CAPITULO 6

Método de las variaciones en problemas con fronteras fijas

§ 1. LA VARIACION Y SUS PROPIEDADES

Los métodos de resolución de problemas variacionales, es decir, problemas sobre la investigación de los máximos y mínimos de las funcionales, se asemejan mucho a los métodos de investigación de los máximos y mínimos de las funciones. Por esto es conveniente recordar brevemente la teoría del máximo y el mínimo de las funciones, e introducir en forma paralela conceptos análogos y demostrar teoremas semejantes para las funcionales.

1. La variable z se llama *función* de la variable x, lo cual se designa así: $z=f(x)$, si a cada valor de x de cierta región de variación de x le corresponde un valor de z, es decir, tiene lugar la correspondencia: al número x le corresponde el número z.

Análogamente se definen también las funciones de varias variables.

1. La variable v se llama *funcional* dependiente de la función $y(x)$, lo cual se designa así: $v=v[y(x)]$, si a cada función $y(x)$ de cierta clase de funciones $y(x)$ le corresponde un valor v, es decir, tiene lugar la correspondencia: a la función $y(x)$ le corresponde el número v.

Análogamente se definen también las funcionales dependientes de varias funciones, y las funcionales dependientes de funciones de varias variables.

2. Se llama *incremento* Δx del argumento x de la función $f(x)$ a la diferencia entre dos valores de esta variable: $\Delta x=x-x_1$. Si x es la variable independiente, la diferencial de x coincide con su incremento, $dx=\Delta x$.

2. Se llama *incremento* o *variación* δy del argumento $y(x)$ de la funcional $v[y(x)]$ a la diferencia entre dos funciones: $\delta y=y(x)-y_1(x)$. Aquí se supone que $y(x)$ varía arbitrariamente en cierta clase de funciones.

3. La función $f(x)$ se llama *continua*, si a una pequeña variación de x le corresponde una pequeña variación de la función $f(x)$.

3. La funcional $v[y(x)]$ se llama *continua*, si a una pequeña variación de $y(x)$ le corresponde una pequeña variación de ésta.

La última definición debe ser precisada y aclarada, puesto que de inmediato surge la pregunta: ¿qué variaciones de la función $y(x)$, que es el argumento de la funcional, se denominan pequeñas? o, lo que es lo mismo, ¿qué curvas $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$ se consideran poco diferentes o cercanas?

Las funciones $y(x)$ e $y_1(x)$ se pueden considerar cercanas en el caso de que el módulo de su diferencia $y(x)-y_1(x)$ sea pequeño para todos los valores de x para los cuales se dan las funciones $y(x)$ e $y_1(x)$, es decir, considerar curvas cercanas a aquéllas cuyas ordenadas sean próximas.

Sin embargo, bajo esta definición de proximidad de las curvas, las funcionales de la forma

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx,$$

que se encuentran a menudo en las aplicaciones, serán continuas sólo en casos excepcionales, debido a que la función subintegral contiene al argumento y'. Por eso, en muchos casos es más natural considerar cercanas sólo las curvas cuyas ordenadas y cuyas direcciones de las tangentes en los puntos correspondientes sean próximas, o sea, exigir que para las curvas cercanas sea pequeño no sólo el módulo de la diferencia $y(x)-y_1(x)$, sino también el de la diferencia $y'(x)-y_1'(x)$.

A veces también es necesario considerar cercanas sólo a las funciones para las que sea pequeño el módulo de cada diferencia:

$$y(x)-y_1(x),\quad y'(x)-y_1'(x),$$
$$y''(x)-y_1''(x),\ \ldots,\ y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x).$$

Por esto se hace necesario introducir las siguientes definiciones de proximidad de las curvas $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$.

Las curvas $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$ son cercanas, en el sentido de proximidad de orden nulo, si el módulo de la diferencia $y(x)-y_1(x)$ es pequeño.

Las curvas $y=y(x)$ e $y=y_1(x)$ son cercanas, en el sentido de proximidad de primer orden, si los módulos de las diferencias $y(x)-y_1(x)$ e $y'(x)-y_1'(x)$ son pequeños.

Las curvas

$$y=y(x)\quad e\quad y=y_1(x)$$

son cercanas, en el sentido de proximidad de k-ésimo orden, si los módulos de las diferencias

$$y(x)-y_1(x),$$
$$y'(x)-y_1'(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$$

son pequeños.

En la fig. 6.1 se representan curvas cercanas en el sentido de proximidad de orden nulo que no lo son en el sentido de proximidad de primer orden, puesto que sus coordenadas son próximas,

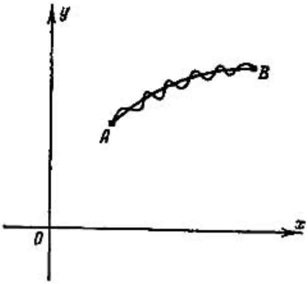

Fig. 6.1

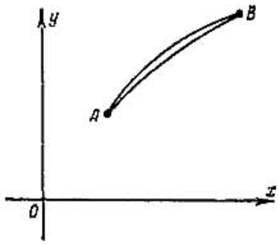

Fig. 6.2

y no lo es la dirección de las tangentes. En la fig. 6.2 están representadas curvas cercanas en el sentido de proximidad de primer orden.

De estas definiciones se deduce que si las curvas son cercanas en el sentido de proximidad de k-ésimo orden, entonces con mayor razón lo serán en el sentido de proximidad de cualquier orden menor.

Ahora podemos precisar el concepto de continuidad de una funcional.

3'. La función $f(x)$ es *continua* para $x=x_0$, si para todo ε positivo existe un $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ cuando $|x-x_0|<\delta$.

3'. La funcional $v[y(x)]$ es *continua* para $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de k-ésimo orden, si para todo ε positivo existe un $\delta>0$ tal que

Aquí se sobreentiende que x toma valores para los cuales la función $f(x)$ está definida.

$$|v[y(x)]-v[y_0(x)]|<\varepsilon$$

para

$$|y(x)-y_0(x)|<\delta,$$
$$|y'(x)-y_0'(x)|<\delta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\delta.$$

Aquí se sobreentiende que la función $y(x)$ se toma de la clase de funciones en la cual la funcional $v[y(x)]$ está definida.

Se hubiera podido definir el concepto de distancia $\rho(y_1, y_2)$ entre las curvas $y=y_1(x)$ e $y=y_2(x)$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$ y considerar entonces curvas cercanas a las curvas cuya distancia sea pequeña.

Si se considera que

$$\rho(y_1, y_2)=\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1(x)-y_2(x)|,$$

o sea, si se introduce la métrica del espacio C_0 (véase la pág. 52), se llega al concepto de proximidad de orden nulo. Si consideramos que

$$\rho(y_1, y_2)=\sum_{p=1}^{k} \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |y_1^{(p)}(x)-y_2^{(p)}(x)|$$

(se supone que y_1 e y_2 tienen derivadas continuas hasta de k-ésimo orden inclusive), la proximidad de las curvas es de k-ésimo orden.

4. Se llama *función lineal* a la función $l(x)$ que satisface las siguientes condiciones:

$$l(cx)=cl(x),$$

donde c es una constante arbitraria, y

$$l(x_1+x_2)=l(x_1)+l(x_2).$$

La función lineal de una variable tiene la forma

$$l(x)=kx,$$

donde k es una constante.

4. Se *llama funcional lineal* a la funcional $L[y(x)]$ que satisface las siguientes condiciones:

$$L[cy(x)]=cL[y(x)],$$

donde c es una constante arbitraria, y

$$L[y_1(x)+y_2(x)]=$$
$$=L[y_1(x)]+L[y_2(x)].$$

Un ejemplo de funcional lineal es

$$L[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} (p(x)y+q(x)y')\,dx.$$

5. Si el incremento de la función

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

puede representarse en la forma

$$\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\cdot\Delta x,$$

donde $A(x)$ no depende de Δx y $\beta(x, \Delta x) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, entonces la función se llama *derivable*, y la parte $A(x)\Delta x$ del incremento, lineal con respecto a Δx, se llama *diferencial* de la función y se denota por df. Dividiendo entre Δx y pasando al límite para $\Delta x \to 0$, se obtiene que $A(x) = f'(x)$ y, por lo tanto,

$$df = f'(x)\Delta x.$$

5. Si el incremento de la funcional

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$$

puede representarse en la forma

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\max|\delta y|,$$

donde $L[y(x), \delta y]$ es una funcional lineal con respecto a δy, $\max|\delta y|$ es el valor máximo de $|\delta y|$ y $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ cuando $\max|\delta y| \to 0$, entonces la parte del incremento lineal con respecto a δy, es decir, $L[y(x), \delta y]$, se llama *variación de la funcional* y se designa por δv.

De este modo, la *variación de la funcional es la parte principal del incremento, lineal con respecto a* δy.

Al investigar las funcionales la variación juega el mismo papel que la diferencial en el estudio de las funciones.

Se puede dar también otra definición casi equivalente de diferencial de una función y de variación de una funcional. Consideremos el valor de la función $f(x+\alpha\Delta x)$ para x y Δx fijos y para valores variables del parámetro α. Para $\alpha = 1$, se obtiene el valor incrementado $f(x+\Delta x)$ de la función; para $\alpha = 0$, se tendrá el valor original $f(x)$ de ésta. No es difícil comprobar que la derivada de $f(x+\alpha\Delta x)$ con respecto a α es igual, para $\alpha = 0$, a la diferencial de la función $f(x)$ en el punto x. En efecto, según la regla de derivación de una función compuesta,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0} = f'(x+\alpha\Delta x)\Delta x\Big|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x = df(x).$$

En forma completamente análoga, para la función de varias variables

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se puede obtener la diferencial derivando

$$f(x_1+\alpha\Delta x_1, x_2+\alpha\Delta x_2, \ldots, x_n+\alpha\Delta x_n)$$

con respecto a α, y haciendo después $\alpha = 0$. En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x_1+\alpha\Delta x_1, x_2+\alpha\Delta x_2, \ldots, x_n+\alpha\Delta x_n)\Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = df.$$

Para las funcionales de forma $v[y(x)]$ o más complejas, dependientes de varias funciones o de funciones de varias variables también se puede definir la variación como la derivada de la funcional $v[y(x)+\alpha\delta y]$ con respecto a α, para $\alpha=0$. En efecto, si la funcional posee variación en el sentido de parte lineal principal del incremento, entonces éste tiene la forma

$$\Delta v = v[y(x)+\alpha\delta y]-v[y(x)] = L(y,\ \alpha\delta y)+\beta(y,\ \alpha\delta y)|\alpha|\max|\delta y|.$$

La derivada de $v[y+\alpha\delta y]$ con respecto a α es igual, para $\alpha=0$, a

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\ \alpha\delta y)+\beta[y(x),\ \alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L(y,\ \alpha\delta y)}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\ \alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=L(y,\ \delta y),$$

puesto que, en virtud de la linealidad,

$$L(y,\ \alpha\delta y)=\alpha L(y,\ \delta y),$$

y

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\ \alpha\delta y]|\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\beta[y(x),\ \alpha\delta y]\max|\delta y|=0,$$

debido a que $\beta[y(x),\ \alpha\delta y]\to 0$ para $\alpha\to 0$. De esta manera, si existe variación en el sentido antedicho, existirá también variación en el sentido de derivada con respecto al parámetro para el valor inicial del mismo, y ambas definiciones son equivalentes.

La segunda definición es un poco más amplia que la primera, puesto que existen ejemplos de funcionales de cuyo incremento no se puede extraer la parte lineal principal, pero existe la variación en el sentido de la segunda definición.

6. La *diferencial* de la función $f(x)$ es igual a $$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\big|_{\alpha=0}.$$	6. La *variación* de la funcional $v[y(x)]$ es igual a $$\frac{\partial}{\partial\alpha}v[y(x)+\alpha\delta y]\big|_{\alpha=0}.$$

Definición. *La funcional $v[y(x)]$ tiene un máximo en la curva $y=y_0(x)$, si su valor en cualquier curva próxima a $y=y_0(x)$ no es mayor que $v[y_0(x)]$, es decir,* $\Delta v=v[y(x)]-v[y_0(x)]\leqslant 0$.

Si $\Delta v\leqslant 0$ y además $\Delta v=0$ sólo cuando $y(x)=y_0(x)$, entonces se dice que en la curva $y=y_0(x)$ se tiene un *máximo estricto*. Análogamente se define la curva $y=y_0(x)$ en la que hay un *mínimo*. En este caso $\Delta v\geqslant 0$ para todas las curvas cercanas a la curva $y=y_0(x)$.

7. **Teorema.** *Si la función derivable $f(x)$ alcanza su máximo o su mínimo en un punto interior $x=x_0$ de la región de definición de la función, entonces en este punto será*

$$df=0.$$

7. **Teorema.** *Si la funcional $v[y(x)]$, que posee variación, alcanza su máximo o su mínimo para $y=y_0(x)$, siendo $y_0(x)$ un punto interior de la región de definición de la funcional, entonces para $y=y_0(x)$ será*

$$\delta v=0.$$

Demostración del teorema para las funcionales. Para $y_0(x)$ y δy fijos, $v[y_0(x)+\alpha\delta y]=\varphi(\alpha)$ es una función de α, la cual, por hipótesis, tiene en $\alpha=0$ un máximo o un mínimo; por consiguiente, la derivada

$$\varphi'(0)=0^{*}), \text{ o bien } \frac{\partial}{\partial\alpha}v[y_0(x)+\alpha\delta y]\,|_{\alpha=0}=0,$$

o sea, $\delta v=0$. De este modo, en las curvas en las que la funcional tiene un extremo, su variación es igual a cero.

El concepto de *extremo* de una funcional debe ser precisado. Al hablar del máximo o del mínimo, más exactamente, del máximo o del mínimo relativos, tuvimos en cuenta el mayor o el menor valor de la funcional sólo con respecto a los valores de ésta en las curvas cercanas. Pero, como fue indicado anteriormente, la proximidad de las curvas puede entenderse de diferentes maneras. Por esto, en la definición de máximo o de mínimo hay que señalar qué orden de proximidad se tiene en cuenta.

Si la funcional $v[y(x)]$ alcanza su máximo o su mínimo en la curva $y=y_0(x)$ con respecto a todas las curvas para las cuales el módulo de la diferencia $y(x)-y_0(x)$ es pequeño, es decir, con respecto a las curvas cercanas a $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de orden nulo, entonces el máximo o el mínimo se llama *fuerte*.

Si, en cambio, la funcional $v[y(x)]$ alcanza su máximo o su mínimo en la curva $y=y_0(x)$ sólo con respecto a las curvas $y=y(x)$ cercanas a $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de primer orden, o sea cercanas a $y=y_0(x)$ no sólo por sus ordenadas, sino también por las direcciones de sus tangentes, el máximo o el mínimo se denomina *débil*.

Es evidente que si en la curva $y=y_0(x)$ se tiene un máximo (o mínimo) fuerte, entonces se tiene también uno débil, puesto que si la curva es cercana a $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de primer orden, lo será también en el sentido de proximidad de

*) α puede tomar tanto valores positivos como negativos en un entorno del punto $\alpha=0$, puesto que $y_0(x)$ es un punto interior de la región de definición de la funcional.

orden nulo. Sin embargo, es posible que en la curva $y=y_0(x)$ se alcance un máximo (mínimo) débil y al mismo tiempo no se alcance un máximo (mínimo) fuerte, o sea, que entre las curvas $y=y(x)$ cercanas a $y=y_0(x)$, tanto por sus ordenadas como por la dirección de sus tangentes, pueden no haber curvas para las cuales $v[y(x)] \geqslant v[y_0(x)]$ (en el caso de mínimo, $v[y(x)] \leqslant v[y_0(x)]$), y entre las curvas $y=y(x)$ cercanas sólo por sus ordenadas, pero ya no próximas por la dirección de sus tangentes, se pueden encontrar curvas para las cuales $v[y(x)] \geqslant v[y_0(x)]$ (en el caso de mínimo, $v[y(x)] \leqslant v[y_0(x)]$). La diferencia entre un extremo fuerte y uno débil no tendrá un significado sustancial para la deducción de la condición necesaria fundamental de extremo, pero ésta será muy importante en el capítulo 8, al estudiar las condiciones suficientes de extremo.

Obsérvese, además, que si en la curva $y=y_0(x)$ se tiene un extremo, entonces no sólo $\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y_0(x)+\alpha\delta y]|_{\alpha=0}=0$, sino también $\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0}=0$, donde $y(x, \alpha)$ es una familia cualquiera de curvas admisibles; además, para $\alpha=0$ y para $\alpha=1$ la función $y(x, \alpha)$ debe transformarse respectivamente en $y_0(x)$ e $y_0(x)+\delta y$. En efecto, $v[y(x, \alpha)]$ es función de α, ya que al dar α se determina una curva de la familia $y=y(x, \alpha)$, por lo que se determina también el valor de la funcional $v[y(x, \alpha)]$.

Esta función, por hipótesis, alcanza su extremo cuando $\alpha=0$; por lo tanto, su derivada se anula para $\alpha=0$*).

De este modo, $\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y(x, \alpha)]|_{\alpha=0}=0$; sin embargo, esta derivada, en general, ya no coincidirá con la variación de la funcional, pero se anulará—como acabamos de ver—simultáneamente con δv en las curvas que realizan el extremo de la funcional.

Todas las definiciones de este parágrafo y el teorema fundamental (pág. 297) se generalizan, casi sin modificaciones, a las funcionales dependientes de varias funciones desconocidas

$$v[y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)],$$

o dependientes de una o de algunas funciones de varias variables

$$v[z(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)],$$

$v[z_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), z_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$.
Por ejemplo, la variación δv de la funcional $v[z(x, y)]$ puede definirse como la parte lineal principal con respecto a δz del

---

*) Se presupone que α puede tomar valores cualesquiera cercanos a $\alpha=0$, y que existe $\left.\frac{\partial v[y(x, \alpha)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$.

incremento

$$\Delta v = v[z(x, y) + \delta z] - v[z(x, y)],$$

o como la derivada respecto al parámetro en el valor inicial del mismo

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y) + \alpha \delta z]|_{\alpha=0};$$

además, si para $z = z(x, y)$ la funcional v tiene un extremo, entonces para esta z la variación $\delta v = 0$, puesto que $v[z(x, y) + \alpha \delta z]$ es una función de α que tiene, por hipótesis, un extremo en $\alpha = 0$. En consecuencia, la derivada de esta función con respecto a α se anula para $\alpha = 0$, $\frac{\partial}{\partial \alpha} v[z(x, y) + \alpha \delta z]|_{\alpha=0} = 0$, o bien $\delta v = 0$.

§ 2. ECUACION DE EULER

Analicemos el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx, \tag{6.1}$$

si los puntos frontera de las curvas admisibles están fijos: $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$ (fig. 6.3). La función $F(x, y, y')$ se considerará derivable tres veces.

Ya sabemos que la condición necesaria para que haya un extremo es la anulación de la variación de la funcional. Mostremos ahora cómo se aplica este teorema fundamental a la funcional considerada; además, repetiremos el razonamiento anterior aplicado a la funcional (6.1). Supongamos que en la curva $y = y(x)$, derivable dos veces, se tiene un extremo (exigiendo sólo la existencia de derivadas de primer orden de las curvas admisibles, se puede demostrar por otro método que la curva, que realiza el extremo, posee también derivada segunda).

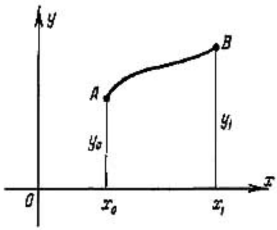

Fig. 6.3

Tomemos cierta curva admisible $y = \bar{y}(x)$ cercana a $y = y(x)$ e incluyamos $y = y(x)$ e $y = \bar{y}(x)$ en la familia monoparamétrica de curvas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x));$$

cuando $\alpha = 0$, se obtiene la curva $y = y(x)$; para $\alpha = 1$, se tiene

$y=\bar{y}(x)$ (fig. 6.4). Como ya es sabido, la diferencia $\bar{y}(x)-y(x)$ se llama variación de la función $y(x)$ y se designa por δy.

En los problemas variacionales la variación δy desempeña un papel análogo al del incremento de la variable independiente Δx en los problemas del estudio de los extremos de una función $f(x)$. La variación $\delta y=\bar{y}(x)-y(x)$ es una función de x. Esta función se puede derivar una o varias veces, siendo $(\delta y)'=\bar{y}'(x)-y'(x)=\delta y'$, es decir, la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada; análogamente

$$(\delta y)''=\bar{y}''(x)-y''(x)=\delta y'',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(\delta y)^{(k)}=\bar{y}^{(k)}(x)-y^{(k)}(x)=\delta y^{(k)}.$$

De este modo, consideremos la familia $y=y(x, \alpha)$, donde $y(x, \alpha)=y(x)+\alpha\delta y$, que contiene, para $\alpha=0$, la curva en la cual se alcanza el extremo, y para $\alpha=1$, cierta curva admisible cercana, llamada curva de comparación.

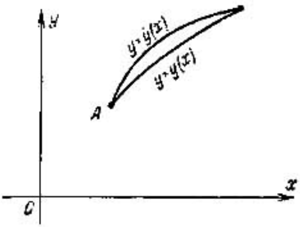

Fig. 6.4

Si consideramos los valores de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

sólo en las curvas de la familia $y=y(x, \alpha)$, la funcional se transforma en una función de α:

$$v[y(x, \alpha)]=\varphi(\alpha),$$

ya que el valor del parámetro α determina una curva de la familia $y=y(x, \alpha)$, determinando también con esto el valor de la funcional $v[y(x, \alpha)]$. Esta función $\varphi(\alpha)$ tiene un extremo en $\alpha=0$, puesto que para dicho valor se obtiene $y=y(x)$, teniendo la funcional, por hipótesis, un extremo con respecto a cualquier curva cercana admisible y, en particular, con respecto a las curvas cercanas de la familia $y=y(x, \alpha)$. La condición necesaria para que la función $\varphi(\alpha)$ tenga un extremo en $\alpha=0$, como es sabido, es la anulación de su derivada para $\alpha=0$:

$$\varphi'(0)=0.$$

Como

$$\varphi(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha))\,dx,$$

entonces

$$\varphi'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x,\ \alpha)+F_{y'}\frac{\partial}{\partial\alpha}y'(x,\ \alpha)\right]dx,$$

donde

$$F_y=\frac{\partial}{\partial y}F(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha)),$$
$$F_{y'}=\frac{\partial}{\partial y'}F(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha)),$$

o, puesto que

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y(x,\ \alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}[y(x)+\alpha\delta y]=\delta y$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}y'(x,\ \alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}[y'(x)+\alpha\delta y']=\delta y',$$

se obtiene

$$\varphi'(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha))\,\delta y+$$
$$+F_{y'}(x,\ y(x,\ \alpha),\ y'(x,\ \alpha))\,\delta y']\,dx;$$

$$\varphi'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,\ y(x),\ y'(x))\,\delta y+F_{y'}(x,\ y(x),\ y'(x))\,\delta y']\,dx.$$

Como ya hemos visto, $\varphi'(0)$ se llama variación de la funcional, y se designa por δv. La condición necesaria para que la funcional v tenga un extremo, consiste en la anulación de su variación: $\delta v=0$. Para la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,\ y,\ y')\,dx$$

esta condición tiene la forma

$$\int_{x_0}^{x_1}[F_y\,\delta y+F_{y'}\delta y']\,dx=0.$$

Integrando el segundo sumando por partes, y tomando en cuenta que $\delta y'=(\delta y)'$, obtenemos

$$\delta v=[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

Pero

$$\delta y\,|_{x=x_0}=\bar{y}(x_0)-y(x_0)=0 \quad \text{y} \quad \delta y\,|_{x=x_1}=\bar{y}(x_1)-y(x_1)=0,$$

en virtud de que todas las curvas admisibles en el problema simple considerado pasan por puntos frontera fijos y, por lo tanto,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

De este modo, la condición necesaria de extremo toma la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \, dx = 0, \tag{6.2}$$

donde el primer factor $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ es una función continua dada en la curva $y = y(x)$ que realiza el extremo, y el segundo factor δy, debido a la arbitrariedad en la elección de la curva de comparación $y = y(x)$, es una función arbitraria que satisface sólo ciertas condiciones muy generales, más exactamente: la función δy se anula en los puntos frontera $x = x_0$ y $x = x_1$, es continua y derivable una o varias veces, δy o bien δy y $\delta y'$ son pequeños en valor absoluto.

Para simplificar la condición (6.2) obtenida, aplicaremos el siguiente lema:

Lema fundamental del cálculo variacional. *Si para cada función continua $\eta(x)$ se tiene*

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0,$$

siendo $\Phi(x)$ una función continua en el segmento $[x_0, x_1]$, entonces

$$\Phi(x) \equiv 0$$

en dicho segmento.

Observación. La afirmación del lema y su demostración no varían si a la función $\eta(x)$ se le imponen las siguientes limitaciones: $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$; $\eta(x)$ tiene derivadas continuas hasta de orden p, $|\eta^{(s)}(x)| < \varepsilon$ $(s = 0, 1, \ldots, q; \ q \leqslant p)$.

Demostración. Suponiendo que en el punto $x = \bar{x}$ contenido en el segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, sea $\Phi(\bar{x}) \neq 0$, se llega a una contradicción. En efecto, de la continuidad de la función $\Phi(x)$ se deduce que si $\Phi(\bar{x}) \neq 0$, entonces $\Phi(x)$ conserva su signo en cierto entorno $(\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$ del punto $\bar{x}$. Pero entonces, tomando una función $\eta(x)$ que también conserve su signo en este entorno y sea igual a cero fuera del mismo (fig. 6.5), se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \Phi(x) \eta(x) dx \neq 0,$$

ya que el producto $\Phi(x)\eta(x)$ conserva su signo en el segmento $(\bar{x} \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$ y se anula fuera del mismo. De este modo, hemos llegado a una contradicción; por lo tanto, $\Phi(x) \equiv 0$. La función $\eta(x)$ puede escogerse, por ejemplo, así: $\eta(x) \equiv 0$ fuera del segmento $(\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$; $\eta(x) = k(x-\bar{x}_0)^{2n}(x-\bar{x}_1)^{2n}$ en el segmento $(\bar{x}_0 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1)$, donde n es un entero positivo, y k, un factor constante. Es evidente que la función $\eta(x)$ satisface las condiciones consideradas anteriormente: es continua, tiene derivadas continuas hasta de

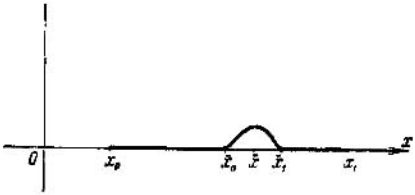

Fig. 6.5

orden $2n-1$, se anula en los puntos x_0 y x_1 y puede hacerse tan pequeña como se quiera en valor absoluto, conjuntamente con sus derivadas, disminuyendo el módulo del factor k.

Observación. En forma completamente análoga se puede demostrar que si la función $\Phi(x, y)$ es continua en la región D del plano (x, y) y se tiene que $\iint\limits_D \Phi(x, y)\eta(x, y)\,dx\,dy = 0$ para funciones $\eta(x, y)$ arbitrarias que satisfagan sólo ciertas condiciones generales (continuidad, derivabilidad una o varias veces, anulación en las fronteras de la región D, $|\eta| < \varepsilon$, $|\eta'_x| < \varepsilon$, $|\eta'_y| < \varepsilon$), entonces será $\Phi(x, y) \equiv 0$ en la región D. La función $\eta(x, y)$ al demostrar el lema fundamental se puede tomar, por ejemplo, así: $\eta(x, y) \equiv 0$ fuera de un entorno circular de radio suficientemente pequeño ε_1 del punto $(\bar{x}, \bar{y})$, en el cual $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$, y en dicho entorno la función $\eta(x, y) = k[(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 - \varepsilon_1^2]^{2n}$ (fig. 6.6). Un lema análogo se cumple también para las integrales múltiples.

Apliquemos ahora el lema fundamental para simplificar la condición necesaria (6.2), obtenida anteriormente, de extremo de la funcional (6.1),

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx = 0. \tag{6.2}$$

Todas las condiciones del lema se cumplen: en la curva que realiza el extremo, el factor $\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)$ es función continua, y la variación δy es una función arbitraria a la cual se han impuesto sólo limitaciones de carácter general, ya previstas en el lema fundamental. Por lo tanto, $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\equiv 0$ en la curva $y=y(x)$ que rea-

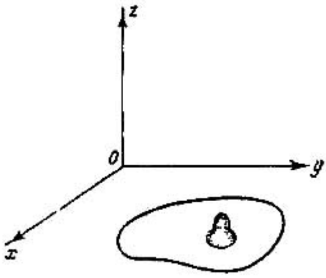

Fig 6.6

liza el extremo de la funcional considerada, es decir, $y=y(x)$ es solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

o bien, en forma desarrollada,

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0.$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de Euler* (ella fue publicada por primera vez por él en 1744). Las curvas integrales de la ecuación de Euler $y=y(x, C_1, C_2)$ se llaman *extremales*. Sólo en las extremales puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')\,dx.$$

Para hallar la curva que realice un extremo de la funcional (6.1) se integra la ecuación de Euler y se determinan las dos constantes arbitrarias, que figuran en la solución general de esta ecuación, de las condiciones de frontera $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$. Sólo en las extremales que satisfacen estas condiciones se puede realizar un extremo de la funcional. Sin embargo, para establecer si se realiza en realidad o no en ellas el extremo, y además si es un máximo o un mínimo, hay que aplicar las condiciones suficientes de extremo, expuestas en el capítulo 8.

Recordemos que el problema de frontera

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

no siempre tiene solución, y si la solución existe, puede no ser única (véase la pág. 162).

Obsérvese que en muchos problemas variacionales la existencia de la solución es evidente del sentido físico o geométrico del problema, y si la ecuación de Euler que satisface las condiciones de frontera es única, esta única extremal será la solución del problema variacional considerado.

Ejemplo 1. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y')^2-y^2]\,dx;\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1?$$

La ecuación de Euler tiene la forma $y''+y=0$; su solución general es $y=C_1\cos x+$ $+C_2\operatorname{sen} x$. Utilizando las condiciones de frontera, se obtiene: $C_1=0$, $C_2=1$; por consiguiente, el extremo puede alcanzarse sólo en la curva $y=\operatorname{sen} x$.

Ejemplo 2. ¿En qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1[(y')^2+12xy]\,dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=1?$$

La ecuación de Euler tiene la forma $y''-6x=0$, de donde $y=x^3+C_1x+C_2$. Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos: $C_1=0$, $C_2=0$; por lo tanto, el extremo puede alcanzarse sólo en la curva $y=x^3$.

En estos dos ejemplos la ecuación de Euler fue integrada fácilmente; pero esto no siempre ocurre, puesto que las ecuaciones diferenciales de segundo orden se integran en forma finita *) sólo en casos excepcionales. Veamos algunos casos simples de integración de la ecuación de Euler.

1) F no depende de y':

$$F=F(x,y).$$

La ecuación de Euler tiene la forma $F_y(x,y)=0$, puesto que $F_{y'}=0$. La solución de la ecuación finita $F_y(x,y)=0$ obtenida no contiene elementos arbitrarios y, por esto, en general no satisface las condiciones de frontera $y(x_0)=y_0$ e $y(x_1)=y_1$.

*) Véase la nota al pie de la pág. 22 (*N. de la Red.*).

Por lo tanto, la solución del problema variacional considerado en general no existe. Sólo en casos excepcionales, cuando la curva

$$F_y(x, y) = 0$$

pasa por los puntos frontera (x_0, y_0) y (x_1, y_1), existe una curva en la que se puede alcanzar un extremo.

Ejemplo 3.

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx;\quad y(x_0) = y_0,$$
$$y(x_1) = y_1.$$

La ecuación de Euler tiene la forma

$$F_y = 0, \text{ o bien } y = 0.$$

La extremal $y = 0$ pasa por los puntos frontera sólo cuando $y_0 = 0$ e $y_1 = 0$ (fig. 6.7).

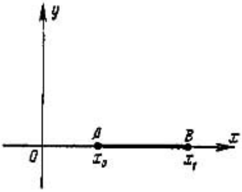

Fig. 6.7

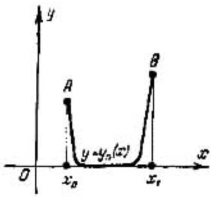

Fig. 6.8

Si $y_0 = 0$ e $y_1 = 0$, es evidente que la función $y = 0$ realiza el mínimo de la funcional $v = \int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$, ya que $v[y(x)] \geqslant 0$, siendo $v = 0$ para $y = 0$. Si, en cambio, por lo menos y_0 ó y_1 no es igual a cero, no se alcanza el mínimo de la funcional en las funciones continuas. Esto es comprensible, pues se puede tomar una sucesión de funciones continuas $y_n(x)$, cuyas gráficas se compongan de un arco de curva que baje en forma cada vez más empinada del punto (x_0, y_0) hacia el eje de las abscisas; después, de un segmento del eje de las abscisas, casi coincidente con todo el segmento (x_0, x_1) y, finalmente, cerca del punto x_1, de un arco de curva que suba bruscamente hasta el punto (x_1, y_1) (fig. 6.8). Es evidente que en las curvas de esta sucesión los valores de la funcional de diferencian de cero en forma arbitrariamente pequeña y, por lo tanto, la cota inferior de valores de la funcional es igual a cero. Sin embargo, esta cota inferior no puede alcanzarse en una curva con-

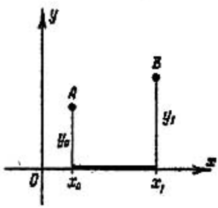

Fig 6.9

tinua ya que, para cualquier curva continua $y=y(x)$ no idénticamente nula, la integral $\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx>0$. Esta cota inferior de valores de la funcional se alcanza en la función discontinua (fig. 6.9)

$$\begin{aligned} &y(x_0)=y_0,\\ &y(x)=0 \quad \text{para} \quad x_0<x<x_1,\\ &y(x_1)=y_1. \end{aligned}$$

2) La función F depende de y' en forma lineal:

$$F(x,\ y,\ y')=M(x,\ y)+N(x,\ y)\,y';$$

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left[M(x,\ y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}\right]dx.$$

La ecuación de Euler tiene la forma

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{d}{dx}N(x,\ y)=0,$$

ó

$$\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial y}y'-\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}y'=0,$$

o bien

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0;$$

pero ésta, al igual que en el caso anterior, de nuevo es una ecuación finita, y no diferencial. La curva $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$ no satisface, en general, las condiciones de frontera. Por lo tanto, el problema variacional, por regla general, no tiene solución en la clase de funciones continuas. Si, en cambio, $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0$, la expresión $M\,dx+N\,dy$ es una diferencial total y

$$v=\int_{x_0}^{x_1}\left(M+N\frac{dy}{dx}\right)dx=\int_{x_0}^{x_1}(M\,dx+N\,dy)$$

no depende del camino de integración; el valor de la funcional v es constante en las curvas admisibles. El problema variacional pierde el sentido.

Ejemplo 4.

$$v[y(x)]=\int_0^1 (y^2+x^2y')\,dx;\ y(0)=0,\ y(1)=a.$$

La ecuación de Euler tiene la forma $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$, o bien $y-x=0$. La primera condición de frontera, $y(0)=0$, se cumple, pero la segunda se satisface sólo cuando $a=1$. Si $a\neq 1$, no existe ninguna extremal que satisfaga las condiciones de frontera.

Ejemplo 5.

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y+xy')\,dx,\quad \text{o bien } v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y\,dx+x\,dy);$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1.$$

La ecuación de Euler se reduce a una identidad, $1\equiv 1$. La expresión subintegral es una diferencial total, y la integral no depende del camino de integración:

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}d(xy)=x_1y_1-x_0y_0$$

por cualquier camino de integración. El problema variacional no tiene sentido.

3) F depende sólo de y':

$$F=F(y').$$

La ecuación de Euler tiene la forma $F_{y'y'}y''=0$, puesto que $F_y=F_{xy'}=F_{yy'}=0$. De aquí se obtiene $y''=0$, o bien $F_{y'y'}=0$. Si $y''=0$, entonces $y=C_1x+C_2$, que es una familia biparamétrica de líneas rectas. Si la ecuación $F_{y'y'}(y')=0$ tiene una o varias raíces reales $y'=k_i$, entonces $y=k_ix+C$, y obtenemos una familia monoparamétrica de rectas contenida en la familia biparamétrica $y=C_1x+C_2$ obtenida anteriormente. De esta forma, en el caso $F=F(y')$ todas las líneas rectas posibles $y=C_1x+C_2$ son extremales.

Ejemplo 6. La longitud del arco de una curva

$$l[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

tiene como extremales las rectas $y=C_1x+C_2$.

Ejemplo 7. El tiempo $t[y(x)]$ invertido en el desplazamiento por cierta curva $y=y(x)$ desde el punto $A(x_0, y_0)$ hasta el punto $B(x_1, y_1)$, si la velocidad $\frac{ds}{dt}=v(y')$ depende sólo de y', es una funcional de la forma

$$t[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}\,dx$$

$$\left(\frac{ds}{dt}=v(y');\ dt=\frac{ds}{v(y')}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{v(y')};\quad t=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y')}\,dx\right).$$

Por lo tanto, las extremales de esta funcional son líneas rectas.

4) F depende sólo de x e y':

$$F = F(x, y').$$

La ecuación de Euler toma la forma $\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$ y, por lo tanto, tiene la primera integral $F_{y'}(x, y') = C_1$. Además, como la ecuación de primer orden obtenida $F_{y'}(x, y') = C_1$ no contiene a y, ésta puede integrarse o bien resolviéndola directamente respecto a y' e integrando, o bien introduciendo un parámetro escogido en forma adecuada (véase la pág. 72).

Ejemplo 8. La funcional

$$t[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$$

(t es el tiempo invertido en el desplazamiento por la curva $y = y(x)$ de un punto a otro, si la velocidad del movimiento es $v = x$, puesto que si $\frac{ds}{dt} = x$, entonces $dt = \frac{ds}{x}$ y $t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$). La primera integral de la ecuación de Euler $F_{y'} = C_1$ tiene la forma $\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C_1$. La forma más sencilla de integrar esta ecuación es introducir un parámetro, haciendo $y' = \operatorname{tg} t$; entonces

$$x = \frac{1}{C_1} \frac{y_1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{C_1} \operatorname{sen} t,$$

o bien $x = \overline{C}_1 \operatorname{sen} t$, donde $\overline{C}_1 = \frac{1}{C_1}$;

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t; \; dy = \operatorname{tg} t \, dx = \operatorname{tg} t \cdot C_1 \cos t \, dt = \overline{C}_1 \operatorname{sen} t \, dt.$$

Integrando, se obtiene $y = -\overline{C}_1 \cos t + C_2$. De esta manera,

$$x = \overline{C}_1 \operatorname{sen} t, \; y - C_2 = -\overline{C}_1 \cos t$$

o bien, eliminando t, obtenemos $x^2 + (y - C_2)^2 = \overline{C}_1^2$, que es una familia de circunferencias con centros en el eje de ordenadas.

5) F depende sólo de y e y':

$$F = F(y, y').$$

La ecuación de Euler tiene la forma $F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$, puesto que $F_{xy'} = 0$. Si se multiplica esta ecuación miembro a miembro por y', entonces, como no es difícil comprobar, el primer miembro se transforma en la derivada exacta $\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'})$.

En efecto,

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = F_y y' + F_{y'} y'' - y'' F_{y'} - F_{yy'} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' =$$
$$= y'(F_y - F_{yy'} y' - F_{y'y'} y'').$$

Por consiguiente, la ecuación de Euler tiene la primera integral

$$F - y' F_{y'} = C_1;$$

además, como esta ecuación de primer orden no contiene explícitamente a x, puede ser integrada resolviéndola con respecto a y' y separando variables, o introduciendo un parámetro.

Ejemplo 9. Problema de la superficie mínima de rotación: determinar la curva, con sus puntos frontera dados, que al girar alrededor del eje de las abscisas forme una superficie de área mínima (fig. 6.10).

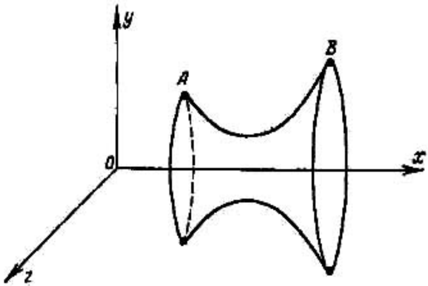

Fig. 6.10

Como es sabido, el área de una superficie de revolución es

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

La función subintegral depende sólo de y e y'; por lo tanto, la primera integral de la ecuación de Euler tiene la forma

$$F - y' F_{y'} = C_1,$$

o, en nuestro caso, $y\sqrt{1+y'^2} - \dfrac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$

Simplificando, se obtiene $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$. El modo más sencillo de integrar esta ecuación es hacer la sustitución $y' = \operatorname{sh} t$. Entonces $y = C_1 \operatorname{ch} t$, y

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C_1 \operatorname{sh} t\, dt}{\operatorname{sh} t} = C_1\, dt;\quad x = C_1 t + C_2.$$

De este modo, la superficie buscada se forma por rotación de la línea cuya ecuación en forma paramétrica es

$$x=C_1t+C_2,$$
$$y=C_1\operatorname{ch} t.$$

Eliminando el parámetro t, tendremos $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$, que es una familia de catenarias; al girar, éstas forman superficies denominadas catenoides. Las constantes C_1 y C_2 se determinan por la condición de que la línea buscada pase por los puntos frontera dados (según la posición de los puntos A y B pueden existir una, dos o ninguna solución).

E j e m p l o 10. Problema de la braquistócrona (véase la pág. 288): determinar la curva que una dos puntos dados A y B al moverse por la cual un punto material caiga desde el punto A hasta el B en tiempo mínimo (el rozamiento y la resistencia del medio se desprecian).

Ubiquemos el origen de coordenadas en el punto A, el eje Ox, en forma horizontal, y el Oy, verticalmente hacia abajo. La velocidad de movimiento del punto material es $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy}$; de aquí se halla el tiempo invertido en el desplazamiento del punto desde la posición $A(0, 0)$ hasta la posicion $B(x_1, y_1)$:

$$t[y(x)]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx;\quad y(0)=0,\ y(x_1)=y_1.$$

Como esta funcional también es de forma simple y su función subintegral no contiene explícitamente a x, entonces la ecuación de Euler tiene la primera integral $F-y'F_{y'}=C$, o, en nuestro caso,

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C,$$

de donde, después de simplificar, tendremos $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C$, o bien $y(1+y'^2)=C_1$. Introduzcamos el parámetro t, haciendo $y'=\operatorname{ctg} t$; entonces se obtiene:

$$y=\frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t}=C_1\operatorname{sen}^2 t=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t);$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{2C_1\operatorname{sen} t\cos t\,dt}{\operatorname{ctg} t}=2C_1\operatorname{sen}^2 t\,dt=C_1(1-\cos 2t)\,dt.$$

$$x=C_1\left(t-\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right)+C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\operatorname{sen} 2t)+C_2.$$

Por lo tanto, en forma paramétrica la ecuación de la línea buscada es

$$x-C_2=\frac{C_1}{2}(2t-\operatorname{sen} 2t),\qquad y=\frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Si se transforma el parámetro mediante la sustitución $2t=t_1$, y se toma en cuenta que $C_2=0$, puesto que para $y=0$ es $x=0$, se obtiene la ecuación de una familia de cicloides en la forma habitual:

$$x=\frac{C_1}{2}(t_1-\operatorname{sen} t_1),$$

$$y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t_1),$$

siendo $\frac{C_1}{2}$ el radio de la circunferencia que rueda, el cual se determina de la condición de que la cicloide pase por el punto $B(x_1, y_1)$. De este modo, la braquistócrona es una cicloide.

§ 3. FUNAIONALES DE LA FORMA

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

Para obtener las condiciones necesarias de extremo de la funcional del tipo más general

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

con condiciones de frontera dadas para todas las funciones

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0)=y_{10}, & y_2(x_0)=y_{20}, & \ldots, & y_n(x_0)=y_{n0}, \\ y_1(x_1)=y_{11}, & y_2(x_1)=y_{21}, & \ldots, & y_n(x_1)=y_{n1}, \end{array}$$

variaremos sólo una de las funciones

$$y_j(x) \qquad (j=1, 2, \ldots, n),$$

dejando las demás invariables. Entonces la funcional $v[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ se transforma en una funcional que depende sólo de una función variable, por ejemplo, de $y_i(x)$,

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\tilde{v}[y_i]$$

del tipo considerado en el § 2. Por consiguiente, la función que realiza el extremo debe satisfacer la ecuación de Euler

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0.$$

Como este razonamiento es aplicable a cualquier función y_i ($i=1, 2, \ldots, n$), se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

que determinan, en general, una familia dependiente de $2n$ parámetros de curvas integrales en el espacio $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, que es la familia de extremales del problema variacional dado.

Si, en particular, la funcional depende sólo de dos funciones $y(x)$ y $z(x)$:

$$v[y(x),\ z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx;$$

$$y(x_0) = y_0,\quad z(x_0) = z_0,\quad y(x_1) = y_1,\quad z(x_1) = z_1$$

o sea, se determina eligiendo la curva alabeada $y = y(x)$, $z = z(x)$ (fig. 6.11), entonces, variando sólo $y(x)$ y fijando $z(x)$, cambiamos nuestra curva de tal modo que su proyección en el plano xOz no varía, es decir, la curva permanece todo el tiempo en el cilindro de proyección $z = z(x)$ (fig. 6.12).

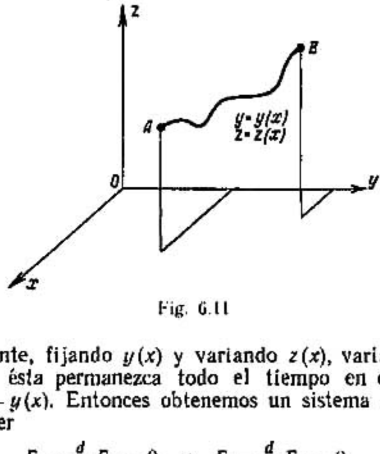

Fig. 6.11

Análogamente, fijando $y(x)$ y variando $z(x)$, variamos la curva de modo que ésta permanezca todo el tiempo en el cilindro de proyección $y = y(x)$. Entonces obtenemos un sistema de dos ecuaciones de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \quad \text{y} \quad F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0.$$

Ejemplo 1. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x),\ z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y'^2 + z'^2 + 2yz]\,dx,\quad y(0) = 0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$z(0) = 0,\quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales de Euler tiene la forma

$$y'' - z = 0,$$
$$z'' - y = 0.$$

Eliminando una de las funciones desconocidas, por ejemplo, z, se obtiene $y^{IV} - y = 0$. Integrando esta ecuación lineal con coeficientes constantes, tendremos:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x;$$
$$z = y'', \quad z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \operatorname{sen} x.$$

Utilizando las condiciones de frontera, se halla:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 1;$$

por lo tanto, $y = \operatorname{sen} x$, $z = -\operatorname{sen} x$.

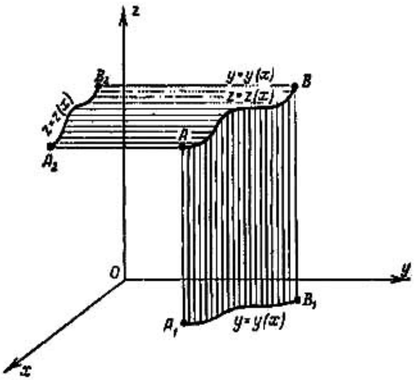

Fig. 6.12

Ejemplo 2. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(y', z')\, dx.$$

El sistema de ecuaciones de Euler tiene la forma

$$F_{y'y'} y'' + F_{y'z'} z'' = 0; \quad F_{y'z'} y'' + F_{z'z'} z'' = 0,$$

de donde, considerando que $F_{y'y'} F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$, obtenemos $y'' = 0$ y $z'' = 0$, o bien $y = C_1 x + C_2$, $z = C_3 x + C_4$, que es una familia de líneas rectas en el espacio.

Ejemplo 3. Hallar las ecuaciones diferenciales de las líneas de propagación de la luz en un medio óptico heterogéneo, en el cual la velocidad de propagación de la luz es igual a $v(x, y, z)$.

Según el principio de Fermat, la luz se propaga desde un punto $A(x_0, y_0)$ hasta otro $B(x_1, y_1)$ por la curva para la cual sea mínimo el tiempo T de paso de la luz. Si la ecuación de la curva buscada es $y=y(x)$, $z=z(x)$, entonces

$$T=\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)}\,dx.$$

El sistema de ecuaciones de Euler para esta funcional

$$\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2}+\frac{d}{dx}\frac{z'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,$$

será precisamente el sistema que determine las líneas de propagación de la luz.

§ 4. FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE LAS DERIVADAS DE ORDEN MAYOR QUE 1

Analicemos el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))\,dx,$$

donde la función F se considerará derivable $n+2$ veces con respecto a todos los argumentos, y supondremos que las condiciones de frontera tienen la forma

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)};$$
$$y(x_1)=y_1, \quad y'(x_1)=y_1', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)},$$

es decir, en los puntos frontera están dados los valores no sólo de las funciones, sino también de sus derivadas hasta de orden $n-1$ inclusive. Supongamos que el extremo se alcanza en la curva $y=y(x)$, derivable $2n$ veces. Sea $y=\overline{y}(x)$ la ecuación de cierta curva de comparación, también derivable $2n$ veces.

Consideremos la familia monoparamétrica de funciones $y(x, \alpha)=y(x)+\alpha[\overline{y}(x)-y(x)]$, o bien $y(x, \alpha)=y(x)+\alpha\delta y$. Para $\alpha=0$, $y(x, \alpha)=y(x)$; para $\alpha=1$, $y(x, \alpha)=\overline{y}(x)$. Si consideramos el valor de la funcional $v[y(x)]$ sólo en las curvas de la familia $y=y(x, \alpha)$, entonces ésta se transforma en una función del parametro α, la cual alcanza su extremo para $\alpha=0$; por lo tanto, $\frac{d}{d\alpha}v[y(x, \alpha)]\Big|_{\alpha=0}=0$. Esta derivada, de acuerdo con lo dicho en el § 1, se llama *varia-*

ción de la funcional v y se designa por δv:

$$\delta v = \left[\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha), \ldots, y^{(n)}(x, \alpha))\,dx\right]_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y'' + \ldots + F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)})\,dx.$$

Integremos por partes una vez el segundo sumando del segundo miembro:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\delta y'\,dx = [F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}F_{y'}\delta y\,dx,$$

el tercer sumando, dos veces:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y''}\delta y''\,dx = [F_{y''}\delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx}F_{y''}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}\delta y\,dx,$$

etc., el último sumando n veces:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}\,dx = [F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx}F_{y^{(n)}}\delta y^{(n-2)}\right]_{x_0}^{x_1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\delta y\,dx.$$

Tomando en cuenta las condiciones de frontera, en virtud de las cuales las variaciones $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \ldots = \delta y^{(n-1)} = 0$ para $x = x_0$ y para $x = x_1$, obtenemos por último

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right)\delta y\,dx.$$

Como en la curva que realiza el extremo se tiene

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right)\delta y\,dx = 0$$

para funciones δy arbitrarias, y como el primer factor bajo el símbolo integral es función continua de x en la misma curva $y = y(x)$, entonces, debido al lema fundamental, el primer factor es idénticamente nulo:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} \equiv 0.$$

De este modo, la función $y=y(x)$ que realiza el extremo de la funcional

$$v[y(x)]\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\,dx$$

debe ser solución de la ecuación

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

Esta ecuación diferencial de orden $2n$ recibe el nombre de *ecuación de Euler-Poisson*, y sus curvas integrales se denominan *extremales* del problema variacional considerado. La solución general de esta ecuación contiene $2n$ constantes arbitrarias, las cuales pueden ser, en general, determinadas a partir de las $2n$ condiciones de frontera:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)};$$
$$y(x_1)=y_1,\ y'(x_1)=y_1',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}.$$

Ejemplo 1. Hallar la extremal de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1 (1+y''^2)\,dx;$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=1.$$

La ecuación de Euler-Poisson tiene la forma $\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0$, ó $y^{\mathrm{IV}}=0$; su solución general es $y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos

$$C_1=0,\quad C_2=0,\quad C_3=1,\quad C_4=0.$$

De esta manera, el extremo puede alcanzarse sólo en la recta $y=x$.

Ejemplo 2. Determinar la extremal de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2-y^2+x^2)\,dx$$

que satisface las condiciones

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

La ecuación de Euler-Poisson tiene la forma $y^{\mathrm{IV}}-y=0$; su solución general es $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x$. Utilizando las condiciones de frontera, obtenemos $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=1$, $C_4=0$. De este modo, el extremo puede alcanzarse sólo en la curva $y=\cos x$.

Ejemplo 3. Determinar la extremal de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\mu y''^2+\rho y\right)dx$$

que satisface las condiciones de frontera:

$$y(-l)=0, \quad y'(-l)=0, \quad y(l)=0, \quad y'(l)=0.$$

A este problema variacional se reduce la determinación del eje de una viga cilíndrica elástica deformada con extremos fijos. Si la viga es homogénea, entonces ρ y μ son constantes, y la ecuación de Euler-Poisson tiene la forma

$$\rho+\frac{d^2}{dx^2}(\mu y'')=0, \quad \text{o bien} \quad y^{\mathrm{IV}}=-\frac{\rho}{\mu},$$

de donde

$$y=-\frac{\rho x^4}{24\mu}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Utilizando las condiciones de frontera, se halla por último

$$y=-\frac{\rho}{24\mu}(x^4-2l^2x^2+l^4), \quad \text{o bien} \quad y=-\frac{\rho}{24\mu}(x^2-l^2)^2.$$

Si la funcional v tiene la forma

$$v[y(x),\ z(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)},\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(m)})\,dx,$$

variando sólo $y(x)$ y considerando $z(x)$ fija, se halla que las funciones $y(x)$ y $z(x)$ que realizan el extremo deben satisfacer la ecuación de Euler-Poisson

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0;$$

variando $z(x)$ y considerando $y(x)$ fija, obtenemos que las mismas funciones deben satisfacer la ecuación

$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0.$$

De esta manera, las funciones $z(x)$ e $y(x)$ deben satisfacer el sistema de dos ecuaciones

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0,$$
$$F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}}=0.$$

En forma completamente análoga se puede razonar también al analizar el extremo de una funcional que depende de un número arbitrario de funciones:

$$v[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m]=$$
$$=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n_1)},\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(n_2)},\ \ldots$$
$$\ldots,\ y_m,\ y_m',\ \ldots,\ y_m^{(n_m)})\,dx.$$

Variando sólo alguna $y_i(x)$ y conservando invariables las demás, obtenemos la condición necesaria fundamental de extremo en la forma

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} + \ldots + (-1)^{n_i} \frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} F_{y_i^{(n_i)}} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

§ 5. FUNCIONALES QUE DEPENDEN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES

Analicemos el extremo de la funcional

$$v[z(x, y)] = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy;$$

además, en la frontera C de la región D los valores de la función $z(x, y)$ están dados, es decir, está dado un contorno alabeado $\bar{C}$

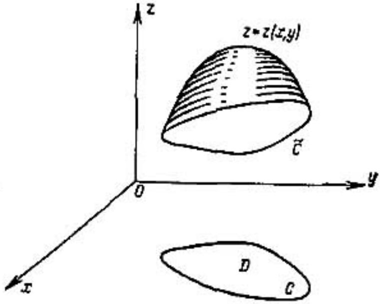

Fig. 6.13

por el cual deben pasar todas las superficies admisibles (fig. 6.13). Para abreviar la escritura, designemos $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. La función F se considerará derivable tres veces. La superficie $z = z(x, y)$, en la cual se realiza el extremo, se supondrá derivable dos veces.

Consideremos nuevamente la familia monoparamétrica de superficies $z = z(x, y, \alpha) = z(x, y) + \alpha\delta z$, siendo $\delta z = \bar{z}(x, y) - z(x, y)$, que contiene, cuando $\alpha = 0$, la superficie $z = z(x, y)$, en la cual se realiza el extremo y, para $\alpha = 1$, cierta superficie admisible $z = \bar{z}(x, y)$. En las funciones de la familia $z(x, y, \alpha)$, la funcional v se transforma en una función de α, la cual debe tener un extremo cuando $\alpha=0$; por lo tanto, $\frac{\partial}{\partial\alpha} v[z(x, y, \alpha)]\Big|_{\alpha=0}=0$. Llamando, de acuerdo con el § 1, *variación de la funcional* a la derivada de $v[z(x, y, \alpha)]$ con respecto a α cuando $\alpha=0$, y designándola por δv, tendremos:

$$\delta v=\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\iint_D F(x, y, z(x, y, \alpha), p(x, y, \alpha), q(x, y, \alpha))\,dx\,dy\right\}_{\alpha=0}=$$

$$=\iint_D [F_z\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q]\,dx\,dy,$$

donde

$$z(x, y, \alpha)=z(x, y)+\alpha\delta z,$$

$$p(x, y, \alpha)=\frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x}=p(x, y)+\alpha\delta p,$$

$$q(x, y, \alpha)=\frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y}=q(x, y)+\alpha\delta q.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\delta z\}=\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}\,\delta z+F_p\delta p,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\delta z\}=\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\,\delta z+F_q\delta q,$$

entonces

$$\iint_D (F_p\delta p+F_q\delta q)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\delta z\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\delta z\}\right]dx\,dy-$$

$$-\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right]\delta z\,dx\,dy,$$

donde $\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}$ es la llamada derivada parcial completa o total con respecto a x. Al calcularla, y se considera fija, pero la dependencia de z, p y q de x se toma en cuenta:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}=F_{px}+F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x}+F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x}+F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x}$$

y análogamente

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}=F_{qy}+F_{qz}\frac{\partial z}{\partial x}+F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y}+F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

En virtud de la conocida fórmula de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_C (N\,dy-M\,dx),$$

se obtiene

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\delta z\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\delta z\}\right] dx\,dy=\int_C (F_p\,dy-F_q\,dx)\,\delta z=0.$$

La ultima integral es igual a cero, debido a que en el contorno C la variación $\delta z=0$, puesto que todas las superficies admisibles pasan por el mismo contorno alabeado $\bar{C}$. Por lo tanto,

$$\iint_D [F_p\delta p+F_q\delta q]\,dx\,dy=-\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}+\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right]\delta z\,dx\,dy,$$

y la condición necesaria de extremo

$$\iint_D (F_z\delta z+F_p\delta p+F_q\delta q)\,dx\,dy=0$$

toma la forma

$$\iint_D \left(F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\right)\delta z\,dx\,dy=0.$$

Como la variación δz es arbitraria (a δz se le imponen limitaciones sólo de carácter general con respecto a la continuidad y a la derivabilidad, anulación en el controno C, etc.) y el primer factor es continuo, entonces, por el lema fundamental (pág. 302), en la superficie $z=z(x, y)$ que realiza el extremo será

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}\equiv 0.$$

Por consiguiente, $z(x, y)$ es solución de la ecuación

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}-\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}=0.$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales, a la cual debe satisfacer la función $z(x, y)$ que realiza el extremo, lleva el nombre de *ecuación de Ostrogradski*, en honor al eminente matemático ruso M. V. Ostrogradski, quien la obtuvo por primera vez en el año 1834; sin embargo, para las regiones D rectangulares se encontraba ya en los trabajos de L. Euler.

Ejemplo 1.

$$v[z(x, y)]=\iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy;$$

en la frontera C de la región D se dan los valores de la función z: $z=f(x, y)$. La ecuación de Ostrogradski en este caso tiene la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

o, en forma compacta,

$$\Delta z = 0,$$

es decir, es la conocida *ecuación de Laplace*; además, hay que hallar la solución continua en D de esta ecuación, que tome valores dados en la frontera de esta región. Este es el llamado *problema de Dirichlet* uno de los problemas fundamentales de la física matemática.

Ejemplo 2.

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2z f(x, y) \right] dx\,dy;$$

la función z se da en la frontera de la región D. La ecuación de Ostrogradski en este caso tiene la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

o, en forma compacta,

$$\Delta z = f(x, y).$$

Esta ecuación, llamada *ecuación de Poisson*, se encuentra también con mucha frecuencia en los problemas de la física matemática.

Ejemplo 3. El problema sobre la determinación de la superficie de área mínima, limitada por un contorno dado C, se reduce al análisis del mínimo de la funcional

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy.$$

En este caso la ecuación de Ostrogradski tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right\} = 0$$

o bien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] = 0,$$

es decir, la curvatura media en cada punto es igual a cero. Es sabido que la realización física de las superficies mínimas son películas jabonosas, extendidas sobre el contorno C.

Para la funcional

$$v[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \iint_D \ldots \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

donde $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, en base a la condición necesaria fundamental de extremo $\delta v = 0$ se obtiene, en forma completamente análoga, la siguiente ecuación de Ostrogradski:

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\{F_{p_i}\} = 0,$$

a la cual debe satisfacer la función

$$z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

que realiza el extremo de la funcional v.

Por ejemplo, para la funcional

$$v = \iiint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz$$

la ecuación de Ostrogradski tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Si la función subintegral de la funcional v depende de derivadas de orden mayor, entonces aplicando varias veces las transformaciones empleadas al obtener la ecuación de Ostrogradski obtenemos, como condición necesaria de extremo, que la función que realiza el extremo debe satisfacer una ecuación análoga a la de Euler-Poisson (pág. 317).

Por ejemplo, para la funcional

$$v[z(x, y)] = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) dx\, dy$$

se obtiene la ecuación

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{F_t\} = 0,$$

donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}, \; r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \; t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

La función que realiza el extremo de la funcional v debe satisfacer esta ecuación de cuarto orden en derivadas parciales.

Por ejemplo, para la funcional

$$v = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy,$$

la función z que realiza el extremo debe satisfacer la llamada *ecuación biarmónica*

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0,$$

que habitualmente se escribe en forma compacta así: $\Delta\Delta z = 0$.

Para la funcional

$$v=\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-2z\,f(x, y)\right] dx\,dy$$

la función $z(x, y)$ que realiza el extremo debe satisfacer la ecuación $\Delta\Delta z=f(x, y)$.

Los problemas sobre el extremo de la funcional

$$v=\iint\limits_D \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy$$

o de la funcional de forma más general

$$v=\iint\limits_D \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy,$$

donde μ es un parámetro, se reducen también a la ecuación biarmónica.

§ 6. PROBLEMAS VARIACIONALES EN FORMA PARAMETRICA

En muchos problemas variacionales es cómodo buscar la solución en forma paramétrica. Por ejemplo, en el problema isoperimétrico (véase la pág. 289) sobre la determinación de una curva cerrada de longitud dada l que delimite el área máxima S, no es cómodo buscar la solución en la forma $y=y(x)$, puesto que por el mismo sentido del problema la función $y(x)$ no es uniforme (fig. 6.14). Por esto, en el problema considerado es conveniente buscar la solución en forma paramétrica: $x=x(t)$, $y=y(t)$. En consecuencia, en este caso hay que buscar el extremo de la funcional

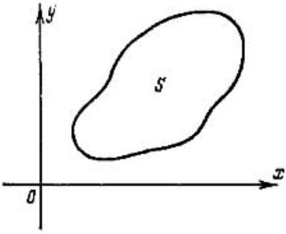

Fig. 6.14

$$S[x(t),\ y(t)]=\frac{1}{2}\int_0^T (x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$$

con la condición $l=\int_0^T \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$, donde l es una constante.

Supongamos que al analizar el extremo de cierta funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

resulta más conveniente buscar la solución en forma paramétrica, $x=x(t)$,

$y=y(t)$; entonces la funcional se reduce a la forma siguiente:

$$v[x(t),\ y(t)]=\int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t),\ y(t),\ \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)\,dt.$$

Obsérvese que la función subintegral obtenida después del cambio de variables

$$F\left(x(t),\ y(t),\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right)\dot{x}(t)$$

no contiene explícitamente a t y es una función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a las variables $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

De este modo, la funcional $v[x(t),\ y(t)]$ no es una funcional arbitraria de la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t,\ x(t),\ y(t),\ \ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t))\,dt,$$

que depende de dos funciones $x(t)$ e $y(t)$, sino sólo un caso muy particular de ésta, ya que su función subintegral no contiene explícitamente a t y es homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a las variables $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

Si pasásemos a cualquier otra representación paramétrica de la curva buscada, $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, la funcional $v[x,\ y]$ se transformaría a la forma $\int_{\tau_0}^{\tau_1} F\left(x,\ y,\ \frac{\dot{y}_\tau}{\dot{x}_\tau}\right)\dot{x}_\tau\,d\tau$. Por lo tanto, la función subintegral de la funcional v no cambia su forma al cambiar la representación paramétrica de la curva. De este modo, la funcional v depende de la forma de la curva, y no de su representación paramétrica.

No es difícil comprobar la validez de la siguiente afirmación: si la función subintegral de la funcional

$$v[x(t),\ y(t)]=\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t,\ x(t),\ \ y(t),\ \dot{x}(t),\ \ \dot{y}(t))\,dt$$

no contiene explícitamente a t y es función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, entonces la funcional $v[x(t),\ y(t)]$ depende sólo de la forma de la curva $x=x(t)$, $y=y(t)$ y no de su representación paramétrica. En efecto, sea

$$v[x(t),\ y(t)]=\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t),\ \ y(t),\ \ \dot{x}(t),\ \ \ \dot{y}(t))\,dt,$$

donde

$$\Phi(x,\ y,\ k\dot{x},\ k\dot{y})=k\Phi(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}).$$

Pasemos a una nueva representación paramétrica, haciendo

$$\tau=\varphi(t)\ \ (\dot{\varphi}(t)\neq 0),\ \ x=x(\tau),\ \ y=y(\tau).$$

Entonces

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x(\tau), y(\tau), \dot{x}_\tau(\tau)\dot{\varphi}(t), \dot{y}_\tau(\tau)\dot{\varphi}(t))\frac{d\tau}{\dot{\varphi}(t)}.$$

En virtud de que Φ es una función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, tendremos

$$\Phi(x, y, \dot{x}_\tau\dot{\varphi}, \dot{y}_\tau\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}\,\Phi(x, y, \dot{x}_\tau, \dot{y}_\tau),$$

de donde

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}_t, \dot{y}_t)\,dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Phi(x, y, \dot{x}_\tau, \dot{y}_\tau)\,d\tau,$$

o sea, la función subintegral no cambia al cambiar la representación paramétrica.

La longitud del arco $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ *), el área $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$ delimitada por cierta curva, son ejemplos de tales funcionales.

Para hallar las extremales de las funcionales de la forma considerada

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt,$$

donde Φ es una función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, al igual que para las funcionales con función subintegral arbitraria $\Phi(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$, hay que resolver el sistema de ecuaciones de Euler

$$\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0; \quad \Phi_y - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{y}} = 0.$$

Sin embargo, en el caso particular considerado estas ecuaciones no son independientes, puesto que deben satisfacerse, conjuntamente con cierta solución $x = x(t)$, $y = y(t)$, por cualquier otro par de funciones que den otra representación paramétrica de la misma curva; en el caso de independencia de las ecuaciones de Euler esto estaría en contradicción con el teorema de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales (véase la pág. 78). Esto indica que para las funcionales de la forma

$$v[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\,dt,$$

donde Φ es una función homogénea de primer grado de homogeneidad con respecto a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, una de las ecuaciones de Euler es consecuencia de la otra. Para hallar las extremales hay que tomar una de las ecuaciones de Euler e integrarla

*) La función $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ es una función homogénea *positiva* de primer grado de homogeneidad, es decir, para ella la condición $F(kx, ky) = kF(x, y)$ se satisface sólo para k positivas; sin embargo, esto es suficiente para que se cumpla la teoría expuesta en este parágrafo, ya que al efectuar el cambio de variables $\tau = \varphi(t)$, se puede considerar que $\dot{\varphi}(t) > 0$

conjuntamente con la ecuación que determina la elección del parámetro. Por ejemplo, a la ecuación $\Phi_x - \frac{d}{dt}\Phi_{\dot{x}} = 0$ puede agregársele la ecuación $x'^2 + y'^2 = 1$, lo cual indica que como parámetro fue escogida la longitud del arco de la curva.

§ 7. CIERTAS APLICACIONES

El principio variacional fundamental en la mecánica es el principio de la acción estacionaria de Ostrogradski-Hamilton, el cual afirma que entre los movimientos admisibles—es decir, compatibles con los enlaces—de un sistema de puntos materiales en realidad se efectúa el movimiento que da un valor estacionario (o sea, un valor que corresponde a un argumento para el cual la variación de la funcional sea igual a cero) a la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt,$$

donde T es la energía cinética, y U, la energía potencial del sistema.

Apliquemos este principio a algunos problemas de la mecánica.

Ejemplo 1. Dado un sistema de puntos materiales de masas m_i ($i=1, 2, \ldots, n$) y con coordenadas (x_i, y_i, z_i) sobre el cual actúan las fuerzas $\vec{F}_i$, que poseen una función de fuerza (potencial) $-U$, el cual depende sólo de las coordenadas:

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

donde F_{ix}, F_{iy} y F_{iz} son las coordenadas del vector $\vec{F}_i$ que actúa sobre el punto (x_i, y_i, z_i). Hallar las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema. En este caso, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

y la energía potencial del sistema es igual a U. El sistema de ecuaciones de Euler para la integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt$$

tiene la forma

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} = 0; \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = 0,$$

o bien

$$m_i\ddot{x}_i - F_{ix} = 0, \quad m_i\ddot{y}_i - F_{iy} = 0; \quad m_i\ddot{z}_i - F_{iz} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si el movimiento se sometiera además a cierto sistema de enlaces independientes

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n)=0$$
$$(j=1, 2, \ldots, m, \ m<3n),$$

entonces, a partir de las ecuaciones de los enlaces se podrían expresar m variables mediante $3n-m$ variables independientes (sin considerar el tiempo t), o expresar todas las $3n$ variables por medio de $3n-m$ coordenadas nuevas, ya independientes

$$q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}.$$

Entonces T y U se podrían considerar también como funciones de

$$q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}, \text{ y de } t:$$
$$T=T(q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{3n-m}, t),$$
$$U=U(q_1, q_2, \ldots, q_{3n-m}, t),$$

y el sistema de ecuaciones de Euler tendría la forma

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, 3n-m).$$

Ejemplo 2. Deduzcamos la ecuación diferencial de las oscilaciones libres de una cuerda.

Ubiquemos el origen de coordenadas en uno de los extremos de la cuerda. La cuerda en estado de reposo se encuentra, bajo la acción de la tension, en cierta recta, por la cual dirigiremos el eje de las abscisas (fig. 6.15). La desviación de la posición de equilibrio $u(x, t)$ es función de la abscisa x y del tiempo t.

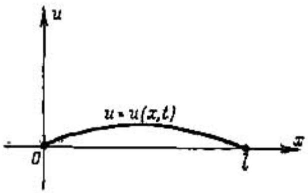

Fig. 6.15

La energía potencial U de un elemento de una cuerda absolutamente flexible es proporcional al alargamiento de la misma. El segmento de cuerda dx en estado de deformación tiene, con exactitud de hasta infinitésimos de mayor grado, la longitud $ds=\sqrt{1+u_x'^2}\,dx$ y, por lo tanto, el alargamiento del elemento es igual a $\left(\sqrt{1+u_x'^2}-1\right)dx$. Según la fórmula de Taylor,

$$\sqrt{1+u_x'^2}\approx 1+\frac{1}{2}u_x'^2.$$

Considerando u_x' pequeño y despreciando las potencias de u_x' mayores que 1, se obtiene que la energía potencial del elemento es igual a $\frac{1}{2}ku_x'^2\,dx$, donde k es un factor de proporcionalidad, y la energía potencial de toda la cuerda es igual a

$$\frac{1}{2}\int_0^l ku_x'^2\,dx.$$

La energía cinética de la cuerda es

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t'^2\,dx$$

donde ρ es la densidad. La integral $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ tiene en este caso la forma

$$v=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u_t'^2-\frac{1}{2}ku_x'^2\right]dx\,dt.$$

La ecuación del movimiento de la cuerda será la ecuación de Ostrogradski para la funcional v. De este modo, la ecuación del movimiento de la cuerda tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t')-\frac{\partial}{\partial x}(ku_x')=0.$$

Si la cuerda es homogénea, entonces ρ y k son constantes, y la ecuación de las oscilaciones de la cuerda se simplifica:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

Supongamos ahora que sobre la cuerda actúa además la fuerza exterior $f(t, x)$, perpendicular a la misma en su posición de equilibrio y calculada en la unidad de masa. Como es fácil comprobar, la función de fuerza de esta fuerza exterior que actúa sobre un elemento de la cuerda es igual a $\rho f(t, x)\,u\,dx$; por consiguiente, la integral de Ostrogradski-Hamilton $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ tiene la forma

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u_t'^2-\frac{1}{2}ku_x'^2+\rho f(t, x)\,u\right]dx\,dt,$$

y la ecuación de las oscilaciones forzadas de la cuerda es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t')-\frac{\partial}{\partial x}(ku_x')-\rho f(t, x)=0,$$

o bien, si la cuerda es homogénea,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{k}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t, x).$$

En forma completamente análoga se puede obtener la ecuación de las oscilaciones de una membrana

E j e m p l o 3. Deduzcamos la ecuación de las oscilaciones de una varilla recta Dirijamos el eje de las abscisas por el eje de la varilla en su posición de equilibrio. La desviación de la posición de equilibrio $u(x, t)$ será función de x y del tiempo t, la energía cinética de la varilla de longitud l es

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \rho u_t'^2\,dx.$$

Consideraremos la varilla inestirable. La energía potencial de una varilla elástica con curvatura constante es proporcional al cuadrado de la misma. Por lo tanto, la diferencial dU de la energía potencial de la varilla es igual a

$$dU=\frac{1}{2}k\left\{\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}^2,$$

y la energía potencial de toda la varilla, la curvatura de cuyo eje es en general variable, será igual a

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l k\left\{\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}^2 dx.$$

Supongamos que las desviaciones de la varilla de la posición de equilibrio son pequeñas, y que se puede despreciar el término $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ en el denominador, entonces

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

La integral de Ostrogradski-Hamilton tiene la forma

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u_t'^2-\frac{1}{2}ku_{xx}''^2\right]dx\,dt.$$

Por lo tanto, en el caso de las oscilaciones libres de una varilla elástica, tendremos la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t')+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ku_{xx}'')=0.$$

Si la varilla es homogénea, entonces ρ y k son constantes, y la ecuación se transforma en

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+k\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0.$$

Si sobre la varilla actúa la fuerza exterior $f(t, x)$, es necesario considerar además el potencial de esta fuerza (véase el ejemplo anterior).

El principio de la acción estacionaria puede ser aplicado a la deducción de las ecuaciones del campo. Consideremos un campo escalar, vectorial o tensorial $w=w(x, y, z, t)$. La integral $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ en este caso es igual, en general, a una integral cuádruple con respecto a las coordenadas espaciales x, y y z y al tiempo t de cierta función L, llamada *densidad de la función de Lagrange o lagrangiano*.

Comúnmente el lagrangiano es función de w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$:

$$L=L\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

y, por lo tanto, la acción tiene la forma

$$\iiiint_D L\left(w,\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial w}{\partial t}\right) dx\,dy\,dz\,dt. \tag{6.3}$$

De acuerdo con el principio de la acción estacionaria, la ecuación del campo es la ecuación de Ostrogradski para la funcional (6.3):

$$L_w-\frac{\partial}{\partial x}\{L_{p_1}\}-\frac{\partial}{\partial y}\{L_{p_2}\}-\frac{\partial}{\partial z}\{L_{p_3}\}-\frac{\partial}{\partial t}\{L_{p_4}\}=0,$$

donde

$$p_1=\frac{\partial w}{\partial x},\quad p_2=\frac{\partial w}{\partial y},\quad p_3=\frac{\partial w}{\partial z},\quad p_4=\frac{\partial w}{\partial t}.$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO 6

1. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx.$$

2. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+2xyy')\,dx;\quad y(x_0)=y_0;\quad y(x_1)=y_1.$$

3. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1(xy+y^2-2y^2y')\,dx;\quad y(0)=1;\quad y(1)=2.$$

4. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}y'(1+x^2y')\,dx.$$

5. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2yy'-16y^2)\,dx$$

6. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(xy'+y'^2)\,dx.$$

7. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'^2}\,dx.$$

8. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2-2y\operatorname{sen}x)\,dx.$$

9. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(16y^2-y''^2+x^2)\,dx.$$

10. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(2xy+y'''^2)\,dx.$$

11. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x),\ z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)\,dx.$$

12. Escribir la ecuación de Ostrogradski para la funcional

$$v[z(x,\ y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

13. Escribir la ecuación de Ostrogradski para la funcional

$$v[u(x,\ y,\ z)]=\iiint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf(x,\ y,\ z)\right]dx\,dy\,dz.$$

14. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^3}\,dx.$$

15. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2+2ye^x)\,dx.$$

16. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-y'^2-2y\operatorname{sen}x)\,dx$$

17. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left[y^2+(y')^2+\frac{2y}{\operatorname{ch} x}\right]dx.$$

18. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[x^2(y')^2+2y^2+2xy]\,dx.$$

19. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[(y'')^2-2(y')^2+y^2-2y\operatorname{sen} x]\,dx.$$

20. Hallar las extremales de la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[(y''')^2+y^2-2yx^3]\,dx.$$

CAPITULO 7

Problemas variacionales con fronteras móviles y otros problemas

§ 1. PROBLEMA SIMPLE CON FRONTERAS MOVILES

En el capítulo 6, al analizar la funcional

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

se supuso que los puntos frontera (x_0, y_0) y (x_1, y_1) estaban dados. Supongamos ahora que uno o ambos puntos frontera pueden desplazarse. Entonces la clase de curvas admisibles se amplía: además de las curvas de comparación que tienen puntos comunes con la curva analizada, se pueden tomar también curvas con puntos frontera desplazados.

Por esto, si en cierta curva $y = y(x)$ se alcanza un extremo en el problema con puntos frontera móviles, entonces con mayor razón se alcanzará un extremo con respecto a la clase más restringida de curvas que tienen puntos frontera comunes con la curva $y = y(x)$. Por lo tanto, debe cumplirse la condición necesaria fundamental de extremo en el problema con fronteras inmóviles, es decir, la función $y(x)$ debe ser solución de la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

De este modo, las curvas $y = y(x)$, en las cuales se realiza el extremo en el problema con fronteras móviles, deben ser extremales.

La solución general de la ecuación de Euler contiene dos constantes arbitrarias, para cuya determinación es necesario tener dos condiciones. En el problema con puntos frontera inmóviles dichas condiciones eran

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y(x_1) = y_1.$$

En el problema con fronteras móviles falta una o ambas condiciones, y las condiciones que faltan para la determinación de las constantes arbitrarias de la solución general de la ecuación de Euler deben ser obtenidas a partir de la condición necesaria fundamental de extremo: la igualdad a cero de la variación δv.

Como en el problema con fronteras móviles el extremo se alcanza sólo en las soluciones $y=y(x, C_1, C_2)$ de la ecuación de Euler, en adelante se puede considerar el valor de la funcional sólo en las funciones de esta familia. Entonces la funcional $v[y(x, C_1, C_2)]$ se transforma en función de los parámetros C_1 y C_2 y de los límites de integración x_0 y x_1, y la variación de la funcional coincide con la diferencial de esta función. Consideremos para simplificar que uno de los puntos frontera, por ejemplo (x_0, y_0), está fijo, y el otro, (x_1, y_1), puede trasladarse y pasar al punto $(x_1+\Delta x_1, y_1+\Delta y_1)$ o, como generalmente se designa en el cálculo variacional, $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$.

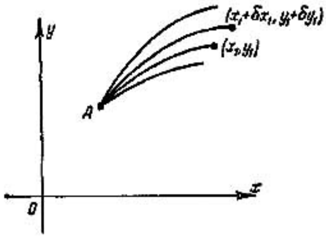

Fig. 7.1

Consideraremos próximas a las curvas admisibles $y=y(x)$ e $y=y(x)+\delta y$ si los módulos de las variaciones δy y $\delta y'$ son pequeños, así como los módulos de los incrementos δx_1 y δy_1 (los incrementos δx_1 y δy_1 son llamados generalmente variaciones de los valores límite x_1 e y_1).

Las extremales que pasan por el punto (x_0, y_0) forman un haz de extremales $y=y(x, C_1)$. En las curvas de este haz la funcional $v[y(x, C_1)]$ se transforma en una función de C_1 y x_1. Si las curvas del haz $y=y(x, C_1)$ no se cortan en un entorno de la extremal considerada, entonces $v[y(x, C_1)]$ puede considerarse como función uniforme de x_1 e y_1, puesto que al dar x_1 y y_1 se determina la extremal del haz (fig. 7.1), y con esto se determina el valor de la funcional.

Calculemos la variación de la funcional $v[y(x, C_1)]$ en las extremales del haz $y=y(x, C_1)$ cuando el punto frontera se desplaza de la posición (x_1, y_1) a la $(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$. Puesto que la funcional v se transforma en función de x_1 e y_1 en las curvas del haz, su variación coincide con la diferencial de esta función. Separemos del incremento Δv la parte lineal principal con respecto a δx_1 e δy_1:

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\,dx. \qquad (7.1)$$

El primer sumando del segundo miembro se transforma, mediante el teorema del valor medio, en:

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1, \text{ donde } 0<\theta<1.$$

En virtud de la continuidad de la función F, tendremos:

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1,$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\delta x_1 \to 0$ y $\delta y_1 \to 0$.

De esta manera,

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx = F(x, y, y')|_{x=x_1}\delta x_1 + \varepsilon_1\delta x_1.$$

El segundo sumando del segundo miembro de (7.1) se transforma desarrollando la función subintegral por la fórmula de Taylor:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y']\,dx + R_1,$$

donde R_1 es un infinitésimo de orden mayor que δy o $\delta y'$. A su vez, la parte lineal

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')\,dx$$

puede ser reducida, integrando por partes el segundo sumando de la función subintegral, a la forma

$$[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

Los valores de la funcional se toman sólo en las extremales; por lo tanto, $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$. Como el punto frontera (x_0, y_0) está fijo, tenemos $\delta y|_{x=x_0} = 0$. Por consiguiente,

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,dx = [F_{y'} \delta y]|_{x=x_1}.$$

Obsérvese que $\delta y|_{x=x_1}$ no es igual a δy_1, ya que δy_1 es el incremento de y_1 al desplazarse el punto frontera a la posición $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$, mientras que $\delta y|_{x=x_1}$ es el incremento de la ordenada en

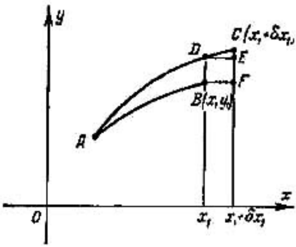

Fig. 7.2

el punto x_1 al pasar de la extremal que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) a la extremal que pasa por los puntos (x_0, y_0) y $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ (fig. 7.2).

Del dibujo se ve que $BD = \delta y|_{x=x_1}$; $FC = \delta y_1$;

$$EC \approx y'(x_1)\,\delta x_1; \quad BD = FC - EC$$

o bien

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1.$$

Aquí la igualdad apoximada se cumple salvo un infinitésimo de orden mayor.

De este modo, tenemos definitivamente: $\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\,dx \approx F|_{x=x_1} \delta x_1$;

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\,dx \approx F_{y'}|_{x=x_1} (\delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1),$$

donde las igualdades aproximadas también se cumplen salvo infinitésimos de orden mayor que 1 con respecto a δx_1 y δy_1. Por lo tanto, de (7.1) se obtiene

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1) = \\ = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1,$$

o bien

$$d\bar{v}(x_1, y_1) = (F - y'F_{y'})|_{x=x_1}dx_1 + F_{y'}|_{x=x_1}dy_1,$$

donde $\bar{v}(x_1, y_1)$ es la función en que se transforma la funcional v en las extremales $y = y(x, C_1)$, y $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$, $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$ son los incrementos de las coordenadas del punto frontera. La condición necesaria fundamental de extremo $\delta v = 0$ toma la forma

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 = 0. \tag{7.2}$$

Si las variaciones δx_1 y δy_1 son independientes, de aquí se deduce que

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1} = 0 \quad \text{y} \quad F_{y'}|_{x=x_1} = 0.$$

Sin embargo, con mayor frecuencia hay que considerar el caso en que las variaciones δx_1 y δy_1 son dependientes.

Supongamos, por ejemplo, que el segundo punto frontera (x_1, y_1) puede trasladarse por cierta línea

$$y_1 = \varphi(x_1).$$

Entonces $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1)\delta x_1$ y, por lo tanto, la condición (7.2) toma la forma $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1}\delta x_1 = 0$, o bien, como δx_1 varía arbitrariamente, $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0$. Esta condición establece una dependencia entre los coeficientes angulares φ' e y' en el punto frontera, y se llama *condición de transversalidad*.

La condición de transversalidad, conjuntamtente con la condición $y_1 = \varphi(x_1)$, permite en general determinar una o varias extremales del haz $y = y(x, C_1)$, en las cuales puede alcanzarse el extremo. Si el punto frontera (x_0, y_0) puede trasladarse por cierta curva $y_0 = \psi(x_0)$, entonces se deduce, en forma completamente análoga, que en el punto (x_0, y_0) también debe satisfacerse la condición de transversalidad

$$[F + (\psi' - y')F_{y'}]_{x=x_0} = 0.$$

Ejemplo 1. Hallar la condicion de transversalidad para las funcionales del tipo

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

La condición de transversalidad $F + F_{y'}(\varphi' - y') = 0$ tiene en este caso la forma $A(x, y)\sqrt{1 + y'^2} + \frac{A(x, y)\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\varphi' - y') = 0$, o bien $\frac{A(x, y)(1 + \varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$; suponiendo que $A(x, y) \neq 0$ en el punto frontera, obtenemos $1+y'\varphi'=0$, o bien $y' = -\frac{1}{\varphi'}$, es decir en este caso la condición de transversalidad se redujo a la de ortogonalidad.

Ejemplo 2. Analizar el extremo de la funcional $\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$, siendo $y(0)=0$, $y_1=x_1-5$ (fig. 7.3). Las curvas integrales de la ecuación de Euler (ejercicio 1, pág. 331) son las circunferencias $(x-C_1)^2+y^2=C_2^2$. La primera condición de frontera da $C_1=C_2$. Como la condición de transversalidad se reduce para la funcional considerada a la condición de ortogonalidad (véase el ejemplo anterior), entonces la recta $y_1=x_1-5$ debe ser diámetro de la circunferencia

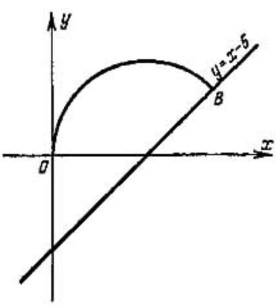

Fig. 7.3

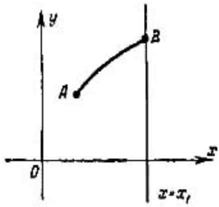

Fig. 7.4

y, en consecuencia, el centro de la circunferencia buscada se encuentra en el punto (0.5) de intersección de la recta $y_1=x_1-5$ con el eje de las abscisas. Por lo tanto, $(x-5)^2+y^2=25$, o bien $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$. De esta manera, el extremo puede alcanzarse sólo en los arcos de circunferencia $y=\sqrt{10x-x^2}$ e $y=-\sqrt{10x-x^2}$.

Si el punto frontera (x_1, y_1) puede desplazarse sólo por una recta vertical (fig. 7.4) y, por consiguiente, $\delta x_1=0$, la condición (7.2) se transforma en $F_{y'}|_{x=x_1}=0$.

Supongamos, por ejemplo, que en el problema de la braquistócrona (véase la pág. 311) el punto frontera izquierdo está fijo, y el derecho puede desplazarse por una recta vertical.

Las extremales de la funcional $v=\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$ son cicloides, cuyas ecuaciones, si se toma en cuenta la condición $y(0)=0$, tendrán la forma

$$x=C_1(t-\operatorname{sen} t),$$
$$y=C_1(1-\cos t).$$

Para determinar C_1 se utiliza la condición $F_{y'}|_{x=x_1}=0$, que en este caso tiene la forma

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1}=0,$$

de donde $y'(x_1)=0$, es decir, la cicloide buscada debe cortar la recta $x=x_1$ bajo un ángulo recto y, por lo tanto, el punto $x=x_1$, $y=y_1$ debe ser el vér-

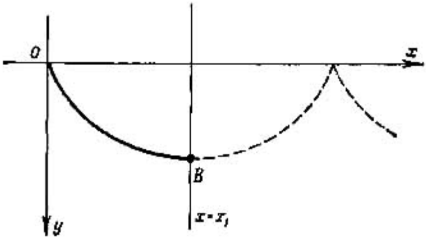

Fig. 7.5

tice de la cicloide (fig. 7.5). Puesto que al vértice le corresponde el valor $t=\pi$, entonces $x_1=C_1\pi$, $C_1=\frac{x_1}{\pi}$. Por lo tanto, el extremo puede realizarse sólo en la cicloide

$$x=\frac{x_1}{\pi}(t-\operatorname{sen} t);\quad y=\frac{x_1}{\pi}(1-\cos t).$$

Si el punto frontera (x_1, y_1) en el problema sobre el extremo de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')\,dx$ puede desplazarse por la recta horizontal $y=y_1$, entonces $\delta y_1=0$, y la condición (7.2), o condición de transversalidad, toma la forma

$$[F-y'F_{y'}]_{x=x_1}=0.$$

§ 2. PROBLEMA CON FRONTERAS MOVILES PARA LAS FUNCIONALES DE LA FORMA $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y, z, y', z')dx$

Si al investigar el extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, z, y', z')\,dx$$

uno de los puntos frontera, por ejemplo $B(x_1, y_1, z_1)$, se desplaza y el otro, $A(x_0, y_0, z_0)$, es inmóvil (o ambos puntos frontera son móviles), es evidente que el extremo puede alcanzarse sólo en las curvas integrales del sistema de ecuaciones de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0; \quad F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0.$$

En efecto, si en cierta curva C se realiza el extremo del problema con fronteras móviles, o sea, se alcanza un valor máximo o mínimo de v con respecto a sus valores en todas las curvas cercanas admisibles, entre las cuales hay tanto curvas que tengan puntos frontera comunes con la curva C que realiza el extremo, como curvas cuyos puntos frontera no coincidan con los puntos frontera de la curva C, entonces con mayor razón en la curva C se alcanza un extremo con respecto a la clase más restringida de curvas cercanas que tienen puntos frontera comunes con la curva C.

Por consiguiente, en la curva C deben satisfacerse las condiciones necesarias de extremo del problema con puntos frontera inmóviles y, en particular, la curva C debe ser curva integral del sistema de ecuaciones de Euler.

La solución general del sistema de ecuaciones de Euler contiene cuatro constantes arbitrarias. Conociendo las coordenadas del punto frontera $A(x_0, y_0, z_0)$, que consideraremos inmóvil, se pueden, en general, eliminar dos constantes arbitrarias.

Para determinar las otras dos constantes arbitrarias es necesario tener dos ecuaciones más, que serán obtenidas de la condición $\delta v = 0$. Además, al calcular la variación consideraremos que la funcional se da sólo en las soluciones del sistema de ecuaciones de Euler, puesto que sólo en ellas se puede alcanzar el extremo. Entonces la funcional v se transforma en una función $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ de las coordenadas x_1, y_1 y z_1 del punto $B(x_1, y_1, z_1)$, y la variación de la funcional se transforma en la diferencial de esta función*).

El cálculo de la variación de v puede realizarse en forma completamente igual a como se hizo en las págs. 335—338:

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')\,dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z') - F(x, y, z, y', z')]\,dx.$$

---

*) La función Φ será uniforme si las extremales del haz con centro en el punto A no se cortan, puesto que entonces el punto $B(x_1, y_1, z_1)$ determina unívocamente la extremal.

Apliquemos el teorema del valor medio a la primera integral y utilicemos la continuidad de la función F; tomemos en la segunda integral la parte lineal principal mediante la fórmula de Taylor. Después de estas transformaciones, se obtiene

$$\delta v = F|_{x=x_1}\,\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_z \delta z + F_{y'} \delta y' + F_{z'} \delta z']\,dx.$$

Integrando por partes los dos últimos sumandos que están bajo el símbolo integral, tendremos:

$$\delta v = F|_{x=x_1}\,\delta x_1 + [F_{y'}\delta y]_{x=x_1} + [F_{z'}\delta z]_{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y + \left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right)\delta z\right] dx.$$

Como los valores de v se calculan sólo en las extremales, entonces

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0; \qquad F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} \equiv 0$$

y por lo tanto,

$$\delta v = F|_{x=x_1}\,\delta x_1 + [F_{y'}\delta y]_{x=x_1} + [F_{z'}\delta z]_{x=x_1}.$$

Razonando igual que en la pág. 337, se obtiene

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\,\delta x_1 \ \text{ y } \ \delta z|_{x=x_1} \approx \delta z_1 - z'(x_1)\,\delta x_1$$

y, en consecuencia,

$$\delta v = [F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\,\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\,\delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\,\delta z_1 = 0.$$

Si las variaciones δx_1, δy_1 y δz_1 son independientes, entonces de la condición $\delta v = 0$ se obtiene

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} = 0; \quad F_{y'}|_{x=x_1} = 0 \ \text{ y } \ F_{z'}|_{x=x_1} = 0.$$

Si el punto frontera $B(x_1, y_1, z_1)$ puede trasladarse por cierta curva $y_1 = \varphi(x_1)$; $z_1 = \psi(x_1)$, entonces $\delta y_1 = \varphi'(x_1)\,\delta x_1$ y $\delta z_1 = \psi'(x_1)\,\delta x_1$, y la condición $\delta v = 0$, o bien

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\,\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\,\delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\,\delta z_1 = 0$$

se transforma en

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\varphi' - z')F_{z'}]_{x=x_1}\,\delta x_1 = 0$$

de donde, en virtud de la arbitrariedad de δx_1, obtenemos

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0.$$

Esta condición se llama *condición de transversalidad* en el problema sobre la investigación del extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx.$$

La condición de transversalidad, conjuntamente con las ecuaciones $y_1=\varphi(x_1)$ y $z_1=\psi(x_1)$, da las ecuaciones que faltaban para determinar las constantes arbitrarias en la solución general del sistema de ecuaciones de Euler.

Si el punto frontera $B(x_1, y_1, z_1)$ puede desplazarse por cierta superficie $z_1=\varphi(x_1, y_1)$, entonces $\delta z_1=\varphi'_{x_1}\delta x_1+\varphi_{y_1}\delta y_1$, y las variaciones δx_1 y δy_1 son arbitrarias. Por lo tanto, la condición $\delta v=0$, o, en forma desarrollada,

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1=0,$$

se reduce a la condición

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}+\varphi'_xF_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1+[F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}\delta y_1=0.$$

De aquí, debido a la independencia de δx_1 y δy_1, se obtiene,

$$[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0,\quad [F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}=0.$$

Estas dos condiciones, conjuntamente con la ecuación $z_1=\varphi(x_1, y_1)$, dan, en general, la posibilidad de determinar las dos constantes arbitrarias en la solución general del sistema de ecuaciones de Euler.

Si el punto frontera $A(x_0, y_0, z_0)$ es móvil entonces, por el mismo método, se obtienen en este punto condiciones completamente análogas.

Si se considera la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\,dx,$$

entonces, sin cambiar el método de demostración, se obtiene que en el caso de que el punto $B(x_1, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})$ sea móvil, en este punto será

$$\Big(F-\sum_{i=1}^{n} y'_iF_{y'_i}\Big)\Big|_{x=x_1}\delta x_1+\sum_{i=1}^{n} F_{y'_i}\Big|_{x=x_1}\delta y_{i1}=0.$$

Ejemplo 1. Hallar la codición de transversalidad para la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx,\quad \text{si}\quad z_1=\varphi(x_1, y_1).$$

Las condiciones de transversalidad

$$[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}]_{x=x_1}=0 \text{ y } [F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}=0$$

tienen en este caso la forma $1+\varphi_x' z'=0$ e $y'+\varphi_y' z'=0$ para $x=x_1$, o bien $\frac{1}{\varphi_x'}=\frac{y'}{\varphi_y'}=\frac{z'}{-1}$ para $x=x_1$, es decir, son las condiciones de paralelismo del vector tangente $\vec{t}\,(1, x', z')$ a la extremal buscada en el punto (x_1, y_1, z_1), y del vector de la normal $\vec{N}\,(\varphi_x', \varphi_y', -1)$ a la superficie $z=\varphi(x, y)$ en dicho punto. Por consiguiente, la condición de transversalidad se reduce, en este caso, a la condición de ortogonalidad de la extremal a la superficie $z=\varphi(x, y)$.

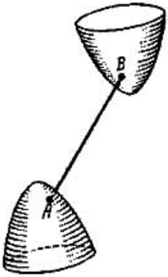

Fig 7.6

Ejemplo 2. Hallar la distancia extremal entre las dos superficies

$$z=\varphi(x, y) \quad \text{y} \quad z=\psi(x, y).$$

En otras palabras, hallar el extremo de la integral $l=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ bajo la condición de que las coordenadas de uno de los puntos frontera, (x_0, y_0, z_0), satisfagan la ecuación $z_0=\varphi(x_0, y_0)$, y las coordenadas del otro, (x_1, y_1, z_1), la ecuación $z_1=\psi(x_1, y_1)$.

Como la función subintegral depende sólo de y' y z', las extremales son líneas rectas (véase el ejemplo 2 de la pág. 314). Como la funcional $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ es un caso particular de la funcional $\int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z)\times \times\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$, considerada en el ejemplo anterior, entonces las condiciones de transversalidad tanto en el punto (x_0, y_0, z_0) como en el (x_1, y_1, z_1) se reducen a las condiciones de ortogonalidad. Por lo tanto, el extremo puede alcanzarse sólo en las rectas ortogonales tanto a la superficie $z=\varphi(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0), como a la superficie $z=\psi(x, y)$ en el punto (x_1, y_1, z_1) (fig. 7.6).

Ejemplo 3. Investigar el extremo de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+z'^2+2yz)\,dx$, siendo $y(0)=0$, $z(0)=0$ y pudiéndose desplazar el punto (x_1, y_1, z_1) por el plano $x=x_1$. El sistema de ecuaciones de Euler tiene la forma $z''-y=0$; $y''-z=0$, de donde $y^{IV}-y=0$; $y=C_1\operatorname{ch} x+C_2\operatorname{sh} x+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x$; $z=y''$; $z=C_1\operatorname{ch} x+C_2\operatorname{sh} x-C_3\cos x-C_4\operatorname{sen} x$. De las condiciones $y(0)=0$ y $z(0)=0$ se obtiene: $C_1+C_3=0$ y $C_1-C_3=0$, de donde $C_1=C_3=0$. La condición en el punto frontera móvil

$$(F-y'F_{y'}-z'F_{z'})_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}\big|_{x=x_1}\delta z_1=0$$

se reduce a las condiciones

$$F_{y'}\big|_{x=x_1}=0 \ \text{y} \ F_{z'}\big|_{x=x_1}=0,$$

puesto que $\delta x_1=0$, y δy_1 y δz_1 son arbitrarios. En el caso considerado $F_{y'}=2y'$; $F_{z'}=2z'$; por lo tanto,

$$y'(x_1)=0 \quad \text{y} \quad z'(x_1)=0,$$

o bien

$$C_2\operatorname{ch} x_1+C_4\cos x_1=0 \quad \text{y} \quad C_2\operatorname{ch} x_1-C_4\cos x_1=0.$$

Si $\cos x_1 \neq 0$, entonces $C_2 = C_4 = 0$ y el extremo puede alcanzarse sólo en la recta $y=0$; $z=0$. Si, en cambio, $\cos x_1 = 0$, o sea, $x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi$, donde n es un entero, entonces $C_2 = 0$, C_4 es una constante arbitraria, $x = C_4 \operatorname{sen} x$, $z = -C_4 \operatorname{sen} x$. No es difícil comprobar que en el último caso para cualquier C_4 la funcional $v=0$.

§ 3. EXTREMALES CON PUNTOS ANGULARES

Hasta ahora hemos considerado problemas variacionales en los cuales la función buscada $y = y(x)$ se suponía continua y con derivada continua. Sin embargo, en muchos problemas la última exigencia no es natural; es más, en ciertas clases de problemas variacionales la solución se alcanza por lo general en extremales que tienen puntos angulares. A estos problemas pertenecen, por ejemplo, los problemas sobre la reflexión y sobre la refracción de las extremales, que son una generalización de los problemas correspondientes sobre la reflexión y refracción de la luz.

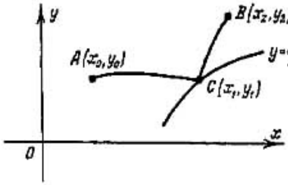

Fig 7.7

Problema de la reflexión de las extremales. Hallar la curva que realice el extremo de la funcional $v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ y que pase por dos puntos dados $A(x_0, y_0)$ y $B(x_2, y_2)$; además la curva debe caer en el punto B sólo después de reflejarse en una línea dada $y = \varphi(x)$ (fig. 7.7).

Es natural suponer que en el punto de reflexión $C(x_1, y_1)$ pueda haber un punto angular de la extremal buscada y, por lo tanto, que en este punto la derivada izquierda $y'(x_1 - 0)$ y la derivada derecha $y'(x_1 + 0)$ en general sean diferentes. Por esto, es más cómodo representar la funcional $v[y(x)]$ en la forma

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx;$$

en cada intervalo $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ y $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ la derivada $y'(x)$ se supone continua y, en consecuencia, se pueden aplicar los resultados obtenidos antes.

La condición necesaria fundamental de extremo $\delta v=0$ toma la forma

$$\delta v=\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx+\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx=0.$$

Como el punto (x_1, y_1) puede desplazarse por la curva $y=\varphi(x)$, al calcular las variaciones $\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ y $\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ nos encontramos en las condiciones del problema con un punto frontera móvil, que se mueve por una curva dada, y podemos aplicar los resultados del § 1 (pág. 334). Es evidente que las curvas AC y CB son extremales. En efecto, en estos segmentos $y=y(x)$ es solución de la ecuación de Euler, ya que si consideramos que una de estas curvas ya fue hallada y variamos la otra, el problema se reduce a hallar el extremo de la funcional $\int_{x_0}^{x_1} F\,dx$ (o bien $\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$) en el problema con puntos frontera fijos. Por esto, calculando la variación de la funcional supondremos ya que ésta se considera sólo en las extremales que tienen el punto angular C. Entonces

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx=[F+(\varphi'-y')\,F_{y'}]_{x=x_1-0}\,\delta x_1$$

y

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx=-[F+(\varphi'-y')\,F_{y'}]_{x=x_1+0}\,\delta x_1$$

(véase la pág. 338), donde los símbolos $x=x_1-0$ y $x=x_1+0$ significan que se toma el límite de las magnitudes entre paréntesis al tender al punto x_1 en el primer caso por la izquierda (por el lado de los valores de x menores que x_1), y en el segundo caso por la derecha (por el lado de los valores de x mayores que x_1). Como en el punto de reflexión es discontinua sólo la derivada y', entonces en el primer caso hay que tomar la derivada izquierda en el punto angular, y en el segundo caso, la derivada derecha.

La condición $\delta v=0$ toma la forma

$$[F+(\varphi'-y')\,F_{y'}]_{x=x_1-0}\,\delta x_1-[F+(\varphi'-y')\,F_{y'}]_{x=x_1+0}\,\delta x_1=0$$

o, como δx_1 varía en forma arbitraria, entonces

$$[F+(\varphi'-y')\,F_{y'}]_{x=x_1-0}=[F+(\varphi'-y')\,F_{y'}]_{x=x_1+0}.$$

o bien

$$F(x_1,\ y_1,\ y'(x_1-0))+$$
$$+(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0))F_{y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1-0))=F(x_1,\ y_1,\ y'(x_1+0))+$$
$$+(\varphi'(x_1)-y'(x_1+0))\,F_{y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1+0)).$$

Esta condición de reflexión toma una forma especialmente simple para las funcionales de la forma

$$v=\int_{x_0}^{x_1} A(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

más precisamente:

$$A(x_1,\ y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1-0}=$$
$$=A(x_1,\ y_1)\left[\sqrt{1+y'^2}+\frac{(\varphi'-y')\,y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1+0}$$

o bien, simplificando y dividiendo entre $A(x_1,\ y_1)$, bajo la hipótesis de que $A(x_1,\ y_1)\neq 0$,

$$\left.\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1-0}=\left.\frac{1+\varphi'y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1+0}.$$

Designando por la letra α al ángulo entre la tangente a la curva $y=\varphi(x)$ y el eje de las abscisas, y por β_1 y β_2 respectivamente

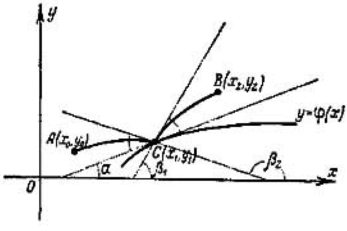

Fig 7.8

a los ángulos de inclinación con respecto al eje de las abscisas de las tangentes izquierda y derecha a la extremal en el punto C de reflexión (fig. 7.8), obtenemos

$$y'(x_1-0)=\operatorname{tg}\beta_1,\quad y'(x_1+0)=\operatorname{tg}\beta_2;\quad \varphi'(x_1)=\operatorname{tg}\alpha.$$

La condición en el punto de reflexión toma la forma

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta_1}{\sec\beta_1}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta_2}{\sec\beta_2}$$

o, después de simplificar y multiplicar por $\cos\alpha$:

$$-\cos(\alpha-\beta_1)=\cos(\alpha-\beta_2).$$

De aquí se deduce la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión.

Si el punto se mueve en cierto medio con velocidad $v(x, y)$, el tiempo t que transcurre al desplazarse un punto desde la posición $A(x_0, y_0)$ hasta la $B(x_1, y_1)$ es igual a la integral $\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y)}\,dx$, que pertenece al tipo de funcionales consideradas $\int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ y, por lo tanto, para cualquier ley de variación de la velocidad $v(x, y)$, en el punto de reflexión el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

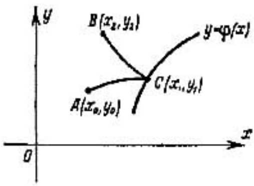

Fig. 7.9

Si los puntos A, B y C estuvieran distribuidos de otro modo, por ejemplo como en la fig. 7.9, entonces para obtener la misma condición en el punto de reflexión sería más cómodo realizar el

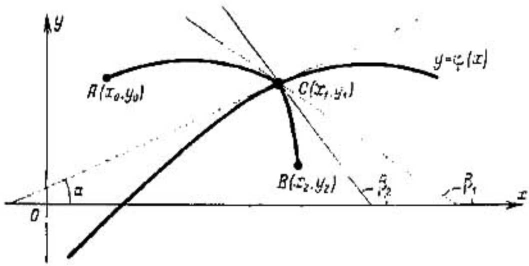

Fig. 7.10

análisis en forma paramétrica, debido a que la función $y=y(x)$ es multiforme.

R e f r a c c i ó n d e l a s e x t r e m a l e s. Supongamos que la función subintegral de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ en la región considerada tiene una línea de discontinuidad $y=\varphi(x)$, y los puntos frontera A y B están situados a distintos lados de dicha línea (fig. 7.10).

Representemos la funcional v en la forma

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F_1(x,\ y,\ y')\,dx+\int_{x_1}^{x_2} F_2(x,\ y,\ y')\,dx,$$

donde $F_1(x,\ y,\ y')=F(x,\ y,\ y')$ de un lado de la línea de discontinuidad, y $F_2(x,\ y,\ y')=F(x,\ y,\ y')$ del otro lado de la misma.

Supongamos que F_1 y F_2 son derivables tres veces. En el punto C de intersección de la curva buscada con la línea de discontinuidad es natural esperar que haya un punto angular. Los arcos AC y CB son evidentemente extremales (esto se deduce, nuevamente, de que al fijar uno de estos arcos y variar sólo el otro, se obtiene un problema con puntos frontera fijos). Por esto, se pueden tomar como curvas de comparación sólo quebradas compuestas por dos arcos de extremal; entonces la variación, en virtud de que el punto frontera $C(x_1,\ y_1)$ puede desplazarse por la curva $y=\varphi(x)$, toma la forma siguiente (véase la pág. 338):

$$\delta v=\delta\int_{x_0}^{x_1} F_1(x,\ y,\ y')\,dx+\delta\int_{x_1}^{x_2} F_2(x,\ y,\ y')\,dx=$$

$$=[F_1+(\varphi'-y')F_{1y'}]_{x=x_1-0}\,\delta x_1-[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}]_{x=x_1+0}\,\delta x_1,$$

y la condición necesaria fundamental de extremo $\delta v=0$ se reduce a la igualdad

$$[F_1+(\varphi'-y')F_{1y'}]_{x=x_1-0}=[F_2+(\varphi'-y')F_{2y'}]_{x=x_1+0}.$$

Como en el punto de refracción puede ser discontinua sólo y', entonces esta condición de refracción puede escribirse también en la forma siguiente:

$$\begin{gathered}F_1(x_1,\ y_1,\ y'(x_1-0))+\\+(\varphi'(x_1)-y'(x_1-0))\,F_{1y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1-0))=\\=F_2(x_1,\ y_1,\ y'(x_1+0))+\\+(\varphi'(x_1)-y'(x_1+0))\,F_{2y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1+0)).\end{gathered}$$

Esta condición de refracción, conjuntamente con la ecuación $y_1=\varphi(x_1)$, da la posibilidad de determinar las coordenadas del punto C.

Si, en particular, la funcional v es igual a

$$\int_{x_0}^{x_2} A(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} A_1(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx+\int_{x_1}^{x_2} A_2(x,\ y)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

entonces la condición de refracción toma la forma

$$A_1(x, y)\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=x_1-0} = A_2(x, y)\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{x=x_1+0},$$

o bien, conservando las notaciones de las págs. 347—348, $y'(x_1-0)=\operatorname{tg}\beta_1$, $y'(x_1+0)=\operatorname{tg}\beta_2$, $\varphi'(x_1)=\operatorname{tg}\alpha$, después de simplificar y multiplicar por $\cos\alpha$, tendremos:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)}=\frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)} \text{ o bien } \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right]}=\frac{A_2(x_1, y_1)}{A_1(x_1, y_1)},$$

lo cual es una generalización de la conocida ley de refracción de la luz: la razón entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del de refracción es igual a la razón entre las velocidades

$$v_1(x, y)=\frac{1}{A_1(x, y)} \quad \text{y} \quad v_2(x, y)=\frac{1}{A_2(x, y)} \text{ (cfr. la pág. 348)}$$

en los medios en cuya frontera tiene lugar la refracción.

No debe pensarse que las extremales con puntos angulares aparecen sólo en los problemas de reflexión o refracción de extremales. El extremo puede alcanzarse en extremales con puntos angulares aún en los problemas sobre el extremo de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$, donde la función F es derivable tres veces, y las curvas admisibles deben pasar por los puntos frontera A y B, sin ninguna clase de condiciones adicionales

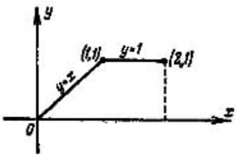

Fig 7.11

Estudiemos, por ejemplo, la funcional

$$v=\int_0^2 y'^2(1-y')^2\,dx;\ y(0)=0,\ y(2)=1.$$

Como la función subintegral es positiva, entonces $v\geqslant 0$ y, por lo tanto, si en cierta curva la funcional $v=0$, entonces en esta curva se realiza con seguridad un mínimo absoluto de esta funcional, es decir, el valor mínimo de la funcional en las curvas admisibles. No es difícil ver que en la quebrada $y=x$ cuando $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=1$ para $1<x\leqslant 2$ (fig. 7.11) la funcional $v=0$, ya que en esta quebrada la función subintegral es idénticamente nula. Por consiguiente, en esta quebrada se realiza un mínimo absoluto de la funcional.

El mínimo absoluto de la funcional $v=0$ se alcanza también en las líneas quebradas representadas en la fig. 7.13. Por otra parte, es fácil ver que en las curvas lisas *) los valores de la funcional son estrictamente mayores que cero, a pesar de que puedan hacerse infinitamente próximos a cero. En efecto, la función subintegral se anula sólo cuando $y=x+C_1$ o cuando $y=C_2$; pero las líneas formadas por segmentos de rectas de estas familias que pasan por los puntos $A(0, 0)$ y $B(2, 1)$ pueden ser sólo quebradas. Sin embargo, "alisando" los puntos angulares mediante la variación correspondiente de la función en un entorno arbitrariamente pequeño de estos puntos, se puede obtener una curva lisa en la cual el valor de la funcional se diferencie arbitrariamente poco del valor de ésta en la quebrada. De este modo, $v=0$ es la cota inferior de los valores de la funcional v en las curvas lisas; pero esta cota inferior no se alcanza en las curvas lisas, sino en las curvas lisas a trozos.

Hallemos las condiciones que deben satisfacer las soluciones con puntos angulares del problema sobre el extremo de la funcional $v[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$. Es evidente que los arcos lisos que forman la extremal quebrada deben ser curvas integrales de la ecuación de Euler. Esto se deduce de que si fijamos todos los segmentos de la quebrada, a excepción de uno, y variamos sólo éste, el problema se reduce al problema simple con fronteras fijas y, por lo tanto, este segmento debe ser un arco de extremal.

Suponiendo, para simplificar la escritura, que la extremal quebrada tiene sólo un punto angular **), hallemos las condiciones que deben satisfacerse en dicho punto:

$$v=\int\limits_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')\,dx=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx+\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx,$$

donde x_1 es la abscisa del punto angular (fig. 7.12). Considerando que las curvas AC y CB son curvas integrales de la ecuación de Euler, y que el punto C puede desplazarse arbitrariamente, obtenemos, de acuerdo con el § 1, pág. 338:

$$\begin{gathered}\delta v=(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1-0}\,\delta x_1+\\ +F_{y'}\big|_{x=x_1-0}\,\delta y_1-(F-y'F_{y'})\big|_{x=x_1+0}\,\delta x_1-F_{y'}\big|_{x=x_1+0}\,\delta y_1=0,\end{gathered}$$

*) Véase la nota al pie de la pág. 24 (*N. de la Red.*)

**) Si hay varios puntos angulares, entonces a cada uno de ellos se le puede aplicar el mismo razonamiento.

de donde

$$(F-y'F_{y'})|_{x=x_1-0}\,\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1-0}\,\delta y_1=$$
$$=(F-y'F_{y'})|_{x=x_1+0}\,\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1+0}\,\delta y_1,$$

o bien, como δx_1 y δy_1 son independientes, tendremos

$$(F-y'F_{y'})|_{x=x_1-0}=(F-y'F_{y'})|_{x=x_1+0}$$

y

$$F_{y'}|_{x=x_1-0}=F_{y'}|_{x=x_1+0}.$$

Estas condiciones, conjuntamente con las condiciones de continuidad de la extremal buscada, permiten determinar las coordenadas del punto angular.

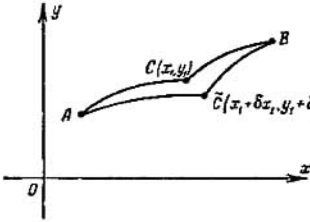

Fig. 7.12

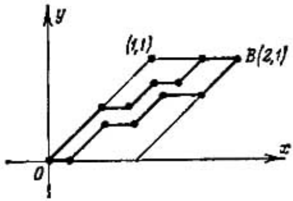

Fig. 7.13

Ejemplo 1. Hallar las extremales quebradas (si existen) de la funcional $v=\int_0^a (y'^2-y^2)\,dx$. Escribimos la segunda condición que debe cumplirse en el punto angular, $F_{y'}/_{x=x_1-0}=F_{y'}/_{x=x_1+0}$, en este caso, $2y'(x_1-0)=2y'(x_1+0)$, de donde $y'(x_1-0)=y'(x_1+0)$, o sea que la derivada y' es continua en el punto x_1, y en el punto angular no. Por consiguiente, en el problema considerado el extremo puede alcanzarse sólo en las curvas lisas.

Ejemplo 2. Hallar las extremales quebradas de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_2} y'^2(1-y')^2\,dx$. Como la función subintegral depende sólo de y', entonces las extremales son líneas rectas: $y=Cx+\bar{C}$ (véase la pág. 308). Las condiciones en el punto angular toman en este caso la forma

$$-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1-0}=-y'^2(1-y')(1-3y')|_{x=x_1+0}$$

y

$$2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1-0}=2y'(1-y')(1-2y')|_{x=x_1+0}.$$

Estas condiciones, excluyendo la posibilidad trivial de que

$$y'(x_1-0)=y'(x_1+0),$$

se satisfacen cuando

$$y'(x_1-0)=0$$

e

$$y'(x_1+0)=1,$$

o bien

$$y'(x_1-0)=1$$

e

$$y'(x_1+0)=0.$$

Por lo tanto, las extremales quebradas se pueden componer sólo de segmentos de recta pertenecientes a las familias $y=C_1$, e $y=x+C_2$ (fig. 7.13).

§ 4. VARIACIONES UNILATERALES

En ciertos problemas variacionales sobre el extremo de la funcional $v[y(x)]$ pueden imponerse limitaciones a la clase de curvas admisibles que les impida pasar por los puntos de cierta

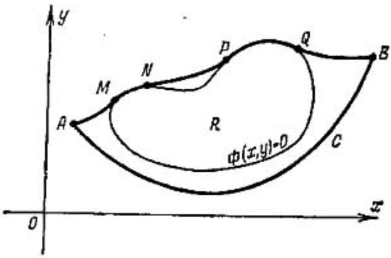

Fig. 7.14

región R, limitada por la curva $\Phi(x, y)=0$ (fig. 7.14). En estos problemas, la curva C que realiza el extremo o bien pasa enteramente fuera de la frontera de la región R, y entonces debe ser extremal — puesto que en este caso la región prohibida R no influye en absoluto en las propiedades de la funcional y de su variación en un entorno de la curva C, y los razonamientos del capítulo 6 siguen siendo válidos —, o bien la curva C se compone de arcos que se hallan fuera de la frontera de R y de partes de dicha frontera. En este último caso surge una nueva situación: en las partes de la frontera de la región R son posibles sólo variaciones unilaterales de la curva C, ya que las curvas admisibles no pueden penetrar dentro de la región. Las partes de la curva que se encuentran fuera de la frontera de la región R deben ser, como antes, extremales, puesto que si variamos la curva C

sólo en este intervalo, que permite variaciones bilaterales, la región R no influirá en la variación de y, y las deducciones del capítulo 6 seguirán siendo válidas.

De este modo, en el problema considerado el extremo puede alcanzarse sólo en las curvas compuestas por arcos de extremales y por partes de la frontera de la región R. Por consiguiente, para construir la curva buscada que realiza el extremo, hay que obtener las condiciones en los puntos de paso de la extremal a la frontera de la región R que permitan determinar estos puntos. En el caso

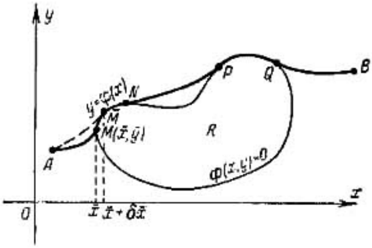

Fig 7.15

representado en la fig. 7.15, deben obtenerse las condiciones en los puntos M, N, P y Q. Obtengamos, por ejemplo, la condición en el punto M. Se podrían obtener análogamente las condiciones en los demás puntos de paso de la extremal a la frontera de la región.

Al calcular la variación δv de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx=\int_{x_0}^{\bar{x}} F(x,\ y,\ y')\,dx+\int_{\bar{x}}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

se puede considerar que la variación se efectúa sólo por el desplazamiento del punto $M(\bar{x},\ \bar{y})$ por la curva $\Phi(x,\ y)=0$, o sea, se puede considerar que para cualquier posición del punto M en la curva $\Phi(x,\ y)=0$ el arco AM ya es extremal, y el segmento $MNPQB$ no se varía. La funcional

$$v_1=\int_{x_0}^{\bar{x}} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

tiene un punto frontera móvil que se desplaza por la frontera de la región R, cuya ecuación es $\Phi(x,\ y)=0$, o bien en forma resuelta — en un entorno del punto M — con respecto a y: $y=\varphi(x)$.

Por lo tanto, de acuerdo con el § 1 (pág. 338)

$$\delta v_1 = [F + (\varphi' - y') F_{y'}]_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x}.$$

La funcional $v_2 = \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ también tiene un punto frontera móvil $(\bar{x}, \bar{y})$. Sin embargo, en un entorno de este punto la curva $y=\varphi(x)$, en la cual puede alcanzarse el extremo, no se varía. Por lo tanto, el cambio de la funcional v_2, al desplazarse el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ a la posición $(\bar{x}+\delta\bar{x}, \bar{y}+\delta\bar{y})$, se reduce sólo al cambio del límite inferior de integración, y

$$\Delta v_2 = \int_{\bar{x}+\delta\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\,dx - \int_{\bar{x}}^{x_1} F(x, y, y')\,dx =$$

$$= -\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\delta\bar{x}} F(x, y, y')\,dx = -\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\delta\bar{x}} F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\,dx,$$

puesto que en el intervalo $(\bar{x}, \bar{x}+\delta\bar{x})$ es $y=\varphi(x)$.

Aplicando el teorema del valor medio y la continuidad de la función F, se obtiene

$$\Delta v_2 = -F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\big|_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x} + \beta\cdot\delta\bar{x},$$

donde $\beta \to 0$ cuando $\delta\bar{x} \to 0$.

Por lo tanto, $\delta v_2 = -F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\big|_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x}$,

$$\delta v = \delta v_1 + \delta v_2 =$$

$$= [F(x, y, y') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x} -$$

$$- F(x, y, \varphi')\big|_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x} = [F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') -$$

$$-(y' - \varphi') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}}\, \delta\bar{x},$$

ya que $y(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$.

La condición necesaria de extremo $\delta v = 0$, debido a la arbitrariedad de $\delta\bar{x}$, toma la forma

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (y' - \varphi') F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} = 0.$$

Aplicando el teorema del valor medio, obtenemos

$$(y' - \varphi')[F_{y'}(x, y, q) - F_{y'}(x, y, y')]_{x=\bar{x}} = 0,$$

donde q es un valor intermedio entre $\varphi'(\bar{x})$ e $y'(\bar{x})$. Aplicando nuevamente el teorema del valor medio, tendremos

$$(y' - \varphi')(q - y') F_{y'y'}(x, y, \bar{q})\big|_{x=\bar{x}} = 0,$$

donde $\bar{q}$ es un valor intermedio entre q e $y'(\bar{x})$. Supongamos que

$F_{y'y'}(x, y, \bar{q}) \neq 0$. Esta hipótesis es natural para muchos problemas variacionales (véase el capítulo 8). En este caso, la condición en el punto M tiene la forma $y'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$ ($q = y'$ sólo cuando $y'(\bar{x}) = \varphi'(\bar{x})$, puesto que q es un valor intermedio entre $y'(\bar{x})$ y $\varphi'(\bar{x})$).

Por lo tanto, en el punto M la extremal AM y la curva de frontera MN tienen una tangente común (la tangente izquierda para la curva $y = y(x)$, y la derecha para la curva $y = \varphi(x)$). De este modo, *la extremal es tangente a la frontera de la región R en el punto M.*

EJERCICIOS DEL CAPITULO 7

1. Hallar la solución con un punto angular del problema sobre el mínimo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^4 (y'-1)^2 (y'+1)^2\, dx; \quad y(0)=0; \quad y(4)=2.$$

2. ¿Existen soluciones con puntos angulares en el problema sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2)\, dx, \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1\,?$$

3. ¿Existen soluciones con puntos angulares en el problema sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} (y'^4 - 6y'^2)\, dx; \quad y(0)=0; \quad y(x_1) = y_1\,?$$

4. Hallar la condición de transversalidad para la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y)\, e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1+y'^2}\, dx, \quad A(x, y) \neq 0.$$

5. Aplicando la condición necesaria fundamental de extremo $\delta v = 0$, hallar la función en la cual puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y''^2 - 2xy)\, dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$y(1) = \frac{1}{120}; \quad y'(1) \text{ no está dado.}$$

6. Hallar las curvas en las cuales puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^{10} y'^3\, dx; \quad y(0)=0; \quad y(10)=0$$

con la condición de que las curvas admisibles no puedan penetrar dentro del círculo delimitado por la circunferencia

$$(x-5)^2+y^2=9.$$

7. Hallar la función en la cual puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{\pi/4}(y^2-y'^2)\,dx;\qquad y(0)=0,$$

si el otro punto frontera puede deslizarse por la recta $x=\frac{\pi}{4}$.

8. Aplicando sólo la condición necesaria fundamental $\delta v=0$, hallar la curva en la cual puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx;\ y(0)=0,$$

si el segundo punto frontera $(x_1,\ y_1)$ puede desplazarse por la circunferencia $(x-9)^2+y^2=9$.

CAPITULO 8

Condiciones suficientes de extremo

§ 1. CAMPO DE EXTREMALES

Si en el plano (x, y) por cada punto de cierta región D pasa una y sólo una curva de la familia $y=y(x, C)$, se dice que esta familia de curvas forma un campo en la región D, o, más exactamente, un campo propio. El coeficiente angular de la tangente $p(x, y)$ a la curva de la familia $y=y(x, C)$ que pasa por el punto (x, y) se llama *inclinación (o declive) del campo* en el punto (x, y).

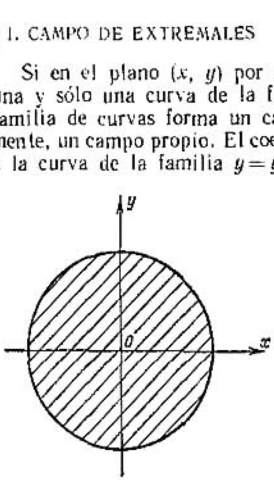

Fig. 8.1

Por ejemplo, las rectas paralelas $y=x+C$ forman un campo dentro del círculo $x^2+y^2\leqslant 1$ (fig. 8.1), y su inclinación es $p(x, y)=1$. Por el contrario, la familia de parábolas $y=(x-a)^2-1$ (fig. 8.2) no forma un campo dentro del mismo círculo, debido a que en su interior las parábolas de la familia considerada se cortan.

Si todas las curvas de la familia $y=y(x, C)$ pasan por cierto punto (x_0, y_0), es decir, forman un haz de curvas, entonces éstas con seguridad no forman un campo propio en la región D si el centro del haz pertenece a ésta. Sin embargo, si las curvas del haz cubren toda la región D y se cortan en su interior sólo en el centro del haz, es decir, se cumplen las condiciones impuestas al campo en todos los puntos distintos del centro del haz, se dice que la familia $y=y(x, C)$ forma también un campo, llamado en este caso *central*, a diferencia del campo propio (fig. 8.3).

Por ejemplo, el haz de sinusoides $y=C\operatorname{sen} x$ forma un campo central para $0\leqslant x\leqslant a$, $a<\pi$ (fig. 8.4). El mismo haz de sinusoides forma un campo propio en un entorno suficientemente pequeño del segmento $\delta\leqslant x\leqslant a$ del eje de las abscisas, donde $\delta>0$, $a<\pi$

(fig. 8.4). El mismo haz de sinusoides no forma campo en un entorno del segmento $0 \leqslant x \leqslant a_1$, $a_1 > \pi$, del eje de las abscisas (fig. 8.4).

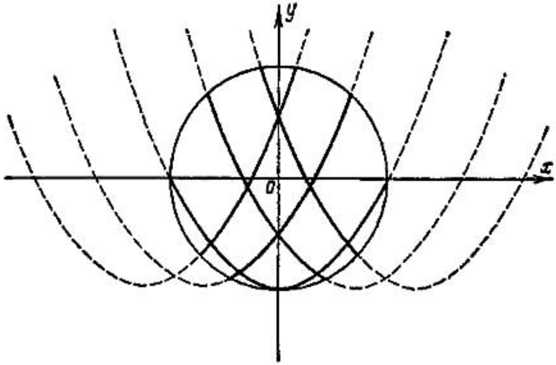

Fig. 8.2

Si un campo central o propio está formado por una familia de extremales de cierto problema variacional, se llama *campo de extremales*.

El concepto de campo se generaliza casi sin modificaciones también al caso de un espacio de cualquier dimensión. La familia $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ forma un campo en la región D del espacio $x, y_1, \ldots, y_n$,

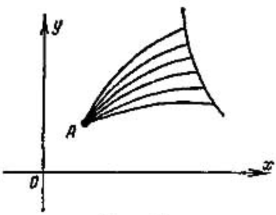

Fig. 8.3

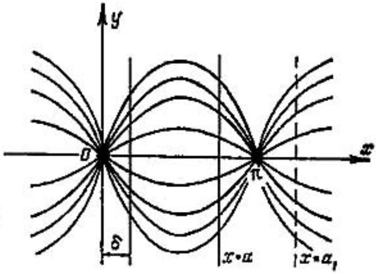

Fig. 8.4

si por cada punto de dicha región pasa una y sólo una curva de la familia $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n)$. Se llaman *funciones de inclinación* del campo $p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a las derivadas parciales de las funciones

$y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ con respecto a x, calculadas en el punto $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$; por consiguiente, para obtener $p_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ hay que tomar $\frac{\partial}{\partial x} y_i(x, C_1, C_2, \ldots C_n)$ y sustituir $C_1, C_2, \ldots, C_n$ por sus expresiones mediante las coordenadas $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. En forma análoga se define también el campo central.

Supongamos que la curva $y=y(x)$ es extremal del problema variacional sobre el extremo de la funcional simple

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

con puntos frontera $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ fijos. Se dice que la extremal $y=y(x)$ está incluida en un campo de extremales, si ha sido dada una familia de extremales $y=y(x, C)$ que forma un campo,

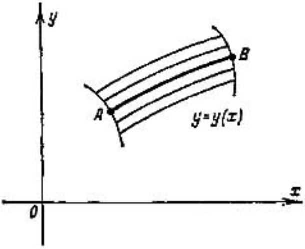

Fig. 8.5

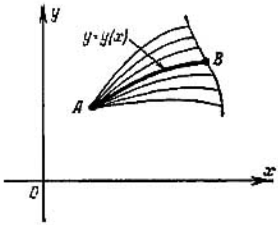

Fig. 8.6

contiene a la extremal $y=y(x)$ para cierto valor $C=C_0$ y dicha extremal no pertenece a la frontera de la región D en la cual la familia $y=y(x, C)$ forma un campo (fig. 8.5). Si el haz de extremales con centro en el punto $A(x_0, y_0)$ forma un campo en un entorno de la extremal $y=y(x)$, que pasa por este punto, entonces con esto se halla un campo central que contiene a la extremal dada $y=y(x)$. Como parámetro de la familia se puede tomar en este caso el coeficiente angular de la tangente a las curvas del haz en el punto $A(x_0, y_0)$ (fig. 8.6).

Ejemplo 1. Se da la funcional

$$\int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx;$$

se pide incluir el segmento de la extremal $y=0$ que une los puntos $(0, 0)$ y $(a, 0)$, donde $0 < a < \pi$, en un campo central de extremales. La solución general de la ecuación de Euler $y''+y=0$ (véase la pág. 305, ejemplo 1) tiene la forma $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x$. De la condición de que las extremales pasen por el punto (0, 0) se obtiene $C_1=0$, $y=C_2\operatorname{sen} x$; las curvas de este haz forman un campo central en el segmento $0\leqslant x\leqslant a$, $a<\pi$ que incluye la extremal $y=0$

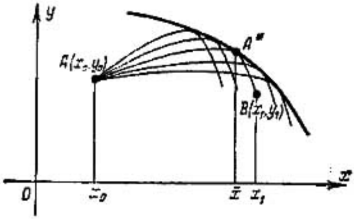

Fig. 8.7

para $C_2=0$. El parámetro C_2 de la familia es igual a la derivada y'_x en el punto (0, 0). Si en este mismo problema fuera $a\geqslant\pi$, la familia $y=C_2\operatorname{sen} x$ no formaría campo (véase la pág. 359).

Es sabido que dos curvas infinitamente cercanas de la familia $F(x, y, C)=0$ se cortan en los puntos de la curva C-discriminante, la cual se determina por las ecuaciones

$$F(x, y, C)=0; \qquad \frac{\partial F}{\partial C}=0.$$

Recordemos que en la curva C-discriminante se incluyen, en particular, la envolvente de la familia y los lugares geométricos de los puntos múltiples de las curvas de dicha familia. Si $F(x, y, C)=0$ es la ecuación de un haz de curvas, su centro pertenece también a la curva C-discriminante. Por esto, si se toma un haz de extremales $y=y(x, C)$ que pasan por el punto (x_0, y_0) y se determina su curva C-discriminante $\Phi(x, y)=0$, entonces las curvas próximas de la familia $y=y(x, C)$ se cortarán en las cercanías de la curva $\Phi(x, y)=0$. En particular, las curvas de esta familia próximas a la extremal considerada $y=y(x)$, que pasa por los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$, se cortarán en puntos cercanos a los puntos de tangencia (o de intersección) de la curva $y=y(x)$ con la curva C-discriminante (véase la fig. 8.7, en donde la curva C-discriminante está representada por una línea gruesa). Si el arco AB de la extremal $y=y(x)$ no tiene puntos comunes diferentes de A con la curva C-discriminante del haz de extremales que incluye a la extremal dada, entonces las extremales del haz suficientemente próximas al arco AB no se cortan, es decir, forman un campo central que incluye al arco AB en un entorno de este arco (fig. 8.8)

Si el arco AB de la extremal $y=y(x)$ tiene un punto común A^*, diferente del punto A, con la curva C-discriminante del haz $y=y(x, C)$, entonces las curvas del haz próximas a $y=y(x)$ pueden cortarse entre sí y con la curva $y=y(x)$ en las proximidades del punto A^* y, en general, no forman campo (fig. 8.7). El punto A^* se llama *conjugado* del punto A.

El resultado obtenido se puede enunciar así: *para construir un campo central de extremales con centro en el punto A que contenga el arco AB de la extremal, es suficiente que el punto A^* conjugado*

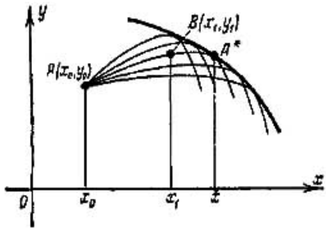

Fig. 8.8

del A no pertenezca al arco AB. Esta condición de la posibilidad de la construcción de un campo de extremales que incluya a la extremal dada se llama *condición de Jacobi.*

No es difícil formular esta condición también en forma analítica. Sea $y=y(x, C)$ la ecuación del haz de extremales con centro en el punto A; el parámetro C se puede considerar, para fijar ideas, que coincide con el coeficiente angular y' de las extremales del haz en el punto A. La curva C-discriminante se determina por las ecuaciones

$$y=y(x, C); \quad \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}=0.$$

A lo largo de cada curva fija de la familia la derivada $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ es una función sólo de x. Denotaremos abreviadamente por u dicha función: $u=\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$, donde C está dado; de aquí $u'_x=\frac{\partial^2 y(x,C)}{\partial C\partial x}$. Las funciones $y=y(x, C)$ son soluciones de la ecuación de Euler; por lo tanto,

$$F_y(x, y(x, C), y'_x(x, C))-\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y(x, C), y'_x(x,C))\equiv 0.$$

Derivando esta identidad con respecto a C y haciendo $\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}=u$, se obtiene

$$F_{yy}u+F_{yy'}u'-\frac{d}{dx}(F_{yy'}u+F_{y'y'}u')=0,$$

o bien

$$\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}u')=0.$$

Aquí $F_{yy}(x, y, y')$, $F_{yy'}(x, y, y')$ y $F_{y'y'}(x, y, y')$ son funciones conocidas de x, debido a que el segundo argumento y es igual a la solución $y=y(x, C)$ de la ecuación de Euler, tomada para el valor $C=C_0$ que corresponde a la extremal AB. Esta ecuación lineal homogénea de segundo orden con respecto a u se llama *ecuación de Jacobi*.

Si la solución $u=\frac{\partial y(x, C)}{\partial C}$ de esta ecuación que se anula en el centro del haz para $x=x_0$ (el centro del haz siempre pertenece a la curva C-discriminante) se anula también en algún otro punto del intervalo $x_0<x<x_1$, entonces el punto conjugado de A, que se determina por las ecuaciones

$$y=y(x, C_0) \text{ y } \frac{\partial y(x, C)}{\partial C}=0, \text{ o bien } u=0,$$

pertenece al arco AB de la extremal *). Si, en cambo, existe una solución de la ecuación de Jacobi que se anule para $x=x_0$ y no se anule en ningún otro punto del segmento $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, entonces no hay puntos conjugados de A en el arco AB; la condición de Jacobi se cumple y se puede incluir el arco AB de la extremal en un campo central de extremales con centro en el punto A.

Observación. Se puede demostrar que la condición de Jacobi es necesaria para que se alcance un extremo, es decir, para la curva AB que realiza un extremo el punto conjugado de A no puede estar en el intervalo $x_0<x<x_1$.

Ejemplo 2. ¿Se cumple la condición de Jacobi para la extremal de la funcional $v=\int_0^a (y'^2-y^2)\,dx$ que pasa por los puntos $A(0, 0)$ y $B(a, 0)$?

La ecuación de Jacobi tiene la forma

$$-2u-\frac{d}{dx}(2u')=0, \text{ o bien } u''+u=0,$$

de donde

$$u=C_1 \operatorname{sen}(x-C_2).$$

*) Obsérvese que todas las soluciones no triviales de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden que satisfacen la condición $u(x_0)=0$ se diferencian entre sí sólo por un factor constante no nulo y, por lo tanto, se anulan simultáneamente.

Como $u(0)=0$, entonces $C_2=0$; $u=C_1 \operatorname{sen} x$. La función u se anula en los puntos $x=k\pi$, donde k es un entero; por lo tanto, si $0<a<\pi$, la función u se anula en el segmento $0 \leqslant x \leqslant a$ sólo en el punto $x=0$, y la condición de Jacobi se cumple. Si, en cambio, $a \geqslant \pi$, la función u se anula en el segmento $0 \leqslant x \leqslant a$ también por lo menos en el punto $x=\pi$, y la condición de Jacobi no se cumple (compárese con el ejemplo 1, pág. 360).

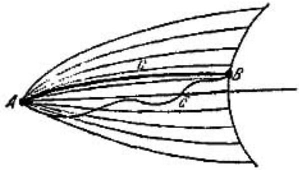

Fig. 8.9

Ejemplo 3. ¿Se cumple la condición de Jacobi para la extremal de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^a (y'^2+y^2+x^2)\,dx$$

que pasa por los puntos $A(0, 0)$ y $B(a, 0)$?

La ecuación de Jacobi tiene la forma $u''-u=0$. Tomemos su solución general en la forma $u=C_1 \operatorname{sh} x+C_2 \operatorname{ch} x$. De la condición $u(0)=0$ se halla $C_2=0$, $u=C_1 \operatorname{sh} x$. Las curvas del haz $u=C_1 \operatorname{sh} x$ cortan el eje Ox sólo en el punto $x=0$. La condición de Jacobi se cumple para todo a.

§ 2. FUNCION $E(x, y, p, y')$

Supongamos que en el problema simple sobre el extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx; \quad y(x_0)=y_0;\ y(x_1)=y_1$$

se cumple la condición de Jacobi y, por consiguiente, la extremal C que pasa por los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ puede ser incluida en un campo central con inclinación igual a $p(x, y)$ (fig. 8.9)*). Transformemos el incremento $\Delta v=\int_{\tilde{C}} F(x, y, y')\,dx -$ $-\int_C F(x, y, y')\,dx$ a una forma más cómoda para su estudio, para determinar el signo del incremento Δv de la funcional v al pasar de la extremal C a cierta curva próxima admisible $\tilde{C}$. (Los símbolos

$$\int_{\tilde{C}} F(x, y, y')\,dx \quad \text{y} \quad \int_C F(x, y, y')\,dx$$

---

*) Se hubiera podido suponer que la extremal está incluida no en un campo central, sino en uno propio.

representan los valores de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ tomados respectivamente por los arcos de las curvas $\tilde{C}$ y C).

Consideremos la funcional auxiliar

$$\int_{\tilde{C}} \left[F(x, y, p)+\left(\frac{dy}{dx}-p\right) F_p(x, y, p)\right] dx,$$

que se transforma en $\int_C F(x, y, y')\,dx$ en la extremal C, en virtud de que $\frac{dy}{dx}=p$ en las extremales del campo. Por otro lado, la misma funcional auxiliar

$$\int_{\tilde{C}} \left[F(x, y, p)+\left(\frac{dy}{dx}-p\right) F_p(x, y, p)\right] dx,$$

o bien

$$\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p)-pF_p(x, y, p)]\,dx+F_p(x, y, p)\,dy \qquad (8.1)$$

es la integral de una diferencial total. En efecto, la diferencial de la función $\bar{v}(x, y)$, en la cual se transforma la funcional $v[y(x)]$ en las extremales del campo, tiene, según el § 1 del capítulo 7 (pág. 338), la forma

$$d\bar{v}=[F(x, y, y')-y' F_{y'}(x, y, y')]\,dx+F_{y'}(x, y, y')\,dy,$$

y se diferencia sólo por la notación del coeficiente angular de la tangente a las extremales del campo de la expresión subintegral en la integral auxiliar (8.1) considerada.

De este modo, la integral $\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p)+(y'-p) F_p]\,dx$ coincide con la $\int_C F(x, y, y')\,dx$ en la extremal C, y como la funcional $\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p)+(y'-p) F_p]\,dx$ es la integral de una diferencial total—y, por lo tanto, no depende del camino de integración—, entonces

$$\int_C F(x, y, y')\,dx-\int_{\tilde{C}} [F(x, y, p)+(y'-p) F_p(x, y, p)]\,dx$$

no sólo para $\tilde{C}=C$, sino también para cualquier $\tilde{C}$.

Por lo tanto, el incremento

$$\Delta v = \int_{\bar{C}} F(x,\ y,\ y')\,dx - \int_{C} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

puede ser reducido a la forma siguiente:

$$\Delta v = \int_{\bar{C}} F(x,\ y,\ y')\,dx - \int_{\bar{C}} [F(x,\ y,\ p) + (y'-p)\,F_p(x,\ y,\ p)]\,dx =$$

$$= \int_{\bar{C}} [F(x,\ y,\ y') - F(x,\ y,\ p) - (y'-p)\,F_p(x,\ y,\ p)]\,dx.$$

La función subintegral se llama *función de Weierstrass*, y se denota por $E(x,\ y,\ p,\ y')$:

$$E(x,\ y,\ p,\ y') = F(x,\ y,\ y') - F(x,\ y,\ p) - (y'-p)\,F_p(x,\ y,\ p).$$

En estas notaciones

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1} E(x,\ y,\ p,\ y')\,dx.$$

Es evidente que una condición suficiente para que la funcional v tenga un mínimo en la curva C es que la función E no sea negativa, puesto que si $E \geqslant 0$, entonces también $\Delta v \geqslant 0$; y una condición suficiente para que tenga un máximo será $E \leqslant 0$, debido a que en este caso también $\Delta v \leqslant 0$. Para que haya un mínimo débil es suficiente que la desigualdad $E(x,\ y,\ p,\ y') \geqslant 0$ (ó $E \leqslant 0$ en el caso de máximo) se cumpla para valores de x e y próximos al valor de x e y en la extremal C investigada, y para valores de y' cercanos a $p(x,\ y)$ en la misma extremal; para que haya un mínimo fuerte la misma desigualdad debe ser válida para las mismas x e y, pero para y' arbitrarias, puesto que en el caso de un extremo fuerte las curvas cercanas tendrán direcciones arbitrarias de las tangentes, y en el caso de extremo débil los valores de y' en las curvas cercanas son próximos a los valores $y' = p$ en la extremal C.

Por consiguiente, las siguientes condiciones serán suficientes para que la funcional v tenga un extremo en la curva C.

Para un extremo débil:

1. La curva C es una extremal que satisface las condiciones de frontera.

2. La extremal C puede ser incluida en un campo de extremales. Esta condición se puede sustituir por la de Jacobi.

3. La función $E(x,\ y,\ p,\ y')$ no cambia su signo en todos los puntos $(x,\ y)$ próximos a la curva C, y para valores de y' cerca-

nos a $p(x, y)$. En el caso de mínimo es $E \geqslant 0$, en el caso de máximo, $E \leqslant 0$.

Para un extremo fuerte:

1. La curva C es una extremal que satisface las condiciones de frontera.

2. La extremal C puede ser incluida en un campo de extremales. Esta condición se puede sustituir por la de Jacobi.

3. La función $E(x, y, p, y')$ no cambia su signo en todos los puntos (x, y) próximos a la curva C y para valores cualesquiera de y'. En el caso de mínimo es $E \geqslant 0$, en el caso de máximo, $E \leqslant 0$.

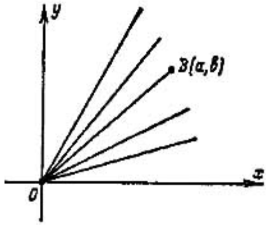

Fig. 8.10

Observación. Se puede demostrar que la condición de Weierstrass es necesaria. Más exactamente, si en un campo central que incluya a la extremal C la función E tiene signos opuestos en los puntos de la extremal para ciertas y', entonces no hay extremo fuerte. Si esta propiedad tiene lugar para valores de y' arbitrariamente próximos a p, tampoco hay extremo débil.

Ejemplo 1. Investigar el extremo de la funcional

$$v=\int_0^a y'^3\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(a)=b;$$

$$a>0,\quad b>0.$$

Las rectas $y=C_1x+C_2$ son extremales. El extremo puede alcanzarse sólo en la recta $y=\frac{b}{a}x$. El haz de rectas $y=C_1x$ con centro en el punto (0, 0) forma un campo central que incluye a la extremal $y=\frac{b}{a}x$ (fig. 8.10).

La función E es igual a

$$E(x, y, p, y')=y'^3-p^3-3p^2(y'-p)=(y'-p)^2(y'+2p).$$

En la extremal $y=\frac{b}{a}x$ la inclinación del campo es $p=\frac{b}{a}>0$, y si y' toma valores próximos a $p=\frac{b}{a}$, entonces $E \geqslant 0$ y, en consecuencia se cumplen todas las condiciones suficientes para que haya un mínimo débil. De este modo, en la extremal $y=\frac{b}{a}x$ hay un mínimo débil. Si, en cambio, y' toma valores arbitrarios, entonces $(y'+2p)$ puede tener cualquier signo y, por lo tanto, la función E no tiene signo constante; no se cumplen las condiciones suficientes para que haya un mínimo fuerte. Si se toma en cuenta la observación de la pág. 367, se puede afirmar que no hay mínimo fuerte en la recta $y=\frac{b}{a}x$.

Ejemplo 2. Analizar el extremo de la funcional

$$\int_0^a (6y'^2-y'^4+yy')\,dx, \quad y(0)=0; \quad y(a)=b; \quad a>0 \quad \text{y} \quad b>0,$$

en la clase de las funciones continuas con derivada primera continua.

Las rectas $y=C_1x+C_2$ son extremales. La recta $y=\frac{b}{a}x$ satisface las condiciones de frontera, y se incluye en el haz de extremales $y=C_1x$ que forman un campo central. La función E es igual a

$$E(x,\ y,\ p,\ y')=6y'^2-y'^4+yy'-6p^2+p^4-\\-yp-(y'-p)(12p-4p^3+y)=-(y'-\\-p)^2\,[y'^2+2py'-(6-3p^2)].$$

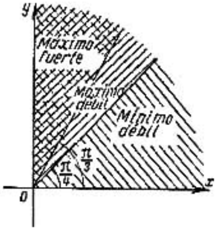

Fig. 8.11

El signo de E es opuesto al signo del último factor

$$y'^2+2py'-(6-3p^2).$$

Este factor se anula y puede cambiar su signo sólo cuando y' pasa por el valor $y'=-p\pm\pm\sqrt{6-2p^2}$. Para $6-2p^2\leqslant 0$ ó $p\geqslant\sqrt{3}$, para toda y' tendremos $[y'^2+2py'-(6-3p^2)]\geqslant\geqslant 0$; si, en cambio, $6-2p^2>0$ ó $p<\sqrt{3}$, la expresión $[y'^2+2py'-(6-3p^2)]$ cambia su signo. Si en este caso y' se diferencia suficientemente poco de p, la última expresión mantiene su signo positivo $p>1$, y negativo para $p<1$.

Por lo tanto, para $p=\frac{b}{a}<1$ ó $b<a$ se tiene un mínimo débil, puesto que $E\geqslant 0$ para valores de y' próximos a p; para $p=\frac{b}{a}>1$ ó $b>a$ se tiene un máximo débil. Para $p=\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$ se tiene un máximo fuerte, ya que $E\leqslant 0$ para valores cualesquiera de y'. Para $p=\frac{b}{a}<\sqrt{3}$, en virtud de la observación de la pág. 367, no hay ni mínimo fuerte ni máximo fuerte (fig. 8.11).

Incluso en los ejemplos citados más arriba, sumamente simples, el estudio del signo de la función E causó ciertas dificultades; por esto, sería conveniente sustituir la condición de que la función E tenga signo constante por otra, de más fácil comprobación. Supongamos que la función $F(x,\ y,\ y')$ es derivable tres veces respecto al argumento y'. Según la fórmula de Taylor,

$$F(x,y,y')=F(x,\ y,\ p)+(y'-p)\,F_p(x,\ y,\ p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}F_{y'y'}(x,\ y,\ q),$$

donde q está contenido entre p e y'.

La función

$$E(x,\ y,\ p,\ y')=F(x,\ y,\ y')-F(x,\ y,\ p)-(y'-p)\,F_p(x,\ y,\ p),$$

luego de sustiuir $F(x, y, y')$ por su desarrollo mediante la fórmula de Taylor, toma la forma

$$E(x, y, p, y') = \frac{(y'-p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q).$$

De aquí se ve que la función E conserva su signo si $F_{y'y'}(x, y, q)$ lo conserva. Al estudiar el extremo débil, la función $F_{y'y'}(x, y, q)$ debe conservar su signo para valores de x e y en los puntos cercanos a los puntos de la extremal que se investiga, y para valores de q próximos a p. Si $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$ en los puntos de la extremal C, entonces en virtud de la continuidad esta derivada segunda conserva su signo en los puntos próximos a la curva C, y para valores de y' próximos a los valores de y' en la curva C. De este modo, al estudiar un mínimo débil la condición $E \geqslant 0$ puede ser sustituida por la $F_{y'y'} > 0$ en la extremal C; al estudiar un máximo débil, la condición $E \leqslant 0$ puede sustituirse por la $F_{y'y'} < 0$ en la curva C. La condición $F_{y'y'} > 0$ (ó $F_{y'y'} < 0$) se llama *condición de Legendre* *).

Al estudiar un mínimo fuerte la condición $E \geqslant 0$ puede sustituirse por la $F_{y'y'}(x, y, q) \geqslant 0$ en los puntos (x, y) próximos a los puntos de la curva C para valores arbitrarios de q. En este caso se supone, claro está, que el desarrollo mediante la fórmula de Taylor

$$F(x, y, y') = F(x, y, p) + (y'-p) F_p(x, y, p) + \frac{(y'-p)^2}{2!} F_{y'y'}(x, y, q)$$

tiene lugar para y' cualesquiera. Al estudiar un máximo fuerte se obtiene la condición $F_{y'y'}(x, y, q) \leqslant 0$, bajo las mismas suposiciones respecto a la región de variación de los argumentos y a la validez del desarrollo de la función $F(x, y, y')$ por la fórmula de Taylor.

Ejemplo 3. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 - y^2)\,dx, \quad a > 0; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

La ecuación de Euler tiene la forma $y'' + y = 0$; su solución general es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. Utilizando las condiciones de frontera, se obtiene $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, si $a \neq k\pi$, donde k es un entero.

De este modo, si $a \neq k\pi$, el extremo se puede alcanzar sólo en la recta $y = 0$. Si $a < \pi$, el haz de extremales $y = C_1 \operatorname{sen} x$ con centro en el punto $(0, 0)$ forma un campo central. Si $a > \pi$, la condición de Jacobi no se cumple (véase la pág. 359).

*) La condición $F_{y'y'} > 0$ (ó $F_{y'y'} < 0$) se llama con frecuencia *condición reforzada de Legendre*, y se llama condición de Legendre la desigualdad $F_{y'y'} \geqslant 0$ (ó $F_{y'y'} \leqslant 0$).

Resumen de las condiciones suficientes de mínimo de la funcional simple *)

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

Mínimo débil	Mínimo fuerte	Mínimo débil	Mínimo fuerte	Mínimo débil	Mínimo fuerte
1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$	1. $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$
2. Condición de Jacobi	2. Condición de Jacobi	2. Condición de Jacobi	2. Condición de Jacobi	2. Existe un campo de extremales que incluye la extremal dada.	2. Existe un campo de extremales que incluye la extremal dada.
3. $F_{y'y'} > 0$ en la extremal estudiada	3. $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ para los puntos (x, y) próximos a los puntos de la extremal estudiada y para valores cualesquiera de y'. Aquí se supone que la función $F(x, y, y')$ es derivable tres veces con respecto a y' para y' cualesquiera	3. $E(x, y, p, y') \geq 0$ para los puntos (x, y) próximos a los puntos de la extremal estudiada, y para y' próximos a $p(x, y)$	3. $E(x, y, p, y') \geq 0$ para los puntos (x, y) próximos a los puntos de la extremal estudiada, y para y' cualesquiera	3. $E(x, y, p, y') \geq 0$ para los puntos (x, y) próximos a los puntos de la extremal estudiada, y para y' próximos a $p(x, y)$	3. $E(x, y, p, y') \geq 0$ para los puntos (x, y) próximos a los puntos de la extremal estudiada, y para y' cualesquiera

*) Para obtener las condiciones suficientes de *máximo* hay que tomar en este resumen los signos de desigualdad en sentido contrario.

Como la función subintegral es derivable tres veces con respecto a y' para y' cualesquiera y $F_{y'y'}=2>0$ para valores cualesquiera de y', entonces en la recta $y=0$, para $a<\pi$, hay un mínimo fuerte. Si se tiene en cuenta la observación de la pág. 363, se puede afirmar que para $a>\pi$ no hay mínimo en la recta $y=0$

Ejemplo 4. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1$$

(véase el problema de la braquistócrona, pág. 311). Las extremales son las cicloides

$$x=C_1(t-\operatorname{sen} t)+C_2,$$
$$y=C_1(1-\cos t).$$

El haz de cicloides $x=C_1(t-\operatorname{sen} t)$, $y=C_1(1-\cos t)$ con centro en el punto

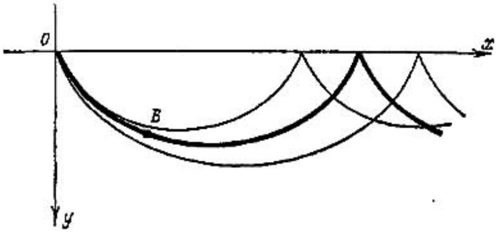

Fig. 8.12

(0, 0) forma un campo central que incluye la extremal

$$x=a(t-\operatorname{sen} t),\quad y=a(1-\cos t),$$

donde a se determina de la condición de que la cicloide pase por el segundo punto frontera $B(x_1, y_1)$, si $x_1<2\pi a$ (fig. 8.12).

Se tiene

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}};\quad F_{y'y'}=\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}}>0$$

para y' cualesquiera. Por consiguiente, para $x_1<2\pi a$ hay un mínimo fuerte en la cicloide

$$x=a(t-\operatorname{sen} t),\quad y=a(1-\cos t).$$

Ejemplo 5. Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^a y'^3\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(a)=b,\quad a>0,\quad b>0.$$

Este ejemplo fue resuelto en la pág. 367, pero ahora se puede simplificar el estudio en lo que se refiere a un extremo débil.

Las extremales son líneas rectas. El haz $y=Cx$ forma un campo central que incluye la extremal $y=\frac{b}{a}x$. En la extremal $y=\frac{b}{a}x$ la derivada segunda es $F_{y'y'}=6y'=6\frac{b}{a}>0$ En consecuencia, en la recta $y=\frac{b}{a}x$ hay un mínimo débil. La derivada segunda $F_{y'y'}=6y'$ no mantiene su signo constante para y' arbitrarias; por lo tanto, las condiciones suficientes para que haya un mínimo fuerte indicadas más arriba no se cumplen. Sin embargo, de aquí no se puede aún concluir que no hay un extremo fuerte.

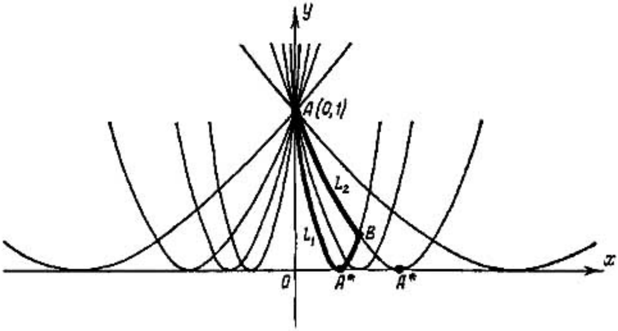

Fig. 8.13

E j e m p l o 6 Analizar el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^a \frac{y}{y'^2}\,dx, \quad y(0)=1, \quad y(a)=b, \quad a>0, \quad 0<b<1.$$

La primera integral de la ecuación de Euler (véase el caso 5 en la pág. 309) tiene la forma

$$\frac{y}{y'^2}+y'\frac{2y}{y'^3}=C, \text{ o bien } y'^2=4C_1y,$$

extrayendo la raíz cuadrada, separando variables e integrando, se obtiene $y=(C_1x+C_2)^2$, que es una familia de parábolas. De la condición $y(0)=1$ se halla $C_2=1$. El haz de parábolas $y=(C_1x+1)^2$ con centro en el punto $A(0,1)$ tiene la curva C_1-discriminante $y=0$ (fig. 8.13). Por el punto $B(a, b)$ pasan dos parábolas de este haz. En el arco AB de una de ellas (L_1) se encuentra el punto A^* conjugado del A; en el otro (L_2) no hay puntos conjugados y, por lo tanto, la condición de Jacobi se cumple en el arco L_2, y en este arco de parábola puede haber un extremo. En un entorno de la extremal estudiada se tiene $F_{y'y'}=\frac{6y}{y'^4}>0$ para y' arbitrarias; sin embargo, en base a esto no se puede aún afirmar que en el arco L_2 hay un mínimo fuerte, debido a que la función

$F(x, y, y')=\frac{y}{y'^2}$ no puede ser representada en la forma

$$F(x, y, y')=F(x, y, p)+(y'-p)\,F_p(x, y, p)+\frac{(y'-p)^2}{2!}\,F_{y'y'}(x, y, q)$$

para valores de y' arbitrarios, ya que la función $F(x, y, y')$ es discontinua para $y'=0$. Se puede afirmar solamente que en L_2 hay un mínimo débil, puesto que para valores de y' cercanos a la inclinación del campo en la curva L_2 tiene lugar dicho desarrollo de la función $F(x, y, y')$ por la fórmula de Taylor. Para un estudio completo del extremo de esta funcional es necesario considerar la función $E(x, y, p, y')$:

$$E(x, y, p, y')=\frac{y}{y'^2}-\frac{y}{p^2}+\frac{2y}{p^3}(y'-p)=\frac{y(y'-p)^2(2y'+p)}{y'^2p^3}.$$

Como el factor $(2y'+p)$ no mantiene su signo constante para y' arbitrarias, se puede afirmar, en virtud de la observación de la pág. 367, que no hay un mínimo fuerte en el arco L_2.

La teoría expuesta se generaliza sin cambios sustanciales a las funcionales de la forma

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx;$$

$$y_i(x_0)=y_{i0}, \quad y_i(x_1)=y_{i1} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

La función E tiene la forma

$$E=F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')-F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots$$
$$\ldots, p_n)-\sum_{i=1}^{n}(y_i'-p_i)\,F_{p_i}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

donde p_i son las funciones de inclinación del campo, al cual se le imponen ciertas limitaciones (bajo estas limitaciones el campo se llama especial).

La condición de Legendre $F_{y'y'}\geqslant 0$ se sustituye por las condiciones siguientes:

$$F_{y_1'y_1'}\geqslant 0,\quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} \end{vmatrix}\geqslant 0,\quad \ldots,\quad \begin{vmatrix} F_{y_1'y_1'} & F_{y_1'y_2'} & \ldots & F_{y_1'y_n'} \\ F_{y_2'y_1'} & F_{y_2'y_2'} & \ldots & F_{y_2'y_n'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{y_n'y_1'} & F_{y_n'y_2'} & \ldots & F_{y_n'y_n'} \end{vmatrix}\geqslant 0.$$

Las condiciones suficientes de *mínimo débil* se pueden obtener tanto para el problema simple como para otros más complejos por otro método, basado en el estudio del signo de la segunda variación.

El incremento de la funcional en el problema simple se puede reducir, mediante la fórmula de Taylor, a la forma siguiente:

$$\Delta v=\int_{x_0}^{x_1}[F(x, y+\delta y, y'+\delta y')-F(x, y, y')]\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\,\delta y+F_{y'}\delta y')\,dx+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}\delta y^2+2F_{yy'}\delta y\,\delta y'+F_{y'y'}\delta y'^2]\,dx+R,$$

donde R tiene orden mayor que 2 respecto a δy y $\delta y'$. Al investigar un extremo débil δy y $\delta y'$ son suficientemente pequeñas, y en este caso el signo del incremento Δv se determina por el signo del término que se halla en el segundo miembro y contiene las potencias menores de δy y $\delta y'$. En las extremales la primera variación será

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y')\,dx = 0$$

y, por lo tanto, el signo del incremento Δv coincide en general con el de la segunda variación

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy} \delta y^2 + 2F_{yy'} \delta y\, \delta y' + F_{y'y'}\, \delta y'^2)\,dx.$$

La condición de Legendre conjuntamente con la de Jacobi son precisamente condiciones que aseguran que el signo de la segunda variación sea constante y, conjuntamente con esto, sea constante el signo del incremento Δv en el problema sobre un extremo débil.

En efecto, consideremos la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x)\, \delta y^2 + 2\omega(x)\, \delta y\, \delta y']\,dx, \tag{8.2}$$

donde $\omega(x)$ es una función derivable arbitraria. Esta integral es igual a cero:

$$\int_{x_0}^{x_1} [\omega'(x)\, \delta y^2 + 2\omega(x)\, \delta y\, \delta y']\,dx = \int_{x_0}^{x_1} d\,(\omega \delta y^2) = [\omega(x)\, \delta y^2]_{x_0}^{x_1} = 0$$

(puesto que $\delta y|_{x_0} = \delta y|_{x_1} = 0$).

Sumando la integral (8.2) a la segunda variación, se obtiene

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} [(F_{yy} + \omega')\, \delta y^2 + 2\,(F_{yy'} + \omega)\, \delta y\, \delta y' + F_{y'y'}\, \delta y'^2]\,dx.$$

La función $\omega(x)$ se escoge de modo que la función subintegral se transforme, salvo un factor, en un cuadrado perfecto. Para esto la función $\omega(x)$ debe satisfacer la ecuación

$$F_{y'y'}\,(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} - \omega)^2 = 0.$$

Con la función ω elegida de este modo, la segunda variación toma la forma

$$\delta^2 v = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'y'} \left(\delta y' + \frac{F_{yy'} + \omega}{F_{y'y'}}\, \delta y \right)^2 dx$$

y, en consecuencia, su signo coincide con el de $F_{y'y'}$.

Sin embargo, esta transformación es posible sólo bajo la hipótesis de que la ecuación diferencial

$$F_{y'y'}\,(\omega' + F_{yy}) - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0$$

tenga una solución derivable $\omega(x)$ en el segmento (x_0, x_1).

Transformando esta ecuación a nuevas variables mediante la sustitución

$$\omega = -F_{yy'} - F_{y'y'}\frac{u'}{u},$$

donde u es una nueva función incógnita, se obtiene

$$\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}\right)u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0,$$

que es la ecuación de Jacobi (véase la pág. 363).

Si existe una solución de esta ecuación que no se anule para $x_0 < x \leqslant x_1$, es decir, si se cumple la condición de Jacobi, existe, para dichos valores de x, una solución continua y derivable

$$\omega(x) = -F_{yy} - F_{y'y'}\frac{u'}{u}$$

de la ecuación

$$F_{y'y'}(F_{yy} + \omega') - (F_{yy'} + \omega)^2 = 0.$$

De este modo, las condiciones de Legendre y de Jacobi aseguran la constancia del signo de la segunda variación y, por consiguiente, son condiciones suficientes de mínimo ($F_{y'y'} > 0$) o máximo ($F_{y'y'} < 0$) débil.

§ 3. TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES DE EULER A LA FORMA CANONICA

El sistema de n ecuaciones de Euler (véase la pág. 312)

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{8.3}$$

se puede sustituir por un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden. Haciendo en (8.3)

$$F_{y_k'} = q_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{8.4}$$

se obtiene

$$\frac{dq_k}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y_k} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8.5}$$

Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones (8.4) con respecto a y_k' (para que esta resolución sea posible supondremos que

$$\frac{D\left(F_{y_1'},\ F_{y_2'},\ \ldots,\ F_{y_n'}\right)}{D(y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_n')} \neq 0),$$

$$y_k' = \omega_k(x,\ y_s,\ q_s), \tag{8.6}$$

donde

$$\omega_k(x,\ y_s,\ q_s) = \omega_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n),$$

y sustituimos (8.6) en (8.5). Entonces se obtiene un sistema de $2n$

ecuaciones de primer orden en la forma normal:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_k}{dx}&=\omega_k(x,\ y_s,\ q_s),\\ \frac{dq_k}{dx}&=\left\{\frac{\partial F}{\partial y_k}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Aquí y en lo sucesivo las llaves indican que en los paréntesis se ha sustituido y'_k por $\omega_k(x,\ y_s,\ q_s)$.

Mediante la función

$$H(x,\ y_s,\ q_s)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i q_i-\{F\}$$

el sistema (8.7) puede escribirse en la forma canónica:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_k}{dx}&=\frac{\partial H}{\partial q_k},\\ \frac{dq_k}{dx}&=-\frac{\partial H}{\partial y_k}\end{aligned}\right\}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8.8}$$

Obsérvese que si la función $F(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ y'_1,\ y'_2,\ \ldots,\ y'_n)$ no depende en forma explícita de x, el sistema (8.8) tiene la primera integral $H=C$. En efecto, en este caso

$$H=\sum_{i=1}^{n}\omega_i q_i-\{F\}$$

tampoco contiene a x en forma explícita y, en consecuencia,

$$\frac{dH}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dx}.$$

Mediante las ecuaciones (8.8) se obtiene

$$\frac{dH}{dx}=0,\quad H=C$$

a lo largo de las curvas integrales del sistema (8.8).

Para el problema simple esta primera integral ya fue obtenida en la pág. 310 .

Ejemplo 1. Ley de la conservación de la energía. La función

$$H=\sum_{i=1}^{n}\omega_i q_i-\{F\}$$

para la funcional

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt,\ T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2),$$

donde se mantienen las notaciones del ejemplo 1 de la pág. 327 (T es la energía cinética del sistema de puntos materiales, U, la energía potencial), tiene la forma siguiente:

$$H=\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-(T-U)=T+U,$$

que es la energía total del sistema. Apliquemos el principio de la acción estacionaria. Si la energía potencial U no depende en forma explícita de t, es decir, si el sistema es conservativo, entonces las ecuaciones de Euler para la funcional $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$ tienen la primera integral $H=C$, $T+U=C$.

De este modo, la energía total de un sistema conservativo permanece constante durante el movimiento.

La integración del sistema canónico (8.8) es equivalente a la integración de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial v}{\partial x}+H\left(x,\ y_s,\ \frac{\partial v}{\partial y_s}\right)=0, \tag{8.9}$$

donde

$$H\left(x,\ y_s,\ \frac{\partial v}{\partial y_s}\right)=H\left(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \frac{\partial v}{\partial y_1},\ \frac{\partial v}{\partial y_2},\ \ldots,\ \frac{\partial v}{\partial y_n}\right).$$

La ecuación (8.9) se llama *ecuación de Hamilton-Jacobi.*

Si se conoce una familia monoparamétrica de sus soluciones $v(x,\ y_s,\ \alpha)$, entonces se conoce también la primera integral $\frac{\partial v}{\partial \alpha}=\beta$ del sistema (8.8); β es una constante arbitraria. En efecto,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \alpha}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j\,\partial \alpha}\frac{\partial y_j}{\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \alpha}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j\,\partial \alpha}\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{8.10}$$

Derivando la identidad

$$\frac{\partial v(x,\ y_s,\ \alpha)}{\partial \alpha}\equiv-H\left(x,\ y_s,\ \frac{\partial v(x,\ y_s,\ \alpha)}{\partial y_s}\right)\text{ respecto a } \alpha,$$

se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \alpha}\equiv-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial^2 v}{\partial y_s\,\partial \alpha} \tag{8.11}$$

y, sustituyendo (8.11) en (8.10), se obtiene que el segundo miembro de (8.10) es idénticamente nulo. De este modo,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)\equiv 0,$$

de donde

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}=\beta.$$

Por lo tanto, si se conoce la integral total de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$v=v(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n),$$

se conocen también n primeras integrales del sistema (8.8):

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_i}=\beta_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8.12}$$

Si el jacobiano del sistema (8.12) es diferente de cero,

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial \alpha_i}\right| \neq 0,$$

entonces el sistema (8.12) determina y_i como funciones de los demás argumentos:

$$y_i=y_i(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8.13}$$

Con esto se obtiene una familia de extremales que depende de $2n$ parámetros. Se puede demostrar que (8.13) es la solución general del sistema de ecuaciones de Euler, y las funciones

$$y_i(x,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)$$

y

$$q_i=\frac{\partial v(x,\ y_s,\ \alpha_s)}{\partial y_i} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

son la solución general del sistema (8.8).

Ejemplo. Hallar la ecuación de las líneas geodésicas en una superficie en la cual el elemento de longitud de una curva tiene la forma

$$ds^2=[\varphi_1(x)+\varphi_2(y)](dx^2+dy^2),$$

es decir, hallar las extremales de la funcional

$$S=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{[\varphi_1(x)+\varphi_2(y)](1+y'^2)}\,dx.$$

Como

$$H=\frac{\sqrt{\varphi_1(x)+\varphi_2(y)}}{\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{\varphi_1(x)+\varphi_2(y)}\cdot\sqrt{1-q^2},$$

$$q=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad H^2+q^2=\varphi_1(x)+\varphi_2(y),$$

entonces la ecuación de Hamilton-Jacobi tiene la forma

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\varphi_1(x)+\varphi_2(y).$$

o bien

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\varphi_1(x)=\varphi_2(y)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Para las ecuaciones de este tipo (ecuaciones con variables separadas),

$$\Phi_1\left(x, \frac{\partial v}{\partial x}\right)=\Phi_2\left(y, \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

se halla fácilmente una primera integral. Haciendo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\varphi_1(x)=\alpha \text{ y } \varphi_2(y)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\alpha,$$

o bien

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\sqrt{\varphi_1(x)+\alpha}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\sqrt{\varphi_2(y)-\alpha},$$

se halla

$$v=\int\sqrt{\varphi_1(x)+\alpha}\,dx+\int\sqrt{\varphi_2(y)-\alpha}\,dy;$$

por consiguiente, la ecuación de las líneas geodésicas $\frac{\partial v}{\partial \alpha}=\beta$ tiene en este caso la forma

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\varphi_1(x)+\alpha}}-\int\frac{dy}{\sqrt{\varphi_2(y)-\alpha}}=\beta.$$

Observación. Se puede llegar también a la ecuación de Hamilton-Jacobi partiendo de otras consideraciones. Tomemos un campo central de extremales con centro en el punto $A(x_0, y_0)$ para la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y, y')\,dx.$$

En las extremales del campo la funcional $v[y(x)]$ se transforma en una función $\bar{v}(x, y)$ de las coordenadas del segundo punto frontera $B(x, y)$. Como fue indicado en la pág. 377 ,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}=-H(x, y, q), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=q.$$

Eliminando q, se obtiene

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}=-H\left(x, y, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right).$$

De este modo, la función $\bar{v}(x, y)$ es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Para la funcional

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

tambien son válidos razonamientos completamente análogos.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 8

Analizar los extremos de las funcionales:

1. $v[y(x)]=\int_0^2 (xy'+y'^2)\,dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=0.$

2. $v[y(x)]=\int_0^a (y'^2+2yy'-16y^2)\,dx;\quad a>0;\quad y(0)=0,\quad y(a)=0.$

3. $v[y(x)]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(-1)=1,\quad y(2)=4.$

4. $v[y(x)]=\int_1^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(1)=3;\quad y(2)=5.$

5. $v[y(x)]=\int_{-1}^2 y'(1+x^2y')\,dx;\quad y(-1)=y(2)=1.$

6. $v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2-y'^2+8y)\,dx;\quad y(0)=-1;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$

7. $v[y(x)]=\int_1^2 (x^2y'^2+12y^2)\,dx;\quad y(1)=1;\quad y(2)=8.$

8. $v[y(x)]=\int_0^1 (y'^2+y^2+2ye^{2x})\,dx;\quad y(0)=\frac{1}{3};\quad y(1)=\frac{1}{3}e^2.$

9. $v[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2-y'^2+6y\,\mathrm{sen}\,2x)\,dx;\quad y(0)=0;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

10. $v[y(x)]=\int_0^{x_1} \frac{dx}{y'};\quad y(0)=0;\quad y(x_1)=y_1;\quad x_1>0;\quad y_1>0.$

11. $v[y(x)]=\int_0^{x_1} \frac{dx}{y'^2};\quad y(0)=0;\quad y(x_1)=y_1,\quad x_1>0,\quad y_1>0.$

12. $v[y(x)]=\int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\,dx;\quad y(1)=1;\quad y(2)=4.$

13. $v[y(x)]=\int_1^3 (12xy+y'^2)\,dx;\quad y(1)=0;\quad y(3)=26.$

14. $v[y(x)]=\int^2 [y^2+(y')^2-2xy]\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(2)=3.$

CAPITULO 9

Problemas variacionales sobre un extremo condicionado

§ 1. ENLACES DEL TIPO $\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0$

Se llaman problemas variacionales sobre un extremo condicionado a los problemas en los que se pide hallar el extremo de una funcional v, y a las funciones de las cuales depende la funcional v se le imponen ciertos enlaces. Por ejemplo, se pide investigar el extremo de la funcional

$$v[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

bajo las condiciones

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ m<n).$$

Recordemos cómo se resuelve un problema análogo al estudiar el extremo de la función $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con los enlaces

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ m<n).$$

El camino más natural es resolver el sistema

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

cuyas ecuaciones consideraremos independientes, respecto a algunas m variables, por ejemplo, respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\begin{aligned} x_1&=x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n);\\ x_2&=x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n);\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_m&=x_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

y sustituir las $x_1, x_2, \ldots, x_m$ halladas en $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Entonces la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se transforma en una función $\Phi(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$ de sólo $n-m$ variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, las cuales son ya independientes; por lo tanto, el problema queda reducido al estudio del extremo incondicional de la función Φ. Por este método, claro está, también se puede resolver el problema variacional planteado más arriba. Resolviendo el sistema $\varphi_i(x, y_1,$

$y_2, \ldots, y_n)=0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ con respecto a $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (o a algunas otras m funciones y_i) y sustituyendo sus expresiones en $v[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, se obtiene una funcional $W[y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n]$ que depende sólo de $n-m$ argumentos ya independientes; por lo tanto, a la funcional W se le pueden aplicar los métodos expuestos en el § 3 del capítulo 6. Sin embargo, tanto para las funciones como para las funcionales con frecuencia es más cómodo otro método de resolución, llamado método de los factores indeterminados, el cual conserva una equivalencia completa entre las variables. Como es sabido, en el estudio del extremo de la función $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con los enlaces $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, este método consiste en formar la nueva función auxiliar

$$z^*=f+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i,$$

donde λ_i son ciertos factores constantes; después, se estudia el extremo incondicional de la función z^*, es decir, se escribe el sistema de ecuaciones $\frac{\partial z^*}{\partial x_j}=0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, completado con las ecuaciones de los enlaces $\varphi_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, del cual se determinan todas las $n+m$ incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. El problema sobre un extremo condicional para las funcionales también puede ser resuelto en forma completamente análoga; más precisamente: si

$$v=\int_{x_0}^{x_1}F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

y

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

entonces se forma la funcional

$$v^*=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\right)dx, \text{ o bien } v^*=\int_{x_0}^{x_1}F^*\,dx,$$

donde

$$F^*=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i,$$

para la cual se estudia ahora el extremo incondicional, es decir, se resuelve el sistema de ecuaciones de Euler

$$\left.\begin{array}{c} F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j'}=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n), \\ \text{completado con las ecuaciones de los enlaces} \\ \varphi_i=0 \ (i=1, 2, \ldots, m). \end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

El número $m+n$ de ecuaciones es, en general, suficiente para determinar las $m+n$ funciones incógnitas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; las condiciones de frontera $y_j(x_0)=y_{j0}$ e $y_j(x_1)=y_{j1}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$—las cuales no deben ser contradictorias con las ecuaciones de los enlaces—permiten, en general, determinar las $2n$ constantes arbitrarias en la solución general del sistema de ecuaciones de Euler.

Es evidente que las curvas halladas por este método, en las que la funcional v^* tiene un mínimo o un máximo, serán también soluciones del problema variacional inicial. En efecto, para las funciones halladas del sistema (9.1)

$$\lambda_i(x) \quad (i=1, 2, \ldots, m) \text{ e } y_j\,(j=1, 2, \ldots, n)$$
todas las $\varphi_i=0$

y, por consiguiente, $v^*=v$. Además, si para $y_j=y_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ determinadas del sistema (9.1) se alcanza un extremo incondicional de la funcional v^*, es decir, un extremo con respecto a todas las curvas cercanas—tanto las que satisfagan las ecuaciones de los enlaces como las que no las satisfagan—entonces, en particular, se alcanza un extremo con respecto a la clase más restringida de las curvas que satisfacen las ecuaciones de los enlaces.

Sin embargo, de este razonamiento no se deduce de ningún modo que todas las soluciones del problema original sobre un extremo condicional darán un extremo incondicional de la funcional v^* y, en consecuencia, falta aclarar si por este método pueden ser halladas todas las soluciones. Nos limitaremos a la demostración de una afirmación más débil.

Teorema. *Las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que realizan un extremo de la funcional*

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

con las condiciones

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ m<n)$$

satisfacen, con una elección adecuada de los factores $\lambda_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, las ecuaciones de Euler para la funcional

$$v^*=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\right)dx=\int_{x_0}^{x_1} F^*\,dx.$$

Las funciones $\lambda_i(x)$ e $y_j(x)$ se determinan de las ecuaciones de Euler

$$F^*_{y_j}-\frac{d}{dx}F^*_{y_j'}=0 \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

y

$$\varphi_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

Las ecuaciones $\varphi_i=0$ también se pueden considerar ecuaciones de Euler para la funcional v^*, si se consideran como argumentos de ésta no sólo las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$, sino también $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$. Se supone que las ecuaciones $\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)=0$ $(i=1, 2, \dots, m)$ son independientes, es decir, que uno de los jacobianos de orden m es diferente de cero, por ejemplo

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}\neq 0.$$

Demostración. La condición fundamental de extremo $\delta v=0$ toma en este caso la forma

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}(F_{y_j}\delta y_j+F_{y'_j}\delta y'_j)\,dx=0.$$

Integrando por partes los segundos sumandos de cada paréntesis y tomando en cuenta que

$$(\delta y_j)'=\delta y'_j \quad \text{y} \quad (\delta y_j)_{x=x_0}=0;\ (\delta y_j)_{x=x_1}=0,$$

se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1}\sum_{j=1}^{n}\left(F_{y_j}-\frac{d}{dx}F_{y'_j}\right)\delta y_j\,dx=0.$$

Como las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n$ están sometidas a los m enlaces independientes

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m),$$

las variaciones δy_j no son arbitrarias, por lo que aún no se puede aplicar el lema fundamental. Las variaciones δy_j deben satisfacer las condiciones siguientes, que se obtienen variando las ecuaciones de los enlaces $\varphi_i=0$:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j=0 \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m)\,^{*)}$$

*) Más exactamente, aplicando la fórmula de Taylor a la diferencia

$$\varphi_i(x,\ y_1+\delta y_1,\ \dots,\ y_n+\delta y_n)-\varphi_i(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)$$

entre los primeros miembros de las ecuaciones $\varphi_i(x,\ y_1+\delta y_1,\ \dots,\ y_n+\delta y_n)=0$ y $\varphi_i(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)=0$, habría que escribir

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\delta y_j+R_i=0,$$

y, en consecuencia, sólo $n-m$ variaciones δy_j se pueden considerar arbitrarias, por ejemplo, $\delta y_{m+1}, \delta y_{m+2}, \ldots, \delta y_n$, y las demás se determinan de las ecuaciones obtenidas.

Multiplicando miembro a miembro cada una de estas ecuaciones por $\lambda_i(x)dx$ e integrando desde x_0 hasta x_1, se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j \, dx = 0 \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

Sumando miembro a miembro estas m ecuaciones, a las cuales satisfacen las variaciones admisibles δy_j, y la ecuación

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j \, dx = 0,$$

tendremos

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right] \delta y_j \, dx = 0,$$

o bien, si se introduce la notación

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i,$$

se tendrá

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} \right) \delta y_j \, dx = 0.$$

Aquí tampoco se puede aún aplicar el lema fundamental, puesto que las variaciones δy_j no son arbitrarias. Tomemos m factores $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ de modo que satisfagan las m ecuaciones

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0 \quad (j=1, 2, \ldots, m),$$

o bien

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0 \quad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Estas ecuaciones forman un sistema lineal con respecto a λ_i cuyo

---

donde las R_i tienen orden mayor que 1 respecto a δy_j $(i=1, 2, \ldots, n)$. Sin embargo, como es fácil comprobar, los términos R_i no influyen sustancialmente en los razonamientos ulteriores, puesto que al calcular la variación de la funcional nos interesan sólo los términos de primer orden respecto a δy_j $(j=1, 2, \ldots, n)$.

determinante es diferente de cero,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \neq 0;$$

por consiguiente, este sistema posee solución

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$$

Con las $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, ..., $\lambda_m(x)$ escogidas de este modo, la condición fundamental de extremo

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j}\right) \delta y_j \, dx = 0$$

toma la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j}\right) \delta y_j \, dx = 0$$

Como para las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que realizan el extremo de la funcional v esta ecuación funcional se reduce a una identidad ahora para δy_j cualesquiera ($j = m+1, m+2, \ldots, n$), ya se puede aplicar el lema fundamental. Anulando sucesivamente todas las δy_j excepto una y aplicando el lema, se obtiene

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Tomando en cuenta las ecuaciones

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

obtenidas más arriba, se obtiene, en definitiva, que las funciones que realizan un extremo condicional de la funcional v y los factores $\lambda_i(x)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ejemplo 1. Hallar la distancia más corta entre dos puntos $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ en la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$ (véase el problema de las líneas geodésicas, pág. 289). La distancia entre dos puntos en una superficie se determina, como es sabido, por la fórmula

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \, dx.$$

En este caso hay que hallar el mínimo de l con la condición $\varphi(x, y, z) = 0$.

Segun lo expuesto, se toma la funcional auxiliar

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x)\,\varphi(x, y, z)\right] dx$$

y se escribe para ésta las ecuaciones de Euler

$$\lambda(x)\,\varphi_y - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0;$$

$$\lambda(x)\,\varphi_z - \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0;$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

De estas tres ecuaciones se determinan las funciones buscadas

$$y = y(x) \quad \text{y} \quad z = z(x),$$

en las cuales puede haber un mínimo condicional de la funcional v, y el factor $\lambda(x)$.

Ejemplo 2. Hallar, aplicando el principio de Ostrogradski-Hamilton (véase la pág. 327), las ecuaciones de movimiento de un sistema de puntos materiales de masa m_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ con coordenadas (x_i, y_i, z_i) bajo la acción de fuerzas que tienen la función de fuerza $-U$, con los enlaces

$$\varphi_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

La integral de Ostrogradski-Hamilton

$$v = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

tiene en este caso la forma

$$v = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U\right] dt.$$

y la funcional auxiliar es

$$v^* = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\,\varphi_j\right] dt.$$

Las ecuaciones de movimiento serán las ecuaciones de Euler para la funcional v^*, éstas tendrán la forma siguiente:

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i};$$

$$m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i};$$

$$m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 2. ENLACES DEL TIPO

$\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$

En el parágrafo anterior hemos considerado el problema del estudio del extremo de la funcional

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx;$$

$$y_j(x_0) = y_{j0}; \quad y_j(x_1) = y_{j1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

con los enlaces *finitos*

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9.2}$$

Supongamos ahora que las ecuaciones de los enlaces son *ecuaciones diferenciales*

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En la mecánica los enlaces de este tipo se llaman no *holónomos*, y los del tipo (9.2), *holónomos*.

En este caso también se puede demostrar la regla de los factores, que consiste en que el extremo condicional de la funcional v se alcanza en las mismas curvas que realizan el extremo incondicional de la funcional

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^*\, dx,$$

donde

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i$$

Sin embargo, la demostración se complica mucho en comparación con el caso de los enlaces finitos

Si, en cambio, nos limitamos a la demostración de la afirmación más débil sobre que las curvas en las cuales se alcanza un extremo condicional de la funcional v son, bajo una elección adecuada de $\lambda_i(x)$, extremales para la funcional v^*, entonces la demostración expuesta en el parágrafo anterior puede ser repetida con cambios insignificantes para el caso considerado.

En efecto, supongamos que uno de los determinantes funcionales de orden m es diferente de cero, por ejemplo,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_m')} = 0.$$

Esto asegura la independencia de los enlaces.

Resolviendo las ecuaciones $\varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')=0$ con respecto a $y_1', y_2', \ldots, y_m'$, lo cual es posible en virtud de que

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_1', y_2', \ldots, y_m')} \neq 0,$$

se obtiene $y_i'=\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{m+1}', y_{m+2}', \ldots, y_n')$ $(i=1, 2, \ldots, m)$. Si se considera que $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ son funciones dadas en forma arbitraria, entonces de este sistema de ecuaciones diferenciales se determinan $y_1, y_2, \ldots, y_m$. De este modo, $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ son funciones derivables arbitrarias con valores frontera fijos y, por lo tanto, sus variaciones son arbitrarias en el mismo sentido.

Sea $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistema admisible arbitrario de funciones que satisface las ecuaciones $\varphi_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ de los enlaces. Variemos las ecuaciones de los enlaces

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m) \text{ *)}.$$

Multiplicando miembro a miembro cada ecuación obtenida por un factor $\lambda_i(x)$ por ahora indeterminado e integrando desde x_0 hasta x_1, se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \delta y_j \, dx + \int_{x_0}^{x_1} \lambda_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \delta y_j' \, dx = 0;$$

integrando por partes cada sumando de la segunda integral y tomando en cuenta que $\delta y_j' = (\delta y_j)'$ y $(\delta y_j)_{x=x_0} = (\delta y_j)_{x=x_1} = 0$, tendremos

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j'} \right) \right] \delta y_j \, dx = 0. \tag{9.3}$$

De la condición necesaria fundamental de extremo $\delta v=0$ se obtiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j \, dx = 0, \tag{9.4}$$

puesto que

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} \delta y_j + F_{y_j'} \delta y_j' \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) \delta y_j \, dx.$$

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones (9.3) y la (9.4) e introduciendo

---

*) En este caso, al igual que en la pág. 384, habría que incluir en los primeros miembros de las ecuaciones sumandos que contengan términos de orden mayor que 1 respecto a δy_j y $\delta y_j'$ $(j=1, 2, \ldots, n)$; además, aquí es ya mucho más complicado tomar en cuenta la influencia de estos términos no lineales.

la notación $F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i$, se tendrá

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0 \qquad (9.5)$$

Como las variaciones δy_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) no son arbitrarias, aún no se puede aplicar el lema fundamental. Tomemos m factores $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ de modo que satisfagan las ecuaciones

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

Si se escriben estas ecuaciones en forma desarrollada, se ve que son un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con respecto a

$$\lambda_i(x) \quad \text{y} \quad \frac{d\lambda_i}{dx} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

la cual posee, bajo las hipótesis tomadas, la solución $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ que depende de m constantes arbitrarias. Con las $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ elegidas de este modo, la ecuación (9.5) se reduce a la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{j=m+1}^{n} \left(F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} \right) \delta y_j \, dx = 0,$$

donde las variaciones δy_j ($j = m+1, m+2, \ldots, n$) son *ya arbitrarias* y, por consiguiente, haciendo todas las variaciones $\delta y_j = 0$, excepto alguna, δy_j, y aplicando el lema fundamental, se obtiene

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \qquad (j = m+1, m+2, \ldots, n).$$

De este modo, las funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ que realizan un extremo condicional de la funcional v y los factores $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)$ deben satisfacer el sistema de $n+m$ ecuaciones:

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y'_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

y

$$\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

es decir, deben satisfacer las ecuaciones de Euler para la funcional auxiliar v^*, que se considera como funcional que depende de $n+m$ funciones

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m.$$

§ 3. PROBLEMAS ISOPERIMETRICOS

Se llaman problemas isoperimétricos, en el sentido restringido de esta palabra, a los problemas sobre la determinación de una figura geométrica de superficie máxima con perímetro dado.

Entre estos problemas extremales, estudiados aún en la Grecia antigua, había también problemas variacionales, por ejemplo, el problema citado en la pág. 289 de la determinación de una curva cerrada de longitud dada que delimite una superficie máxima*). Dando la curva en forma paramétrica, $x=x(t)$, $y=y(t)$, se puede formular este problema así: hallar el máximo de la funcional

$$S=\int_{t_0}^{t_1} x\dot{y}\,dt \qquad \left(\text{o bien } S=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt\right)$$

con la condición de que la funcional

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

se mantenga constante:

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=l$$

De este modo, se tiene aquí un problema variacional sobre un extremo condicional, con una condición peculiar: la integral $\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$ se mantiene constante.

En la actualidad se llaman problemas isoperimétricos a una clase mucho más general de problemas, más precisamente, a todos los problemas variacionales en los cuales se pide hallar el extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx$$

con las llamadas *condiciones isoperimétricas*

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx=l_i$$
$$(i=1, 2, \ldots, m),$$

donde las l_i son constantes; m puede ser mayor, menor o igual a n, y también a problemas análogos para funcionales más complejas.

Los problemas isoperimétricos pueden ser reducidos a problemas sobre un extremo condicional, considerados en el parágrafo

*) Aunque la solución de este problema era conocida ya en la Grecia antigua, su carácter variacional peculiar fue comprendido solamente a fines del siglo XVII.

anterior, por medio de la introducción de nuevas funciones desconocidas. Denotemos

$$\int_{x_0}^{x} F_i dx = z_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

de donde $z_i(x_0) = 0$, y de la condición $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$, se tiene $z_i(x_1) = l_i$.

Derivando z_i con respecto a x, tendremos

$$z_i'(x) = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

Con esto los enlaces integrales isoperimétricos $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ han sido sustituidos por enlaces diferenciales:

$$z_i' = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

y, en consecuencia, el problema se redujo al considerado en el parágrafo anterior.

Aplicando la regla de los factores, en lugar de investigar el extremo condicional de la funcional $v = \int_{x_0}^{x_1} F dx$ con los enlaces $F_i - z_i' = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, se puede investigar el extremo incondicional de la funcional

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z_i') \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

donde

$$F^* = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(F_i - z_i')$$

Las ecuaciones de Euler para la funcional v^* tienen la forma

$$F^*_{y_j} - \frac{d}{dx} F^*_{y_j'} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$F^*_{z_i} - \frac{d}{dx} F^*_{z_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

o bien

$$F_{y_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{i y_j} - \frac{d}{dx}\left(F_{y_j'} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_{i y_j'} \right) = 0$$

$$(j=1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d}{dx}\lambda_i(x)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

De las últimas m ecuaciones se obtiene que todas las λ_i son constantes, y las primeras n ecuaciones coinciden con las ecuaciones de Euler para la funcional

$$v^{**}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i\right)dx$$

De este modo, se obtiene la siguiente regla: para obtener la condición necesaria fundamental en el problema isoperimétrico sobre la determinación del extremo de la funcional $v=\int_{x_0}^{x_1} F dx$ con los enlaces $\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ hay que formar la funcional auxiliar

$$v^{**}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i\right)dx$$

donde las λ_i son constantes, y escribir sus ecuaciones de Euler.

Las constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ de la solución general del sistema de ecuaciones de Euler y las constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se determinan de las condiciones de frontera

$$y_j(x_0)=y_{j0}, \quad y_j(x_1)=y_{j1} \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

y de las condiciones isoperimétricas

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

El sistema de ecuaciones de Euler para la funcional v^{**} no varía si v^{**} se multiplica por cierto factor constante μ_0 y, por lo tanto, se representa en la forma

$$\mu_0 v^{**}=\int_{x_0}^{x_1}\sum_{i=0}^{m}\mu_i F_i dx$$

donde se han introducido las notaciones $F_0=F$, $\mu_i=\lambda_i\mu_0$, $i=1, \ldots, m$. Ahora todas las funciones F_i figuran en forma simétrica; por esto, las extremales del problema variacional inicial y del problema de hallar el extremo de la funcional $\int_{x_0}^{x_1} F_s\,dx$ con las condiciones isoperimétricas

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i\,dx = l_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1,\ s+1,\ \ldots,\ m)$$

coinciden para cualquier s $(s=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

Esta propiedad se llama *principio de reciprocidad*. Por ejemplo, el problema del máximo del área de una superficie delimitada por una curva cerrada de longitud dada y el del mínimo de la longitud de una curva cerrada que delimita una superficie de área dada son recíprocos y tienen extremales comunes.

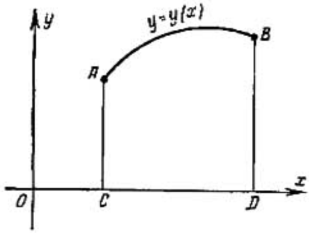

Fig. 9.1

Ejemplo 1. Hallar la curva $y=y(x)$ de longitud l dada para la cual el área S del trapecio curvilíneo $CABD$ representado en la fig. 9.1 sea máxima.

Se investiga el extremo de la funcional

$$S=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \quad y(x_0)=y_0,$$

$y(x_1)=y_1$ con la condición isoperimétrica

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx=l.$$

Primero se forma la funcional auxiliar

$$S^{**}=\int_{x_0}^{x_1} (y+\lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx$$

Como la función subintegral no contiene a x, la ecuación de Euler para S^{**} tiene la primera integral $F-y'F_{y'}=C_1$ o, en este caso,

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

de donde

$$y-C_1=\frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Introduzcamos un parámetro t haciendo $y'=\operatorname{tg} t$; entonces se obtiene

$$y-C_1=-\lambda\cos t;$$

$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg} t$, de donde $dx=\frac{dy}{\operatorname{tg} t}=\frac{\lambda \operatorname{sen} t\, dt}{\operatorname{tg} t}=\lambda \cos t\, dt$;

$$x=\lambda \operatorname{sen} t+C_2$$

De este modo, la ecuación de las extremales en forma paramétrica es:

$$x-C_2=\lambda \operatorname{sen} t,$$
$$y-C_1=-\lambda \cos t,$$

o bien, excluyendo t, se obtiene $(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2$, que es una familia de circunferencias. Las constantes C_1, C_2 y λ se determinan de las condiciones

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1 \quad \text{y} \quad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx=l$$

Ejemplo 2. Hallar la curva AB de longitud dada l que delimite conjuntamente con una curva dada $y=f(x)$ el área máxima de la superficie sombreada en la fig 9.2.

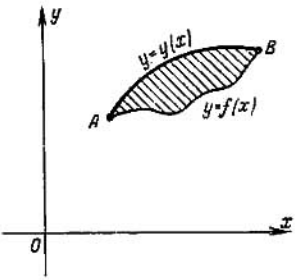

Fig. 9.2

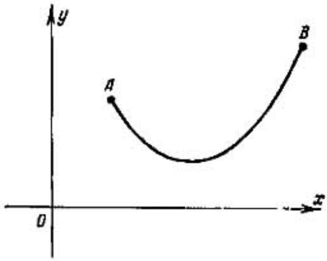

Fig. 9.3

Hay que determinar el extremo de la funcional

$$S=\int_{x_0}^{x_1} (y-f(x))\, dx;$$

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1$$

con la condición

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx=l.$$

Se forma la funcional auxiliar

$$S^{**}=\int_{x_0}^{x_1} (y-f(x)+\lambda \sqrt{1+y'^2})\, dx.$$

La ecuación de Euler para esta funcional no se diferencia de la ecuación de Euler del problema anterior, por consiguiente, en el problema dado el máximo se puede alcanzar sólo en los arcos de circunferencia.

E j e m p l o 3. Hallar la forma de una cuerda absolutamente flexible, inestirable y homogénea de longitud l, que está colgada de los puntos A y B (fig. 9.3).

Como el centro de gravedad en la posición de equilibrio debe ocupar la posición más baja, el problema se reduce a hallar el mínimo del momento estático P con respecto al eje Ox, que supondremos dirigido horizontalmente. Se investiga el extremo de la funcional $P=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ con la condición $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$. Se forma la funcional auxiliar

$$P^{**}=\int_{x_0}^{x_1}(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

para la cual la ecuación de Euler tiene la primera integral

$$F-y'F_{y'}=C$$

o, en este caso,

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}-\frac{(y+\lambda)\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,$$

de donde $y+\lambda=C_1\sqrt{1+y'^2}$. Introduzcamos un parámetro, haciendo $y'=\operatorname{sh} t$; entonces $\sqrt{1+y'^2}=\operatorname{ch} t$ e $y+\lambda=C_1\operatorname{ch} t$; $\frac{dy}{dx}=\operatorname{sh} t$; $dx=\frac{dy}{\operatorname{sh} t}=C_1\,dt$; $x=$ $=C_1t+C_2$, o bien, eliminando t, $y+\lambda=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$, que es una familia de catenarias.

La regla de resolución de problemas isoperimétricos indicada más arriba se generaliza a funcionales más complejas.

Citemos otro problema de extremo condicional: el problema sobre la regulación óptima. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x(t),\ u(t)) \tag{9.6}$$

con condición inicial $x(t_0)=x_0$.

Esta ecuación contiene, además de la función (escalar o vectorial) incógnita $x(t)$, la llamada *función reguladora* $u(t)$ (escalar o vectorial). La función reguladora $u(t)$ debe ser escogida de modo que la funcional dada

$$v=\int_{t_0}^{t_1}F(x(t),\ u(t))\,dt$$

tenga un extremo.

La función $u(t)$ que da la solución del problema planteado se llama *función óptima*, o *regulación óptima*.

Este problema se puede considerar como un problema sobre un extremo condicional de la funcional v con enlaces diferenciales (9.6). Sin embargo, en los problemas prácticos las funciones óptimas se hallan con frecuencia en la frontera del conjunto de funciones raguladoras admisibles (por ejemplo, si la función reguladora es la potencia conectada de los motores, es evidente que ésta está acotada por la potencia máxima de los motores, y en las soluciones de los problemas óptimos con frecuencia hay que conectar los motores en toda su potencia por lo menos en ciertos intervalos).

Si la función óptima pertenece a la frontera del conjunto de las funciones reguladoras admisibles, no se puede aplicar la teoría expuesta más arriba de los problemas sobre un extremo condicional, la cual presupone la posibilidad de variaciones bilaterales.

Por esto, para resolver los problemas de la regulación óptima se aplican por lo general otros métodos, desarrollados por L. S. Pontriaguin y R. Bellman.

Ejemplo. Determinar la función reguladora $u(t)$ en el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt}=v, \quad \frac{dv}{dt}=u \quad (t \text{ es el tiempo}) \tag{9.7}$$

que describe el movimiento de un punto en el plano con coordenadas x y v de modo que el punto $A(x_0, v_0)$ se desplace al punto $B(0, 0)$ en tiempo mínimo; además, $|u| \leqslant 1$ (como $u=\frac{d^2x}{dt^2}$, se puede considerar que u es la fuerza que actúa sobre un punto de masa igual a la unidad)

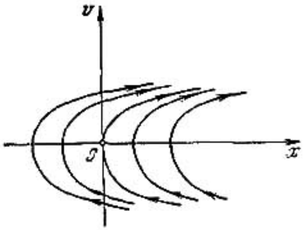

Fig 9.4

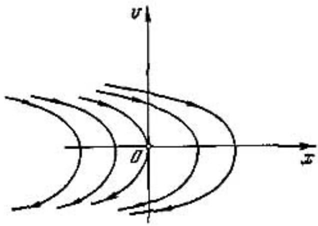

Fig. 9.5

La función reguladora $u(t)$ es continua a trozos. Para simplificar los razonamientos supongamos que no tiene más de un punto de discontinuidad; sin embargo, el resultado definitivo es válido también sin esta hipótesis.

Es casi evidente que $u=\pm 1$ en las trayectorias óptimas, puesto que para estos valores $\left|\frac{dx}{dt}\right|$ y $\left|\frac{dv}{dt}\right|$ alcanzan los valores máximos y, en consecuencia, el punto se mueve con velocidad máxima. Haciendo $u=1$ en (9.7), se obtiene

$$v=t+C_1, \quad x=\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2,$$

o bien $v^2=2(x-C)$, y análogamente para $u=-1$,

$$v=-t+C_1, \quad x=-\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2, \quad v^2=-2(x-C)$$

En las figs. 9.4 y 9.5 están representadas estas familias de parábolas, y las flechas indican el sentido del movimiento al aumentar t. Si el punto $A(x_0, v_0)$ está en los arcos de las parábolas

$$v=-\sqrt{x} \quad \text{o bien} \quad v=\sqrt{-x} \tag{9.8}$$

que pasan por el origen de coordenadas (fig. 9.6), entonces la trayectoria óptimal es el arco de una de estas parábolas que une el punto A con el B. Si, en cambio, el punto A no pertenece a estas parábolas, la trayectoria optimal será el arco de parábola AC que pasa por el punto A y el arco CB de una de las parábolas (9.8) (véase la fig. 9.6, donde se muestran dos posiciones posibles de los puntos A y C).

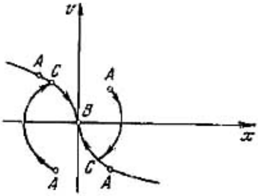

Fig. 9.6

En este problema el tiempo T invertido en el movimiento del punto desde la posición A hasta la B es una funcional que se determina de la primera de las ecuaciones (9.7), la segunda ecuación de (9.7) puede considerarse como la ecuación de un enlace. Sin embargo, sería dificultoso aplicar a este problema los métodos clásicos de resolución expuestos más arriba, puesto que la regulación óptima pertenece a la frontera de la región $|u|\leqslant 1$ de las regulaciones admisibles, y no son posibles aquí las variaciones bilaterales; además, la solución se busca en la clase de funciones reguladoras continuas o trozos.

Estas dos circunstancias son muy características para la mayoría de los problemas prácticos de regulación óptima.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 9

1. Hallar las extremales del problema isoperimétrico $v[y(x)]=\int_0^1 (y'^2+x^2)\,dx$ con la condición $\int_0^1 y^2\,dx=2$; $y(0)=0$; $y(1)=0$.

2. Hallar las líneas geodésicas del cilindro circular $r=R$.

Indicación. Es cómodo buscar la solución en coordenadas cilíndricas r, φ, z.

3. Hallar las extremales del problema isoperimétrico

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} y'^2\,dx \quad \text{con la condición} \quad \int_{x_0}^{x_1} y\,dx=a,$$

donde a es una constante.

4. Escribir la ecuación diferencial de las extremales del problema isoperimétrico sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} [p(x) y'^2 + q(x) y^2]\, dx$$

con la condición $\int_0^{x_1} r(x) y^2\, dx = 1$; $y(0) = 0$; $y(x_1) = 0$.

5. Hallar la extremal del problema isoperimétrico sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz - 4z)\, dx$$

con la condición $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\, dx = 2$; $y(0) = 0$; $z(0) = 0$; $y(1) = 1$; $z(1) = 1$

CAPITULO 10

Métodos directos en los problemas variacionales

§ 1 METODOS DIRECTOS

Las ecuaciones diferenciales de los problemas variacionales se integran en forma finita sólo en casos excepcionales. Por esto surge naturalmente la necesidad de obtener otros métodos de resolución de estos problemas. La idea fundamental de los llamados *métodos directos* consiste en que el problema variacional se considera como límite para cierto problema sobre el extremo de una función de un número finito de variables. Este último problema se resuelve por los métodos comunes, y luego se obtiene, mediante el paso al límite, la solución del problema variacional correspondiente.

La funcional $v[y(x)]$ se puede considerar como una función de infinito número de variables. Esta afirmación se hace completamente evidente si se supone que las funciones admisibles pueden ser desarrolladas en series de potencias:

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

o en series de Fourier:

$$y(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\operatorname{sen} nx)$$

o, en general, en algunas series del tipo

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

donde $\varphi_n(x)$ son funciones dadas. Para determinar la función $y(x)$ que se puede representar en forma de la serie $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$, es suficiente dar los valores de todos los coeficientes a_n y, en consecuencia, el valor de la funcional $v[y(x)]$ se determina en este caso fijando la sucesión infinita de números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, es decir, la funcional es una función de un conjunto infinito de variables:

$$v[y(x)] = \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots).$$

En consecuencia, la diferencia entre los problemas variacionales y los problemas sobre el extremo de una función de un número finito de variables consiste en que en el caso variacional hay que investigar el extremo de una función de un conjunto infinito de variables. Por esto, la idea fundamental de los métodos directos, que consiste—como ya fue dicho más arriba—en que el problema variacional se considera como límite para un problema sobre el extremo de una función de un número finito de variables, es muy natural.

L. Euler, en el primer período de sus investigaciones en el campo del análisis variacional, aplicaba un método, llamado ahora método directo de diferencias finitas. Este método en lo sucesivo no se aplicaba en absoluto durante mucho tiempo, y sólo en los últimos tres decenios renació con éxito en los trabajos de los matemáticos soviéticos (L. A. Lusternik, I. G. Petrovski y otros).

En la actualidad otro método directo, conocido por el nombre de método de Ritz—en cuyo desarrollo fue introducido un aporte significativo por los matemáticos soviéticos (N. M. Krylov, N. N. Bogoliubov y otros)—tiene una gran aplicación en la resolución de distintos problemas variacionales.

Un tercer método directo, propuesto por L. V. Kantorovich, el cual es aplicable a las funcionales que dependen de funciones de varias variables independientes, encuentra cada vez mayor aplicación en los mismos campos en que se aplica el método de Ritz.

En lo sucesivo nos detendremos sólo en estos tres métodos directos, omitiendo las demostraciones de varios enunciados. Al lector que desee estudiar con más detalle los métodos directos que se aplican en la actualidad le recomendamos los libros de L. V. Kantorovich y V. I. Krylov y de S. G. Mijlin.

§ 2. METODO DE DIFERENCIAS FINITAS DE EULER

La idea del *método de diferencias finitas* consiste en que se consideran los valores de la funcional $v[y(x)]$, por ejemplo, de

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx, \quad y(x_0) = a, \quad y(x_1) = b$$

no en las curvas arbitrarias admisibles en el problema variacional dado, sino en las líneas quebradas formadas por un número n dado de segmentos rectilíneos cuyas abscisas de los vertices están dadas:

$x_0+\Delta x$, $x_0+2\Delta x$, $\ldots$, $x_0+(n-1)\Delta x$, donde $\Delta x=\frac{x_1-x_0}{n}$ (fig. 10.1). En estas quebradas la funcional $v[y(x)]$ se transforma en una función $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ de las ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ de los vértices de la quebrada, puesto que ésta queda determinada por dichas ordenadas.

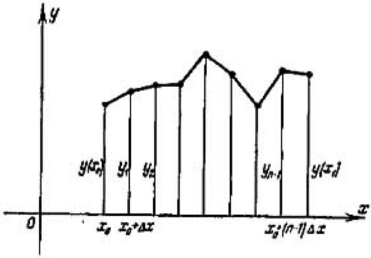

Fig. 10.1

Escojamos las ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ de modo que la función $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ tenga un extremo, es decir, determinemos $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}=0,$$

y luego pasemos al límite para $n\to\infty$. En el límite se obtiene — imponiendo ciertas limitaciones a la función F — la solución del problema variacional.

Sin embargo, es más cómodo calcular el valor de la funcional $v[y(x)]$ en las quebradas indicadas más arriba en forma aproximada, por ejemplo, sustituir en el problema simple la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_0+k\Delta x}^{x_0+(k+1)\Delta x} F\left(x,\ y,\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\Delta x}\right)dx$$

por la suma integral

$$\sum_{i=1}^{n} F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Deduzcamos, en calidad de ejemplo, la ecuación de Euler para la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx$$

En este caso en las quebradas consideradas será

$$v[y(x)] \approx \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x.$$

Como de y_i dependen solamente dos sumandos de esta suma: el i-ésimo y el $(i-1)$-ésimo,

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x \quad \text{y} \quad F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\Delta x,$$

las ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = 0 \, (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ toman la forma

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x + F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\Delta x +$$
$$+ F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right)\frac{1}{\Delta x}\Delta x = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, (n-1)),$$

ó

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{F_{y'}\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - F_{y'}\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0,$$

o bien

$$F_y\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) - \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = 0.$$

Pasando al límite para $n \to \infty$, se obtiene la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

a la cual debe satisfacer la función $y(x)$ buscada que realiza el extremo. Análogamente se puede obtener la condición necesaria fundamental de extremo en otros problemas variacionales.

Si no se efectúa el paso al límite, del sistema de ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ se pueden determinar las ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ buscadas, obteniendo así una quebrada que es la solución aproximada del problema variacional.

§ 3. METODO DE RITZ

La idea del *método de Ritz* consiste en que los valores de cierta funcional $v[y(x)]$ se consideran no en las curvas arbitrarias admisibles del problema variacional dado, sino sólo en todas las combinaciones lineales $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ con coeficientes constantes posibles formadas por las n primeras funciones de cierta sucesión elegida de funciones

$$W_1(x),\ W_2(x),\ \ldots,\ W_n(x),\ \ldots$$

Las funciones $y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i W_i(x)$ deben ser admisibles en el problema considerado, lo cual impone ciertas limitaciones a la elección de la sucesión de funciones $W_i(x)$. En estas combinaciones lineales, la funcional $v[y(x)]$ se transforma en una función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Estos coeficientes se escogen de modo que la función $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tenga un extremo; en consecuencia, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ deben ser determinados del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}=0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Pasando al límite para $n\to\infty$, se obtiene — en caso de que exista el límite — la función $y=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i W_i(x)$ que es (bajo ciertas limitaciones impuestas a la funcional $v[y(x)]$ y a la sucesión $W_1(x)$, $W_2(x), \ldots, W_n(x), \ldots$) la solución exacta del problema variacional considerado. Si no efectuamos el paso al límite, sino que nos limitamos sólo a los n primeros términos $y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i W_i(x)$, obtenemos una solucion aproximada del problema variacional.

Si por este método se determina un mínimo absoluto de la funcional, el valor aproximado de dicho mínimo se halla por exceso, puesto que el mínimo de la funcional para funciones admisibles arbitrarias no es mayor que el mínimo de ésta para una parte de esta clase de curvas admisibles: las curvas del tipo $y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i W_i(x)$. Al hallar por el mismo método un máximo de la funcional se obtiene, por las mismas causas, una aproximación por defecto de dicho máximo.

Para que las funciones $y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i W_i(x)$ sean admisibles, ante todo es necesario satisfacer las condiciones de frontera (tampoco hay que olvidarse, claro está, de las otras limitaciones que pueden imponerse a las funciones admisibles, por ejemplo, limitaciones sobre la continuidad o la derivabilidad). Si las condiciones de frontera son lineales y homogéneas, por ejemplo, si $y(x_0)=y(x_1)=0$, o bien

$$\beta_{1j}y(x_j)+\beta_{2j}y'(x_j)=0\quad (j=0,1),$$

donde las β_{ij} son constantes, en el problema más simple, lo más sencillo es escoger las funciones coordenadas de modo que satisfagan estas condiciones de frontera. Es evidente que entonces $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x)$ para α_i cualesquiera también satisfarán las mismas condiciones de frontera. Supongamos, por ejemplo, que las condiciones de frontera tienen la forma $y(x_0) = y(x_1) = 0$; entonces se puede tomar

$$W_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi_i(x)$$

como funciones coordenadas, donde $\varphi_i(x)$ son ciertas funciones continuas, o bien

$$W_k(x) = \operatorname{sen} \frac{k\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

u otras funciones que satisfagan las condiciones

$$W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$$

Si las condiciones no son homogéneas, por ejemplo, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, donde por lo menos uno de los números y_0 ó y_1 es diferente de cero, lo más sencillo es buscar la solución del problema variacional en la forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i W_i(x) + W_0(x),$$

donde $W_0(x)$ satisface las condiciones de frontera dadas, $W_0(x_0) = y_0$, $W_0(x_1) = y_1$, y las demás $W_i(x)$ satisfacen las condiciones de frontera homogéneas correspondientes, es decir, en este caso $W_i(x_0) = W_i(x_1) = 0$. Es evidente que con esta elección las funciones $y_n(x)$ satisfarán para α_i cualesquiera las condiciones de frontera dadas. Como función $W_0(x)$ se puede tomar, por ejemplo, la función lineal

$$W_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

La resolución del sistema de ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es, en general, un problema muy complejo. Este se simplifica considerablemente si se estudia el extremo de una funcional v cuadrática respecto a la función incógnita y a sus derivadas, puesto que en este caso las ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son lineales con respecto a α_i.

La elección de la sucesión de funciones $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$, llamadas funciones coordenadas, influye en forma considerable en el grado de complejidad de los cálculos ulteriores; por esto, el éxito de la aplicación de este método depende mucho de la elección adecuada del sistema de funciones coordenadas.

Todo lo que acabamos de exponer se aplica también a las funcionales $v[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$—en este caso, claro está, las funciones W_i deben depender de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$—así como a las funcionales que dependen de varias funciones.

El método de Ritz se aplica frecuentemente para la resolución exacta o aproximada de problemas de la física matemática. Por ejemplo, si se pide hallar en cierta región D la solución de la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x, y)$$

para valores dados de z en la frontera de la región D, se puede sustituir este problema por el problema variacional sobre el extremo de una funcional, para la cual la ecuación dada sea la ecuación de Ostrogradski (véase la pág. 322). En el caso considerado esta funcional será

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x, y)\right] dxdy.$$

La función z, que realiza el extremo de esta funcional, se puede hallar por cualquier método directo.

Los problemas de la física matemática se reducen con frecuencia al estudio del extremo de funcionales cuadráticos con respecto a la función incógnita y a sus derivadas y, por lo tanto, como fue indicado más arriba, la aplicación del método de Ritz en este caso se simplifica.

El problema de la convergencia de las aproximaciones obtenidas por el método de Ritz a la solución buscada del problema variacional, así como de la apreciación del grado de exactitud de estas aproximaciones, es muy complejo. Por esto aquí nos limitaremos sólo a algunas observaciones, recomendando al lector que desee estudiar este problema con mayor detalle los libros de Mijlin y de Kantorovich y Krylov.

Tomaremos, para fijar ideas, la funcional

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx$$

y supondremos que se estudia su mínimo. Consideraremos que la sucesión de funciones coordenadas $W_1(x), W_2(x), \ldots, W_n(x), \ldots$ es completa en el sentido que cada función admisible puede ser aproximada con cualquier grado de exactitud en el sentido de proximidad de primer orden por una combinación lineal $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k W_k(x)$ de funciones coordenadas, donde n es suficientemente grande. Entonces es evidente que por el método de Ritz se pueden obtener las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, donde $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k W_k(x)$, que formen la llamada sucesión minimizante, es decir, la sucesión para la cual los valores de la funcional

$$v[y_1], v[y_2], \ldots, v[y_n], \ldots$$

converjan al mínimo, o a la cota inferior de los valores de la funcional $v[y(x)]$. Sin embargo de la relación $\lim_{n\to\infty} v[y_n(x)] = \min v[y(x)]$, no se deduce de ningún modo que $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$. La sucesión minimizante puede no tender a la función que realiza el extremo en la clase de funciones admisibles

En efecto, la funcional

$$v[y_n(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_n(x), y_n'(x))\, dx$$

puede diferenciarse poco de

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx$$

no sólo cuando $y_n(x)$ sea cercana a $y(x)$ en el sentido de proximidad de primer orden en todo el segmento de integración, sino

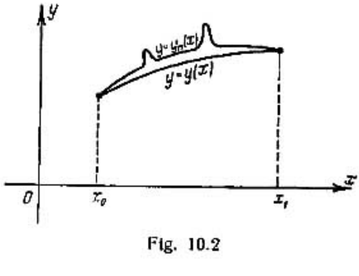

Fig. 10.2

también cuando las funciones $y_n(x)$ e $y(x)$ o sus derivadas se diferencien considerablemente en partes suficientemente pequeñas del segmento (x_0, x_1), permaneciendo cercanas en el resto de dicho segmento (fig. 10.2). Por esto la sucesión minimizante $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ puede no tener siquiera límite en la clase de funciones admisibles, a pesar de que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ sean admisibles

Las condiciones de convergencia de la sucesión y_n obtenida por el método de Ritz a la solución del problema variacional y la apreciación de la rapidez de la convergencia para funcionales concretas, que se encuentran con frecuencia en la práctica, fueron desarrollados por N. M. Krylov y N. N. Bogoliubov. Así por ejemplo, para las funcionales del tipo

$$v=\int_0^1 [p(x)y'^2+q(x)y^2+f(x)y]\,dx;\quad y(0)=y(1)=0,$$

donde $p(x)>0$; $q(x)\geqslant 0$, que se encuentran con frecuencia en las aplicaciones, fue demostrada no sólo la convergencia de las aproximaciones que se obtienen por el método de Ritz a la función $y(x)$ que realiza el mínimo de la funcional, para las funciones coordenadas

$$W_k(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen} k\pi x\quad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

sino también fueron obtenidas acotaciones muy exactas del error $|y(x)-y_n(x)|$

Citaremos una de estas acotaciones del máximo de $|y(x)-y_n(x)|$ en el segmento (0.1):

$$\max|y-y_n|\leqslant\frac{1}{n+1}\left[\max p(x)+\frac{\max q(x)}{(n+1)^2\pi^4}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx}}{\pi^2\sqrt{2}\,[\min p(x)]^{3/2}}\times$$
$$\times\left[\max|p'(x)|+\frac{1}{\pi}\max q(x)+\pi\min p(x)\right]\text{*)}.$$

Incluso en este caso, relativamente sencillo, la apreciación del error es muy compleja. Por esto, para la acotación de la exactitud de los resultados obtenidos por el método de Ritz o por otros métodos directos, por lo general se aplica el siguiente método, imperfecto, claro está, teóricamente, pero suficientemente seguro desde el punto de vista práctico: después de calcular $y_n(x)$ e $y_{n+1}(x)$, se comparan entre sí en varios puntos del segmento $[x_0,\ x_1]$. Si sus valores coinciden en los límites de la exactitud exigida, se considera que la solución del problema variacional considerado es igual, con la exactitud indicada, a $y_n(x)$. Si, en cambio, los valores de $y_n(x)$ e $y_{n+1}(x)$ no coinciden por lo menos en algunos de los puntos escogidos en los límites de la exactitud dada, se calcula $y_{n+2}(x)$ y se comparan los valores de $y_{n+1}(x)$ e $y_{n+2}(x)$. Este proceso se continúa hasta que coincidan los valores de $y_{n+k}(x)$ e $y_{n+k+1}(x)$ en los límites de la exactitud dada.

*) Vease el libro de Kantorovich y Krylov.

Ejemplo 1. Al estudiar las oscilaciones de una cuña fija de espesor constante (fig. 10.3), hay que analizar el extremo de la funcional

$$v=\int_0^1 (ax^3y''^2-bxy^2)dx, \quad y(1)=y'(1)=0,$$

donde a y b son constantes positivas. Como funciones coordenadas que satisfagan las condiciones de frontera se puede tomar

$$(x-1)^2, \ (x-1)^2x, \ (x-1)^2x^2, \ \ldots, \ (x-1)^2x^{k-1}, \ \ldots,$$

por consiguiente,

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k (x-1)^2x^{k-1}.$$

Limitándonos sólo a los dos primeros términos, tendremos

$$y_2=(x-1)^2(\alpha_1+\alpha_2x);$$

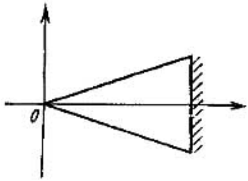

Fig. 10.3

entonces

$$v_2=v[y_2]=\int_0^1 [ax^3(6\alpha_2x+2\alpha_1-4\alpha_2)^2-bx(x-1)^4(\alpha_1+\alpha_2x)^2]\,dx=$$

$$=a\left[(\alpha_1-2\alpha_2)^2+\frac{24}{5}\alpha_2(\alpha_1-2\alpha_2)+6\alpha_2^2\right]-b\left(\frac{\alpha_1^2}{30}+\frac{2\alpha_1\alpha_2}{105}+\frac{\alpha_2^2}{280}\right).$$

Las condiciones necesarias de extremo $\frac{\partial v_2}{\partial\alpha_1}=0$; $\frac{\partial v_2}{\partial\alpha_2}=0$ toman en este caso la forma

$$\left(a-\frac{b}{30}\right)\alpha_1+\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)\alpha_2=0$$

y

$$\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)\alpha_1+\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{280}\right)\alpha_2=0$$

Para obtener soluciones diferentes de la solución $\alpha_1=\alpha_2=0$, la cual corresponde a la ausencia de oscilaciones de la cuña, es necesario que el determinante de este sistema lineal homogéneo de ecuaciones sea igual a cero.

$$\begin{vmatrix} a-\frac{b}{30} & \frac{2}{5}a-\frac{b}{105} \\ \frac{2}{5}a-\frac{b}{105} & \frac{2}{5}a-\frac{b}{280} \end{vmatrix}=0,$$

o bien

$$\left(a-\frac{b}{30}\right)\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{280}\right)-\left(\frac{2}{5}a-\frac{b}{105}\right)^2=0.$$

Esta ecuación se llama ecuación de las frecuencias. Esta determina la frecuencia b de las oscilaciones propias de la cuña, que se describen por la función

$$u(x, t)=y(x)\cos bt$$

La menor de las raíces b_1 y b_2 de la ecuación de las frecuencias da el valor aproximado del tono principal de las oscilaciones de la cuña.

Ejemplo 2. En los problemas relacionados con la torsión de un cilindro o de un prisma, hay que analizar el extremo de la funcional

$$v[z(x, y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + x\right)^2\right] \partial x\, \partial y.$$

Para un cilindro de sección transversal elíptica la región de integración D estará limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En este caso, tomando sólo una función coordenada, xy, se obtiene

$$z_1 = \alpha xy, \quad v[z_1] = v_1 = \frac{\pi ab}{4}[(\alpha+1)^2 a^2 + (\alpha-1)^2 b^2].$$

La condición necesaria de extremo $\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} = 0$ toma en este caso la forma $(\alpha+1)a^2 + (\alpha-1)b^2 = 0$, de donde

$$\alpha = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}, \quad z_1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\, xy.$$

Ejemplo 3. Si en las condiciones del ejemplo anterior la región D es un rectángulo de lados $2a$ y $2b$, $-a \leqslant x \leqslant a$; $-b \leqslant y \leqslant b$, entonces tomando xy, xy^3, x^3y, como funciones coordenadas, es decir, haciendo

$$z_3 = \alpha_1 xy + \alpha_2 xy^3 + \alpha_3 x^3 y,$$

se obtiene

$$v_3 = v[z_3] = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \left[\left(\frac{\partial z_3}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial z_3}{\partial y} + x\right)^2\right] dx\, dy =$$

$$= \frac{4}{3}ab^3(\alpha_1 - 1)^2 + 4ab^5\left(\frac{b^2}{7} + \frac{3a^2}{5}\right)\alpha_2^2 + 4a^5 b\left(\frac{a^2}{7} + \frac{3b^2}{5}\right)\alpha_3^2 +$$
$$+ \frac{4}{3}a^3 b(\alpha_1 + 1)^2 + \frac{8}{5}ab^5(\alpha_1 - 1)\alpha_2 + \frac{8}{5}a^3 b(\alpha_1 + 1)\alpha_2 -$$
$$- \frac{8}{5}a^5 b(\alpha_1 + 1)\alpha_3 - \frac{8}{5}a^3 b^3(a^2 + b^2)\alpha_2\alpha_3 - \frac{8}{3}a^3 b^3(\alpha_1 - 1)\alpha_3.$$

Las condiciones necesarias de extremo $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} = 0$, $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} = 0$, $\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} = 0$ permiten calcular α_1, α_2 y α_3:

$$\alpha_1 = \frac{7(a^6 - b^6) + 135a^2b^2(a^2 - b^2)}{7(a^6 + b^6) + 107a^2b^2(a^2 + b^2)},$$

$$\alpha_2 = -\frac{7a^2(3a^2 + 35b^2)}{21(a^6 + b^6) + 321a^2b^2(a^2 + b^2)},$$

$$\alpha_3 = -\frac{7b^2(35a^2 + 3b^2)}{21(a^6 + b^6) + 321a^2b^2(a^2 + b^2)}.$$

Ejemplo 4. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

dentro del rectángulo D, $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, que se anule en la frontera de D. Se supone que la función $f(x, y)$ se puede desarrollar en serie doble de Fourier que converge uniformemente dentro del rectángulo considerado:

$$f(x, y)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\beta_{pq}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}.$$

Este problema de frontera se puede reducir a un problema variacional, es decir, escoger una funcional para la cual la ecuación dada sea la ecuación de Ostrogradski, y luego hallar, mediante algún método directo, la función que realiza el extremo de esta funcional, hallando así la solución del problema de frontera inicial. Como se comprueba fácilmente,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x, y)$$

es la ecuación de Ostrogradski para la funcional

$$v[z(x, y)]=\iint_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2zf(x, y)\right]dx\,dy$$

(véase la pág. 322). La condición de frontera se mantiene. $z=0$ en la frontera de la región D. Estudiemos el extremo de esta funcional por el método de Ritz. Tomemos como sistema de funciones coordenadas a

$$\operatorname{sen} m\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} n\frac{\pi y}{b}\qquad (m, n=1, 2, \ldots).$$

Cada una de estas funciones, así como sus combinaciones lineales, satisfacen la condición de frontera $z=0$ en la frontera de la región D. Estas funciones también poseen la propiedad de ser completas. Tomando

$$z_{n, m}=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\alpha_{pq}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b},$$

tendremos

$$v[z_{nm}]=\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_{nm}}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2z_{nm}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\beta_{pq}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}\right]dx\,dy=$$

$$=\frac{\pi^2 ab}{4}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\alpha_{pq}^2+\frac{ab}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\alpha_{pq}\beta_{pq}.$$

Este resultado puede obtenerse fácilmente si se considera que las funciones coordenadas $\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}$ $(p, q=1, 2, \ldots)$ forman un sistema ortogonal en la región D, es decir,

$$\iint_D\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen} p_1\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q_1\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy=0$$

para cualesquiera p, q, p_1, q_1 enteros positivos, a excepción del caso $p=p_1$ y $q=q_1$. Para $p=p_1$ y $q=q_1$, se obtiene

$$\iint_D \operatorname{sen}^2 p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}^2 q\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy=\frac{ab}{4}$$

Por esto, de todos los términos bajo el signo integral doble, igual a $v[z_{nm}]$, hay que considerar sólo los que contienen los cuadrados de las funciones $\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}$, $\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\cos q\frac{\pi y}{b}$ y $\cos p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}$. Es evidente que $v[z_{nm}]$ es una función $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nm})$ de los coeficientes $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nm}$, los cuales se determinan de la condición necesaria fundamental de extremo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_{pq}}=0\ (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

Este sistema tiene en este caso la forma

$$\alpha_{pq}\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)\pi^2+\beta_{pq}=0\ (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

de donde

$$\alpha_{pq}=-\frac{\beta_{pq}}{\pi^2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\right)}$$

Por consiguiente,

$$z_{nm}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}.$$

Pasando al límite para n y m tendientes a infinito, se obtiene en este caso la solución exacta:

$$z=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\beta_{pq}}{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}\operatorname{sen} p\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen} q\frac{\pi y}{b}.$$

§ 4. METODO DE KANTOROVICH

Al aplicar el método de Ritz a las funcionales $v[z(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ que dependen de funciones de varias variables independientes, se escoge un sistema de funciones coordenadas

$$W_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ W_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ W_m(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots$$

y se busca la solución aproximada del problema variacional en la forma $z_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k W_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, donde los coeficientes α_k son constantes.

El *método de Kantorovich* también exige la determinación de un sistema de funciones coordenadas

$$W_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), W_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, W_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$$

y la solución aproximada también se busca en la forma

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

sin embargo, los coeficientes $\alpha_k(x_i)$ no son constantes, sino funciones incógnitas de una de las variables independientes. La funcional $v[z]$ se transforma, en la clase de las funciones de la forma

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

en una funcional $\bar{v}[\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \ldots, \alpha_m(x_i)]$ que depende de m funciones de una variable independiente

$$\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \ldots, \alpha_m(x_i).$$

Las funciones $\alpha_1(x_i), \alpha_2(x_i), \ldots, \alpha_m(x_i)$ se escogen de modo que la funcional $\bar{v}$ tenga un extremo.

Si luego de esto se pasa al límite para $m \to \infty$, se puede obtener, bajo ciertas condiciones, la solución exacta. Si no se pasa al límite, por este método se puede obtener una solución aproximada y además, en general es mucho más exacta que al aplicar el método de Ritz con las mismas funciones coordenadas y con el mismo número m de términos

La mayor exactitud de este método se obtiene en virtud de que la clase de funciones $z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $\alpha_k(x_i)$ variables es mucho mayor que la clase de funciones

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con α_k constantes y, en consecuencia, entre las funciones del tipo

$$z_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x_i) W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se pueden escoger funciones que aproximen mejor la solución del problema variacional, que entre las funciones del tipo

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k W_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ donde las } \alpha_k \text{ son constantes.}$$

Supongamos, por ejemplo, que se pide estudiar el extremo de la funcional

$$v=\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

tomada sobre la región D delimitada por las curvas $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ y por las dos rectas $x=x_0$ y $x=x_1$ (fig. 10.4). En la frontera de la región D se dan los valores de la función $z(x,\ y)$. Escojamos la sucesión de funciones coordenadas:

$$W_1(x,\ y),\ W_2(x,\ y),\ \ldots,\ W_n(x,\ y),\ \ldots$$

Limitándonos primeramente a m primeras funciones de esta sucesión, buscaremos la solución del problema variacional en forma

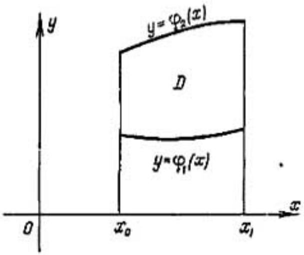

Fig. 10.4

de la suma $z_m=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(x)W_k(x,\ y)$, o bien, cambiando la notación $\alpha_k(x)$ por la $u_k(x)$, se obtiene:

$$z_m(x,\ y)=u_1(x)W_1(x,\ y)+u_2(x)W_2(x,\ y)+\ldots+u_m(x)W_m(x,\ y),$$

donde las W_k son las funciones escogidas, y u_k, las incógnitas, que determinaremos de modo que la funcional v tenga un extremo. Se tiene

$$v[z_m(x,\ y)]=\int_{x_0}^{x_1}dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x,\ y,\ z_m(x,\ y),\ \frac{\partial z_m}{\partial x},\ \frac{\partial z_m}{\partial y}\right)dy$$

Como la función subintegral es una función conocida de y, la integración por y puede ser efectuada, y la funcional $v[z_m(x,\ y)]$ será una funcional de la forma

$$v[z_m(x,\ y)]=\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x,\ u_1(x),\ \ldots,\ u_m(x),\ u_1',\ \ldots,\ u_m')dx.$$

Las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_m(x)$ se eligen de modo que la funcional $v[z_m(x, y)]$ tenga un extremo. En consecuencia, $u_i(x)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones de Euler:

$$\begin{gathered}\varphi_{u_1}-\frac{d}{dx}\varphi_{u_1'}=0,\\ \varphi_{u_2}-\frac{d}{dx}\varphi_{u_2'}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{u_m}-\frac{d}{dx}\varphi_{u_m'}=0.\end{gathered}$$

Las constantes arbitrarias se eligen de modo que $z_m(x, y)$ satisfagan las condiciones de frontera dadas en las rectas $x=x_0$ y $x=x_1$.

Ejemplo 1. Analizar el extremo de la funcional

$$v[z(x, y)]=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right]dx\,dy;$$

además, $z=0$ en la frontera de la región de integración. Dicha región es el rectángulo $-a\leqslant x\leqslant a$; $-b\leqslant y\leqslant b$. La solución se busca en la forma $z_1=(b^2-y^2)u(x)$; entonces las condiciones de frontera serán satisfechas en las rectas $y=\pm b$. La funcional $v[z_1]$ es igual a

$$v[z_1]=\int_{-a}^{a}\left[\frac{16}{15}b^5u'^2+\frac{8}{3}b^3u^2-\frac{8}{3}b^3u\right]dx.$$

La ecuación de Euler para esta funcional

$$u''-\frac{5}{2b^2}u=-\frac{5}{4b^2}$$

es una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuya solución general tiene la forma

$$u=C_1\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}+C_2\operatorname{sh}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}+\frac{1}{2}.$$

Las constantes C_1 y C_2 se determinan de las condiciones de frontera $z(-a)=z(a)=0$, de donde $C_2=0$, $C_1=-\dfrac{1}{2\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}$, y obtenemos en definitiva:

$$u=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{a}{b}}\right);$$

por consiguiente,

$$z_1=\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{x}{b}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{a}{b}}\right)$$

Si es necesario obtener una respuesta más exacta, se puede buscar la solución en la forma

$$z_2=(b^2-y^2)\,u_1(x)+(b^2-y^2)^2\,u_2(x)$$

Ejemplo 2. Hallar la solución continua de la ecuación $\Delta z=-1$ en la región D, que es un triángulo equilátero delimitado por las rectas $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ y $x=b$ (fig. 10.5), que se anule en la frontera de esta región.

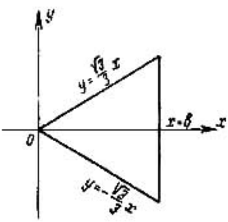

Fig. 10.5

La ecuación $\Delta z=-1$ es la ecuación de Ostrogradski para la funcional

$$v[z]=\int_0^b\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\right]dx\,dy$$

y $z=0$ en la frontera de la región de integración. Según el método de Kantorovich, buscaremos la primera aproximación en la forma

$$z_1=\left[y^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2\right]u(x)$$

Eligiendo z_1 de este modo, las condiciones de frontera se satisfacen en las rectas $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

La funcional $v[z_1]$, luego de efectuar la integración con respecto a y, toma la forma

$$v[z_1]=\frac{8\sqrt{3}}{405}\int_0^b(2x^5u'^2+10x^4uu'+30x^3u^2+15x^3u)\,dx.$$

La ecuación de Euler para esta funcional será $x^2u''+5xu'-5u=\frac{15}{4}$. Las ecuaciones lineales de este tipo en la teoría de las ecuaciones diferenciales se llaman ecuaciones de Euler (pág. 114).

Una solución particular de esta ecuación no homogénea es evidente: $u=-\frac{3}{4}$. La solución de la ecuación homogénea correspondiente se busca en la forma $u=x^k$, y se obtiene en definitiva $u=C_1x+C_2x^{-5}-\frac{3}{4}$. Como cerca del punto

$x=0$ la solución u debe ser acotada, C_2 debe ser escogido igual a cero; además, de la condición $u(b)=0$ se obtiene $C_1=-\dfrac{3}{4b}$. De este modo,

$$z_1=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(y^2-\frac{1}{3}x^2\right).$$

Observación. Para la resolución aproximada de problemas de frontera se aplica con frecuencia otro método directo, no variacional: el método de B. G. Galiorkin. Este es particularmente cómodo en la resolución de problemas lineales de frontera, pero puede ser aplicado también a muchos problemas no lineales. Para fijar ideas, expondremos el *método de Galiorkin* aplicado a las ecuaciones lineales de segundo orden

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{10.1}$$

que se encuentran con particular frecuencia en la práctica, con las condiciones de frontera $y(x_0)=0$, $y(x_1)=0$ (las condiciones de frontera no homogéneas $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ se reducen fácilmente a las homogéneas mediante el cambio de variables

$$z=y-y_0-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0))$$

Escribamos la ecuación (10.1) en forma compacta como

$$L(y)=f(x)$$

Tomemos un sistema de funciones continuas

$$w_1(x),\ w_2(x),\ \ldots,\ w_n(x),\ \ldots \tag{10.2}$$

linealmente independientes que satisfacen las condiciones de frontera $w_n(x_0)=w_n(x_1)=0$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, completo en el segmento $[x_0, x_1]$. Buscaremos la solución aproximada del problema de frontera en forma de la combinación lineal de las primeras n funciones del sistema (10.2):

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i(x).$$

Se sustituyen las y_n en la ecuación (10.1) y se eligen los coeficientes α_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ de modo que la función

$$L\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i(x)\right)-f(x)$$

sea ortogonal en el segmento $[x_0, x_1]$ a cada función $w_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$:

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[L\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i(x)\right)-f(x)\right]w_i(x)\,dx=0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{10.3}$$

Es natural esperar que y_n tienda para $n \to \infty$ a la solución exacta,

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i(x),$$

puesto que si la serie obtenida converge y puede ser derivada dos veces término a término, la función $L(\tilde{y}) - f(x)$ es ortogonal en el segmento $[x_0, x_1]$ a cada función $w_i(x)$ del sistema (10.2), y como dicho sistema es completo, entonces $L(\tilde{y}) - f(x) \equiv 0$; esto precisamente significa que $\tilde{y}$ es la solución de la ecuación (10.1). Es evidente que $\tilde{y}$ satisface también las condiciones de frontera $\tilde{y}(x) = \tilde{y}(x_1) = 0$ (puesto que todas las $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$).

Muy raras veces se pueden determinar todas las α_i del sistema (10.3) lineal con respecto a éstas y pasar al límite para $n \to \infty$; por esto, por lo general hay que limitarse a un n finito, y además no muy grande ($n = 2, 3, 4, 5$, y a veces incluso $n = 1$).

En este caso, claro está, hay que tomar sólo n funciones $w_i(x)$; por esto, la condición de que el sistema sea completo no es necesaria, y hay que elegir dichas funciones sólo de modo que sean linealmente independientes y que satisfagan las condiciones de frontera

$$w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0.$$

Con frecuencia se toman polinomios en calidad de estas funciones, llamadas funciones coordenadas:

$$(x_0 - x_0)(x - x_1),\ (x - x_0)^2 (x - x_1),\ (x - x_0)^3 (x - x_1),\ \ldots$$
$$\ldots,\ (x - x_0)^n (x - x_1),\ \ldots \qquad (10.4)$$

(en este caso es cómodo trasladar el origen de coordenadas al punto x_0, y entonces $x_0 = 0$ en (10.4)), o bien funciones trigonométricas,

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi (x - x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Este método es aplicable a las ecuaciones de cualquier orden n, a los sistemas de ecuaciones y a las ecuaciones en derivadas parciales.

EJERCICIOS DEL CAPITULO 10

1. Hallar la solución aproximada de la ecuación $\Delta z = -1$ dentro del cuadrado $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$ que se anule en la frontera de éste.

Indicación. El problema se reduce al análisis del extremo de la funcional

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \right] dx\, dy.$$

Se puede buscar la solución aproximada en la forma

$$z_0 = \alpha (x^2 - a^2)(y^2 - a^2).$$

2. Hallar la solución aproximada del problema sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1 (x^3y''^2+100xy^2-20xy)\,dx; \qquad y(1)=y'(1)=0.$$

Indicación. Puede buscarse la solución en la forma

$$y_n(x)=(x-1)^2(\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n);$$

efectuar los cálculos para $n=1$

3. Hallar la solución aproximada del problema sobre el mínimo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^1 (y'^2-y^2-2xy)\,dx; \qquad y(0)=y(1)=0$$

y comparar con la solución exacta.

Indicación La solución aproximada puede buscarse en la forma

$$y_n=x(1-x)(\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n),$$

efectuar los cálculos para $n=0$ y para $n=1$.

4. Hallar la solución aproximada del problema sobre el extremo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_1^2 \left(xy'^2-\frac{x^2-1}{x}y^2-2x^2y\right)dx, \quad y(1)=y(2)=0$$

y comparar con la solución exacta.

Indicación. Puede buscarse la solución en la forma

$$y=\alpha(x-1)(x-2).$$

5. Hallar por el metodo de Ritz la solución aproximada del problema sobre el mínimo de la funcional

$$v[y(x)]=\int_0^2 (y'^2+y^2+2xy)\,dx; \quad y(0)=y(2)=0$$

y comparar con la solución exacta.

Indicación. Véase el ejercicio 3.

6. Hallar por el método de Ritz la solución aproximada de la ecuación diferencial $y''+x^2y=x$, $y(0)=y(1)=0$. Determinar $y_2(x)$ e $y_3(x)$ y comparar sus valores en los puntos $x=0,25$, $x=0,5$ y $x=0,75$.

Respuestas e indicaciones a los ejercicios

DEL CAPITULO 1

1. $\operatorname{sen} y \cos x = c$. 2. $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 3y = c$. 3. $x^2 - 2cy = c^2$. 4. $y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$. 5. $\frac{y^2}{2} + \frac{y}{x} = c$. 6. $x = ce^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$. 7. $y = c\cos x + \operatorname{sen} x$. 8. $e^x - e^y = c$. 9. $x = ce^t - \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t)$. 10. Ecuación homogénea. $x = ye^{cy+1}$. 11. $y = cx$ e $y^2 - x^2 = c$. 12. $y^2 = \frac{1}{(3x+c)^2}$. 13. $\ln|t| = c - e^{-\frac{x}{t}}$. 14. Se puede introducir un parámetro, haciendo $y' = \cos t$ $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, \\ y = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + c. \end{cases}$ 15. $y = cx + \frac{1}{c}$, solución singular $y^2 = 4x$. 16. $\begin{cases} x = p^3 - p + 2, \\ y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + c. \end{cases}$ 17. La ecuación es lineal con respecto a x y a $\frac{dx}{dy}$, $x = cy + \frac{y^3}{2}$. 18. $\begin{cases} x = \frac{4}{3}p^3 - \frac{3}{2}p^2 + c, \\ y = p^4 - p^3 - 2 \end{cases}$ 19. Las hipérbolas $x^2 - y^2 = c$. 20. La ecuación diferencial de las curvas buscadas es $\frac{y}{2x} = y'$. *Respuesta*: $y^2 = 2cx$. 21. La ecuación diferencial de las curvas buscadas es $y - xy' = x$. *Respuesta*: $y = cx - x\ln|x|$. 22. $x^2 + y^2 - 2cy = 0$. El problema se resuelve en forma especialmente sencilla en coordenadas polares. 23. La ecuación diferencial del problema es $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$. *Respuesta*: dentro de 1 hora. 24. La ecuación diferencial del problema es $\frac{dv}{dt} = kv$, donde v es la velocidad. *Respuesta*: $v \approx$ $\approx 0{,}466$ km/h. 25. Si se ubica el origen de coordenadas en el punto dado y se dirige el eje de las abscisas en forma paralela a la dirección dada en las condiciones del problema, la ecuación diferencial de las curvas girando las cuales se forma la superficie buscada, tiene la forma $y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ (o bien $dx - d\rho = 0$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). *Respuesta*: la sección axial de la superficie buscada se determina por la ecuación $y^2 = 2cx - c^2$; la superficie es un paraboloide de revolución. 26. $y = 2\operatorname{sen}(x - C)$. 27. La ecuación diferencial de las

curvas buscadas es $y'=-\frac{y}{x}$. *Respuesta:* las hipérbolas $xy=c$. **28.** $(x+y+1)^3=c(x-y+3)$. **29.** $y=\frac{2(1+x)}{c+2x+x^2}$. **30.** $y(0{,}5)\approx 0{,}13$. **31.** $y(0{,}6)\approx 0{,}07$. **32.** $y(0{,}02)\approx 1{,}984$; $y(0{,}04)\approx 1{,}970$; $y(0{,}06)\approx 1{,}955$; $y(0{,}08)\approx 1{,}942$; $y(0{,}10)\approx 1{,}930$; $y(0{,}12)\approx 1{,}917$; $y(0{,}14)\approx 1{,}907$; $y(0{,}16)\approx 1{,}896$; $y(0{,}18)\approx 1{,}886$; $y(0{,}20)\approx 1{,}877$; $y(0{,}22)\approx 1{,}869$; $y(0{,}24)\approx 1{,}861$; $y(0{,}26)\approx 1{,}854$; $y(0{,}28)\approx 1{,}849$; $y(0{,}30)\approx 1{,}841$. **33.** $\begin{cases} x=\frac{c}{p^2}+\frac{2p}{3}, \\ y=2px-p^2 \end{cases}$ e $y=0$. **34.** $x+\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}=c$. **36.** $(x+y+1)^3=ce^{2x+y}$. **37.** $y=c$, $y=e^x+c$; $y=-e^x+c$. **38** $y^2=2cx+c^2$. **39.** No tiene. **40.** $y_1=\frac{x^2-1}{2}$; $y_2=\frac{x^2-1}{2}+\frac{2}{15}-\frac{1}{4}x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{20}$. **41.** $y=2x^2-x$. **42.** No tiene. **43.** $x=ce^{\frac{x}{y}}$. **44.** $x^2+\frac{3y^2}{2}=c^2$. **45.** $x=2t$. **46.** $x=t^3$. **47.** $y=-x+1$ e $y=-\frac{x^2}{4}$. **48.** No existe solución real. **49.** $3x-4y+1=ce^{x-y}$. **50.** $x=(4t+c)\operatorname{sen} t$. **51.** $y=cx+\frac{c^2-x^2}{2}$ y la solución singular $y=-x^2$. **52.** $y=\frac{7x^3}{x^7+c}$, $y=0$. **53.** $x-c=\frac{a}{2}(2t-\operatorname{sen} 2t)$, $y=\frac{a}{2}(1-\cos 2t)$, que es una familia de cicloides. Solución singular: $y=a$. Indicación: es cómodo introducir un parámetro t, haciendo $y'=\operatorname{ctg} t$. **54.** $3(x^2+y)+xy^3=cx$. **55** $u=\frac{c}{(y^2+x)^3}$. **56.** $x=ce^{\frac{x}{y}}$. **57.** $x^2+2xy-y^2-6x-2y=c$. **58.** $y=\frac{1}{1+cx+\ln x}$ e $y=0$. **59** $(x^2-1)y-\operatorname{sen} x=c$. **60.** $8y+4x+5=ce^{4x-8y-4}$. **61.** $y^3+x^3-3xy=c$. **62.** $y=c(x^2+y^2)$. **63.** $y^3=x+\frac{c}{x}$. **64.** $y=c(x+a)+c^2$ y la solución singular $y=-\frac{(x+a)^2}{4}$. **65.** $x=\frac{2}{3}t+\frac{c}{t^2}$, $y=2xt-t^2$ e $y=0$, $y=\frac{3}{4}x^2$. **66** $y=\frac{c}{1\pm\cos x}$.

DEL CAPÍTULO 2

1 $y=5e^{3x}\operatorname{sen} x+10$. **2.** $x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{t\cos t}{2}$. **3.** $(y-c_3)^2=c_1x+c_2$. **4.** $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{2\operatorname{sen} x}$. **5.** $y=c_1x^3+c_2x^2+\frac{1}{3}$. **6** $y=c_1\operatorname{sen} x+c_2\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{ch} x$. **7** $y=\frac{1}{c_1x+c_2}+1$. **8.** $x=e^{2t}\times(c_1+c_2t)+\frac{t^2e^{3t}}{2}+e^t+\frac{1}{4}$. **9.** $y=-\frac{x}{c_1}+\frac{c_1^2+1}{c_1^2}\ln|1+c_1x|+c_2$. **10.** $c_1x^2+1=c_1^2(t+c_2)^2$. **11** $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3\cos 2x+c_4\operatorname{sen} 2x-\frac{x^3}{16}+\frac{1}{15}e^x$. **12.** $y=\cos(x-c_1)+c_2x+c_3$. **13.** $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3x^3+c_4x^2+c_5x+c_6-\frac{x^4}{24}$

14. $x=e^{t}(c_1+c_2t)+e^{-t}(c_3+c_4t)+1+t^2$. 15. $y=c_0\left(1-\frac{4x^3}{2.3}+\frac{4^2x^6}{2.3.5.6}-\right.$ $-\ldots+\frac{(-1)^k4^kx^{3k}}{2.3.5.6\ldots(3k-1)3k}+\ldots\Big)+c_1\Big(x-\frac{4x^4}{3.4}+\frac{4^2x^7}{3.4.6.7}-\ldots+$ $\left.+\frac{(-1)^k4^kx^{3k+1}}{3.4.6.7\ldots3k.(3k+1)}+\ldots\right)$. 16. $y=c_1J_{\frac{1}{5}}(3x)+c_2J_{-\frac{1}{5}}(3x)$. 17. $y=x$

18. $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$ 19. $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+1+x\cos x-\operatorname{sen}x\ln|\operatorname{sen}x|$

20. $u=\frac{c_1}{r}+c_2$. 21. La ecuación diferencial del problema es $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{k}{r^2}$, o bien $v\frac{dv}{dr}=\frac{k}{r^2}$, donde r es la distancia del centro de la Tierra hasta el cuerpo, v es la velocidad, $k=-6400^2g$ *Respuesta*: $v\approx 11$ km/seg. 22. La ecuación diferencial de movimiento es $\frac{d^2x}{dt^2}=-g+k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$. *Respuesta*: $x=\frac{75^2}{g}\ln\operatorname{ch}\frac{9}{75}t$. 23. La ecuación diferencial de movimiento es $\frac{d^2s}{dt^2}=k(s+1)$, o bien $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{g}{6}(s+1)$ *Respuesta*: $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$. 24. $t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})$ 25. $s=\frac{F-a}{b}t-$ $-\frac{(F-a)p}{b^2g}\left(1-e^{-\frac{bg}{p}t}\right)$. 26. $x=A\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$. 27. $x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$ 28. La ecuación diferencial de movimiento es $\ddot{x}+k_1\dot{x}-k_2x=0$, $k_2>0$. *Respuesta*: $x=$ $=c_1e^{\left(-\frac{k_1}{2}+\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+k_2}\right)t}+c_2e^{\left(-\frac{k_1}{2}-\sqrt{\frac{k_1^2}{4}+k_2}\right)t}$ 29. $x=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{sen}nt}{(n^2-2)n^3}$

30. $y^2=c_1\left(x^2+x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+c_2$ 31. $y=c_2e^{c_1x}+c_1$, $y=\frac{4}{c-x}$

32. $x=c_1\cos 3t+c_2\operatorname{sen}3t-\frac{1}{12}t^2\cos 3t+\frac{1}{36}\operatorname{sen}3t$. 33. $y=e^{-x}\Big(c_1+c_2x-$ $-\frac{1}{4}x^2\Big)+\frac{1}{8}e^x$. 34. $y=c_1e^x+e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}xe^x$

35. $y=e^x(c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x)+\frac{xe^x\cos x}{4}+\frac{x^2e^x\operatorname{sen}x}{4}$. 36. $y=c_1(x-x^3)+$ $+c_2\left[4-6x^2+3(x^3-x)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]-\frac{1}{6}$. 37. $u=c_1\ln(x^2+y^2)+c_2$ 38. $u=$ $=\frac{c_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+c_2$. 39. La ecuación diferencial de movimiento es $m\ddot{x}=mg-kx$. *Respuesta*: $x=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. 40. a) $t-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{v_0^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx}}$.

b) $x-x_0=m\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}$; $t-t_0=m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}$, donde $v=\dot{x}$ 41. $y=c_1+c_2x+c_3x^2+$

$+e^{x}(c_4+c_5x+c_6x^2)-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{24}$. **42.** $x=(c_1+c_2t)\cos t+(c_3+c_4t)\operatorname{sen} t-\frac{1}{8}t^2\cos t$. **43.** $y=c_1\cos\ln(1+x)+c_2\operatorname{sen}\ln(1+x)+\ln(1+x)\operatorname{sen}\ln(1+x)$ **44.** $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-n^2)\operatorname{sen} nt-2n\cos nt}{[(2-n^2)^2+4n^2]n^4}$. **45.** $x=\frac{\alpha_0}{2a_2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-(n^2-a_2)\alpha_n-a_1n\beta_n}{(n^2-a_2)^2+a_1^2n^2}\cos nt+\frac{a_1n\alpha_n-(n^2-a_2)\beta_n}{(n^2-a_2)^2+a_1^2n^2}\operatorname{sen} nt\right]$, donde α_0, α_n y β_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(t)$. **46.** $x=\frac{\cos t}{2}+\frac{\mu}{24}(1+3\cos 2t)$. **47.** $y=c_1x+c_2xe^{-\frac{1}{x}}$. **48.** $x^2y''+xy'-y=0$. **49.** $x=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t+c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+t^3$ **50.** $x=t^3+t+1$, $y=\frac{3}{8}t^6+\frac{3}{10}t^5+\frac{3}{16}t^4+\left(c_1+\frac{1}{6}\right)t^3+c_1t+c_2$. **51.** $x=(c_1+c_2t)e^{-5t}+\frac{2^t}{(5+\ln 2)^2}+\frac{t^3e^{-5t}}{6}$. **52.** $y=c_2e^{c_1x^2}$. **53.** $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(c_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{e^{2x}}{63}$ **54.** $y=(c_1x+c_2)\cos x+(c_3x+c_4)\operatorname{sen} x+c_5+c_6x+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{4}e^{x}$. **55.** $y=(c_1x+x_2)^3+c_3x+c_4$. **56.** $y=e^{1+c_1x}\left(\frac{x}{c_1}-\frac{1}{c_1^2}\right)+c_2$. **57.** $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen} x-\frac{\operatorname{sen} 2x}{6}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{30}$ **58** $y=-\frac{1}{x-2}$. **59.** $y=c_2e^{c_1x}+\frac{1}{c_1}$.

DEL CAPITULO 3

1. $x=\operatorname{sen} t$, $y=\cos t$. **2.** $x_1=2e^{t}$, $x_2=2e^{t}$. **3.** $x=c_1e^{(-1+\sqrt{15})t}+c_2e^{(-1-\sqrt{15})t}+\frac{2}{11}e^{t}+\frac{1}{6}e^{2t}$; se halla y a partir de la primera ecuación: $y=e^{t}-\frac{dx}{dt}-5x$. **4.** $x=c_1e^{t}+e^{-\frac{1}{2}t}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; y y z se determinan de las ecuaciones: $y=\frac{dx}{dt}$, $z=\frac{d^2x}{dt^2}$. **5.** $x=c_1e^{c_2t}$; $y=c_1c_2e^{c_2t}$. **6.** $x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t+3$; $y=-c_1\operatorname{sen} t+c_2\cos t$ **7.** $y=c_1J_0(x)+c_2Y_0(x)$; $z=x\left[c_1J_0'(x)+c_2Y_0'(x)\right]$. **8.** $x+y+z=c_1$, $x^2+y^2+z^2=c_2^2$. **9.** $x=c_1e^{t}+c_2e^{-2t}$; $y=c_1e^{t}+c_3e^{-2t}$; $z=c_1e^{t}-(c_2+c_3)e^{-2t}$. **10.** $x=c_1t+\frac{c_2}{t}$, $y=-c_1t+\frac{c_2}{t}$. **11.** $x=c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t-t\cos t+\operatorname{sen} t\ln|\operatorname{sen} t|$. y se determina de la ecuación $y=\frac{dx}{dt}-1$. **12** $x^2-y^2=c_1$, $y-x-t=c_2$. **13.** $x=c_1e^{t}+c_2e^{-t}+\operatorname{sen} t$; $y=-c_1e^{t}+c_2e^{-t}$ **14.** $x=e^{t}$, $y=4e^{t}$. **15.** $\varphi(1)\approx 0{,}047$ **16.** $x=e^{at}(c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t)$, $y=e^{at}(c_1\operatorname{sen} t-c_2\cos t)$. **17** $x=2c_1e^{-t}+c_2e^{-7t}$, $y=-c_1e^{-t}+c_2e^{-7t}$. **18.** $x=e^{-3t}(2c_1\cos t+2c_2\operatorname{sen} t)$,

$y=e^{-6t}[(c_1-c_2)\cos t+(c_1+c_2)\operatorname{sen} t]$. 19. $x=c_1e^t+c_2$, $y=(c_1t+c_3)e^t-t-1-c_2$, $z=y-c_1e^t$. 20. $x+y+z=c_1$, $xyz=c_2$. 21. $x^2+y^2+z^2=c_1^2$, $xyz=c_2$. 22. $X=\left\|\begin{matrix} c_1e^t+c_2e^{-t} \\ c_1e^t+3c_2e^{-t}\end{matrix}\right\|$.

DEL CAPITULO 4

1. El punto de reposo es asintóticamente estable. 2. El punto de reposo es inestable. 3. Para $\alpha<-\frac{1}{2}$ el punto de reposo es asintóticamente estable; para $\alpha=-\frac{1}{2}$, estable; para $\alpha>-\frac{1}{2}$, inestable. 4. Para $\alpha\leqslant 0$ el punto de reposo es asintóticamente estable; para $\alpha>0$, inestable. 5. Para $1<t<2$, $x(t,\mu)\longrightarrow\sqrt{4-t^2}$; para $2<t<3$, $x(t,\mu)\longrightarrow-\sqrt{9-t^2}$, para $t>3$, $x(t,\mu)\longrightarrow\infty$. 6. $x(t,\mu)\longrightarrow\infty$. 7. El punto de reposo es inestable. 8. El punto de reposo es estable. 9. El punto de reposo es inestable. 10. El punto de reposo es estable. 11. Montura. 12. La solucion periódica $x=\frac{1}{5}\operatorname{sen} t-\frac{2}{5}\cos t$ es asintóticamente estable. 13. Todas las soluciones, entre ellas las periódicas, son asintóticamente estables. 14. El punto de reposo es inestable. La función $v=x^4-y^4$ satisface las condiciones del teorema de Chetaev. 15. Todas las soluciones son inestables. 16. La solución $x=0$ es inestable. 17. Para $1<\alpha<2$, la solución $x=0$ es asintóticamente estable. Para $\alpha=1$ y para $\alpha=2$, la solución $x=0$ es estable. Para $\alpha>2$ y para $\alpha<1$, la solución $x=0$ es inestable. 18. La solución $x=0$, $y=0$ es estable bajo perturbaciones de acción constante. La función $v=4x^2+3y^2$ satisface las condiciones del teorema de Malkin. 19. La solución $X(t)=0$ es inestable. 20. Todas las soluciones son estables, pero no hay estabilidad asintótica. 21. Todas las soluciones son estables, pero no hay estabilidad asintótica. 22. La solución periódica $x=\frac{\cos t-\operatorname{sen} t}{2}$ es inestable. 23. La región de estabilidad es $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, la de estabilidad asintótica, $0<\alpha<1$. 24. La región de estabilidad es $\alpha\geqslant 5$, la de estabilidad asintótica, $\alpha>5$.

DEL CAPITULO 5

1. $z=\Phi(x+y)$. 2. $z=e^{2x}\Phi(x-y)$. 3. $z=e^{\frac{y}{x}}\Phi(x)$. 4. $\Phi\left(z,\ ye^{\frac{x}{z}}\right)=0$. 5. $z=5+\frac{\Phi(x^3y^5)}{y^3}$. 6. $u=\Phi(x-y,\ y-z)$. 7. $u=x^4\Phi\left(\frac{y}{x^2},\ \frac{z}{x^3}\right)$. 8. $z=x\Phi_1(y)+\Phi_2(y)$. 9. $z=(x^2+y-1)^2$. 10. $z=ye^{\frac{x-z}{y}}$. 11. $z=3x$. 12. $z=\left(y^2-\frac{2x}{z}\right)^{3/2}$. 13. $\Phi(z^2+x^2,\ x^2-y^2)=0$. 14. $\Phi(z^2-x^2,\ x^2-y^2)=0$. 15. No se integra. 16. $2xy+y^2+6xz^3=c$. 17. $z=ax^3+\frac{y^3}{9a}+b$ (son posibles también otras respuestas). 18. $z=ax+by+a^3b^3$ (también son posibles otras respuestas). 19. $z=be^{\frac{3}{a}(a^2x+y)}$ (son posibles también otras respuestas). 20. $z=x\operatorname{sen} a+ay+b$ (también son posibles otras respuestas). 21. $x^2y-3xyz=c$. 22. No existe tal familia de superficies, puesto que la condicion $(\boldsymbol{F}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{F})=0$ no se cumple. 23. La ecuación de las líneas vectoriales es $\frac{y}{x}=c_1$, $xz=c_2$. La ecuación

de las superficies vectoriales es $z=\frac{1}{x}\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$. La ecuación de las superficies ortogonales a las líneas vectoriales es $x^2+y^2-z^2=c$. **24.** $z=xy+1$. **25.** $z=3xy$ **26.** $z=x^2+y^2$.

DEL CAPITULO 6

1. Las extremales son las circunferencias $(x-C_1)^2+y^2=C_2^2$. **2.** La integral no depende del camino de integración. El problema variacional no tiene sentido. **3.** No hay extremo en la clase de funciones continuas. **4.** Las extremales son las hipérbolas $y=\frac{C_1}{x}+C_2$. **5.** $y=C_1\operatorname{sen}(4x-C_2)$. **6.** $y=-\frac{x^2}{4}+C_1x+C_2$. **7.** $y=\operatorname{sh}(C_1x+C_2)$. **8.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x$ **9.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\operatorname{sen}2x$. **10.** $y=\frac{x^7}{7!}+C_1x^5+C_2x^4+C_3x^3+C_4x^2+C_5x+C_6$. **11.** $y=(C_1x+C_2)\cos x+(C_3x+C_4)\operatorname{sen}x$, $z=2y+y''$, de donde z se determina fácilmente. **12.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **13.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,\ y,\ z)$. **14.** $y=C_1x^4+C_2$. **15.** $y=\frac{1}{2}xe^x+C_1e^x-C_2e^{-x}$ **16.** $y=-\frac{x\cos x}{2}+C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x$ **17.** $y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x+x\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x\ln\operatorname{ch}x$ **18.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x^2}+\frac{1}{3}x\ln|x|$. **19.** $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\operatorname{sen}x-\frac{x^2\operatorname{sen}x}{4}$. **20.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-C_4\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_6\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+x^3$.

DEL CAPITULO 7

1. $y=-x$ para $0\leqslant x\leqslant 1$; $y=x-2$ para $1<x\leqslant 4$, e $y=x$ para $0\leqslant x\leqslant 3$; $y=-x+6$ para $3<x\leqslant 4$. En ambas quebradas la funcional tiene un mínimo absoluto. **2.** No existe **3.** Las quebradas que pasan por los puntos frontera dados están formadas por segmentos de recta con coeficientes angulares $\sqrt{3}$ y $-1/\sqrt{3}$ **4** $\frac{\varphi'-y'}{1+y'\varphi'}=1$, es decir, las extremales deben cortar a la curva $y_1=\varphi(x_1)$ por la cual se desliza el punto frontera formando un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. **5.** $y=\frac{x^5}{120}+\frac{1}{24}(x^2-x^3)$. **6.** $y=\pm\frac{3}{4}x$ para $0\leqslant x\leqslant\frac{16}{5}$; $y=\pm\sqrt{9-(x-5)^2}$ para $\frac{16}{5}<x\leqslant\frac{34}{5}$; $y=\pm\frac{3}{4}(x-10)$ para $\frac{34}{5}<x\leqslant 10$, es decir, la curva está formada por un segmento de recta tangente a la circunferencia, un arco de circunferencia y nuevamente un segmento de tangente a ésta. **7.** $y=0$. **8.** Los arcos de circunferencia $y=\pm\sqrt{8x-x^2}$.

DEL CAPITULO 8

1. Para $y=-\frac{x^2}{4}+1$ se tiene un mínimo fuerte. **2.** Para $y=0$ se tiene un mínimo fuerte si $0<a<\frac{\pi}{4}$, si, en cambio, $a>\frac{\pi}{4}$, no hay mínimo **3.** No hay extremo en las curvas continuas. **4.** Hay un mínimo fuerte para $y=7-\frac{4}{x}$. **5.** Para $y=1$ hay un mínimo fuerte. **6.** Hay un máximo fuerte para $y=\operatorname{sen} 2x-1$. **7.** Para $y=x^3$ hay un mínimo fuerte. **8.** Hay un mínimo fuerte para $y=\frac{1}{3}e^{3x}$. **9.** Para $y=\operatorname{sen} 2x$ hay un máximo fuerte. **10.** En la recta $y=\frac{y_1}{x_1}x$ hay un mínimo débil. **11.** En la recta $y=\frac{y_1}{x_1}x$ hay un mínimo débil. **12.** Hay un mínimo débil en $y=x^2$. **13.** Para $y=x^3-1$ hay un máximo fuerte. **14.** Hay un mínimo fuerte para $y=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2}+x$.

DEL CAPITULO 9

1. $y=\pm 2 \operatorname{sen} n\pi x$, donde n es un entero. **2.** $\varphi=C_1+C_2z$; $r=R$. **3.** $y=\lambda x^2+C_1x+C_2$, donde C_1, C_2 y λ se determinan de las condiciones de frontera y de la condición isoperimétrica. **4.** $\frac{d}{dx}(p(x)y')+[\lambda r(x)-q(x)]y=0$; $y(0)=0$; $y(x_1)=0$. La solución trivial $y\equiv 0$ no satisface la condición isoperimétrica, y las soluciones no triviales existen, como es sabido, sólo para ciertos valores de λ, llamados valores propios. En consecuencia, λ debe ser un valor propio. Una constante arbitraria de la solución general de la ecuación de Euler se determina de la condición $y(0)=0$; la otra, de la condición isoperimétrica. **5.** $y=-\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{2}x$; $z=x$.

DEL CAPITULO 10

1. $z_1=\frac{5}{16a^2}(x^2-a^2)(y^2-b^2)$. Si es necesaria mayor exactitud, la solución puede buscarse en la forma $z_2=(x^2-a^2)(y^2-b^2)[\alpha_0+\alpha_1\cdot(x^2+y^2)]$. **2.** $y_1=(x-1)^2(0,124+0,218x)$. **3.** La solución exacta es $y=\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1}-x$. **4.** La solución de la ecuación de Euler es $y=3,6072\,J_1(x)+0,75195\,Y_1(x)-x$, donde J_1 e Y_1 son las funciones de Bessel. **5.** La solución exacta es $y=\frac{2\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2}-x$. **6.** Si la solución se busca en la forma $y_2=x(x-1)(\alpha_1+\alpha_2x)$, $y_3=x(x-1)(\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2)$, entonces $y_2=x(x-1)(0,1708+0,17436x)$, $y_3=x(x-1)(0,1705+0,1760x-0,0018x^2)$. En los puntos dados los valores de y_2 e y_3 coinciden con una exactitud de 0,0001.

Bibliografía recomendada

PARA LA PARTE I

1. I. G. Petrovski, Lecciones sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, 5ª ed., „Naúka", 1964 (en ruso).
2. I. G. Malkin, Teoría de la estabilidad del movimiento, Gostejizdat, 1952 (para el cap. 4) (en ruso).
3. I. G. Malkin, Ciertos problemas de la teoría de las oscilaciones no lineales, Gostejizdat, 1956 (para el § 8 del cap. 2) (en ruso).
4. A. N. Tijonov, Sobre la dependencia de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de un parámetro pequeño. Matematicheski sbornik, tomo 22(64):2(1948) y tomo 31(72):3(1952) (para el § 6 del cap. 4) (en ruso).
5. V. V. Stepánov, Curso de ecuaciones diferenciales, 8ª ed., Fizmatguiz, 1959 (en ruso).
6. A. N. Krylov, Lecciones sobre el cálculo aproximado, 5ª ed., Gostejizdat, 1950 (para el § 7 del cap. 1 y el § 6 del cap. 3) (en ruso).
7. I. S. Berezin y N. P. Zhidkov, Métodos de cálculo, tomo II, Fizmatguiz, 1960 (para el § 7 del cap. 1 y el § 6 del cap. 3) (en ruso).

PARA LA PARTE II

1. I. M. Guelfand y S. V. Fomin, Cálculo variacional, Fizmatguiz, 1961 (en ruso).
2. M. A. Lavrentiev y L. A. Lusternik, Curso de cálculo variacional, 2ª ed., Gostejizdat, 1950 (en ruso).
3. V. I. Smirnov, V. I. Krylov y L. V. Kantorovich, Cálculo variacional, KUBUCh, 1933 (en ruso).
4. V. I. Smirnov, Curso de matemáticas superiores, tomo 4, 4ª ed., Fizmatguiz, 1958 (en ruso).
5. N. M. Günter, Curso de cálculo variacional, Gostejizdat, 1941 (en ruso).
6. N. I. Ajiezer, Lecciones del cálculo variacional, Gostejizdat, 1955 (en ruso).
7. M. A. Lavrentiev y L. A. Lusternik, Fundamentos del cálculo variacional, partes 1 y 2, Gostejizdat, 1935 (en ruso).

8. L. S. Pontriaguin, V. G. Boltianski, R. V. Gamkrelidze y E. F. Mishenko, Teoría matemática de los procesos óptimos, Fizmatguiz, 1961 (en ruso).
9. R. Bellman., Dynamic Programming.
10. L. V. Kantorovich y V. I. Krylov, Métodos aproximados del análisis superior, 5ª ed., Fizmatguiz, 1962 (en ruso).
11. S. G. Mijlin, Métodos directos en la física matemática, Gostejizdat, 1950 (en ruso).

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS