CAPITULO 3

Sistemas de ecuaciones diferenciales

§ 1. CONCEPTOS GENERALES

La ecuación de movimiento de un punto material de masa m, bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, es

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}});$$

proyectando sobre los ejes de coordenadas, ésta puede ser sustituida por un sistema de tres ecuaciones escalares de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X(t, x, y, z, \dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}),$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y(t, x, y, z, \dot{x}\ \dot{y}, \dot{z}),$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

o por un sistema de seis ecuaciones de primer orden, si consideramos como funciones desconocidas no sólo las coordenadas x, y, z del punto en movimiento, sino también las proyecciones $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ de su velocidad $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$:

$$\dot{x}=u,$$
$$\dot{y}=v,$$
$$\dot{z}=w;$$
$$m\dot{u}=X(t, x, y, z, u, v, w),$$
$$m\dot{v}=Y(t, x, y, z, u, v, w),$$
$$m\dot{w}=Z(t, x, y, z, u, v, w).$$

En este caso, por lo general, se dan la posición inicial del punto $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, $z(t_0)=z_0$ y la velocidad inicial $u(t_0)=u_0$, $v(t_0)=v_0$, $w(t_0)=w_0$.

Este problema fundamental con valores iniciales ya fue analizado en el § 6 del capítulo 1 (pág. 54). Allí fue demostrado el teorema de existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

que satisface las condiciones iniciales

$$x_i(t_0) = x_{i0} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.2}$$

Recordemos que las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución del sistema (3.1) con las condiciones iniciales (3.2) son:

1) continuidad de todas las funciones f_i en un entorno de las condiciones iniciales;

2) cumplimiento de la condición de Lipschitz para todas las funciones f_i en todos sus argumentos, a partir del segundo, en dicho entorno.

La condición 2) se puede cambiar por una más grosera: la existencia de las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

acotadas en valor absoluto.

La *solución* $x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales es una función vectorial n-dimensional, que denotaremos abreviadamente por $X(t)$. Con esta notación, el sistema (3.1) se puede escribir en la forma

$$\frac{dX}{dt} = F(t,\ X),$$

donde F es una función vectorial con coordenadas $(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)$, y las condiciones iniciales, en la forma $X(t_0) = X_0$, donde X_0 es un vector de n dimensiones con coordenadas $(x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})$.

La solución

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t),$$

o, más compactamente, $X = X(t)$, del sistema de ecuaciones, determina en el espacio euclidiano de coordenadas $t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, cierta curva llamada *curva integral*. Cuando se cumplen las condiciones 1) y 2) del teorema de existencia y unicidad, por cada punto de dicho espacio pasa una sola curva integral, y el conjunto de éstas forma una familia dependiente de n parámetros. Como parámetros de esta familia se pueden tomar, por ejemplo, los valores iniciales $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$.

Se puede dar otra interpretación de las soluciones

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = x_n(t)$$

o, en forma más compacta, $X = X(t)$, que es particularmente cómoda si los segundos miembros del sistema (3.1) no dependen explícitamente de t.

En el espacio euclidiano con coordenadas rectangulares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la solución $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ determina la ley de movimiento por cierta trayectoria según la variación del parámetro t, el cual en esta interpretación se considerará como tiempo. Así, la derivada $\frac{dX}{dt}$ será la velocidad de movimiento del punto, y $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$, las coordenadas de la velocidad de este punto. En esta interpretación, muy natural y cómoda en ciertos problemas físicos y mecánicos, el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.1}$$

o bien

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X),$$

se llama generalmente *dinámico*; el espacio de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *espacio de fases*, y la curva $X = X(t)$, *trayectoria de fases*.

El sistema dinámico (3.1) determina en un momento dado t en el espacio $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un campo de velocidades. Si la función vectorial F depende explícitamente de t, entonces el campo de velocidades cambia con el tiempo, y las trayectorias de fases pueden intersectarse. Si la función vectorial F o, lo que es lo mismo, todas las funciones f_i no dependen explícitamente de t, el campo de velocidades es estacionario, es decir, no cambia con el tiempo, y el movimiento será permanente.

En el último caso, si las condiciones del teorema de existencia y unicidad se cumplen, por cada punto del espacio de fases $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pasará una sola trayectoria. En efecto, en este caso por cada trayectoria $X = X(t)$ se realizan infinitos movimientos diferentes $X = X(t+c)$, donde c es una constante arbitraria. Es fácil comprobar esto realizando la sustitución de variables $t_1 = t + c$, con lo cual el sistema dinámico no cambia su forma:

$$\frac{dX}{dt_1} = F(X),$$

por consiguiente, $X = X(t_1)$ será su solución que, expresada en las variables anteriores, será $X = X(t+c)$.

Si por un punto X_0 del espacio de fases, en el caso considerado, pasaran dos trayectorias

$$X = X_1(t) \text{ y } X = X_2(t), \; X_1(\overline{t}_0) = X_2(\overline{\overline{t}}_0) = X_0,$$

entonces, tomando en cada una de ellas el movimiento para el cual el punto X_0 se alcanza en el momento $t = t_0$, o sea, considerando las soluciones

$$X = X_1(t - t_0 + \overline{t}_0) \text{ y } X = X_2(t - t_0 + \overline{\overline{t}}_0),$$

se obtendría una contradicción con el teorema de existencia y unicidad, puesto que las dos soluciones diferentes $X_1(t - t_0 + \overline{t}_0)$ y $X_2(t - t_0 + \overline{\overline{t}}_0)$ satisfarían a la misma condición inicial $X(t_0) = X_0$.

Ejemplo. El sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x \tag{3.3}$$

posee, como no es difícil comprobar por sustitución directa, la siguiente familia de soluciones:

$$x = c_1 \cos(t - c_2),$$
$$y = -c_1 \operatorname{sen}(t - c_2).$$

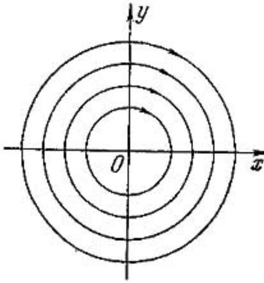

Fig. 3.1

Considerando t como parámetro, obtenemos en el plano de fases x, y una familia de circunferencias con centro en el origen de coordenadas (fig. 3.1). El segundo miembro del sistema (3.3) no depende de t y satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad: por esto, las trayectorias no se cortan. Fijando c_1, obtenemos una trayectoria determinada; además, a diferentes c_2 les corresponden movimientos diferentes por dicha trayectoria. La ecuación de la trayectoria $x^2 + y^2 = c_1^2$ no depende de c_2, por lo que todos los movimientos para un c_1 fijo se realizan por una misma trayectoria. Cuando $c_1 = 0$, la trayectoria de fases se compone de un punto, llamado en este caso *punto de reposo* del sistema (3.3).

§ 2. INTEGRACION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR REDUCCION A UNA SOLA ECUACION DE MAYOR ORDEN

Uno de los métodos fundamentales de integración de sistemas de ecuaciones diferenciales consiste en lo siguiente: de las ecuaciones del sistema (3.1) y de las ecuaciones obtenidas derivando éstas, se excluyen todas las funciones desconocidas, excepto una, para cuya determinación se obtiene una ecuación diferencial de orden mayor. Integrando dicha ecuación, se halla una de las funciones desconocidas. Las funciones desconocidas restantes se determinan, en lo posible sin integración, partiendo de las ecuaciones originales y de las obtenidas por derivación.

Veamos algunos ejemplos para ilustrar lo antedicho.

Ejemplo 1.

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=x.$$

Derivemos una de las ecuaciones, por ejemplo, la primera, $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}$; eliminando $\frac{dy}{dt}$ mediante la segunda ecuación, se obtiene $\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$, de donde $x=c_1e^t+$ $+c_2e^{-t}$. Utilizando la primera ecuación, obtenemos $y=\frac{dx}{dt}=c_1e^t-c_2e^{-t}$.

Hemos determinado y sin integrar, mediante la primera ecuación. Si hubiéramos determinado y de la segunda ecuación,

$$\frac{dy}{dt}=x=c_1e^t+c_2e^{-t}, \quad y=c_1e^t-c_2e^{-t}+c_3,$$

entonces habríamos introducido soluciones superfluas, puesto que la sustitución directa en el sistema original muestra que las funciones $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-t}$ e $y=c_1e^t-$ $-c_2e^{-t}+c_3$ satisfacen al sistema no para c_3 cualesquiera, sino para $c_3=0$.

Ejemplo 2.

$$\frac{dx}{dt}=3x-2y, \tag{3.4$_1$}$$

$$\frac{dy}{dt}=2x-y. \tag{3.4$_2$}$$

Derivemos la segunda ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}. \tag{3.5}$$

De las ecuaciones (3.4$_2$) y (3.5) se determinan x y $\frac{dx}{dt}$:

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}+y\right), \tag{3.6}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\right).$$

Sustituyendo en (3.4_1), obtenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Integrando la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes $y=e^t(c_1+c_2t)$ y sustituyendo en (3.6), se halla $x(t)$:

$$x=\frac{1}{2}e^t(2c_1+c_2+2c_2t).$$

Ejemplo 3.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=y, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=x.$$

Derivando la primera ecuación, obtenemos $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^4x}{dt^4}$, y sustituyendo en la segunda ecuación, se tiene $\frac{d^4x}{dt^4}=x$. Integrando esta ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, obtenemos

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\operatorname{sen} t,$$

y sustituyendo en la primera ecuación, se halla

$$y=c_1e^t+c_2e^{-t}-c_3\cos t-c_4\operatorname{sen} t.$$

Describamos más exactamente el proceso de eliminación de todas las funciones incógnitas, excepto una, del sistema.

Demostremos previamente que una de las funciones desconocidas, por ejemplo $x_1(t)$, que figura en la solución $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ \frac{dx_2}{dt}&=f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

satisface cierta ecuación de n-ésimo orden. Consideraremos en este caso que todas las funciones f_i poseen derivadas parciales continuas respecto a todos los argumentos, de hasta $(n-1)$-ésimo orden inclusive. Al poner en el sistema (3.1) cierta solución $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, todas las ecuaciones de éste se reducen a identidades. En particular, la primera ecuación

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

del sistema también se reduce a una identidad, Derivando esta identidad con respecto a t:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt},$$

o bien

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}f_i, \qquad (3.7_2^a)$$

y designando el segundo miembro de la última identidad por $F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, obtenemos

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3.7_2^b)$$

Derivando nuevamente esta identidad:

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=\frac{\partial F_2}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt},$$

o bien

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=\frac{\partial F_2}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial x_i}f_i, \qquad (3.7_3^a)$$

y designando el segundo miembro de la última identidad por $F_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, obtenemos:

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=F_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3.7_3^b)$$

Derivando una vez más esta identidad, y continuando este proceso $n-2$ veces, obtenemos por último la identidad

$$\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}=F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \qquad (3.7_{n-1}^b)$$

derivándola y utilizando las identidades (3.1), tendremos:

$$\frac{d^nx_1}{dt^n}=F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

De esta manera, hemos obtenido $n-1$ identidades

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), & (3.7_1)\\[2mm] \dfrac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), & (3.7_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \dfrac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}=F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) & (3.7_{n-1})\end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

y además la identidad

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.8}$$

Supongamos que el determinante es

$$\frac{D(f_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)} \neq 0$$

en la región considerada de variación de las variables. Entonces el sistema (3.7) se puede resolver respecto a $x_2, x_3, \ldots, x_n$, expresándolas mediante las variables $t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}$. Sustituyendo en la última ecuación (3.8) las variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$ halladas del sistema (3.7), obtenemos la ecuación de n-ésimo orden

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right), \tag{3.8$_1$}$$

a la cual satisface la función $x_1(t)$, que era, por hipótesis, la primera función $x_1(t)$ de la solución $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ del sistema (3.1).

Demostremos ahora que si se toma cualquier solución $x_1(t)$ de la ecuación de n-ésimo orden obtenida (3.8$_1$), se sustituye en el sistema (3.7) y se determinan de éste $x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t)$, entonces el sistema de funciones

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) \tag{3.9}$$

será solución del sistema (3.1).

Sustituyendo el sistema de funciones hallado (3.9) en el sistema (3.7), todas las ecuaciones de éste se reducen a identidades; en particular, se obtiene la identidad

$$\frac{dx_1}{dt} \equiv f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.7$_1$}$$

Derivándola con respecto a t, tendremos:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}. \tag{3.10}$$

En esta identidad, por ahora, no es posible sustituir $\frac{dx_i}{dt}$ por las funciones f_i, ya que aún no hemos demostrado que las funciones obtenidas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por el método expuesto anteriormente, partiendo de la ecuación (3.8) y del sistema (3.7), satisfacen el sistema (3.1). Es más, precisamente esta afirmación constituye la finalidad de nuestra demostración.

Restando miembro a miembro la identidad (3.7_2) de la identidad (3.10), tomada en la forma desarrollada (3.7_2^a), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)\equiv 0,$$

o bien, debido a (3.7_1),

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)\equiv 0.$$

En forma completamente análoga, derivando la identidad (3.7_2) y restándole (3.7_3^a), derivando luego (3.7_3) y restándole (3.7_4^a), ets., obtenemos:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=2} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)=0.$$

Como el determinante del sistema de ecuaciones lineal homogéneo

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)=0,\\ &\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_i}\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

formado por $n-1$ ecuaciones y con $n-1$ incógnitas $\left(\frac{dx_i}{dt}-f_i\right)$ $(i=2, 3, \ldots, n)$, coincide con el determinante funcional diferente de cero

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0,$$

el sistema (3.11) en cada punto de la región considerada tiene sólo soluciones triviales:

$$\frac{dx_i}{dt}-f_i\equiv 0 \quad (i=2, 3, \ldots, n).$$

Tomando en cuenta además (3.7_1), obtenemos que las n funciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i\,(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Observación 1. El proceso indicado aquí de elminación de todas las funciones, con excepción de una, presupone que

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)}\neq 0. \tag{3.12}$$

Si esta condición no se cumple, se puede utilizar el mismo proceso, pero en lugar de la función x_1, tomar cualquier función de las $x_2, x_3, \ldots, x_n$, que forman la solución del sistema (3.1). Si la condición (3.12) no se cumple al escoger cualquier función de las $x_2, x_3, \ldots, x_n$ en lugar de x_1, entonces son posibles diferentes casos excepcionales, que ilustraremos con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1\,(t,\ x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=f_2\,(t,\ x_2),$$

$$\frac{dx_3}{dt}=f_3\,(t,\ x_3).$$

El sistema se descompone en ecuaciones completamente independientes entre sí, cada una de las cuales debe integrarse por separado.

Ejemplo 5.

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1\,(t,\ x_1),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=f_2\,(t,\ x_2,\ x_3),\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\neq 0,$$

$$\frac{dx_3}{dt}=f_3\,(t,\ x_2,\ x_3).$$

Las dos últimas ecuaciones se pueden reducir a una ecuación de segundo orden por el método señalado anteriormente; pero la primera ecuación, que contiene la función desconocida x_1, la cual no figura en las ecuaciones restantes, debe ser integrada por separado.

Observación 2. Si aplicamos el proceso de eliminación indicado anteriormente al sistema

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

llamado lineal homogéneo, entonces, como es fácil comprobar, la ecuación de n-ésimo orden

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right) \qquad (3.8_1)$$

también será lineal homogénea. Además, si todos los coeficientes a_{ij} son constantes, la ecuación (3.8_1) será también lineal homogénea con coeficientes constantes. Una observación análoga se cumple también para el sistema lineal no homogéneo

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

para el cual la ecuación (3.8_1) será una ecuación lineal no homogénea de n-ésimo orden.

§ 3. DETERMINACION DE LAS COMBINACIONES INTEGRABLES

La integración del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

se realiza frecuentemente escogiendo las llamadas combinaciones integrables.

Se llama *combinación integrable* a una ecuación diferencial que es consecuencia de las ecuaciones (3.1), pero que se integra con facilidad; por ejemplo, que es de la forma

$$d\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

o que es una ecuación que se reduce, mediante cambio de variables, a cualquier tipo integrable de ecuaciones con una función desconocida.

Ejemplo 1

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Sumando miembro a miembro estas ecuaciones, se halla la combinación integrable

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y, \text{ o bien } \frac{d(x+y)}{x+y} = dt,$$

de donde

$$\ln|x+y| = t + \ln c_1, \quad x + y = c_1 e^t.$$

Restando miembro a miembro la segunda ecuación de la primera, obtenemos la segunda combinación integrable

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y), \text{ o bien } \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt,$$

$$\ln|x-y| = -t + \ln c_2, \quad x - y = c_2 e^{-t}.$$

De este modo, hemos hallado dos ecuaciones finitas *):

$$x+y=c_1e^t \quad \text{y} \quad x-y=c_2e^{-t},$$

a partir de las cuales se puede determinar la solución del sistema original:

$$x=\frac{1}{2}(c_1e^t+c_2e^{-t}), \quad y=\frac{1}{2}(c_1e^t-c_2e^{-t}),$$

o bien

$$x=\bar{c}_1e^t+\bar{c}_2e^{-t}, \quad y=\bar{c}_1e^t-\bar{c}_2e^{-t}.$$

Una combinación integrable permite obtener una ecuación finita

$$\Phi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_1,$$

que relaciona las funciones desconocidas y la variable independiente. Tal ecuación se llama *primera integral del sistema* (3.1).

De esta manera, se llama primera integral

$$\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c \tag{3.13}$$

del sistema de ecuaciones (3.1) a una ecuación finita que se reduce a una identidad para cierto valor de c, si en lugar de $x_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, se sustituye la solución del sistema (3.1).

Con frecuencia también se llama primera integral al primer miembro $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de la ecuación (3.13), y entonces la primera integral se determina como una función no idénticamente igual a una constante, pero que conserva su valor constante a lo largo de las curvas integrales del sistema (3.1).

Geométricamente, la primera integral $\Phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c$ puede ser interpretada, para una c fija, como una superficie n-dimensional en el espacio de $n-1$ dimensiones, de coordenadas $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, que posee la propiedad de que cada curva integral que tiene un punto común con esta superficie está enteramente contenido en ella. Cuando c es una variable, obtenemos una familia de superficies que no se cortan, y que poseen la misma propiedad, es decir, que están compuestas por puntos de cierta familia de curvas integrales del sistema (3.1), dependiente de $n-1$ parámetros.

Si se han hallado k combinaciones integrables, entonces se obtienen k primeras integrales:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_1, \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_k. \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

*) Véase la nota al pie de la pág. 22 (*N. de la Red.*)

Si todas estas integrales son independientes, o sea, si al menos un determinante

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k})} \neq 0,$$

donde $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}$ son k funciones cualesquiera de las $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces a partir del sistema (3.14) se pueden expresar k funciones desconocidas mediante las demás y, sustituyéndolas en el sistema (3.1), reducir el problema a la integración de un sistema de ecuaciones con una cantidad menor de incógnitas. Si $k = n$ y todas las integrales son independientes, todas las funciones desconocidas se determinan a partir del sistema (3.14).

Ejemplo. 2.

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \quad \frac{dy}{dt} = z - x, \quad \frac{dz}{dt} = x - y.$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones de este sistema, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0, \text{ o bien } \frac{d}{dt}(x + y + z) = 0,$$

de donde

$$x + y + z = c_1.$$

Esta primera integral hallada permite expresar una de las funciones desconocidas mediante las demás variables, y con ello reducir el problema a la integración de un sistema de dos ecuaciones con dos funciones incógnitas. Sin embargo, en este caso es fácil hallar otra primera integral. Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y, la tercera por z y sumando, resulta

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0,$$

o bien, multiplicando por 2, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

de donde

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

Partiendo de estas dos primeras integrales halladas se pueden expresar dos funciones desconocidas mediante las demás variables, reduciéndose el problema a la integración de una ecuación con una función incógnita.

Ejemplo 3.

$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr, \; B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp, \; C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq,$$

donde A, B y C son constantes (este sistema se encuentra en la teoría del movimiento de un cuerpo rígido). Multiplicando la primera ecuación por p, la segunda por q, la tercera por r y sumando, se obtiene

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0,$$

de donde se halla la primera integral

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=c_1.$$

Multiplicando la primera ecuación por Ap, la segunda por Bq, la tercera por Cr y sumando, tendremos

$$A^2p\frac{dp}{dt}+B^2q\frac{dq}{dt}+C^2r\frac{dr}{dt}=0,$$

e integrando, obtenemos otra primera integral

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=c_2.$$

Si se excluye el caso $A=B=C$, para el cual el sistema se integra directamente, las primeras integrales halladas serán independientes y, por lo tanto, utilizando éstas se pueden eliminar dos funciones desconocidas. Además, para determinar la tercera función se obtiene una ecuación con variables separables.

Para hallar las combinaciones integrables con frecuencia es más cómodo pasar a la llamada forma simétrica de escritura del sistema de ecuaciones (3.1):

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}=\frac{dx_2}{\varphi_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}=\ldots$$
$$\ldots=\frac{dx_n}{\varphi_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}=\frac{dt}{\varphi_0(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)},\qquad(3.15)$$

donde

$$f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\frac{\varphi_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{\varphi_0(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

En un sistema dado en forma simétrica, las variables son equivalentes, lo cual con frecuencia facilita la búsqueda de las combinaciones integrables.

Ejemplo 4.

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}.\qquad(3.16)$$

Integrando la ecuación

$$\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz},$$

hallamos $\frac{y}{z}=c_1$. Multiplicando los numeradores y los denominadores de la primera razón del sistema (3.16) por x, la segunda por y, la tercera por z y formando la proporción compuesta, obtenemos

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{2xy},$$

de donde

$$\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln|y|+\ln c_2,$$

o bien

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2.$$

Las primeras integrales independientes halladas

$$\frac{y}{z}=c_1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{y}=c_2$$

determinan las curvas integrales buscadas.

§ 4. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama *lineal*, si es lineal con respecto a todas las funciones desconocidas y a sus derivadas. El sistema de n ecuaciones lineales de primer orden, escrito en la forma normal, es

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j+f_i(t) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.17}$$

o, en forma vectorial,

$$\frac{dX}{dt}=AX+F, \tag{3.18}$$

donde X es un vector n-dimensional de coordenadas $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$; F es un vector n-dimensional de coordenadas $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\ldots$, $f_n(t)$. Es conveniente en lo sucesivo representar dichos vectores como matrices de una columna:

$$X=\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad F=\begin{Vmatrix} f_1\\ f_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n \end{Vmatrix},$$

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad \frac{dX}{dt}=\begin{Vmatrix} \dfrac{dx_1}{dt}\\ \dfrac{dx_2}{dt}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix}.$$

Según la regla del producto de matrices, las filas del primer factor deben multiplicarse por la columna del segundo: por lo tanto,

$$AX=\begin{Vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j\\ \cdots\cdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\end{Vmatrix},\quad AX+F=\begin{Vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j+f_1\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j+f_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j+f_n\end{Vmatrix}.$$

La igualdad de matrices significa la igualdad de todos sus elementos, por lo cual una sola ecuación matricial (3.18), o bien

$$\begin{Vmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{dx_n}{dt}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j+f_1\\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j+f_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j+f_n\end{Vmatrix}$$

es equivalente al sistema (3.17).

Si todas las funciones $a_{ij}(t)$ y $f_i(t)$ en (3.17) son continuas en el segmento $a\leqslant t\leqslant b$, entonces en un entorno suficientemente pequeño de cada punto $(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, donde $a\leqslant t_0\leqslant b$, se cumplen las condiciones del teorema de existencia y unicidad (véase la pág. 173) y, en consecuencia, por cada punto con estas propiedades pasa una sola curva integral del sistema (3.17).

En efecto, en el caso considerado los segundos miembros del sistema (3.17) son continuos, y sus derivadas parciales con respecto a cualquier x_j son acotadas, puesto que dichas derivadas son iguales a los coeficientes $a_{ij}(t)$, continuos en el segmento $a\leqslant t\leqslant b$.

Definamos el *operador lineal* L por la igualdad

$$L[X]=\frac{dX}{dt}-AX;$$

entonces la ecuación (3.18) puede escribirse en la forma aún más compacta

$$L[X]=F. \tag{3.19}$$

Si todas las $f_i(t)\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ o, lo que es lo mismo, la matriz $F=0$, el sistema (3.17) se llama *lineal homogéneo*. En forma compacta, el sistema lineal homogéneo tiene la forma

$$L[X]=0. \tag{3.20}$$

El operador L posee las dos propiedades siguientes:

1) $L[cX] \equiv cL[X]$,

donde c es una constante arbitraria.

2) $L[X_1+X_2] \equiv L[X_1]+L[X_2]$.

En efecto,

$$\frac{d(cX)}{dt}-A(cX) \equiv c\left[\frac{dX}{dt}-AX\right],$$

$$\frac{d(X_1+X_2)}{dt}-A(X_1+X_2) \equiv \left(\frac{dX_1}{dt}-AX_1\right)+\left(\frac{dX_2}{dt}-AX_2\right).$$

Un corolario de 1) y 2) es

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} c_iX_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} c_iL[X_i],$$

donde las c_i son constantes arbitrarias.

Teorema 3.1. *Si X es solución del sistema lineal homogéneo $L[X]=0$, entonces cX, donde c es una constante arbitraria, es también solución de dicho sistema.*

Demostración. Dado $L[X] \equiv 0$, hay que demostrar que $L[cX] \equiv 0$.

Aplicando la propiedad 1) del operador L, obtenemos

$$L[cX] \equiv cL[X] \equiv 0.$$

Teorema 3.2. *La suma X_1+X_2 de dos soluciones X_1 y X_2 del sistema de ecuaciones lineal homogéneo es solución de dicho sistema.*

Demostración. Dado $L[X_1] \equiv 0$ y $L[X_2] \equiv 0$, hay que demostrar que $L[X_1+X_2] \equiv 0$.

Aplicando la propiedad 2) del operador L, se obtiene

$$L[X_1+X_2] \equiv L[X_1]+L[X_2] \equiv 0.$$

Corolario de los teoremas 3.1 y 3.2. *La combinación lineal $\sum_{i=1}^{m} c_iX_i$ de las soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_m$ del sistema $L[X] \equiv 0$ con coeficientes constantes arbitrarios es solución de dicho sistema.*

Teorema 3.3. *Si el sistema lineal homogéneo (3.20) con coeficientes reales $a_{ij}(t)$ tiene una solución compleja $X=U+iV$, las partes real e imaginaria*

$$U=\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Vmatrix} \quad \text{y} \quad V=\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{Vmatrix}$$

son por separado soluciones de dicho sistema.

Demostración. Dado $L[U+iV]\equiv 0$, hay que demostrar que
$$L[U]\equiv 0 \quad \text{y} \quad L[V]\equiv 0.$$
Aplicando las propiedades 1) y 2) del operador L, se obtiene
$$L[U+iV]\equiv L[U]+iL[V]\equiv 0.$$
Por consiguiente, $L[U]\equiv 0$ y $L[V]\equiv 0$.

Los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$, donde
$$X_i=\begin{Vmatrix} x_{1i}(t)\\ x_{2i}(t)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{ni}(t)\end{Vmatrix},$$
se llaman *linealmente dependientes* en el segmento $a\leqslant t\leqslant b$, si existen las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que
$$\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_nX_n\equiv 0 \tag{3.21}$$
cuando $a\leqslant t\leqslant b$, y al menos un $\alpha_i\neq 0$. Si, en cambio, la identidad (3.21) se cumple sólo cuando $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, entonces los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se llaman *linealmente independientes*.

Obsérvese que la identidad vectorial (3.21) es equivalente a las n identidades:
$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_{1i}(t)\equiv 0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_{2i}(t)\equiv 0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_{ni}(t)\equiv 0.\end{array}\right\} \tag{3.21_1}$$

Si los vectores X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ son linealmente dependientes y, por lo tanto, existe un sistema no trivial α_i (es decir, no todas las α_i son iguales a cero) que satisface al sistema (3.21_1) de n ecuaciones lineales homogéneas con respecto a α_i, entonces el determinante del sistema (3.21_1)
$$W=\begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn}\end{Vmatrix}$$
debe ser igual a cero para todos los valores de t del segmento $a\leqslant t\leqslant b$. Este determinante se llama *wronskiano* del sistema de vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Teorema 3.4. *Si el wronskiano W de las soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ del sistema de ecuaciones lineal homogéneo (3.20) con coeficientes continuos $a_{ij}(t)$ en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$, es igual a cero por lo menos en un punto $t = t_0$ de dicho segmento, entonces las soluciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son linealmente dependientes en el segmento mencionado y, por consiguiente, $W \equiv 0$ en dicho segmento.*

Demostración. Como los coeficientes $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ son continuos, el sistema (3.20) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Por lo tanto, las condiciones iniciales $X(t_0) = 0$ (o, más detalladamente, $x_1(t_0) = 0, x_2(t_0) = 0, \ldots, x_n(t_0) = 0$) determinan una solución única del sistema considerado. Ésta es, evidentemente, la solución trivial del sistema (3.20) $X(t) \equiv 0$ (o, más detalladamente, $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0, \ldots, x_n(t) \equiv 0$). El determinante $W(t_0) = 0$. Por consiguiente, existe un sistema no trivial $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que satisface la ecuación

$$c_1 X_1(t_0) + c_2 X_2(t_0) + \ldots + c_n X_n(t_0) = 0,$$

puesto que ésta es una ecuación vectorial equivalente al sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con respecto a c_i, cuyo determinante es igual a cero:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{1i}(t_0) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{2i}(t_0) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ni}(t_0) = 0.$$

La solución $X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$ de la ecuación (3.20), correspondiente a dicho sistema no trivial $c_1, c_2, \ldots, c_n$, satisface las condiciones iniciales nulas $X(t_0) = 0$ y, por lo tanto, coincide con la solución trivial del sistema (3.20):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t) \equiv 0,$$

es decir, X_i son linealmente dependientes.

Observación. Este teorema, como lo demuestran ejemplos simples, no se extiende a vectores arbitrarios $X_1, X_2, \ldots, X_n$, que no son soluciones de un sistema (3.20) con coeficientes continuos.

E j e m p l o 1. El sistema de vectores

$$X_1 = \begin{Vmatrix} t \\ t \end{Vmatrix} \quad \text{y} \quad X_2 = \begin{Vmatrix} t^2 \\ t^2 \end{Vmatrix}$$

es linealmente independiente, puesto que de

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0,$$

o bien

$$\begin{cases} \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0, \\ \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0 \end{cases}$$

se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (véase la pág. 99, ejemplo 1). En cambio, el wronskiano $\begin{vmatrix} t & t^2 \\ t & t^2 \end{vmatrix}$ es idénticamente nulo. Por consiguiente, los vectores X_1 y X_2 no pueden ser soluciones de un mismo sistema lineal homogéneo (3.20) con coeficientes continuos $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$.

Teorema 3.5. *La combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ de n soluciones linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ del sistema lineal homogéneo (3.20) con coeficientes $a_{ij}(t)$ continuos en el segmento $a \leq t \leq b$, es solución general de este sistema en dicho segmento.*

D e m o s t r a c i ó n. Como los coeficientes $a_{ij}(t)$ son continuos en el segmento $a \leq t \leq b$, el sistema satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad y, por lo tanto, para la demostración del teorema es suficiente probar que escogiendo las constantes c_i en la solución $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ se pueden satisfacer las condiciones iniciales $X(t_0) = X_0$, elegidas arbitrariamente,

$$X_0 = \begin{Vmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n0} \end{Vmatrix},$$

donde t_0 es uno de los valores de t en el segmento $a \leq t \leq b$, es decir, que se puede satisfacer la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1} c_i X_i(t_0) = X_0,$$

o el sistema equivalente de n ecuaciones escalares:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{1i}(t_0) = x_{10},$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{2i}(t_0) = x_{20},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ni}(t_0) = x_{n0}.$$

Este sistema es resoluble con respecto a c_i para cualesquiera x_{i0}, puesto que el determinante del sistema es el wronskiano del sistema de soluciones linealmente independiente $X_1, X_2, \dots, X_n$ y, por consiguiente, no se anula en ningún punto del segmento $a \leqslant t \leqslant b$.

Ejemplo 2.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

No es difícil comprobar que el sistema (3.22) se satisface por las soluciones

$$x_1 = \cos t, \quad y_1 = -\operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad x_2 = \operatorname{sen} t, \quad y_2 = \cos t.$$

Estas soluciones son linealmente independientes, puesto que el wronskiano

$$\begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

es diferente de cero. Por consiguiente, la solución general tiene la forma

$$x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t,$$
$$y = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Teorema 3.6. *Si $\tilde{X}$ es solución del sistema lineal no homogéneo*

$$L[X] = F \tag{3.19}$$

y X_1 es solución del sistema homogéneo correspondiente $L[X] = 0$, entonces la suma $X_1 + \tilde{X}$ es también solución del sistema no homogéneo $L[X] = F$.

Demostración. Se da que $L[\tilde{X}] \equiv F$ y $L[X_1] \equiv 0$; hay que demostrar que $L[X_1 + \tilde{X}] \equiv F$.

Aplicando la propiedad 2) del operador L, se obtiene

$$L[X_1 + \tilde{X}] \equiv L[X_1] + L[\tilde{X}] \equiv F.$$

Teorema 3.7. *La solución general en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$ del sistema no homogéneo (3.19) con coeficientes $a_{ij}(t)$ y segundos miembros $f_i(t)$ continuos en dicho segmento, es igual a la suma de la solución general $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ del sistema homogéneo correspondiente y de una solución particular $\tilde{X}$ del sistema no homogéneo considerado.*

Demostración. Puesto que las condiciones del teorema de existencia y unicidad de la solución se cumplen (véase la pág. 187), entonces para la demostración del teorema es suficiente probar que eligiendo las constantes arbitrarias c_i en la solución $X=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i + \tilde{X}$ se pueden satisfacer las condiciones iniciales dadas arbitrariamente

$$X(t_0)=X_0=\begin{Vmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n0} \end{Vmatrix},$$

es decir, hay que demostrar que la ecuación matricial

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t_0)+\tilde{X}(t_0)=X_0$$

o el sistema de ecuaciones equivalente

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i x_{1i}(t_0)+\tilde{x}_1(t_0)=x_{10}, \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i x_{2i}(t_0)+\tilde{x}_2(t_0)=x_{20}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ni}(t_0)+\tilde{x}_n(t_0)=x_{n0} \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

tiene siempre solución $c_1, c_2, \ldots, c_n$ para segundos miembros cualesquiera. Pero en esta forma dicha afirmación es evidente, ya que el determinante del sistema (3.23) es el wronskiano en el punto $t=t_0$ de las soluciones linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ del sistema homogéneo correspondiente y, según el teorema 3.4, es diferente de cero. En consecuencia, el sistema (3.23) tiene solución $c_1, c_2, \ldots, c_n$ para segundos miembros cualesquiera.

Teorema 3.8 (principio de superposición). *La solución del sistema de ecuaciones lineales*

$$L[X]=\sum_{i=1}^{m} F_i, \qquad F_i=\begin{Vmatrix} f_{1i}(t) \\ f_{2i}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{ni}(t) \end{Vmatrix}$$

es la suma $\sum_{i=1}^{m} X_i$ *de las soluciones* X_i *de las ecuaciones*

$$L[X_i] = F_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

D e m o s t r a c i ó n. Se da que $L[X_i] \equiv F_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$; hay que demostrar que

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} F_i.$$

Aplicando la propiedad 2) del operador L, obtenemos

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} L[X_i] \equiv \sum_{i=1}^{m} F_i$$

O b s e r v a c i ó n. El teorema 3.8, sin modificaciones en su demostración, se extiende evidentemente también al caso cuando $m \to \infty$, si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ converge y puede ser derivada término a término.

Teorema 3.9. *Si el sistema de ecuaciones lineales*

$$L[X] = U + iV,$$

donde

$$U = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Vmatrix}, \quad V = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{Vmatrix},$$

con funciones reales $a_{ij}(t)$, $u_i(t)$, $v_i(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, *tiene la solución*

$$X = \tilde{U} + i\tilde{V}, \quad \tilde{U} = \begin{Vmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{u}_n \end{Vmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{Vmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{v}_n \end{Vmatrix},$$

entonces la parte real $\tilde{U}$ *de la solución y su parte imaginaria* $\tilde{V}$ *son, respectivamente, soluciones de las ecuaciones*

$$L[X] = U \quad \text{y} \quad L[X] = V.$$

D e m o s t r a c i ó n. Se da que $L[\tilde{U} + i\tilde{V}] \equiv U + iV$; hay que demostrar que $L[\tilde{U}] = U$, $L[\tilde{V}] = V$.

Aplicando las propiedades 1) y 2) del operador L, se obtiene

$$L[\tilde{U}+i\tilde{V}]\equiv L[\tilde{U}]+iL[\tilde{V}]\equiv U+iV.$$

Por lo tanto, $L[\tilde{U}]\equiv U$ y $L[\tilde{V}]\equiv V$.

Si es conocida la solución general del sistema homogéneo correspondiente $L[X]=0$, pero no se logra escoger la solución particular del sistema homogéneo $L[X]=F$ y, por lo tanto, no es posible utilizar el teorema 3.7, entonces se puede aplicar el método de variación de las constantes.

Supongamos que $X=\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$, donde las c_i son constantes arbitrarias, es la solución general del sistema homogéneo correspondiente

$$\frac{dX}{dt}-AX=0$$

y que, por consiguiente, X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ son soluciones particulares linealmente independientes de dicho sistema. La solución del sistema no homogéneo

$$\frac{dX}{dt}-AX=F$$

se busca en la forma

$$X=\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, X_i,$$

donde $c_i(t)$ son nuevas funciones desconocidas. Al sustituir en la ecuación no homogénea, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, X_i+\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\frac{dX_i}{dt}=A\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, X_i+F,$$

o bien, como $\frac{dX_i}{dt}\equiv AX_i$,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, X_i=F.$$

Esta ecuación vectorial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, x_{1_i}=f_1(t),\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, x_{2_i}=f_2(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, x_{n_i}=f_n(t).
\end{aligned}\right\} \qquad (3.24)$$

De este sistema de n ecuaciones con n incógnitas $c_i'(t)$ ($i=1, 2, \ldots, n$), cuyo determinante W coincide con el wronskiano de las soluciones linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y, en consecuencia, es diferente de cero, se determinan todas las $c_i'(t)$:

$$c_i'(t)=\varphi_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

de donde, integrando, se hallan las funciones desconocidas $c_i(t)$:

$$c_i(t)=\int \varphi_i(t)\,dt+\bar{c}_i \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Ejemplo 3.

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x+\frac{1}{\cos t}.$$

La solución general del sistema homogéneo correspondiente

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x$$

tiene la forma $x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t$, $y=-c_1\operatorname{sen} t+c_2\cos t$ (véase la pág. 192, ejemplo 2). Hagamos variar las constantes.

$$x=c_1(t)\cos t+c_2(t)\operatorname{sen} t,$$
$$y=-c_1(t)\operatorname{sen} t+c_2(t)\cos t.$$

$c_1'(t)$ y $c_2'(t)$ se determinan del sistema (3.24), el cual tiene en este caso la forma

$$c_1'(t)\cos t+c_2'(t)\operatorname{sen} t=0,$$
$$-c_1'(t)\operatorname{sen} t+c_2'(t)\cos t=\frac{1}{\cos t},$$

de donde

$$c_1'(t)=-\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \quad c_2'(t)=1.$$

Por lo tanto,

$$c_1(t)=\ln|\cos t|+\bar{c}_1,$$
$$c_2(t)=t+\bar{c}_2$$

y, en definitiva, se obtiene

$$x=\bar{c}_1\cos t+\bar{c}_2\operatorname{sen} t+\cos t\ln|\cos t|+t\operatorname{sen} t,$$
$$y=-\bar{c}_1\operatorname{sen} t+\bar{c}_2\cos t-\operatorname{sen} t\ln|\cos t|+t\cos t.$$

§ 5. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Se llama *sistema lineal con coeficientes constantes* al sistema lineal de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+f_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

o, en forma vectorial,

$$\frac{dX}{dt} = AX + F,$$

en el cual todos los coeficientes a_{ij} son constantes o, lo que es lo mismo, su matriz A es constante.

La manera más sencilla de integrar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas o no homogéneas con coeficientes constantes es reducirlo a una ecuación de orden mayor. Además, como fue señalado en la pág. 182, la ecuación obtenida de orden mayor será lineal y con coeficientes constantes.

Sin embargo, se puede hallar también directamente el sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes

Las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

donde a_{ij} son constantes, se buscarán en la forma

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt},$$

con α_j constantes ($j = 1, 2, \ldots, n$). Sustituyendo en el sistema (3.25), dividiendo entre e^{kt} y pasando todos los sumandos al primer miembro, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-k)\,\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\,\alpha_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Para que este sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas α_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) tenga solución no trivial, es necesario y suficiente que el determinante del sistema (3.26) sea igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{3.27}$$

De esta ecuación de grado n se determinan los valores de k para los cuales el sistema (3.26) tiene soluciones no triviales α_j ($j = 1$, 2, ..., n). La ecuación (3.27) se llama *ecuación característica*. Si todas las raíces k_i ($i=1, 2, \ldots, n$) de la ecuación característica son diferentes, entonces, sustituyéndolas sucesivamente en el sistema (3.26), se determinan los valores no triviales $\alpha_j^{(i)}$ ($i, j=1, 2, \ldots, n$) correspondientes; hallando, por consiguiente, n soluciones del sistema inicial (3.25) de la forma

$$x_1^{(i)}=\alpha_1^{(i)}e^{k_it},\ x_2^{(i)}=\alpha_2^{(i)}e^{k_it},\ \ldots,\ x_n^{(i)}=\alpha_n^{(i)}e^{k_it}\quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{3.28}$$

donde el índice superior señala el número de la solución, y el inferior, el de la función desconocida.

Utilizando notaciones vectoriales, obtenemos el mismo resultado en forma aún más corta:

$$\frac{dX}{dt}=AX; \tag{3.25$_1$}$$

la solución se busca en la forma

$$X=\tilde{A}e^{kt},\ \text{donde}\ \tilde{A}=\begin{Vmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_n\end{Vmatrix},$$

$$\tilde{A}ke^{kt}=A\tilde{A}e^{kt},$$

o bien

$$(A-kE)\tilde{A}=0 \tag{3.29}$$

donde E es la matriz unidad:

$$E=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{Vmatrix}.$$

Para que la matriz no trivial $\tilde{A}$,

$$\tilde{A}\neq\begin{Vmatrix}0\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{Vmatrix},$$

satisfaga la ecuación (3.29), es necesario y suficiente que la matriz $A-kE$ sea singular, es decir, que su determinante sea igual a cero: $|A-kE|=0$. Para cada raíz k_i de esta ecuación característica $|A-kE|=0$, de (3.29) se determina la matriz diferente de cero $\tilde{A}^{(i)}$ y, si todas las raíces k_i de la ecuación característica son diferentes, obtenemos n soluciones:

$$X_1 = \tilde{A}^{(1)} e^{k_1 t},\quad X_2 = \tilde{A}^{(2)} e^{k_2 t},\quad \ldots,\quad X_n = \tilde{A}^{(n)} e^{k_n t},$$

donde

$$\tilde{A}^{(i)} = \begin{Vmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n^{(i)} \end{Vmatrix}.$$

Estas soluciones, como no es difícil demostrar, son linealmente independientes. En efecto, si existiera la dependencia lineal

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{A}^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0,$$

o, en forma desarrollada

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_1^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_2^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_n^{(i)} e^{k_i t} \equiv 0, \end{array}\right\} \tag{3.30}$$

entonces, en virtud de la independencia lineal de las funciones $e^{k_i t}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (véase la pág. 99), de (3.30) se obtendría que

$$\left.\begin{array}{l} \beta_i \alpha_1^{(i)} = 0, \\ \beta_i \alpha_2^{(i)} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_i \alpha_n^{(i)} = 0. \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.31}$$

Pero como para cada i al menos un $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es diferente de cero, entonces de (3.31) se deduce que $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

De esta manera, las soluciones $\tilde{A}^{(i)} e^{k_i t}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son linealmente independientes y la solución general del sistema (3.25) tiene la forma

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i \tilde{A}^{(i)} e^{k_i t},$$

o bien

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_j^{(i)} e^{k_i t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde las c_i son constantes arbitrarias.

Las constantes $\alpha_i^{(j)}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ no se determinan unívocamente del sistema (3.26) para $k=k_j$, puesto que el determinante del sistema es nulo y, por consiguiente, al menos una de las ecuaciones es consecuencia de las demás. La falta de unicidad en la determinación de $\alpha_i^{(j)}$ se debe a que la solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneas sigue siendo solución del mismo al ser multiplicada por una constante arbitraria.

A la raíz compleja $k_j=p+qi$ de la ecuación característica (3.27) le corresponde la solución

$$X_j=\bar{A}^{(j)}e^{k_jt}, \tag{3.32}$$

la cual, si todos los coeficientes a_{ij} son reales, puede ser sustituida por dos soluciones reales: por la parte real y por la imaginaria de la solución (3.32) (véase la pág. 188). La raíz compleja conjugada $k_{j+1}=p-qi$ de la ecuación característica no da nuevas soluciones reales linealmente independientes.

Si la ecuación característica tiene una raíz k_s de multiplicidad γ, entonces, tomando en cuenta que el sistema de ecuaciones (3.25) se puede reducir por medio del proceso señalado en la pág. 177 a una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de n-ésimo o menor orden (véase la observación en la pág. 182), se puede afirmar que la solución del sistema (3.25) tiene la forma

$$X(t)=(\bar{A}_0^{(s)}+\bar{A}_1^{(s)}t+\ldots+\bar{A}_{\gamma-1}^{(s)}t^{\gamma-1})e^{k_st}, \tag{3.33}$$

donde

$$\bar{A}_i^{(s)}=\begin{Vmatrix}\alpha_{1i}^{(s)}\\ \alpha_{2i}^{(s)}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}^{(s)}\end{Vmatrix};$$

las $\alpha_{ji}^{(s)}$ son constantes.

Hay que hacer notar que aún cuando el sistema de n ecuaciones (3.25) se reduzca a una ecuación de orden menor que n (vease la observación 1 en la pág. 181), la ecuación característica de esta última tendrá necesariamente raíces que coinciden con las raíces de la ecuación (3.27) (puesto que la ecuación a la cual se redujo el sistema debe tener soluciones del tipo e^{k_st}, donde k_s son raíces de la ecuación (3.27)). Pero es posible que las multiplicidades de estas raíces (si el orden de la ecuación obtenida es menor que n) sean menores que las multiplicidades de las raíces de la ecuación (3.27); por lo tanto, puede ser que en la solución (3.33) el grado del primer factor sea menor que $\gamma-1$, es decir, al buscar la solución en la forma (3.33) ciertos coeficientes $\bar{A}_i^{(s)}$ pueden anularse, incluso los de los términos de mayor grado.

De esta manera, la solución del sistema (3.25) que corresponde a una raíz múltiple de la ecuación característica, debe ser buscada en la forma (3.33). Sustituyendo (3.33) en la ecuación (3.25_1) y exigiendo que ésta se reduzca a una identidad, se determinan las matrices $\tilde{A}_i^{(s)}$; además, algunas de éstas, entre ellas $\tilde{A}_{\gamma-1}^{(s)}$, pueden resultar iguales a cero.

Observación. Se puede indicar más exactamente la forma de la solución del sistema (3.25), correspondiente a una raíz múltiple de la ecuación característica (3.27). Transformando el sistema (3.25) mediante una transformación lineal no degenerada en un sistema en el cual la matriz $A-kE$ tenga forma normal de Jordan e integrando el sistema de ecuaciones obtenido, fácilmente integrable, se halla que la solución correspondiente a la raíz múltiple k_s de la ecuación característica (3.27) de multiplicidad γ, tiene la forma

$$X(t)=(\tilde{A}_0^{(s)}+\tilde{A}_1^{(s)}t+\ldots+\tilde{A}_{\beta-1}^{(s)}t^{\beta-1})e^{k_s t},$$

donde β es el mayor grado del divisor elemental de la matriz $A-kE$, correspondiente a la raíz k_s.

Ejemplo 1.

$$\frac{dx}{dt}=x+2y,\quad \frac{dy}{dt}=4x+3y.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix}=0,\ \text{o bien } k^2-4k-5=0$$

tiene las raíces $k_1=5$, $k_2=-1$. Por consiguiente, buscamos la solución en la forma

$$\begin{aligned} x_1&=\alpha_1^{(1)}e^{5t}, & y_1&=\alpha_2^{(1)}e^{5t},\\ x_2&=\alpha_1^{(2)}e^{-t}, & y_2&=\alpha_2^{(2)}e^{-t}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Sustituyendo (3.34) en el sistema original, obtenemos $-4\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0$, de donde $\alpha_2^{(1)}=2\alpha_1^{(1)}$; $\alpha_1^{(1)}$ permanece arbitrario. Por lo tanto,

$$x_1=c_1e^{5t},\quad y_1=2c_1e^{5t},\quad c_1=\alpha_1^{(1)}.$$

Para determinar los coeficientes $\alpha_1^{(2)}$ y $\alpha_2^{(2)}$ se obtiene la ecuación $2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0$, de donde $\alpha_2^{(2)}=-\alpha_1^{(2)}$; el coeficiente $\alpha_1^{(2)}$ permanece arbitrario. Por consiguiente,

$$x_2=c_2e^{-t},\ y_2=-c_2e^{-t},\ c_2=\alpha_1^{(2)}.$$

La solución general es

$$\begin{aligned} x&=c_1e^{5t}+c_2e^{-t},\\ y&=2c_1e^{5t}-c_2e^{-t}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

$$\frac{dx}{dt}=x-5y,$$

$$\frac{dy}{dt}=2x-y.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-k & -5 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix}=0,\ \text{o bien } k^2+9=0$$

tiene las raíces $k_{1,2}=\pm 3i$, $x_1=\alpha_1 e^{3it}$, $y_1=\alpha_2 e^{3it}$, $(1-3i)\alpha_1-5\alpha_2=0$. A esta ecuación la satisfacen, por ejemplo, $\alpha_1=5$, $\alpha_2=1-3i$. En consecuencia,

$$x_1=5e^{3it}=5(\cos 3t+i \operatorname{sen} 3t),$$
$$y_1=(1-3i)e^{3it}=(1-3i)(\cos 3t+i \operatorname{sen} 3t).$$

Las partes real e imaginaria de esta solución son también soluciones del sistema considerado, y su combinación lineal con coeficientes constantes arbitrarios es solución general.

$$x=5c_1\cos 3t+5c_2 \operatorname{sen} 3t,$$

$$y=c_1(\cos 3t+3\operatorname{sen} 3t)+c_2(\operatorname{sen} 3t-3\cos 3t).$$

Ejemplo 3.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x-y,\\ \frac{dy}{dt}&=x+3y.\end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix}1-k & -1\\ 1 & 3-k\end{vmatrix}=0, \text{ o bien } k^2-4k+4=0$$

tiene la raíz múltiple $k_{1,2}=2$. Por lo tanto, la solución debe buscarse en la forma

$$\left.\begin{aligned}x&=(\alpha_1+\beta_1 t)e^{2t},\\ y&=(\alpha_2+\beta_2 t)e^{2t}.\end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

Sustituyendo (3.36) en (3.35), se obtiene

$$2\alpha_1+\beta_1+2\beta_1 t=\alpha_1+\beta_1 t-\alpha_2-\beta_2 t,$$

de donde

$$\beta_2=-\beta_1,$$
$$\alpha_2=-\alpha_1-\beta_1.$$

α_1 y β_1 permanecen arbitrarios. Designando estas constantes arbitrarias respectivamente por c_1 y c_2, obtenemos la solución general en la forma

$$x=(c_1+c_2 t)e^{2t},$$
$$y=-(c_1+c_2+c_2 t)e^{2t}.$$

§ 6. MÉTODOS APROXIMADOS DE INTEGRACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE ECUACIONES DE n-ÉSIMO ORDEN

Todos los métodos de integración aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden, expuestos en el § 7 del cap. 1, sin cambios sustanciales, pueden aplicarse a los sistemas de ecuaciones de primer orden, y también a las ecuaciones de orden mayor que 1, las cuales se reducen a un sistema de ecuaciones de primer orden por el método habitual (véase la pág. 88).

1. Método de las aproximaciones sucesivas. Como fue señalado en la pág. 54, el método de las aproximaciones

sucesivas es aplicable a los sistemas de ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.37}$$

con condiciones iniciales $y_i(x_0)=y_{i0}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, si las funciones f_i son continuas en todos sus argumentos y satisfacen la condición de Lipschitz respecto a todos los argumentos, a partir del segundo

La aproximación nula $y_{i0}(x)\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ puede ser escogida arbitrariamente, exigiendo sólo que se satisfagan las condiciones iniciales; las aproximaciones subsiguientes se calculan por la fórmula

$$y_{i,k+1}(x)=y_{i0}+\int_{x_0}^{x} f_i(x,\ y_{1k},\ y_{2k},\ \ldots,\ y_{nk})\,dx\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Al igual que para una ecuación de primer orden, este método se aplica raramente en la práctica del cálculo aproximado, debido a la convergencia relativamente lenta de las aproximaciones y a lo complejo y variado de las operaciones.

2. Método de Euler. La curva integral del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

determinada por las condiciones iniciales $y_i(x_0)=y_{i0}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, se sustituye por la quebrada que es tangente en uno de los puntos frontera de cada segmento a la curva integral que pasa por dicho punto (en la fig. 3.2 se representa la quebrada de Euler y su proyección sólo en el plano xy_1). El segmento $x_0 \leqslant x \leqslant b$, en el cual hay que calcular la solución, se divide en partes de longitud h, y el cálculo se efectúa por las fórmulas

$$y_i(x_{k+1})=y_i(x_k)+hy_i'(x_k)$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

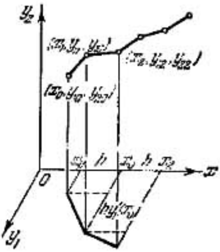

Fig. 3.2

La convergencia de las quebradas de Euler hacia la curva integral, cuando $h\to 0$, se demuestra de la misma manera que para una ecuación de primer orden (véase la pág. 45). Para elevar la exactitud se pueden aplicar iteraciones (emparejamientos).

3. Desarrollo en fórmula de Taylor. Considerando que los segundos miembros del sistema (3.37) son derivables k

veces (para asegurar la derivabilidad de las soluciones $k+1$ veces), sustituimos las soluciones buscadas por algunos primeros términos de sus desarrollos de Taylor

$$y_i(x) \approx y_i(x_0) + y_i'(x_0)(x-x_0) + y_i''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots$$
$$\ldots + y_i^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

La apreciación del error puede realizarse acotando el resto de la fórmula de Taylor

$$R_{ik} = y_i^{(k+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}, \text{ donde } 0<\theta<1.$$

Este método da buenos resultados solo en un pequeño entorno del punto x_0.

4. Método de Störmer. El segmento $x_0 \leqslant x \leqslant b$ se divide en partes de longitud h, y el cálculo de la solución del sistema (3.37) se realiza mediante una de las fórmulas:

$$y_{i,\,k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,\,k-1}, \tag{3.38}$$

$$y_{i,\,k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,\,k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i,\,k-2}, \tag{3.39}$$

$$y_{i,\,k+1} = y_{ik} + q_{ik} + \frac{1}{2}\Delta q_{i,\,k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i,\,k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i,\,k-3}, \tag{3.40}$$

. . . .

donde

$$y_{ik} = y_i(x_k) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
$$x_k = x_0 + kh, \quad q_{ik} = y_i'(x_k)\,h,$$
$$\Delta q_{i,\,k-1} = q_{ik} - q_{i,\,k-1},\ \Delta^2 q_{i,\,k-2} = \Delta q_{i,\,k-1} - \Delta q_{i,\,k-2},$$
$$\Delta^3 q_{i,\,k-3} = \Delta^2 q_{i,\,k-2} - \Delta^2 q_{i,\,k-3}.$$

Las fórmulas (3.38), (3.39) y (3.40) pueden obtenerse del mismo modo que para una ecuación de primer orden (véase la pág. 65). El orden del error al aplicar estas fórmulas es el mismo que para una ecuación.

Para comenzar el cálculo por una de las fórmulas de Störmer es necesario conocer algunos primeros valores $y_i(x_k)$, que pueden ser hallados mediante el desarrollo por la fórmula de Taylor, o por el método de Euler con paso disminuido; además, al igual que para una ecuación, para elevar la exactitud se pueden aplicar iteraciones (véanse las págs. 64—65), o el método de Runge.

5. Método de Runge. Se calculan los números

$$m_{i1}=f_i(x_k,\ y_{1k},\ y_{2k},\ \ldots,\ y_{nk}),$$
$$m_{i2}=f_i\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_{1k}+\frac{hm_{11}}{2},\ y_{2k}+\frac{hm_{21}}{2},\ \ldots,\ y_{nk}+\frac{hm_{n1}}{2}\right),$$
$$m_{i3}=f_i\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_{1k}+\frac{hm_{12}}{2},\ y_{2k}+\frac{hm_{22}}{2},\ \ldots,\ y_{nk}+\frac{hm_{n2}}{2}\right),$$
$$m_{i4}=f_i(x_k+h,\ y_{1k}+hm_{13},\ y_{2k}+hm_{23},\ \ldots,\ y_{nk}+hm_{n3}),$$

conociendo los cuales hallamos $y_{i,\ k+1}$ por la fórmula

$$y_{i,\ k+1}=y_{ik}+\frac{h}{6}(m_{i1}+2m_{i2}+2m_{i3}+m_{i4})\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

El orden del error es el mismo que para una ecuación.

Una aproximación grosera del paso h, según la exactitud elegida del resultado, se puede escoger considerando el orden de los errores en las fórmulas aplicadas; luego, éste se precisa por medio de cálculos de prueba con pasos h y $\frac{h}{2}$. Lo más seguro es calcular con pasos h y $\frac{h}{2}$ todos los valores necesarios $y_i(x_k)$, y si al comparar los resultados todos ellos coinciden en los límites de exactitud dada, entonces se considera que el paso h asegura la exactitud dada de cálculo; en caso contrario se disminuye nuevamente el paso y se realizan las operaciones con pasos $\frac{h}{2}$ y $\frac{h}{4}$, y así sucesivamente. Cuando se escoge correctamente el paso h, las diferencias Δq_{ik}, $\Delta^2 q_{ik}$, ... deben variar uniformemente, y las últimas diferencias en las fórmulas de Störmer deben influir sólo en las cifras de reserva.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 3

1. $\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-x,\ x(0)=0,\ y(0)=1$
2. $\frac{d^2x_1}{dt^2}=x_2,\ \frac{d^2x_2}{dt^2}=x_1,\ x_1(0)=2,\ \dot{x}_1(0)=2,\ x_2(0)=2,\ \dot{x}_2(0)=2.$
3. $\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\quad \frac{dy}{dt}-x-3y=e^{2t}.$
4. $\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=z,\ \frac{dz}{dt}=x.$
5. $\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=\frac{y^2}{x}.$
6. $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=-x+y+3,\ \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=x+y-3.$
7. $\frac{dy}{dx}=\frac{z}{x},\ \frac{dz}{dx}=-xy.$

8. $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{dz}{y-x}$.

9. $\dfrac{dx}{dt}=-x+y+z,\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+z,\ \dfrac{dz}{dt}=x+y-z.$

10. $t\dfrac{dx}{dt}+y=0,\ t\dfrac{dy}{dt}+x=0.$

11. $\dfrac{dx}{dt}=y+1,\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\dfrac{x}{\operatorname{sen} t}$.

12. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y}{x-y},\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{x-y}$.

13. $\dot{x}+y=\cos t,\ \dot{y}+x=\operatorname{sen} t.$

14. $\dot{x}+3x-y=0,\ \dot{y}-8x+y=0,\ x(0)=1,\ y(0)=4.$

15. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\operatorname{sen}\theta=0$ para $t=0,\ \theta=\dfrac{\pi}{36},\ \dfrac{d\theta}{dt}=0.$

Determinar $\theta(1)$ con exactitud de 0,001.

16. $\dot{x}(t)=ax-y,\ \dot{y}(t)=x+ay$; a es una constante.

17. $\dot{x}+3x+4y=0,\ \dot{y}+2x+5y=0$

18. $\dot{x}=-5x-2y,\ \dot{y}=x-7y.$

19. $\dot{x}=y-z,\ \dot{y}=x+y,\ \dot{z}=x+z.$

20. $\dot{x}-y+z=0,\ \dot{y}-x-y=t,\ \dot{z}-x-z=t.$

21. $\dfrac{dx}{x(y-z)}=\dfrac{dy}{y(z-x)}=\dfrac{dz}{z(x-y)}$.

22. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=\dfrac{dy}{y(z^2-x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2-y^2)}$.

23. $\dot{X}=AX$, donde $X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}$, y $A=\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$.

CAPITULO 4

Teoría de la estabilidad

§ 1. CONCEPTOS GENERALES

Para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real cualquiera, inevitablemente hay que simplificarlo, idealizarlo, haciendo resaltar y tomando en cuenta sólo los factores más sustanciales que actúan sobre éste y despreciando los menos considerables. Entonces surge inevitablemente el problema sobre si fueron correctamente escogidas o no las suposiciones de simplificación. Es posible que los factores no considerados influyan fuertemente sobre el fenómeno estudiado, y cambien sus características cuantitativas, y aún cualitativas. En última instancia esta cuestión se resuelve en la práctica, viendo si corresponden o no las conclusiones obtenidas con los datos del experimento, pero de todas formas en muchos problemas se pueden señalar las condiciones bajo las cuales ciertas simplificaciones no son posibles.

Si cierto fenómeno se describe por medio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

con condiciones iniciales $y_i(t_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, las cuales por lo general son el resultado de ciertas mediciones y, por lo tanto, han sido obtenidas inevitablemente con cierto error, entonces surge el problema sobre la influencia de pequeñas variaciones de las condiciones iniciales sobre la solución buscada.

Si variaciones arbitrariamente pequeñas de los valores iniciales pueden cambiar mucho la solución, entonces la solución determinada por las condiciones iniciales inexactas que hemos elegido no tiene comúnmente ningún valor práctico y no puede describir ni siquiera aproximadamente el fenómeno estudiado.

Por consiguiente, surge el problema, de gran importancia práctica, de hallar las condiciones bajo las cuales una variación suficientemente pequeña de los valores iniciales ocasiona una variación arbitrariamente pequeña de la solución.

Si t varía en el intervalo finito $t_0 \leqslant t \leqslant T$, entonces la solución a este problema la da el teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto a las condiciones iniciales (véase la pág. 56). Si, en cambio, t puede tomar valores arbitrariamente grandes, de este caso se ocupa la teoría de la estabilidad.

La solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.1) se llama estable, o más exactamente, *estable según Liapunov*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede escoger un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier solución $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ de dicho sistema, cuyos valores iniciales satisfacen las desigualdades

$$|y_i(t_0)-\varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

se cumplen, para todas las $t \geqslant t_0$, las desigualdades

$$|y_i(t)-\varphi_i(t)| < \varepsilon \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

es decir, las soluciones cercanas respecto a sus valores iniciales permanecen cercanas para todas las $t \geqslant t_0$.

Observación. Si el sistema (4.1) satisface las condiciones del teorema sobre la dependencia continua de la solución respecto a las condiciones iniciales, entonces en la definición de estabilidad, en lugar de $t \geqslant t_0$, se puede escribir $t \geqslant T \geqslant t_0$, debido a que en virtud de este teorema, las soluciones permanecen cercanas en el segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$ para valores iniciales suficientemente próximos.

Si para un $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño, por lo menos para una solución $y_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ las desigualdades (4.2) no se cumplen, entonces la solución $\varphi_i(t)$ se llama *inestable*. Las soluciones inestables rara vez son de interés práctico.

Si la solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ no sólo es estable, sino que además satisface la condición

$$\lim_{t\to\infty} |y_i(t)-\varphi_i(t)| = 0, \tag{4.3}$$

si $|y_i(t_0)-\varphi_i(t_0)| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, entonces la solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ se llama *asintóticamente estable*.

Obsérvese que la condición (4.3) aún no implica la estabilidad de la solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Ejemplo 1. Analizar si es estable o no la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt}=-a^2y$, $a \neq 0$, determinada por la condición inicial $y(t_0)=y_0$. La solución

$$y=y_0e^{-a^2(t-t_0)}$$

es asintóticamente estable, ya que

$$\left|y_0e^{-a^2(t-t_0)}-\bar{y}_0e^{-a^2(t-t_0)}\right| = e^{-a^2(t-t_0)}\left|y_0-\bar{y}_0\right| < \varepsilon$$

cuando $t \geqslant t_0$, si $|y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon e^{-a^2 t_0}$ y

$$\lim_{t \to \infty} e^{-a^2 (t - t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| = 0.$$

E j e m p l o 2. Investigar la estabilidad de la solución de la ecuación $\frac{dy}{dt} = a^2 y$, $a \neq 0$, determinada por la condición $y(t_0) = y_0$.

La solución $y = y_0 e^{a^2 (t - t_0)}$ es inestable, ya que es imposible escoger un $\delta > 0$ tal que de la desigualdad $|\bar{y}_0 - y_0| < \delta(\varepsilon)$ se deduzca

$$|\bar{y}_0 e^{a^2 (t - t_0)} - y_0 e^{a^2 (t - t_0)}| < \varepsilon,$$

o bien

$$e^{a^2 (t - t_0)} |\bar{y}_0 - y_0| < \varepsilon$$

para todas las $t \geqslant t_0$

El análisis de la estabilidad de cierta solución

$$y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

del sistema de ecuaciones

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

se puede reducir al estudio de la estabilidad de la solucion trivial, es decir, del *punto de reposo*, situado en el origen de coordenadas.

En efecto, transformemos el sistema de ecuaciones (4.1) a nuevas variables, haciendo

$$x_i = y_i - \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.4}$$

Las nuevas funciones desconocidas x_i serán las desviaciones $y_i - \bar{y}_i(t)$ de las funciones desconocidas anteriores de las funciones $\bar{y}_i(t)$, las cuales determinan la solución cuya estabilidad se investiga.

En virtud de (4.4), el sistema (4.1) en las nuevas variables toma la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1(t), x_2 + \bar{y}_2(t), \ldots, x_n + \bar{y}_n(t))$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.5}$$

Evidentemente a la solución cuya estabilidad se estudia $y_i = \bar{y}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.1) le corresponde, debido a la dependencia $x_i = y_i - \bar{y}_i(t)$, la solución trivial $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.5), y el estudio de la estabilidad de la solución $y_i = \bar{y}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.1) puede sustituirse por la investigación de la estabilidad de la solución trivial del sistema (4.5). Por esto en adelante sin limitaciones de la generalidad podemos considerar que se investiga la estabilidad de la solución trivial o, lo que es lo mismo, del punto de reposo del sistema de ecuaciones, situado en el origen de coordenadas.

Formulemos las condiciones de estabilidad aplicadas al punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

El punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.5) es estable según Liapunov, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que de la desigualdad

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se deduce que

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ para } t \geqslant T \geqslant t_0.$$

En otras palabras: el punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es estable según Liapunov, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que de la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t_0) < \delta_1^2(\varepsilon)$$

se deduce que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2$$

para $t \geqslant T$, es decir, la trayectoria cuyo punto inicial se encuentra en el δ_1—entorno*) del origen de coordenadas para $t \geqslant T$ no sale fuera de los límites del ε—entorno de dicho punto.

§ 2. TIPOS SIMPLES DE PUNTOS DE REPOSO

Analicemos la disposición de las trayectorias en un entorno del punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ del sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

*) Aquí y en lo sucesivo por α—entorno se designará un entorno simétrico de radio α (es decir, de amplitud 2α) del punto considerado (*N. de la Red.*).

La solución se busca en la forma $x=\alpha_1 e^{kt}$, $y=\alpha_2 e^{kt}$ (véase la pág. 197). Para la determinación de k se obtiene la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix}=0,$$

o bien

$$k^2-(a_{11}+a_{22})k+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=0;$$

α_1 y α_2 se determinan, salvo un factor constante, de una de las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-k)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0, \\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\alpha_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Consideremos los siguientes casos:

a) *Las raíces de la ecuación característica k_1 y k_2 son reales y distintas.*

La solución general tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} x=c_1\alpha_1 e^{k_1t}+c_2\beta_1 e^{k_2t}, \\ y=c_1\alpha_2 e^{k_1t}+c_2\beta_2 e^{k_2t}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

donde α_i y β_i son constantes que se determinan de la ecuación (4.7) para $k=k_1$ y $k=k_2$ respectivamente, y c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Aquí son posibles los siguientes casos:

1) Si $k_1<0$ y $k_2<0$, el punto de reposo es asintóticamente estable, puesto que debido a los factores e^{k_1t} y e^{k_2t}, que figuran en (4.8), todos los puntos que se encuentran en el momento inicial $t=t_0$ en cualquier δ—entorno del origen de coordenadas, pasan a puntos situados en un ε—entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas para un valor de t suficientemente grande, y para $t\to\infty$ tienden a dicho punto. En la fig. 4.1 está representada la disposición de las trayectorias cerca del punto de reposo del tipo considerado, llamado *nudo estable*. Además, se indica con flechas el sentido del movimiento por las trayectorias al aumentar t.

2) Sea $k_1>0$, $k_2>0$. Este caso se transforma en el anterior al sustituir t por $-t$. Por lo tanto, las trayectorias tienen la misma forma que en el caso precedente, sólo que los puntos en ellas se mueven en sentido contrario (fig. 4.2). Es evidente que al aumentar t, los puntos arbitrariamente próximos al origen de coordenadas se alejan de un ε—entorno de éste. El punto de reposo es inestable según Liapunov. El punto de reposo del tipo considerado se llama *nudo inestable*.

3) Si $k_1 > 0$, $k_2 < 0$, entonces el punto de reposo es también inestable, puesto que el punto que se mueve por la trayectoria

$$x = c_1\alpha_1 e^{k_1 t}, \quad y = c_1\alpha_2 e^{k_1 t} \tag{4.9}$$

para valores arbitrariamente pequeños de c_1 al crecer t sale de un ε—entorno del origen de coordenadas.

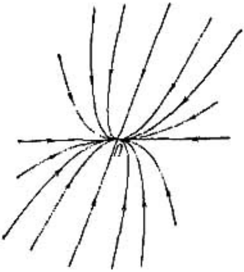

Fig. 4.1

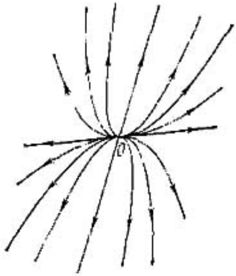

Fig. 4.2

Obsérvese que en el caso considerado existen movimientos que se aproximan al origen de coordenadas, a saber:

$$x = c_2\beta_1 e^{k_2 t}, \quad y = c_2\beta_2 e^{k_2 t}.$$

Para diferentes valores de c_2 obtenemos diferentes movimientos por una misma recta $y = \frac{\beta_2}{\beta_1}x$. Al crecer t los puntos de ésta se

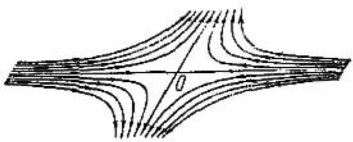

Fig. 4.3

mueven hacia el origen de coordenadas (fig. 4.3). Obsérvese también que los puntos de la trayectoria (4.9) se mueven al crecer t por la recta $y = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}x$, alejándose del origen de coordenadas. Si $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, entonces, tanto para $t \to \infty$ como para $t \to -\infty$, la trayectoria sale de un entorno del punto de reposo.

El punto de reposo del tipo mencionado se llama *montura* (fig. 4.3), porque la disposición de las trayectorias en un entorno de éste se asemeja a la disposición de las líneas de nivel en un entorno de un punto tipo silla de montar de cierta superficie

$$z=f(x,\ y).$$

b) *Las raíces de la ecuación característica son complejas:*

$$k_{1,2}=p\pm qi,\quad q\neq 0.$$

La solución general del sistema considerado se puede representar en la forma (véase la pág. 200)

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{pt}(c_1\cos qt+c_2\operatorname{sen} qt),\\ y&=e^{pt}(c_1^*\cos qt+c_2^*\operatorname{sen} qt),\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, y c_1^* y c_2^*, cierta combinación lineal de estas constantes.

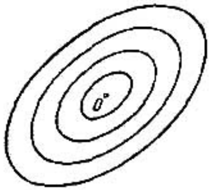

Fig. 4.4

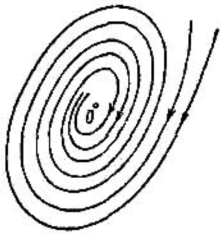

Fig. 4.5

Aquí son posibles los casos siguientes:

1) $k_{1,2}=p\pm qi$, $p<0$, $q\neq 0$.

El factor e^{pt}, $p<0$, tiende a cero al crecer t, y el segundo factor de las ecuaciones (4.10), que es periódico, está acotado.

Si fuese $p=0$ entonces, debido a la periodicidad de los segundos factores en el segundo miembro de las ecuaciones (4.10), las trayectorias serían curvas cerradas que rodearían al punto de reposo $x=0$, $y=0$ (fig. 4.4). El factor e^{pt}, que tiende a cero al crecer t, $p<0$, transforma las curvas cerradas en espirales que se aproximan asintóticamente al origen de coordenadas cuando $t\to\infty$ (fig. 4.5). Además, para un valor de t suficientemente grande, los puntos que se hallaban cuando $t=t_0$ en cualquier δ—entorno del origen de coordenadas, caen en un ε—entorno dado del punto de reposo $x=0$, $y=0$, y con el subsiguiente aumento de t tienden a dicho punto. Por consiguiente, el punto de reposo es asintóticamente estable; éste se llama *foco estable*. El foco se diferencia del nudo en que la tangente a las trayectorias no tiende a un límite determinado al aproximarse el punto de contacto hacia el punto de reposo.

2) $k_{1,2} = p \pm qi$, $p > 0$, $q \neq 0$.

Este caso se transforma en el anterior mediante la sustitución de t por $-t$. Por lo tanto, las trayectorias no se diferencian de las del caso precedente, pero el movimiento por éstas se efectúa en sentido contrario al crecer t (fig. 4.6). Debido al factor creciente e^{pt}, los puntos que se hallaban en el momento inicial arbitrariamente próximos al origen de coordenadas se alejan al crecer t de un ε—entorno del origen, y el punto de reposo es inestable. Este se llama *foco inestable*.

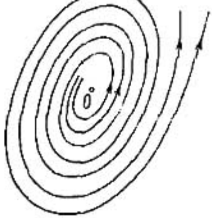

Fig. 4.6

3) $k_{1,2} = \pm qi$, $q \neq 0$.

Como ya fue señalado anteriormente, debido a la periodicidad de las soluciones, las trayectorias son curvas cerradas, que contienen en su interior al punto de reposo (fig. 4.4), llamado en este caso *centro*. El centro es un punto de reposo estable, puesto que para un $\varepsilon > 0$ dado, se puede tomar un $\delta > 0$ tal que las trayectorias cerradas, cuyos puntos iniciales pertenezcan a un δ—entorno del origen de coordenadas, no salgan de los límites de un ε—entorno de dicho punto o, lo que es lo mismo, se pueden escoger c_1 y c_2 tan pequeñas que las soluciones

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1 \cos qt + c_2 \operatorname{sen} qt, \\ y &= c_1^* \cos qt + c_2^* \operatorname{sen} qt \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

satisfagan la desigualdad

$$x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2.$$

Obsérvese que, sin embargo, en este caso no hay estabilidad asintótica, ya que en (4.11) $x(t)$ e $y(t)$ no tienden a cero cuando $t \to \infty$.

c) *Las raíces son múltiples:* $k_1 = k_2$.

1) $k_1 = k_2 < 0$.

La solución general tiene la forma

$$x(t) = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 t)\, e^{k_1 t},$$
$$y(t) = (c_1\alpha_2 + c_2\beta_2 t)\, e^{k_1 t};$$

además no se excluye la posibilidad de que $\beta_1 = \beta_2 = 0$, en cuyo caso α_1 y α_2 serán constantes arbitrarias.

Debido al factor $e^{k_1 t}$, que tiende rápidamente a cero cuando $t \to \infty$, el producto $(c_1\alpha_i + c_2\beta_i t)e^{k_1 t}$ $(i = 1, 2)$ tiende a cero cuando $t \to \infty$, y para un valor de t suficientemente grande, todos los puntos de cualquier δ—entorno del origen de coordenadas caen en un ε—entorno dado de dicho punto; por consiguiente, el punto de reposo es asintóticamente estable. En la fig. 4.7 está representado un punto de reposo del tipo considerado, llamado, al igual que en el caso a) 1), *nudo estable*. Este nudo ocupa una posición intermedia entre el nudo a) 1) y el foco b) 1), puesto

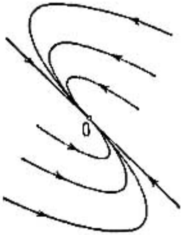

Fig. 4.7

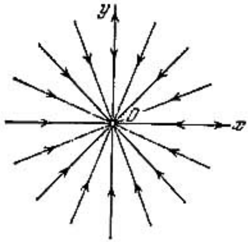

Fig. 4.8

que para cualquier variación arbitrariamente pequeña de los coeficientes reales a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}, puede transformarse tanto en un foco estable como en un nudo estable del tipo a) 1), debido a que para cualquier variación arbitrariamente pequeña de los coeficientes, la raíz múltiple puede transformarse tanto en un par de raíces complejas conjugadas, como en un par de raíces reales diferentes. Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, entonces también se obtiene un nudo estable (llamado *nudo dicrítico*), representado en la fig. 4.8.

2) Si $k_1 = k_2 > 0$, la sustitución de t por $-t$ conduce al caso precedente. Por lo tanto, las trayectorias no se diferencian de las del caso anterior, representadas en las figs. 4.7 y 4.8, pero el movimiento por éstas se efectúa en sentido contrario. En este caso el punto de reposo se llama *nudo inestable*, igual que en el caso a) 2).

Con esto quedan agotadas todas las posibilidades, ya que el caso $k_1 = 0$ (ó $k_2 = 0$) está excluido en virtud de la condición

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Observación 1. Si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

entonces la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0$$

tiene la raíz nula $k_1=0$. Supongamos que $k_1=0$, pero $k_2\neq 0$. Entonces la solución general del sistema (4.6) tiene la forma

$$x=c_1\alpha_1+c_2\beta_1e^{k_2t},$$
$$y=c_1\alpha_2+c_2\beta_2e^{k_2t}.$$

Eliminando t, obtenemos la familia de rectas paralelas $\beta_1(y-c_1\alpha_2)=\beta_2(x-c_1\alpha_1)$. Cuando $c_2=0$, obtenemos una familia monoparamétrica de puntos de reposo, situados en la recta $\alpha_1y=\alpha_2x$. Si $k_2<0$, entonces, cuando $t\to\infty$, en cada trayectoria los puntos se aproximan al punto de reposo $x=c_1\alpha_1$, $y=c_1\alpha_2$, que se halla en dicha trayectoria (fig. 4.9). El punto de reposo $x=0$, $y=0$ es estable, pero no hay estabilidad asintótica.

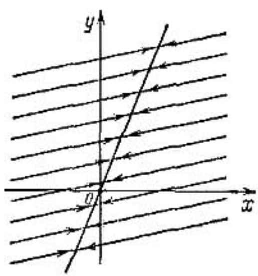

Fig. 4.9

Si, en cambio, $k_2>0$, las trayectorias están dispuestas de la misma forma, pero el movimiento de los puntos por las mismas se efectúa en sentido contrario, y el punto de reposo $x=0$, $y=0$ es inestable.

Si $k_1=k_2=0$, son posibles dos casos:

1. La solución general del sistema (4.6) tiene la forma $x=c_1$, $y=c_2$; todos los puntos son puntos de reposo. Todas las soluciones son estables.

2. La solución general tiene la forma

$$x=c_1+c_2t,\quad y=c_1^*+c_2^*t,$$

donde c_1^* y c_2^* son combinaciones lineales de las constantes arbitrarias c_1 y c_2. El punto de reposo $x=0$, $y=0$ es inestable.

Observación 2. La clasificación de los puntos de reposo está estrechamente vinculada con la clasifiación de los puntos singulares (véanse las págs. 60—62).

En efecto, en el caso considerado, el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a_{11}x+a_{12}y,\\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y, \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

donde

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

puede ser reducido, eliminando t, a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}, \tag{4.12}$$

cuyas curvas integrales coinciden con las trayectorias del movimiento del sistema (4.6). Entonces el punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema (4.6) es punto singular de la ecuación (4.12).

Obsérvese que si ambas raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa [casos a) 1); b) 1); c) 1)], el punto de reposo es asintóticamente estable. Si por lo menos una raíz de la ecuación característica tiene parte real positiva [casos a) 2); a) 3); b) 2); c) 2)], entonces el punto de reposo es inestable.

Afirmaciones análogas son válidas también para el sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.13}$$

Si las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica del sistema (4.13) son negativas, la solución trivial $x_i = 0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ es asintóticamente estable.

En efecto, las soluciones particulares que corresponden a cierta raíz k_s de la ecuación característica tienen la forma (págs. 197 y 200)

$$x_i = \alpha_i e^{k_s t} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

si las k_s son reales,

$$x_j = e^{p_s t}(\beta_j \cos q_s t + \gamma_j \operatorname{sen} q_s t),$$

cuando $k_s = p_s + q_s i$ y finalmente, en el caso de raíces múltiples, las soluciones tienen la misma forma, pero están multiplicadas además por ciertos polinomios $P_j(t)$. Es evidente que todas las soluciones de esta forma, si las partes reales de las raíces son negativas ($p_s < 0$ o bien, si k_s es real, $k_s < 0$), tienden a cero cuando $t \to \infty$ en forma no más lenta que ce^{-mt}, donde c es un factor constante y $-m < 0$, y mayor que la mayor parte real de las raíces de la ecuación característica. Por lo tanto, para un t suficientemente grande, los puntos de las trayectorias, cuyos valores iniciales se encuentran en un δ-entorno cualquiera del origen de coordenadas, caen en un ε-entorno arbitrariamente pequeño de dicho punto, y se aproximan indefinidamente al origen de coordenadas cuando $t \to \infty$; es decir, el punto de reposo $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) es asintóticamente estable.

Si, en cambio, la parte real de por lo menos una raíz de la ecuación característica es positiva, $\mathrm{Re}\, k_i = p_i > 0$, la solución de la forma $x_j = c\alpha_j e^{k_i t}$, correspondiente a dicha raíz o, en caso de que k_i sea compleja, su parte real (o imaginaria) $ce^{p_i t}(\beta_j \cos q_i t + \gamma_j \operatorname{sen} q_i t)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) crecerá indefinidamente en valor absoluto al aumentar t para valores de c de módulo arbitrariamente pequeño y, por lo tanto, los puntos de estas trayectorias que se encuentran en el momento inicial en un δ-entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas abandonan, al aumentar t, cualquier ε-entorno dado de dicho punto. Por consiguiente, si la parte real de por lo menos una raíz de la ecuación característica es positiva, entonces el punto de reposo $x_j = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) del sistema (4.13) es inestable.

Ejemplo 1. ¿Qué tipo de punto de reposo tiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = x - y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 3y?$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0,$$

o bien

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

tiene las raíces $k_{1,2} = 2 \pm i$; por lo tanto, el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ es un foco inestable.

Ejemplo 2. $\ddot{x} = -a^2 x - 2b\dot{x}$ es la ecuación de oscilaciones elásticas, considerando el rozamiento o la resistencia del medio (para $b > 0$). Pasando al sistema de ecuaciones equivalente, obtenemos

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -a^2 x - 2by$$

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -a^2 & -2b-k \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien } k^2 + 2bk + a^2 = 0,$$

de donde $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$.

Consideremos los casos siguientes:

1) $b = 0$, o sea que la resistencia del medio no se toma en cuenta. Todos los movimientos son periódicos. El punto de reposo en el origen de coordenadas es un centro.

2) $b^2 - a^2 < 0$, $b > 0$. El punto de reposo es un foco estable. Las oscilaciones son amortiguadas.

3) $b^2 - a^2 \geqslant 0$, $b > 0$. El punto de reposo es un nudo estable. Todas las soluciones son amortiguadas y no oscilan. Este caso tiene lugar si la resistencia del medio es muy fuerte ($b \geqslant a$).

4) $b < 0$ (caso de rozamiento negativo), $b^2 - a^2 < 0$. El punto de reposo es un foco inestable.

5) $b < 0$, $b^2 - a^2 \geq 0$ (caso de rozamiento negativo grande). El punto de reposo es un nudo inestable.

Ejemplo 3. Investigar la estabilidad del punto de reposo del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 2y - z,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 5x - 4y.$$

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} -k & 2 & -1 \\ 3 & -k & -2 \\ 5 & -4 & -k \end{vmatrix} = 0,$$

o bien

$$k^3 - 9k + 8 = 0.$$

Es bastante difícil determinar las raíces de una ecuación cúbica en el caso general; sin embargo, en el caso dado, una raíz se escoge con facilidad, $k_1 = 1$. Como ésta tiene parte real positiva, se puede asegurar que el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ es inestable.

§ 3. SEGUNDO METODO DE A. M. LIAPUNOV

El eminente matemático ruso Alexandr Mijálovich Liapunov, a fines del siglo XIX desarrolló un método muy general de análisis de la estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.14}$$

el cual fue denominado *segundo método de Liapunov.*

Teorema 4.1 (teorema de Liapunov sobre la estabilidad). *Si existe una función derivable $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, llamada función de Liapunov, que satisface, en un entorno del origen de coordenadas, las siguientes condiciones:*

1) $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$, y $v = 0$ sólo cuando $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), es desir, la función v tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas;

2) $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$ cuando $t \geqslant t_0$, entonces el punto de reposo $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) es estable.

La derivada $\frac{dv}{dt}$ en la condición 2) se toma a lo largo de una curva integral, o sea que está calculada considerando que los argumentos x_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ de la función $v(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ han sido sustituidos por la solución $x_i(t)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ del sistema de ecuaciones diferenciales (4.14).

En efecto, bajo esta suposición $\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$ o, sustituyendo $\frac{dx_i}{dt}$ por los segundos miembros del sistema (4.14), obtenemos finalmente

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Demostración del teorema de Liapunov sobre la estabilidad. En un entorno del origen de coordenadas, al

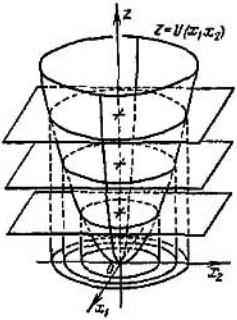

Fig. 4.10

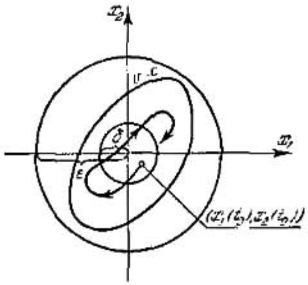

Fig. 4.11

igual que en un entorno de cualquier punto de mínimo estricto (fig. 4.10), las superficies de nivel $v(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=c$ de la función $v(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ son superficies cerradas, que contienen en su interior al mínimo, es decir, al origen de coordenadas. Sea $\varepsilon>0$; para $c>0$ suficientemente pequeña, la superficie de nivel $v=c$ se encuentra enteramente dentro del ε-entorno del origen de coordenadas*), pero no pasa por dicho punto; por lo tanto, se puede tomar un $\delta>0$ tal que el δ-entorno del origen se encuentre enteramente

*) Más exactamente, por lo menos una componente cerrada de la superficie de nivel $v=c$ está contenida en el ε-entorno del origen de coordenadas.

dentro de la superficie $v=c$, siendo en este entorno $v<c$. Si el punto inicial con coordenadas $x_i(t_0)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ se toma en el δ-entorno del origen de coordenadas (fig. 4.11) y, por consiguiente, $v(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0))=c_1<c$, entonces, cuando $t\geq t_0$, el punto de la trayectoria, determinada por estas condiciones iniciales, no puede salir fuera de los límites del ε-entorno del origen de coordenadas, y aún de los límites de la superficie de nivel $v=c$, ya que debido a la condición 2) del teorema, la función v a lo largo de la trayectoria no crece y, por lo tanto, cuando $t\geqslant t_0$,

$$v(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\leqslant c_1<c.$$

Observación. A. M. Liapunov demostró el teorema sobre la estabilidad bajo hipótesis más generales; en particular, consideró que la función v puede depender también de t: $v=v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. En este caso, para que se cumpla el teorema de la estabilidad, hay que sustituir la primera condición por la siguiente

$$v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\geqslant w(x_1, x_2, \ldots, x_n)\geqslant 0$$

en un entorno del origen de coordenadas, cuando $t\geqslant t_0$, donde la función continua w tiene un mínimo estricto en el origen, $v(t, 0, 0, \ldots, 0)=w(0, 0, \ldots, 0)=0$; la segunda condición es la misma, $\frac{dv}{dt}\leqslant 0$, sólo que en este caso

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

El esquema de la demostración queda igual; sólo hay que tomar en cuenta que debido a la condición 1) la superficie de nivel, que varía al variar t, $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)=c$, permanece dentro de la superficie de nivel $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c$ para todo valor de $t\geqslant t_0$ (fig. 4.12).

Teorema 4.2 (teorema de Liapunov sobre la estabilidad asintótica). *Si existe una función derivable de Liapunov $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaga las condiciones:*

1) $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas: $v(0, 0, \ldots, 0)=0$;

2) la derivada de la función v, calculada a lo largo de las curvas integrales del sistema (4.14)

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant 0,$$

y fuera de un entorno arbitrariamente pequeño del origen de *coordenadas, o sea para* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \delta_1^2 > 0$, $t \geqslant T_0 \geqslant t_0$, *la derivada* $\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0$, *donde* β *es una constante, entonces el punto de reposo* $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *del sistema* (4.14) *es asintóticamente estable.*

Demostración. Como las condiciones del teorema sobre la estabilidad se cumplen, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que la trayectoria, cuyo punto inicial se encuentre en el

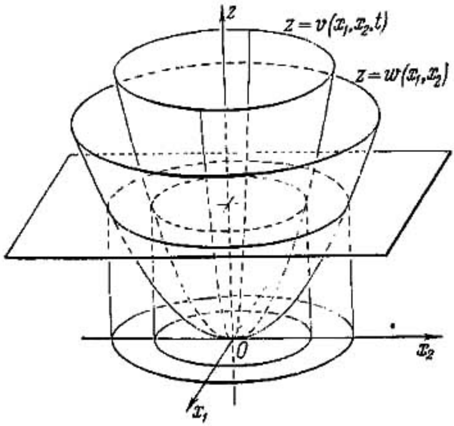

Fig. 4.12

δ-entorno del origen de coordenadas, no salga de los límites del ε-entorno de dicho punto, para $t \geqslant t_0$. Por consiguiente, cuando $t > T_0$, se cumple en particular la condición 2) a lo largo de esta trayectoria; por ello, a lo largo de ésta la función v decrece monótonamente al aumentar t, y existe el límite de la función v cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} v(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \alpha \geqslant 0.$$

Hay que demostrar que $\alpha = 0$, puesto que entonces de la condición 1) se tendrá que $\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, o sea que el punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es asintóticamente estable. Supongamos que $\alpha > 0$; entonces la trayectoria para $t > t_0$

se encuentra en la región $v \geqslant \alpha$ y, por lo tanto, fuera de un cierto δ_1-entorno del origen de coordenadas, o sea en donde, según la condición 2), $\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0$ para $t \geqslant T_0$. Multiplicando la desigualdad $\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta$ por dt e integrando a lo largo de la trayectoria desde T_0 hasta t, obtenemos

$$v(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)) - v(x_1(T_0),\ x_2(T_0),\ \ldots,\ x_n(T_0)) \leqslant \leqslant -\beta(t - T_0),$$

o bien

$$v(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \leqslant v(x_1(T_0), x_2(T_0), \ldots, x_n(T_0)) - \beta(t - T_0).$$

Para un valor de t suficientemente grande, el segundo miembro es negativo y, por consiguiente, $v(x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)) < 0$, lo cual contradice a la condición 1).

Observación. El teorema sobre la estabilidad asintótica se generaliza al caso cuando la función v depende de t, x_1, x_2, ..., x_n, si la primera condición, como en el teorema anterior, se sustituye por

$$v(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \geqslant w(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \geqslant 0,$$

donde la función w tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas y, aparte de esto, si se exige que la función $v(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ tienda a cero cuando $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \rightarrow 0$, uniformemente con respecto a t.

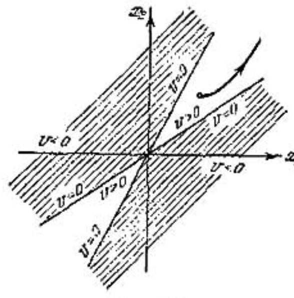

Fig. 4.13

Teorema 4.3 (teorema de Chetáev sobre la inestabilidad). *Si existe una función derivable $v(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ que satisfaga en cierto h-entorno cerrado del origen de coordenadas las condiciones: 1) en un entorno arbitrariamente pequeño U del origen de coordenadas, existe una región $(v > 0)$, en la cual $v > 0$, y $v = 0$ en la parte de la frontera de la región $(v > 0)$ que se encuentra en U; 2) en la región $(v > 0)$ la derivada*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) > 0,$$

y en la región ($v \geqslant \alpha$), $\alpha > 0$, la derivada $\frac{dv}{dt} \geqslant \beta > 0$, entonces el punto de reposo $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) del sistema (4.14) es inestable.

Demostración. Tomemos el punto inicial $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ en un entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas, en la región ($v > 0$), $v(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = \alpha > 0$ (fig. 4.13). Debido a que $\frac{dv}{dt} \geqslant 0$ a lo largo de la trayectoria, la función v no decrece a lo largo de la misma y, por lo tanto, mientras la trayectoria no abandone el h-entorno considerado del origen de coordenadas, en el cual se cumplen las condiciones del teorema, la trayectoria debe permanecer en la región ($v \geqslant \alpha$). Supongamos que la trayectoria no abandona el h-entorno del origen. Entonces, debido a la condición 2), la derivada $\frac{dv}{dt} \geqslant \beta > 0$ a lo largo de la trayectoria para $t \geqslant t_0$. Multiplicando esta desigualdad por dt e integrando, obtenemos:

$$v(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) - v(x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \geqslant \beta(t - t_0),$$

de donde se deduce que cuando $t \to \infty$ la función v crece indefinidamente a lo largo de la trayectoria, lo cual se encuentra en contradicción con la condición de que la trayectoria no sale fuera de los límites del h-entorno cerrado del origen, ya que en este entorno la función continua v está acotada.

Observación. N. G. Chetáev demostró el teorema de la inestabilidad considerando que v puede depender también de t; en este caso la hipótesis del teorema cambia un tanto, haciéndose necesario, en particular, exigir la acotación de la función v en la región ($v \geqslant 0$) en el h-entorno considerado del origen.

Ejemplo 1. Analizar la estabilidad de la solución trivial del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3.$$

La función $v(x, y) = x^4 + y^2$ satisface las condiciones del teorema de A. M. Liapunov sobre la estabilidad asintótica:

1) $v(x, y) \geqslant 0$, $v(0, 0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leqslant 0$. Fuera de un entorno del origen de coordenadas es $\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0$ Por lo tanto, la solución $x = 0$, $y = 0$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 2. Analizar la estabilidad de la solución trivial $x = 0$, $y = 0$ del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -xy^4, \quad \frac{dy}{dt} = yx^4.$$

La función $v(x, y)=x^4+y^4$ satisface las condiciones del teorema de A. M. Liapunov sobre la estabilidad:

1) $v(x, y)=x^4+y^4 \geqslant 0, \quad v(0, 0)=0;$

2) $\dfrac{dv}{dt}=-4x^4y^4+4x^4y^4 \equiv 0$

Por consiguiente, la solución trivial $x\equiv 0$, $y\equiv 0$ es estable.

Ejemplo 3. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=y^3+x^5,$$
$$\frac{dy}{dt}=x^3+y^5.$$

La función $v=x^4-y^4$ satisface las condiciones del teorema de N. G. Chetáev:

1) $v>0$, cuando $|x|>|y|$;

2) $\dfrac{dv}{dt}=4x^3(y^3+x^5)-4y^3(x^3+y^5)=4(x^8-y^8)>0$ para $|x|>|y|$, y para $v\geqslant\alpha>0$, es $\dfrac{dv}{dt}\geqslant\beta>0$. Por lo tanto, el punto de reposo $x=0$, $y=0$ es inestable.

Ejemplo 4. Analizar la estabilidad de la solución trivial $x_i\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt}=-\frac{\partial u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

si la función $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene un máximo estricto en el origen de coordenadas.

Tomemos como función de Liapunov la diferencia

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n)=u(0, 0, \ldots, 0)-u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

la cual, evidentemente, se anula para $x_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ y tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas. Por lo tanto, esta función satisface la condición 1) del teorema de Liapunov sobre la estabilidad. La derivada a lo largo de las curvas integrales es

$$\frac{dv}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\leqslant 0.$$

De este modo, las condiciones del teorema de Liapunov se cumplen: por lo tanto, la solución trivial es estable.

Ejemplo 5. Estudiar la estabilidad de la solución trivial $x_i\equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\,x_j, \quad \text{donde} \quad a_{ij}(t)=-a_{ji}(t) \quad \text{para} \quad i\neq j \quad \text{y todas las} \quad a_{ii}(t)\leqslant 0.$$

La solución trivial es estable, puesto que la función $v=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ satisface las condiciones del teorema de Liapunov sobre la estabilidad:

1) $v \geqslant 0$ y $v(0, 0, \ldots, 0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{dx_i}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_i x_j = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) x_i^2 \leqslant 0.$

§ 4. ANALISIS DE LA ESTABILIDAD POR LA PRIMERA APROXIMACION

Para el análisis de la estabilidad del punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.14}$$

donde f_i es una función derivable en un entorno del origen de coordenadas, se aplica con frecuencia el siguiente método: como la función $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es derivable, el sistema (4.14) en un entorno del origen de coordenadas $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ puede representarse en la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \; (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.15}$$

donde las R_i son infinitésimos de orden mayor que 1 con respecto a $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; luego de esto, en lugar de investigar la estabilidad del punto de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (4.15), se analiza la estabilidad de este mismo punto del sistema lineal

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.16}$$

llamado *sistema de ecuaciones de primera aproximación* respecto al sistema (4.15). Las condiciones de aplicabilidad de este método, utilizado durante mucho tiempo sin ninguna base, fueron analizadas detalladamente por A. M. Liapunov, y posteriormente generalizadas por muchos otros matemáticos, entre los cuales cabe nombrar en primer lugar a O. Perron, I. G. Malkin, K. P. Persidski y N. G. Chetáev.

El análisis de la estabilidad del sistema de ecuaciones de primera aproximación, claro está, es un problema mucho más fácil que el estudio del sistema original, en general no lineal; sin embargo, aún la investigación del sistema lineal (4.16) con coeficientes $a_{ij}(t)$ variables es un problema muy complejo. Si, en cambio, todas las a_{ij} son constantes, es decir, si el sistema es estacionario en primera aproximación, la investigación de la estabilidad del sistema lineal (4.16) no posee dificultades principiales (véanse las págs. 217—218).

Teorema 4.4. *Si el sistema de ecuaciones (4.15) es estacionario en primera aproximación, si todos los términos R_i, en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, cuando $t \geqslant T \geqslant t_0$, satisfacen las desigualdades $|R_i| \leqslant N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, donde N y α son constantes, y $\alpha > 0$ (o sea, si las R_i no dependen de t, entonces su orden es mayor que 1 con respecto a $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$) y si todas las raíces de la ecuación característica:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{4.17}$$

tienen partes reales negativas, entonces las soluciones triviales $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ del sistema de ecuaciones (4.15) y del sistema (4.16) son asintóticamente estables; por lo tanto, en este caso es posible el análisis de la estabilidad por la primera aproximación.

Teorema 4.5. *Si el sistema de ecuaciones (4.15) es estacionario en primera aproximación, si todas las funciones R_i satisfacen las condiciones del teorema anterior y si por lo menos una raíz de la ecuación característica (4.17) tiene parte real positiva, entonces los puntos de reposo $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ del sistema (4.15) y del (4.16) son inestables. En consecuencia, en este caso también es posible investigar la estabilidad por la primera aproximación.*

Los teoremas 4.4 y 4.5, desde el punto de vista de las limitaciones que imponen a las raíces de la ecuación característica, no abarcan solamente el llamado caso crítico, o sea, cuando todas las partes reales de las raíces de la ecuación característica no son positivas, y además la parte real de por lo menos una raíz es igual a cero.

En el caso crítico los términos no lineales R_i comienzan a influir sobre la estabilidad de la solución trivial del sistema (4.15) y la investigación de la estabilidad por la primera aproximación, en general, no es posible.

La demostración de los teoremas 4.4 y 4.5 se pueden encontrar en el libro de I. G. Malkin.

Para dar una idea de los métodos de demostración de estos teoremas, daremos la demostración del teorema 4.4, suponiendo que todas las raíces k_i de la ecuación característica son reales y diferentes,

$$k_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad k_i \neq k_j \text{ para } i \neq j.$$

En notaciones vectoriales, el sistema (4.15) y el (4.16) toman respectivamente las formas

$$\frac{dX}{dt}=AX+R, \qquad (4.15_1)$$

$$\frac{dX}{dt}=AX. \qquad (4.16_1)$$

donde

$$X=\left\|\begin{matrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{matrix}\right\|, \quad A=\left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{matrix}\right\|, \quad R=\left\|\begin{matrix}R_1\\R_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\R_n\end{matrix}\right\|.$$

Mediante la transformación lineal no degenerada con coeficientes constantes $X=BY$, donde

$$B=\left\|\begin{matrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{matrix}\right\|, \quad Y=\left\|\begin{matrix}y_1\\y_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\y_n\end{matrix}\right\|.$$

el sistema (4.16_1) se reduce a la forma $B\frac{dY}{dt}=ABY$, o bien $\frac{dY}{dt}=B^{-1}ABY$. La matriz B se escoge de manera que $B^{-1}AB$ sea diagonal:

$$B^{-1}AB=\left\|\begin{matrix}k_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & k_3 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n\end{matrix}\right\|.$$

Entonces el sistema (4.16) se reduce a

$$\frac{dy_i}{dt}=k_iy_i \qquad (i=1, 2, \dots, n),$$

y el sistema (4.15), mediante la misma transformación, se reduce a

$$\frac{dy_i}{dt}=k_iy_i+\overline{R}_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \qquad (4.18)$$

donde $|\overline{R}_i|\leqslant \overline{N}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, siendo $\overline{N}$ una magnitud constante, $\alpha>0$, $t\geqslant T$.

Para el sistema (4.18) una función de Liapunov que satisface las condiciones del teorema sobre la estabilidad asintótica es

$$v=\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

En efecto,

1) $v(y_1, y_2, \dots, y_n)\geqslant 0$, $v(0, 0, \dots, 0)=0$;

2) $\frac{dv}{dt}=2\sum_{i=1}^{n} y_i\frac{dy_i}{dt}=2\sum_{i=1}^{n} k_iy_i^2+2\sum_{i=1}^{n} k_iy_iR_i\leqslant\sum_{i=1}^{n} k_iy_i^2\leqslant 0$

para y_i suficientemente pequeñas, debido a que todas las $k_i < 0$ y a que la suma duplicada $2\sum_{i=1}^{n} k_i y_i R_i$ para y_i suficientemente pequeñas puede hacerse menor que la suma $\sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2$ en valor absoluto.

Por último, fuera de un entorno del origen de coordenadas es

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\beta < 0.$$

E j e m p l o 1. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + x^2 + y^2 \operatorname{sen} t, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

Los términos no lineales satisfacen las condiciones de los teoremas 4.4 y 4.5. Analicemos la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema de primera aproximación

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y, \\ \frac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

La ecuación característica $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = 0$ tiene las raíces $k_{1,2} = 1 \pm i$; por lo tanto, en virtud del teorema 4.5, el punto de reposo de los sistemas (4.19) y (4.20) es inestable.

E j e m p l o 2. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 8 \operatorname{sen} y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Desarrollando $\operatorname{sen} y$, e^x y $\cos y$ por la fórmula de Taylor, escribimos el sistema en la forma

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y + R_1, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y + R_2,$$

donde R_1 y R_2 satisfacen las condiciones de los teoremas 4.4 y 4.5.

Las raíces de la ecuación característica $\begin{vmatrix} 2-k & 8 \\ -1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$ para el sistema de primera aproximación

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y \tag{4.22}$$

tienen partes reales negativas. Por lo tanto, el punto de reposo $x=0$, $y=0$ de los sistemas (4.21) y (4.22) es asintóticamente estable.

Ejemplo 3. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4y-x^3, \\ \frac{dy}{dt} &= 3x-y^3. \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

La ecuación característica $\begin{vmatrix} -k & -4 \\ 3 & -k \end{vmatrix}=0$ del sistema de primera aproximación tiene raíces imaginarias puras, es decir, se tiene un caso crítico. El análisis por la primera aproximación no es posible. En este caso es fácil escoger la función de Liapunov

$$v=3x^2+4y^2.$$

1) $v(x, y) \geqslant 0$, $v(0, 0)=0$;

2) $\dfrac{dv}{dt}=6x(-4y-x^3)+8y(3x-y^3)=-(6x^4+8y^4)\leqslant 0$,

y fuera de cierto entorno del origen de coordenadas es $\dfrac{dv}{dt}\leqslant-\beta<0$. Por consiguiente, el punto de reposo $x=0$, $y=0$, en virtud del teorema del parágrafo anterior, es asintóticamente estable.

Detengámosnos más detalladamente en el último ejemplo. El sistema de ecuaciones de primera aproximación

$$\frac{dx}{dt}=-4y, \quad \frac{dy}{dt}=3x \tag{4.24}$$

tenía un centro en el origen de coordenadas. Los términos no lineales del sistema (4.23) transformaron este centro en un foco estable.

En el caso general también se observa un cuadro geométrico análogo, pero un tanto más complicado. Supongamos que el sistema de primera aproximación para el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+R_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+R_2(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

tiene un punto de reposo tipo centro en el origen de coordenadas. Supongamos, también, al igual que en la pág. 226, que los términos no lineales $R_1(x_1, x_2)$ y $R_2(x_1, x_2)$ son de orden mayor que 1 con respecto a $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. Estos términos no lineales son, en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, pequeños con respecto a los términos lineales, pero de todos modos éstos deforman un poco el campo direccional determinado por el sistema lineal de ecuaciones de primera aproximación. Por eso la trayectoria que sale de cierto punto (x_0, y_0) se desvía un tanto después de dar una vuelta alrededor del origen de coordenadas, con respecto a la trayectoria del sistema lineal que pasa por el mismo punto y, en general, no cae en el punto (x_0, y_0), es decir, la trayectoria no se cierra.

Si después de esta vuelta alrededor del origen todas las trayectorias se acercan al mismo, entonces en el origen surge un foco estable; si, en cambio, las trayectorias se alejan del origen, surge un foco inestable.

Como excepción, es posible también el caso en que todas las trayectorias del sistema no lineal, situadas en un entorno del origen de coordenadas, sigan siendo cerradas. Sin embargo, hay que considerar que el caso más típico es cuando sólo algunas curvas cerradas (puede ser que ningunas) permanezcan cerradas, y las restantes se conviertan en espirales.

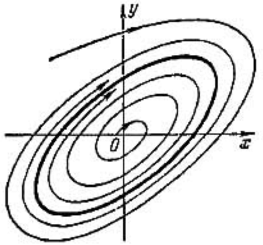

Fig. 4.14

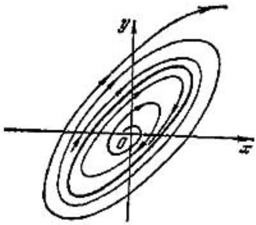

Fig. 4.15

Tales trayectorias cerradas, en cuyo entorno todas las trayectorias son espirales, se llaman *ciclos límite*.

Si las trayectorias próximas al ciclo límite son espirales que se aproximan al ciclo cuando $t \to \infty$, entonces éste se llama *estable* (fig. 4.14); si las trayectorias cercanas al ciclo límite son espirales que se alejan del mismo cuando $t \to \infty$, entonces éste se llama *inestable*; si por un lado del ciclo límite las espirales se acercan al mismo cuando $t \to \infty$ y por el otro se alejan de él (fig. 4.15), entonces el ciclo límite se llama *semiestable*.

De esta manera, el paso del sistema de primera aproximación (4.16) al sistema (4.25) conduce, en general, a la transformación del centro en un foco, rodeado de p ciclos límite (el caso $p=0$ no se excluye).

En la pág. 157, al investigar las soluciones periódicas del sistema cuasilineal autónomo

$$\ddot{x}+a^2x=\mu f(x,\ \dot{x},\ \mu), \tag{4.26}$$

ya nos encontramos con un fenómeno análogo. En efecto, sustituyendo (4.26) por el sistema equivalente se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -a^2x + \mu f(x, y, \mu). \end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

El sistema lineal correspondiente:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -a^2x$$

tiene un punto de reposo tipo centro en el origen de coordenadas; al agregar términos no lineales, pequeños para μ pequeños, el centro se convierte, en general, en un foco rodeado de algunos ciclos límite, cuyos radios precisamente se determinan de la primera ecuación de (2.128), pág. 159.

La diferencia entre los casos (4.25) y (4.27) consiste sólo en que los términos R_1 y R_2 son pequeños solamente en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, mientras que en el caso (4.27) el sumando $\mu f(x, y, \mu)$ puede hacerse pequeño para μ suficientemente pequeño no sólo en un entorno pequeño del origen de coordenadas.

En el ejemplo 2 (pág. 159) para pequeños μ surge un ciclo límite en un entorno de la circunferencia de radio 6 con centro en el origen de coordenadas, que es una trayectoria de la ecuación generadora.

En las aplicaciones, a los ciclos límite estables les corresponden comúnmente procesos auto-oscilatorios, o sea procesos periódicos en los cuales pequeñas perturbaciones no cambian prácticamente la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones.

§ 5. CRITERIOS DE NEGATIVIDAD DE LAS PARTES REALES DE TODAS LAS RAICES DE UN POLINOMIO

En el parágrafo anterior el problema sobre la estabilidad de la solución trivial de una amplia clase de sistemas de ecuaciones diferenciales fue reducido al análisis de los signos de las partes reales de las raíces de la ecuación característica.

Si la ecuación característica es de grado elevado, entonces su resolución es muy difícil; por ello tienen gran importancia los métodos que permiten determinar si las raíces tendrán o no parte real negativa, sin resolver la ecuación.

Teorema 4.6 (teorema de Hurwitz). *La condición necesaria y suficiente para que las partes reales de todas las raíces del polinomio*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

con coeficientes reales sean negativas, es que todos los menores dia-

gonales principales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \ldots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{Vmatrix}$$

sean positivas.

En la diagonal principal de la matriz de Hurwitz están los coeficientes del polinomio, tomados en su orden de numeración, desde a_1 hasta a_n. Las columnas están formadas sucesivamente por coeficientes con índices sólo pares o sólo impares, incluyendo también el coeficiente $a_0 = 1$; por lo tanto, el elemento b_{ik} de la matriz es $b_{ik} = a_{2i-k}$. Todos los coeficientes que faltan, es decir, los coeficientes con índices mayores que n ó menores que 0, se sustituyen por ceros.

Designemos los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz de la siguiente manera:

$$\Delta_1 = |a_1|,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Obsérvese que, como $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$, la última de las condiciones $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ de Hurwitz puede sustituirse por $a_n > 0$ *).

Apliquemos el teorema de Hurwitz a los polinomios de segundo, tercero y cuarto grado.

a) $z^2 + a_1 z + a_2$.

Las condiciones de Hurwitz se reducen a $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Estas desigualdades en el espacio de los coeficientes a_1 y a_2 determinan el primer cuadrante (fig. 4.16). En la fig. 4.16 se representa la región de estabilidad asintótica de la solución trivial de cierto sistema de ecuaciones diferenciales que satisface las condiciones del teorema 4.1, si $z^2 + a_1 z + a_2$ es su polinomio característico.

b) $z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$.

*) Obsérvese que de las condiciones de Hurwitz se deduce que todas las $a_i > 0$; sin embargo, la positividad de todos los coeficientes no es suficiente para que las partes reales de todas las raíces sean negativas.

Las condiciones de Hurwitz se reducen a $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$. La región determinada por estas desigualdades en el espacio de los coeficientes está representada en la fig. 4.17.

c) $z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$.

Las condiciones de Hurwitz se reducen a

$$a_1 > 0,\ a_1a_2 - a_3 > 0,\ (a_1a_2 - a_3)a_3 - a_1^2a_4 > 0,\ a_4 > 0.$$

Para los polinomios considerados, las condiciones de Hurwitz son muy cómodas y de fácil comprobación, pero al aumentar el grado del polinomio, dichas condiciones se complican con gran rapidez, y frecuentemente en lugar de éstas es mejor aplicar otros criterios de negatividad de las partes reales de un polinomio.

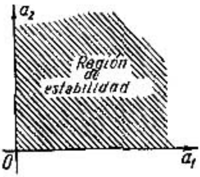

Fig. 4.16

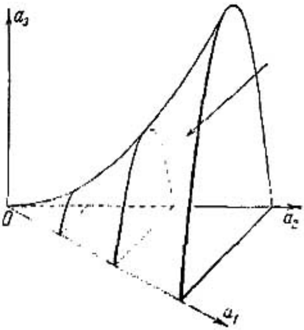

Fig. 4.17

Ejemplo. ¿Para qué valores del parámetro α la solución trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3,\quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1,\quad \frac{dx_3}{dt} = \alpha x_1 + 2x_2 - x_3$$

es asintóticamente estable?

La ecuación característica tiene la forma

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ -3 & -k & 0 \\ \alpha & 2 & -1-k \end{vmatrix} = 0, \text{ o bien } k^3 + k^2 - \alpha k + 6 = 0.$$

Según el criterio de Hurwitz, las condiciones de estabilidad asintótica serán $a_1 > 0$, $a_1a_2 - a_3 > 0$, $a_3 > 0$. Estas condiciones en este caso se reducen a $-\alpha - 6 > 0$, de donde $\alpha < -6$.

§ 6. CASO DE UN COEFICIENTE PEQUEÑO EN LA DERIVADA DE ORDEN MAYOR

El teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto al parámetro (véase la pág. 56) afirma que la solución de la ecuación diferencial $\dot{x}(t)=f(t, x(t), \mu)$ depende en forma continua del parámetro μ si en la región cerrada de variación de t, x y μ considerada la función f es continua respecto a sus argumentos en conjunto, y satisface la condición de Lipschitz respecto a x:

$$|f(t, x, \mu)-f(t, \bar{x}, \mu)| \leqslant N|\bar{x}-x|,$$

donde N no depende de t, x y μ.

En los problemas de la física y la mecánica las condiciones de este teorema generalmente se cumplen; sin embargo, en las aplicaciones se encuentra con relativa frecuencia un caso de dependencia discontinua del segundo miembro con respecto al parámetro, a cuyo estudio precisamente se dedica este parágrafo.

Consideremos la ecuación

$$\mu \frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{4.28}$$

donde μ es un parámetro pequeño. El problema consiste en aclarar si se puede o no despreciar el término $\mu \frac{dx}{dt}$ para pequeños valores de $|\mu|$, es decir, sustituir aproximadamente la solución de la ecuación (4.28) por la solución de la llamada ecuación degenerada

$$f(t, x)=0. \tag{4.29}$$

Aquí no se puede aplicar el teorema sobre la dependencia continua de la solución con respecto al parámetro, puesto que el segundo miembro de la ecuación

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\mu} f(t, x) \tag{4.28$_1$}$$

es discontinuo cuando $\mu=0$.

Supongamos por ahora, para simplificar, que la ecuación degenerada (4.29) tiene sólo una solución $x=\varphi(t)$. Supongamos también, para fijar ideas, que $\mu>0$. Cuando el parámetro μ tiende a cero, la derivada $\frac{dx}{dt}$ de las soluciones de la ecuación $\frac{dx}{dx}=\frac{1}{\mu} f(t, x)$, en cada punto en el cual $f(t, x) \neq 0$, crecerá indefinidamente en valor absoluto, teniendo el mismo signo que la función $f(t, x)$. Por consiguiente, las tangentes a las curvas integrales en todos los puntos en los cuales $f(t, x) \neq 0$, cuando $\mu \rightarrow 0$ tienden a una dirección paralela al eje Ox; además, si $f(t, x)>0$, la solución $x(t, \mu)$ de la ecuación (4.28$_1$) crece al aumentar t, puesto que $\frac{dx}{dt} > 0$, y si $f(t, x) < 0$, la solución $x(t, \mu)$ decrece al decrecer t, ya que $\frac{dx}{dt} < 0$.

Consideremos el caso a) representado en la fig. 4.18, en el cual el signo de la función $f(t, x)$ cambia de + a — al cruzar la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada, si x aumenta y t queda fijo.

El campo de direcciones de las tangentes a las curvas integrales, para un μ suficientemente pequeño, se indica con flechas. El campo

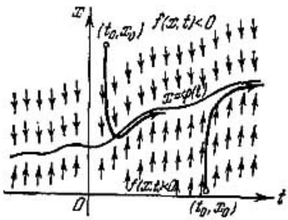

Fig. 4.18

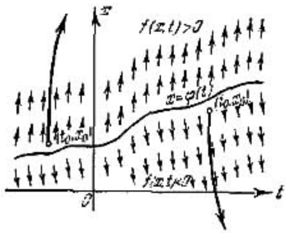

Fig. 4.19

de direcciones tiende a la gráfica de la raíz de la ecuación degenerada. Por consiguiente, para cualesquiera valores iniciales $x(t_0) = x_0$, la curva integral que éstos determinan, que es casi paralela al eje de las Ox, tenderá a la gráfica de la raíz de la ecuación degenerada y, al crecer t, ya no podrá abandonar un entorno de esta gráfica. Por consiguiente, en este caso, cuando $t \geqslant t_1 > t_0$, para un μ suficientemente pequeño se puede sustituir aproximadamente la solución $x(t, \mu)$ de la ecuación (4.28) por la solución de la ecuación degenerada. En este caso, la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada se llama estable.

Consideremos el caso b). El signo de la función $f(t, x)$ cambia de — a + al cruzar la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada, si x aumenta y t queda fijo. En la fig. 4.19 está representado el campo direccional de las tangentes a las curvas integrales para μ suficientemente pequeño. En este caso es evidente que cualesquiera que sean los valores iniciales $x(t_0) = x_0$ que satisfagan sólo la condición $f(t_0, x_0) \neq 0$, la curva integral que éstos determinan, para un μ suficientemente pequeño se aleja, teniendo una tangente casi paralela al eje Ox, de la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada. En este caso, la solución $x = \varphi(t)$

de la ecuación (4.29) se llama inestable. En el caso de inestabilidad no se puede sustituir la solución $x = x(t, \mu)$ de la ecuación original por la de la ecuación degenerada; en otras palabras, no es posible despreciar el término $\mu \frac{dx}{dt}$ en la ecuación $\mu \frac{dx}{dt} = f(t, x)$, por pequeño que sea μ.

Es posible un tercer caso, llamado de semiestabilidad, el caso c): el signo de la función $f(t, x)$ no cambia al cruzar la gráfica de la solución de la ecuación degenerada. En la fig. 4.20 se representa el campo direccional en el caso de una solución semiestable $x = \varphi(t)$.

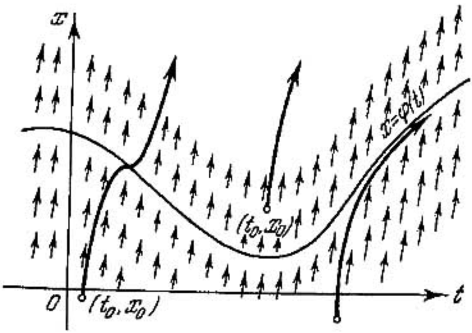

Fig. 4.20

En el caso de semiestabilidad, por regla general, tampoco es posible sustituir aproximadamente la solución $x = x(t, \mu)$ de la ecuación original por la de la ecuación degenerada, ya que, en primer lugar, las curvas integrales determinadas por las condiciones iniciales que se encuentran a un lado de la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$, se alejan de dicha gráfica. En segundo lugar, las curvas integrales que se aproximan a la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ pueden atravesarla y pasar al lado inestable (fig. 4.20), y después alejarse de ésta. Por último, aún si la curva integral $x = x(t, \mu)$ permanece en un entorno de la gráfica de la solución por su lado estable, las perturbaciones, inevitables en los problemas prácticos, pueden hacer que la gráfica de la solución $x = x(t, \mu)$ pase al lado inestable de la gráfica de la solución de la ecuación degenerada, luego de lo cual la curva integral $x = x(t, \mu)$ se aleja de ésta.

Obsérvese que si $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ en la gráfica de la solución de la ecuación degenerada, entonces la solución $x = \varphi(t)$ es con toda seguridad estable; si, en cambio, $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, entonces la solución es inestable. En efecto, en el primer caso, en un entorno de la curva $x = \varphi(t)$ la función f decrece al crecer x y, por lo tanto, cambia el signo de $+$ a $-$, y en el segundo, crece al aumentar x, por lo que al atravesar la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ la función f cambia su signo de $-$ a $+$.

Si la ecuación degenerada tiene varias soluciones $x = \varphi_i(t)$ entonces hay que investigar la estabilidad de cada una de ellas.

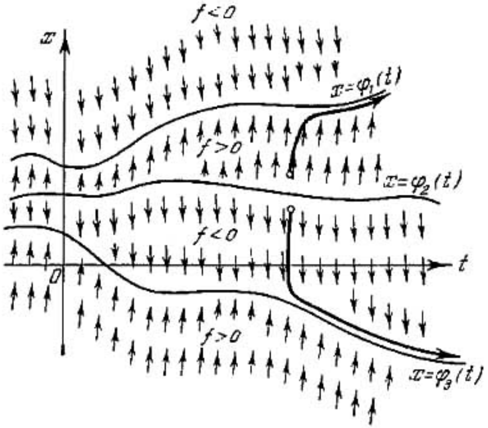

Fig. 4.21

Además, según la elección de las condiciones iniciales, las curvas integrales de la ecuación original pueden comportarse en formas diferentes cuando $\mu \to 0$. Por ejemplo, en el caso de las tres soluciones $x = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ de la ecuación degenerada, representadas en la fig. 4.21, cuyas gráficas no se cortan, las soluciones $x = x(t, \mu)$, $\mu > 0$, de la ecuación original, determinadas por puntos iniciales que se encuentran por encima de la gráfica de la funcion $x = \varphi_2(t)$, tienden, para $t > t_0$ y $\mu \to 0$, hacia la solución estable $x = \varphi_1(t)$ de la ecuación degenerada. Las soluciones $x = x(t, \mu)$, determinadas por puntos iniciales que se encuentran debajo de la gráfica de la función $x = \varphi_2(t)$, tienden, para $t > t_0$ y $\mu \to 0$, a la solución estable $x = \varphi_3(t)$ de la ecuación degenerada (fig. 4.21).

E j e m p l o 1. Determinar si la solución $x=x(t, \mu)$ de la ecuación $\mu \frac{dx}{dt}=x-t$, $\mu>0$, que satisface la condición inicial $x(t_0)=x_0$, tiende o no a la solución de la ecuación degenerada $x-t=0$, cuando $t>t_0$ y $\mu \longrightarrow 0$.

La solución $x=x(t, \mu)$ no tiende a la solución de la ecuación degenerada $x=t$, puesto que la solución de esta última es inestable, debido a que $\frac{\partial(x-t)}{\partial x}=1>0$ (fig. 4.22).

E j e m p l o 2. La misma pregunta para la ecuación

$$\mu \frac{dx}{dt}=\operatorname{sen}^2 t-3e^x.$$

La solución de la ecuación degenerada $x=2 \ln|\operatorname{sen} t|-\ln 3$ es estable, puesto que $\frac{\partial(\operatorname{sen}^2 t-3e^x)}{\partial x}=-3e^x<0$. Por consiguiente, la solución $x=x(t, \mu)$ de la ecuación inicial tiende a la solución de la ecuacion degenerada para $t>t_0$ cuando $\mu \longrightarrow 0$.

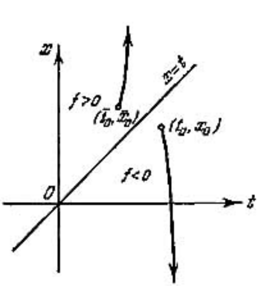

Fig. 4.22

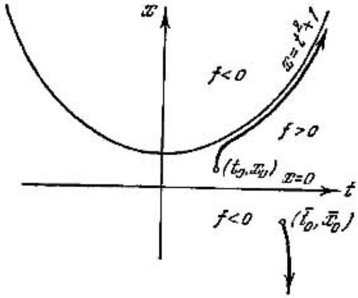

Fig 4.23

E j e m p l o 3. La misma pregunta para la solucion de la ecuacion

$$\mu \frac{dx}{dt}=x(t^2-x+1), \quad \mu>0, \quad x(t_0)=x_0.$$

De las dos soluciones $x=0$ y $x=t^2+1$ de la ecuación degenerada $x(t^2-x+1)=0$, la primera es inestable, debido a que $\left.\frac{\partial x(t^2-x+1)}{\partial x}\right|_{x=0}=t^2+1>0$, y la segunda, estable, puesto que $\left.\frac{\partial x(t^2-x+1)}{\partial x}\right|_{x=t^2+1}=-t^2-1<0$.

Si el punto inicial (t_0, x_0) se halla en el semiplano superior $x>0$, la curva integral de la ecuación original tiende, para $\mu \longrightarrow 0$, a la gráfica de la solución $x=t^2+1$ de la ecuación degenerada (fig. 4.23), y permanece en un entorno de ésta.

Si, en cambio, el punto inicial está en el semiplano inferior $x<0$, entonces $\lim_{\mu \to 0} x(t, \mu)=-\infty$ para $t>t_0$ (fig. 4.23).

Para las ecuaciones de n-ésimo orden

$$\mu x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

y para los sistemas de ecuaciones diferenciales surge también el problema sobre la dependencia de la solución de un coeficiente μ pequeño en la derivada de orden mayor.

La ecuación de n-ésimo orden puede reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden por el método habitual (véase la pág. 88); por lo tanto, el problema fundamental consiste en el análisis de los sistemas de ecuaciones de primer orden con uno o varios coeficientes pequeños en las derivadas. Este problema ha sido estudiado detalladamente por A. N. Tíjonov y por A. B. Vasílieva.

§ 7. ESTABILIDAD BAJO PERTURBACIONES DE ACCION CONSTANTE

Si el sistema de ecuaciones estudiado

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \qquad (4.30)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

se somete a pequeñas perturbaciones de corta duración, entonces el sistema (4.30), en el pequeño intervalo de variación de t, $\bar{t}_0 \leqslant t \leqslant \bar{\bar{t}}_0$, debe ser sustituido por el sistema perturbado

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_i(\bar{t}_0) &= \bar{x}_i(\bar{t}_0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (4.31)$$

donde todas las $R_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n)$ son pequeñas en valor absoluto. Después, cuando $t \geqslant \bar{\bar{t}}_0$, las perturbaciones terminan, y se vuelve al sistema (4.30), pero ahora con los valores iniciales un tanto cambiados en el punto $\bar{\bar{t}}_0$, $x_i(\bar{\bar{t}}_0) = \bar{x}_i(\bar{\bar{t}}_0) + \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, donde $\bar{x}_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es la solución estudiada del sistema (4.30), y todas las δ_i son pequeñas en valor absoluto para pequeñas $|R_i|$, en virtud del teorema sobre la dependencia continua de la solución respecto al parámetro (fig. 4.24)

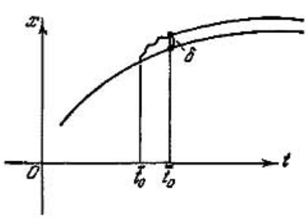

Fig. 4.24

Por consiguiente, la acción de perturbaciones de corta duración se raduce en última instancia a perturbaciones de las condiciones iniciales, y el problema de la estabilidad con respecto a dichas perturbaciones de corta duración—o, como se llaman por lo general, instantáneas—se reduce al problema de la estabilidad según Liapunov, considerado más arriba.

Si, en cambio, las perturbaciones son de acción constante, el sistema (4.30) debe ser sustituido por el (4.31) para todas las $t \geqslant t_0$, y surge un problema completamente nuevo: el estudio de la estabilidad bajo perturbaciones de acción constante. Este problema fue estudiado por I. G. Malkin y por G. N. Duboshin.

Igual que al investigar la estabilidad según A. M. Liapunov se puede, por el cambio de variables $x_i = y_i - \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, transformar la solución estudiada $y_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema $\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ en la solución trivial $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del nuevo sistema. Por esto, en lo sucesivo se puede considerar que se investiga la estabilidad bajo perturbaciones de acción constante de la solución trivial $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema de ecuaciones (4.30).

La solución trivial del sistema (4.30) se llama *estable* con respecto a las perturbaciones de acción constante, si para todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que las desigualdades $\sum_{i=1}^{n} R_i^2 < \delta_1^2$ para $t \geqslant t_0$ y $\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2 < \delta_2^2$ implican que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) < \varepsilon^2 \text{ cuando } t \geqslant t_0,$$

donde $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es la solución del sistema (4.31), determinada por las condiciones iniciales $x_i(t_0) = x_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Teorema 4.7 (teorema de Malkin). *Si para el sistema de ecuaciones* (4.30) *existe una función derivable de Liapunov* $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *que satisfaga en un entorno del origen de coordenadas, para* $t \geqslant t_0$ *las condiciones siguientes:*

1) $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant w_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$, $v(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$, *donde* w_1 *es una función continua que se anula sólo en el origen de coordenadas;*

2) *las derivadas* $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ *están acotadas en valor absoluto;*

3) *la derivada* $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \leqslant -w_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0$, *donde la función continua* $w_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *se puede anular sólo en el origen de coordenadas, entonces la solución trivial del sistema* (4.30) *es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante.*

Demostración. Obsérvese que, en virtud de que las derivadas $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ están acotadas, la función v tiende a cero cuando $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$ uniformemente con respecto a t para $t \geqslant t_0$, ya que por el teorema del valor medio, $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) x_i$, donde $\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ son las derivadas calculadas para ciertos valores intermedios, entre 0 y x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, de los argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Obsérvese también que, fuera de cierto δ—entorno del origen $\left(\text{o sea, cuando } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \delta^2 > 0\right)$ y para $t \geqslant t_0$, en virtud de las condiciones 2) y 3), la derivada

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leqslant -k < 0$$

para R_i suficientemente pequeñas en valor absoluto $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ y tomemos cierta superficie de nivel (o una de sus componentes) $w_1 = l$, $l > 0$, contenida íntegramente en el ε—entorno del origen de coordenadas.

La superficie de nivel $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$, que cambia al variar $t \geqslant t_0$, se halla, debido a la condición 1), dentro de la superficie de nivel $w_1 = l$ y al mismo tiempo, como la función v tiende a cero para $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$ uniformemente respecto a t, se encuentra fuera de cierto δ_2—entorno del origen de coordenadas, en el cual $v < l$. Por consiguiente, en la superficie de nivel $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$ para cualquier $t \geqslant t_0$ la derivada

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leqslant -k < 0,$$

si $\sum_{i=1}^{n} R_i^2 < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, donde δ_1 es suficientemente pequeño. La trayectoria determinada por un punto inicial $x_i(t_0) = x_{i0}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ que esté en el δ_2—entorno considerado del origen, no puede salir de los límites del ε—entorno de dicho punto, para $t \geqslant t_0$. En efecto, debido a la elección de δ_2, es $v(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) < l$ y, por lo tanto, si para $t \geqslant t_0$ la trayectoria saliera del ε—entorno o aunque sea de los límites de la superficie de nivel $w_1 = l$, entonces ésta debería cortar por primera vez la superficie de nivel

$v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$ para cierto valor $t = T$, y en un entorno del punto de intersección, a lo largo de la trayectoria, la función v debería crecer, y obtendríamos una contradicción con respecto a la condición $\frac{dv}{dt} \leqslant -k < 0$ a lo largo de la trayectoria en los puntos de la superficie de nivel $v(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = l$.

Comparando las condiciones del teorema de Malkin con las del teorema de Liapunov sobre la estabilidad asintótica (véase la observación de la pág. 223), vemos que éstas casi coinciden. En el teorema de Malkin se tiene solamente la condición complementaria de acotación de las derivadas $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$; en consecuencia, la estabilidad asintótica y la estabilidad con respecto a las perturbaciones de acción constante son propiedades si no coincidentes, al menos muy cercanas.

Ejemplo 1. ¿Es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante la solución trivial $x = 0$, $y = 0$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -a^2 y - x^3,$$
$$\frac{dy}{dt} = -b^2 x - y^3,$$

donde a y b son constantes?

Una función de Liapunov que satisface todas las condiciones del teorema de Malkin es $v = b^2x^2 + a^2y^2$.

Por lo tanto, el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante.

Ejemplo 2. Analizar si es estable o no el punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.32}$$

con respecto a las perturbaciones de acción constante, si todas las a_{ij} son constantes, y la R_i satisfacen las condiciones del teorema de Liapunov, pág. 227 es decir,

$|R_i| \leqslant N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, $\alpha > 0$, N es una constante, y todas las raíces de la ecuación característica del sistema de primera aproximación son diferentes y negativas.

En la pág. 228, después del cambio de variables que reduce la parte lineal de la ecuación (4.32) a la forma canónica, fue indicada la función de Liapunov $v = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ que satisface todas las condiciones del teorema de Malkin. Por consiguiente, el punto de reposo $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante.

El mismo resultado se puede obtener si se considera que las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica, entre las cuales puede haber múltiples, son negativas, sólo que en este caso la elección de la función de Liapunov se complica mucho.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 4

1. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$, del sistema

$$\frac{dx}{dt}=-2x-3y+x^5,$$
$$\frac{dy}{dt}=x+y-y^3.$$

2. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$, $z=0$ del sistema

$$\frac{dx}{dt}=x-y-z, \quad \frac{dy}{dt}=x+y-3z, \quad \frac{dz}{dt}=x-5y-3z.$$

3. ¿Para qué valores de α el punto de reposo $x=0$, $y=0$, $z=0$ del sistema $\frac{dx}{dt}=\alpha x-y$, $\frac{dy}{dt}=\alpha y-z$, $\frac{dz}{dt}=\alpha z-x$ es estable?

4. ¿Para qué valores de α el sistema

$$\frac{dx}{dt}=y+\alpha x-x^5,$$
$$\frac{dy}{dt}=-x-y^5$$

tiene punto de reposo $x=0$, $y=0$ estable?

5. ¿A qué límite tiende la solución de la ecuación diferencial

$$\mu\frac{dx}{dt}=(x^2+t^2-4)(x^2+t^2-9), \quad x(1)=1$$

cuando $\mu\to+0$, $\mu>0$, $t>1$?

6. ¿A qué límite tiende la solución de la ecuación diferencial

$$\mu\frac{dx}{dt}=x-t+5, \quad x(2)=5, \text{ cuando } \mu\to 0,\ \mu>0,\ t>2?$$

7. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=x+e^y-\cos y,$$
$$\frac{dy}{dt}=3x-y-\operatorname{sen} y.$$

8. ¿Es estable con respecto a las perturbaciones de acción constante la solución $x=0$, $y=0$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=-2y-x^5,$$
$$\frac{dy}{dt}=5x-y^5?$$

9. ¿Es estable la solución $x=0$ de la ecuación

$$x+5\ddot{x}+2\dot{x}+20x=0?$$

10. ¿Es estable la solución $x=0$ de la ecuación

$$\dddot{x}+5\ddot{x}+6\dot{x}+x=0?$$

11. ¿Que clase de punto de reposo $x=0$, $y=0$ tiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt}=x+3y, \quad \frac{dy}{dt}=5x-y?$$

12. Determinar la solución periódica de la ecuación $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=\operatorname{sen} t$ e investigar su estabilidad.

13. $\dddot{x}+2\ddot{x}+5\dot{x}+3x=\cos t$ ¿Es estable la solución periódica de esta ecuación?

14. Analizar la estabilidad del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema de ecuaciones

$$\dot{x}=y^3+x^5, \quad \dot{y}=x^3+y^5.$$

15. Analizar la estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\dot{x}=3y-2x+e^t,$$
$$\dot{y}=5y-4y+2.$$

16. Investigar la estabilidad de la solución trivial de la ecuación

$$\dddot{x}+2\ddot{x}+3\dot{x}+7\,\mathrm{sh}\,x=0.$$

17. Analizar la estabilidad de la solución trivial de la ecuación

$$\ddot{x}+(\alpha-1)\dot{x}+(4-\alpha^2)x=0,$$

donde α es un parámetro.

18. Determinar si es estable o no la solución $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\dot{x}=3y-x^3, \quad \dot{y}=-4x-3y^5$$

bajo perturbaciones de acción constante.

19. Determinar si es estable o no la solución trivial del sistema

$$X(t)=AX(t),$$

donde $X(t)$ es un vector del espacio tridimensional, y

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Investigar la estabilidad de las soluciones de la ecuación

$$\dddot{x}+4\ddot{x}+5\dot{x}=t.$$

21. Analizar la estabilidad de las soluciones de la ecuación

$$\ddot{x}+9x=\operatorname{sen} t.$$

22. $x+x=\cos t$. Hallar la solución periódica e investigar su estabilidad.

23. Hallar la región de estabilidad de

$$x+\alpha\dot{x}+(1-\alpha)x=0.$$

24. $\dddot{x}+\ddot{x}+\alpha^2\dot{x}+5\alpha x=0$. Hallar la región de estabilidad.

CAPITULO 5

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

1. CONCEPTOS GENERALES

Como ya fue señalado en la introducción (pág. 12), se llaman *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* a aquéllas en las que las funciones desconocidas son funciones de más de una variable independiente.

Muchos fenómenos físicos se describen mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La ecuación

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=n(x, y, z)$$

describe la propagación de los rayos luminosos en un medio no homogéneo con índice de refracción $n(x, y, z)$; la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

describe la variación de la temperatura de una barra; la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

es la ecuación de las oscilaciones de una cuerda; a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

la satisface el potencial del campo en las regiones que no contienen cargas, etc.

En este capítulo estudiaremos brevemente sólo los métodos de integración de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, cuya teoría está estrechamente ligada a la integración de ciertos sistemas de ecuaciones ordinarias.

Las ecuaciones en derivadas parciales de orden mayor, que se integran por métodos completamente distintos, son tratadas en otro libro de esta serie.

Consideremos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}=y+x.$$

Integrando respecto a x, obtenemos

$$z(x, y)=xy+\frac{x^2}{2}+\varphi(y),$$

donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria de y.

Ejemplo 2.

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x\,\partial y}=0, \text{ o bien } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

Integrando respecto a x, obtenemos $\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(y)$, donde $\varphi(y)$ es una función arbitraria de y. Integrando ahora respecto a y, se obtiene

$$z=\int\varphi(y)\,dy+\varphi_1(x),$$

donde $\varphi_1(x)$ es una función arbitraria de x. O bien, designando

$$\int\varphi(y)\,dy=\varphi_2(y),$$

tendremos finalmente

$$z(x, y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y),$$

donde $\varphi_2(y)$, en virtud de la arbitrariedad de $\varphi(y)$, es también una función arbitraria derivable de y.

Los ejemplos expuestos nos sugieren que la solución general de una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden depende de una función arbitraria; la solución general de una ecuación de segundo orden, de dos funciones arbitrarias, y la solución general de una ecuación de p-ésimo orden, probablemente dependerá de p funciones arbitrarias

Estas consideraciones son ciertas, pero deben ser precisadas. Para ello, formulemos el teorema de S. V. Kovalévskaia sobre la existencia y unicidad de la solución de una ecuación en derivadas parciales.

Teorema 5.1 (teorema de Kovalévskaia). *Existe una solución analítica única en un entorno del punto $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ de la ecuación*

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}=f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^p z}{\partial x_n^p}\right), \qquad \text{(A)}$$

resuelta con respecto a una de sus derivadas de orden mayor, que *satisface las condiciones:*

$$\text{para } x=x_{10}, \text{ es } z=\varphi_0(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}}=\varphi_{p-1}(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

si las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ son analíticas en un entorno del punto inicial $x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0}$, y f es función analítica en un entorno de los valores iniciales de sus argumentos, $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, z_0=$ $=\varphi_0(x_{20}, x_{30}, \ldots, x_{n0})$,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_0=\varphi_1(x_{20}, \ldots, x_{n0}), \ldots, \left(\frac{\partial^p z}{\partial x_n^p}\right)_0=\left(\frac{\partial^p \varphi_0}{\partial x_n^p}\right)_{x_i=x_{i_0}}.$$

La solución se determina fijando las funciones iniciales φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$. Al variar dichas funciones arbitrariamente en la clase de las funciones analíticas, obtenemos un conjunto de soluciones analíticas de la ecuación original (A), que depende de p funciones arbitrarias.

Omitimos la demostración de este teorema, que exige la aplicación de la teoría de las funciones analíticas.

§ 2. ECUACIONES LINEALES Y CUASILINEALES EN DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN

Se denomina *ecuación lineal no homogénea o ecuación cuasilineal de primer orden en derivadas parciales*, a la ecuación de la forma

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots$$
$$\ldots+X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n}=Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z). \qquad (5.1)$$

Esta ecuación es lineal con respecto a las derivadas, pero puede ser no lineal con respecto a la función desconocida z.

Si el segundo miembro es idénticamente nulo y los coeficientes X_i no dependen de z, la ecuación (5.1) se llama *lineal homogénea*.

Para mayor claridad en la interpretación geométrica, estudiemos primero la ecuación cuasilineal con dos variables independientes:

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x, y, z). \qquad (5.1_1)$$

Se considerará que las funciones P, Q y R son continuas en la región considerada de variación de las variables, y que no se anulan simultáneamente.

Consideremos el campo vectorial continuo

$$\mathbf{F}=P(x, y, z)\,\mathbf{i}+Q(x, y, z)\,\mathbf{j}+R(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

donde **i**, **j** y **k** son vectores unitarios dirigidos por los ejes de coordenadas.

Las líneas vectoriales de este campo (es decir, las líneas cuyas tangentes tienen en cada punto una dirección que coincide con la del vector **F** en dicho punto) se determinan de la condición de paralelismo entre el vector $\mathbf{t} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$, dirigido por la tangente a las líneas buscadas, y el vector **F** del campo:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

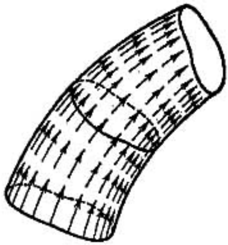

Fig. 5.1

Las superficies formadas por líneas vectoriales o, más exactamente, las superficies que contienen enteramente a las líneas vectoriales que tengan al menos un punto común con ésta, se llaman *superficies vectoriales* (fig. 5.1).

Es evidente que las superficies vectoriales se pueden obtener considerando el conjunto de puntos que pertenecen a una familia monoparamétrica de líneas vectoriales escogida arbitrariamente, que depende en forma continua del parámetro. La superficie vectorial se caracteriza por que el vector **N** que tiene la dirección de la normal a la superficie, es ortogonal al vector **F** del campo en todo punto de ésta:

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}) = 0. \tag{5.2}$$

Si la superficie vectorial se determina por la ecuación $z = f(x, y)$, entonces el vector **N** es igual a

$$\mathbf{N} = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

y la condición (5.2) toma la forma

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z). \tag{5.3}$$

Si la superficie vectorial se da mediante la ecuación $u(x, y, z) = 0$ y, por consiguiente, el vector $\mathbf{N} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$, entonces la ecuación (5.2) toma la forma

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{5.4}$$

Por consiguiente, para hallar las superficies vectoriales hay que integrar la ecuación cuasilineal (5.3), o la ecuación lineal homogénea (5.4), según se busque la ecuación de las superficies vectoriales en forma explícita o implícita.

Como las superficies vectoriales pueden formarse por *líneas vectoriales*, la integración de la ecuación (5.3) (ó (5.4)) se reduce a la integración del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de las líneas vectoriales.

Escribamos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de las líneas vectoriales:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \tag{5.5}$$

Sean $\psi_1(x, y, z) = c_1$ y $\psi_2(x, y, z) = c_2$ dos primeras integrales independientes del sistema (5.5). Tomemos arbitrariamente de la familia dependiente de dos parámetros de líneas vectoriales $\psi_1(x, y, z) = c_1$, $\psi_2(x, y, z) = c_2$, llamadas *características* de la ecuación (5.3) (ó (5.4)), una familia monoparamétrica, estableciendo una dependencia continua cualquiera $\Phi(c_1, c_2) = 0$ entre los parámetros c_1 y c_2. Eliminando los parámetros c_1 y c_2 del sistema

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2, \quad \Phi(c_1, c_2) = 0,$$

obtenemos la ecuación buscada de las superficies vectoriales:

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \ \psi_2(x, y, z)) = 0, \tag{5.6}$$

donde Φ es una función arbitraria. Con esto hemos hallado la ecuación cuasilineal (5.3) que depende de una función arbitraria.

Si se exige hallar no una superficie vectorial arbitraria del campo

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

sino la superficie que pasa por una línea dada, determinada por las ecuaciones $\Phi_1(x, y, z) = 0$ y $\Phi_2(x, y, z) = 0$, entonces la función Φ en (5.6) ya no será arbitraria, sino que se determinará eliminando las variables x, y y z del sistema de ecuaciones

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0,$$
$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

las que deben satisfacerse simultáneamente en los puntos de la línea dada $\Phi_1 = 0$ y $\Phi_2 = 0$, por la cual se trazan las características, determinadas mediante las ecuaciones $\psi_1(x, y, z) = c_1$, $\psi_2(x, y, z) = c_2$.

Obsérvese que el problema queda indeterminado si la línea dada $\Phi_1(x, y, z) = 0$, $\Phi_2(x, y, z) = 0$ es característica, ya que en este caso esta línea se puede incluir en diferentes familias monoparamétricas de características, obteniendo así diferentes curvas integrales que pasan por dicha línea.

De este modo, la integral de la ecuación cuasilineal

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

dependiente de una función arbitraria, puede obtenerse por el método siguiente: se integra el sistema auxiliar de ecuaciones

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

y, hallando dos primeras integrales independientes de éste:

$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

se obtiene la integral buscada en la forma $\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$, donde Φ es una función arbitraria.

La ecuación de la superficie integral de la misma ecuación cuasilineal que pasa por una línea dada, determinada por las ecuaciones $\Phi_1(x, y, z) = 0$ y $\Phi_2(x, y, z) = 0$, se puede hallar tomando la función Φ mencionada más arriba no en forma arbitraria, sino determinando $\Phi(c_1, c_2)$ por eliminación de x, y y z de las ecuaciones

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0,$$
$$\psi_1(x, y, z) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z) = c_2,$$

a resultas de lo cual se obtiene la ecuación $\Phi(c_1, c_2) = 0$, y la integral buscada será $\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0$.

Ejemplo 1. Determinar la integral de la ecuación

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

que depende de una función arbitraria.
El sistema auxiliar de ecuaciones es

$$dx = dy = dz.$$

Sus primeras integrales tienen la forma $x - y = c_1$, $z - x = c_2$. La integral de la ecuación original es $\Phi(x - y, z - x) = 0$, donde Φ es una función arbitraria, o en forma resuelta con respecto a z, $z = x + \varphi(x - y)$, donde φ es una función derivable arbitraria.

Ejemplo 2. Hallar la superficie integral de la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

que pasa por la curva $x = 0$, $z = y^2$.
Integremos el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0},$$

de donde $z = c_1$, $x^2 + y^2 = c_2$. Eliminando x, y y z de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = c_2, \quad z = c_1, \quad x = 0, \quad z = y^2,$$

obtenemos $c_1 = c_2$, de donde $z = x^2 + y^2$

Ejemplo 3. Hallar la superficie integral de la misma ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

que pasa por la circunferencia

$$z=1, \quad x^2+y^2=4. \tag{5.7}$$

Puesto que la línea dada (5.7) es vectorial (característica), el problema es indeterminado. En efecto, cualquier superficie de revolución $z=\Phi(x^2+y^2)$, cuyo eje de rotación coincida con el eje Oz, es superficie integral de la ecuación considerada. Evidentemente, existe un conjunto infinito de tales superficies, que pasan por la circunferencia (5.7), por ejemplo, los paraboloides de revolución $z=x^2+y^2-3$, $4z=x^2+y^2$, $z=-x^2-y^2+5$, la esfera $x^2+y^2+z^2=5$, etc.

Si la ecuación de la curva por la cual se exige trazar la superficie integral de la ecuación (5.1_1) se da en forma paramétrica:

$$x_0=x_0(s), \quad y_0=y_0(s), \quad z_0=z_0(s), \tag{B}$$

entonces es también conveniente buscar la solución en forma paramétrica:

$$x=x(t, s), \quad y=y(t, s), \quad z=z(t, s).$$

Introduzcamos un parámetro t en el sistema (5.5) que determina las características, haciendo

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)}=dt. \tag{$5,5_1$}$$

Para que las características pasen por la curva dada, se busca la solución del sistema (5.5_1) que satisface, para $t=0$ (ó $t=t_0$), las condiciones iniciales:

$$x=x_0(s), \quad y=y_0(s), \quad z=z_0(s).$$

Para estas condiciones iniciales y para s fija, obtenemos una característica que pasa por un punto fijo de la curva (B). Cuando s es variable, obtenemos la familia de características

$$x=x(t, s), \quad y=y(t, s), \quad z=z(t, s), \tag{C}$$

que pasan por los puntos de la curva dada (B) (en este caso se considera que la curva dada (B) no es característica). El conjunto de puntos que pertenecen a esta familia de características (C) forma precisamente la curva integral buscada.

Ejemplo 4.

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

Hallar la superficie integral que pasa por la curva $x_0=s$, $y_0=s^2$, $z_0=s^3$.

El sistema de ecuaciones que determina las características tiene la forma

$$dx=-dy=dz=dt.$$

Su solución general es

$$x=t+c_1, \quad y=-t+c_2, \quad z=t+c_3.$$

Las constantes arbitrarias se determinan mediante las condiciones iniciales, y obtenemos por último

$$x=t+s, \quad y=-t+s^2, \quad z=t+s^3.$$

Pasemos ahora al caso de n variables independientes. Es natural esperar que el esquema indicado más arriba para el caso tridimensional se pueda generalizar también al caso $(n+1)$-dimensional.

Comencemos analizando la ecuación lineal homogénea

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots$$
$$\ldots+X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \qquad (5.8)$$

donde las funciones continuas $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de la región considerada y tienen derivadas parciales acotadas en dicha región.

Formemos el sistema de ecuaciones auxiliar

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad (5.9)$$

el cual satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad bajo las limitaciones indicadas más arriba.

Hallemos $n-1$ primeras integrales independientes del sistema (5.9):

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_1,$$
$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_{n-1}.$$

En el espacio con coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este sistema de integrales determina una familia de líneas, dependiente de $n-1$ parámetros, llamadas *características* de la ecuación (5.8). Demostremos que el primer miembro de cualquier primera integral $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c$ del sistema (5.9) es solución de la ecuación lineal homogénea inicial en derivadas parciales (5.8).

En efecto, a lo largo de cualquier curva integral del sistema (5.9) la función ψ es $\psi\equiv c$. Por lo tanto, a lo largo de cualquier curva integral se tiene

$$d\psi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_i\equiv 0. \qquad (5.10)$$

Pero a lo largo de una curva integral del sistema (5.9) las diferenciales dx_i son proporcionales a las funciones X_i. En consecuencia, en virtud de la homogeneidad con respecto a dx_i del primer miembro de la identidad

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx_i\equiv 0,$$

las diferenciales dx_i pueden ser sustituidas por las magnitudes X_i, proporcionales a éstas, resultando así que a lo largo de las curvas integrales del sistema (5.9)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}X_i\equiv 0. \qquad (5.11)$$

Las curvas integrales del sistema (5.9) pasan por cada punto del campo de variación considerado de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; por otro lado, el primer miembro de la identidad (5.11) no depende de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ y, por lo tanto, no cambia al pasar de una curva integral a otra. Por consiguiente, la indentidad (5.11) se cumple no sólo a lo largo de una curva integral, sino en toda la región considerada de variación de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; esto significa precisamente que la función ψ es solución de la ecuación original

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Es evidente que $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = c$, donde Φ es una función arbitraria, es primera integral del sistema (5.9), puesto que a lo largo de una curva integral del sistema (5.9) todas las funciones $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ se transforman en constantes; por lo tanto, $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ también se transformará en una constante a lo largo de una curva integral del sistema (5.9). Esto significa que $z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$, donde Φ es una función derivable arbitraria, es solución de la ecuación lineal homogénea (5.8).

Demostremos que

$$z = \Phi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \psi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))$$

es solución general de la ecuación (5.8).

Teorema 5.2. *$z = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$, donde Φ es una función arbitraria, es solución general de la ecuación*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \tag{5.8}$$

o sea, una solución que contiene sin excepción a todas las soluciones de esta ecuación.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cierta solución de la ecuación (5.8), y demostremos que existe una función Φ tal que $\psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$.

Como ψ y $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ son soluciones de la ecuación (5.8), entonces

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_i} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Considerando a (5.12) como un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con respecto a X_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ y observando que este sistema lineal tiene solución no trivial en cada punto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la región considerada, debido a que $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por hipótesis no se anulan simultáneamente, llegamos a la conclusión de que el determinante de este sistema

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

es idénticamente nulo en la región considerada. Pero el hecho de que el jacobiano de las funciones $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sea idénticamente nulo, indica que existe una dependencia funcional entre estas funciones:

$$F(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})=0. \tag{5.13}$$

En virtud de la independencia de las primeras integrales $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=c_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ del sistema (5.9), por lo menos uno de los menores de $(n-1)$-ésimo orden del jacobiano

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}$$

de la forma

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}})}$$

es diferente de cero. Por lo tanto, la ecuación (5.13) se puede escribir en la forma

$$\psi=\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Ejemplo 5. Integrar la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}=0. \tag{5.14}$$

El sistema de ecuaciones que determina las características tiene la forma

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}.$$

Las primeras integrales independientes de este sistema serán:

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1, \quad \frac{x_2}{x_n}=c_2, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1}.$$

La solución general de la ecuación original

$$z=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

es una función homogénea arbitraria con grado nulo de homogeneidad.

El teorema de Euler sobre las funciones homogéneas afirma que las funciones homogéneas con grado nulo de homogeneidad satisfacen la ecuación considerada (5.14); ahora hemos demostrado que sólo las funciones homogéneas con grado nulo de homogeneidad poseen esta propiedad.

La ecuación lineal no homogénea de primer orden

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \qquad (5.15)$$

donde todas las X_i y Z son funciones con derivadas continuas que no se anulan simultáneamente en la región considerada de variación de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ se integran por reducción a una ecuación lineal homogénea.

Con este fin, al igual que en el caso de tres variables, es suficiente buscar la solución z de la ecuación (5.15) en forma implícita:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0, \qquad (5.16)$$

donde $\frac{\partial u}{\partial z}\neq 0$.

En efecto, considerando que la función $z=z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se determina de la ecuación (5.16) y derivando la identidad

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z(x_1, x_2, \ldots, x_n))\equiv 0$$

con respecto a x_i, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i}=0$$

de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Sustituyendo el valor hallado de $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ en (5.15), multiplicando por $-\frac{\partial u}{\partial z}$ y trasladando todos los términos al primer miembro de la ecuación, obtenemos la ecuación lineal homogénea

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial u}{\partial x_i}+Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad (5.17)$$

a la cual debe satisfacer la función u, sin embargo, sólo bajo la suposición de que z es función de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, determinada por la ecuación $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0$.

De esta manera, hay que hallar las funciones u que transformen la ecuación lineal homogénea (5.17) en una identidad, debido a la ecuación

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0.$$

Hallemos primero las funciones u que transformen (5.17) en una identidad cuando las $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ varíen en forma independiente. Todas estas funciones u son soluciones de la ecuación homogénea (5.17) y pueden ser halladas por el método ya conocido: se escribe el sistema de ecuaciones que determina las características

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)}=\ldots$$
$$\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)}=\frac{dz}{Z(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)}; \tag{5.18}$$

se hallan n primeras integrales independientes de este sistema:

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=c_1,$$
$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=c_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=c_n;$$

entonces la solución general de la ecuación (5.17) tiene la forma

$$u=\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$$

donde Φ es una función arbitraria.

La solución z de la ecuación (5.15), dependiente de una función arbitraria, se determina de la ecuación

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0, \text{ o bien } \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)=0.$$

Pero, aparte de las funciones halladas por este método, pueden haber soluciones z que se determinen de la ecuación $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0$, donde la función u no es solución de la ecuación (5.17), y la transforma en una identidad sólo debido a la ecuación $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0$. Estas soluciones se denominan *especiales*.

En cierto sentido las soluciones especiales no son muchas; éstas no pueden formar incluso familias monoparamétricas.

En efecto, si las soluciones especiales formaran una familia monoparamétrica, y se determinaran por la ecuación

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=c, \tag{5.19}$$

siendo c un parámetro, $c_0 \leqslant c \leqslant c_1$, la ecuación (5.17) debería transformarse en una identidad debido a la ecuación (5.19) para cualquier c. Pero como la ecuación (5.17) no contiene c, no puede convertirse en identidad debido a la ecuación (5.19), que contiene c, y por lo tanto debe ser una identidad con respecto a todas las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, que varían en forma independiente.

La última afirmación posee una interpretación geométrica simple. Al decir que (5.17) se reduce a una identidad debido a la ecuación $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)=0$, afirmamos que dicha reducción se realiza en los puntos de la superficie $u=0$, pero puede no reducirse a una identidad en otros puntos del espacio $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Si, en cambio, la ecuación (5.17), que no contiene c, se transforma en una identidad debido a la ecuación $u=c$, siendo c un parámetro que varía en forma continua, entonces esto significa que (5.17) se reduce a una identidad en todas las superficies $u=c$, $c_0 \leqslant c \leqslant c_1$, que no se cortan y que llenan cierta parte D del espacio $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Por consiguiente, la ecuación (5.17) se transforma en una identidad en la región D cuando las $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ varían en forma independiente.

En problemas concretos generalmente se exige buscar la solución de la ecuación (5.15) que satisface además ciertas condiciones iniciales y, como hay relativamente pocas soluciones especiales en el sentido señalado más arriba, sólo en casos completamente excepcionales éstas satisfarán las condiciones iniciales impuestas, y por ello sólo raramente hay que tomarlas en cuenta.

Ejemplo 6. Integrar la ecuación

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = pz, \tag{5.20}$$

donde p es una constante.

El sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{pz}$$

tiene las siguientes integrales independientes:

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = c_2, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad \frac{z}{x_n^p} = c_n.$$

Por consiguiente, la solución z de la ecuación inicial se determina por la ecuación

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{z}{x_n^p}\right) = 0,$$

de donde

$$z = x_n^p \psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

De este modo, la solución es una función homogénea arbitraria de p—ésimo grado de homogeneidad.

Se puede demostrar que la ecuación (5.20) no tiene integrales especiales y que, por lo tanto, el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas es reversible: a la ecuación (5.20) la satisfacen sólo funciones homogéneas con grado p de homogeneidad.

El concepto de característica se generaliza a los sistemas de ecuaciones cuasilineales del siguiente tipo especial:

$$\begin{aligned} P(x, y, u, v)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u, v)\frac{\partial u}{\partial y} &= R_1(x, y, u, v), \\ P(x, y, u, v)\frac{\partial v}{\partial x} + Q(x, y, u, v)\frac{\partial v}{\partial y} &= R_2(x, y, u, v). \end{aligned} \tag{D}$$

Se denominan *características* de este sistema a las líneas vectoriales del campo vectorial en el espacio de cuatro dimensiones

$$\mathbf{F} = P(x, y, u, v)\,\mathbf{i} + Q(x, y, u, v)\,\mathbf{j} + R_1(x, y, u, v)\,\mathbf{k}_1 + R_2(x, y, u, v)\,\mathbf{k}_2,$$

donde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ son vectores unitarios dirigidos respectivamente por los ejes de coordenadas Ox, Oy, Ou y Ov.

Las características se determinan por el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{P(x, y, u, v)} = \frac{dy}{Q(x, y, u, v)} = \frac{du}{R_1(x, y, u, v)} = \frac{dv}{R_2(x, y, u, v)}. \tag{E}$$

El sistema de ecuaciones (D) en forma vectorial tiene la forma

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1) = 0 \quad \text{y} \quad (\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2) = 0,$$

donde $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ son vectores con coordenadas $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1, 0\right)$ y $\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, 0, -1\right)$, dirigidos según las normales a las superficies cilíndricas tridimensionales buscadas, $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ respectivamente.

Por lo tanto, desde el punto de vista geométrico la integración del sistema (D) se reduce a la búsqueda de dos superficies cilíndricas tridimensionales $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, cuyas normales sean ortogonales a las líneas vectoriales en los puntos de intersección de las superficies.

Es evidente que esta condición se cumple si la superficie bidimensional S que es, en general, la intersección de las superficies tridimensionales cilíndricas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ está formada por líneas vectoriales, ya que estas líneas estarán contenidas simultáneamente en las superficies $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ y, por consiguiente, serán ortogonales a los vectores $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$. Tomando dos primeras integrales cualesquiera independientes con respecto a u y v, $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$ y $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$ del sistema (E); en otras palabras, tomando dos superficies vectoriales tridimensionales, obtenemos en su intersección, en general, una superficie bidimensional S formada por líneas vectoriales. En efecto, si cierto punto pertenece simultáneamente a las superficies vectoriales $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$ y $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$, entonces también la línea vectorial que pasa por este punto estará contenida en cada superficie.

Resolviendo el sistema de ecuaciones $\Phi_1(x, y, u, v) = 0$ y $\Phi_2(x, y, u, v) = 0$ con respecto a u y v, obtenemos las ecuaciones de dos superficies cilíndricas tridimensionales $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, cuya intersección es la misma superficie bidimensional S, compuesta por líneas vectoriales. En consecuencia, las funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ halladas serán soluciones del sistema original.

La solución del sistema (D) que depende de dos funciones arbitrarias se puede hallar aplicando el mismo método, pero tomando las primeras integrales del sistema (E) en la forma más general:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\psi_1(x, y, u, v), \quad \psi_2(x, y, u, v), \quad \psi_3(x, y, u, v)) = 0, \\ &\Phi_2(\psi_1(x, y, u, v), \quad \psi_2(x, y, u, v), \quad \psi_3(x, y, u, v)) = 0, \end{aligned} \qquad (F)$$

donde $\psi_1(x, y, u, v)$, $\psi_2(x, y, u, v)$ y $\psi_3(x, y, u, v)$ son primeras integrales independientes del sistema (E), y Φ_1 y Φ_2, funciones arbitrarias (véase la pág. 254)

Las ecuaciones (F), si las funciones compuestas Φ_1 y Φ_2 son independientes con respecto a u y v, determinan las soluciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ del sistema (D) como funciones implícitas de x e y, que dependen de la elección de las funciones arbitrarias Φ_1 y Φ_2.

§ 3. ECUACIONES DE PFAFF

En el § 2 hemos considerado dos problemas que surgen de modo natural al estudiar el campo vectorial continuo

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Estos fueron los problemas sobre la determinación de las líneas vectoriales y de las superficies vectoriales.

Casi con la misma frecuencia surge el problema sobre la determinación de la familia de superficies $U(x, y, z) = c$, ortogonales a las líneas vectoriales. La ecuación de estas superficies tiene la forma $(\mathbf{F}.\mathbf{t}) = 0$, siendo $\mathbf{t}$ un vector contenido en el plano tangente a las superficies buscadas:

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$$

o, en forma desarrollada,

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0. \qquad (5.21)$$

Las ecuaciones de la forma (5.21) se denominan *ecuaciones de Pfaff*.

Si el campo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es potencial:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U, \text{ es decir, } P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

las superficies buscadas son superficies de nivel $U(x, y, z) = c$ de la función potencial U. En este caso, la determinación de éstas no representa dificultad, puesto que

$$U = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

donde la integral curvilínea se toma por cualquier camino entre el punto fijo escogido (x_0, y_0, z_0) y el punto con coordenadas variables (x, y, z), por ejemplo, por la línea quebrada compuesta por segmentos de recta paralelos a los ejes de coordenadas.

Si, en cambio, el campo $\mathbf{F}$ no es potencial, en ciertos casos se puede escoger un factor escalar $\mu(x, y, z)$, luego de multiplicar al vector $\mathbf{F}$ por el cual el campo se haga potencial.

Si este factor existe, entonces $\mu\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$, o bien

$$\mu P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z},$$

o bien

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{\mu}\left(Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{1}{\mu}\left(R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z}\right), \\
\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{1}{\mu}\left(P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando la primera identidad por R, la segunda por P, la tercera por Q y sumándolas miembro a miembro, se obtiene la condición necesaria de existencia del factor integrante μ:

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0,$$

o bien $(\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$, donde el vector $\operatorname{rot} \mathbf{F}$—el rotacional del campo—se define por la igualdad

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Si esta condición, llamada condición de *integración total* de la ecuación (5.21), no se cumple, entonces no existe ninguna familia de superficies $U(x, y, z) = c$ ortogonales a las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F}(x, y, z)$.

En efecto, si tal familia $U(x, y, z) = c$ existiera, el primer miembro de la ecuación (5.21) podría diferenciarse de

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

sólo en cierto factor $\mu(x, y, z)$, el cual sería precisamente factor integrante de la ecuación (5.21).

De esta manera, para la existencia de la familia de superficies $U(x, y, z) = c$, ortogonales a las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F}$, es necesario que los vectores $\mathbf{F}$ y $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ sean ortogonales, es decir, que $(\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}) \equiv 0$.

Observación. La condición $(\mathbf{F}\cdot\text{rot}\,\mathbf{F})=0$ es llamada también condición de integración de la ecuación de Pfaff $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ mediante una sola relación $U(x, y, z)=c$.

A veces se exige determinar no las superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F}$, sino las líneas que poseen dichas propiedades; en otras palabras, hay que integrar la ecuación de Pfaff no mediante una, sino mediante las dos relaciones

$$U_1(x, y, z)=0 \quad \text{y} \quad U_2(x, y, z)=0. \tag{5.22}$$

Para hallar estas líneas, se puede dar arbitrariamente una de las ecuaciones (5.22), por ejemplo,

$$U_1(x, y, z)=0 \tag{5.23}$$

y eliminando de la ecuación (5.21), mediante la (5.23), una de las variables, por ejemplo z, se obtiene una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0,$$

integrando la cual se hallan las líneas buscadas en la superficie $U_1(x, y, z)=0$ elegida arbitrariamente.

Demostremos que la condición $(\mathbf{F}\cdot\text{rot}\,\mathbf{F})=0$ es no solamente necesaria, sino también suficiente para la existencia de la familia de superficies ortogonales a las líneas vectoriales.

Obsérvese que en las superficies buscadas $U(x, y, z)=c$, la ecuación

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$$

debe reducirse a una identidad, o bien, lo que es lo mismo, en estas superficies la integral curvilínea

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz \tag{5.24}$$

debe ser igual a cero por cualquier camino (entre ellos también por caminos no cerrados).

Consideremos todas las superficies rotacionales posibles, o sea, las superficies vectoriales del campo rot $\mathbf{F}$. Es evidente que en virtud del teorema de Stokes es

$$\int_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\iint_D \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

donde $d\mathbf{r}=\mathbf{i}\,dx+\mathbf{j}\,dy+\mathbf{k}\,dz$ y la integral (5.24) por cualquier camino cerrado en una superficie rotacional es igual a cero (ya que el producto escalar del vector unitario de la normal $\mathbf{n}$ a la superficie y del vector rot $\mathbf{F}$ es igual a cero). Tomemos ahora aquellas superficies rotacionales en las que todas las integrales

$$\int_L \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

sean iguales a cero también por caminos no cerrados. Para construir una de estas superficies, que pase por un punto dado

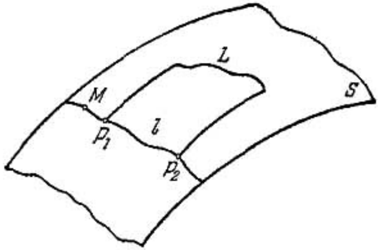

Fig. 5.2

$M(x_0, y_0, z_0)$, se traza por M alguna línea ortogonal a las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F}$. Estas líneas se determinan por la ecuación

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{5.21}$$

a la cual se le agrega la ecuación $z = f(x, y)$ de la superficie arbitraria que pasa por el punto M (lo más frecuente es tomar la ecuación de esta superficie en la forma $z = f_1(x)$ ó $z = f_2(y)$, o aún en la forma $z = a$, donde a es una constante). Sustituyendo $z = f(x, y)$ en (5.21), obtenemos una ecuación ordinaria de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Al integrar ésta, considerando la condición inicial $y(x_0) = y_0$, se obtiene la curva l buscada que pasa por el punto $M(x_0, y_0, z_0)$ y es ortogonal a las líneas vectoriales (fig. 5.2).

Si esta línea no es línea rotacional *), trazando por cada punto de l una línea rotacional, obtenemos la superficie S buscada, ortogonal a las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F}$.

En efecto, tomando cualquier curva no cerrada L en la superficie S (fig. 5.2) y trazando líneas rotacionales por sus puntos frontera hasta que se corten con la curva l en los puntos p_1 y p_2,

*) Se llaman líneas rotacionales a las líneas vectoriales del campo *rot F* (*N. de la Red.*).

obtenemos una curva cerrada, formada por el segmento de la línea l, determinado por los puntos p_1 y p_2, la curva L y las dos líneas rotacionales.

La integral curvilínea $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, tomada sobre esta curva cerrada C, es igual a cero, puesto que el contorno está contenido en la superficie rotacional; además, la misma integral, tomada sobre el segmento de arco l y sobre los segmentos de las líneas rotacionales, es igual a cero, puesto que el arco l y las líneas rotacionales son ortogonales a las líneas vectoriales del campo **F** (las líneas rotacionales son ortogonales a las líneas vectoriales del campo **F** debido a la condición $(\mathbf{F}\cdot\text{rot}\,\mathbf{F})=0$). Por lo tanto, la integral $\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, tomada por un camino no cerrado L escogido arbitrariamente es igual a cero, es decir, la superficie S es la superficie integral de la ecuación (5.21) que pasa por el punto dado M.

Este método de demostración de que la condición $(\mathbf{F}\cdot\text{rot}\,\mathbf{F})=0$ es suficiente para la existencia de una familia de superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo **F**, da a la vez un camino—aunque no el más corto—para hallar estas superficies.

Ejemplo 1.

$$z\,dx + (x-y)\,dy + zy\,dz = 0.$$

La condición $(\mathbf{F}\cdot\text{rot}\,\mathbf{F})=0$, donde $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}+zy\mathbf{k}$, no se cumple; por consiguiente, la ecuación considerada no se integra mediante una sola relación.

Ejemplo 2.

$$(6x+yz)\,dx + (xz-2y)\,dy + (xy+2z)\,dz = 0.$$

Como $\text{rot}\,\mathbf{F}=0$, donde $\mathbf{F}=(6x+yz)\mathbf{i}+(xz-2y)\mathbf{j}+(xy+2z)\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{F}=\text{grad}\,U$, siendo

$$U=\int_{(0,\,0,\,0)}^{(x,\,y,\,z)}(6x+yz)\,dx+(xz-2y)\,dy+(xy+2z)\,dz.$$

Tomemos como camino de integración una línea quebrada con segmentos paralelos a los ejes de coordenadas. Integrando, obtenemos $U=3x^2-y^2+z^2+xyz$, por lo tanto, la integral buscada será

$$3x^2-y^2+z^2+xyz=c.$$

Ejemplo 3.

$$yz\,dx+2xz\,dy+xy\,dz=0,$$

$$\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+2xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k},\quad \text{rot}\,\mathbf{F}=-x\mathbf{i}+z\mathbf{k}.$$

La condición de integrabilidad $(\mathbf{F}\cdot\text{rot}\,\mathbf{F})=0$ se cumple. En cualquier superficie, por ejemplo en el plano $z=1$, hallemos las curvas ortogonales a las líneas vectoriales:

$$z=1,\quad y\,dx+2x\,dy=0,\quad xy^2=a.$$

Tracemos por las curvas de la familia $z=1$, $xy^2=a$, las superficies rotacionales, para lo cual se integra el sistema de ecuaciones de las líneas rotacionales

$$\frac{dx}{-x}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{z}, \quad y=c_1, \quad xz=c_2.$$

Eliminando x, y y z de las ecuaciones $z=1$, $xy^2=a$, $y=c_1$, $xz=c_2$, obtenemos $c_1^2c_2=a$. Por lo tanto, la integral buscada de la ecuación original tiene la forma $xy^2z=a$.

Observación. Otro método utilizado comúnmente para integrar la ecuación de Pfaff

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=0 \qquad (5.21)$$

consiste en considerar al principio a z (o a otra variable) constante e integrar la ecuación ordinaria

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy=0, \qquad (5.25)$$

en la que z hace las veces de parámetro.

Luego de obtener la integral de la ecuación (5.25)

$$U(x, y, z)=c(z) \qquad (5.26)$$

en la cual la constante arbitraria puede ser función del parámetro z, se toma $c(z)$ de manera que se satisfaga la ecuación (5.21). Derivando (5.26), se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\left[\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)\right]dz=0. \qquad (5.27)$$

Los coeficientes de las diferenciales de las variables en las ecuaciones (5.21) y (5.27) deben ser proporcionales

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{Q}=\frac{\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)}{R}.$$

De la ecuación $\dfrac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P}=\dfrac{\frac{\partial U}{\partial z}-c'(z)}{R}$ se puede determinar $c'(z)$, puesto que se puede demostrar que al cumplirse la condición $(\mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$ esta ecuación contiene sólo z, $c'(z)$ y $U(x, y, z)=c(z)$.

§ 4. ECUACIONES NO LINEALES DE PRIMER ORDEN

Consideremos primeramente el caso en que la función buscada depende de dos variables independientes. Las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden con tres variables tienen la forma

$$F(x, y, z, p, q)=0, \qquad (5.28)$$

donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

La ecuación diferencial (5.28), en cada punto (x, y, z) de la región en que varían los tres primeros argumentos, establece una dependencia $\varphi(p, q) = 0$ entre los números p y q, los cuales determinan la dirección de la normal $\mathbf{N}(p, q, -1)$ a las *superficies integrales* $z = z(x, y)$ buscadas de la ecuación (5.28).

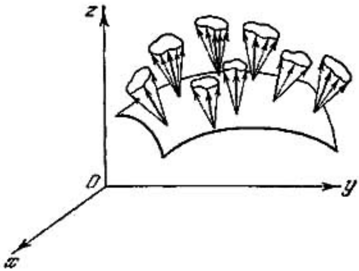

Fig. 5.3

De este modo, la dirección de la normal a las superficies integrales buscadas en cierto punto (x, y, z) no se determinan exactamente, sino que sólo se obtiene una familia monoparamétrica de las direcciones admisibles de las normales, más exactamente, cierto cono de direcciones admisibles de las normales $\mathbf{N}(p, q, -1)$, donde p y q satisfacen la ecuación $\varphi(p, q) = 0$ (fig. 5.3).

Por consiguiente, el problema de la integración de la ecuación (5.28) se reduce a hallar las superficies $z = z(x, y)$, cuyas normales posean en cada punto una de las direcciones admisibles del cono de normales en dicho punto.

Partiendo de esta interpretación geométrica, indiquemos un método de determinación de la integral de la ecuación (5.28) dependiente de una función arbitraria, si se conoce su integral $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$, que dependa de dos parámetros a y b.

La integral $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ de la ecuación (5.28) que depende de dos constantes arbitrarias independientes a y b, se llama *integral completa o total*.

Como la ecuación diferencial original (5.28) impone limitaciones sólo a la dirección de las normales a las superficies integrales buscadas, entonces cada superficie cuya normal coincida con las normales a las superficies integrales en los mismos puntos, será superficie integral. En consecuencia, las envolventes de una familia dependiente de uno o de dos parámetros de superficies integrales serán también superficies integrales debido a que la normal a la envolvente coincide con la normal a una de las superficies integrales de la familia que pasa por dicho punto.

La envolvente de la familia de superficies integrales dependiente de dos parámetros, bajo la hipótesis de la existencia de derivadas parciales acotadas $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ que no se anulen simultánemente, y de la existencia de las derivadas $\frac{\partial\Phi}{\partial a}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial b}$, se determina por las ecuaciones

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial b}=0. \tag{5.29}$$

Eligiendo arbitrariamente de la familia de superficies integrales $\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0$, que depende de dos parámetros, una familia monoparamétrica, para lo cual se considera a b como función derivable arbitraria del parámetro a, y hallando la envolvente de la familia monoparamétrica $\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b(a))=0$, obtenemos también una superficie integral. La envolvente de esta familia monoparamétrica, bajo la hipótesis de la existencia de derivadas acotadas de la función Φ respecto a todos sus argumentos, y de que las derivadas $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ no se anulen simultáneamente, se determina por las ecuaciones

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b(a))=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial a}\{\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b(a))\}=0,$$

o bien

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b(a))=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}b'(a)=0. \tag{5.30}$$

Estas dos ecuaciones determinan un conjunto de superficies integrales que dependen de la elección de la función arbitraria $b=b(a)$. El hecho de que las ecuaciones (5.30) contengan una función arbitraria, claro está, no da derecho a afirmar que las ecuaciones (5.30) definen el conjunto de todas las superficies integrales de la ecuación original (5.28) sin excepción; por ejemplo, este conjunto no contiene, en general, la superficie integral determinada por las ecuaciones (5.29). Pero de todos modos, como las ecuaciones (5.30) contienen una función arbitraria, esto ya permite, por lo general, obtener la superficie integral que satisfaga las condiciones iniciales de Cauchy dadas (véase la pág. 247).

De este modo, conociendo la integral completa, ya se puede construir una integral que dependa de una función arbitraria.

En muchos casos la determinación de la integral completa no presenta dificultad alguna, por ejemplo:

1) Si la ecuación (5.28) tiene la forma $F(p, q)=0$, ó $p=\varphi(q)$, entonces haciendo $q=a$, donde a es una constante arbitraria, obtenemos

$$p=\varphi(a), \quad dz=p\,dx+q\,dy=\varphi(a)\,dx+a\,dy,$$

de donde

$$z=\varphi(a)x+ay+b,$$

es la integral completa.

2) Si la ecuación (5.28) puede reducirse a la forma $\varphi_1(x, p)=\varphi_2(y, q)$, entonces haciendo $\varphi_1(x, p)=\varphi_2(y, q)=a$, donde a es una constante arbitraria, y resolviendo (si es posible) con respecto a p y q, obtenemos $p=\psi_1(x, a)$, $q=\psi_2(y, a)$,

$$dz=p\,dx+q\,dy=\psi_1(x, a)\,dx+\psi_2(y, a)\,dy,$$
$$z=\int \psi_1(x, a)\,dx+\int \psi_2(y, a)\,dy+b,$$

que es la integral completa.

3) Si la ecuación (5.28) tiene la forma $F(z, p, q)=0$, entonces haciendo $z=z(u)$, donde $u=ax+y$, obtenemos

$$F\left(z, a\frac{dz}{du}, \frac{dz}{du}\right)=0.$$

Integrando esta ecuación ordinaria, se obtiene $z=\Phi(u, a, b)$ siendo b una constante arbitraria, o bien

$$z=\Phi(ax+y, a, b),$$

que es la integral completa.

4) Si la ecuación (5.28) tiene forma parecida a la de la ecuación de Clairaut:

$$z=px+qy+\varphi(p, q)$$

entonces, como no es difícil comprobar por sustitución directa, la integral completa es

$$z=ax+by+\varphi(a, b).$$

Ejemplo 1. Hallar la integral completa de la ecuación $p=3q^3$.

$$q=a, \quad p=3a^3, \quad dz=3a^3dx+a\,dy,$$
$$z=3a^3x+ay+b$$

Ejemplo 2. Hallar la integral completa de la ecuación $pq=2xy$.

$$\frac{p}{x}=\frac{2y}{q}=a, \quad p=ax, \quad q=\frac{2y}{a}, \quad dz=ax\,dx+\frac{2y}{a}\,dy,$$
$$z=\frac{ax^2}{2}+\frac{y^2}{a}+b.$$

Ejemplo 3. Hallar la integral completa de la ecuación $z^3 = pq^2$.

$$z = z(u), \quad \text{donde} \quad u = ax + y, \quad p = a\frac{dz}{du}, \quad q = \frac{dz}{du},$$

$$z^3 = a\left(\frac{dz}{du}\right)^3, \quad \text{o bien} \quad \frac{dz}{du} = a_1 z, \quad \text{donde} \quad a_1 = a^{-\frac{1}{3}},$$

$$\ln|z| = a_1 u + \ln b, \quad z = be^{a_1 u},$$

$$z = be^{a_1\left(\frac{x}{a_1^3} + y\right)}.$$

Ejemplo 4. Hallar la integral completa de la ecuación

$$z = px + qy + p^2 + q^2.$$

La integral completa es

$$z = ax + by + a^2 + b^2.$$

En casos más complejos se aplica uno de los métodos generales de determinación de la integral completa de la ecuación

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

El más simple, desde el punto de vista de la idea en que está basado, es el *método de Lagrange y Sharpy*. Por este método, para la ecuación

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{5.28}$$

se escoge la ecuación

$$U(x, y, z, p, q) = a \tag{5.31}$$

de manera que las funciones $p = p(x, y, z, a)$ y $q = q(x, y, z, a)$ determinadas del sistema de ecuaciones (5.28) y (5.31) nos lleven a la ecuación de Pfaff

$$dz = p(x, y, z, a)\,dx + q(x, y, z, a)\,dy, \tag{5.32}$$

integrable mediante una sola relación. Entonces la integral $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ de la ecuación de Pfaff, donde b es una constante arbitraria que aparece al integrar la ecuación (5.32), será la integral completa de la ecuación (5.28). La función U se determina de las condiciones de integración de la ecuación (5.32) mediante una sola relación:

$$(\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0, \quad \text{donde} \quad \mathbf{F} = p(x, y, z, a)\,\mathbf{i} + q(x, y, z, a)\,\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

es decir, en forma desarrollada, de la ecuación

$$p\frac{\partial q}{\partial z} - q\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{5.33}$$

Las derivadas $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ y $\frac{\partial q}{\partial z}$ se calculan derivando las identidades

$$\left.\begin{array}{l} F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \\ U(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a, \end{array}\right\} \tag{5.34}$$

en las cuales p y q se consideran como funciones de x, y y z determinadas por el sistema (5.34).

Derivando con respecto a x, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

de donde

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\frac{D(F,\ U)}{D(p,\ x)}}{\frac{D(F,\ U)}{D(p,\ q)}}.$$

Análogamente, derivando la ecuación (5.34) con respecto a y y determinando $\frac{\partial p}{\partial y}$, obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\frac{D(F,\ U)}{D(y,\ q)}}{\frac{D(F,\ U)}{D(p,\ q)}}.$$

Derivando (5.34) con respecto a z y resolviendo con respecto a $\frac{\partial p}{\partial z}$ y a $\frac{\partial q}{\partial z}$, tendremos

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\frac{D(F,\ U)}{D(z,\ q)}}{\frac{D(F,\ U)}{D(p,\ q)}},$$
$$\frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\frac{D(F,\ U)}{D(p,\ z)}}{\frac{D(F,\ U)}{D(p,\ q)}}.$$

Sustituyendo las derivadas calculadas en la condición de integrabilidad (5.33) y multiplicando por el determinante $\frac{D(F,\ U)}{D(p,\ q)}$, el cual se considera diferente de cero, se tendrá

$$p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial z}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0,$$

o bien

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial y}+\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial U}{\partial z}-$$
$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial p}-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial U}{\partial q}=0. \qquad (5.35)$$

Para determinar la función U se obtuvo la ecuación lineal homogénea (5.35), que se integra por el método señalado en el § 2 de este capítulo: se escribe la ecuación de las características

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}=-\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad (5.36)$$

se halla por lo menos una primera integral del sistema (5.36)

$$U_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a$$

y, si las funciones F y U_1 son independientes con respecto a p y q, o sea, si $\frac{D(F,\ U_1)}{D(p,\ q)}\neq 0$, la primera integral $U_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$ será la solución buscada de la ecuación (5.35).

Por lo tanto, determinando $p=p(x,\ y,\ z,\ a)$ y $q=q(x,\ y,\ z,\ a)$ del sistema de ecuaciones

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0,$$
$$U_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a$$

y sustituyéndolas en

$$dz=p(x,\ y,\ z,\ a)\,dx+q(x,\ y,\ z,\ a)\,dy,$$

se obtiene una ecuación de Pfaff, integrable mediante una sola relación, resolviendo la cual se halla la integral completa de la ecuación original

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0.$$

Ejemplo 5. Hallar la integral completa de la ecuación

$$yzp^2-q=0. \qquad (5.37)$$

El sistema (5.36) tiene la forma

$$\frac{dx}{2pyz}=-dy=\frac{dz}{2p^2yz-q}=-\frac{dp}{yp^3}=-\frac{dq}{zp^2+yp^2q}.$$

Utilizando la ecuación original simplificamos el denominador de la tercera razón, y obtenemos la combinación integrable $\frac{dz}{p^2yz}=-\frac{dp}{p^3y}$, de donde

$$p=\frac{a}{z}. \qquad (5.38)$$

De las ecuaciones (5.37) y (5.38) se halla $p=\frac{a}{z}$, $q=\frac{a^2y}{z}$, de donde $dz=\frac{a}{z}dx+\frac{a^2y}{z}dy$. Multiplicando por $2z$ e integrando, se halla la integral completa de la ecuación original $z^2=2ax+a^2y^2+b$

Conociendo la integral completa $\Phi(x, y, z, a, b)=0$ de la ecuación

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

se puede, en general, resolver el problema inicial fundamental (véase la pág. 247), y aún el problema más general de hallar la superficie integral que pase por la curva dada

$$x=x(t), \; y=y(t), \; z=z(t). \tag{5.39}$$

Determinemos la función $b=b(a)$ de manera que la envolvente de la familia monoparamétrica

$$\Phi(x, y, z, a, b(a))=0 \tag{5.40}$$

determinada por las ecuaciones (5.40) y

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}+\frac{\partial\Phi}{\partial b}b'(a)=0 \tag{5.41}$$

pase por la curva dada (5.39).

En los puntos de la curva dada las ecuaciones (5.40) y (5.41) se transforman en identidades con respecto a t:

$$\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))=0 \tag{5.42}$$

y

$$\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))}{\partial a}+\frac{\partial\Phi(x(t), y(t), z(t), a, b(a))}{\partial b}b'(a)=0. \tag{5.43}$$

Sin embargo, sería muy difícil determinar la función $b=b(a)$ de estas ecuaciones. Es mucho más simple determinar esta función a partir del sistema (5.42) y de

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z'(t)=0, \tag{5.44}$$

o, en forma compacta,

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{t})=0,$$

donde $\mathbf{t}$ es el vector tangente a la curva dada

$$x=x(t), \; y=y(t), \; z=z(t) \tag{5.39}$$

y $\mathbf{N}$, el vector normal a la superficie $\Phi=0$ y, por lo tanto, a la envolvente buscada en los puntos correspondientes. La condición

(5.44) es geométricamente evidente, ya que la superficie buscada debe pasar por la curva dada y, por consiguiente, la tangente a esta curva debe estar contenida en el plano tangente a la superficie buscada.

Ejemplo 6. Hallar la superficie integral de la ecuación $z=px+qy+\frac{pq}{4}$ que pase por la curva $y=0$, $z=x^2$.

La integral completa de la ecuación (véase el caso 4 en la pág. 269) tiene la forma $z=ax+by+\frac{ab}{4}$. La ecuación de la curva dada se puede escribir en forma paramétrica: $x=t$, $y=0$, $z=t^2$.

Para determinar la función $b=b(a)$, escribimos el sistema de ecuaciones (5.42) y (5.44) que, en el caso dado, tienen la forma $t^2=at+\frac{ab}{4}$ y $2t=a$, de donde $b=-a$, $z=a(x-y)-\frac{a^2}{4}$. La envolvente de esta familia se determina por las ecuaciones

$$z=a(x-y)-\frac{a^2}{4}$$

y

$$x-y-\frac{a}{2}=0.$$

Eliminando a se obtiene $z=(x-y)^2$.

Si el sistema (5.36) (pág. 271) se integra fácilmente, entonces para resolver el problema generalizado de Cauchy es muy útil el método que se expone a continuación, llamado *método de las características o de Cauchy*.

La *superficie integral* $z=z(x, y)$ de la ecuación

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

que pasa por la curva dada

$$x_0=x_0(s),\ y_0=y_0(s),\ z_0=z_0(s)$$

se puede, al igual que para la ecuación cuasilineal (véase la pág. 252), imaginar formada por puntos pertenecientes a cierta familia monoparamétrica de curvas, llamadas *características*,

$$x=x(t, s),\ y=y(t, s),\ z=z(t, s),$$

donde s es el parámetro de la familia.

Primero se halla una familia de características que dependa de varios parámetros y después, trazando las características que pasen por los puntos de la curva

$$x_0=x_0(s),\ y_0=y_0(s),\ z_0=z_0(s)$$

y satisfaciendo además otras condiciones, se obtiene una familia monoparamétrica de curvas, en las cuales se puede considerar a s como parámetro:

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s)$$

(fig. 5.4). El conjunto de puntos pertenecientes a estas curvas forma la superficie integral buscada. En esto consiste, en rasgos generales, la idea del método de Cauchy.

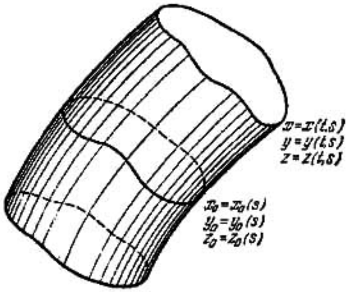

Fig. 5.4

Sea $z = z(x, y)$ la superficie integral de la ecuación

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{5.45}$$

Derivando la identidad (5.45) con respecto a x y a y, obtenemos

$$F_x + pF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

$$F_y + qF_z + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

o bien, como $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$,

$$\left.\begin{aligned} F_x + F_z p + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ F_y + F_z q + F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

Las ecuaciones de las características para el sistema de ecuaciones (5.46), cuasilineal con respecto a p y q, donde z se considera función conocida de x e y, tienen la forma (véase la pág. 259)

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt. \tag{5.47}$$

Como z está relacionada con p y q mediante la ecuación

$$dz = pdx + qdy, \tag{5.48}$$

entonces a lo largo de una característica será

$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} = pF_p + qF_q,$$

o bien

$$\frac{dz}{pF_p + qF_q} = dt, \tag{5.49}$$

lo cual da la posibilidad de completar el sistema (5.47) con una ecuación más, la (5.49).

De esta manera, bajo la hipótesis de que $z = z(x, y)$ es solución de la ecuación (5.45), se llega al sistema

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} = dt. \tag{5.50}$$

De las ecuaciones (5.50) se puede, sin conocer la solución $z = z(x, y)$ de la ecuación (5.45), hallar las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $p = p(t)$ y $q = q(t)$, es decir, se pueden hallar las curvas

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

llamadas *características*, y determinar en cada punto de la característica los números $p = p(t)$ y $q = q(t)$ que determinan la dirección del plano

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{5.51}$$

Las características, conjuntamente con el plano (5.51), tomado en cada uno de sus puntos, se llama *banda característica*.

Demostremos que la superficie integral buscada de la ecuación $F(x, y, z, p, q) = 0$ se puede formar por características.

Obsérvese ante todo que a lo largo de una curva integral del sistema (5.50) la función F conserva su valor contante,

$$F(x, y, z, p, q) = c;$$

en otras palabras, la función $F(x, y, z, p, q)$ es primera integral del sistema (5.50).

En efecto, a lo largo de una curva integral del sistema (5.50) es

$$\frac{d}{dt}F(x, y, z, p, q) = F_x\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt} + F_p\frac{dp}{dt} + F_q\frac{dq}{dt} =$$

$$= F_xF_p + F_yF_q + F_z(pF_p + qF_q) - F_p(F_x + pF_z) - F_q(F_y + qF_z) = 0;$$

por lo tanto, a lo largo de una curva integral del sistema (5.50) será

$$F(x, y, z, p, q) = c, \text{ donde } c = F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Para que a lo largo de las curvas integrales del sistema (5.50) se satisfaga la ecuación $F(x, y, z, p, q)=0$ es necesario escoger los valores iniciales $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$ y $q_0(s)$ de manera que satisfagan la ecuación

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=0.$$

Integrando el sistema (5.50) para valores iniciales $x_0=x_0(s)$, $y_0=y_0(s)$, $z_0=z_0(s)$, $p_0=p_0(s)$ y $q_0=q_0(s)$ que satisfagan la ecuación $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)=0$, se obtiene $x=x(t, s)$, $y=y(t, s)$, $z=z(t, s)$, $p=p(t, s)$ y $q=q(t, s)$.

Para s fijo, tendremos una de las características

$$x=x(t, s),\ y=y(t, s),\ z=z(t, s);$$

variando s, se obtiene cierta superficie. En cada punto de ésta, para $p=p(t, s)$ y $q=q(t, s)$ la ecuación $F(x, y, z, p, q)=0$ se satisface, pero hay que verificar además si se cumple que $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ y $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ o, lo que es lo mismo, si se cumple que $dz=pdx+qdy$, o bien

$$dz=p\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\right)+q\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\right)=\frac{\partial z}{\partial s}ds+\frac{\partial z}{\partial t}dt,$$

lo cual equivale a las dos condiciones

$$p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}=0, \tag{5.52}$$

$$p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial z}{\partial t}=0. \tag{5.53}$$

La segunda ecuación se transforma, evidentemente, en una identidad, puesto que al formar el sistema (5.50) ya se exigió que a lo largo de una característica se cumpla que $dz=pdx+qdy$. A propósito, es fácil comprobar esto también directamente, si se toma en cuenta que, en virtud del sistema (5.50),

$$\frac{\partial x}{\partial t}=F_p,\ \frac{\partial y}{\partial t}=F_q,\ \frac{\partial z}{\partial t}=pF_p+qF_q$$

(hemos escrito $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$ en lugar de $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$ en (5.50), ya que s se considera fija).

Para que se satisfaga la ecuación (5.52) es necesario establecer ciertas limitaciones más a la elección de los valores iniciales $x_0(s)$, $y_0(s)$, $z_0(s)$, $p_0(s)$ y $q_0(s)$. En efecto, designemos

$$p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}=U \tag{5.54}$$

y demostremos que $U\equiv 0$, si el valor inicial es $U|_{t=0}=0$, de donde se deducirá que si las funciones iniciales

$$x_0(s),\ y_0(s),\ z_0(s),\ p_0(s),\ q_0(s)$$

se toman de manera que

$$p_0(s)\,x_0'(s)+q_0(s)\,y_0'(s)-z_0'(s)=0,$$

entonces será $U\equiv 0$ para todas las t.

Derivando (5.54) con respecto a t, se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+p\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}+q\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s}-\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}.$$

Tomando en cuenta el resultado de la derivación de la identidad (5.53) con respecto a s:

$$\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+p\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+q\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}-\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=0,$$

tendremos

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t},$$

o bien, debido a la ecuación (5.50),

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-(F_x+pF_z)\frac{\partial x}{\partial s}-(F_y+qF_z)\frac{\partial y}{\partial s}-F_p\frac{\partial p}{\partial s}-F_q\frac{\partial q}{\partial s}=$$
$$=-\left(F_x\frac{\partial x}{\partial s}+F_y\frac{\partial y}{\partial s}+F_z\frac{\partial z}{\partial s}+F_p\frac{\partial p}{\partial s}+F_q\frac{\partial q}{\partial s}\right)-$$
$$-F_z\left(p\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial z}{\partial s}\right)=-\frac{\partial}{\partial s}\{F\}-F_zU=-F_zU,$$

puesto que $F\equiv 0$ y, por consiguiente, la derivada parcial total $\frac{\partial}{\partial s}\{F\}\equiv 0$. De la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-F_zU \qquad (5.55)$$

se halla que $U=U_0e^{-\int_0^t F_z dt}$. Por lo tanto, si $U_0=0$, entonces $U\equiv 0$, lo cual, dicho sea de paso, también se deduce de la unicidad de la solución $U\equiv 0$ de la ecuación lineal (5.55) que satisface la condición $U|_{t=0}=0$.

De este modo, al integrar la ecuación

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0 \qquad (5.45)$$

con las condiciones iniciales $x_0=x_0(s)$, $y_0=y_0(s)$ y $z_0=z_0(s)$, por el método de Cauchy, deben determinarse las funciones $p_0=p_0(s)$ y $q_0=q_0(s)$ de las ecuaciones

$$F(x_0(s),\ y_0(s),\ z_0(s),\ p_0(s),\ q_0(s))=0$$

y

$$p_0(s)\,x_0'(s)+q_0(s)\,y_0'(s)-z_0'(s)=0$$

y luego integrar el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{pF_p+qF_q}=-\frac{dp}{F_x+pF_z}=-\frac{dq}{F_y+qF_z}=dt \qquad (5.50)$$

con las condiciones iniciales: para $t=0$ debe ser

$$x=x_0(s),\ y=y_0(s),\ z=z_0(s),\ p=p_0(s),\ q=q_0(s).$$

Las tres funciones

$$x=x(t,\ s),\ y=y(t,\ s),\ z=z(t,\ s)$$

de la solución del sistema (5.50) dan en forma paramétrica la ecuación de la superficie integral buscada de la ecuación (5.45).

Todo lo que acabamos de exponer se generaliza fácilmente para las ecuaciones no lineales en derivadas parciales con un número arbitrario de variables independientes

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,z,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)=0, \qquad (5.56)$$

donde

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Se exige determinar la superficie integral n-dimensional $z=z(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ de la ecuación (5.56) que pase por una superficie $(n-1)$-dimensional dada:

$$\begin{gathered} x_{i0}=x_{i0}(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1})\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ z_0=z_0(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}). \end{gathered} \qquad (5.57)$$

Supongamos por ahora que son conocidos los valores iniciales de las funciones

$$p_{i0}=p_{i0}(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1})\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad (5.58)$$

entonces, integrando el sistema auxiliar de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}}=\frac{dx_2}{F_{p_2}}=\ldots=\frac{dx_n}{F_{p_n}}=\frac{dz}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_iF_{p_i}}=$$

$$=-\frac{dp_1}{F_{x_1}+p_1F_z}=\ldots=-\frac{dp_n}{F_{x_n}+p_nF_z}=dt \qquad (5.59)$$

con condiciones iniciales (5.57) y (5.58), se obtiene

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(t,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}),\\ z&=z(t,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}),\\ p_i&=p_i(t,\ s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_{n-1}), \end{aligned}\right\}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (5.60)$$

Para $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ fijas, las ecuaciones (5.60) determinan en el espacio con coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ ciertas curvas, llamadas *características*. Para cada punto de éstas están determinados además los números $p_i = p_i(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$, que determinan la dirección de ciertos planos

$$Z-z=\sum_{i=1}^{n} p_i(X_i-x_i). \tag{5.61}$$

Las características, conjuntamente con los planos (5.61), forman las llamadas *bandas características*.

Al variar los parámetros $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ se obtiene una familia, que depende de $n-1$ parámetros, de características

$$x_i=x_i(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \quad z=z(t, s_1, \ldots, s_{n-1}),$$

que pasan por la superficie $(n-1)$-dimensional dada (5.57).

Demostremos que para una elección determinada de las funciones

$$p_{i0}=p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

los puntos pertenecientes a las características de la familia (5.60) forman la superficie integral n-dimensional buscada. Por lo tanto, hay que demostrar que para una elección determinada de las funciones $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$, será:

1) $F(x_1(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, x_n(t, s_1, \ldots, s_{n-1}),$
$z(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), p_1(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, p_n(t, s_1, \ldots, s_{n-1}))\equiv 0,$

2) $p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ o, lo que es lo mismo,

$$dz=\sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i.$$

No es difícil comprobar que la función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es primera integral del sistema de ecuaciones (5.59). En efecto, a lo largo de las curvas integrales del sistema (5.59) es

$$\frac{d}{dt}F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)\equiv$$
$$\equiv\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}\frac{dx_i}{dt}+F_z\frac{dz}{dt}+\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\frac{dp_i}{dt}\equiv$$
$$\equiv\sum_{i=1}^{n} F_{x_i}F_{p_i}+F_z\sum_{i=1}^{n} p_iF_{p_i}-\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(F_{x_i}+p_iF_z)\equiv 0$$

y, por lo tanto, a lo largo de dichas curvas será

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)=c,$$

donde c es una constante igual a $F(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, z_0, p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0})$.

Para que las funciones (5.60) satisfagan la ecuación (5.56) a lo largo de las curvas integrales del sistema (5.59), hay que escoger los valores iniciales $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ de manera que

$$F(x_{10}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, x_{n0}(s_1, \ldots, s_{n-1}), z_0(s_1, \ldots, s_{n-1}),$$
$$p_{10}(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, p_{n0}(s_1, \ldots, s_{n-1})) = 0.$$

Falta comprobar que $dz = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$, o bien

$$\frac{\partial z}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial s_j} ds_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial s_j} ds_j \right).$$

Esta identidad es equivalente a las siguientes:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{dx_i}{dt} = 0 \tag{5.62}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{5.63}$$

La validez de la identidad (5.62) es evidente, si se toma en cuenta que, en virtud del sistema (5.59),

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} \quad \text{y} \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = F_{p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(en lugar de $\frac{dz}{dt}$ y $\frac{dx_i}{dt}$ escribimos las derivadas parciales, puesto que en el sistema (5.59) todas las s_i se suponían fijas).

Para demostrar las identidadas (5.63), válidas sólo para una determinada elección de las condiciones iniciales $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$, designemos:

$$U_j = \frac{\partial z}{\partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Derivando U_j con respecto a t, se obtiene

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t \, \partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \, \partial s_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s_j}. \tag{5.64}$$

Tomando en cuenta el resultado de la derivación de la identidad (5.62) con respecto a s_j,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}\equiv 0,$$

se puede escribir la ecuación (5.64) en la forma

$$\frac{\partial U_j}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial s_j}\,.$$

Utilizando el sistema (5.59), se obtiene

$$\frac{\partial U_j}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}F_{p_i}+\sum_{i=1}^{n}(F_{x_i}+p_iF_z)\frac{\partial x_i}{\partial s_j}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s_j}+\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial s_j}\right)+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s_j}-\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j}\right)=$$

$$-\frac{\partial}{\partial s_j}\{F\}-F_zU_j.$$

La derivada parcial total es $\frac{\partial}{\partial s_j}\{F\}=0$, ya que $F=0$ y, por lo tanto, las funciones U_j son soluciones de las ecuaciones lineales homogéneas $\frac{\partial U_j}{\partial t}\quad -F_zU_j$ que tienen como solución única $U_j\equiv 0$, si $U_j|_{t=0}=0$. Por consiguiente, si los valores iniciales $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ se toman de modo que $U_j|_{t=0}=0$, o bien $\left(\frac{\partial z}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j}\right)_{t=0}=0$ $(j=1, 2, \ldots, n-1)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s_j}-\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial x_i}{\partial s_j}\equiv 0\quad (j=1, 2, \ldots, n-1)$$

y, por lo tanto, en la superficie (5.60) será $dz=\sum_{i=1}^{n}p_i\,dx_i$, o sea, $p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

De este modo, para hallar la superficie integral de la ecuación $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0$ que pase por la superficie $(n-1)$-dimensional

$$x_{i0}=x_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})\quad (i=1, 2, \ldots, n),$$
$$z_0=z_0(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}),$$

hay que determinar los valores iniciales $p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$

a partir de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} F(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, z_0, p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0}) = 0, \\ \dfrac{\partial z_0}{\partial s_j} - \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i0} \dfrac{\partial x_{i0}}{\partial s_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \end{array}\right\} \qquad (5.65)$$

después de lo cual, integrando el sistema (5.59) (pág. 278) con las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x_{i0} = x_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ z_0 = z_0(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \\ p_{i0} = p_{i0}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

se obtiene:

$$x_i = x_i(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (5.66)$$

$$z = z(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}), \qquad (5.67)$$

$$p_i = p_i(t, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(5.66) y (5.67) son las ecuaciones paramétricas de la superficie integral buscada.

Observación. Hemos supuesto que el sistema de ecuaciones (5.65) es resoluble con respecto a p_{i0}, y también que el sistema (5.59) satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

Ejemplo 1. Hallar la superficie integral de la ecuación $z = pq$ que pase por la recta $x = 1$, $z = y$.

Escribamos la ecuación de la recta $x = 1$, $z = y$ en forma paramétrica $x_0 = 1$, $y_0 = s$, $z_0 = s$. Determinemos $p_0(s)$ y $q_0(s)$ de las ecuaciones (5.65): $s = p_0 q_0$, $1 - q_0 = 0$, de donde $p_0 = s$, $q_0 = 1$. Integrando el sistema (5.59) se obtiene:

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = dt,$$

$$p = c_1 e^t, \; q = c_2 e^t, \; x = c_2 e^t + c_3, \; y = c_1 e^t + c_4, \; z = c_1 c_2 e^{2t} + c_5.$$

Tomando en cuenta que para $t = 0$ es

$$x = 1, \; y = s, \; z = s, \; p = s, \; q = 1,$$

se obtiene

$$p = se^t, \; q = e^t, \; x = e^t, \; y = se^t, \; z = se^{2t}.$$

Por lo tanto, la superficie integral buscada es

$$x = e^t, \; y = se^t, \; z = se^{2t}, \text{ o bien } z = xy.$$

Ejemplo 2. Integrar la ecuación $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2$ con la condición de que para $x = 0$ sea $z = y$, o en forma paramétrica $x_0 = 0$, $y_0 = s$, $z_0 = s$.

Se determinan $p_0(s)$ y $q_0(s)$:

$$p_0^2 + q_0^2 = 2, \; 1 - q_0 = 0,$$

de donde $q_0 = 1$, $p_0 = \pm 1$.

Integrando el sistema de ecuaciones (5.59):

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{4} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = dt,$$

se obtiene

$$p=c_1,\ q=c_2,\ x=2c_1t+c_3,\ y=2c_2t+c_4,\ z=4t+c_5;$$

utilizando las condiciones iniciales $p_0=\pm 1$, $q_0=1$, $x_0=0$, $y_0=s$, $z_0=s$, se obtiene $p=\pm 1$, $q=1$, $x=\mp 2t$, $y=2t+s$, $z=4t+s$. Las tres últimas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la superficie integral buscada. Eliminando los parámetros t y s, se obtiene $z=y\pm x$.

En los problemas de la mecánica con frecuencia hay que resolver el problema de Cauchy para la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t}+H(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)=0, \tag{5.68}$$

donde $p_i=\frac{\partial v}{\partial x_i}$, que es un caso particular de la ecuación (5.56) (pág. 278). El método de Cauchy—que aplicado a la ecuación (5.68) es llamado comúnmente *primer método de Jacobi*—nos conduce al sistema de ecuaciones

$$dt=\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}=\ldots=\frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}=-\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}}=$$

$$=-\frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}}=\ldots=-\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}=\frac{dv}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial v}{\partial t}},$$

de donde

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{5.69}$$

y

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial v}{\partial t},$$

o bien

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H. \tag{5.70}$$

El sistema de $2n$ ecuaciones (5.69) no contiene v y puede integrarse independientemente de la ecuación (5.70). Después de esto, de la ecuación (5.70) la función v se halla por cuadratura. En esto consiste la peculiaridad de la aplicación del método de Cauchy a la ecuación (5.68). Además, en el caso considerado no hay necesidad de introducir un parámetro auxiliar en el sistema (5.50), pues este papel lo puede desempeñar con éxito la variable independiente t.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 5

1. $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$

3. $x\dfrac{\partial z}{\partial y}=z.$

4. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

5. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$ para $x=2$, $z=y$.

6. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ para $y=1$, $z=3x$.

7. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ para $x=0$, $z=y^3$.

8. Hallar las superficies ortogonales a las superficies de la familia $z=axy$.

9. Hallar las superficies ortogonales a las superficies de la familia $xyz=a$.

10. $\dfrac{x}{3}\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{y}{5}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-5.$

11. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

12. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}+3z\dfrac{\partial u}{\partial z}=4u.$

13. $\dfrac{\partial^2 z(x,\ y)}{\partial x^2}=0.$

14. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ para $x=1$, $z=y^2$.

15. ¿Es integrable la ecuación

$$(y^2+z^2-x^2)\,dx+xz\,dy+xy\,dz=0$$

mediante una sola relación?

16. Integrar mediante una sola relación la ecuación

$$(y+3z^2)\,dx+(x+y)\,dy+6xz\,dz=0.$$

17. Hallar la integral completa de la ecuación

$$pq=x^2y^2.$$

18. Hallar la integral completa de la ecuación

$$z=px+qy+p^3q^3.$$

19. Hallar la integral completa de la ecuación

$$pq=9z^2.$$

20. Hallar la integral completa de la ecuación

$$p=\operatorname{sen} q.$$

21. Hallar las superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo vectorial

$$\boldsymbol{F}=(2xy-3yz)\,\boldsymbol{i}+(x^2-3xz)\,\boldsymbol{j}-2xy\,\boldsymbol{k}.$$

22. Hallar la familia de superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo vectorial

$$\boldsymbol{F}=(2x-y)\,\boldsymbol{i}+(3y-z)\,\boldsymbol{j}+(x-2y)\,\boldsymbol{k}.$$

23. Hallar las líneas vectoriales, las superficies vectoriales y las superficies ortogonales a las líneas vectoriales del campo

$$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}.$$

24. $z=pq+1$ para $y=2$, $z=2x+1$.

25. $2z=pq-3xy$ para $x=5$, $z=15y$.

26. $4z=p^2+q^2$ para $x=0$, $z=y^2$.

Parte II

Cálculo variacional

Introducción

Conjuntamente con los problemas en que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función $z=f(x)$, con frecuencia surge en los problemas físicos la necesidad de hallar los valores máximos o mínimos de un género especial de magnitudes, llamadas funcionales.

Se llaman *funcionales* a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o de varias funciones.

Por ejemplo, la longitud l del arco de una curva plana (o alabeada) que une dos puntos dados $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, es una funcional (véase la fig. A). La magnitud l puede calcularse si se da la ecuación de la curva, $y=y(x)$; entonces

$$l[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

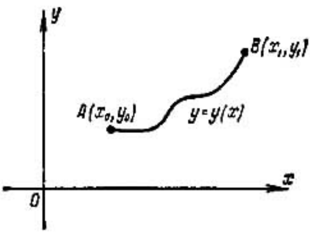

Fig. A.

El área S de cierta superficie es también una funcional, puesto que se determina escogiendo la superficie, es decir, escogiendo la función $z(x, y)$ que figura en la ecuación $z=z(x, y)$ de la superficie. Como es sabido,

$$S[z(x, y)]=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

donde D es la proyección de la superficie en el plano Oxy.

Los momentos de inercia, los momentos estáticos, las coordenadas del centro de gravedad de cierta curva o superficie homogénea, son también funcionales, puesto que sus valores se determinan eligiendo la curva o la superficie, es decir, las funciones contenidas en la ecuación de dicha curva o superficie.

En todos estos ejemplos se tiene una dependencia que es característica para las funcionales: a una función (escalar o vectorial) le corresponde un número, mientras que al dar una función $z=f(x)$ a un número le correspondía otro número.

El *cálculo variacional* estudia los métodos que permiten hallar los valores máximos y mínimos de los funcionales. Los problemas en que se exige investigar el máximo o el mínimo de una funcional, se denominan *problemas variacionales*.

Muchas leyes de la mecánica y la física se reducen a la afirmación de que cierta funcional debe alcanzar su mínimo o su máximo en el proceso considerado. En este enunciado, dichas leyes reciben el nombre de *principios variacionales* de la mecánica o de la física. A dichos principios variacionales, o a sus corolarios más simples, pertenecen: el principio de la acción mínima, la ley de conservación de la energía, la ley de conservación del impulso, la ley de conservación de la cantidad de movimiento, la ley de conservación del momento de la cantidad de movimiento, diferentes principios variacionales de la teoría clásica y de la teoría relativista del campo, el principio de Fermat en óptica, el principio de Castiglianos en la teoría de la elasticidad, etc.

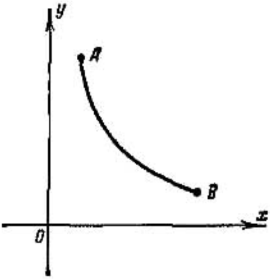

Fig. B.

El cálculo variacional comenzó a desarrollarse en 1696, llegando a ser una disciplina matemática independiente con métodos propios de investigación después de los trabajos fundamentales del miembro activo de la Academia de Ciencias de San Petersburgo L. Euler (1707—1783), quien puede considerarse con pleno derecho el fundador del cálculo variacional.

Los tres problemas siguientes ejercieron gran influencia en el desarrollo del cálculo variacional:

Problema de la braquistócrona. En 1696 Iohanis Bernoulli publicó una carta en la que propuso el problema sobre las líneas de deslizamiento más rápido, o *braquistócronas*, a la atención de los matemáticos. En este problema se exige determinar la línea que une dos puntos dados A y B, que no pertenecen a una misma recta vertical, que posea la propiedad de que un punto material se deslice por dicha línea desde el punto A hasta el B en el menor tiempo posible (fig. B).

Es fácil ver que la línea de deslizamiento más rápido no será la recta que une los puntos A y B, a pesar de que ésta sea la distancia más corta entre dichos puntos, ya que al moverse por esta recta la velocidad aumentará en forma relativamente lenta; si, en cambio, se toma una curva que baje más bruscamente cerca del punto A, entonces, aunque el camino se alarga, gran parte del mismo será recorrido con mayor velocidad. La solución del problema de la braquistócrona fue dada por I. Bernoulli, J. Bernoulli, G. Leibnitz, I. Newton y G. L'Hôpital. La línea de deslizamiento más rápido resultó ser la cicloide (véanse las págs. 311—312).

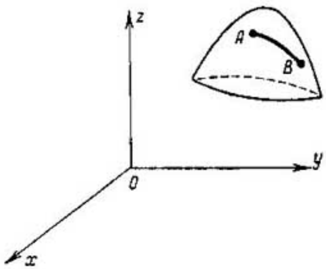

Fig. C.

Problema de las líneas geodésicas. Se pide determinar la línea de menor longitud que una dos puntos dados en cierta superficie $\varphi(x, y, z)=0$ (fig. C). Estas líneas son llamadas líneas *geodésicas*. Se tiene aquí un problema variacional típico sobre el llamado *extremo fijo* o *condicional*. Se pide hallar el mínimo de la funcional

$$l=\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,$$

y además las funciones $y(x)$ y $z(x)$ deben someterse a la condición $\varphi(x, y, z)=0$. Este problema fue resuelto en 1698 por J. Bernoulli, pero el método general para resolver problemas de este tipo fue dado recién los trabajos de L. Euler y J. Lagrange.

Problema isoperimétrico. Se pide hallar una línea cerrada de longitud dada l que delimite el área máxima S. Esta línea, como se sabía ya en la Grecia antigua, es la circunferencia En este problema se exige hallar el extremo de la funcional S con una condición complementaria peculiar: la longitud de la curva debe ser constante, es decir, la funcional

$$l=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

se mantiene constante. Condiciones de este tipo se llaman isoperimétricas. Los métodos generales de resolución de problemas con condiciones isoperimétricas fueron desarrollados por L. Euler.

Más adelante se exponen los métodos de resolución de diferentes problemas variacionales, investigándose sobre todo los extremos de las siguientes funcionales, que se encuentran con frecuencia en las aplicaciones:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x))\,dx,$$

$$\iint_D F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

en las cuales las funciones F están dadas, y las funciones $y(x)$, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, $z(x, y)$ son los argumentos de las funcionales.