que refleje paralelamente a una dirección dada todos los rayos que salen de un punto fijo.

Coloquemos el origen de coordenadas en el punto dado, y dirijamos el eje de las abscisas paralelamente a la dirección indicada en las condiciones del problema.

Supongamos que un rayo incide en el espejo en el punto $M(x, y)$. Consideremos el corte del espejo, representado en la fig. 1.12, por el plano Oxy, que pasa por el eje de las abscisas y por el punto M. Tracemos la tangente MN al corte considerado de la superficie del espejo en el punto $M(x, y)$. Puesto que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, el triángulo MNO es isósceles. Por lo tanto,

$$\operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}.$$

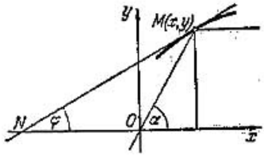

Fig. 1.12

La ecuación homogénea obtenida se integra fácilmente con el cambio de variables

$$\frac{x}{y} = z,$$

pero puede hacerse de manera aún más simple: racionalizando el denominador la escribimos en la forma

$$x\,dx + y\,dy = \sqrt{x^2+y^2}\,dx.$$

La ecuación tiene el factor integrante evidente

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx, \quad \sqrt{x^2+y^2} = x + c, \quad y^2 = 2cx + c^2$$

(familia de parábolas).

Observación. Este problema se resuelve aún más fácilmente en coordenadas x y ρ, donde $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. En este caso, la ecuación del corte de las superficies buscadas toma la forma

$$dx = d\rho, \quad \rho = x + c.$$

Se puede demostrar la existencia del factor integrante, o lo que es lo mismo, la existencia de una solución no nula de la ecuación en derivadas parciales (1.18) (véase la pág. 38) en cierta región, si las funciones M y N tienen derivadas continuas y por lo menos una de estas funciones no es igual a cero. Por lo tanto, el método del factor integrante se puede considerar como un método general de integración de la ecuación del tipo

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Sin embargo, debido a la dificultad de hallar el factor integrante, este método se utiliza con mayor frecuencia sólo en aquellos casos en que dicho factor es evidente.

§ 6. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCION DE LA ECUACION $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

La clase de las ecuaciones diferenciales integrables en cuadraturas es sumamente limitada; por ello, ya desde los tiempos de Euler obtuvieron gran importancia los métodos aproximados en la teoría de ecuaciones diferenciales.

En la actualidad, gracias al rápido desarrollo de la técnica de cálculo, los métodos de aproximación adquieren un valor incomparablemente mayor.

Ahora, a menudo resulta conveniente utilizar métodos aproximados aún en los casos en que la ecuación se integra en cuadraturas. Es más, aún si la solución puede ser expresada en forma sencilla en funciones elementales, frecuentemente la utilización de las tablas de estas funciones resulta más difícil que la integración aproximada de la ecuación en calculadoras electrónicas. Sin embargo, para aplicar uno u otro método de integración aproximada de la ecuación diferencial, hay que estar seguro ante todo de la existencia de la solución buscada, así como de la unicidad de la misma, ya que cuando no tiene lugar la unicidad, no queda claro cuál solución debe ser determinada aproximadamente.

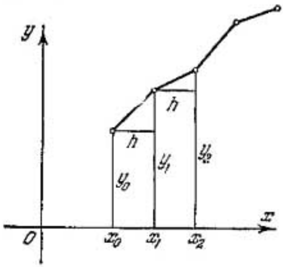

Fig. 1.13

Con gran frecuencia la demostración de teoremas de existencia de la solución da también un método para la determinación exacta o aproximada de la solución, lo cual aumenta aún más la importancia de los teoremas de existencia. Por ejemplo el teorema (1.1), demostrado más adelante, da la fundamentación del *método de Euler* de integración aproximada de ecuaciones diferenciales. Este método consiste en que la curva integral buscada de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, que pasa por el punto (x_0, y_0), se sustituye por una quebrada constituida por segmentos lineales (fig. 1. 13), cada uno de los cuales es tangente a la curva integral en uno de sus puntos frontera. Al aplicar este método para el cálculo aproximado del valor de la solución buscada $y(x)$ en el punto $x=b$, el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant b$ (si $b > x_0$) se divide en n partes iguales por medio de los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, donde $x_n=b$. La longitud de cada segmento $x_{i+1}-x_i=h$ se llama *paso del cálculo*. El valor aproximado de la solución buscada en los puntos x_i se designará por y_i.

Para el cálculo de y_1 se sustituye en el intervalo $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ la curva integral buscada por el segmento de su tangente en el punto (x_0, y_0). Por lo tanto, $y_1=y_0+hy'_0$, donde $y'_0=f(x_0, y_0)$ (véase la fig. 1.13). En forma análoga, calculamos

$$y_2=y_1+hy'_1, \text{ donde } y'_1=f(x_1, y_1);$$

$$y_3 = y_2 + hy_2', \text{ donde } y_2' = f(x_2, y_2);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}', \text{ donde } y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Si $b < x_0$, el esquema del cálculo permanece invariable, pero el paso h es negativo.

Es natural esperar que para $h \to 0$ *las quebradas de Euler* se aproximen a la gráfica de la curva integral buscada. Por lo tanto, al disminuir el paso h el método de Euler da un valor cada vez más exacto de la solución buscada en el punto b. La demostración de esta afirmación nos conduce al mismo tiempo al siguiente teorema fundamental de existencia y unicidad de la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$, bajo condiciones suficientes muy amplias impuestas a la función $f(x,y)$.

Teorema 1.1 (de existencia y unicidad de la solución). *Si en la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.22}$$

la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo D:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b,$$

y satisface en D la condición de Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|,$$

donde N es una constante, entonces existe una solución única $y = \bar{y}(x)$, $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0 + H$ de la ecuación (1.22), *que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, donde*

$$H < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$$
$$M = \max|f(x, y)| \text{ en } D.$$

Las condiciones del teorema necesitan ciertas aclaraciones. No es posible afirmar que la solución buscada $y = \bar{y}(x)$ de la ecuación (1.22), que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, existirá para $x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a$, ya que la curva integral $y = \bar{y}(x)$ puede salir del rectángulo D a través de sus lados superior o inferior $y = y_0 \pm b$ (fig. 1.14) para cierto valor $x = x_1$, $x_0 - a < x_1 < x_0 + a$, y entonces, si $x_1 > x_0$, para $x > x_1$ la solución puede no estar definida (si $x_1 < x_0$, la solución puede no estar definida para $x < x_1$). Podemos garantizar que la curva integral $y = \bar{y}(x)$ no sale de los límites de D cuando x varía en el segmento $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0 + H$, donde H es el menor de los números a y $\frac{b}{M}$

(fig. 1.15), puesto que el coeficiente angular de la tangente a la curva integral buscada se encuentra entre los coeficientes angulares M y $-M$ de las rectas representadas en la figura 1.15. Si estas rectas, entre las cuales se encuentra la curva integral buscada, salen de los límites de rectángulo D a través de sus lados horizontales $y=y_0 \pm b$, entonces las abscisas de los puntos de corte de estos lados serán $x_0 \pm \frac{b}{M}$. Por lo tanto, la abscisa del punto

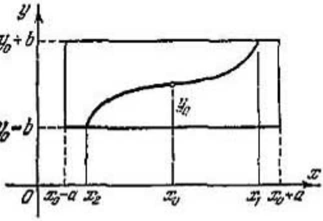

Fig. 1.14

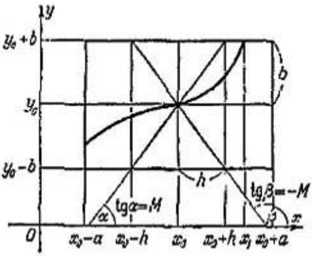

Fig. 1.15

de salida de la curva integral del rectángulo D puede ser sólo menor que o igual a $x_0+\frac{b}{M}$, y mayor que o igual a $x_0-\frac{b}{M}$.

Se puede demostrar la existencia de la solución buscada en el segmento $x_0-H \leqslant x \leqslant x_0+H$, donde $H=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$; sin embargo, es más sencillo demostrar antes la existencia de la solución en el segmento $x_0-H \leqslant x \leqslant x_0+H$, donde $H<\min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right)$. Más adelante serán indicadas condiciones, bajo las cuales la solucion puede ser continuada.

La condición de Lipschitz

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| \leqslant N|y_1-y_2|$$

puede ser sustituida por otra, un tanto más grosera, pero en cambio a menudo fácilmente comprobable: la condición de existencia de la derivada parcial acotada $f'_y(x, y)$ en la región D.

En efecto, si en el rectángulo D

$$|f'_y(x, y)| \leqslant N$$

entonces, aplicando el teorema sobre el incremento, finito, obtenemos

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|=|f'_y(x, \xi)|\cdot|y_1-y_2|,$$

donde ξ es un valor intermedio entre y_1 e y_2. Por lo tanto, el punto (x, ξ) se encuentra en D; por eso

$$|f'_y(x, \xi)| \leqslant N, \text{ y } \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|.$$

No es difícil presentar ejemplos de funciones $f(x, y)$ (por ejemplo $f(x, y) = |y|$ en un entorno de los puntos $(x, 0)$), para las cuales la condición de Lipschitz se cumple, pero la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ en ciertos puntos no existe; por lo tanto, la condición $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$ es más grosera que la condición de Lipschitz.

Demostración del teorema de existencia y unicidad. Sustituyamos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.22}$$

con condición inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.23}$$

por la ecuación integral equivalente

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{1.24}$$

En efecto, si cierta función $y = \bar{y}(x)$ al ser sustituida en la ecuación (1.22) la convierte en una identidad, y satisface a la condición (1.23), entonces integrando la identidad (1.22) y tomando en cuenta la condición (1.23), obtenemos que $y = \bar{y}(x)$ convierte también en identidad la ecuación (1.24). Si, en cambio, cierta función $y = \bar{y}(x)$ al ser sustituida en la ecuación (1.24) la convierte en una identidad, entonces es evidente que ella satisface también a la condición (1.23) y, derivando la identidad (1.24), obtenemos que $y = \bar{y}(x)$ convierte también en identidad la ecuación (1.22).

Construyamos la quebrada de Euler $y = y_n(x)$ que parte del punto (x_0, y_0) con un paso $h_n = \frac{H}{n}$ en el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$, n es un entero positivo (en forma completamente análoga se demuestra la existencia de solución en el segmento $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0$). La quebrada de Euler que pasa por el punto (x_0, y_0) no puede salir de la región D para $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$ (o bien $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0$), ya que el coeficiente angular de cada segmento de la quebrada es menor que M en valor absoluto.

La demostración subsiguiente del teorema la dividiremos en tres etapas:

1) *La sucesión $y_n = y_n(x)$ es uniformemente convergente.*

2) *La función* $\bar{y}(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)$ *es la solución de la ecuación integral* (1.24).

3) *La solución* $\bar{y}(x)$ *de la ecuación* (1.24) *es única.*

Demostración de 1). Por definición de la quebrada de Euler

$$y_n'(x)=f(x_k,\ y_k) \text{ para } x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

(en el punto angular x_k se toma la derivada derecha), o

$$y_n'(x)=f(x,\ y_n(x))+[f(x_k,\ y_k)-f(x,\ y_n(x))]; \tag{1.25}$$

denotemos

$$f(x_k,\ y_k)-f(x,\ y_n(x))=\eta_n(x).$$

En virtud de la continuidad uniforme de la función $f(x,\ y)$ en D, obtenemos

$$|\eta_n(x)|=|f(x_k,\ y_k)-f(x,\ y_n(x))|\leqslant\varepsilon_n, \tag{1.26}$$

si $n>N(\varepsilon_n)$, donde $\varepsilon_n\to 0$ cuando $n\to\infty$, puesto que $|x-x_k|\leqslant h_n$, y $|y_k-y_n(x)|<Mh_n$, donde $h_n=\frac{H}{n}\to 0$ para $n\to\infty$.

Integrando (1.25) con respecto a x entre los límites desde x_0 hasta x, y teniendo en cuenta que $y_n(x_0)=y_0$, obtenemos

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ \ y_n(t))\,dt+\int_{x_0}^{x}\eta_n(t)\,dt. \tag{1.27}$$

Aquí n puede tomar cualquier valor entero positivo; por lo tanto, para un entero $m>0$,

$$y_{n+m}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\ y_{n+m}(t))\,dt+\int_{x_0}^{x}\eta_{n+m}(t)\,dt. \tag{1.28}$$

Restando (1.27) miembro a miembro de (1.28) y tomando el módulo de la diferencia, obtenemos

$$|y_{n+m}(x)-y_n(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,\ y_{n+m}(t))-f(t,\ y_n(t))]\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0}^{x}\eta_{n+m}(t)\,dt-\int_{x_0}^{x}\eta_n(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(t,\ y_{n+m}(t))-f(t,\ y_n(t))|\,dt+$$

$$+\int_{x_0}^{x}|\eta_{n+m}(t)|\,dt+\int_{x_0}^{x}|\eta_n(t)|\,dt,$$

si $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$ ó, tomando en cuenta (1.26) y la condición de Lipschitz:

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leqslant N \int_{x_0}^{x} |y_{n+m}(t) - y_n(t)|\, dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H.$$

Por lo tanto,

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant N \max \int_{x_0}^{x} |y_{n+m}(t) - y_n(t)|\, dt + (\varepsilon_{n+m} + \varepsilon_n) \cdot H,$$

de donde

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{(\varepsilon_{n+m} - \varepsilon_n) H}{1 - NH} < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ y para un número suficientemente grande $n > N_1(\varepsilon)$.

De este modo,

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_{n+m}(x) - y_n(x)| < \varepsilon$$

para $n > N_1(\varepsilon)$, es decir, la sucesión de funciones continuas $y_n(x)$ es uniformemente convergente en $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$:

$$y_n(x) \rightrightarrows \bar{y}(x),$$

donde $\bar{y}(x)$ es una función continua.

D e m o s t r a c i ó n de 2). Pasemos al límite en la ecuación (1.27) cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} \eta_n(x)\, dx,$$

o bien

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx + \lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} \eta_n(x)\, dx. \qquad (1.29)$$

En virtud de la convergencia uniforme de $y_n(x)$ a $\bar{y}(x)$ y de la continuidad uniforme de la función $f(x, y)$ en D, la sucesión $f(x, y_n(x)) \rightrightarrows f(x, \bar{y}(x))$.

En efecto,

$$|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$, si $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$; pero $|\bar{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon)$ si $n > N_1(\delta(\varepsilon))$ para todas las x del segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$.

De este modo, $|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon$ para $n > N_1(\delta(\varepsilon))$, donde N_1 no depende de x.

En base a la convergencia uniforme de la sucesión $f(x, y_n(x))$ a $f(x, \bar{y}(x))$, en (1.29) es posible el paso al límite dentro del signo de integral. Tomando en cuenta, además que $|\eta_n(x)| < \varepsilon_n$, donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, obtenemos en definitiva en (1.29):

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \bar{y}(x))\, dx.$$

De esta manera, $\bar{y}(x)$ satisface a la ecuación (1.24).

Demostración de 3). Supongamos la existencia de dos soluciones distintas $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación (1.24). Entonces

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0.$$

Restando miembro a miembro de la identidad

$$y_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx$$

la identidad

$$y_2(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2(x))\, dx,$$

se obtiene

$$y_1(x) - y_2(x) \equiv \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]\, dx.$$

Por lo tanto,

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| =$$

$$= \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|\, dx \right|.$$

Aplicando la condición de Lipschitz, tendremos

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant N \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_2(x)|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| =$$

$$= NH \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

La desigualdad obtenida

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant NH \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \quad (1.30)$$

es contradictoria si $\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0$, puesto que por la hipótesis del teorema $H < \frac{1}{N}$, y de (1.30) se deduce que $NH \geqslant 1$.

La contradicción cesa sólo si

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)| = 0,$$

es decir, si $y_1(x) \equiv y_2(x)$ para $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$.

Observación 1. La existencia de la solución de la ecuación (1.22) se podría demostrar de otra manera sólo suponiendo que la función $f(x, y)$ es continua (sin la condición de Lipschitz); sin embargo, la sola continuidad de esta función no es suficiente para demostrar la unicidad de la solución.

Observación 2. La existencia y la unicidad de la solución $y = y(x)$ se han demostrado sólo en el segmento $x_0 - H \leqslant x \leqslant x_0 + H$; no obstante, tomando el punto $(x_0 + H, y(x_0 + H))$ como inicial, se puede repetir el razonamiento anterior y continuar la solución en un segmento más de longitud H_1, si, claro está, en un entorno del nuevo punto inicial se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución. Prosiguiendo este proceso, en ciertos casos se puede continuar la solución en todo el semieje $x \geqslant x_0$, o aún en todo el eje $-\infty < x < \infty$, si se continúa la solución también en el sentido negativo del eje x. Sin embargo, son posibles también otros casos, aún cuando la función $f(x, y)$ esté determinada para valores cualesquiera de x e y.

Es posible que la curva integral no pueda ser continuada debido al acercamiento a un punto donde no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución, o a que la curva integral se aproxima a una asíntota paralela al eje Oy.

Estas posibilidades se ilustran con los ejemplos siguientes:

1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y(0) = 1$. Separando variables e integrando, obtenemos

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad y = \pm\sqrt{c^2 - x^2}, \quad c = 1, \quad y = \sqrt{1 - x^2}.$$

La solución no se puede continuar fuera de los límites del intervalo $-1 < x < 1$. En los puntos frontera $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ el segundo miembro de la ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ es discontinuo. Las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución no se cumplen (fig. 1.16).

2) $\frac{dy}{dx} = y^2$, $y(1) = 1$. Separando variables e integrando, se obtiene

$$y = -\frac{1}{x - c}, \quad c = 2, \quad y = -\frac{1}{x - 2}.$$

y la curva integral puede ser continuada sólo hasta la asíntota $x=2$ $(-\infty<x<2)$ (fig. 1.17).

En la actualidad los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones no sólo de ecuaciones diferenciales, sino también de ecuaciones de otros tipos, se demuestran muy frecuentemente por el método de los puntos fijos. Uno de los teoremas más sencillos sobre puntos fijos es el principio de las transformaciones de contracción *).

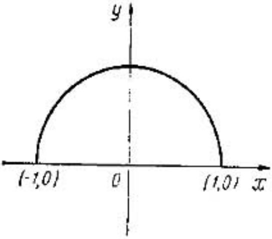

Fig. 1.16

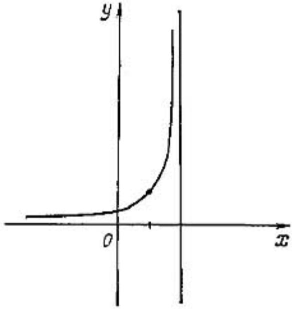

Fig. 1.17

Principio de las transformaciones de contracción. *Si en un espacio métrico* **) *completo* ***) M *está dado un operador* A, *que satisface las siguientes condiciones:*

1) *el operador* A *transforma los puntos del espacio* M *en puntos del mismo espacio: si* $y \in M$, *entonces* $A[y] \in M$;

2) *el operador* A *acerca los puntos; más exactamente,*

$$\rho(A[y],\ A[z]) \leqslant \alpha\rho(y,\ z),$$

donde y *y* z *son puntos cualesquiera del espacio* M; $\alpha<1$ *y no depende de la elección de* y *y de* z; $\rho(y,\ z)$ *es la distancia entre*

---

*) También llamado principio de Cacciopolli-Banach *(N. del Red.)*

**) El espacio M se llama *métrico*, si en éste está definida una función $\rho(y,\ z)$ de un par de puntos de dicho espacio que satisface, para puntos arbitrarios y, z y u de éste, las condiciones:

1) $\rho(y,\ z) \geqslant 0$; además $\rho(y,\ y)=0$, y $\rho(y,\ z)=0$ implica $y=z$;

2) $\rho(y,\ z)=\rho(z,\ y)$;

3) $\rho(y,\ z) \leqslant \rho(y,\ u)+\rho(u,\ z)$ (desigualdad triangular). La función ρ se llama *distancia* en el espacio M.

***) El espacio métrico M se llama *completo*, si cada sucesión fundamental de puntos del espacio M converge en éste. Recuérdese que la sucesión $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ se llama fundamental si para cada $\varepsilon>0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que para $n \geqslant N(\varepsilon)$ la distancia $\rho(y_n,\ y_{n+m})<\varepsilon$ para cualquier número entero $m>0$.

los puntos y *y* z *en el espacio* M, *entonces existe un único punto fijo* $\bar{y}$ *del espacio* M, $A[\bar{y}]=\bar{y}$. *Este punto se puede hallar por el método de las aproximaciones sucesivas, es decir,* $\bar{y}=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, *donde* $y_n=A[y_{n-1}]$ $(n=1, 2, \ldots)$; *el punto* y_0 *se escoge arbitrariamente en el espacio* M.

Demostración. Demostremos que la sucesión

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

es fundamental. Valoremos la distancia entre los términos vecinos de esta sucesión:

$$\left.\begin{array}{l}
\rho(y_2, y_1)=\rho(A[y_1], A[y_0])\leqslant\alpha\rho(y_1, y_0),\\
\rho(y_3, y_2)=\rho(A[y_2], A[y_1])\leqslant\alpha\rho(y_2, y_1)\leqslant\alpha^2\rho(y_1, y_0),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\rho(y_{n+1}, y_n)=\rho(A[y_n], A[y_{n-1}])\leqslant\\
\qquad\qquad\leqslant\alpha\rho(y_n, y_{n-1})\leqslant\alpha^n\rho(y_1, y_0),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \qquad (1.31)$$

Aplicando ahora $m-1$ veces la desigualdad triangular y utilizando las desigualdades (1.31), obtenemos

$$\rho(y_n, y_{n+m})\leqslant\rho(y_n, y_{n+1})+\rho(y_{n+1}, y_{n+2})+\ldots$$
$$\ldots+\rho(y_{n+m-1}, y_{n+m})\leqslant[\alpha^n+\alpha^{n+1}+\ldots+\alpha^{n+m-1}]\rho(y_1, y_0)=$$
$$=\frac{\alpha^n-\alpha^{n+m}}{1-\alpha}\rho(y_1, y_0)<\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(y_1, y_0)<\varepsilon$$

para un n suficientemente grande. Por lo tanto, la sucesión $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ es fundamental y, como el espacio M es completo, converge hacia un cierto elemento de ese mismo espacio: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\bar{y}$, $\bar{y}\in M$.

Demostremos ahora que $\bar{y}$ es un punto fijo. Sea $A[\bar{y}]=\bar{\bar{y}}$. Aplicando dos veces la desigualdad triangular, se obtiene

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}})\leqslant\rho(\bar{y}, y_n)+\rho(y_n, y_{n+1})+\rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}}).$$

Para cualquier $\varepsilon>0$ se puede escoger un $N(\varepsilon)$ tal que para $n\geqslant N(\varepsilon)$:

1) $\rho(\bar{y}, y_n)<\frac{\varepsilon}{3}$, puesto que $\bar{y}=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\rho(y_n, y_{n+1})<\frac{\varepsilon}{3}$, ya que la sucesión y_n es fundamental;

3) $\rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}})=\rho(A[y_n], A[\bar{y}])\leqslant\alpha\rho(y_n, \bar{y})<\frac{\varepsilon}{3}$, de donde $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}})<\varepsilon$, donde ε se puede escoger tan pequeño como se quiera.

Por lo tanto,

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) = 0 \text{ e } \bar{y} = \bar{\bar{y}}, \ A[\bar{y}] = \bar{y}.$$

Queda por demostrar que el punto fijo $\bar{y}$ es único. Si existiera otro punto fijo $\bar{z}$, entonces sería $\rho(A[\bar{y}], A[\bar{z}]) = \rho(\bar{y}, \bar{z})$, lo que contradice a la condición 2) del teorema.

Apliquemos el principio de las transformaciones de contracción a la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución $y(x)$ $(x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0)$ de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, bajo la condición de que en la región D:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$$

la función f sea continua y, por lo tanto, acotada, $|f| \leqslant M$, y satisfaga la condición de Lipschitz

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant N|y - z|.$$

El número h_0 es $h_0 \leqslant \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, y será escogido con mayor exactitud más adelante.

Consideremos el espacio métrico completo C, cuyos puntos son todas las posibles funciones continuas $y(x)$, definidas en el segmento $x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0$, y cuyas gráficas se encuentran en D. La distancia se define por la igualdad

$$\rho(y, z) = \max|y - z|,$$

donde el máximo se escoge para todas las x del segmento

$$x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0.$$

Este espacio se considera con frecuencia en diferentes problemas del análisis matemático, y recibe el nombre de *espacio de convergencia uniforme*, ya que la convergencia en el sentido de la métrica de dicho espacio es la convergencia uniforme.

Sustituyamos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con la condición inicial $y(x_0) = y_0$ por la ecuación integral equivalente

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{1.24}$$

Consideremos el operador

$$A[y] = y_0 + \int_{x_0} f(x, y(x))\, dx,$$

que pone en correspondencia a cada función continua $y(x)$, dada en el segmento $x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$ y que no sale de D, la función continua $A[y]$, definida en ese mismo segmento y cuya gráfica tampoco sale de D, puesto que $\left|\int\limits_{x_0}^{x} f(x, y)dx\right|\leqslant Mh_0\leqslant b$. El operador $A[y]$, por lo tanto, satisface a la condición 1) del principio de las transformaciones de contracción.

Con esta notación, la ecuación (1.24) se escribe en la forma $y=A[y]$; por consiguiente, para la demostración del teorema de existencia y unicidad, queda por demostrar la existencia en el espacio C de un punto fijo único $\bar{y}(x)$ del operador A, puesto que en este caso tendremos $\bar{y}=A[\bar{y}]$ y la ecuación (1.24) será satisfecha.

Para la demostración del teorema queda por comprobar si el operador A satisface o no la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción:

$$\rho(A[y],\ A[z])\leqslant\alpha\rho(y,\ z),\ \alpha<1,$$

donde

$$\rho(A[y],\ A[z])=\max\left|\int\limits_{x_0}^{x}[f(x,\ y)-f(x,\ z)]\,dx\right|.$$

Aplicando la desigualdad de Lipschitz, se obtiene

$$\rho(A[y],\ A[z])\leqslant N\max\left|\int\limits_{x_0}^{x}|y-z|\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant N\max|y-z|\max\left|\int\limits_{x_0}^{x}dx\right|=Nh_0\max|y-z|=Nh_0\rho(y,\ z).$$

Tomando h_0 de manera que $Nh_0\leqslant\alpha<1$, se logra que el operador A satisfaga la condición

$$\rho(A[y],\ A[z])\leqslant\alpha\rho(y,\ z),\ \alpha<1.$$

De este modo, según el principio de las transformaciones de contracción, existe un puntón fijo único $\bar{y}(x)$ del operador A o, lo que es lo mismo, una solución continua única de la ecuación (1.24), la cual puede ser hallada por el método de las aproximaciones sucesivas.

De manera completamente análoga se puede demostrar el teorema de existencia y unicidad de la solución $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\ y_i(x_0)=y_{i0}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\quad (1.32)$$

o bien

$$y_i=y_{i0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dx\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\quad (1.33)$$

suponiendo que en la región D, definida por las desigualdades

$$x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_{i0}-b_i\leqslant y_i\leqslant y_{i0}+b_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

los segundos miembros de las ecuaciones (1.32) satisfacen las condiciones:

1) todas las funciones $f_i(x,\ y_1,\ y_2\ \ldots,\ y_n)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ son continuas y, por lo tanto, acotadas, $|f_i|\leqslant M$;

2) todas las funciones $f_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ satisfacen la condición de Lipschitz:

$$|f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)-f_i(x,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n)|\leqslant N\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|.$$

Un punto en el espacio C será ahora un sistema de n funciones continuas $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ o sea, una función vectorial n-dimensional $Y(x)$ de coordenadas $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$, definida en el segmento $x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$, donde $h_0\leqslant\min\left(a,\ \frac{b_1}{M},\ \ldots,\ \frac{b_n}{M}\right)$ y será escogido más adelante con mayor exactitud. La distancia en el espacio C se define por la igualdad

$$\rho(Y(x),\ Z(x))=\sum_{i=1}^{n}\max|y_i-z_i|,$$

donde $z_1,\ z_2\ \ldots,\ z_n$ son las coordenadas de la función vectorial $Z(x)$.

No es difícil comprobar que con esta definición de la distancia el conjunto C de funciones vectoriales n-dimensionales $Y(x)$ se transforma en un espacio métrico completo. El operador A se define por la igualdad

$$A[Y]=\Bigg(y_{10}+\int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dx,$$

$$y_{20}+\int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dx,\ \ldots,\ y_{n0}+\int_{x_0}^{x} f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\,dx\Bigg),$$

o sea, que al actuar dicho operador sobre el punto $(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, se obtiene un punto del mismo espacio C de coordenadas iguales a los segundos miembros del sistema (1.33).

El punto $A[Y]$ pertenece al espacio C, puesto que todas sus coordenadas son funciones continuas que no salen de la región D, si las coordenadas de la función vectorial Y tampoco salen de D.

En efecto,

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,dx\right| \leqslant M\left|\int_{x_0}^{x} dx\right| \leqslant Mh_0 \leqslant b_i,$$

y, por lo tanto, $|y_i - y_{i0}| \leqslant b_i$.

Queda por combrobar el cumplimiento de la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción:

$$\rho(A[Y], A[Z]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)]\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)|\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N \sum_{i=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant N \sum_{i=1}^{n} \max |y_i - z_i| \sum_{i=1}^{n} \max \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| = Nnh_0\rho(Y, Z).$$

Por lo tanto, si escogemos $h_0 \leqslant \frac{\alpha}{nN}$, donde $0 < \alpha < 1$, o bien $Nnh_0 \leqslant \alpha < 1$, la condición 2) del principio de las transformaciones de contracción se cumple, y existe un punto fijo $\overline{Y}$ único, el cual se puede hallar por el método de las aproximaciones sucesivas. Pero la condición $\overline{Y} = \overline{y}_2[\overline{Y}]$, por definición del operador A, es equivalente a las identidades

$$\overline{y}_i \equiv y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)\,dx \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donde $\overline{y}_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ son las coordenadas de la función vectorial $\overline{Y}$, o sea que $\overline{Y}$ es la única solución del sistema (1.33).

Ejemplo 1. Hallar algunas aproximaciones sucesivas y_1, y_2, y_3 de la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \quad y(0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1.$$

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2)\,dx, \quad h_0 = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Haciendo $y_0(x)=0$, obtenemos

$$y_1=\int_0^x x^2dx=\frac{x^3}{3},\qquad y_2=\int_0^x\left(x^2+\frac{x^6}{9}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$y_3=\int_0^x\left[x^2+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}\right)^2\right]dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}\left(1+\frac{2x^4}{33}+\frac{x^8}{945}\right).$$

Ejemplo 2. ¿Bajo qué limitaciones la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad?

Para el cumplimiento de la primera condición del teorema es suficiente que en el segmento considerado de variación de x, $a_1\leqslant x\leqslant a_2$, las funciones $p(x)$ y $f(x)$ sean continuas. En este caso se cumplirá también la segunda condición del teorema de existencia y unicidad, ya que la derivada parcial respecto a y del segundo miembro de la ecuación $\frac{dy}{dx}=-p(x)y+f(x)$ es igual a $-p(x)$ y, como consecuencia de la continuidad de la función $p(x)$ en el segmento $a_1\leqslant x\leqslant a_2$, está acotada en valor absoluto (véase la pág. 44). De este modo, si $p(x)$ y $f(x)$ son continuas en el segmento $a_1\leqslant x\leqslant a_2$, entonces por cada punto (x_0, y_0), donde $a_1<x_0<a_2$ e y_0 es arbitrario, pasa una curva integral única de la ecuación lineal considerada.

Teorema 1.2 (Sobre la dependencia continua de la solución con respecto al parámetro y a los valores iniciales). *Si el segundo miembro de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y,\ \mu)\tag{1.34}$$

es continuo en μ para $\mu_0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$ y satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad, y la constante de Lipschitz N no depende de μ, entonces la solución $y(x,\mu)$ de la ecuación considerada que satisface la condición $y(x_0)=y_0$, depende en forma continua de μ.

Construyamos las quebradas de Euler $y_n=y_n(x,\ \mu)$, que son funciones continuas en μ. Repitiendo los razonamientos de las págs. 45—47, obtenemos que la sucesión $y_n(x,\ \mu)$ converge uniformemente no sólo respecto a x, sino también respecto a μ para $x_0\leqslant x\leqslant x_0+H$, $\mu_0\leqslant\mu\leqslant\mu_1$, puesto que N y H no dependen de μ, si $H<\min\left(a,\ \frac{b}{M},\ \frac{1}{N}\right)$, donde $M\geqslant|f(x,\ y,\ \mu)|$. Por consiguiente, la solución $y=\bar{y}(x,\ \mu)$ de la ecuación

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\ y,\ \mu)\,dx,\tag{1.35}$$

que es el límite de la sucesión $y_n(x, \mu)$, es continua no sólo en x, sino también en μ.

Observación. Si se aplica a la ecuación (1.35) el método de las aproximaciones sucesivas, entonces las aproximaciones $y = y_n(x, \mu)$, que son funciones continuas en x y μ, convergen uniformemente a la solución $\bar{y}(x, \mu)$ de la ecuación (1.35) (puesto que $\alpha = Nh < 1$ no depende de μ). Por lo tanto, también por este método se puede demostrar la dependencia continua de la solución con respecto a x y a μ.

Evidentemente, esta demostración no varía nada si el segundo miembro de la ecuación (1.34) es función continua de varios parámetros, suponiendo, claro está, que la constante de Lipschitz N no depende de éstos.

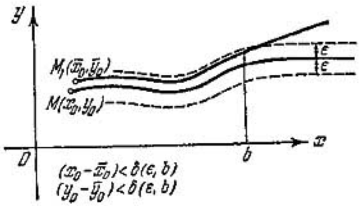

Fig. 1.18

Por este mismo método, en condiciones análogas, se podría demostrar la dependencia continua de la solución $y(x, x_0, y_0)$ de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con respecto a las condiciones iniciales x_0 e y_0: en este caso sólo habría que disminuir un tanto h_0, ya que en caso contrario las soluciones, definidas por condiciones iniciales cercanas a x_0 e y_0, podrían salir de la región D ya para valores de x que se encuentren en el intervalo $x_0 - h_0 < x < x_0 + h_0$.

Sin embargo, es más fácil reducir, por sustitución de variables, el problema de la dependencia de la solución de las condiciones iniciales al caso ya considerado más arriba de la dependencia de la solución de los parámetros contenidos en el segundo miembro de la ecuación (1.34). En efecto, haciendo $z = y(x, x_0, y_0) - y_0$, $t = x - x_0$, transformamos la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$ en $\frac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0)$, $z(0) = 0$. A esta ecuación ya se le puede aplicar el teorema de la dependencia continua de la solución respecto a los parámetros x_0 e y_0, si la función f es continua y satisface la condición de Lipschitz.

Por medio de estos mismos métodos pueden ser demostrados teoremas análogos para los sistemas de ecuaciones.

Obsérvese que la dependencia continua de la solución $y(x, x_0, y_0)$, $x_0 \leqslant x \leqslant b$ (o bien $b \leqslant x \leqslant x_0$) de las condiciones iniciales x_0 e y_0 significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon, b) > 0$ tal que de las desigualdades

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta(\varepsilon, b) \quad \text{y} \quad |y_0 - \bar{y}_0| < \delta(\varepsilon, b)$$

se deduce la desigualdad

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon \tag{1.36}$$

para $x_0 \leqslant x \leqslant b$ (fig. 1.18).

Al aumentar b, disminuye, en general, $\delta(\varepsilon, b)$, y puede tender a cero cuando $b \to \infty$. Por eso, no siempre es posible escoger un número $\delta(\varepsilon) > 0$ para el cual se satisfaga la desigualdad (1.36) para todas las $x > x_0$; es decir que no siempre las soluciones cercanas en las condiciones iniciales permanecen cercanas para valores arbitrariamente grandes del argumento.

La solución que varía poco al variar las condiciones iniciales en forma arbitraria, pero suficientemente pequeña, para valores del argumento arbitrariamente grandes, se llama estable. Para más detalles sobre las soluciones estables, véase el cap. 4.

Teorema 1.3 (sobre la dependencia analítica de la solución con respecto al parámetro, teorema de Poincaré). *La solución $x(t, \mu)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ que satisface la condición $x(t_0) = x_0$, depende analíticamente del parámetro μ en un entorno del valor $\mu = \mu_0$, si la función f en la región dada de variación de t y de x y en cierto entorno del punto μ_0, es continua en t y depende analíticamente de μ y de x.*

Una afirmación análoga tiene lugar también para el sistema de ecuaciones

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En este caso se presupone que las funciones f_i son continuas en el primer argumento y dependen analíticamente de los argumentos restantes.

No daremos una demostración detallada de este teorema, así como de otros teoremas que exigen la aplicación de la teoría de las funciones analíticas. Recomendamos al lector el artículo de A. N. Tíjonov, que contiene la demostración más sencilla del teorema sobre la dependencia analítica de la solución con respecto al parámetro.

La idea de la demostración de A. N. Tíjonov se reduce a lo siguiente: considerando que μ puede tomar también valores complejos, se demuestra la existencia del límite $\lim\limits_{\Delta\mu \to 0} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu}$, lo cual significa precisamente que la solución depende analíticamente de μ. La existencia de este límite se deduce del hecho que la razón $\frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu}$ satisface la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu} = \frac{f(t, x(t, \mu+\Delta\mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu+\Delta\mu)}{\Delta_\mu x(t, \mu)} \frac{\Delta_\mu x(t, \mu)}{\Delta\mu} + \\ + \frac{f(t, x(t, \mu), \mu+\Delta\mu) - f(t, x(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu}, \quad \left.\frac{\Delta_\mu x}{\Delta\mu}\right|_{t=t_0} = 0,$$

cuya solución es única y, al tender el incremento $\Delta\mu$ de cualquier modo a cero, tiende a la solución única de la ecuación

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad z(t_0) = 0.$$

Teorema 1.4 (sobre la derivabilidad de las soluciones). *Si en un entorno del punto (x_0, y_0) la función $f(x, y)$ tiene derivadas continuas hasta de k-ésimo orden inclusive, la solución $y(x)$ de la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.37}$$

que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ tendrá derivadas continuas hasta de $(k+1)$-ésimo orden inclusive en cierto entorno del punto (x_0, y_0).

D e m o s t r a c i ó n. Sustituyendo $y(x)$ en la ecuación (1.37), obtenemos la identidad

$$\frac{dy}{dx} \equiv f(x, y(x)). \tag{1.37$_1$}$$

Por lo tanto, la solución $y(x)$ tiene la derivada continua $f(x, y(x))$ en un entorno del punto considerado. Entonces, debido a la existencia de derivadas continuas de la función f, existirá la derivada segunda continua de la solución

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y(x)).$$

Si $k > 1$, entonces, en virtud de la existencia de las derivadas continuas de segundo orden de la función f, se puede, derivando nuevamente la identidad (1.37$_1$), obtener la existencia y la continuidad de la tercera derivada de la solución

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right).$$

Repitiendo este procedimiendo k veces, se demuestra el teorema.

Consideremos ahora los puntos (x_0, y_0) en cierto entorno de los cuales no existe la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ que satisface la condición $y(x_0)=y_0$ o existe pero no es única. Estos puntos se llaman *puntos singulares*.

La curva formada enteramente por puntos singulares se llama *singular*. Si la gráfica de cierta solución está formada enteramente por puntos singulares, dicha *solución* se llama *singular*.

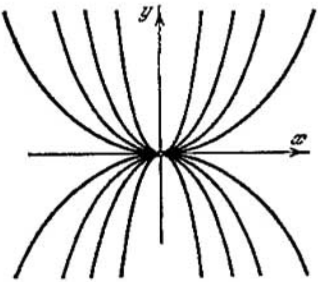

Fig. 1.19

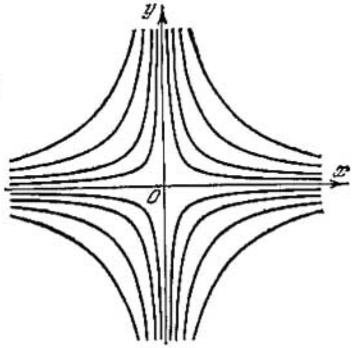

Fig. 1.20

Para hallar los puntos singulares o las curvas singulares, hay que encontrar ante todo el conjunto de puntos en los cuales no se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución, puesto que sólo entre dichos puntos pueden haber singulares. Naturalmente, no cada punto en el cual no se cumplen las condiciones de dicho teorema es necesariamente singular, ya que las condiciones del mismo son suficientes para la existencia y unicidad de la solución, pero no necesarias.

La primera condición del teorema indicado (véase la pág. 43) no se cumple en los puntos de discontinuidad de la función $f(x, y)$. Además, si al acercarse por cualquier camino a cierto punto aislado de discontinuidad (x_0, y_0), el módulo de la función $f(x, y)$ crece indefinidamente, entonces en los problemas en que las variables x e y son equivalentes, la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, como hemos convenido más arriba, debe ser sustituida por $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x, y)}$, cuyo segundo miembro ya es continuo en el punto (x_0, y_0) si consideramos que $\frac{1}{f(x_0, y_0)}=0$.

Por consiguiente, en los problemas en que las variables x e y son equivalentes, la primera condición del teorema de existencia y unicidad no se cumple en los puntos en que las funciones $f(x, y)$ y $\frac{1}{f(x, y)}$ son discontinuas.

Con particular frecuencia nos encontramos con ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{1.38}$$

donde las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas. En este caso, las funciones $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ y $\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$ serán simultáneamente discontinuas sólo en los puntos (x_0, y_0) en los cuales $M(x_0, y_0)=$ $=N(x_0, y_0)=0$ y no existan los límites

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

y

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Veamos algunos puntos singulares típicos de la ecuación (1.38).

Ejemplo 3.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{2y}$ son discontinuos en el punto $x=0$, $y=0$. Integrando, obtenemos $y=cx^2$, que es una familia de parábolas (fig. 1.19), y $x=0$. En el origen de coordenadas tenemos un punto singular, llamado *nudo*.

Ejemplo 4.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

El segundo miembro de la ecuación dada, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}$ son discontinuos en el punto $x=0$, $y=0$. Integrando, obtenemos $y=\frac{c}{x}$, que es una familia de hipérbolas (fig. 1.20), y la recta $x=0$. En el origen de coordenadas se tiene un punto singular, llamado *montura*.

Ejemplo 5.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

El segundo miembro de esta ecuación, y el de la ecuación $\frac{dx}{dy}=\frac{x-y}{x+y}$ son discontinuos en el punto $x=0$, $y=0$. Integrando la ecuación homogénea considerada (compárese con el ejemplo 3 de la pág. 39), obtenemos

$$\sqrt{x^2+y^2}=ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}},$$

o, en coordenadas polares, $\rho=ce^{\varphi}$, que son espirales logarítmicas (fig. 1.21). Un punto singular de este tipo se llama *foco*.

Ejemplo 6.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

El segundo miembro de esta ecuación y el de la ecuación $\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$ son discontinuos en el punto $x=0$, $y=0$. Integrando, obtenemos $x^2+y^2=c^2$, que

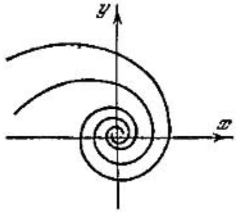

Fig. 1.21

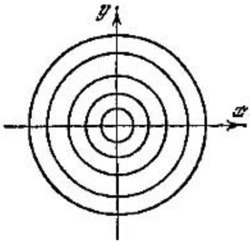

Fig. 1.22

es una familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas (fig. 1.22). Este tipo de punto singular, o sea, un punto singular cuyo entorno está cubierto por una familia de curvas integrales cerradas, se llama *centro*. En este ejemplo no existe ninguna solución que satisfaga la condición $y(0)=0$.

El problema de los puntos singulares y de su clasificación será enfocado desde un punto de vista un tanto diferente en el capítulo 4.

La segunda condición del teorema 1.1 de existencia y unicidad de la solución: la condición de Lipschitz, o la condición más grosera de la existencia de la derivada parcial acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$, con mayor frecuencia no se cumple en los puntos en que $\frac{\partial f}{\partial y}$ crece indefinidamente al aproximarse a ellos, o sea, en los puntos donde $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$.

La ecuación $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$, en general, define cierta curva, en cuyos puntos puede no tener lugar la unicidad. Si en los puntos de esta curva la unicidad se viola, entonces la curva será singular. Si, además, esta curva es integral, obtendremos una curva integral singular.

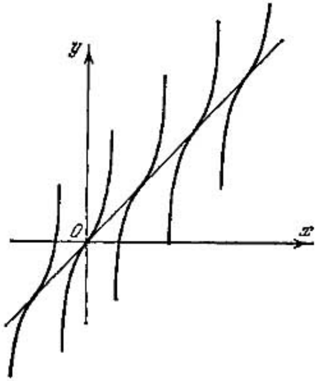

Fig. 1.23

Es posible que la curva $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$ tenga varias ramas; entonces para cada una de ellas hay que resolver el problema de si esta rama es una curva singular, o bien una curva integral, o no.

Ejemplo 7. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx}=y^2+x^2$?

Las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen en un entorno de cualquier punto; por lo tanto, no hay solución singular.

Ejemplo 8. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{(y-x)^2}+5$?

El segundo miembro es continuo, pero la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$ crece indefinidamente al aproximarse a la recta $y=x$; por lo tanto, en dicha recta puede no cumplirse la unicidad. Sin embargo, la función $y=x$ no satisface la ecuación considerada y, por consiguiente, no hay solución singular.

Ejemplo 9. ¿Tiene solución singular la ecuación $\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{(y-x)^2}+1$?

Al igual que en el ejemplo anterior, la ecuación $\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}=0$ tiene la forma $y=x$, pero esta vez la función $y=x$ satisface la ecuación dada. Queda por aclarar si se viola o no la unicidad en los puntos de esta recta. Mediante la sustitución de variables $z=y-x$, se reduce la ecuación inicial a una ecuación de variables separables, luego de lo cual hallamos sin dificultad la solución: $y-x=\frac{(x-c)^3}{27}$. Las curvas de esta familia pasan por los puntos de la gráfica de la solución $y=x$ (fig. 1.23). Por consiguiente, en cada punto de la recta $y=x$ la unicidad se viola, y la función $y=x$ es una solución singular.

Este ejemplo demuestra que la sola continuidad del segundo miembro de la ecuación

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \quad y(x_0)=y_0,$$

no es suficiente para la unicidad de la solución del problema inicial fundamental; sin embargo, se puede demostrar que la existencia de la solución con ello ya está garantizada.

§ 7. METODOS APROXIMADOS DE INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

En el parágrafo anterior ya hemos visto dos métodos aproximados de integración de ecuaciones diferenciales: el método de Euler y el método de las aproximaciones sucesivas. Sin embargo, ambos métodos tienen insuficiencias sustanciales, por lo que son relativamente poco utilizados en la práctica del cálculo aproximado.

Las virtudes de los métodos aproximados se valoran por la exactitud de los resultados que éstos dan y por la simplicidad de los cálculos. Las insuficiencias del método de las aproximaciones sucesivas son la relativamente lenta convergencia a la solución de las aproximaciones y la complejidad de los cálculos. La insuficiencia del método de Euler es la poca exactitud, para elevar la cual hay que tomar un paso h muy pequeño. Esto conduce a cálculos muy largos.

A propósito, un pequeño perfeccionamiento del *método de Euler*, el llamado *emparejamiento* (o iteración), conduce ya a un esquema de cálculo bastante cómodo. Al aplicar el método de Euler con emparejamiento, se divide el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant b$, en el que hay que calcular la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ determinada por la condición $y(x_0)=y_0$, en partes iguales de longitud $h=\frac{b-x_0}{n}$. Denotando $x_0+kh=x_k$, $y(x_0+kh)=y_k$, $y'(x_0+kh)=y'_k$, se calcula y_{k+1}, si y_k ya fue hallado, al principio por la fórmula de Euler:

$$y_{k+1}=y_k+hy'_k, \text{ o bien } \Delta y_k=y_{k+1}-y_k=hy'_k, \qquad (1.39)$$

es decir, en el segmento $x_0+kh \leqslant x \leqslant x_0+(k+1)h$ se sustituye la curva integral que pasa por el punto (x_k, y_k) por un segmento de su tangente en ese mismo punto (véase la fig. 1.13, pág. 42). Después se precisa el valor calculado y_{k+1}, para lo cual se determina la derivada $y'_{k+1}=f(x_{k+1}, y_{k+1})$ y se aplica nuevamente la fórmula de Euler (1.39), pero tomando en lugar de y'_k la media aritmética de los valores calculados de las derivadas en los puntos frontera $\frac{y'_k+y'_{k+1}}{2}$, es decir, se considera

$$\bar{y}_{k+1}=y_k+h\frac{y'_k+y'_{k+1}}{2}. \qquad (1.40)$$

El valor nuevamente calculado $\bar{y}_{k+1}$ nos permite calcular un nuevo valor de la derivada: $\bar{y}'_{k+1}=f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$, después de lo cual se vuelve a calcular la media aritmética de las derivadas $\frac{y'_k+\bar{y}'_{k+1}}{2}$, y se aplica de nuevo la fórmula (1.40)

$$\bar{\bar{y}}_{k+1}=y_k+h\frac{y'_k+\bar{y}'_{k+1}}{2}.$$

Este proceso se continúa hasta que coincidan, en los límites de la exactitud dada, los resultados de dos cálculos sucesivos de los valores de y_{k+1}. Luego, por el mismo método, se calcula y_{k+2} etc.

El método de Euler con emparejamiento da en cada paso un error de orden h^3 y con frecuencia se aplica en la práctica del cálculo. Sin embargo, con mucho mayor frecuencia se utilizan métodos más exactos (como los de Störmer, Runge, Milne y otros), basados en la sustitución de la solución buscada por varios miembros de su desarrollo de Taylor

$$y_{k+1}\approx y_k+hy'_k+\frac{h^2}{2!}y''_k+\ldots+\frac{h^n}{n!}y_k^{(n)}, \qquad (1.41)$$

es decir, en la sustitución de la curva integral buscada por una parábola de n-ésimo grado, que tenga un contacto de orden n con la curva integral en el punto $x=x_k$, $y=y_k$.

La aplicación directa de la fórmula de Taylor (1.41) en cada paso conduce a cálculos complejos y no de un mismo tipo, por lo que ésta se aplica comúnmente sólo para calcular algunos valores cercanos a $x=x_0$, necesarios para la aplicación de esquemas de cálculo más cómodos. Entre éstos se debe mencionar ante todo el *método de Störmer*, en el cual el cálculo se realiza mediante una de las siguientes fórmulas, según el grado de la parábola de aproximación:

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}, \qquad (1.42)$$

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}, \qquad (1.43)$$

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \tag{1.44}$$

$$y_{k+1}=y_k+q_k+\frac{1}{2}\Delta q_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}+\frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}+\frac{251}{720}\Delta^4 q_{k-4}, \tag{1.45}$$

. . . .

donde

$$q_k=y'_k h,\ \Delta q_{k-1}=q_k-q_{k-1},\ \Delta^2 q_{k-2}=\Delta q_{k-1}-\Delta q_{k-2}$$
$$\Delta^3 q_{k-3}=\Delta^2 q_{k-2}-\Delta^2 q_{k-3},\ \Delta^4 q_{k-4}=\Delta^3 q_{k-3}-\Delta^3 q_{k-4},$$

. . . .

Las fórmulas de Störmer pueden ser obtenidas mediante la integración, desde x_k hasta x_{k+1}, de la indentidad $y'\equiv f(x, y(x))$, en la cual $y(x)$ es la solución buscada:

$$y_{k+1}\equiv y_k+\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx,$$

y aplicando la fórmula de cuadratura, conocida del curso de análisis:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)\,dx\approx h\left[\varphi_k+\frac{1}{2}\Delta\varphi_{k-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\varphi_{k-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{8}\Delta^3\varphi_{k-3}+\frac{251}{270}\Delta^4\varphi_{k-4}+\ldots\right]. \tag{1.46}$$

Recordemos que esta fórmula de cuadratura se obtiene mediante la sustitución de la función subintegral $\varphi(x)$ por un polinomio de aproximación según la fórmula de interpolación de Newton y el cálculo de las integrales de cada sumando.

La apreciación del resto de la fórmula de cuadratura (1.46) muestra que el error en la fórmula (1.42) en un paso es de orden h^3; en la fórmula (1.43), de orden h^4; en la (1.44), de orden h^5; en la (1.45), de orden h^6. Si se toma en cuenta que para varios pasos los errores se pueden sumar, entonces para la apreciación del error en n pasos hay que multiplicar las apreciaciones obtenidas para un paso por $n=\frac{b-x_0}{h}$, lo cual puede conducir a la variación del orden del error mencionado más arriba.

Observación. Se puede demostrar, por desarrollo directo según la fórmula de Taylor en un entorno del punto $x=x_k$, que el segundo miembro de la fórmula de Störmer (1.42) coincide con los tres primeros términos del desarrollo de y_{k+1} según la fórmula de Taylor (1.41), con exactitud de hasta los términos que contienen a h en potencias mayores que 2:

$$y_k+hy'_k+\frac{h^2}{2!}y''_k; \tag{1.47}$$

el segundo miembro de la fórmula siguiente de Störmer (1.43), con exactitud de hasta los términos que contienen a h en potencias mayores que 3, coincide con

$$y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k.$$

etc. Para la fórmula (1.42), por ejemplo, obtenemos:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h\Delta y'_{k-1} = y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h (y'_k - y'_{k-1}), \qquad (1.48)$$

o, desarrollando

$$y'_{k-1} = y'(x_{k-1})$$

por la fórmula de Taylor

$$y'(x_{k-1}) = y'(x_k) - hy''(x_k) + \frac{1}{2} h^2 y'''(x_k) + \ldots$$

y sustituyendo en (1.48), obtenemos:

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h (y'_k - y'_{k-1}) = y_k + hy'_k + \frac{1}{2} h^2 y''_k - \frac{1}{4} h^3 y'''_k + \ldots$$

por lo tanto, los tres primeros términos coinciden con los tres términos del desarrollo según la fórmula de Taylor (1. 47).

Para comenzar el cálculo por las fórmulas de Störmer es necesario conocer los valores de la función buscada no en uno, sino en varios puntos (al aplicar la fórmula (1.42), en dos puntos: x_0 y x_0+h; al aplicar (1.43), en tres: x_0, x_0+h y x_0+2h, etc.). Estos primeros valores pueden ser calculados por el método de Euler con paso disminuido, o aplicando la fórmula de Taylor (1.41), o por el *método de Runge* expuesto brevemente más abajo.

Tomemos, por ejemplo, la fórmula (1.44):

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3},$$

y supongamos que, aparte del valor inicial dado y_0, ya hemos hallado y_1, y_2 e y_3. Entonces se pueden calcular:

$$q_0 = f(x_0, y_0) h, \quad q_1 = f(x_1, y_1) h,$$
$$q_2 = f(x_2, y_2) h, \quad q_3 = f(x_3, y_3) h,$$

y, por lo tanto, también

$$\Delta q_0 = q_1 - q_0, \quad \Delta q_1 = q_2 - q_1, \quad \Delta q_2 = q_3 - q_2,$$
$$\Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0, \ \Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1, \ \Delta^3 q_0 = \Delta^2 q_1 - \Delta^2 q_0.$$

Ahora, mediante la fórmula (1.44), calculamos el valor y_4 y, conociendo éste, obtenemos q_4, Δq_3, $\Delta^2 q_2$ y $\Delta^3 q_1$. Luego, por medio de la misma fórmula (1.44), calculamos y_5, etc.

Los resultados del cálculo se anotan en la tabla siguiente, que se va llenando gradualmente:

x	y	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	
x_2	y_2	q_2	Δq_2		
x_3	y_3	q_3			
x_4					
x_5					
x_6					

Generalmente se exige calcular con una exactitud dada el valor de la solución buscada de la ecuación diferencial en cierto punto $x=b$. Entonces surge de inmediato la pregunta: ¿cuál de las fórmulas de Störmer convendría utilizar y qué paso h garantiza la exactitud de cálculo exigida, sin ser demasiado pequeño para que no conduzca a un exceso de operaciones? Los órdenes de los errores para cada paso, indicados más arriba, dan cierta idea sobre la elección de la fórmula con la que conviene realizar los cálculos, y sobre la elección del paso. Hay que tener en cuenta, claro está, que tras unos cuantos pasos los errores pueden sumarse. Si el paso h fue escogido correctamente, todas las diferencias en la tabla deben variar uniformemente, y las últimas diferencias en la fórmula (1.44) deben influir sólo en las cifras de reserva. Un cambio brusco de cierta diferencia demuestra que para el paso h escogido pueden no considerarse algunas peculiaridades de la variación de la función en el segmento considerado, lo cual puede traer aparejado errores considerables en el cálculo de y_{k+1}.

Sin embargo, todos estos razonamientos no son del todo seguros, y valorizaciones más exactas del error son muy complejas e incómodas. Por eso a menudo se aplica el siguiente método práctico y bastante efectivo: se escoge un paso h, en base a los razonamientos inexactos expuestos más arriba; se realiza el cálculo mediante una de las fórmulas de Störmer, con pasos h y $\frac{h}{2}$, y se comparan los resultados en los puntos comunes. Si dichos resultados coinciden en los límites de la exactitud dada, entonces se considera que el paso h asegura la exactitud de cálculo dada. Si, en cambio, los resultados no coinciden en los límites de la exactitud dada, entonces se disminuye el paso a la mitad, se realizan los cálculos con los pasos $\frac{h}{2}$ y $\frac{h}{4}$, y se comparan nuevamente los resultados, etc.

Es conveniente realizar en forma paralela los cálculos con pasos h y $\frac{h}{2}$, para notar lo antes posible la no coincidencia de los resultados, y no efectuar un trabajo innecesario. Este método de doble computación tiene además la cualidad de que al aplicarlo se excluyen casi por completo los errores en los cálculos, puesto que éstos, por regla general, son descubiertos al comparar los resultados de los cálculos con pasos h y $\frac{h}{2}$.

Para hallar varios valores iniciales y_i, necesarios para el comienzo de los cálculos por el método de Störmer, se puede recomendar, aparte de los métodos señalados más arriba (método de Euler con paso disminuido, con iteraciones o sin ellas, o método de desarrollo según la fórmula de Taylor), el método de Runge.

Según este método, para hallar y_{k+1} hay que calcular cuatro números:

$$\begin{gathered} m_1 = f(x_k,\ y_k),\quad m_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{m_1 h}{2}\right), \\ m_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{m_2 h}{2}\right),\quad m_4 = f(x_k + h,\ y_k + m_3 h), \end{gathered} \tag{1.49}$$

y entonces

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \tag{1.50}$$

El método de Runge se aplica generalmente sólo para el cálculo de varios valores iniciales $y_1, y_2, \ldots$, necesarios para comenzar los cálculos por el método de Störmer; sin embargo, por este método se pueden calcular también los demás valores. El método de Runge, al igual que el de Störmer, se fundamenta en la aproximación de la curva integral buscada por una parábola osculatriz.

Si se compara el segundo miembro de la fórmula de Runge (1.50) con el desarrollo por la fórmula de Taylor

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2!} y''_k h^2 + \frac{1}{3!} y'''_k h^3 + \frac{1}{4!} y_k^{\mathrm{IV}} h^4 + \ldots,$$

resulta que los términos con potencias menores de cinco coinciden. Por eso, al calcular varios valores iniciales por el método de Runge, con paso ulterior al cálculo por medio del método de Störmer según las fórmulas (1.42), (1.43) o (1.44), se puede realizar el cálculo con el mismo paso h. Si, en cambio, a continuación se aplica la fórmula de Störmer (1.45), entonces el comienzo del cálculo por el método de Runge debe efectuarse con paso disminuido, puesto que para un mismo paso la fórmula (1.50) no garantiza la misma exactitud de los cálculos que la (1.45). A propósito, con frecuencia aún al aplicar la fórmula de Störmer (1.43) y la (1.44), el comienzo de los cálculos se realiza de todos modos mediante la fórmula de Runge con paso disminuido, ya que incluso un pequeño error en el cálculo de los valores iniciales para la fórmula de Störmer puede disminuir bruscamente la exactitud de los cálculos ulteriores *).

Las máquinas calculadoras modernas de acción discreta permiten realizar los cálculos indicados arriba por los métodos de Störmer o de Runge con excepcional rapidez (varias decenas y hasta centenas de miles de operaciones por segundo). Además, el propio proceso de programación puede ser considerablemente simplificado por medio de la aplicación de programas standard, preparados para los métodos de Störmer y de Runge. En este caso, para la integración aproximada de la ecuación diferencial $y'=f(x, y)$, $y(x_0)=y_0$, hay que confeccionar sólo el subprograma para el cálculo de los valores $y'_k=f(x_k, y_k)$, e incluirlo en el programa standard.

Ejemplo.

$$y'=x^2+y^2; \quad y(0)=-1.$$

Hallar el valor $y(0{,}5)$ con aproximación de $0{,}01$.

Aplicando el desarrollo según la fórmula de Taylor

$$y(x)=y(0)+y'(0)\,x+\frac{y''(0)\,x^2}{2!}+\frac{y'''(0)\,x^3}{3!}+\ldots,$$

se calcula el valor de $y(x)$ en los puntos $x_1=0{,}1$ y $x_2=0{,}2$:

$$y(0{,}1)=-0{,}9088 \quad \text{e} \quad y(0{,}2)=-0{,}8309$$

(o bien, en lugar de $y(0{,}2)$, se calcula $y(-0{,}1)$, lo cual es aún más preferible, ya que el punto $x_1=-0{,}1$ se encuentra más cerca del punto inicial $x_0=0$ que el punto $x_2=0{,}2$). Los valores subsiguientes se calculan por medio de la fórmula de Störmer (1.43) con paso $h=0{,}1$, y los resultados del cálculo se disponen en una tabla (sin las diferencias $\Delta^3 q$). Después de esto, o en forma paralela, se realiza el cálculo con paso $\frac{h}{2}=0{,}05$. Como resultado, se obtiene:

$$y(0{,}5)\approx -0{,}63.$$

---

*) Para una exposición más detallada de los métodos aproximados de integración de las ecuaciones diferenciales, consúltese los libros de A. N. Krilov, de I. S. Berezin y N. P. Zhidkov (véase la bibliografía recomendada).

§ 8. TIPOS SIMPLES DE ECUACIONES NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA DERIVADA

La ecuación diferencial de primer orden no resuelta con respecto a la derivada, tiene la forma

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1.51)$$

Si esta ecuación puede ser resuelta con respecto a y', se obtienen una o varias ecuaciones

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Integrando estas ecuaciones, ya resueltas con respecto a la derivada, se hallan las soluciones de la ecuación inicial (1.51).

Integremos, por ejemplo, la ecuación

$$(y')^2 - (x+y)\, y' + xy = 0. \qquad (1.52)$$

Resolviendo esta ecuación, que es cuadrática con respecto a y', tendremos: $y' = x$ e $y' = y$. Integrando cada ecuación obtenida, hallamos:

$$y = \frac{x^2}{2} + c \qquad (1.53)$$

e

$$y = ce^x. \qquad (1.54)$$

(fig. 1.24). Ambas familias de soluciones satisfacen la ecuación inicial.

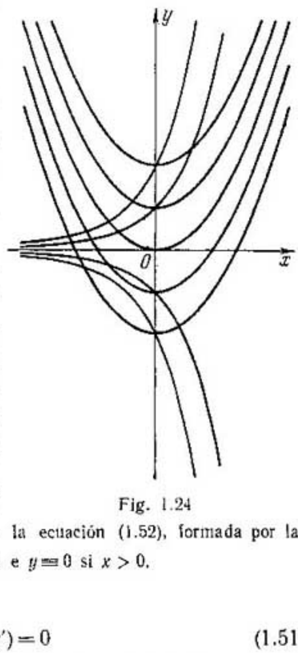

Fig. 1.24

Las curvas formadas por un arco de curva integral de la familia (1.53) y un arco de curva integral de la familia (1.54), si en el punto común poseen una tangente común, serán también curvas integrales lisas de la ecuación (1.52). En la fig. 1.25 está representada curva integral de la ecuación (1.52), formada por las gráficas de las soluciones $y = \frac{x^2}{2} + c$ para $c = \frac{1}{2}$, $-\infty < x \leqslant 1$, e $y = ce^x$, para $c = e^{-1}$, $1 \leqslant x < \infty$; en la fig. 126 se muestra la curva integral de la ecuación (1.52), formada por las gráficas de las soluciones $y = \frac{x^2}{2}$, si $x \leqslant 0$, e $y \equiv 0$ si $x > 0$.

De esta manera, la ecuación

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1.51)$$

puede ser integrada resolviendo con respecto a y' e integrando las ecuaciones obtenidas $y' = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, ya resueltas con respecto a la derivada.

Sin embargo, raramente la ecuación (1.51) se resuelve de modo sencillo con respecto a y', y con menor frecuencia aún las ecuaciones $y' = f_i(x, y)$, obtenidas después de la resolución con respecto a y' se llegan a integrar fácilmente. Por eso, a menudo hay que integrar ecuaciones del tipo (1.51) por otros métodos. Consideremos los siguientes casos.

1) La ecuación (1.51) tiene la forma

$$F(y') = 0, \tag{1.55}$$

y además existe por lo menos una raíz real $y' = k_i$ de esta ecuación.

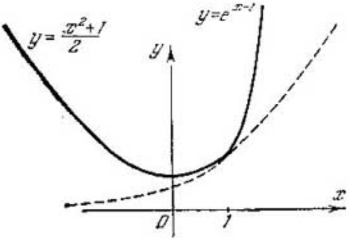

Fig. 1.25

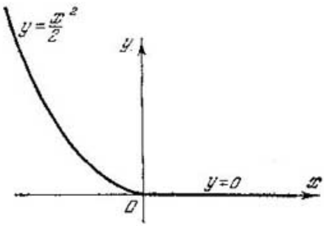

Fig. 1.26

Como la ecuación (1.55) no contiene a x ni a y, k_i es constante. Por lo tanto, integrando la ecuación $y' = k_i$, obtenemos $y = k_i x + c$, o bien $k_i = \frac{y-c}{x}$. Pero k_i es raíz de la ecuación (1.55); por lo tanto, $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ es integral de la ecuación considerada.

Ejemplo 1.

$$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0.$$

La integral de la ecuación es

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - \left(\frac{y-c}{x}\right)^5 + \frac{y-c}{x} + 3 = 0.$$

2) La ecuación (1.51) tiene la forma

$$F(x,\ y') = 0. \tag{1.56}$$

Si esta ecuación es difícil de resolver con respecto a y', entonces es conveniente introducir un parámetro t y sustituir la ecuación (1.56) por dos ecuaciones: $x = \varphi(t)$ e $y' = \psi(t)$. Ya que $dy = y'dx$, en este caso $dy = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$, de donde $y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c$ y, por consiguiente, las curvas integrales de la ecuación (1.56) se determinan en forma paramétrica mediante las siguientes ecuaciones:

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt+c.$$

Si la ecuación (1.56) es fácilmente resoluble con respecto a x, $x=\varphi(y')$, casi siempre resulta cómodo introducir $y'=t$ en calidad de parámetro. Entonces

$$x=\varphi(t),\ dy=y'dx=t\varphi'(t)\,dt,\ y=\int t\varphi'(t)\,dt+c.$$

Ejemplo 2.

$$x=(y')^3-y'-1.$$

Haciendo $y'=t$, resulta

$$x=t^3-t-1, \tag{1.57}$$
$$dy=y'dx=t(3t^2-1)\,dt,$$
$$y=\frac{3t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+c_1. \tag{1.58}$$

Las ecuaciones (1.57) y (1.58) determinan en forma paramétrica la familia de curvas integrales buscadas.

Ejemplo 3.

$$x\sqrt{1+y'^2}=y'.$$

Hacemos $y'=\operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$; entonces

$$x=\operatorname{sen} t, \tag{1.59}$$
$$dy=y'\,dx=\operatorname{tg} t\cdot\cos t\,dt=\operatorname{sen} t\,dt,$$
$$y=-\cos t+c_1 \tag{1.60}$$

o, eliminando t de las ecuaciones (1.59) y (1.60), se obtiene $x^2+(y-c_1)^2=1$, que es una familia de circunferencias.

3) La ecuación (1.51) tiene la forma

$$F(y,\ y')=0. \tag{1.61}$$

Si es difícil resolver esta ecuación con respecto a y', entonces, como en el caso anterior, es conveniente introducir un parámetro t y sustituir (1.61) por dos ecuaciones, $y=\varphi(t)$ e $y'=\psi(t)$. Puesto que $dy=y'dx$, entonces $dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$, de donde $x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c$. Por lo tanto, las curvas integrales buscadas se determinan en forma paramétrica por las ecuaciones

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c \text{ e } y=\varphi(t).$$

En particular, si la ecuación (1.61) se resuelve fácilmente con respecto a y, comúnmente resulta cómodo tomar a y' en calidad de parámetro.

Efectivamente, si $y=\varphi(y')$, haciendo $y'=t$, obtenemos $y=\varphi(t)$, $dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}$,

$$x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{t}+c.$$

Ejemplo 4.

$$y=(y')^5+(y')^3+y'+5.$$

Haciendo $y'=t$, resulta

$$y=t^5+t^3+t+5, \tag{1.62}$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{(5t^4+3t^2+1)\,dt}{t}=\left(5t^3+3t+\frac{1}{t}\right)dt,$$

$$x=\frac{5t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+\ln|t|+c. \tag{1.63}$$

Las ecuaciones (1.62) y (1.63) son ecuaciones paramétricas de la familia de curvas integrales.

Ejemplo 5.

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=1.$$

Haciendo $y'=\operatorname{sh} t$, resulta

$$y=\operatorname{ch} t, \tag{1.64}$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t}=dt,$$

$$x=t+c, \tag{1.65}$$

o bien, eliminando el parámetro t de (1.64) y de (1.65), obtenemos $y=\operatorname{ch}(x-c)$.

Consideremos ahora el caso general: el primer miembro de la ecuación

$$F(x,\ y,\ y')=0 \tag{1.51}$$

depende de los tres argumentos x, y e y'. Sustituyamos la ecuación (1.51) por su representación paramétrica:

$$x=\varphi(u,\ v),\ y=\psi(u,\ v),\ y'=\chi(u,\ v).$$

Utilizando la dependencia $dy=y'\,dx$, tendremos

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv=\chi(u,\ v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right],$$

de donde, resolviendo con respecto a la derivada $\frac{dv}{du}$, se obtiene

$$\frac{dv}{du}=\frac{\chi(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v}-\chi(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}}. \tag{1.66}$$

Como resultado, obtuvimos una ecuación de primer grado, ya *resuelta con respecto a la derivada*, con lo que el problema se reduce al considerado en los parágrafos anteriores; sin embargo, claro está, la ecuación obtenida (1.66) rara vez se integra en cuadraturas.

Si la ecuación

$$F(x, y, y') = 0$$

se resuelve fácilmente con respecto a y, frecuentemente es cómodo tomar a x y a y' en calidad de parámetros u y v. Efectivamente. si la ecuación (1.51) se reduce a la forma

$$y = f(x, y') \tag{1.67}$$

entonces, considerando a x y a $y' = p$ como parámetros, se obtiene

$$y = f(x, p), \; dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}. \tag{1.68}$$

Integrando la ecuación (1.68) (la cual, claro está, no siempre se integra en cuadraturas), obtenemos $\Phi(x, p, c) = 0$. El conjunto de ecuaciones $\Phi(x, p, c) = 0$ e $y = f(x, p)$, donde p es un parámetro, determina la familia de curvas integrales.

Obsérvese que la ecuación (1.68) puede ser obtenida derivando la ecuación (1.67) con respecto a x. En efecto, derivando (1.67) respecto a x y haciendo $y' = p$, obtenemos $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}$, lo cual coincide con (1.68). Por ello, este método es llamado frecuentemente integración de ecuaciones diferenciales por derivación.

De manera completamente análoga a menudo se integra la ecuación

$$F(x, y, y') = 0,$$

si ésta es fácilmente resoluble con respecto a x:

$$x = f(y, y'). \tag{1.69}$$

En este caso, tomando como parámetros a y y a $y' = p$, y utilizando la dependencia $dy = y'dx$, se obtiene

$$dy = p\left[\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp\right],$$

o bien

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{1.70}$$

Integrando la ecuación (1.70), obtenemos $\Phi(y, p, c) = 0$. Esta ecuación, junto con $x = f(y, p)$, determina las curvas integrales de la ecuación inicial. La ecuación (1.70) puede obtenerse de (1.69) derivando con respecto a y.

Como ejemplo de la aplicación de este método, consideremos la ecuación lineal respecto a x y a y

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

llamada *ecuación de Lagrange*. Derivando con respecto a x y haciendo $y' = p$, obtenemos

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}, \tag{1.71}$$

o bien

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p). \tag{1.72}$$

Esta ecuación es lineal en x y en $\frac{dx}{dp}$ y, por lo tanto, se integra fácilmente, por ejemplo, mediante el método de variación de la constante. Habiendo obtenido la integral $\Phi(x, p, c) = 0$ de la ecuación (1.72) y agregándole $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, se obtienen las ecuaciones que determinan las curvas integrales buscadas.

Al pasar de la ecuación (1.71) a la (1.72), hubo que dividir entre $\frac{dp}{dx}$. Pero con esto se perdieron las soluciones — si éstas existen — para las cuales p es constante, lo que significa que $\frac{dp}{dx} = 0$. Considerando a p constante, notamos que la ecuación (1.71) se satisface sólo cuando p es raíz de la ecuación $p - \varphi(p) = 0$.

De esta manera, si la ecuación $p - \varphi(p) = 0$ tiene raíces reales $p = p_i$, entonces a las soluciones halladas más arriba de la ecuación de Lagrange hay que agregar $y = x\varphi(p) + \psi(p)$, $p = p_i$, o bien, eliminando p, $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$, que son líneas rectas.

Hay que estudiar separadamente el caso cuando $p - \varphi(p) \equiv 0$ y, por lo tanto, al dividir entre $\frac{dp}{dx}$ se pierde la solución $p = c$, donde c es una constante arbitraria. En este caso, $\varphi(y') \equiv y'$, y la ecuación $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ toma la forma $y = xy' + \psi(y')$, que se llama *ecuación de Clairaut*. Haciendo $y' = p$, obtenemos $y = xp + \psi(p)$. Derivando respecto a x, tendremos

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

o bien

$$(x + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = 0,$$

de donde o $\frac{dp}{dx} = 0$, es decir, $p = c$, o bien $x + \psi'(p) = 0$.

En el primer caso, eliminando p se obtiene

$$y = cx + \psi(c), \tag{1.73}$$

que es una familia monoparamétrica de rectas integrales. En el segundo caso, la solución se determina por las ecuaciones

$$y = xp + \psi(p) \ \text{ y } \ x + \psi'(p) = 0. \tag{1.74}$$

No es difícil comprobar que la curva integral, determinada por las ecuaciones (1.74), es la envolvente de la familia de rectas integrales (1.73).

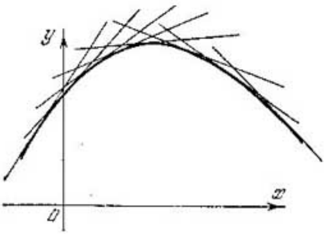

Fig. 1.27

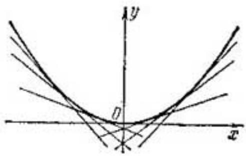

Fig. 1.28

En efecto, la *envolvente* de cierta familia $\Phi(x, y, c) = 0$ se determina por las ecuaciones

$$\Phi(x, y, c) = 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0, \tag{1.75}$$

las cuales para la familia $y = cx + \psi(c)$ tienen la forma

$$y = cx + \psi(c), \ x + \psi'(c) = 0$$

y sólo se diferencian de la ecuación (1.74) en la notación empleada para el parámetro (fig. 1.27).

Observación. Como es sabido, las ecuaciones (1.75) pueden determinar, aparte de envolventes, lugares geométricos de puntos múltiples y, a veces, otras curvas; sin embargo, si al menos una de las derivadas $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ó $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ es diferente de cero y ambas están acotadas en los puntos que satisfacen las ecuaciones (1.75), entonces dichas ecuaciones determinan sólo la envolvente. En este caso, estas condiciones se cumplen: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -c$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1$. Por lo tanto, las ecuaciones (1.75) determinan una envolvente, que puede degenerar en un punto si la familia (1.73) es un haz de rectas.

Ejemplo 6.

$$y=xy'-y'^2; \text{ ecuación de Clairaut.}$$

La familia monoparamétrica de rectas integrales tiene la forma $y=cx-c^2$. Además, la envolvente de esta familia, determinada por las ecuaciones $y=cx-c^2$ y $x-2c=0$, es curva integral. Eliminando c, obtenemos $y=\frac{x^2}{4}$ (fig. 1.28).

Ejemplo 7.

$$y=2xy'-y'^3; \text{ ecuación de Lagrange.}$$

$$y'=p,$$

$$y=2xp-p^3. \tag{1.76}$$

Derivando, se obtiene

$$p=2p+2x\frac{dp}{dx}-3p^2\frac{dp}{dx} \tag{1.77}$$

y, luego de dividir entre $\frac{dp}{dx}$, llegamos a la ecuación

$$p\frac{dx}{dp}=-2x+3p^2.$$

Integrando esta ecuación lineal, se obtiene $x=\frac{c_1}{p^2}+\frac{3}{4}p^2$. Por lo tanto, las curvas integrales se determinan por las ecuaciones $y=2xp-p^3$, $x=\frac{c_1}{p^2}+\frac{3p^2}{4}$.

Al dividir entre $\frac{dp}{dx}$, como se dijo antes, se pierde la solución $p=p_i$, donde p_i son las raíces de la ecuación $p-\varphi(p)=0$. En este caso, se pierde la solución $p=0$ de la ecuación (1.77), a la cual le corresponde, en base a la ecuación (1.76), la solución $y=0$ de la ecuación inicial.

§ 9. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA DERIVADA. SOLUCIONES SINGULARES

En el § 6 fue demostrado el teorema de existencia y unicidad de la solución $y(x)$ de la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ que satisface la condición $y(x_0)=y_0$. Un problema análogo surge también para la ecuación de la forma $F(x, y, y')=0$. Es evidente que para estas ecuaciones, por cierto punto (x_0, y_0) en general pasa no una, sino varias curvas integrales, puesto que resolviendo la ecuación $F(x, y, y')=0$ con respecto a y', por regla general obtenemos no uno, sino varios valores reales $y'=f_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots)$. Si cada ecuación $y'=f_i(x, y)$ en un entorno del punto (x_0, y_0) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad del § 6, entonces para cada ecuación existe una solución única que satisface la condición $y(x_0)=y_0$. Por eso, la propiedad de unicidad de la solución de la ecuación $F(x, y, y')=0$, que satisface la condición $y(x_0)=y_0$, se entiende generalmente en el sentido de que por el punto dado (x_0, y_0), *en la dirección dada*, no pasa más de una curva integral de la ecuación $F(x, y, y')=0$.

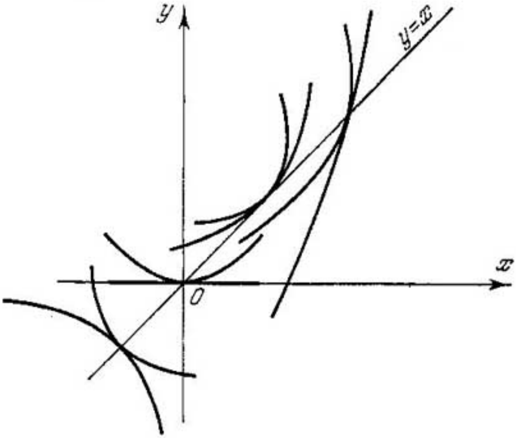

Fig. 1.29

Por ejemplo, para las soluciones de la ecuación $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$ la propiedad de unicidad se cumple en todas partes, ya que por cada punto (x_0, y_0) pasan dos curvas integrales, pero en diferentes direcciones. En efecto,

$$\frac{dy}{dx}=\pm 1, \quad y=x+c \text{ e } y=-x+c.$$

Para la ecuación $(y')^2-(x+y)y'+xy=0$, considerada en la pág. 71, la propiedad de unicidad se viola en los puntos de la recta $y=x$, puesto que por los puntos de dicha recta pasan las curvas integrales de las ecuaciones $y'=x$ e $y'=y$ en una misma dirección (fig. 1.29).

Teorema 1.5. *Existe una solución única $y=y(x)$, $x_0-h_0\leqslant x\leqslant$ $\leqslant x_0+h_0$, donde h_0 es suficientemente pequeño, de la ecuación*

$$F(x, y, y')=0, \tag{1.78}$$

que satisface la condición $y(x_0)=y_0$, para la cual $y'(x_0)=y_0'$, donde y_0' es una de las raíces reales de la ecuación $F(x_0, y_0, y')=0$, si en un entorno cerrado del punto (x_0, y_0, y_0') la función $F(x, y, y')$ *satisface las siguientes condiciones:*

1) *$F(x, y, y')$ es continua en todos sus argumentos;*

2) *la derivada* $\frac{\partial F}{\partial y'}$ *existe y es diferente de cero;*

3) *existe la derivada* $\frac{\partial F}{\partial y}$, *acotada en valor absoluto,*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leqslant N_1.$$

D e m o s t r a c i ó n. De acuerdo con el conocido teorema sobre la existencia de la función implícita, se puede afirmar que las condiciones 1) y 2) garantizan la existencia de una función única $y' = f(x, y)$, continua en un entorno del punto (x_0, y_0), la cual se determina por la ecuación (1.78) y satisface la condicion $y_0' = f(x_0, y_0)$. Queda por comprobar si la función $f(x, y)$ satisface o no la condición de Lipschitz, o la condición más grosera $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$ en un entorno del punto (x_0, y_0). De ser así, se podría afirmar que la ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{1.79}$$

satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad (véase el § 6, pág. 43), y que existe, por lo tanto, una solución única de la ecuación (1.79) que satisface la condición $y(x_0) = y_0$, así como que existe una curva integral única de la ecuación (1.78) que pasa por el punto (x_0, y_0) y que tiene en éste el coeficiente angular de la tangente igual a y_0'.

Según el conocido teorema sobre funciones implícitas, se puede afirmar que al cumplirse las condiciones 1), 2) y 3) la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y puede ser calculada por la regla de derivación de las funciones implícitas.

Derivando la identidad $F(x, y, y') = 0$ respecto a y, y tomando en cuenta que $y' = f(x, y)$, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}},$$

de donde, considerando también las condiciones 2) y 3), se deduce que $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$ en un entorno cerrado del punto (x_0, y_0).

El conjunto de puntos (x, y) en los cuales se viola la unicidad de la solución de la ecuación.

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.78}$$

se llama conjunto *singular*.

En los puntos del conjunto singular debe violarse por lo menos una de las condiciones del teorema 1.5. Para las ecuaciones diferenciales que se encuentran en los problemas prácticos se cumplen generalmente las condiciones 1) y 3), pero la condición 2), $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$, con frecuencia se viola.

Si las condiciones 1) y 3) se cumplen, en los puntos del conjunto singular deben cumplirse simultáneamente las ecuaciones

$$F(x, y, y') = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{1.80}$$

Eliminando a y' de estas ecuaciones, obtenemos la ecuación

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{1.81}$$

a la cual deben satisfacer los puntos del conjunto singular. Sin embargo, no en cada punto que satisface la ecuación (1.81) se viola obligatoriamente la unicidad de la solución de la ecuación (1.78), ya que las condiciones del teorema 1.5 son sólo suficientes para la unicidad de la solución, y no necesarias; por lo tanto, la violación de cualquier condición del teorema no implica necesariamente la violación de la unicidad.

De esta manera, sólo entre los puntos de la curva $\Phi(x, y) = 0$, llamada *curva p-discriminante* (debido a que la ecuación (1.80) se escribe frecuentemente en la forma $F(x, y, p) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$), pueden haber puntos del conjunto singular.

Si una rama $y = \varphi(x)$ de la curva $\Phi(x, y) = 0$ pertenece al conjunto singular, y es al mismo tiempo curva integral, entonces se llama *curva integral singular*, y la función $y = \varphi(x)$, *solución singular*.

De este modo, para hallar la solución singular de la ecuacion

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.78}$$

hay que hallar la curva p-discriminante, determinada por las ecuaciones

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{p\partial} = 0;$$

luego, aclarar por sustitución directa en la ecuación (1.78) si entre las ramas de la curva p-discriminante hay curvas integrales; si las hay, debe comprobarse además si se viola o no la unicidad en los puntos de estas curvas. Si la unicidad se viola, la rama de la curva p-discriminante es curva integral singular.

Ejemplo 1. ¿Tiene solución singular la ecuación de Lagrange $y = 2xy' - (y')^2$?

Las condiciones 1) y 3) del teorema de existencia y unicidad se cumplen. La curva p-discriminante se determina por las ecuaciones: $y=2xp-p^2$, $2x-2p=0$, o bien, eliminando $p, y=x^2$. Esta parábola no es una curva integral, ya que la función $y=x^2$ no satisface la ecuación inicial. Por lo tanto, no hay solución singular.

Ejemplo 2. Hallar la solución singular de la ecuación de Lagrange

$$x-y=\frac{4}{9}(y')^2-\frac{8}{27}(y')^3. \quad (1.82)$$

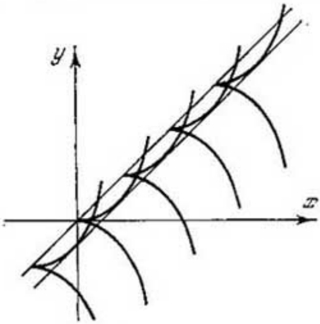

Fig. 1.30

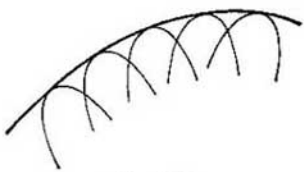

Fig. 1.31

Las condiciones 1) y 3) del teorema de existencia y unicidad se cumplen. La curva p-discriminante se determina por las ecuaciones

$$x-y=\frac{4}{9}p^2-\frac{8}{27}p^3, \quad \frac{8}{9}(p-p^2)=0.$$

De la segunda ecuación se halla $p=0$, o bien $p=1$; sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene

$$y=x, \text{ o bien } y=x-\frac{4}{27}.$$

Sólo la segunda función es solución de la ecuación original.

Para aclarar si la solución $y=x-\frac{4}{27}$ es singular o no, hay que integrar la ecuación (1.82) y aclarar si pasan otras curvas integrales por los puntos de la recta $y=x-\frac{4}{27}$ en la dirección de dicha recta. Integrando la ecuación de Lagrange (1.82), se obtiene

$$(y-c)^2=(x-c)^3. \quad (1.83)$$

De la ecuación (1.83) y de la fig. 1.30 se ve que la recta $y=x-\frac{4}{27}$ es la envolvente de la familia de parábolas semicúbicas $(y-c)^2=(x-c)^3$. Por lo tanto, en cada punto de dicha recta se viola la unicidad, puesto que en una misma dirección pasan dos curvas integrales: la recta $y=x-\frac{4}{27}$ y la parábola semicúbica, tangente a esta recta en el punto considerado.

De esta manera, $y=x-\frac{4}{27}$ es solución singular.

En este ejemplo la envolvente de la familia de curvas integrales es solución singular.

Si llamamos envolvente de la familia

$$\Phi(x, y, c) = 0 \qquad (1.84)$$

a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a cierta curva de la familia (1.84) y en cada segmento es tangente a infinitas curvas de dicha familia, entonces la envolvente de la familia de curvas integrales de cierta ecuación $F(x, y, y') = 0$ será siempre una curva integral singular.

En efecto, en los puntos de la envolvente los valores de x, y e y' coinciden con los valores de x, y e y' para la curva integral que es tangente a la envolvente en el punto (x, y). Por consiguiente, en cada punto de la envolvente los valores de x, y e y' satisfacen la ecuación $F(x, y, y') = 0$, es decir, la envolvente es una curva integral (fig. 1.31). En cada punto de la envolvente se viola la unicidad, ya que por sus puntos pasan por lo menos dos curvas integrales en una misma dirección: la envolvente y la curva integral de la familia (1.84), tangente a ella en el punto considerado. En consecuencia, la envolvente es curva integral singular.

Conociendo la familia de curvas integrales $\Phi(x, y, c) = 0$ de cierta ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$, se pueden determinar sus soluciones singulares hallando la envolvente. Como es sabido del curso de análisis matemático, la envolvente está incluída en la curva c-discriminante, determinada por las ecuaciones

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

Sin embargo, aparte de la envolvente, en la curva c-discriminante pueden estar incluídos también otros conjuntos, por ejemplo, el conjunto de puntos múltiples de las curvas de la familia considerada, en los cuales $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$. Para que cierta rama de la curva c-discriminante sea con seguridad envolvente, es suficiente que en ella:

1) existan las derivadas parciales, acotadas en valor absoluto,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leqslant N_1, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \leqslant N_2;$$

2) $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0$, o bien $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$.

Obsérvese que estas condiciones son sólo suficientes, por lo cual las curvas en las que se viola una de las condiciones 1) o 2) también pueden ser envolventes.

Ejemplo 3. Dada la familia de curvas integrales $(y-c)^2 = (x-c)^3$ de cierta ecuación diferencial (véase el ejemplo 2, pág. 82), hallar la solución singular de ésta.

Hallamos la curva c-discriminante:

$$(y-c)^2=(x-c)^3 \quad \text{y} \quad 2(y-c)=3(x-c)^2.$$

Eliminando el parámetro c, se obtiene

$$y=x \ \text{y} \ x-y-\frac{4}{27}=0.$$

La recta $y=x-\frac{4}{27}$ es envolvente, ya que para ella se cumplen todas las condiciones del teorema sobre envolvente. La función $y=x$ no satisface la ecuación diferencial. La recta $y=x$ es el lugar geométrico de los puntos de retroceso (véase la fig. 1.30). En los puntos de esta recta se viola la segunda condición del teorema sobre envolvente.

Ejemplo 4. Dada la familia de curvas integrales

$$y^{1/5}-x+c=0 \tag{1.85}$$

de cierta ecuación diferencial de primer orden, hallar la solución singular de ésta.

El problema se reduce a la búsqueda de la envolvente de la familia considerada. Si se aplica directamente el método indicado anteriormente sobre la búsqueda de la envolvente, obtenemos la igualdad contradictoria $1=0$, por lo que sería natural concluir que la familia (1.85) no tiene envolvente. Sin embargo, en este caso la derivada del primer miembro de la ecuación (1.85) respecto a y, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{1}{5}y^{-\frac{4}{5}}$ se vuelve infinito para $y=0$; por lo tanto, no se excluye la posibilidad de que $y=0$ sea envolvente de la familia (1.85) que no se pudo hallar por el método general debido a la violación del teorema sobre envolvente en la recta $y=0$.

Debe transformarse la ecuación (1.85) de manera que para la ecuación transformada, equivalente a la inicial, se cumplan las condiciones del teorema sobre envolvente. Por ejemplo, escribamos la ecuación (1.85) en la forma $y-(x-c)^5=0$. Ahora las condiciones del teorema sobre envolvente se cumplen, y aplicando el método general, obtenemos

$$y=(x-c)^5, \qquad 5(x-c)^4=0,$$

o, eliminando c, se obtiene la ecuación de la envolvente $y=0$ (fig. 1.32).

Ejemplo 5. Dada la familia de curvas integrales

$$y^2-(x-c)^3=0 \tag{1.86}$$

de cierta ecuación diferencial de primer orden, hallar la solución singular de ésta.

La curva c-discriminante se determina por las ecuaciones

$$y^2-(x-c)^3=0 \ \text{y} \ x-c=0,$$

o, eliminando c, se tiene $y=0$. En la recta $y=0$ se reducen a cero ambas derivadas parciales, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, del primer miembro de la ecuación (1.86); por lo tanto, $y=0$ es el lugar geométrico de los puntos múltiples de las curvas de la familia (1.86), en este caso, de los puntos de retroceso. Sin embargo, este lugar geométrico en el ejemplo considerado es a la vez también envolvente. En la fig. 1.33 se muestran las parábolas semicúbicas (1.86) y su envolvente $y=0$.

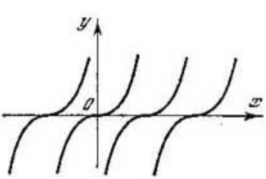

Fig. 1.32

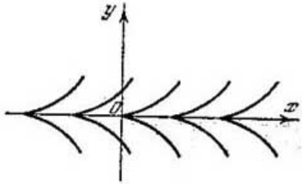

Fig. 1.33

EJERCICIOS DEL CAPITULO I

1. $\operatorname{tg} y\, dx - \operatorname{ctg} x\, dy = 0$.
2. $(12x+5y-9)\, dx + (5x+2y-3)\, dy = 0$.
3. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2+y^2}$.
4. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3$.
5. $y\, dx - x\, dy = x^2 y\, dy$.
6. $\dfrac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$.
7. $y \operatorname{sen} x + y' \cos x = 1$.
8. $y' = e^{x-y}$.
9. $\dfrac{dx}{dt} = x + \operatorname{sen} t$.
10. $x(\ln x - \ln y)\, dy - y\, dx = 0$.
11. $xy(y')^2 - (x^2+y^2)y' + xy = 0$.
12. $(y')^2 = 9y^4$.
13. $\dfrac{dx}{dt} = e^{\frac{x}{t}} + \dfrac{x}{t}$.
14. $x^2 + (y')^2 = 1$.
15. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$.
16. $x = (y')^3 - y' + 2$.
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+y^3}$.
18. $y = (y')^4 - (y')^3 - 2$.

19. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $xy=c$, es decir, hallar las curvas que cortan ortogonalmente a las curvas de la familia dada.

20. Hallar la curva cuya subtangente es igual al doble de la abscisa del punto de tangencia.

21. Hallar la curva para la cual el segmento que determina la tangente en el eje de las ordenadas es igual a la abscisa del punto de tangencia.

22. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

23. Considerando que la velocidad de enfriamiento de cualquier cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre las temperaturas de dicho cuerpo y del aire, resolver el siguiente problema: si la temperatura del aire es igual a 20° C y el cuerpo se enfría durante 20 minutos deste 100 hasta 60° C, ¿después de cuánto tiempo la temperatura del cuerpo alcanzará a 30° C?

24. Una lancha a motor se mueve en agua calma con velocidad de 10 km/h. A plena carrera su motor fue apagado, y después de $t=20$ seg la velocidad de la lancha disminuyó hasta $v_1 = 6$ km/h. Determinar la velocidad de la lancha dos minutos después de parar el motor, considerando que la resistencia del agua es proporcional a la velocidad de movimiento de la lancha.

25. Hallar la forma de un espejo que refleja paralelamente a una dirección dada todos los rayos que salen de un punto dado.

26. $y'^2 + y^2 = 4$.

27. Hallar la curva cuyo segmento de tangente que se encuentra entre los ejes coordenados se divide en el punto de tangencia en partes iguales.

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y-x-4}{2x-y+5}$. 29. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{1+x} + y^2 = 0$.

30. Integrar numéricamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Determinar $y(0{,}5)$ con una exactitud de 0,01.

31. Integrar numéricamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = xy^3 + x^2, \qquad y(0) = 0.$$

Determinar $y(0{,}6)$ con una exactitud de 0,01.

32. $y' = 1{,}31x - 0{,}2y^2$, $\quad y(0) = 2$.

Construir la tabla de quince valores de y con paso $h = 0{,}02$.

33. $y = 2xy' - y'^2$. 34. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x-y)$.

35. Aplicando el método de las isoclinas (véase la pág. 19), hacer un esbozo de la familia de curvas integrales de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2.$$

36. $(2x+2y-1)\,dx + (x+y-2)\,dy = 0$.

37. $y'^3 - y'e^{2x} = 0$.

38. Hallar las trayectorias ortogonales a las parábolas $y^2 + 2ax = a^2$.

39. ¿Tiene solución singular la ecuación diferencial $y = 5xy' - (y')^2$?

40. Integrar aproximadamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2, \qquad y(1) = 0$$

por el método de las aproximaciones sucesivas (determinar y_1 e y_2).

41. $y = x^2 + \displaystyle\int_1^x \frac{y}{x}\,dx$.

42. ¿Tiene solución singular la ecuación $y' = \sqrt[3]{x-5y} + 2$?

43. $(x-y)\,y\,dx - x^2\,dy = 0$.

44. Hallar las trayectorias ortogonales a la familia $y^2 = cx^3$.

45. $\dot{x} + 5x = 10t + 2$ para $t = 1$, $x = 2$.

46. $\dot{x} = \dfrac{x}{t} + \dfrac{x^2}{t^3}$ para $t = 2$, $x = 4$.

47. $y = xy' + y'^2$ para $x = 2$, $y = -1$.

48. $y = xy' + y'^2$ para $x = 1$, $y = -1$.

49. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$.

50. $\dot{x} - x \operatorname{ctg} t = 4 \operatorname{sen} t$.

51. $y = x^2 + 2y'x + \dfrac{y'^2}{2}$.

52. $y' - \frac{3y}{x} + x^3y^2 = 0$.

53. $y(1 + y'^2) = a$.

54. $(x^3 - y)\,dx + (x^2y^2 + x)\,dy = 0$.

55. Hallar un factor integrante de la ecuación

$$(3y^2 - x)\,dx + 2y(y^2 - 3x)\,dy = 0.$$

de la forma $\mu = \mu(x + y^2)$.

56. $(x - y)\,y\,dx - x^2\,dy = 0$.

57. $y' = \frac{x + y - 3}{1 - x + y}$.

58. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$.

59. $(x^2 - 1)\,y' + 2xy - \cos x = 0$.

60. $(4y + 2x + 3)\,y' - 2y - x - 1 = 0$.

61. $(y^2 - x)\,y' - y + x^2 = 0$.

62. $(y^2 - x^2)\,y' + 2xy = 0$.

63. $3xy^2y' + y^3 - 2x = 0$.

64. $(y')^2 + (x + a)\,y' - y = 0$, donde a es una constante.

65. $(y')^2 - 2xy' + y = 0$.

66. $(y')^2 + 2yy' \operatorname{ctg} x - y^2 = 0$.

CAPITULO 2

Ecuaciones diferenciales de orden mayor que 1

§ 1. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD PARA LA ECUACION DIFERENCIAL DE n-ESIMO ORDEN

Las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden tienen la forma

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}), \tag{2.1}$$

o bien, si no están resueltas con respecto a la derivada de orden mayor:

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0.$$

El teorema de existencia y unicidad para ecuación de n-ésimo orden se puede obtener fácilmente, llevándola a un sistema de ecuaciones para el cual fue demostrado dicho teorema en la pág. 54.

En efecto, si en la ecuación $y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ se consideran como funciones desconocidas no solamente y, sino también $y'=y_1,\ y''=y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_{n-1}$, entonces la ecuación (2.1) se sustituye por el sistema

$$\left.\begin{aligned} y' &= y_1,\\ y'_n &= y_2,\\ &\cdots\cdots\\ y'_{n-2} &= y_{n-1},\\ y'_{n-1} &= f(x,\ y,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

siendo posible ahora aplicar el teorema de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones (véase la pág. 54). Según este teorema, si los segundos miembros de todas las ecuaciones del sistema (2.2) son continuos en la región considerada y satisfacen la condición de Lipschitz en todos los argumentos, excepto x, entonces existe una solución única del sistema (2.2), que satisface las condiciones

$$y(x_0)=y_0,\ y_1(x_0)=y_{10},\ \ldots,\ y_{n-1}(x_0)=y_{n-1,\,0}.$$

Los segundos miembros de las $n-1$ primeras ecuaciones de (2.2) son continuos y satisfacen no sólo la condición de Lipschitz, sino también la condición más grosera de existencia de derivadas acotadas respecto a $y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$. Por lo tanto, las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen si el segundo miembro de la última ecuación $y'_{n-1}=f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ es continuo en un entorno de las condiciones iniciales, y satisface la condición de Lipschitz para todos los argumentos, comenzando desde el segundo, o la condición más grosera de existencia de derivadas parciales acotadas respecto a todos los argumentos, a partir del segundo.

Volviendo a las variables iniciales x e y obtenemos, en definitiva, el siguiente teorema de existencia y unicidad:

Teorema 2.1. *Si en un entorno de las condiciones iniciales $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ la función f es continua en todos sus argumentos y satisface la condición de Lipschitz respecto a todos los argumentos a partir del segundo, existe una solución única de la ecuación diferencial de n-ésimo orden $y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ que satisface las condiciones*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ y''(x_0)=y''_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

La última condición puede ser sustituida por la condición más grosera sobre la existencia, en dicho entorno, de derivadas parciales acotadas de primer orden de la función f respecto a todos los argumentos, a partir del segundo.

Se llama *solución general* de la ecuación diferencial de n-ésimo orden al conjunto de soluciones formado por todas las soluciones particulares, sin excepción. Si el segundo miembro de la ecuación

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2.1)$$

satisface, en cierta región de variación de sus argumentos, las condiciones del teorema de existencia y unicidad, entonces la solución general de la ecuación (2.1) depende de n parámetros, en calidad de los cuales se pueden tomar, por ejemplo, las condiciones iniciales de la función buscada y de sus derivadas $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$. En particular, la solución general de la ecuación de segundo grado $y''=f(x, y, y')$ depende de dos parámetros, por ejemplo, de y_0 y de y'_0. Si fijamos y_0 e y'_0, o sea, damos el punto (x_0, y_0) y la dirección de la tangente a la curva integral buscada en dicho punto, entonces, si se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad, mediante estas condiciones de determinará una sola curva integral.

Por ejemplo, la ecuación del movimiento rectilíneo de un punto material de masa m bajo la acción de la fuerza $f(t, x, \dot{x})$:

$$m\ddot{x}=f(t, x, \dot{x}),$$

la posición inicial del punto $x(t_0)=x_0$ y la velocidad inicial

$x(t_0)=x_0$ determinan una solución única, una ley única de movimiento $x=x(t)$ si, por supuesto, la función f satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

El teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto a los parámetros y a los valores iniciales, considerado en la pág. 56 se generaliza, sin cambiar el método de demostración, a sistemas de ecuaciones diferenciales y, por lo tanto, a las ecuaciones de n-ésimo orden.

§ 2. CASOS SIMPLES DE REDUCCION DEL ORDEN

En ciertos casos el orden de la ecuación diferencial puede ser reducido, lo que a menudo facilita su integración.

Señalemos algunas clases de ecuaciones que se encuentran con mayor frecuencia y que pueden reducir su orden.

1. *La ecuación no contiene la función buscada y sus derivadas hasta el orden $k-1$ inclusive:*

$$F(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{2.3}$$

En este caso el orden de la ecuación puede ser reducido a $n-k$, mediante el cambio de variables $y^{(k)}=p$.

En efecto, luego del cambio de variables, la ecuación (2.3) toma la forma

$$F(x,\ p,\ p',\ \ldots,\ p^{(n-k)})=0.$$

De esta ecuación se determina $p=p(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-k})$, e y se halla de $y^{(k)}=p(x,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-k})$ integrando k veces. En particular, si la ecuación de segundo orden no contiene a y, entonces la sustitución de variables $y'=p$ conduce a una ecuación de primer orden.

Ejemplo 1.

$$\frac{d^5y}{dx^5}-\frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4}=0.$$

Haciendo $\frac{d^4y}{dx^4}=p$, obtenemos $\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$; separando variables e integrando, tendremos: $\ln|p|=\ln|x|+\ln c$, o bien $p=cx$, $\frac{d^4y}{dx^4}=cx$, de donde

$$y=c_1x^5+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5.$$

Ejemplo 2. Hallar la ley de movimiento de un cuerpo que cae sin velocidad inicial en la atmósfera, considerando la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad.

La ecuación de movimiento tiene la forma

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

donde s es el espacio recorrido por el cuerpo; m, la masa del mismo; t, el tiempo. Para $t=0$, se tiene $s=0$ y $\frac{ds}{dt}=0$.

La ecuación no contiene explícitamente a la función incógnita s; por lo tanto, se puede reducir el orden de la misma considerando $\frac{ds}{dt}=v$. Entonces la ecuación de movimiento toma la forma

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2.$$

Separando variables e integrando, se obtiene

$$\frac{m\,dv}{mg-kv^2}=dt; \quad t=m\int_0^v \frac{dv}{mg-kv^2}=\frac{1}{k\sqrt{g}}\operatorname{Arth}\frac{kv}{\sqrt{g}},$$

de donde $v=\frac{\sqrt{g}}{k}\operatorname{th}(k\sqrt{g}\,t)$; multiplicando por dt e integrando nuevamente, hallamos la ley de movimiento:

$$s=\frac{1}{k^2}\ln\operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t).$$

2. La ecuación no contiene a la variable independiente:

$$F(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0.$$

En este caso el orden de la ecuación se puede reducir en una unidad, por medio de la sustitución $y'=p$; además, p se considera nueva función desconocida de y, $p=p(y)$ y, por lo tanto, todas las derivadas $\frac{d^ky}{dx^k}$ deben expresarse por medio de las derivadas de la nueva función desconocida $p(y)$ respecto a y:

$$\frac{dy}{dx}=p,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p,$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d^2p}{dy^2}p^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2p$$

y análogamente para las derivadas de orden superior. Además, es evidente que la derivada $\frac{d^ky}{dx^k}$ se expresa mediante las derivadas de p respecto a y de orden no superior a $k-1$, lo cual precisamente conduce a la disminución del orden en una unidad.

En particular, si la ecuación de segundo orden no contiene a la variable independiente, entonces la sustitución de variables señalada conduce a una ecuación de primer orden.

Ejemplo 3.

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Haciendo $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$, obtenemos una ecuación de variables separables: $yp\frac{dp}{dy}-p^2=0$, cuya solución general es igual a $p=c_1y$, o bien $\frac{dy}{dx}=c_1y$. Separando variables nuevamente e integrando, se obtiene $\ln|y|=c_1x+\ln c_2$, o bien $y=c_2e^{c_1x}$.

Ejemplo 4. Integrar la ecuación del péndulo matemático $\ddot{x}+a^2\operatorname{sen}x=0$ con condiciones iniciales $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$.

Reducimos el orden, haciendo

$$\dot{x}=v,\quad \ddot{x}=v\frac{dv}{dx},\quad v\,dv=-a^2\operatorname{sen}x\,dx,$$

$$\frac{v^2}{2}=a^2(\cos x-\cos x_0),\quad v=\pm a\sqrt{2(\cos x-\cos x_0)},$$

$$\frac{dx}{dt}=\pm a\sqrt{2(\cos x-\cos x_0)},\quad t=\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\cos x-\cos x_0}}.$$

La integral del segundo miembro no se resuelve en funciones elementales, pero se reduce fácilmente a funciones elípticas.

3. El primer miembro de la ecuación

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{2.4}$$

es la derivada de cierta expresión diferencial $\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ de orden $n-1$.

En este caso se halla fácilmente la llamada *primera integral*, o sea, una ecuación diferencial de orden $n-1$, que contiene una constante arbitraria, y que es equivalente a la ecuación dada de n-ésimo orden, con lo cual reducimos el orden de la ecuación en una unidad. Efectivamente, la ecuación (2.4) puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=0. \tag{2.4$_1$}$$

Si $y(x)$ es solución de la ecuación (2.4$_1$), entonces la derivada de la función $\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ es idénticamente nula. Por lo tanto, la función $\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ es igual a una constante, con lo que se obtiene la primera integral

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=c.$$

Ejemplo 5.

$$yy''+(y')^2=0.$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma $d(yy')=0$, de donde $yy'=c_1$, o bien $y\,dy=c_1\,dx$. Por lo tanto, la integral general será $y^2=c_1x+c_2$.

A veces el primer miembro de la ecuación $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ se convierte en derivada de la expresión diferencial $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ de orden $n-1$ sólo después de multiplicarlo por un factor $\mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Ejemplo 6.

$$yy''-(y')^2=0.$$

Multiplicando por el factor $\mu=\frac{1}{y^2}$, se obtiene $\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=0$, o bien $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right)=0$, de donde $\frac{y'}{y}=c_1$, ó $\frac{d}{dx}\ln|y|=c_1$. Por lo tanto, $\ln|y|=c_1x+\ln c_2$, $c_2>0$, de donde $y=c_2e^{c_1x}$, $c_2\neq 0$, como en el ejemplo 3 de este parágrafo.

Observación. Al multiplicar por el factor $\mu(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ se pueden introducir soluciones superfluas, que reducen dicho factor a cero. Si μ es discontinuo, pueden también perderse soluciones. En el ejemplo 6, al multiplicar por $\mu=\frac{1}{y^2}$ se perdió la solución $y=0$; sin embargo, puede incluirse en la solución obtenida $y=\bar{c}_2e^{c_1x}$, si se considera que $\bar{c}_2$ puede tomar el valor 0.

4. La ecuación $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ es homogénea con respecto a los argumentos $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

El orden de la ecuación homogénea respecto a $y, y', \ldots, y^{(n)}$

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0, \tag{2.5}$$

es decir, de la ecuación para la cual se cumple la identidad

$$F(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)})=k^pF(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

puede ser reducido en una unidad por medio de la sustitución $y=e^{\int z\,dx}$, donde z es una nueva función desconocida. En efecto, derivando, se obtiene

$$\begin{aligned}
y'&=e^{\int z\,dx}z,\\
y''&=e^{\int z\,dx}(z^2+z'),\\
y'''&=e^{\int z\,dx}(z^3+3zz'+z''),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y^{(k)}&=e^{\int z\,dx}\Phi(z, z', z'', \ldots, z^{(k-1)})
\end{aligned}$$

(se puede comprobar la veracidad de esta igualdad mediante el método de inducción completa).

Sustituyendo en (2.5) y observando que en base a la homogeneidad el factor $e^{p\int z\,dx}$ se puede sacar fuera del símbolo de la función F, obtenemos

$$e^{p\int z\,dx} f(x,\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)})=0$$

o bien, dividiendo entre $e^{p\int z\,dx}$, tendremos

$$f(x,\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-1)})=0.$$

Ejemplo 7.

$$yy''-(y')^2=6xy^2.$$

Haciendo $y=e^{\int z\,dx}$, obtenemos $z'=6x$, $z=3x^2+c_1$, $y=e^{\int (3x^2+c_1)\,dx}$, o bien $y=c_2e^{(x^3+c_1x)}$.

En las aplicaciones se encuentran con particular frecuencia ecuaciones diferenciales de segundo orden que pueden reducir su orden.

1)
$$F(x,\ y'')=0. \tag{2.6}$$

En esta ecuación se puede disminuir el orden mediante la sustitución $y'=p$, y reducirla a la ecuación $F\left(x,\ \frac{dp}{dx}\right)=0$, considerada en la pág. 72.

La ecuación (2.6) se puede resolver con respecto al segundo argumento, $y''=f(x)$, e integrar dos veces, o introducir un parámetro y sustituir la ecuación (2.6) por su representación paramétrica

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(t),\quad x=\psi(t),$$

de donde

$$dy'=y''dx=\varphi(t)\,\psi'(t)\,dt,\quad y'=\int \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt+c_1,$$
$$dy=y'dx,\quad y=\int\left[\int \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt+c_1\right]\psi'(t)\,dt+c_2.$$

2)
$$F(y',\ y'')=0. \tag{2.7}$$

Haciendo $y'=p$, se lleva (2.7) a la ecuación (1.61), pág. 73, o bien se representa la ecuación (2.7) en forma paramétrica:

$$y'_x=\varphi(t),\quad y''_{xx}=\psi(t),$$

de donde

$$dx=\frac{dy'}{y''}=\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)},\quad x=\int\frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}+c_1,$$

luego de lo cual y se determina por cuadratura:

$$dy = y'dx = \varphi(t)\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt, \quad y = \int \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c_2.$$

3)
$$F(y, y'') = 0. \tag{2.8}$$

Se puede reducir el orden haciendo

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Si la ecuación (2.8) se resuelve fácilmente con respecto al segundo argumento, $y'' = f(y)$, entonces, multiplicando esta ecuación por $2y'dx = 2dy$, obtenemos $d(y')^2 = 2f(y)\,dy$, de donde

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}\ \pm \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}} = dx,$$

$$x + c_2 = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}}.$$

La ecuación (2.8) se puede sustituir por su representación paramétrica $y = \varphi(t)$, $y'' = \psi(t)$; entonces de $dy' = y''dx$ y de $dy = y'dx$, se obtiene $y'dy' = y''dy$, o bien

$$\frac{1}{2}d(y')^2 = \psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

$$(y')^2 = 2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1,$$

$$y' = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1},$$

luego de lo cual, de $dy = y'dx$ se halla dx, y después x:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \pm\frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1}},$$

$$x = \pm\int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c_1}} + c_2. \tag{2.9}$$

Las ecuaciones (2.9) e $y = \varphi(t)$ determinan en forma paramétrica la familia de curvas integrales.

Ejemplo 8.

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por $2y'dx$, se obtiene $d(y')^2 = 4y^3dy$, de donde $(y')^2 = y^4 + c_1$. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se halla que $c_1=0$ e $y'=y^2$. Por lo tanto, $\frac{dy}{y^2}=dx$, $-\frac{1}{y}=x+c_2$, $c_2=-1$, $y=\frac{1}{1-x}$.

§ 3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE n-ESIMO ORDEN

Se llama *ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden* una ecuación lineal con respecto a la función desconocida y a sus derivadas, y que, por lo tanto, tiene la forma

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=\varphi(x). \quad (2.10)$$

Si el segundo miembro $\varphi(x)\equiv 0$, entonces la ecuación se llama *lineal homogénea*, puesto que es homogénea con respecto a la función desconocida y y a sus derivadas.

Si el coeficiente $a_0(x)$ es diferente de cero en todos los puntos de cierto segmento $a\leqslant x\leqslant b$, entonces, dividiendo entre $a_0(x)$, reducimos la ecuación lineal homogénea—si x varía en dicho segmento—a la forma:

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0, \quad (2.11)$$

o bien

$$y^{(n)}=-\sum_{i=1}^{n}p_i(x)y^{(n-i)}. \quad (2.11_1)$$

Si los coeficientes $p_i(x)$ son continuos en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$, entonces en un entorno de cualesquiera condiciones iniciales

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

donde x_0 es cualquier punto del intervalo $a<x<b$, se satisfacen las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

En efecto, el segundo miembro de la ecuación (2.11_1) es continuo en todos sus argumentos en conjunto, y existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}=-p_{n-k}(x)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ (n-1))$, de módulo acotado, puesto que las funciones $p_{n-k}(x)$ son continuas en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$ y, por lo tanto, están acotadas en valor absoluto.

Obsérvese que la linealidad y la homogeneidad de la ecuación se conservan en cualquier transformación de la variable independiente $x=\varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función arbitraria derivable n veces, cuya derivada $\varphi'(t)\neq 0$ en el segmento de variación de t considerado.

En efecto,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{[\varphi'(t)]^2}-\frac{dy}{dt}\frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La derivada de cualquier orden $\frac{d^k y}{dx^k}$ es función lineal homogénea de las derivadas $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^k y}{dt^k}$ y, por lo tanto, al sustituir en la ecuación (2.11) su linealidad y su homogeneidad se conservan.

La linealidad y la homogeneidad se conservan también al efectuarse una transformación lineal homogénea de la función desconocida: $y(x) = \alpha(x) z(x)$. En efecto, por la fórmula de derivada de un producto,

$$y^{(k)} = \alpha(x) z^{(k)} + k\alpha'(x) z^{(k-1)} + \frac{k(k-1)}{2!} \alpha''(x) z^{(k-2)} + \ldots + \alpha^{(k)}(x) z,$$

es decir, la derivada $y^{(k)}$ es función lineal homogénea de $z, z', z'', \ldots, z^{(k)}$. En consecuencia, el primer miembro de la ecuación lineal homogénea

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0$$

luego de sustituir las variables, será función lineal homogénea de $z, z', \ldots, z^{(n)}$.

Escribamos la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$$

en forma compacta:

$$L[y] = 0,$$

donde

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y.$$

Llamaremos a $L[y]$ *operador diferencial lineal*.

El operador diferencial lineal posee las dos propiedades fundamentales siguientes:

1) *Un factor constante puede sacarse fuera del símbolo del operador:*

$$L[cy] \equiv cL[y].$$

En efecto,

$$(cy)^{(n)} + p_1(x)(cy)^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)(cy) \equiv c[y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y].$$

2) *El operador diferencial lineal, aplicado a la suma de dos funciones y_1 e y_2, es igual a la suma de los resultados de la aplicación del mismo a cada función por separado:*

$$L[y_1 + y_2] \equiv L[y_1] + L[y_2].$$

En efecto,

$$(y_1+y_2)^{(n)}+p_1(x)(y_1+y_2)^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)(y_1+y_2)\equiv$$
$$\equiv[y_1^{(n)}+p_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y_1]+[y_2^{(n)}+p_1(x)y_2^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+p_n(x)y_2].$$

Como consecuencia de las propiedades 1) y 2), resulta

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}c_iy_i\right]\equiv\sum_{i=1}^{m}c_iL[y_i],$$

donde las c_i son constantes.

Basándonos en las propiedades del operador lineal L, demostraremos una serie de teoremas sobre las soluciones de la ecuación lineal homogénea.

Teorema 2.2. *Si y_1 es solución de la ecuación lineal homogénea $L[y]=0$, entonces cy_1, donde c es una constante arbitraria, también es solución de ésta.*

Demostración. Dado $L[y_1]\equiv 0$, hay que demostrar que $L[cy_1]\equiv 0$.

Aplicando la propiedad 1) del operador L, obtenemos:

$$L[cy_1]\equiv cL[y_1]\equiv 0.$$

Teorema 2.3. *La suma y_1+y_2 de dos soluciones y_1 e y_2 de la ecuación lineal homogénea $L[y]=0$ es solución de dicha ecuación.*

Demostración. Dados $L[y_1]\equiv 0$ y $L[y_2]\equiv 0$, hay que demostrar que $L[y_1+y_2]\equiv 0$.

Aplicando la propiedad 2) del operador L, se obtiene

$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2]\equiv 0.$$

Corolario de los teoremas 2.2 y 2.3. *La combinación lineal con coeficientes arbitrarios constantes $\sum_{i=1}^{m}c_iy_i$ de las soluciones y_1, y_2, ..., y_m de la ecuación lineal homogénea $L[y]=0$ es solución de dicha ecuación.*

Teorema 2.4. *Si la ecuación lineal homogénea $L[y]=0$ con coeficientes reales $p_i(x)$ tiene solución compleja $y(x)=u(x)+iv(x)$, entonces la parte real $u(x)$ de esta solución y su parte imaginaria $v(x)$ son por separado soluciones de dicha ecuación homogénea.*

Demostración. Dado $L[u(x)+iv(x)]\equiv 0$, hay que demostrar que $L[u]\equiv 0$ y $L[v]\equiv 0$.

Aplicando las propiedades 1) y 2) del operador L, obtenemos

$$L[u+iv]\equiv L[u]+iL[v]\equiv 0,$$

de donde $L[u]\equiv 0$ y $L[v]\equiv 0$, puesto que una función compleja de variable real es idénticamente nula si, y sólo si, sus partes real e imaginaria son idénticamente nulas.

Observación. Hemos aplicado las propiedades 1) y 2) del operador L a la función compleja de variable real $u(x)+iv(x)$, lo cual evidentemente es lícito, ya que en la demostración de las propiedades 1) y 2) fueron aplicadas sólo las siguientes propiedades de las derivadas: $(cy)'=cy'$, donde c es una constante, e $(y_1+y_2)'=y_1'+y_2'$, las cuales son válidas también para las funciones complejas de variable real.

Las funciones $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ se llaman *linealmente dependientes* en cierto segmento de variación de x, $a\leqslant x\leqslant b$, si existen tales magnitudes constantes $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, que en dicho segmento

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n\equiv 0 \tag{2.12}$$

y además por lo menos un $\alpha_i\neq 0$. Si la identidad (2.12) se verifica sólo para $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, las funciones $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ se llaman *linealmente independientes* en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$.

Ejemplo 1. Las funciones $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$ son linealmente independientes en cualquier segmento $a\leqslant x\leqslant b$, puesto que la identidad

$$\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\ldots+\alpha_{n+1}x^n\equiv 0 \tag{2.13}$$

es posible sólo si todos los $\alpha_i=0$. Si fuera por lo menos un $\alpha_i\neq 0$, entonces en el primer miembro de la identidad (2.13) se tendría un polinomio de grado no mayor que n, el cual puede tener no más de n raíces diferentes y, por lo tanto, se reduce a cero en no más de n puntos de dicho segmento.

Ejemplo 2. Las funciones $e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ \ldots,\ e^{k_nx}$, donde $k_i\neq k_j$ si $i\neq j$, son linealmente independientes en cualquier segmento $a\leqslant x\leqslant b$.

Supongamos que las funciones consideradas son linealmente dependientes. Entonces

$$\alpha_1 e^{k_1x}+\alpha_2 e^{k_2x}+\ldots+\alpha_n e^{k_nx}\equiv 0, \tag{2.14}$$

donde por lo menos un $\alpha_i\neq 0$: sea, por ejemplo, $\alpha_n\neq 0$. Dividiendo la identidad (2.14) entre e^{k_1x} y derivando, se obtiene

$$\alpha_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}+\ldots+\alpha_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_1)x}\equiv 0, \tag{2.15}$$

que es una dependencia lineal entre $n-1$ funciones exponenciales de la forma e^{px} con diferentes exponentes. Dividiendo la identidad (2.15) entre $e^{(k_2-k_1)x}$ y derivando, obtenemos una dependencia lineal entre $n-2$ funciones exponenciales con diferentes exponentes. Prosiguiendo este proceso $n-1$ veces, se obtiene

$$\alpha_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)\ldots(k_n-k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x}\equiv 0,$$

lo cual es imposible, ya que α_n, por hipótesis, es diferente de cero, y $k_i\neq k_j$ para $i\neq j$.

La demostración es válida también si los k_i son complejos.

Ejemplo 3. Las funciones

$$\begin{array}{l} e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ \dots,\ x^{n_1}e^{k_1x}, \\ e^{k_2x},\ xe^{k_2x},\ \dots,\ x^{n_2}e^{k_2x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{k_px},\ xe^{k_px},\ \dots,\ x^{n_p}e^{k_px}, \end{array}$$

donde $k_i \neq k_j$ para $i \neq j$, son linealmente independientes en cualquier segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Supongamos que estas funciones son linealmente dependientes. Entonces

$$P_1(x)\, e^{k_1x} + P_2(x)\, e^{k_2x} + \dots + P_p(x)\, e^{k_px} \equiv 0, \qquad (2.16)$$

donde $P_i(x)$ es un polinomio de grado no superior a n_i, y por lo menos un polinomio, por ejemplo $P_p(x)$, no es idénticamente nulo. Dividamos la identidad (2.16) entre e^{k_1x} y derivemos n_1+1 veces. Entonces el primer sumando de la identidad (2.16) desaparace, y obtenemos una dependencia lineal de la misma forma, pero con una cantidad menor de funciones:

$$Q_2(x)\, e^{(k_2-k_1)\,x} + \dots + Q_p(x)\, e^{(k_p-k_1)\,x} \equiv 0 \qquad (2.17)$$

Además, los grados de los polinomios Q_i y P_i ($i=2, 3, \dots, p$) coinciden, puesto que al derivar el producto $P_i(x)\, e^{px}$, $p \neq 0$, se obtiene $\left[P_i(x)\, p + P_i'(x)\right] e^{px}$, es decir, el coeficiente del término de mayor grado del polinomio $P_i(x)$, luego de derivar el producto $P_i(x)\, e^{px}$, sólo se multiplica por el factor p, diferente de cero. En particular, coinciden los grados de los polinomios $P_p(x)$ y $Q_p(x)$ y, por lo tanto, el polinomio $Q_p(x)$ no es idénticamente nulo. Dividiendo la identidad (2.17) entre $e^{(k_2-k_1)\,x}$ y derivando n_2+1 veces, obtenemos una dependencia lineal con una cantidad aún menor de funciones. Repitiendo este proceso $p-1$ veces, se obtiene

$$R_p(x)\, e^{(k_p-k_{p-1})\,x} \equiv 0,$$

lo cual es imposible, puesto que el grado del polinomio $R_p(x)$ es igual al del polinomio $P_p(x)$ y, en consecuencia, $R_p(x)$ no es idénticamente nulo.

La demostración tampoco varía si las k_i son complejas.

Teorema 2.5. *Si las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ son linealmente dependientes en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, entonces en dicho segmento el determinante*

$$W(x) = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

llamado wronskiano), es idénticamente nulo.*

Demostración. Se da que

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0 \qquad (2.18)$$

*) En honor al matemático polaco G. Wronsky (1775—1853).

en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, sin que todas las α_i sean iguales a cero. Derivando la identidad (2.18) $n-1$ veces, obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0. \end{array}\right\} \quad (2.19)$$

Este sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con respecto a todas las α_i, tiene solución no trivial (puesto que no todas las α_i son iguales a cero) para cualquier valor de x en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Por lo tanto, el determinante del sistema (2.19), que es el wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, es igual a cero en cada punto x del segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Teorema 2.6. *Si las funciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0 \quad (2.20)$$

con coeficientes continuos $p_i(x)$ en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, entonces el wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero en todos los puntos del segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que en cierto punto $x = x_0$ del segmento $a \leqslant x \leqslant b$, el wronskiano $W(x_0) = 0$. Escojamos las constantes α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de manera que se satisfaga el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right\} \quad (2.21)$$

y que no todas las α_i sean iguales a cero. Esta elección es posible, ya que el determinante del sistema lineal homogéneo (2.21) de n ecuaciones con n incógnitas α_i es igual a cero, $W(x_0) = 0$ y, por lo tanto, existen soluciones no triviales de este sistema. Para tales α_i la combinación lineal

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$$

es solución de la ecuación lineal homogénea (2.20) que satisface, debido a las ecuaciones del sistema (2.21), las condiciones iniciales nulas

$$y(x_0)=0,\quad y'(x_0)=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0. \qquad (2.22)$$

Estas condiciones iniciales, evidentemente, son satisfechas por la solución trivial $y\equiv 0$ de la ecuación (2.20) y, de acuerdo al teorema sobre la unicidad de la solución, a las condiciones iniciales (2.22) las satisface sólo dicha solución. Por lo tanto, $\alpha_1 y_1(x)+$ $+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0$ y las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, contrariamente a la hipótesis del teorema, son linealmente dependientes.

Observación 1. De los teoremas 2.5 y 2.6 se deduce que las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación (2.20), linelamente independientes en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$, son también linealmente independientes en cualquier segmento $a_1\leqslant x\leqslant b_1$, situado en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$.

Observación 2. En el teorema 2.6, a diferencia del teorema 2.5, se supuso que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ eran soluciones de la ecuación lineal homogénea (2.20) con coeficientes continuos. Renunciar a esta exigencia y considerar a $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funciones cualesquiera que posean derivada $(n-1)$—ésima continua no es posible. Es facil citar ejemplos de funciones linealmente independientes que no son, claro está, soluciones de la ecuación (2.20) con coeficientes continuos, para las cuales el wronskiano no sólo es igual a cero en diferentes puntos, sino que incluso es idénticamente nulo. Supongamos, por ejemplo, que en el segmento $0\leqslant x\leqslant 2$ están definidas las siguientes funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$:

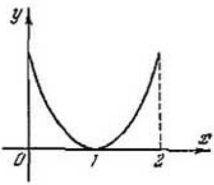

Fig. 2.1

$$\begin{aligned} &y_1(x)=(x-1)^2 && \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ &y_1(x)=0 && \text{si } 1< x\leqslant 2,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &y_2(x)=0 && \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ &y_2(x)=(x-1)^2 && \text{si } 1< x\leqslant 2\end{aligned}$$

(fig. 2.1).

Evidentemente $\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\equiv 0$, para $0\leqslant x\leqslant 2$, puesto que en el segmento $0\leqslant x\leqslant 1$ la segunda columna está formada por ceros, y para $1< x\leqslant 2$ la primera columna se compondrá también de ceros. Sin embargo, las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes en todo el segmento $0\leqslant x\leqslant 2$, ya que considerando la identidad $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\equiv 0$, $0\leqslant x\leqslant 2$, al principio en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$, llegamos a la conclusión de que $\alpha_1 = 0$, y luego, contemplando dicha identidad en el segmento $1 \leqslant x \leqslant 2$, se halla que también $\alpha_2 = 0$.

Teorema 2.7. *La combinación lineal* $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ *con coeficientes constantes arbitrarios de n soluciones particulares linealmente independientes* y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *en el segmento* $a \leqslant x \leqslant b$ *es solución general, para* $a \leqslant x \leqslant b$, *de la ecuación lineal homogénea*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0. \tag{2.20}$$

con coeficientes $p_i(x)$ *continuos en dicho segmento* $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Demostración. La ecuación (2.20) para $a \leqslant x \leqslant b$ satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Por ello, la solución $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, si $a \leqslant x \leqslant b$, será general, es desir, contendrá a todas las soluciones particulares sin excepción, si es posible escoger las constantes arbitrarias c_i de manera que se satisfagan las condiciones iniciales dadas arbitrariamente

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

donde x_0 es un punto cualquiera del segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

Al exigir que la solución $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ satisfaga las condiciones iniciales impuestas, obtenemos un sistema de n ecuaciones lineales con respecto a c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) = y_0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) = y_0', \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{array}\right\}$$

de n incógnitas c_i, cuyo determinante es diferente de cero, puesto que dicho determinante es el wronskiano $W(x_0)$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.20). Por lo tanto, este sistema es resoluble con respecto a c_i para cualquier x_0 del segmento $a \leqslant x \leqslant b$, y para cualesquiera segundos miembros.

Corolario del teorema 2.7. *El número máximo de soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea es igual a su orden.*

Observación. Se llama *sistema fundamental de soluciones* de una ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden al conjunto de cualesquiera n soluciones particulares linealmente independientes. Para cada ecuación lineal homogénea (2.20) existe un sistema fundamental de soluciones. Para la construcción de un sistema fundamental de soluciones, se dan arbitrariamente n^2 cifras

$$y_i^{(k)}(x_0) \quad (i=1, 2, \ldots, n; \quad k=0, 1, \ldots, n-1),$$

sometiendo su elección exclusivamente a la condición

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

donde x_0 es un punto cualquiera del segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Entonces las soluciones $y_i(x)$, determinadas por los valores iniciales $y_i^{(k)}(x_0)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$; $i=1, 2, \ldots, n)$, forman un sistema fundamental, puesto que su wronskiano $W(x)$ en el punto $x=x_0$ es diferente de cero y, por lo tanto, en virtud del teorema 2.5 y del 2.6, las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes.

Ejemplo 4. La ecuación $y''-y=0$ tiene las evidentes soluciones particulares linealmente independientes $y_1=e^x$ e $y_2=e^{-x}$ (véase la pág. 99, ejemplo 2); por lo tanto, la solución general tiene la forma $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

Ejemplo 5. La solución $y=c_1e^x+c_2\,\mathrm{ch}\,x+c_3\,\mathrm{sh}\,x$ de la ecuación $y'''-y'=0$, no es solución general, ya que las soluciones e^x, $\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{sh}\,x$, son linealmente dependientes. Las soluciones 1, $\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{sh}\,x$, son linealmente independientes y, por lo tanto,

$$y=c_1+c_2\,\mathrm{ch}\,x+c_3\,\mathrm{sh}\,x,$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias, será solución general de la ecuación antedicha.

Conociendo una solución particular no trivial y_1 de la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y=0 \tag{2.20}$$

se puede, por medio de la sustitución $y=y_1\int u\,dx$, reducir su orden manteniendo la linealidad y la homogeneidad.

En efecto, la sistitución $y=y_1\int u\,dx$ se puede reemplazar por dos sustituciones: $y=y_1z$ y $z'=u$. La transformación lineal homogénea

$$y=y_1z \tag{2.23}$$

conserva la linealidad y la homogeneidad de la ecuación (véase la pág. 97); por lo tanto, la ecuación (2.20) se reduce en este caso a la forma

$$a_0(x)\,z^{(n)}+a_1(x)\,z^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,z=0. \tag{2.24}$$

Además, a la solución $y=y_1$ de la ecuación (2.20) le corresponde, en virtud de (2.23), la solución $z\equiv 1$ de la ecuación (2.24). Sustituyendo $z\equiv 1$ en la ecuación (2.24), se obtiene $a_n(x)\equiv 0$. Por consiguiente, la ecuación (2.24) tiene la forma

$$a_0(x)\,z^{(n)}+a_1(x)\,z^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,z'=0,$$

y la sustitución $z'=u$ reduce su orden en una unidad:

$$a_0(x)\,u^{(n-1)}+a_1(x)\,u^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,u=0.$$

Obsérvese que la misma sustitución $y=y_1\int u\,dx$, donde y_1 es solución de la ecuación $L[y]=0$, reduce en una unidad también el orden de la ecuación lineal no homogénea $L[y]=f(x)$, puesto que dicha sustitución no altera el segundo miembro de la ecuación.

Conociendo k soluciones linealmente independientes en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$, y_1, y_2, $\ldots$, y_k de la ecuación lineal homogénea, se puede reducir su orden hasta $n-k$, en el mismo segmento $a\leqslant x\leqslant b$.

En efecto, reduciendo en una unidad el orden de la ecuación

$$L[y]=0 \tag{2.20}$$

por medio de la sustitución $y=y_k\int u\,dx$, obtenemos nuevamente una ecuación lineal homogénea

$$a_0(x)\,u^{(n-1)}+a_1(x)\,u^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,u=0 \tag{2.25}$$

de orden $n-1$. Además, conocemos $k-1$ soluciones linealmente independientes de ésta:

$$u_1=\left(\frac{y_1}{y_k}\right)',\quad u_2=\left(\frac{y_2}{y_k}\right)',\quad \ldots,\quad u_{k-1}=\left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)',$$

las cuales se obtienen colocando sucesivamente $y=y_1$, $y=y_2$, $\ldots$ $\ldots$, $y=y_{k-1}$ en $y=y_k\int u\,dx$ o bien en $u=\left(\frac{y}{y_k}\right)'$. (Obsérvese que a la solución $y=y_k$ ya utilizada para la reducción del orden de la ecuación (2.20) le corresponde la solución trivial $u\equiv 0$ de la ecuación (2.25)).

Las soluciones u_1, u_2, $\ldots$, u_{k-1} son linealmente independientes, puesto que si entre éstas existiera una dependencia lineal en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$:

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_{k-1}u_{k-1}\equiv 0,$$

o bien

$$\alpha_1\left(\frac{y_1}{y_k}\right)'+\alpha_2\left(\frac{y_2}{y_k}\right)'+\ldots+\alpha_{k-1}\left(\frac{y_{k-1}}{y_2}\right)'\equiv 0, \tag{2.26}$$

donde por lo menos un $\alpha_i\neq 0$, entonces multiplicando por dx

e integrando la identidad (2.26) desde x_0 hasta x, donde $a \leqslant x \leqslant b$ y x_0 es un punto del segmento $[a, b]$, tendríamos

$$\alpha_1 \frac{y_1(x)}{y_k(x)} + \alpha_2 \frac{y_2(x)}{y_k(x)} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x)}{y_k(x)} -$$
$$- \left[\alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)}\right] \equiv 0,$$

o bien, multiplicando por $y_k(x)$ y designando

$$- \left[\alpha_1 \frac{y_1(x_0)}{y_k(x_0)} + \alpha_2 \frac{y_2(x_0)}{y_k(x_0)} + \ldots + \alpha_{k-1} \frac{y_{k-1}(x_0)}{y_k(x_0)}\right] = \alpha_k,$$

obtendríamos, contrariamente a lo supuesto al principio, una dependencia lineal entre las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_k$:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_k y_k \equiv 0,$$

donde al menos un $\alpha_i \neq 0$. De esta manera, utilizando una solución particular y_k, hemos reducido el orden de la ecuación en una unidad, conservando su linealidad y su homogeneidad; además, conocemos $k-1$ soluciones linealmente independientes de la ecuación transformada. Por lo tanto, por este mismo método se puede reducir el orden en otra unidad; utilizando nuevamente otra solución y continuando este proceso k veces, obtenemos una ecuación lineal de orden $n-k$.

Ejemplo 6.

$$xy'' - xy' + y = 0. \tag{2.27}$$

La ecuación tiene la solución particular evidente $y_1 = x$. Reduciendo el orden mediante la sustitución

$$y = x\int u\,dx, \quad y' = xu + \int u\,dx, \quad y'' = xu' + 2u,$$

se reduce (2.27) a la forma

$$x^2u' + (2-x)\,xu = 0,$$

de donde

$$\frac{du}{u} = \frac{x-2}{x}\,dx, \quad u = c_1\frac{e^x}{x^2}, \quad y = x\int u\,dx = x\left[c_1\int \frac{e^x}{x^2}\,dx + c_2\right].$$

Lema. *Dos ecuaciones de la forma*

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0, \tag{2.28}$$
$$y^{(n)} + q_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)\,y = 0, \tag{2.29}$$

donde las funciones $p_i(x)$ y $q_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son continuas en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, las cuales tienen un sistema fundamental *común de soluciones* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *coinciden, es decir, que* $p_i(x) \equiv q_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *en el segmento* $a \leqslant x \leqslant b$.

D e m o s t r a c i ó n. Restanto (2.29) de (2.28) miembro a miembro, obtenemos la nueva ecuación:

$$[p_1(x) - q_1(x)]\, y^{(n-1)} + [p_2(x) - q_2(x)]\, y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + [p_n(x) - q_n(x)]\, y = 0, \tag{2.30}$$

cuyas soluciones son las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones (2.28) y (2.29).

Supongamos que por lo menos uno de los coeficientes de la ecuación (2.30) $[p_i(x) - q_i(x)]$ sea diferente de cero al menos en un punto x_0 del segmento $a \leqslant x \leqslant b$. Entonces, en virtud de la continuidad de las funciones $p_i(x)$ y $q_i(x)$, este coeficiente sería diferente de cero en cierto entorno del punto x_0 y, por lo tanto, en dicho entorno las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ serían soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea (2.30), de orden no mayor que $n-1$, lo cual contradice al corolario del teorema 2.7. Esto significa que todos los coeficientes de la ecuación (2.30)

$$p_i(x) - q_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

es decir, $p_i(x) \equiv q_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$.

De este modo, el sistema fundamental de soluciones $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$ determina por completo la ecuación lineal homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0 \tag{2.28}$$

y, por consiguiente, se puede plantear el problema de hallar la ecuación (2.28) que posea el sistema fundamental de soluciones

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Como cualquier solución y de la ecuación buscada (2.28) debe ser linealmente dependiente de las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$, entonces el wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] = 0$. Escribamos esta ecuación en forma desarrollada:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' & y'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0,$$

o bien, descomponiéndola por los elementos de la última columna,

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\, y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \ldots = 0. \tag{2.31}$$

La ecuación obtenida (2.31) es la ecuación lineal homogénea buscada, que posee el sistema dado de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (puesto que para $y = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] \equiv 0$). Dividiendo ambos miembros de la ecuación (2.31) entre el coeficiente $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ de la derivada de mayor grado, diferente de cero, la reducimos a la forma (2.28).

De aquí se deduce que, en particular,

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}.$$

Obsérvese que el determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{2.32}$$

es igual a la derivada del wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. En efecto, según la regla de derivación de un determinante, la derivada

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es igual a la suma sobre i desde 1 hasta n de determinantes que se diferencian del wronskiano en que en ellos se han derivado los elementos de la i-ésima fila, y las filas restantes se dejan sin variación. En esta suma solamente el último determinante, para $i = n$, que coincide con el determinante (2.32) puede ser diferente de cero. Los restantes son iguales a cero, ya que sus filas i e $i+1$ coinciden.

Por lo tanto, $p_1(x) = -\frac{W'}{W}$, de donde, multiplicando por dx e integrando, se obtiene

$$\ln|W| = -\int p_1(x)\,dx + \ln c, \qquad W = ce^{-\int p_1(x)\,dx}$$

o bien

$$W = ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx} \tag{2.33}$$

Para $x = x_0$ se obtiene $c = W(x_0)$, de donde

$$W(x) = W(x_0)\,e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx} \tag{2.34}$$

Las fórmulas (2.33) ó (2.34), que fueron obtenidas por primera vez por M. V. Ostrogradski e, independientemente de éste, por Liouville, se llaman *fórmulas de Ostrogradski-Liouville.*

La fórmula de Ostrogradski-Liouville (2.34) puede ser aplicada a la integración de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0, \tag{2.35}$$

si es conocida una solución no trivial y_1 de la misma. Según la fórmula (2.34), cualquier solución de la ecuación (2.35) debe ser también solución de la ecuación

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int p_1(x)\,dx},$$

o bien

$$y_1 y' - y y_1' = c_1 e^{-\int p_1(x)\,dx}.$$

Para integrar esta ecuación lineal de primer orden lo más fácil es aplicar el método del factor integrante.

Multiplicando por $\mu = \frac{1}{y_1^2}$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^2}\,e^{-\int p_1(x)\,dx},$$

de donde

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{c_1 e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + c_2,$$

o bien

$$y = c_2 y_1 + c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx.$$

§ 4. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES Y ECUACIONES DE EULER

1. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes. Si en la ecuación lineal homogénea

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0 \qquad (2.36)$$

todos los coeficientes a_i son constantes, entonces sus soluciones particulares pueden ser halladas en la forma $y=e^{kx}$, donde k es una constante. En efecto, sustituyendo en (2.36) $y=e^{kx}$ e $y^{(p)}=k^pe^{kx}$ $(p=1, 2, \ldots, n)$, tendremos:

$$a_0k^ne^{kx}+a_1k^{n-1}e^{kx}+\ldots+a_ne^{kx}=0.$$

Dividiendo entre el factor e^{kx}, diferente de cero, se obtiene la llamada *ecuación característica*

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0. \qquad (2.37)$$

Esta ecuación de n-ésimo grado determina los valores de k para los cuales $y=e^{kx}$ es solución de la ecuación lineal homogénea inicial con coeficientes constantes (2.36). Si todas las raíces $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de la ecuación característica son diferentes, entonces de esta forma se hallan n soluciones linealmente independientes $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$ de la ecuación (2.36) (véase la pág. 99, ejemplo 2). Por consiguiente,

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+\ldots+c_ne^{k_nx},$$

donde c_i son constantes arbitrarias, es solución general de la ecuación inicial (2.36). Este método de integración de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes fue aplicado por primera vez por Euler.

Ejemplo 1.

$$y''-3y'+2y=0.$$

La ecuación característica tiene la forma $k^2-3k+2=0$; sus raíces son $k_1=1$, $k_2=2$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación inicial tiene la forma $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

Ejemplo 2.

$$y'''-y'=0.$$

La ecuación característica $k^3-k=0$ tiene las raíces $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=-1$. La solución general de dicha ecuación es $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$.

Puesto que los coeficientes de la ecuación (2.36) se presuponen reales, las raíces complejas de la ecuación característica pueden aparecer sólo en pares conjugados. Las soluciones complejas $e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $e^{(\alpha-\beta i)x}$, correspondientes al par de raíces complejas conjugadas

$$k_1=\alpha+\beta i \text{ y } k_2=\alpha-\beta i,$$

pueden ser sustituidas por dos soluciones reales: por las partes real e imaginaria (véase la pág. 98) de una de las soluciones.

$$e^{(\alpha+\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\operatorname{sen}\beta x),$$

o bien

$$e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\operatorname{sen}\beta x).$$

De esta manera, al par de raíces complejas conjugadas $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ le corresponden dos soluciones reales: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$.

Ejemplo 3.

$$y''+4y'+5y=0.$$

La ecuación característica tiene la forma $k^2+4k+5=0$, y sus raíces son $k_{1,2}=-2\pm i$. La solución general es

$$y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x).$$

Ejemplo 4.

$$y''+a^2y=0.$$

La ecuación característica $k^2+a^2=0$ tiene las raíces $k_{1,2}=\pm ai$. La solución general es

$$y=c_1\cos ax+c_2\operatorname{sen} ax.$$

Si entre las raíces de la ecuación característica hay raíces múltiples, entonces la cantidad de soluciones distintas del tipo e^{kx} es menor que n y, por lo tanto, las soluciones linealmente independientes que faltan deben ser buscadas en otra forma.

Demostremos que si la ecuación característica tiene la raíz k_i de multiplicidad α_i, entonces no sólo e^{k_ix} será solución de la ecuación inicial, sino también xe^{k_ix}, $x^2e^{k_ix}$, $\ldots$, $x^{\alpha_i-1}e^{k_ix}$.

Supongamos primeramente que la ecuación característica tiene la raíz $k_i=0$ de multiplicidad α_i. Por lo tanto, el primer miembro de la ecuación característica (2.37) tiene, en este caso, el factor común k^{α_i}, es decir, los coeficientes $a_n=a_{n-1}=\ldots=a_{n-\alpha_i+1}=0$, y la ecuación característica tiene la forma

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-\alpha_i}k^{\alpha_i}=0.$$

La ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-\alpha_i}y^{(\alpha_i)}=0,$$

posee evidentemente las soluciones particulares $1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_i-1}$, ya que la ecuación no contiene derivadas de orden menor que α_i. De esta manera, a la raíz múltiple $k_i=0$, de multiplicidad α_i, le corresponden α_i soluciones linealmente independientes (véase la pág. 99, ejemplo 1)

$$1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_i-1}.$$

Si la ecuación característica tiene una raíz $k_i \neq 0$ de multiplicidad α_i, entonces la sustitución de variables

$$y = e^{k_i x} z \tag{2.38}$$

reduce el problema al caso ya analizado de una raíz múltiple igual a cero.

En efecto, la transformación lineal homogénea de la función desconocida (2.38), como fue indicado en la pág. 97, conserva la linealidad y la homogeneidad de la ecuación. La constancia de los coeficientes en la sustitución de las variables (2.38) también se conserva, puesto que

$$y^{(p)} = (ze^{k_i x})^{(p)} = e^{k_i x}\left(z^{(p)} + pz^{(p-1)} k_i + \frac{p(p-1)}{2!} z^{(p-2)} k_i^2 + \ldots + zk_i^p\right),$$

y después de la sustitución en la ecuación (2.36) y de la división entre $e^{k_i x}$, los coeficientes de $z, z', \ldots, z^{(n)}$ que quedan son constantes.

De esta manera, la ecuación transformada será una ecuación lineal homogénea de n-ésimo orden con coeficientes constantes:

$$b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \ldots + b_n z = 0, \tag{2.39}$$

y las raíces de la ecuación característica

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{2.37}$$

se diferenciarán de las raíces de la ecuación característica de la ecuación transformada (2.39)

$$b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \tag{2.40}$$

en el sumando k_i, puesto que entre las soluciones $y = e^{kx}$ de la ecuación (2.36) y $z = e^{px}$ de la ecuación (2.39) deberá existir la dependencia $y = ze^{k_i x}$, o bien $e^{kx} = e^{px}e^{k_i x}$, de donde $k = p + k_i$. Por lo tanto, a la raíz $k = k_i$ de la ecuación (2.37) le corresponde la raíz $p_i = 0$ de (2.40).

No es difícil comprobar que en esta correspondencia se conserva también la multilpicidad de la raíz, es decir, que la raíz $p_i = 0$ será de multiplicidad α_i.

En efecto, la raíz múltiple k_i de la ecuación (2.37) se puede considerar como el resultado de la coincidencia de diferentes raíces de esta ecuación al variar sus coeficientes. Pero entonces, debido a la dependencia $k = p + k_i$, coincidirán también con $p = 0$ α_i raíces de la ecuación (2.40).

A la raíz $p = 0$ de multiplicidad α_i le corresponden las soluciones particulares $z = 1$, $z = x, \ldots, z = x^{\alpha_i - 1}$. Por consiguiente, a la raíz k_i de multiplicidad α_i de la ecuación (2.37) le corresponderán las α_i soluciones particulares

$$y=e^{k_i x},\quad y=xe^{k_i x},\ \ldots,\ y=x^{\alpha_i-1}e^{k_i x} \tag{2.41}$$

debido a la dependencia $y=ze^{k_i x}$.

Queda por demostrar que las soluciones

$$e^{k_i x},\ xe^{k_i x},\ \ldots,\ x^{\alpha_i-1}e^{k_i x}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{2.42}$$

donde m es el número de diferentes raíces k_i de la ecuación característica, son linealmente independientes. Pero esto fue demostrado en el ejemplo 3 de la pág. 100.

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.36) tiene la forma

$$y=\sum_{i=1}^{m}\left(c_{0i}+c_{1i}x+c_{2i}x^2+\ldots+c_{\alpha_i-1,\,i}x^{\alpha_i-1}\right)e^{k_i x},$$

donde c_{si} son constantes arbitrarias.

Ejemplo 5.

$$y'''-3y''+3y'-y=0.$$

La ecuación característica $k^3-3k^2+3k-1=0$, o bien $(k-1)^3=0$, posee la raíz triple $k_{1,2,3}=1$. Por consiguiente, la solución general tiene la forma

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)\,e^x.$$

Si la ecuación característica tiene una raíz múltiple compleja $p+qi$ de multiplicidad α, entonces sus soluciones correspondientes

$$e^{(p+qi)x},\ xe^{(p+qi)x},\ x^2e^{(p+qi)x},\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{(p+qi)x}$$

se pueden transformar mediante las fórmulas de Euler

$$e^{(p+qi)x}=e^{px}(\cos qx+i\operatorname{sen} qx)$$

y, separando las partes real e imaginaria, obtener 2α soluciones reales:

$$\left.\begin{array}{l} e^{px}\cos qx,\ xe^{px}\cos qx,\ x^2e^{px}\cos qx,\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{px}\cos qx,\\ e^{px}\operatorname{sen} qx,\ xe^{px}\operatorname{sen} qx,\ x^2e^{px}\operatorname{sen} qx,\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{px}\operatorname{sen} qx. \end{array}\right\} \tag{2.43}$$

Tomando las partes reales e imaginarias de las soluciones correspondientes a la raíz conjugada $p-qi$ de la ecuación característica, no se obtienen nuevas soluciones linealmente independientes. De esta manera, al par de raíces complejas conjugadas $p\pm qi$ de multiplicidad α le corresponden 2α soluciones reales linealmente independientes (2.43).

Ejemplo 6.

$$y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=0.$$

La ecuación característica $k^4+2k^2+1=0$, o bien $(k^2+1)^2=0$, tiene la raíz doble $\pm i$. Por lo tanto, la solución general es de la forma

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\operatorname{sen} x.$$

2. Ecuaciones de Euler. Las ecuaciones de la forma

$$a_0x^{(n)}y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0, \qquad (2.44)$$

donde todas las a_i son constantes, se llaman *ecuaciones de Euler*. La ecuación de Euler se reduce, mediante la sustitución de la variable independiente $x=e^t$ *), a una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes.

En efecto, como fue señalado en la pág. 96, la linealidad y la homogeneidad de la ecuación se conservan en la transformación de la variable independiente, y los coeficientes se vuelven constantes, puesto que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\beta_1\frac{dy}{dt}+\beta_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}\right), \qquad (2.45)$$

donde todas las β_i son constantes, y al sustituir en la ecuación (2.44) los factores e^{-kt} se simplifican con los factores $x^k=e^{kt}$.

La validez de la igualdad (2.45) puede ser fácilmente demostrada por el método de inducción. En efecto, suponiendo que (2.45) se cumple, y derivándola nuevamente respecto a x, se demuestra la validez de (2.45) también para $\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}$:

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=e^{-(k+1)t}\left(\beta_1\frac{d^2y}{dt^2}+\beta_2\frac{d^3y}{dt^3}+\ldots+\beta_k\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right)-$$
$$-ke^{-(k+1)t}\left(\beta_1\frac{dy}{dt}+\beta_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}\right)=$$
$$=e^{-(k+1)t}\left(\gamma_1\frac{dy}{dt}+\gamma_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+\gamma_{k+1}\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right),$$

donde todas las γ_i son constantes.

De este modo, la validez de la fórmula (2.45) queda demostrada y, por lo tanto, los productos

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\beta_1\frac{dy}{dt}+\beta_2\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}$$

---

*) O bien $x=-e^t$, si $x<0$; en lo sucesivo consideraremos, para mayor determinación, que $x>0$.

que entran en forma lineal con coeficientes constantes en la ecuación de Euler

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \qquad (2.44')$$

se expresan en forma lineal (y con coeficientes constantes) mediante las derivadas de la función y respecto a la nueva variable t. De aquí se deduce que la ecuación transformada será una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes:

$$b_0 \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = 0. \qquad (2.46)$$

En lugar de transformar la ecuación de Euler en una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuyas soluciones particulares tienen la forma $y = e^{kt}$, se puede buscar directamente la solución de la ecuación inicial en la forma $y = x^k$, ya que

$$e^{kt} = x^k.$$

La ecuación obtenida después de simplificar entre x^k

$$a_0 k (k-1) \ldots (k-n+1) + a_1 k (k-1) \ldots (k-n+2) + \ldots$$
$$\ldots + a_n = 0 \qquad (2.47)$$

para la determinación de k, debe coincidir con la ecuación característica para la ecuación transformada (2.46). En consecuencia, a las raíces k_i de la ecuación (2.47), de multiplicidad α_i, le corresponden las soluciones

$$e^{k_i t}, \quad t e^{k_i t}, \quad t^2 e^{k_i t}, \quad \ldots, \quad t^{\alpha_i - 1} e^{k_i t}$$

de la ecuación transformada, o bien las

$$x^{k_i}, \quad x^{k_i} \ln x, \quad x^{k_i} \ln^2 x, \quad \ldots, \quad x^{k_i} \ln^{\alpha_i - 1} x$$

de la ecuación inicial. A las raíces complejas conjugadas $p \pm qi$ de la ecuación (2.47) de multiplicidad α le corresponden las soluciones

$$e^{pt} \cos qt, \quad t e^{pt} \cos qt, \quad \ldots, \quad t^{\alpha - 1} e^{pt} \cos qt,$$
$$e^{pt} \operatorname{sen} qt, \quad t e^{pt} \operatorname{sen} qt, \quad \ldots, \quad t^{\alpha - 1} e^{pt} \operatorname{sen} qt$$

de la ecuación transformada, o las

$$x^p \cos (q \ln x), \quad x^p \ln x \cos (q \ln x), \quad \ldots, \quad x^p \ln^{\alpha - 1} x \cos (q \ln x),$$
$$x^p \operatorname{sen} (q \ln x), \quad x^p \ln x \operatorname{sen} (q \ln x), \quad \ldots, \quad x^p \ln^{\alpha - 1} x \operatorname{sen} (q \ln x)$$

de la ecuación inicial de Euler.

Ejemplo 7.

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 0.$$

Buscamos la solución en la forma $y=x^k$; $k(k-1)+\frac{5}{2}k-1=0$, de donde $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=-2$. Por lo tanto, la solución general para $x>0$ tiene la forma

$$y=c_1x^{\frac{1}{2}}+c_2x^{-2}.$$

Ejemplo 8.

$$x^2y''-xy'+y=0.$$

Buscamos la solución en la forma $y=x^k$; $k(k-1)-k+1=0$, o bien $(k-1)^2=0$, $k_{1,2}=1$. Por consiguiente, la solución general para $x>0$ será

$$y=(c_1+c_2\ln x)\,x.$$

Ejemplo 9.

$$x^2y''+xy'+y=0.$$

Hallamos la solución en la forma $y=x^k$; $k(k-1)+k+1=0$, de donde $k_{1,2}=\pm i$. Por consiguiente, la solución general para $x>0$ tiene la forma

$$y=c_1\cos\ln x+c_2\operatorname{sen}\ln x.$$

Las ecuaciones de la forma

$$a_0(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\dots$$
$$\dots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=0 \qquad (2.48)$$

se denominan también *ecuaciones de Euler*, y se reducen a la ecuación (2.44) por medio de la sustitución de la variable independiente $ax+b=x_1$. Por lo tanto, las soluciones particulares de esta ecuación se pueden buscar en la forma $y=(ax+b)^k$, o transformar la ecuación (2.48) a una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, mediante la sustitución de las variables $ax+b=e^t$ (o bien $ax+b=-e^t$, si $ax+b<0$).

§ 5. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS

La ecuación *lineal no homogénea* tiene la forma

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=\varphi(x).$$

Si $a_0(x)\neq 0$ en el intervalo considerado de variación de x, entonces dividiendo entre $a_0(x)$ se obtiene

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)y=f(x). \qquad (2.49)$$

Esta ecuación, conservando las notaciones anteriores, la escribiremos en forma compacta:

$$L[y]=f(x).$$

Si para $a\leqslant x\leqslant b$, en la ecuación (2.49) todos los coeficientes $p_i(x)$ y el segundo miembro $f(x)$ son continuos, entonces ella posee una solución única que satisface las condiciones

$$y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)} \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

donde $y_0^{(k)}$ son números reales cualesquiera, y x_0, un punto arbitrario del intervalo $a<x<b$.

En efecto, el segundo miembro de la ecuación

$$y^{(n)}=-p_1(x)\,y^{(n-1)}-p_2(x)\,y^{(n-2)}-\ldots-p_n(x)\,y+f(x) \quad (2.49_1)$$

en un entorno de los valores iniciales considerados satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad:

1) el segundo miembro es continuo en todos sus argumentos;

2) posee derivadas parciales acotadas respecto a todas las $y^{(k)}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$, puesto que dichas derivadas son iguales a los coeficientes $-p_{n-k}(x)$, que son, por hipótesis, continuos en $a\leqslant x\leqslant b$. Señalemos una vez más que sobre las condiciones iniciales $y_0^{(k)}$ no se establecen ningunas limitaciones.

De las dos propiedades fundamentales del operador lineal

$$L[cy]\equiv cL[y],$$
$$L[y_1+y_2]\equiv L[y_1]+L[y_2],$$

donde c es una constante, se deduce directamente que:

1) *La suma* $\tilde{y}+y_1$ *de una solución* $\tilde{y}$ *de la ecuación no homogénea*

$$L[y]=f(x) \quad (2.49)$$

y de una solución y_1 *de la ecuación homogénea correspondiente* $L[y]=0$, *es solución de la ecuación no homogénea* (2.49).

Demostración.

$$L[\tilde{y}+y_1]\equiv L[\tilde{y}]+L[y_1];$$

pero $L[\tilde{y}]\equiv f(x)$ y $L[y_1]\equiv 0$. Por consiguiente,

$$L[\tilde{y}+y_1]\equiv f(x).$$

2) *Si* y_i *es solución de la ecuación* $L[y]=f_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, *entonces* $y=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i$ *es solución de la ecuación*

$$L[y]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x),$$

donde las α_i *son constantes.*

Demostración.

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i\right]\equiv\sum_{i=1}^{m}L[\alpha_i y_i]\equiv\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L[y_i]; \quad (2.50)$$

pero $L[y_i] \equiv f_i(x)$. Por lo tanto,

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x).$$

Esta propiedad, denominada con frecuencia *principio de superposición*, conserva evidentemente su validez también para $m \to \infty$, si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ converge y puede ser derivada término a término n veces, puesto que en este caso es posible pasar al límite en las identidades (2.50).

3) *Si la ecuación $L[y] = U(x) + iV(x)$, donde todos los coeficientes $p_i(x)$ y las funciones $U(x)$ y $V(x)$ son reales, tiene la solución $y = u(x) + iv(x)$, entonces la parte real $u(x)$ y la parte imaginaria $v(x)$ son respectivamente soluciones de las ecuaciones*

$$L[y] = U(x) \quad \text{y} \quad L[y] = V(x).$$

Demostración.

$$L[u + iv] \equiv U(x) + iV(x),$$

o bien

$$L[u] + iL[v] \equiv U(x) + iV(x).$$

Por lo tanto, las partes reales $L[u] \equiv U(x)$ e imaginarias $L[v] \equiv V(x)$ son iguales por separado.

Teorema 2.8. *La solución general en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ de la ecuación $L[y] = f(x)$ con coeficientes $p_i(x)$ y con segundo miembro $f(x)$ continuos en dicho segmento, es igual a la suma de la solución general $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ de la ecuación homogénea correspondiente y de cualquier solución particular $\bar{y}$ de la ecuación no homogénea.*

Demostración. Hay que demostrar que

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \bar{y}, \tag{2.51}$$

donde c_i son constantes arbitrarias e y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, es solución general de la ecuación no homogénea $L[y] = f(x)$. Tomando en cuenta 1) (pág. 117) y la validez del teorema de existencia y unicidad para la ecuación considerada, hay que demostrar que escogiendo las constantes c_i en (2.51) se pueden satisfacer las condiciones iniciales dadas arbitrariamente

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2.52}$$

donde $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Exigiendo que la solución (2.51) satisfaga las condiciones iniciales (2.52), se llega al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) + \bar{y}(x_0) = y_0, \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) + \bar{y}'(x_0) = y_0', \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i''(x_0) + \bar{y}''(x_0) = y_0'', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) + \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

Este sistema de n ecuaciones con n incógnitas, lineal con respecto a las constantes c_i, para cualesquiera segundos miembros, permite solución única con respecto a c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ya que el determinante del sistema (2.53) es diferente de cero para cualesquiera valores de x en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ y, en particular, para $x = x_0$, por ser el wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ del sistema de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente.

Por lo tanto, la integración de la ecuación lineal no homogénea se reduce a hallar una solución particular de dicha ecuación y a integrar la ecuación lineal homogénea correspondiente.

Ejemplo 1.

$$y'' + y = x.$$

Una solución particular de esta ecuación $y = x$ es inmediata; la solución general de la ecuación homogénea correspondiente tiene la forma

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \text{ (véase la pág. 111, ejemplo 4).}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación no homogénea inicial es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x.$$

Si la elección de una solución particular de la ecuación no homogénea es difícil, pero la solución general de la ecuación homogénea correspondiente $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ *ya fue hallada, entonces se puede integrar la ecuación lineal no homogénea por el método de variación de las constantes.*

Al aplicar este método, la solución de la ecuación no homogénea se busca en la forma $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$, o sea que en esencia, en lugar de la función incógnita y introducimos n funciones desconocidas $c_i(x)$. Puesto que escogiendo las funciones $c_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ hay que satisfacer solamente una ecuación

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y=f(x), \tag{2.49}$$

se puede exigir que estas n funciones $c_i(x)$ satisfagan otras $n-1$ ecuaciones, las cuales se escogen de manera que las derivadas de la función $y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i(x)$ tengan en lo posible la misma forma que tienen cuando las c_i son constantes. Escojamos $c_i(x)$ de manera tal que la segunda suma de

$$y'=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i'(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i(x)$$

sea igual a cero,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i(x)=0$$

y, por lo tanto,

$$y'=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i'(x),$$

es decir, que y' tiene la misma forma que cuando las c_i son constantes. De la misma manera, en la derivada segunda

$$y''=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i''+\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i'$$

exigimos que la segunda suma sea igual a cero, con lo cual se somete $c_i(x)$ a la segunda condición:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i'=0.$$

Continuamos calculando las derivadas de la función $y=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,y_i$ de orden hasta $n-1$ inclusive, e igualando cada vez a cero la suma $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i^{(k)}(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\,y_i^{(k)}(x)=0 \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-2), \tag{2.54}$$

obtenemos

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i, \\ y' &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i', \\ y'' &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i'', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n-1)}, \\ y^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

En la última igualdad no podemos exigir que $\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = 0$, puesto que las funciones $c_i(x)$ ya están sometidas a las $n-1$ condiciones (2.54), y hay aún que satisfacer la ecuación inicial (2.49). Sustituyendo y, y', ..., $y^{(n)}$ de (2.55) en la ecuación

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y = f(x), \tag{2.49}$$

se obtiene la ecuación que falta para la determinación de $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Es evidente que en el primer miembro de (2.49) queda sólo la suma $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)}$, ya que todos los términos restantes tienen la misma forma que cuando las c_i son constantes, y cuando éstas son constantes, la función $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ satisface la ecuación homogénea correspondiente.

Esto puede verificarse también mediante el cálculo directo:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n)} + p_1(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)} + p_2(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-2)} + \dots$$
$$\dots + p_n(x) \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = f(x),$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \left[y_i^{(n)} + p_1(x)\, y_i^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y_i \right] = f(x). \tag{2.56}$$

Todas las y_i son soluciones particulares de la ecuación homogénea correspondiente; por consiguiente, $y_i^{(n)} + p_1(x)\, y_i^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\, y_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, y la ecuación (2.56) toma la forma

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = f(x).$$

De esta manera, las funciones $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se determinan del sistema de n ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i' = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i'' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-2)} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_i^{(n-1)} = f(x), \end{array}\right\} \qquad (2.57)$$

cuyo determinante es diferente de cero, debido a que éste

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es el wronskiano de las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente. Al determinar de (2.57) todas las $c_i'(x) = \varphi_i(x)$ por cuadraturas, hallamos

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + \bar{c}_i.$$

Ejemplo 2.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente tiene la forma $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Variemos c_1 y c_2:

$$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \operatorname{sen} x.$$

$c_1(x)$ y $c_2(x)$ se determinan del sistema (2.57):

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \operatorname{sen} x = 0,$$
$$-c_1'(x) \operatorname{sen} x + c_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x},$$

de donde

$$c_1'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad c_1(x) = \ln|\cos x| + \bar{c}_1;$$

$$c_2'(x) = 1, \quad c_2(x) = x + \bar{c}_2$$

La solución general de la ecuación inicial es:

$$y = \bar{c}_1 \cos x + \bar{c}_2 \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 3.

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t).$$

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente tiene la forma $x = c_1 \cos at + c_2 \operatorname{sen} at$. Variando las constantes: $x = c_1(t) \cos at + c_2(t) \operatorname{sen} at$, se obtiene

$$c_1'(t) \cos at + c_2'(t) \operatorname{sen} at = 0,$$

$$-ac_1'(t) \operatorname{sen} at + ac_2'(t) \cos at = f(t),$$

de donde

$$c_1'(t) = -\frac{1}{a} f(t) \operatorname{sen} at, \quad c_1(t) = -\frac{1}{a} \int_0^t f(u) \operatorname{sen} au \, du + \bar{c}_1,$$

$$c_2'(t) = \frac{1}{a} f(t) \cos at, \quad c_2(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(u) \cos au \, du + \bar{c}_2,$$

$$x(t) = -\frac{\cos at}{a} \int_0^t f(u) \operatorname{sen} au \, du + \frac{\operatorname{sen} at}{a} \int_0^t f(u) \cos au \, du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \operatorname{sen} at,$$

o bien

$$x(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(u) [\cos au \operatorname{sen} at - \operatorname{sen} au \cos at] \, du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \operatorname{sen} at,$$

de donde, en definitiva, se obtiene

$$x(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(u) \operatorname{sen} a(t-u) \, du + \bar{c}_1 \cos at + \bar{c}_2 \operatorname{sen} at.$$

Obsérvese que el primer sumando del segundo miembro es solución particular de la ecuación inicial, que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$.

De este modo, si se conocen n soluciones particulares linealmente independientes de la ecuación homogénea correspondiente, se puede, por el método de variación de las constantes, integrar la ecuación no homogénea

$$L[y] = f(x).$$

Si se conocen, en cambio, solamente k (donde $k < n$) soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_k$ de la ecuación homogénea correspondiente, entonces, como ya fue señalado en la pág. 105, el cambio de variables permite reducir su orden hasta $n-k$, conservando su linealidad. Obsérvese que si $k=n-1$, el orden de la ecuación se reduce a 1, y la ecuación lineal de primer orden siempre se puede integrar en cuadraturas.

Análogamente se pueden utilizar k soluciones de la ecuación no homogénea $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_k$, puesto que sus diferencias son ya soluciones de la ecuación homogénea correspondiente. En efecto,

$$L[\tilde{y}_j] \equiv f(x), \quad L[\tilde{y}_p] \equiv f(x);$$

por lo tanto,

$$L[\tilde{y}_j-\tilde{y}_p] \equiv L[\tilde{y}_j]-L[\tilde{y}_p] \equiv f(x)-f(x) \equiv 0.$$

Si las soluciones particulares de la ecuación homogénea correspondiente

$$(\tilde{y}_1-\tilde{y}_k), \ (\tilde{y}_2-\tilde{y}_k), \ \ldots, \ (\tilde{y}_{k-1}-\tilde{y}_k) \tag{2.58}$$

son linealmente independientes, entonces el orden de la ecuación $L[y]=f(x)$ puede ser reducido hasta $n-(k-1)$. Es evidente que las otras diferencias $\tilde{y}_j-\tilde{y}_p$ son combinaciones lineales de las soluciones (2.58):

$$\tilde{y}_j-\tilde{y}_p=(\tilde{y}_j-\tilde{y}_k)-(\tilde{y}_p-\tilde{y}_k)$$

y, por consiguiente, no pueden ser utilizadas para la reducción ulterior del orden.

Señalemos otro método, el *método de Cauchy*, para hallar la solución particular de la ecuación lineal no homogénea

$$L[y(x)]=f(x). \tag{2.59}$$

En este método se supone conocida la solución $K(x, s)$, que depende de un parámetro, de la ecuación homogénea correspondiente $L[y(x)]=0$, y que satisface las condiciones

$$K(s, s)=K'(s, s)=\ldots=K^{(n-2)}(s, s)=0; \tag{2.60}$$

$$K^{(n-1)}(s, s)=1. \tag{2.61}$$

No es difícil comprobar que en este caso

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} K(x, s) f(s)\, ds \tag{2.62}$$

será solución particular de la ecuación (2.59), que satisface las condiciones iniciales nulas

$$y(x_0)=y'(x_0)=\ldots=y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

En efecto, derivando (2.62) y teniendo en cuenta las condiciones (2.60) y (2.61), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} y'(x) &= \int_{x_0}^{x} K'_x(x, s) f(s)\, ds, \\ y''(x) &= \int_{x_0}^{x} K''_x(x, s) f(s)\, ds, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x) &= \int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x, s) f(s)\, ds, \\ y^{(n)}(x) &= \int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x, s) f(s)\, ds + f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (2.63)$$

Sustituyendo (2.62) y (2.63) en la ecuación (2.59), obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} L[K(x, s)] f(s)\, ds + f(x) \equiv f(x),$$

puesto que $K(x, s)$ es solución de la ecuación homogénea correspondiente: $L[K(x, s)] \equiv 0$.

La solución $K(x, s)$ puede ser tomada de la solución general $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ de la ecuación homogénea, si se escogen las constantes arbitrarias c_i de manera que se cumplan las condiciones (2.60) y (2.61).

Ejemplo 4. Para la ecuación

$$y'' + a^2 y = f(x) \qquad (2.64)$$

la solución general es $y = c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax$. Las condiciones (2.60) y (2.61) conducen a las siguientes ecuaciones:

$$c_1 \cos as + c_2 \operatorname{sen} as = 0,$$
$$-ac_1 \operatorname{sen} as + ac_2 \cos as = 1.$$

Por lo tanto,

$$c_1 = -\frac{\operatorname{sen} as}{a}, \quad c_2 = \frac{\cos as}{a}$$

y la solución buscada $K(x, s)$ tiene la forma

$$K(x, s) = \frac{1}{a} \operatorname{sen} a(x - s).$$

La solución de la ecuación (2.64) que satisface las condiciones iniciales nulas, según (2.62), se puede representar en la forma

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\operatorname{sen} a(x-s)\, f(s)\, ds.$$

Para $x_0=0$, esta solución coincide con la obtenida anteriormente por el otro método (véase la pág. 123) de resolución de la misma ecuación.

Se puede dar una interpretación física de la función $K(x, s)$ y de la solución de la ecuación lineal con segundo miembro en la forma (2.62). Aquí será más cómodo designar la variable independiente por la letra t.

En muchos problemas, la solución $y(t)$ de la ecuación

$$y^{(n)}+p_1(t)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)\,y=f(t) \tag{2.65}$$

describe el desplazamiento de cierto sistema, y la función $f(t)$ es la fuerza que actúa en este sistema; t es el tiempo.

Supongamos primeramente que, para $t<s$, el sistema se encuentra en estado de reposo, y que su desplazamiento se efectúa debido a la fuerza $f_\varepsilon(t)$, diferente de cero sólo en el intervalo $s<t<s+\varepsilon$, y cuyo impulso es igual a 1:

$$\int_{s}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau)\, d\tau=1.$$

Designemos por $y_\varepsilon(t)$ la solución de la ecuación

$$y^{(n)}+p_1(t)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(t)\,y=f_\varepsilon(t).$$

Se comprueba fácilmente la existencia del límite $y_\varepsilon(t)$ cuando $\varepsilon\to 0$, el cual no depende de la función $f_\varepsilon(t)$, si suponemos que ésta no cambia de signo. En efecto,

$$y_\varepsilon(t)=\int_{t_0}^{t} K(t, s)\, f_\varepsilon(s)\, ds.$$

Aplicando el teorema del valor medio para $t>s+\varepsilon$, obtenemos

$$y_\varepsilon(t)=K(t, s+\varepsilon^*)\int_{s}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau)\, d\tau=K(t, s+\varepsilon^*),$$

donde $0<\varepsilon^*<\varepsilon$; por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)=K(t, s).$$

Por ello, es natural llamar a la función $K(t, s)$ *función de influencia* del impulso instantáneo en el momento $t=s$.

Dividiendo el intervalo (t_0, t) mediante los puntos s_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ en m partes iguales de longitud $\Delta s = \frac{t - t_0}{m}$, representamos la función $f(t)$ en (2.65) como suma de las funciones $f_i(t)$, donde $f_i(t)$ es diferente de cero sólo en el i—ésimo intervalo $s_{i-1} < t < s_i$. En éste $f_i(t)$ coincide con la función $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t).$$

Debido al principio de superposición (pág. 117), la solución de la ecuación (2.65) tiene la forma

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} y_i(t),$$

donde y_i son soluciones de la ecuación

$$y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(t) y = f_i(t)$$

con condiciones iniciales nulas. Si m es suficientemente grande, la solución $y_i(t)$ se puede considerar como función de influencia del impulso instantáneo de intensidad $f_i(s_i)\Delta s$. Por consiguiente,

$$y(t) \cong \sum_{i=1}^{m} K(t, s_i) f(s_i) \Delta s.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$, se obtiene la solución de la ecuación (2.65) con condiciones iniciales nulas, en la forma

$$y = \int_{t_0}^{t} K(t, s) f(s)\, ds,$$

la cual demuestra que la influencia de la fuerza de acción continua se puede considerar como superposición de las influencias de impulsos separados.

§ 6. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES Y ECUACIONES DE EULER

Al resolver ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes, en muchos casos es posible escoger una solución particular sin dificultad, reduciéndose así el problema a la integración de la ecuación homogénea correspondiente.

Supongamos, por ejemplo, que el segundo miembro es un polinomio de grado s y que, por lo tanto, la ecuación tiene la forma

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \quad (2.66)$$

donde todas las a_j y las A_i son constantes.

Si $a_n \neq 0$, entonces existe una solución particular de la ecuación (2.66), que tiene también la forma de polinomio de grado s. En efecto, sustituyendo

$$y = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s$$

en la ecuación (2.66) y comparando los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para la determinación de los coeficientes B_i, que es siempre resoluble si $a_n \neq 0$:

$$a_nB_0 = A_0, \quad B_0 = \frac{A_0}{a_n},$$

$$a_nB_1 + sa_{n-1}B_0 = A_1,$$

de donde se determina B_1,

$$a_n B_2 + (s-1)\, a_{n-1} B_1 + s\,(s-1)\, a_{n-2} B_0 = A_2,$$

de donde se determina B_2,

. . . .

$$a_nB_s + \ldots = A_s$$

de donde se determina B_s.

De esta manera, *si $a_n \neq 0$ existe una solución particular que tiene la forma de polinomio cuyo grado es igual al grado del polinomio del segundo miembro.*

Supongamos ahora que $a_n = 0$ y, para mayor generalidad, que también $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_{n-\alpha+1} = 0$, pero $a_{n-\alpha} \neq 0$, o sea, que $k = 0$ es raíz de multiplicidad α de la ecuación característica; además, el caso $\alpha = 1$ no se excluye. Entonces, la ecuación (2.66) toma la forma

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-\alpha}\, y^{(\alpha)} = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s. \quad (2.67)$$

Haciendo $y^{(\alpha)} = z$, llegamos al caso anterior y, en consecuencia, hay una solución particular de la ecuación (2.67), para la cual

$$y^{(\alpha)} = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s.$$

Esto significa que y es un polinomio de grado $s+\alpha$; además, los términos de grado menor o igual a $\alpha-1$ de dicho polinomio tendrán coeficientes constantes arbitrarios, que pueden ser, en particular, escogidos iguales a cero. Entonces, la solución particular toma la forma:

$$y = x^\alpha (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s).$$

Ejemplo 1.

$$y'' + y = x^2 + x. \quad (2.68)$$

La solución particular tiene la forma

$$y = B_0x^2 + B_1x + B_2.$$

Sustituyéndola en la ecuación (2.68) e igualando los coeficientes de los términos de igual grado respecto a x, obtenemos

$$B_0=1, \quad B_1=1, \quad B_2=-2, \quad \tilde{y}=x^2+x-2.$$

La solución general es

$$y=c_1\cos x+c_2 \operatorname{sen} x+x^2+x-2.$$

Ejemplo 2.

$$y''+y'=x-2.$$

Se busca una solución particular de la forma

$$y=x(B_0x+B_1).$$

Sustituyendo en la ecuación e igualando los coeficientes de los términos de igual grado respecto a x en ambos miembros de la identidad obtenida, se tiene

$$B_0=\frac{1}{2}, \quad B_1=-3, \quad \tilde{y}=x\left(\frac{1}{2}x-3\right).$$

La solución general es

$$y=c_1+c_2e^{-x}+x\left(\frac{1}{2}x-3\right).$$

Consideremos ahora la ecuación lineal no homogénea de la forma

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=e^{px}(A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s). \quad (2.69)$$

donde todas las a_j y las A_i son constantes. Como fue indicado anteriormente (pág. 112), el cambio de variables $y=e^{px}z$ reduce la ecuación (2.69) a la forma

$$e^{px}[b_0z^{(n)}+b_1z^{(n-1)}+\ldots+b_nz]=e^{px}(A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s),$$

o bien

$$b_0z^{(n)}+b_1z^{(n-1)}+\ldots+b_nz=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s, \quad (2.70)$$

donde todas las b_j son constantes.

La solución particular de la ecuación (2.70), si $b_n\neq 0$, tiene la forma

$$\tilde{z}=B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s;$$

por lo tanto, la solución particular de la ecuación (2.69) será

$$\tilde{y}=e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s).$$

La condición $b_n\neq 0$ significa que $\bar{k}=0$ no es raíz de la ecuación característica

$$b_0\bar{k}^n+b_1\bar{k}^{n-1}+\ldots+b_n=0. \quad (2.71)$$

Por consiguiente, $k=p$ no es raíz de la ecuación característica

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0, \quad (2.72)$$

puesto que las raíces de estas ecuaciones están ligadas por la dependencia $k=\bar{k}+p$ (véase la pág. 112).

Si $k=0$, en cambio, es raíz de multiplicidad α de la ecuación característica (2.71) o, en otras palabras, $k=p$ es raíz de la misma multiplicidad α de la ecuación característica (2.72), entonces las soluciones particulares de las ecuaciones (2.70) y (2.69) tiene respectivamente las formas

$$\tilde{z}=x^{\alpha}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s),$$
$$\tilde{y}=x^{\alpha}e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s).$$

De esta manera, *si el segundo miembro de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes tiene la forma*

$$e^{px}(A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_s)$$

y si p no es raíz de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse en la misma forma:

$$\tilde{y}=e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s).$$

Si, en cambio, p es raíz de multiplicidad α de la ecuación característica (este caso se denomina singular o resonante), la solución particular debe ser buscada en la forma

$$\tilde{y}=x^{\alpha}e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_s).$$

Ejemplo 3.

$$y''+9y=e^{3x}.$$

La solución particular debe buscarse en la forma

$$\tilde{y}=Be^{3x}.$$

Ejemplo 4.

$$y''+y=e^{3x}(x-2).$$

La solución particular debe ser buscada en la forma

$$\tilde{y}=e^{3x}(B_0x+B_1).$$

Ejemplo 5.

$$y''-y=e^{x}(x^2-1).$$

La solución particular debe buscarse en la forma

$$\tilde{y}=xe^{x}(B_0x^2+B_1x+B_2),$$

ya que $k=1$ es una raíz simple de la ecuación característica.

Ejemplo 6.

$$y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5).$$

La solución particular debe ser buscada en la forma

$$\tilde{y}=x^3e^{-x}(B_0x+B_1),$$

debido a que $k=-1$ es una raíz triple de la ecuación característica.

Obsérvese que nuestros razonamientos son válidos también si las p son complejas; por eso, si el segundo miembro de la ecuación diferencial lineal tiene la forma

$$e^{px}\left[P_s(x)\cos qx + Q_s(x)\operatorname{sen} qx\right], \tag{2.73}$$

donde uno de los polinomios $P_s(x)$ ó $Q_s(x)$ tiene grado s y el otro, no mayor que s, entonces, reduciendo según las fórmulas de Euler las funciones trigonométricas a la forma exponencial, obtenemos en el segundo miembro

$$e^{(p+qi)x}R_s(x) + e^{(p-qi)x}T_s(x) \tag{2.74}$$

donde $R_s(x)$ y $T_s(x)$ son polinomios de grado s.

A cada sumando del segundo miembro se le puede aplicar la regla anteriormente indicada, es decir, si $p \pm qi$ no son raíces de la ecuación característica, la solución particular se puede buscar en la misma forma que el segundo miembro (2.74); si, en cambio, $p \pm qi$ son raíces de multiplicidad α de la ecuación característica, la solución particular debe multiplicarse además por x^α.

Si volvemos a las funciones trigonométricas, esta regla se puede formular así:

a) *Si $p \pm qi$ no son raíces de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse en la forma*

$$\tilde{y} = e^{px}\left[\bar{P}_s(x)\cos qx + \bar{Q}_s(x)\operatorname{sen} qx\right],$$

donde $\bar{P}_s(x)$ y $\bar{Q}_s(x)$ son polinomios de grado s con coeficientes indeterminados.

Obsérvese que si uno de los *polinomios* $P_s(x)$ ó $Q_s(x)$ tiene un grado menor que s, e incluso, en particular, es idénticamente nulo, de todos modos ambos *polinomios* $\overline{P_s}(x)$ y $\overline{Q_s}(x)$ tendrán, en general, grado s.

b) *Si $p \pm qi$ son raíces de multiplicidad α de la ecuación característica (caso de resonancia), la solución particular debe ser buscada en la forma*

$$\tilde{y} = x^\alpha e^{px}\left[\overline{P_s}(x)\cos qx + \overline{Q_s}(x)\operatorname{sen} qx\right].$$

Ejemplo 7.

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$$

Como los números $\pm 2i$ no son raíces de la ecuación característica, buscamos la solución particular en la forma

$$\tilde{y} = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x.$$

Ejemplo 8.

$$y'' + 4y = \cos 2x.$$

Como los números $\pm 2i$ son raíces simples de la ecuación característica, buscamos la solución particular en la forma

$$\tilde{y}=x[A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x].$$

Ejemplo 9.

$$y^{\text{IV}}+2y''+y=\operatorname{sen}x.$$

Puesto que los números $\pm i$ son raíces dobles de la ecuación característica, la solución particular se busca en la forma

$$\tilde{y}=x^2(A\cos x+B\operatorname{sen}x).$$

Ejemplo 10.

$$y''+2y'+2y=e^{-x}(x\cos x+3\operatorname{sen}x).$$

Debido a que los números $-1\pm i$ son raíces simples de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse en la forma

$$\tilde{y}=xe^{-x}[(A_0x+A_1)\cos x+(B_0x+B_1)\operatorname{sen}x].$$

En muchos casos, al buscar soluciones particulares de ecuaciones lineales con coeficientes constantes con segundos miembros de la forma (2.73), es conveniente pasar a las funciones exponenciales.

Por ejemplo, en la ecuación

$$y''-2y'+y=\cos x$$

se puede transformar $\cos x$ por la fórmula de Euler, o aún de modo más sencillo, considerar la ecuación

$$y''-2y'+y=e^{ix}, \tag{2.75}$$

la parte real de cuya solución debe satisfacer la ecuación original (véase la pág. 118).

La solución particular de la ecuación (2.75) se puede buscar en la forma

$$y=Ae^{ix}.$$

Entonces

$$A=\frac{i}{2},\quad y=\frac{i}{2}(\cos x+i\operatorname{sen}x).$$

La solución particular de la ecuación original es

$$\tilde{y}_1=\operatorname{Re}y=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x.$$

En muchos casos resulta muy cómodo el método operacional para la búsqueda de soluciones particulares de ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

Concepto sobre el método operacional para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Introduzcamos la notación

$$\frac{d^ky}{dx^k}=D^ky$$

para las derivadas de orden k. Utilizando esta notación, escribamos la ecuación

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$$

en la forma

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \ldots + a_n y = f(x),$$

o bien

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n)\, y = f(x). \tag{2.76}$$

La expresión

$$a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

se llama *polinomio operacional*. Este polinomio se designará brevemente por $F(D)$, quedando la ecuación (2.76) en la forma

$$F(D)\, y = f(x).$$

Es fácil establecer por comprobación directa la validez de las identidades siguientes:

1) $F(D)\, e^{kx} \equiv e^{kx} F(k)$,
2) $F(D^2) \operatorname{sen} ax \equiv \operatorname{sen} ax\, F(-a^2)$,
3) $F(D^2) \cos ax \equiv \cos ax\, F(-a^2)$,
4) $F(D)\, e^{kx} v(x) \equiv e^{kx} F(D+k)\, v(x)$.

En efecto:

1) $F(D)\, e^{kx} = (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)\, e^{kx} =$
$$= e^{kx} (a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n) = e^{kx} F(k).$$

2) $F(D^2) \operatorname{sen} ax = (a_0 D^{2n} + a_1 D^{2n-2} + \ldots + a_{n-1} D^2 + a_n) \operatorname{sen} ax =$
$$= [a_0 (-a^2)^n + a_1 (-a^2)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} (-a^2) + a_n] \operatorname{sen} ax =$$
$$= \operatorname{sen} ax\, F(-a^2).$$

La identidad 3) se demuestra en forma completamente análoga:

$$F(D^2) \cos ax = \cos ax\, F(-a^2).$$

4) $F(D)\, e^{kx} v(x) = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} D^p (e^{kx} v(x)) =$

$$= e^{kx} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \left[k^p v(x) + p k^{p-1} Dv + \frac{p(p-1)}{2!} k^{p-2} D^2 v + \ldots + D^p v \right] =$$

$$= e^{kx} \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} (D+k)^p\, v = e^{kx} F(D+k)\, v(x).$$

Se llama suma de dos operadores $F_1(D)$ y $F_2(D)$ al operador $[F_1(D) + F_2(D)]$, cuya aplicación a cierta función $f(x)$ se determina por la igualdad

$$[F_1(D) + F_2(D)]\, f(x) = F_1(D)\, f(x) + F_2(D)\, f(x).$$

De esta definición se deduce que

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^{p} + \sum_{p=0}^{n} b_{n-p}D^{p} = \sum_{p=0}^{n} (a_{n-p} + b_{n-p}) D^{p},$$

puesto que al aplicar ambos miembros de esta igualdad a cierta función $f(x)$, derivable n veces, se llega a un mismo resultado; es decir, la regla de la adición de polinomios operacionales no se diferencia de la regla de adición de polinomios ordinarios (no operacionales).

Se llama producto de dos operadores $F_1(D) \cdot F_2(D)$ al operador cuya aplicación a cierta función $f(x)$, derivable un número suficiente de veces, se determina por la igualdad

$$F_1(D) \cdot F_2(D) f(x) = F_1(D) [F_2(D) f(x)],$$

o sea, que a la función $f(x)$ se la aplica primero el segundo factor, y luego a este resultado se le aplica el primer factor.

Partiendo de esta definición no es difícil comprobar que la regla del producto de polinomios operacionales no se diferencia de la regla del producto de polinomios ordinarios (no operacionales). En efecto,

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^{p} \sum_{q=0}^{m} b_{m-q}D^{q} = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} a_{n-p}b_{m-q}D^{p+q}, \qquad (2.77)$$

puesto que

$$\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^{p} \sum_{q=0}^{m} b_{m-q}D^{q} f(x) =$$
$$= \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}D^{p} \left[\sum_{q=0}^{m} b_{m-q} f^{(q)}(x) \right] = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} a_{n-p}b_{m-q} f^{(p+q)}(x),$$

lo cual coincide con el resultado de aplicar el operador

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} a_{n-p}b_{m-q}D^{p+q}$$

a $f(x)$.

De (2.77) se deduce, en particular, la conmutatividad del producto de operadores:

$$F_1(D) F_2(D) = F_2(D) F_1(D).$$

La validez de la ley distributiva

$$F(D) [F_1(D) + F_2(D)] = F(D) F_1(D) + F(D) F_2(D)$$

se deduce de inmediato de la regla de derivación de una suma. Por lo tanto, las operaciones de suma y de producto de polinomios operacionales no se diferencian de las mismas operaciones con polinomios ordinarios (no operacionales).

Definamos ahora el operador $\frac{1}{F(D)}$.

El resultado de aplicar el operador $\frac{1}{F(D)}$ a cierta función continua $f(x)$ es la solución de la ecuación

$$F(D)\,y=f(x), \tag{2.78}$$

$$y=\frac{1}{F(D)}f(x).$$

Por consiguiente,

$$F(D)\left[\frac{1}{F(D)}f(x)\right]\equiv f(x). \tag{2.79}$$

Se hubiera podido considerar que $\frac{1}{F(D)}f(x)$ es la solución de la ecuación (2.78), determinada por ciertas condiciones iniciales concretas, por ejemplo, nulas. Para nuestros fines, sin embargo, es más cómodo considerar que $\frac{1}{F(D)}f(x)$ es una de las soluciones (no importa cuál) de la ecuación (2.78). Por lo tanto, el resultado de aplicar el operador $\frac{1}{F(D)}$ a cierta función $f(x)$ está determinado solamente con exactitud de un sumando igual a una solución de la ecuación homogénea correspondiente.

Comprendiendo así el resultado de la aplicación del operador $\frac{1}{F(D)}$, se verificará la igualdad

$$\frac{1}{F(D)}[F(D)\,f(x)]=f(x), \tag{2.80}$$

puesto que $f(x)$ es evidentemente solución de la ecuación

$$F(D)\,y=F(D)\,f(x).$$

El producto de los operadores $\Phi(D)$ y $\frac{1}{F(D)}$ se determina mediante la igualdad

$$\Phi(D)\frac{1}{F(D)}f(x)=\Phi(D)\left[\frac{1}{F(D)}f(x)\right].$$

Análogamente,

$$\frac{1}{F(D)}\Phi(D)\,f(x)=\frac{1}{F(D)}[\Phi(D)\,f(x)].$$

Por eso, en las fórmulas (2.79) y (2.80) se puede prescindir de los paréntesis; obsérvese, además, que

$$\frac{1}{D^p}f(x)=\iint\ldots\int f(x)\,dx^p,$$

ya que $\frac{1}{D^p} f(x)$ es, por definición del operador $\frac{1}{F(D)}$, solución de la ecuación $D^p y = f(x)$.

Comprobemos las siguientes propiedades del operador $\frac{1}{F(D)}$:

1) $\frac{1}{F(D)} kf(x) = k \frac{1}{F(D)} f(x)$,

donde k es un factor constante, puesto que

$$F(D) k \frac{1}{F(D)} f(x) = kF(D) \frac{1}{F(D)} f(x) = kf(x).$$

2) $\frac{1}{F(D)} e^{kx} = \frac{e^{kx}}{F(k)}$, si $F(k) \neq 0$.

En efecto, $\frac{e^{kx}}{F(k)}$ es solución de la ecuación $F(D) y = e^{kx}$, ya que, según la fórmula 1), pág. 133

$$F(D) \frac{e^{kx}}{F(k)} \equiv \frac{F(k) e^{kx}}{F(k)} \equiv e^{kx}.$$

3) $\frac{1}{F(D^2)} \operatorname{sen} ax = \frac{\operatorname{sen} ax}{F(-a^2)}$, si $F(-a^2) \neq 0$.

Efectivamente, $\frac{\operatorname{sen} ax}{F(-a^2)}$ es solución de la ecuación $F(D^2) y = \operatorname{sen} ax$ puesto que, en virtud de la fórmula 2), pág. 133,

$$F(D^2) \frac{\operatorname{sen} ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \operatorname{sen} ax \equiv \operatorname{sen} ax.$$

4) $\frac{1}{F(D^2)} \cos ax = \frac{\cos ax}{F(-a^2)}$, si $F(-a^2) \neq 0$,

debido a que, según la fórmula 3) de la pág. 133,

$$F(D^2) \frac{\cos ax}{F(-a^2)} \equiv \frac{1}{F(-a^2)} F(-a^2) \cos ax \equiv \cos ax.$$

5) $\frac{1}{F(D)} e^{kx} v(x) = e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x)$.

En efecto, $e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x)$ es solución de la ecuación $F(D) y = e^{kx} v(x)$, ya que, en virtud de la fórmula 4), pág. 133,

$$F(D) e^{kx} \frac{1}{F(D+k)} v(x) \equiv e^{kx} F(D+k) \frac{1}{F(D+k)} v(x) \equiv e^{kx} v(x).$$

6) $\frac{1}{F(D)} [f_1(x) + f_2(x)] = \frac{1}{F(D)} f_1(x) + \frac{1}{F(D)} f_2(x)$.

Esta igualdad es consecuencia del principio de superposición (pág. 117).

7) $\frac{1}{F_1(D)\cdot F_2(D)} f(x) = \frac{1}{F_1(D)} \frac{1}{F_2(D)} f(x)$,

o sea

$$y = \frac{1}{F_1(D)} \left[\frac{1}{F_2(D)} f(x) \right] \tag{2.81}$$

es solución de la ecuación

$$F_1(D) F_2(D) y = f(x). \tag{2.82}$$

En efecto, sustituyendo (2.81) en (2.82), se obtiene

$$F_2(D) F_1(D) \frac{1}{F_1(D)} \left[\frac{1}{F_2(D)} f(x) \right] \equiv F_2(D) \frac{1}{F_2(D)} f(x) \equiv f(x).$$

Veamos algunos ejemplos sobre la búsqueda de soluciones particulares de ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes mediante el método operacional:

1) $y'' + 4y = e^x$, o bien $(D^2 + 4) y = e^x$, de donde

$$y = \frac{1}{D^2 + 4} e^x = \frac{e^x}{5}.$$

2) $y^{\text{IV}} + y = 2 \cos 3x$, o bien $(D^4 + 1) y = 2 \cos 3x$,

$$y = \frac{1}{D^4 + 1} 2 \cos 3x = \frac{2 \cos 3x}{(-9)^2 + 1} = \frac{1}{41} \cos 3x.$$

3) $y'' + 9y = 5 \operatorname{sen} x$, $(D^2 + 9) y = 5 \operatorname{sen} x$,

$$y = \frac{1}{D^2 + 9} 5 \operatorname{sen} x = \frac{5 \operatorname{sen} x}{-1 + 9} = \frac{5}{8} \operatorname{sen} x.$$

4) $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$, $(D - 2)^2 y = x^2 e^{2x}$,

$$y = \frac{1}{(D-2)^2} e^{2x} x^2 = e^{2x} \frac{1}{D^2} x^2 = e^{2x} \frac{x^4}{12}.$$

5) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$, $(D - 1)^3 y = e^x$,

$$y = \frac{1}{(D-1)^3} e^x,$$

$F(k) = 0$; por ello, en lugar de la segunda fórmula, se aplica la fórmula 5 (pág. 136), considerando a e^x como producto de $e^x \cdot 1$:

$$y = \frac{1}{(D-1)^3} e^x \cdot 1 = e^x \frac{1}{D^3} 1 = e^x \frac{x^3}{6}.$$

6) $y''' - y = \operatorname{sen} x$,

$$(D^3 - 1) y = \operatorname{sen} x, \tag{2.83}$$

$y = \frac{1}{D^3 - 1} \operatorname{sen} x$. Como el operador contiene potencias impares de D, entonces no es posible aplicar la fórmula 4). Por ello, en lugar de la ecuación original consideremos la ecuación $(D^3 - 1) y = e^{ix}$, o bien

$$(D^3 - 1) y = \cos x + i \operatorname{sen} x. \tag{2.84}$$

La parte imaginaria de la solución de la ecuación (2.84) será solución de la ecuación original (véase la pág. 118):

$$y=\frac{1}{D^3-1}e^{ix}=\frac{e^{ix}}{i^3-1}=\frac{-e^{ix}}{1+i}=\frac{(-1+i)(\cos x+i\operatorname{sen} x)}{2}=$$
$$=-\frac{1}{2}(\cos x+\operatorname{sen} x)+\frac{i}{2}(\cos x-\operatorname{sen} x).$$

La parte imaginaria $\dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{2}$ de la solución de la ecuación (2.84) es solución de la ecuación (2.83).

7) $y''+y=\cos x,\ (D^2+1)\,y=\cos x,\ y=\dfrac{1}{D^2+1}\cos x.$

La fórmula 3) de la pág. 136 es inaplicable, puesto que $F(-a^2)=0$. Por eso, nuevamente en lugar de la ecuación original consideraremos la ecuación

$$y''+y=e^{ix},\ \text{o bien}\ y''+y=\cos x+i\operatorname{sen} x,$$

y tomaremos la parte real de su solución

$$(D^2+1)\,y=e^{ix},\ y=\frac{1}{D^2+1}e^{ix}=\frac{1}{D-i}\cdot\frac{1}{D+i}e^{ix}=\frac{1}{D-i}\frac{e^{ix}}{2i}=$$
$$=\frac{e^{ix}}{2i}\frac{1}{D}\cdot 1=\frac{e^{ix}x}{2i}=\frac{x(\cos x+i\operatorname{sen} x)}{2i}.$$

Tomando la parte real $\dfrac{x\operatorname{sen} x}{2}$ de la solución hallada de la ecuación auxiliar, se obtiene la solución de la ecuación original.

8) $y^{\text{IV}}-y=e^x,\ (D^4-1)\,y=e^x,\ y=\dfrac{1}{D^4-1}e^x=$

$$=\frac{1}{D-1}\frac{1}{(D+1)(D^2+1)}e^x=\frac{1}{D-1}\frac{e^x}{4}=\frac{1}{4}e^x\frac{1}{D}1=\frac{xe^x}{4}.$$

Analicemos además cómo actúa el operador $\dfrac{1}{F(D)}$ sobre el polinomio

$$P_p(x)=A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p.$$

Dividamos formalmente 1 entre el polinomio

$$F(D)=a_n+a_{n-1}D+\ldots+a_0D^n,\quad a_n\neq 0,$$

dispuesto en orden creciente de las potencias de D, por la regla de división de polinomios ordinarios (no operacionales). Detendremos la división al obtener en el cociente un polinomio operacional de grado p:

$$b_0+b_1D+\ldots+b_pD^p=Q_p(D).$$

Entonces en el resto tendremos el polinomio

$$R(D)=c_{p+1}D^{p+1}+c_{p+2}D^{p+2}+\ldots+c_{p+n}D^{p+n},$$

que contiene al operador D en potencias no menores de $p+1$.

Debido a la dependencia entre dividendo, divisor, cociente y resto, se obtiene

$$F(D)\,Q_p(D)+R(D)\equiv 1. \qquad (2.85)$$

Esta identidad se cumple para los polinomios ordinarios (no operacionales), pero como las reglas de suma y producto de polinomios operacionales no se diferencian de las de suma y producto de polinomios ordinarios, la identidad se cumple también para los polinomios operacionales. Aplicando ambos miembros de la identidad (2.85) al polinomio $A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p$, se obtiene

$$[F(D)\,Q_p(D)+R(D)](A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)\equiv$$
$$\equiv A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p$$

o, tomando en cuenta que

$$R(D)(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)\equiv 0,$$

debido a que $R(D)$ contiene a D en potencias no menores de $p+1$, tendremos

$$F(D)\,[Q_p(D)(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)]\equiv$$
$$\equiv A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p,$$

es decir, $Q_p(D)(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)$ es solución de la ecuación

$$F(D)y=A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p.$$

De este modo,

$$\frac{1}{F(D)}(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p)=Q_p(D)(A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p).$$

Por ejemplo:

9) $y''+y=x^2-x+2$, $(D^2+1)\,y=x^2-x+2$, $y=\dfrac{1}{D^2+1}(x^2-x+2)$.

Dividiendo 1 entre $1+D^2$, obtenemos $Q_2(D)=1-D^2$. Por lo tanto,

$$y=(1-D^2)(x^2-x+2)=x^2-x.$$

10) $y''+2y'+2y=x^2e^{-x}$, $(D^2+2D+2)\,y=x^2e^{-x}$,

$$y=\frac{1}{D^2+2D+2}x^2e^{-x}=e^{-x}\frac{1}{D^2+1}x^2=e^{-x}(1-D^2)\,x^2=e^{-x}(x^2-2).$$

11) $y''+y=x\cos x$, $(D^2+1)\,y=x\cos x$.

Pasamos a la ecuación $(D^2+1)\,y=xe^{ix}$ y luego tomamos la parte real de la solución

$$y=\frac{1}{D^2+1}xe^{ix}=e^{ix}\frac{1}{D(D+2i)}x=e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{2i}+\frac{D}{4}\right)x=$$
$$=e^{ix}\frac{1}{D}\left(\frac{x}{2i}+\frac{1}{4}\right)=e^{ix}\left(\frac{x^2}{4i}+\frac{x}{4}\right)=(\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x)\left(\frac{x^2}{4i}+\frac{x}{4}\right).$$

Tomando la parte real $\dfrac{x^2}{4}\,\mathrm{sen}\,x+\dfrac{x}{4}\cos x$, se obtiene la solución buscada.

Observación. El último ejemplo demuestra cómo hay que aplicar el operador $\frac{1}{F(D)}$ a un polinomio, si $a_n=0$. Representando $F(D)$ en la forma $D^s\Phi(D)$, donde el término independiente del polinomio $\Phi(D)$ ya no es igual a cero, se aplica al polinomio primero el operador $\frac{1}{\Phi(D)}$, y después el operador $\frac{1}{D^s}$.

Las *ecuaciones no homogéneas de Euler*

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x), \tag{2.86}$$

o bien

$$a_0(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x) \tag{2.87}$$

se pueden integrar mediante la resolución de las ecuaciones homogéneas correspondientes (véase la pág. 114) y hallando una solución particular de la ecuación no homogénea, o bien aplicando el método de variación de las constantes. Sin embargo, generalmente es más simple integrar primero la ecuación homogénea, y para elegir la solución particular transformar la ecuación de Euler (2.86), mediante la sustitución de variables $x=\pm e^t$ (para la ecuación (2.87), $ax+b=\pm e^t$), en una ecuación con coeficientes constantes, para las cuales los métodos de búsqueda de soluciones particulares han sido desarrollados en forma detallada.

Ejemplo 11.

$$x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=x\ln^3 x. \tag{2.88}$$

Buscamos la solución de la ecuación homogénea correspondiente en la forma $y=x^k$:

$$k^2-2k+1=0; \tag{2.89}$$

$k_{1,2}=1$; por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma $y=(c_1+c_2\ln x)x$. Por la sustitución de variables $x=e^t$, transformamos la ecuación (2.88) en una ecuación con coeficientes constantes: $\ddot{y}(t)-2\dot{y}(t)+y=t^3e^t$ (el primer miembro de esta ecuación puede ser escrito directamente a partir de la ecuación característica (2.89)). Mediante el método operacional, se halla fácilmente la solución particular de la ecuación transformada

$$y=\frac{1}{(D-1)^2}e^tt^3=e^t\frac{1}{D^2}t^3=\frac{e^tt^5}{20},\quad y=\frac{x\ln^5 x}{20}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.88) tiene la forma

$$y=\left(c_1+c_2\ln x+\frac{\ln^5 x}{20}\right)x.$$

§ 7. INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES POR MEDIO DE SERIES

El problema de la integración de ecuaciones lineales homogéneas de n-ésimo orden

$$p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0, \tag{2.90}$$

se reduce a elegir n, o por lo menos $n-1$ soluciones linealmente independientes. Sin embargo, las soluciones particulares se escogen con facilidad sólo en casos excepcionales. En casos más complejos las soluciones particulares son buscadas en forma de suma de una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\varphi_i(x)$, sobre todo en forma de suma de una serie de potencias o de una serie generalizada de potencias.

Las condiciones bajo las cuales existen soluciones en forma de suma de una serie de potencias o de una serie generalizada de potencias, se establecen comúnmente por métodos de la teoría de funciones de variable compleja, la cual suponemos desconocida por el lector; por esto, los teoremas fundamentales de este parágrafo están dados sin demostración, aplicados a las ecuaciones de segundo orden, las cuales se encuentran con mayor frecuencia en la práctica.

Teorema 2.9. (sobre la propiedad analítica de la solución). *Si $p_0(x)$, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son funciones analíticas de x en un entorno del punto $x=x_0$ y $p_0(x_0)\neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación*

$$p_0(x)\,y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y=0 \qquad (2.91)$$

son también funciones analíticas en cierto entorno del mismo punto; por lo tanto, la solución de la ecuación (2.91) se puede buscar en la forma

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

Teorema 2.10. (sobre el desarrollo de la solución en una serie generalizada de potencias). *Si la ecuación (2.91) satisface las condiciones del teorema anterior, pero $x=x_0$ es un cero de orden finito s de la función $p_0(x)$, cero de orden $s-1$ o superior de la función $p_1(x)$ (si $s>1$) y cero de orden no inferior a $s-2$ del coeficiente $p_2(x)$ (si $s>2$), entonces existe por lo menos una solución no trivial de la ecuación (2.91) en forma de suma de una serie generalizada de potencias*

$$y=a_0(x-x_0)^k+a_1(x-x_0)^{k+1}+\ldots+a_n(x-x_0)^{k+n}+\ldots \qquad (2.92)$$

donde k es un número real que puede ser entero o quebrado, positivo o negativo.

La segunda solución linealmente independiente de (2.92), por regla general, tiene también la forma de suma de una serie generalizada de potencias, pero a veces puede contener además el producto de una serie generalizada de potencias por $\ln(x-x_0)$.

En problemas concretos se puede proceder sin los dos teoremas formulados más arriba, sobre todo porque en el enunciado de éstos no se establecen las regiones de convergencia de las series consideradas. Con mayor frecuencia en problemas concretos se escoge una serie de potencias o una serie generalizada de potencias que satisfaga formalmente la ecuación diferencial, o sea, que al sustituírla en la ecuación considerada de orden n (2.90) la transforme en una identidad, si suponemos la convergencia de la serie y la posibilidad de su derivación término a término n veces. Al obtener formalmente la solución en forma de serie, se investiga su convergencia y la posibilidad de su derivación término a término n veces. En la región donde la serie converge y permite su derivación término a término n veces, la misma no solamente satisface formalmente la ecuación, sino que su suma es en realidad la solución buscada.

Ejemplo 1.

$$y''-xy=0. \tag{2.93}$$

Busquemos la solución en forma de una serie de potencias

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Basándonos en el teorema 2.9, o derivando esta serie formalmente término a término dos veces y sustituyendo en la ecuación (2.93), obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}-x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0.$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros de la identidad, obtenemos $a_2=0$, $3\cdot 2a_3-a_0=0$, de donde $a_3=\frac{a_0}{2\cdot 3}$; $4\cdot 3a_4-a_1=0$, de donde $a_4=\frac{a_1}{3\cdot 4}$; $5\cdot 4a_5-a_2=0$, de donde $a_5=\frac{a_2}{4\cdot 5}$, ..., $n(n-1)a_n-a_{n-3}=0$, de donde $a_n=\frac{a_{n-3}}{(n-1)n}$, ... Por consiguiente,

$$a_{3n-1}=0,\quad a_{3n}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3n-1)3n},$$

$$a_{3n+1}=\frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3n(3n+1)} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

a_0 y a_1 permanecen arbitrarios. De esta manera,

$$y=a_0\left[1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3n-1)3n}+\ldots\right]+$$
$$+a_1\left[x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\ldots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3n(3n+1)}+\ldots\right]. \tag{2.94}$$

El radio de convergencia de esta serie de potencias es infinito. Por consiguiente, la suma de la serie (2.94) para valores cualesquiera de x es solución de la ecuación considerada.

Ejemplo 2.

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0. \tag{2.95}$$

Esta ecuación se llama *ecuación de Bessel* de orden n, a pesar de que se encuentra por primera vez en los trabajos de L. Euler y de D. Bernoulli. A la ecuación de Bessel se reducen muchos problemas de la física matemática; por ello, la estudiaremos con más detalle.

En virtud del teorema 2.10, por lo menos una solución no trivial de la ecuación de Bessel puede hallarse en forma de suma de una serie generalizada de potencias

$$y=\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{p+k}.$$

Derivando esta serie término a término dos veces, y sustituyéndola en la ecuación (2.95), se obtiene

$$x^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p)(k+p-1)\, x^{k+p-2}+$$
$$+x \sum_{p=0}^{\infty} a_p (k+p)\, x^{k+p-1}+(x^2-n^2) \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p}=0.$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} a_0 (k^2-n^2) &= 0,\\ a_1 [(k+1)^2-n^2] &= 0,\\ [(k+2)^2-n^2]\, a_2+a_0 &= 0,\\ [(k+3)^2-n^2]\, a_3+a_1 &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [(k+p)^2-n^2]\, a_p+a_{p-2} &= 0. \end{aligned}$$

Como el coeficiente a_0 para la menor potencia de x se puede considerar diferente de cero, la primera ecuación se reduce a la forma

$$k^2-n^2=0, \text{ de donde } k=\pm n.$$

Para concretar, vamos a considerar por ahora $k=n \geqslant 0$; entonces la segunda ecuación $a_1 [(n+1)^2-n^2]=0$ se obtiene: $a_1=0$ y, por lo tanto, todas las $a_{2p+1}=0$

$$a_2=-\frac{a_0}{(n+2)^2-n^2}=-\frac{a_0}{2^2(n+1)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(n+4)^2-n^2}=-\frac{a_2}{2^2(n+2)\,2}=\frac{a_0}{2^4(n+1)(n+2)\,1\cdot 2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}\cdot p\,!\,(n+1)(n+2)\dots(n+p)}.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Para $k=-n$, de manera completamente análoga se obtiene

$$a_{2p+1}=0, \quad a_{2p}=\frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}\, p\,!\,(-n+1)(-n+2)\dots(-n+p)}.$$

Para $k=n$, obtenemos la solución

$$y=a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+n}}{2^{2p}\, p\,!\,(n+1)(n+2)\dots(n+p)}.$$

A esta solución se le puede dar una forma más cómoda, si escogemos la constante arbitraria $a_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$, donde Γ es la *función gamma* de Euler. Recordemos que

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx, \text{ para } p>0,\ \Gamma(p+1)=p\Gamma(p).$$

Entonces

$$y=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{p!\,\Gamma(n+p+1)}. \tag{2.96}$$

Esta solución se denota generalmente por $J_n(x)$, y se llama *función de Bessel de primera especie de orden n*.

Para $k=-n$, tomando $a_0=\frac{1}{2^{-n}\Gamma(-n+1)}$, obtenemos análogamente la función de Bessel de primera especie de orden $-n$:

$$J_{-n}(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}}{p!\,\Gamma(-n+p+1)}. \tag{2.97}$$

Las series (2.96) y (2.97) convergen para valores cualesquiera de x (en (2.97), $x\neq 0$) y pueden ser derivadas dos veces término a término. Por lo tanto, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son soluciones de la ecuación de Bessel (2.95).

Si n no es igual a un entero, las soluciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente independientes, puesto que sus desarrollos en serie comienzan por diferentes potencias de x, y por lo tanto la combinación lineal $\alpha_1 J_n(x)+\alpha_2 J_{-n}(x)$ puede ser idénticamente nula sólo cuando $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Si, en cambio, n es entero, entonces, como para los valores enteros negativos de p y para $p=0$ la función $\Gamma(p)$ se vuelve infinito, los desarrollos en serie de las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ comienzan por potencias iguales de x y, como no es difícil comprobar, las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ tendrán la siguiente dependencia lineal:

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x).$$

Por lo tanto, para n entero, en lugar de $J_{-n}(x)$ hay que buscar otra solución que sea linealmente independiente de $J_n(x)$. Esta solución se puede obtener de distintas maneras. Por ejemplo, se puede, conociendo una solución particular $J_n(x)$, disminuir el orden de la ecuación (2.95) mediante la sustitución señalada en la pág. 104, o buscar directamente la solución en forma de la suma de una serie generalizada de potencias y del producto de dicha serie por $\ln x$. La solución linealmente independiente de $J_n(x)$, obtenida por cualquiera de estos métodos, para una determinada elección del factor constante arbitrario se llama *función de Bessel de segunda especie*, y se designa por $Y_n(x)$.

Habitualmente, sin embargo, $Y_n(x)$ se determina de la manera siguiente: considerando, primeramente, a n no entero, se toma la solución $Y_n(x)$ de la ecuación de Bessel que es combinación lineal de las soluciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$:

$$Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\operatorname{sen} n\pi};$$

luego, pasando al límite para n tendiente a un número entero, se obtiene la solución particular $Y_n(x)$, linealmente independiente de $J_n(x)$, determinada ahora también para valores enteros de n.

De este modo, la solución general de la ecuación de Bessel cuando n no es igual a un entero, tiene la forma:

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x),$$

y para n entero,

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x),$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Las funciones de Bessel de primera y segunda especie están estudiadas muy detalladamente y, en particular, se han confeccionado tablas detalladas de sus valores. Por ello, si cualquier problema se reduce a funciones de Bessel, lo podemos considerar resuelto en la misma medida en que se considera resuelto un problema cuya respuesta se da, por ejemplo, en funciones trigonométricas.

Con frecuencia, en las aplicaciones hay que considerar la ecuación

$$x^2 y'' + xy' + (m^2 x^2 - n^2) y = 0. \tag{2.98}$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación de Bessel por la sustitución de variables $x_1 = mx$. En efecto, para dicha sustitución,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} = \frac{dy}{dx_1} m, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx_1^2} m^2,$$

y la ecuación (2.98) se reduce a la ecuación de Bessel:

$$x_1^2 \frac{d^2y}{dx_1^2} + x_1 \frac{dy}{dx_1} + (x_1^2 - n^2) y = 0.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (2.98) para n diferente de un entero, tiene la forma

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2 J_{-n}(mx),$$

y para n entero,

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2 Y_n(mx).$$

Ejemplo 3.

$$x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{9}{25}\right) y = 0.$$

La solución general tiene la forma

$$y = c_1 J_{\frac{3}{5}}(2x) + c_2 J_{-\frac{3}{5}}(2x).$$

Ejemplo 4.

$$x^2 y'' + xy' + (3x^2 - 4) y = 0.$$

La solución general es

$$y = c_1 J_2(x\sqrt{3}) + c_2 Y_2(x\sqrt{3}).$$

Ejemplo 5. Intengrar la ecuación

$$x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$$

con la condición de que la solución sea continua en el punto $x=0$, e $y(0,3) = 2$.

La solución general tiene la forma

$$y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(2x).$$

La función $J_{-\frac{1}{3}}(2x)$ es discontinua para $x=0$, puesto que la serie (2.97) comienza por potencias negativas de x. Por lo tanto, la solución y es continua en el punto $x=0$ sólo para $c_2=0$:

$$y=c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x).$$

Al satisfacer la segunda condición $y(0,3)=2$, obtenemos

$$c_1=\frac{2}{J_{\frac{1}{3}}(0,6)}.$$

En las tablas de las funciones de Bessel hallamos $J_{\frac{1}{3}}(0,6)=0,700$; por consiguiente $c_1 \approx 2,857$ e

$$y \approx 2,857\, J_{\frac{1}{3}}(2x).$$

En las aplicaciones se exige a menudo hallar las *soluciones periódicas* de cierta ecuación diferencial. En este caso generalmente conviene buscar la solución en forma de serie de Fourier:

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}t+B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}t\right).$$

Obsérvese que si la ecuación

$$x^{(n)}=F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) \tag{2.99}$$

tiene una solución periódica $x_0(t)$ de período T, el segundo miembro de la ecuación (2.99) a lo largo de la curva integral considerada es función periódica de período T con respecto al primer argumento. En efecto, sustituyendo en la ecuación (2.99) la solución periódica $x=x_0(t)$, obtenemos la identidad

$$x_0^{(n)}(t) \equiv F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n-1)}(t)).$$

Sustituyendo en esta identidad t por $t+T$, debido a la periodicidad de la función $x_0(t)$ y de sus derivadas, el primer miembro de la ecuación no varía, y tampoco los argumentos del segundo miembro, a partir del segundo. Por lo tanto,

$$F(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n-1)}(t)) \equiv$$
$$\equiv F(t+T, x_0(t), \dot{x}_0(t), \ldots, x_0^{(n-1)}(t)),$$

o sea, que la función F a lo largo de la curva integral $x=x_0(t)$ tiene período T respecto al argumento t, que figura explícitamente.

En consecuencia, si el segundo miembro de la ecuación (2.99), para cualquier $x_0(t)$, no es función periódica con respecto al primer argumento, entonces no existen tampoco soluciones periódicas. Si la función F no depende explícitamente de t, es decir, es constante con respecto al argumento t, entonces se puede considerar como función periódica con respecto a t de cualquier período, y por ello no se excluye la posibilidad de la existencia de soluciones periódicas de período arbitrario.

Supongamos, por ejemplo, que se exige hallar las soluciones periódicas de la ecuación

$$\ddot{x}+a^2x=f(t). \tag{2.100}$$

Para la existencia de solución periódica es necesario suponer que f es función periódica. Sin limitaciones sustanciales de la generalidad, se puede considerar que $f(t)$ es función periódica de período 2π, ya que si la función $f(t)$ tuviera período T, entonces, luego de la transformación de la variable independiente $t_1=\frac{2\pi}{T}t$, el segundo miembro sería función de período 2π con respecto a la nueva variable independiente t_1.

Consideremos, además,que la función $f(t)$ es continua y pueden desarrollarse en la serie de Fourier

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\operatorname{sen} kt). \tag{2.101}$$

La solución periódica se busca en la forma

$$x(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kt+B_k\operatorname{sen} kt). \tag{2.102}$$

Derivando dos veces término a término la serie (2.102) y sustituyéndola en la ecuación (2.100), se obtiene:

$$-\sum_{k=1}^{\infty}k^2(A_k\cos kt+B_k\operatorname{sen} kt)+$$
$$+a^2\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kt+B_k\operatorname{sen} kt)\right]=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\operatorname{sen} kt),$$

de donde, si a no es un entero, se determinan los coeficientes de la serie (2.102):

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2A_0}{2}=\frac{a_0}{2}, \quad & A_0=\frac{a_0}{a^2}, \\ (a^2-k^2)A_k=a_k, \quad & A_k=\frac{a_k}{a^2-k^2}, \\ (a^2-k^2)B_k=b_k, \quad & B_k=\frac{b_k}{a^2-k^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.103}$$

Por consiguiente, la ecuación (2.100) se satisface formalmente por la serie

$$\frac{a_0}{2a^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\cos kt+b_k\operatorname{sen} kt}{a^2-k^2}. \tag{2.104}$$

Es evidente que la serie (2.104) converge y puede ser derivada dos veces término a término, ya que la serie (2.101) converge uniformemente debido a la continuidad de la función $f(t)$, y los coeficientes de la serie

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2(a_k\cos kt+bk\operatorname{sen} kt)}{a^2-k^2}, \tag{2.105}$$

formada por las derivadas segundas de los términos de la serie (2.104), se diferencian de los coeficientes a_k y b_k de la serie (2.101) sólo en el factor $-\frac{k^2}{a^2-k^2}$, independiente de t y tendiente monótonamente a 1 cuando $k\to\infty$. Por lo tanto, la serie (2.105) converge uniformemente, por lo que la serie (2.104) se puede derivar dos veces término a término. De esta manera, la serie (2. 104) no sólo satisface formalmente la ecuación (2.100), sino que su suma $x(t)$ existe y es solución periódica de la ecuación (2.100).

Si a se diferencia poco del entero n y $a_n\neq 0$ ó $b_n\neq 0$, entonces se produce el fenómeno de *resonancia*. Este consiste en el brusco crecimiento de por lo menos uno de los coeficientes

$$\mathrm{A}_n=\frac{a_n}{a^2-n^2},\ \mathrm{B}_n=\frac{b_n}{a^2-n^2},$$

al tender a hacia n.

Si $a=n$ y por lo menos uno de los coeficientes a_n ó b_n no es igual a cero, entonces no existen soluciones periódicas, puesto que a los sumandos resonantes

$$a_n\cos nt+b_n\operatorname{sen} nt$$

en el segundo miembro de la ecuación (2.100), como se señala en la pág. 131, les corresponden según el principio de superposición un sumando no periódico de la forma

$$t\,(A_n\cos nt+B_n\operatorname{sen} nt)$$

en la solución general de dicha ecuación, mientras que los sumandos restantes en la solución general de (2.100) son funciones periódicas. Por lo tanto, si $a=n$ existe solución periódica de la ecuación (2.100) sólo en el caso en que el segundo miembro no contenga a los términos resonantes $a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt$, o sea cuando

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt = 0. \quad (2.106)$$

En el último caso, es decir, cuando $a=n$, $a_n=b_n=0$, existe solución periódica de la ecuación (2.100); además, para $k \neq n$ los coeficientes se determinan por las fórmulas (2.103), y los coeficientes A_n y B_n permanecen arbitrarios, debido a que $A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt$ es solución, para A_n y B_n arbitrarios, de la ecuación homogénea correspondiente.

Ejemplo 6. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kt}{k^4}.$$

Se busca la solución en la forma

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \operatorname{sen} kt)$$

y determinando los coeficientes A_k y B_k por las fórmulas (2.103), se obtiene

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kt}{k^4(2-k^2)}.$$

Ejemplo 7. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + 4x = \operatorname{sen}^2 t.$$

Como las condiciones de existencia de la solución periódica (2.106) no se satisfacen:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \operatorname{sen} 2t\,dt = 0,$$

pero

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos 2t\,dt \neq 0,$$

entonces no existe solución periódica.

Ejemplo 8. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}.$$

El segundo miembro no contiene los términos resonantes $a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t$. Por lo tanto, existe solución periódica, y ésta se determina por las fórmulas (2.103):

$$x(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2(1-k^2)} + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

§ 8. METODO DEL PARAMETRO PEQUEÑO Y SU APLICACION EN LA TEORIA DE LAS OSCILACIONES CUASILINEALES

En el parágrafo antierior fue señalado un método para hallar soluciones periódicas de las ecuaciones lineales de la forma

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t).$$

En muchos problemas prácticos hay que hallar la solución periódica de una ecuación análoga, pero que tiene en el segundo miembro un término pequeño no lineal:

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) \tag{2.107}$$

donde μ es un parámetro pequeño.

Si se suprime el término $\mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$, es decir, si se considera $\mu = 0$ en (2.107), entonces se obtiene la ecuación lineal

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t),$$

que se denomina generadora de la ecuación (2. 107).

Uno de los métodos más efectivos para hallar soluciones periódicas de la ecuación (2.107) de oscilaciones no lineales con término pequeño no lineal, es el método de desarrollo de la solución en serie de potencias del parámetro pequeño μ, desarrollado por A. Poincaré y por A. M. Liapunov, ampliamente utilizado en la actualidad en la resolución de los más variados problemas.

En base al teorema sobre la dependencia analítica de la solución respecto al parámetro (véase la pág. 58), fácilmente generalizable a las ecuaciones de segundo y otros órdenes, se puede afirmar que las soluciones $x(t, \mu)$ de la ecuación (2.107) serán funciones analíticas del parámetro μ para los valores de μ de módulo suficientemente pequeño, si la función $f(t)$ es continua, y la función $F(t, x, \dot{x}, \mu)$, continua en t, depende analíticamente de los demás argumentos: de x y de $\dot{x}$ en la región en la que en lo sucesivo variarán dichas variables, y de μ para valores de μ suficientemente pequeños en valor absoluto.

Considerando que estas condiciones se cumplen, buscamos la solución periódica $x(t, \mu)$ en forma de serie:

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots$$

Derivemos esta serie término a término dos veces

$$\dot{x}(t, \mu) = \dot{x}_0(t) + \mu \dot{x}_1(t) + \ldots + \mu^n \dot{x}_n(t) + \ldots$$

$$\ddot{x}(t, \mu) = \ddot{x}_0(t) + \mu \ddot{x}_1(t) + \ldots + \mu^n \ddot{x}_n(t) + \ldots$$

y sustituyámosla en la ecuación (2.107), en la cual la función $F(t, x, \dot{x}, \mu)$ ha sido previamente desarrollada en serie de potencias de $x - x_0$, $\dot{x} - \dot{x}_0$ y μ,

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu\left[F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} (x - x_0) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} (\dot{x} - \dot{x}_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} \mu + \ldots\right]. \tag{2.108}$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de μ en ambos miembros de la ecuación (2.108), se obtiene

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 + a^2 x_0 = f(t), \\
&\ddot{x}_1 + a^2 x_1 = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0), \\
&\ddot{x}_2 + a^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{2.109}$$

La primera de estas ecuaciones lineales coincide con la ecuación generadora. Integrándola y sustituyendo la solución hallada $x_0(t)$ en la segunda ecuación, obtenemos para la determinación de $x_1(t)$ nuevamente una ecuación lineal, y así sucesivamente.

Para la determinación de $x_n(t)$ también se obtiene una ecuación lineal, puesto que en el segundo miembro de esta ecuación x_j y $\dot{x}_j$ figurarán sólo con índices menores que n, ya que, debido a que F está multiplicada por μ, los términos en el segundo miembro que contienen x_n y $\dot{x}_n$, y con mayor razón x_k y $\dot{x}_k$ con índices mayores, estarán multiplicados por μ elevado a una potencia no menor de $n+1$.

En este parágrafo se considera sólo el problema de la búsqueda de soluciones periódicas; por ello, según la observación de las págs. 146—147, al segundo miembro de la ecuación

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

es natural imponerle otra limitación: exigir que sea función periódica con respecto al argumento t, contenido explícitamente. Sin limitaciones sustanciales de la generalidad, se puede considerar que el menor período del segundo miembro es igual a 2π, si el segundo miembro depende explícitamente de t. Entonces, si $f(t)$ no es igual a una constante, las soluciones periódicas de la ecuación (2.107), si existen, pueden tener sólo períodos iguales a 2π o múltiplos de éste (véanse las págs. 146—147), para μ suficientemente pequeños.

Para hallar la solución periódica de la ecuación (2.108) en la forma

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots \qquad (2.110)$$

es necesario determinar las soluciones periódicas $x_k(t)$ de las ecuaciones (2.109). En efecto, si la solución $x(t, \mu)$ tiene período constante 2π (ó $2m\pi$, m es un número entero) para cualquier μ suficientemente pequeño en valor absoluto, entonces

$$\begin{aligned} x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots \equiv x_0(t + 2\pi + {} \\ + \mu x_1(t + 2\pi) + \ldots + \mu^n x_n(t + 2\pi) + \ldots \end{aligned} \qquad (2.111)$$

Por consiguiente, los coeficientes de iguales potencias de μ en ambos miembros de la identidad (2.111) deben ser iguales, es decir

$$x_n(t) \equiv x_n(t + 2\pi),$$

lo que precisamente significa la periodicidad de las funciones $x_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. La coincidencia de los coeficientes de iguales potencias de μ en ambos miembros de la identidad (2.111) se puede obtener, por ejemplo, derivando dicha identidad n veces con respecto a μ, después de lo cual, haciendo $\mu = 0$, obtenemos

$$x_n(2\pi + t) = x_n(t) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

De este modo, se deben hallar las soluciones periódicas de las ecuaciones (2.109). Aquí es conveniente analizar por separado los siguientes casos.

1. Caso de no resonancia: a no es igual a un entero. Si a no es entero, entonces la primera de las ecuaciones (2.109) tiene una solución periódica única $x_0 = \varphi_0(t)$, la que se halla por el método del parágrafo anterior (véase la pág. 147). Luego, por el mismo método, se hallan $x_1(t)$, $x_2(t)$, etc.

Si por este método hallásemos el término general de la serie (2.110), estableciésemos la convergencia de ésta y la licitud de su derivación término a término dos veces, entonces la suma de la serie (2.110) sería la solución periódica buscada de período 2π. Sin embargo, por lo general, la búsqueda del término general de la serie (2.110) es un problema sumamente complejo, por lo que no hay más remedio que limitarse al cálculo de sus primeros términos. Esto sería suficiente para hallar aproximadamente la solución periódica, si tuviéramos la seguridad de que la serie converge y de que su suma es la solución periódica.

En relación con esto tienen gran significado los teoremas de A. Poincaré de existencia de soluciones periódicas, los cuales permiten, en particular, hallar las condiciones que aseguran la existencia de una solución periódica única de la ecuación (2.107), que tiende a la solución periódica de la ecuación generadora, cuando $\mu \to 0$.

Si las condiciones del teorema de A. Poincaré se cumplen y, por lo tanto, existe una solución periódica única de la ecuación (2.107), que tiende, cuando $\mu \to 0$, a la solución periódica de la ecuación generadora, entonces la suma de la serie única con coeficientes periódicos (2. 110) que satisface formalmente a la ecuación (2.107), debe existir y coincidir con la solución periódica buscada. Aquí no es necesario buscar el término general de la serie (2.110) para investigar la convergencia de la serie y se puede afirmar, luego de hallar algunos primeros términos de ésta, que para pequeños μ su suma es aproximadamente igual a la solución periódica buscada.

Los teoremas de A. Poincaré, basados en nociones de la teoría de funciones analíticas, son muy complejos; por ello, expondremos al final de este parágrafo sólo el más simple de estos teoremas, el cual, sin embargo, ya permite afirmar que, en el caso considerado de no resonancia, la ecuación (2.107) tiene siempre solución periódica única si μ es suficientemente pequeño.

Ejemplo 1. Determinar aproximadamente la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + 2x = \operatorname{sen} t + \mu x^2,$$

donde μ es un parámetro pequeño (determinar dos términos de la serie (2.110)). Buscamos la solución en la forma

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots$$

Hallamos la solución periódica de la ecuación generadora:

$$\ddot{x} + 2x_0 = \operatorname{sen} t, \quad x_0(t) = \operatorname{sen} t.$$

La solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 = \operatorname{sen}^2 t, \text{ o bien } \ddot{x}_1 + 2x_1 = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

tiene la forma

$$x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4}.$$

Por consiguiente, la solución periódica es

$$x(t, \mu) \approx \operatorname{sen} t + \frac{1}{4}(1 + \cos 2t)\mu.$$

2. Caso de resonancia. El método del parámetro pequeño puede ser aplicado también en el caso de resonancia, es decir, en el caso cuando en la ecuación (2.107) a es igual al entero n o tiende a éste cuando $\mu \to 0$.

Si en la ecuación (2.107) a se diferencia poco del entero n, más exactamente, si la diferencia $a^2 - n^2$ tiene orden de infinitud no menor que μ:

$$a^2 - n^2 = \mu a_1, \tag{2.112}$$

donde a_1 está acotada cuando $\mu \to 0$, entonces la ecuación

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

se puede escribir en la forma

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + (n^2 - a^2) x + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

de donde, debido a (2.112),

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu F_1(t, x, \dot{x}, \mu),$$

donde la función F_1 satisface las mismas condiciones que satisface, por hipótesis, la función F.

Por lo tanto, en lo sucesivo en el caso de resonancia se puede considerar que a es entero:

$$\ddot{x} + n^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu).$$

Aplicando el método del parámetro pequeño, se busca la solución periódica en forma de la serie

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^k x_k(t) + \ldots$$

Para determinar la función $x_k(t)$ se obtienen nuevamente las ecuaciones (2.109), en las que $a^2 = n^2$. Pero, en este caso, la ecuación generadora

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = f(t) \tag{2.113}$$

tiene solución periódica sólo en el caso en que el segundo miembro no contenga a los términos resonantes, o sea, cuando se cumplan las condiciones (véase la pág. 149)

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\,dt = 0, \\ &\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.106}$$

Si estas condiciones se cumplen, entonces todas las soluciones de la ecuación (2.113) serán periódicas, con período 2π (véase la pág. 149):

$$x_0(t) = c_{10}\cos nt + c_{20}\operatorname{sen} nt + \varphi_0(t).$$

La función $x_1(t)$ se determina de la ecuación

$$\ddot{x}_1 + n^2 x_1 = F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ 0). \qquad (2.114)$$

Esta ecuación tiene también soluciones periódicas sólo en el caso en que el segundo miembro no contenga a los términos resonantes, es decir, cuando se cumplan las condiciones

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ 0)\cos nt\,dt = 0, \\ &\int_0^{2\pi} F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ 0)\operatorname{sen} nt\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.115)$$

Las ecuaciones (2.115) contienen C_{10} y C_{20}, las cuales, en general, se determinan precisamente de este sistema.

Supongamos que C_{10} y C_{20} satisfacen al sistema (2.115); entonces todas las soluciones de la ecuación (2.114) tienen período 2π:

$$x_1(t) = c_{11}\cos nt + c_{21}\operatorname{sen} nt + \varphi_1(t). \qquad (2.116)$$

Además, c_{11} y c_{21} se determinan nuevamente a partir de las dos condiciones de ausencia de los términos resonantes en la ecuación siguiente de (2.109):

$$\ddot{x}_2 + n^2 x_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}} \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \mu = 0}}$$

y así sucesivamente.

Por lo tanto, no a cada solución periódica

$$x_0 = c_{10}\cos nt + c_{20}\operatorname{sen} nt + \varphi_0(t)$$

de la ecuación generadora le corresponden soluciones periódicas de la ecuación (2.107) para pequeños valores de μ, sino sólo a algunas, cuyos valores de c_{10} y c_{20} satisfacen las ecuaciones (2.115). Está claro que también en el caso de resonancia para estar seguros, sin hallar el término general de la serie (2.110), de que por el método señalado se hallará la solución periódica, hay que demostrar previamente el teorema de existencia de las soluciones periódicas. Esta observación se refiere también a los casos que serán expuestos en los puntos 3 y 4.

3. Resonancia de n-ésimo orden. A veces, en los sistemas descritos por la ecuación

$$\ddot{x}+a^2x=f(t)+\mu F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu), \tag{2.107}$$

que satisface las condiciones arriba señaladas, se observan oscilaciones intensivas, cuando la frecuencia propia se diferencia poco de $\frac{1}{n}$, donde n es un entero. Este fenómeno se llama resonancia de n-ésimo orden.

Desde el punto de vista matemático esto significa que cuando a se diferencia poco de $\frac{1}{n}$, donde n es un entero mayor que la unidad, la ecuación (2.107) puede tener soluciones periódicas de período $2\pi n$, que no son a la vez soluciones periódicas de período 2π.

Sea

$$\ddot{x}+\frac{1}{n^2}x=f(t)+\mu F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu) \tag{2.117}$$

(si a se diferencia poco de $\frac{1}{n}$, más exactamente, si $a^2-\frac{1}{n^2}=\mu a_1$, donde a_1 es acotada cuando $\mu\to 0$, entonces, pasando el término $\left(a^2-\frac{1}{n^2}\right)x$ al segundo miembro e incluyéndolo en $\mu F(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu)$, obtenemos una ecuación de la forma (2.117)).

La solución periódica de la ecuación (2.117) de período $2\pi n$ se busca en forma de la serie

$$x(t,\ \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ldots+\mu^n x_n(t)+\ldots \tag{2.110}$$

Sustituyendo (2.110) en la ecuación (2.117) y comparando los coeficientes de iguales potencias de μ, obtenemos las ecuaciones (2.109), en las cuales $a=\frac{1}{n}$. Para determinar $x_0(t)$, se obtiene la ecuación generadora

$$\ddot{x}_0+\frac{1}{n^2}x_0=f(t), \tag{2.118}$$

que tiene solución periódica de período $2\pi n$ sólo cuando el segundo miembro no contiene a los términos resonantes, o sea, cuando

$$\int_0^{2\pi n} f(t)\cos\frac{t}{n}\,dt=0 \quad \text{y} \quad \int_0^{2\pi n} f(t)\operatorname{sen}\frac{t}{n}\,dt=0.$$

Si estas condiciones se cumplen, entonces todas las soluciones de la ecuación (2.118) tienen período $2\pi n$:

$$x_0=c_{10}\cos\frac{t}{n}+c_{20}\operatorname{sen}\frac{t}{n}+\varphi_0(t),$$

donde c_{10} y c_{20} son constantes arbitrarias.

La ecuación que determina a x_1,

$$\ddot{x}_1+\frac{1}{n^2}x_1=F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ \mu), \tag{2.119}$$

tendrá soluciones periódicas de período $2\pi n$ sólo cuando el segundo miembro no contenga a los términos resonantes, es decir, cuando se cumplan las condiciones

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi n} F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ \mu)\cos\frac{t}{n}\,dt=0,\\ \int_0^{2\pi n} F(t,\ x_0,\ \dot{x}_0,\ \mu)\operatorname{sen}\frac{t}{n}\,dt=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.120}$$

de las cuales, en general, se determinan c_{10} y c_{20}.

Si las condiciones (2.120) se satisfacen, todas las soluciones de la ecuación (2.119)

$$x_1=c_{11}\cos\frac{t}{n}+c_{21}\operatorname{sen}\frac{t}{n}+\varphi_1(t)$$

tienen período $2\pi n$. Para la determinación de las constantes arbitrarias c_{11} y c_{21} utilizamos las dos condiciones de la ausencia de los términos resonantes en la ecuación siguiente de (2.109):

$$\ddot{x}_2+\frac{1}{n^2}x_2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}x_1+\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}\dot{x}_1+\left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_{\substack{x=x_0\\ \dot{x}=\dot{x}_0\\ \mu=0}}$$

y así sucesivamente.

4. Caso autónomo. Supongamos que el segundo miembro de la ecuación (2.107) no depende explícitamente de t, y la ecuación tiene la forma

$$\ddot{x}+a^2x=\mu F(x,\ \dot{x},\ \mu), \tag{2.121}$$

donde la función F satisface las condiciones establecidas anteriormente. A primera vista puede parecer que el análisis de la ecuación (2.121) debe ser más sencillo que el de la (2.107), en la cual el segundo miembro depende del argumento t; sin embargo, en realidad la ausencia del argumento t en el segundo miembro de la ecuación hace el problema más complejo.

Si el segundo miembro depende explícitamente de t, entonces, como fue ya señalado anteriormente, son conocidos los posibles períodos de las soluciones, puesto que éstos pueden ser sólo iguales al período del segundo miembro, o múltiplos de éste, a lo largo de las soluciones, respecto al argumento t contenido explícitamente.

Si, en cambio, el segundo miembro no contiene a t, se lo puede considerar como función periódica de período arbitrario y, por lo tanto, no se excluye la posibilidad de la existencia de una solución de cualquier período, siendo éste, en general, función del parámetro μ. Debido a que el período de $x(t, \mu)$, en general, es función de μ, no sería conveniente buscar la solución en forma de la serie

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \ldots, \tag{2.110}$$

puesto que cada función $x_n(t)$ por separado no está obligada a ser función periódica. Por consiguiente, las funciones $x_n(t)$ no podrían ser halladas por los métodos anteriores. Por eso hay que transformar la ecuación (2.121) a una nueva variable independiente, de manera que con respecto a dicha variable la ecuación tenga período constante, y luego buscar la solución en forma de la serie (2.110).

Previamente, para simplificar, transformemos la ecuación (2.121), por la sustitución de la variable independiente $t_1 = at$, a la forma

$$\frac{d^2x}{dt_1^2} + x = \mu F_1(x, \dot{x}, \mu). \tag{2.122}$$

Cada solución de la ecuación generadora $x_0(t_1) = c_1 \cos(t_1 - t_0)$ tendrá período 2π, y las soluciones periódicas de la ecuación (2.122) para $\mu \neq 0$, si éstas existen, tendrán período $2\pi + \alpha(\mu)$; además, se puede demostrar que $\alpha(\mu)$ es función analítica de μ cuando μ es suficientemente pequeño.

Desarrollemos $\alpha(\mu)$ en serie de potencias de μ; entonces

$$2\pi + \alpha(\mu) = 2\pi(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots + h_n\mu^n + \ldots), \tag{2.123}$$

donde h_j son ciertas magnitudes constantes por ahora desconocidas.

Transformemos las variables de manera que la solución periódica $x(t, \mu)$ de la ecuación (2.122) no tenga período $2\pi + \alpha(\mu)$, sino período constante 2π. Esto se logra por la sustitución de las variables

$$t_1 = t_2(1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots + h_n\mu^n + \ldots) \tag{2.124}$$

ya que, debido a la dependencia (2.123), al variar t_1 desde 0 hasta $2\pi + \alpha(\mu)$, la nueva variable t_2 varía desde 0 hasta 2π. Con esto (2.122) se lleva a la forma:

$$\begin{gathered}\ddot{x}_{t_2 t_2} + (1 + h_1\mu + \ldots + h_n\mu^n + \ldots)^2 x = \\ = \mu(1 + h_1\mu + \ldots + h_n\mu^n + \ldots)^2 F_1 \times \\ \times (x, (1 + h_1\mu + \ldots + h_n\mu^n + \ldots)^{-1} \dot{x}_{t_2}, \mu).\end{gathered} \tag{2.125}$$

La solución periódica de esta ecuación se busca en la forma

$$x(t_2, \mu) = x_0(t_2) + \mu x_1(t_2) + \ldots + \mu^n x_n(t_2) + \ldots, \tag{2.126}$$

donde $x_n(t_2)$ son funciones periódicas del argumento t_2 de período 2π. Sustituyendo (2.126) en la ecuación (2.125) y comparando los coeficientes de potencias iguales de μ en ambos miembros de la igualdad, se obtiene

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \text{ de donde } x_0 = c\cos(t_2 - t_0),$$
$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2h_1x_0 + F_1(x_0, \dot{x}_0, 0),$$

bien

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2h_1c\cos(t_2 - t_0) + \\ + F_1(c\cos(t_2 - t_0), \ -c\,\mathrm{sen}\,(t_2 - t_0), \ 0) \qquad (2.127)$$

. . . .

Para que la ecuación (2.127) tenga soluciones periódicas, es necesario y suficiente que su segundo miembro no contenga a los términos resonantes (véase (2.106)), es decir, que

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F_1(c\cos(t_2 - t_0), \ -c\,\mathrm{sen}\,(t_2 - t_0), \ 0)\,\mathrm{sen}\,(t_2 - t_0)\,dt_2 = 0, \\ &-2h_1c + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(c\cos(t_2 - t_0), \ -c\,\mathrm{sen}\,(t_2 - t_0), 0)\times \\ &\qquad\qquad \times\cos(t_2 - t_0)\,dt_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.128)$$

La primera ecuación da la posibilidad de hallar el valor de c, y la segunda, el de h_1. Después de esto, se hallan las soluciones de la ecuación generadora $x_0 = c\cos(t_2 - t_0)$, en cuyo entorno para pequeños μ hay soluciones periódicas de la ecuación (2.122) y se determina aproximadamente el período de la solución buscada

$$2\pi + \alpha(\mu) \approx 2\pi(1 + h_1\mu).$$

Conociendo c y h_1, se puede determinar $x_1(t_2)$ y, si es necesario, calcular por el mismo método $x_2(t_2)$, $x_3(t_2)$, etc.

Ejemplo 2.

$$\ddot{x} - x = \mu\dot{x}(9 - x^2). \qquad (2.129)$$

Determinar las soluciones de la ecuación generadora, a las cuales tienden las soluciones periódicas de (2.129) cuando $\mu \to 0$.

Las soluciones de la ecuación generadora tienen la forma $x = c\cos(t - t_0)$. Para la determinación de los valores buscados de c, utilizamos la primera de las ecuaciones (2.128):

$$\int_0^{2\pi} c\,(9 - c^2\cos^2(t - t_0))\,\mathrm{sen}^2\,(t - t_0)\,dt = 0,$$

o bien $\pi c\left(9 - \frac{c^2}{4}\right) = 0$, de donde $c_1 = 0$, $c_{2,3} = \pm 6$.

Para $c_1=0$ se obtiene la solución trivial $x=0$ de la ecuación generadora, la cual sigue siendo solución de (2.129) para cualquier μ.
Cuando $c_{2,3}=\pm 6$, obtenemos $x=\pm 6\cos(t-t_0)$.

Demostremos uno de los teoremas más simples de A. Poincaré *de existencia y unicidad de la solución periódica* que tiende hacia la solución periódica de la ecuación generadora cuando $\mu\to 0$, aplicado a la ecuación de la forma

$$\ddot{x}=f(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu), \tag{2.130}$$

donde la función f satisface las condiciones del teorema sobre la dependencia analítica de la solución respecto al parámetro μ para valores de μ suficientemente pequeños. Aparte de ello, consideraremos que la función f depende explícitamente de t, y que tiene período 2π respecto a t. Supongamos también que la ecuación generadora $\ddot{x}=f(t,\ x,\ \dot{x},\ 0)$ tiene solución periódica única $x=\varphi_0(t)$ de período 2π.

Designemos por $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ la solución de la ecuación (2.130) que satisface las condiciones iniciales

$$x(t_0)=\varphi_0(t_0)+\beta_0,\quad \dot{x}(t_0)=\dot{\varphi}_0(t_0)+\beta_1.$$

Por consiguiente, β_0 y β_1 son las desviaciones de las condiciones iniciales de la solución $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ y de su derivada $\dot{x}(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ respecto a las condiciones iniciales $\varphi_0(t_0)$ y $\dot{\varphi}_0(t_0)$ de la solución periódica de la ecuación generadora.

El problema consiste en indicar las condiciones bajo las cuales, para cada valor de μ de módulo suficientemente pequeño, exista una solución periódica única $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ de la ecuación (2.130) que tienda a la solución periódica $\varphi_0(t)$ de la ecuación generadora, cuando $\mu\to 0$.

Si la solución $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ es periódica de período 2π, entonces es evidente que deben satisfacerse las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x(2\pi,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)-x(0,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)=0,\\ \dot{x}(2\pi,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)-\dot{x}(0,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.131}$$

Designando los primeros miembros de estas ecuaciones por $\Phi_0(\mu,\beta_0,\beta_1)$ y $\Phi_1(\mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ respectivamente, escribamos el sistema en la forma

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0(\mu,\ \beta_0,\ \beta_1)=0\\ \Phi_1(\mu,\ \beta_0,\ \beta_1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.132}$$

Las condiciones (2.132), llamadas *condiciones de periodicidad*, son no sólo necesarias, sino también suficientes para la periodicidad de la solución $x(t,\ \mu,\ \beta_0,\ \beta_1)$ de la ecuación (2.130).

En efecto, debido a la periodicidad del segundo miembro de la ecuación (2.130) respecto a t, este segundo miembro toma en las bandas $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi$, ..., valores iguales en los puntos $(t, x, \dot{x})$, $(t+2\pi, x, \dot{x})$, ... Por lo tanto, si en los puntos $t=0$ y $t=2\pi$ se dan condiciones iniciales x_0 y $\dot{x}_0$ iguales, éstas determinan curvas integrales completamente iguales en las bandas $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y $2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi$ (fig. 2.2), más exactamente, curvas que son continuación periódica una de la otra.

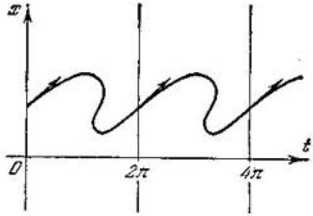

Fig. 2.2

En virtud del teorema de las funciones implícitas, se puede afirmar que si el jacobiano

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \neq 0$$

en el punto $\mu=0$, $\beta_0=\beta_1=0$, para cada valor de μ de módulo suficientemente pequeño existe un par único de funciones $\beta_0(\mu)$ y $\beta_1(\mu)$ que satisfacen las condiciones de periodicidad (2.132) y que tienden a cero cuando $\mu \to 0$; o sea, en las condiciones señaladas, para cada μ suficientemente pequeño, existe una solución periódica única de la ecuación (2.130) que tiende hacia la solución periódica de la ecuación generadora cuando $\mu \to 0$ *). Esta afirmación es precisamente el contenido del teorema de A. Poincaré.

Ejemplo 3. Demostrar que en el caso de no resonancia, para la ecuación

$$\ddot{x} + a^2 x = f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{2.107}$$

donde f y F satisfacen las condiciones arriba expuestas (véase la pág. 150), se cumplen las exigencias del teorema de existencia y unicidad de la solución periódica.

La solución $x(t, \mu, \beta_0, \beta_1)$, la cual es función analítica de los tres últimos argumentos para valores suficientemente pequeños de los mismos, se busca en

*) Para más detalles sobre los teoremas de la existencia de las soluciones periódicas, consúltese el libro de I. G. Malkin.

la forma

$$x(t, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t) + x_{11}(t)\beta_0 + x_{12}(t)\beta_1 + x_{13}(t)\mu + \ldots \qquad (2.133)$$

Sustituyendo (2.133) en la ecuación (2.107) y comparando los coeficientes de iguales potencias de μ, β_0 y β_1, se obtienen para la determinación de x_{11} y de x_{12} las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_{11} + a^2 x_{11} = 0, \quad x_{11}(0) = 1, \quad \dot{x}_{11}(0) = 0, \\ &\ddot{x}_{12} + a^2 x_{12} = 0, \quad x_{12}(0) = 0, \quad \dot{x}_{12}(0) = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (2.134)$$

(los valores iniciales se obtienen de las condiciones

$$x(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) = x_0(t_0) + \beta_0,$$

$$\dot{x}(t_0, \mu, \beta_0, \beta_1) = \dot{x}_0(t_0) + \beta_1),$$

de donde

$$x_{11} = \cos at, \quad x_{12} = \frac{1}{a} \operatorname{sen} at.$$

Las condiciones de periodicidad (2.132) tienen la forma

$$(\cos 2a\pi - 1)\beta_0 + \frac{1}{a} \operatorname{sen} 2a\pi\beta_1 + \ldots = 0,$$

$$-a \operatorname{sen} 2a\pi\beta_0 + (\cos 2a\pi - 1)\beta_1 + \ldots = 0,$$

donde los términos no escritos no influyen en la magnitud del determinante

$$\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)} \quad \text{cuando} \quad \mu = \beta_0 = \beta_1 = 0.$$

El determinante

$$\left.\frac{D(\Phi_0, \Phi_1)}{D(\beta_0, \beta_1)}\right|_{\mu=\beta_0=\beta_1=0} = (\cos 2a\pi - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 2a\pi$$

es diferente de cero, puesto que a no es igual a un número entero.

§ 9. NOCIONES SOBRE PROBLEMAS DE CONTORNO

Como ya se indicó en la introducción, conjuntamente con el problema inicial fundamental, a menudo hay que resolver también los llamados *problemas de contorno*, o *de frontera*. En estos problemas, el valor de la función buscada se da no en uno, sino en dos puntos, los cuales delimitan un segmento, en el que se exige hallar la solución. Por ejemplo, en el problema del movimiento de un punto material de masa m, bajo la acción de una fuerza dada $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, frecuentemente se pide hallar la ley de movimiento, si en el momento inicial $t = t_0$, el punto se encontraba en la posición caracterizada por el radio-vector $\mathbf{r}_0$, y en el momento $t = t_1$ debe hallarse en el punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$.

El problema se reduce a la integración de la ecuación diferencial del movimiento

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}(t,\ \mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}})$$

con las condiciones de frontera $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$; $\mathbf{r}(t_1)=\mathbf{r}_1$.

Obsérvese que este problema, en general, no posee una solución única; si se trata de un problema balístico y de puntos en la superficie de la Tierra, entonces el cuerpo puede caer en un mismo punto siguiendo una trayectoria rasa y siguiendo una empinada (fig. 2.3); es más, para grandes velocidades iniciales puede caer en el mismo punto después de una o de varias vueltas alrededor del globo terráqueo.

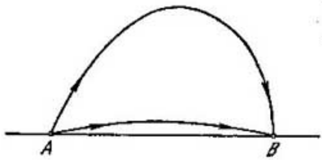

Fig. 2.3

Un problema de contorno similar se puede establecer también para un rayo de luz que pasa a través de un medio refractante: hallar la dirección por la cual el rayo de luz debe partir del punto A para caer en otro punto dado B.

Aquí es evidente que este problema no siempre tiene solución, y si la tiene, pueden haber varias, y hasta formar un conjunto infinito (por ejemplo, si los rayos que salen de A tienen foco en B).

Si se logra hallar la solución general de la ecuación diferencial del problema de frontera, entonces para la resolución de este problema hay que determinar las constantes arbitrarias que se encuentran en dicha solución, partiendo de las condiciones de frontera. En este caso, claro está, no siempre existe solución real, y si existe, no es necesariamente única.

Como ejemplo de las posibilidades que aquí surgen, consideremos el siguiente problema de contorno:

hallar la solución de la ecuación

$$y''+y=0, \tag{2.135}$$

que satisface las condiciones: $y(0)=0$, $y(x_1)=y_1$.

La solución general de la ecuación (2.135) tiene la forma

$$y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x.$$

La primera condición de frontera se satisface para $c_1=0$, con lo cual $y=c_2\,\mathrm{sen}\,x$.

Si $x_1\neq n\pi$, donde n es entero, entonces de la segunda condición de frontera se halla $y_1=c_2\,\mathrm{sen}\,x_1$, $c_2=\frac{y_1}{\mathrm{sen}\,x_1}$. Por consiguiente, en este caso existe una solución única del problema de contorno:

$$y=\frac{y_1}{\operatorname{sen} x_1}\operatorname{sen} x.$$

Si, en cambio, $x_1=n\pi$ e $y_1=0$, entonces todas las curvas del haz $y=c_2\operatorname{sen} x$ son gráficas de las soluciones del problema de contorno.

Cuando $x_1=n\pi$, $y_1\neq 0$, no existen soluciones del problema de contorno, puesto que ni una sola curva del haz $y=c_2\operatorname{sen} x$ pasa por el punto $(x_1,\ y_1)$, donde

$$x_1=n\pi,\quad y_1\neq 0.$$

Veamos con más detalle los problemas de contorno para las ecuaciones lineales de segundo orden

$$y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y=\varphi(x), \tag{2.136}$$

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1. \tag{2.137}$$

Mediante la sustitución lineal de las variables

$$z=y-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)-y_0$$

las condiciones de frontera (2.137) se reducen a las condiciones nulas $z(x_0)=z(x_1)=0$, y además la linealidad de (2.136) no se altera.

Multiplicando por $e^{\int p_1(x)\,dx}$, la ecuación lineal (2.136) se reduce a la forma

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,y')+q(x)\,y=f(x), \tag{2.138}$$

donde $p(x)=e^{\int p_1(x)\,dx}$. Por ello, sin limitar sustancialmente la generalidad, se puede sustituir el estudio del problema de frontera (2.136), (2.137) por el estudio del problema de frontera para la ecuación (2.138), con las condiciones iniciales

$$y(x_0)=y(x_1)=0. \tag{2.139}$$

Consideremos previamente el problema de frontera (2.138), (2.139), cuando $f(x)$ es función con impulso igual a la unidad, localizada en el punto $x=s$. Más exactamente, consideremos la ecuación

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,y')+q(x)\,y=f_\varepsilon(x,\ s) \tag{2.140}$$

con condiciones de frontera $y(x_0)=y(x_1)=0$, donde la función $f_\varepsilon(x,\ s)$ es igual a cero en todo el segmento $[x_0,\ x_1]$, con excepción del ε-segmento del punto $x=s$, $s-\varepsilon<x<s+\varepsilon$, y además

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} f_{\varepsilon}(x,\ s)\,dx=1.$$

Denotemos por $G_{\varepsilon}(x,\ s)$ la solución continua de este problema de frontera y pasemos al límite cuando $\varepsilon\to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_{\varepsilon}(x,\ s)=G(x,\ s). \tag{2.141}$$

No sería difícil demostrar la existencia de este límite, el cual no depende de la elección de la función $f_{\varepsilon}(x,\ s)$; sin embargo no hay necesidad de ello, ya que por ahora nuestros razonamientos son de carácter general, y en la pág. 166 se dará una definición exacta de la función $G(x,\ s)$.

La función $G(x,\ s)$ se llama *función de influencia o función de Green* del problema de frontera considerado. Al igual que en las págs. 126—127 la solución del problema de contorno (2.138), (2.139) de segundo miembro continuo en (2.138) se puede considerar como superposición de las soluciones de los problemas de contorno que corresponden a funciones localizadas en un punto, con impulsos $f(s_i)\,\Delta s$, donde s_i son los puntos de división del segmento $[x_0,\ x_1]$ en m partes iguales, $\Delta s=\frac{x_1-x_0}{m}$. Más exactamente, la solución aproximada del problema de contorno (2.138), (2.139) es igual a la suma integral

$$\sum_{i=1}^{m} G(x,\ s_i)\,f(s_i)\,\Delta s,$$

y el límite de esta suma cuando $m\to\infty$:

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,\ s)\,f(s)\,ds \tag{2.142}$$

es solución del problema de contorno considerado (2.138), (2.139).

El sentido físico de la función de influencia $G(x,\ s)$ y de la solución (2.142) se aclara aún más, si en la ecuación (2.140) se considera $y(x)$ como el desplazamiento de cierto sistema bajo la influencia de la fuerza $f(x)$, distribuida continuamente en el segmento $[x_0,\ x_1]$ (por ejemplo, la desviación de un hilo de la posición de equilibrio bajo la acción de una carga distribuida con densidad $f(x)$). En este caso $G(x,\ s)$ describe el desplazamiento originado por la fuerza unitaria localizada, aplicada en el punto $x=s$; la solución (2.142) se considera como el límite de la suma de las soluciones correspondientes a las fuerzas localizadas.

La función de Green posee las siguientes propiedades, que surgen de su definición (2.141):

1. $G(x, s)$ es continua en x para s fija cuando $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $x_0 < s < x_1$.

2. $G(x, s)$ es solución de la ecuación homogénea correspondiente

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = 0$$

en todo el segmento $[x_0, x_1]$, a excepción del punto $x = s$ (ya que fuera de este punto, en el caso en que la función está localizada en el punto $x = s$, el segundo miembro es nulo).

3. $G(x, s)$ satisface las condiciones de frontera:

$$G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0.$$

4. En el punto $x = s$ la derivada $G'_x(x, s)$ debe tener discontinuidad de primera especie con salto $\frac{1}{p(s)}$. En efecto, es de esperar discontinuidad sólo en el punto de localización de la función, en el punto $x = s$. Multiplicando la identidad

$$\frac{d}{dx}(p(x)G'_\varepsilon(x, s)) + q(x)G_\varepsilon(x, s) \equiv f_\varepsilon(x, s)$$

por dx e integrando desde $s - \varepsilon$ hasta $s + \varepsilon$, se obtiene

$$p(x)G'_\varepsilon(x, s)\Big|_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} + \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} q(x)G_\varepsilon(x, s)\,dx = 1$$

y pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$, tendremos

$$[G'(s+0, s) - G'(s-0, s)] = \frac{1}{p(s)}.$$

Todos nuestros razonamientos sobre la función de Green han sido de carácter general. Démosle ahora la exactitud necesaria.

Definición. *Se llama función de Green $G(x, s)$ del problema de frontera* (2.138), (2.139) *a la función que satisface las condiciones* 1), 2), 3) *y* 4).

Por sustitución directa en la ecuación (2.138), se comprueba que

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)f(s)\,ds \tag{2.142}$$

es solución de esta ecuación (las condiciones de frontera (2.139) se satisfacen evidentemente, debido a la propiedad 3)).

En efecto,

$$y'(x)=\int_{x_0}^{x_1} G'_x(x,\ s)\,f(s)\,ds=\int_{x_0}^{x} G'_x(x,\ s)\,f(s)\,ds+\int_{x}^{x_1} G'_x(x,\ s)\,f(s)\,ds;$$

$$y''(x)-\int_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,\ s)\,f(s)\,ds=G'_x(x,\ x-0)\,f(x)+$$

$$+\int_{x}^{x_1} G''_{xx}(x,\ s)\,f(s)\,ds-G'_x(x,\ x+0)\,f(x)=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x,\ s)\,f(s)\,ds+[G'_x(x+0,\ x)-G'_x(x-0,\ x)]\,f(x).$$

Sustituyendo (2.142) en la ecuación (2.138), se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1}[p(x)\,G''_{xx}(x,\ s)+p'(x)\,G'_x(x,\ s)+q(x)\,G(x,\ s)\,dx+$$

$$+p(x)\,[G'_x(x+0,\ x)-G'_x(x-0,\ x)]\,f(x)\equiv f(x),$$

debido a las condiciones 2) y 4).

Estudiemos un método de construcción de la función de Green, del cual obtendremos a la vez una condición suficiente para su existencia.

Tomemos la solución $y_1(x)$ de la ecuación

$$\frac{d}{dx}(p(x)\,y')+q(x)\,y=0, \tag{2.143}$$

determinada por las condiciones iniciales

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_0)=y'_0\neq 0.$$

Esta solución, en general, no satisface la segunda condición de frontera $y(x_1)\neq 0$. El caso $y(x_0)=y(x_1)=0$ es excepcional, y aquí no será estudiado.

Es evidente que las soluciones $c_1y_1(x)$, donde c_1 es una constante arbitraria, satisfacen también la condición de frontera $y(x_0)=0$. Análogamente se halla la solución no trivial $y_2(x)$ de la ecuación (2.143), que satisface la segunda condición de frontera $y_2(x_1)=0$; a esta misma condición la satisfacen todas las soluciones de la familia $c_2y_2(x)$, donde c_2 es una constante arbitraria.

Buscamos la función de Green en la forma

$$G(x,\ s)=\begin{cases} c_1y_1(x), & \text{si } x_0\leqslant x\leqslant s,\\ c_2y_2(x), & \text{si } s\leqslant x\leqslant x_1,\end{cases}$$

y las constantes c_1 y c_2 las escogemos de manera que se cumplan las condiciones 1) y 4), o sea, que la función $G(x, s)$ sea continua en x para s fija y, en particular, continua en el punto $x=s$:

$$c_1y_1(s)=c_2y_2(s), \tag{2.144}$$

y que $G'_x(x, s)$ tenga en el punto $x=s$ el salto $\frac{1}{p(s)}$:

$$c_2y'_2(s)-c_1y'_1(s)=\frac{1}{p(s)}. \tag{2.145}$$

Como se considera $y_1(x_1)\neq 0$, las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes, ya que todas las soluciones linealmente dependientes de $y_1(x)$ tienen la forma $c_1y_1(x)$ y, por consiguiente, cuando $c_1\neq 0$ no son iguales a cero en el punto x_1 en el cual se hace cero la solución $y_2(x)$. Por lo tanto, el determinante del sistema (2.144) y (2.145), que es el wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))=W(x)$ en el punto $x=s$, es diferente de cero, y las constantes c_1 y c_2 que satisfacen el sistema (2.144) y (2.145) se determinan fácilmente:

$$c_1=\frac{y_2(s)}{W(s)\,p(s)}, \quad c_2=\frac{y_1(s)}{W(s)\,p(s)},$$

de donde

$$G(x, s)=\begin{cases} \dfrac{y_2(s)\,y_1(x)}{W(s)\,p(s)} & \text{cuando } x_0\leqslant x\leqslant s, \\ \dfrac{y_1(s)\,y_2(x)}{W(s)\,p(s)} & \text{cuando } s<x\leqslant x_1. \end{cases} \tag{2.146}$$

Ejemplo. Hallar la función de Green del problema de frontera

$$y''(x)+y(x)=f(x), \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Las soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, que satisfacen las condiciones $y(0)=0$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, tienen respectivamente la forma $y_1=c_1\operatorname{sen} x$ e $y_2=c_2\cos x$; por lo tanto, en virtud de (2.146),

$$G(x, s)=\begin{cases} -\cos s\operatorname{sen} x & \text{cuando } 0\leqslant x\leqslant s, \\ -\operatorname{sen} s\cos x & \text{cuando } s<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Observación. Hemos supuesto (pág. 167) que no existen soluciones no triviales $y(x)$ de la ecuación homogénea (2.143) que satisfagan las condiciones de frontera nulas: $y(x_0)=y(x_1)=0$. Esta condición garantiza no sólo la existencia y unicidad del problema de frontera (2.138), (2.139), sino también la unicidad de la función de Green.

En efecto, si admitimos la existencia de dos funciones de Green diferentes $G_1(x, s)$ y $G_2(x, s)$ para el problema de frontera (2.138), (2.139), entonces obtenemos dos soluciones diferentes de este problema:

$$y_1(x)=\int_{x_0}^{x_1} G_1(x,\ s)\,f(s)\,ds$$

$$y_2(x)=\int_{x_0}^{x_1} G_2(x,\ s)\,f(s)\,ds,$$

la diferencia de las cuales

$$\int_{x_0}^{x_1} [G_1(x,\ s)-G_2(x,\ s)]\,f(s)\,ds$$

será, contrariamente a lo supuesto, una solución no trivial de la ecuación homogénea correspondiente que satisface a las condiciones de frontera nulas.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2

1. $y''-6y'+10y=100$, y cuando $x=0$, se tiene $y=10$, $y'=5$.

2. $\ddot{x}+x=\operatorname{sen} t-\cos 2t$.

3. $y'y'''-3(y'')^2=0$.

4. $y''+y=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$.

5. $x^2y''-4xy'+6y=2$.

6. $y''+y=\operatorname{ch} x$.

7. $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$.

8. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=e^t+e^{2t}+1$.

9. $(1+x^2)\,y''+(y')^2+1=0$.

10. $x^3\dfrac{d^2x}{dt^2}+1=0$.

11. $y^{IV}-16y=x^2-e^x$.

12. $(y''')^2+(y'')^2=1$.

13. $\dfrac{d^6x}{dt^6}-\dfrac{d^4x}{dt^4}=1$.

14. $\dfrac{d^4x}{dt^4}-2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=t^2-3$.

15. $y''+4xy=0$; integrar mediante series de potencias.

16. $x^2y''+xy'+\left(9x^2-\dfrac{1}{25}\right)y=0$; integrar reduciendo a una ecuación de Bessel.

17. $y''+(y')^2=1$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

18. $y''=3\sqrt{y}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

19. $y''+y=1-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

20. $\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{du}{dr}=0$.

21. Hallar la velocidad con la cual cierto cuerpo cae sobre la superficie de la Tierra, si se considera que cae desde una altura infinita y que el movimiento se efectúa sólo bajo la acción de la gravedad terrestre. Considerar el radio de la Tierra igual a 6400 km.

22. Hallar la ley del movimiento de un cuerpo que cae sin velocidad inicial, suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, y que el límite de ésta cuando $t \to \infty$ es 75 m/seg.

23. Una cadena de 6 m de largo se desliza de una mesa. Al comenzar el movimiento pendía de la mesa 1 m de cadena. ¿En cuánto tiempo caerá toda la cadena de la mesa? (Despreciar el rozamiento).

24. Una cadena ha sido tendida por encima de un clavo liso. Al comenzar el movimiento de un lado penden 8 m de cadena, y del otro, 10 m. ¿Dentro de cuánto tiempo se deslizará toda la cadena? (Despreciar el rozamiento.)

25. Un tren se mueve por una vía horizontal. El peso del tren es P, la fuerza de tracción de la locomotora es F, la fuerza de resistencia en pleno movimiento es $W = a + bv$, donde a y b son constantes, y v es la velocidad del tren; s es el trayecto recorrido. Determinar la ley de movimiento del tren, considerando que cuando $t = 0$, $s = 0$ y $v = 0$.

26. Un peso de p kg colgado de un resorte hace que éste se alargue en a cm; después el resorte es alargado en A cm más, y soltado sin velocidad inicial. Hallar la lay de movimiento del resorte, despreciando la resistencia del medio.

27. Dos pesos iguales son colgados en el extremo de un resorte. Hallar la ley de movimiento de uno de los pesos si el otro se desprende. El alargamiento del resorte bajo la acción de un peso es de a cm.

28. Un punto material de masa m se separa del centro O con una fuerza proporcional a la distancia. La resistencia del medio es proporcional a la velocidad de movimiento; hallar la ley de dicho movimiento.

29. Hallar la solución periódica con período 2π de la ecuación

$$\ddot{x} + 2x = f(t),$$

donde la función $f(t) = \pi^2 t - t^3$, para $-\pi < t \leqslant \pi$, y luego se prosigue periódicamente.

30. $yy'' + (y')^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$.

31. $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$.

32. $\ddot{x} + 9x = t \operatorname{sen} 3t$.

33. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$.

34. $y''' - y = e^x$.

35. $y'' - 2y' + 2y = xe^x \cos x$.

36. $(x^2 - 1)\, y'' - 6y = 1$. Una solución particular de la ecuación homogénea correspondiente tiene forma de polinomio.

37. Hallar la solución $u = u(x^2 + y^2)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

que depende sólo de $x^2 + y^2$.

38. Hallar la solución $u = u(x^2 + y^2 + z^2)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

que es función de $x^2 + y^2 + z^2$.

39. Un punto material se hunde lentamente en un líquido. Hallar la ley de movimiento, considerando que durante una inmersión lenta la resistencia del líquido es proporcional a la velocidad de inmersión.

40. Integrar la ecuación de movimiento $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, considerando que el segundo miembro es función sólo de x ó de $\dot{x}$:

a) $m\ddot{x} = f(x)$;

b) $m\ddot{x} = f(\dot{x})$.

41. $y^{VI}-3y^{V}+3y^{IV}-y'''=x$.
42. $x^{IV}+2x''+x=\cos t$.
43. $(1+x^2)\,y''+(1+x)\,y'+y=2\cos\ln(1+x)$.
44. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x}+2\dot{x}+2x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nt}{n^4}.$$

45. Determinar la solución periódica de la ecuación

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=f(t),$$

donde a_1 y a_2 son constantes, y $f(t)$, una función continua periódica de período 2π, que puede ser desarrollada en serie de Fourier, $a_1\neq 0$ y $a_2\neq 0$.

46. $\ddot{x}+3x=\cos t+\mu\dot{x}^2$, μ es un parámetro pequeño. Determinar aproximadamente la solución periódica.

47. $x^2y''-xy'+y=0$; integrar la ecuación si $y_1=x$ es una solución particular.

48. Hallar la ecuación lineal homogénea que posea el siguiente sistema fundamental de soluciones: $y_1=x$, $y_2=\dfrac{1}{x}$.

49. $x^{IV}+x=t^3$.
50. $x=(y'')^3+y''+1$.
51. $\ddot{x}+10\dot{x}+25x=2^t+te^{-5t}$.
52. $xyy''-x(y')^2-yy'=0$.
53. $y^{VI}-y=e^{2x}$.
54. $y^{VI}+2y^{IV}+y''=x+e^x$.
55. $6y''y^{IV}-5(y''')^2=0$.
56. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$.
57. $y''+y=\operatorname{sen} 3x\cos x$.
58. $y''=2y^3$, $\quad y(1)=1$, $\; y'(1)=1$.
59. $yy''-(y')^2=y'$.