UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

EL CUERPO DE LOS COMPLEJOS

CON 75 EJERCICIOS RESUELTOS

Ing. MARIO RAUL AZOCAR

1969

UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

Al apreciado amigo y colega
Don Sergio Celaciati

Marzo 70

EL CUERPO DE LOS COMPLEJOS

CON 75 EJERCICIOS RESUELTOS

Ing. MARIO RAUL AZOCAR

1969

PROLOGO

El Algebra Abstracta, con la introducción de las Estructuras Algebraicas, ha exigido una actualización del tratamiento tradicional, de muchos tópicos de Algebra Clásica.

Las presentes notas, redactadas en este nuevo espíritu, han sido especialmente preparadas para los alumnos de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Católica de Chile.

Este trabajo no tiene pretensión ninguna y él habrá cumplido su finalidad fundamental, si resulta de alguna utilidad a esa juventud capaz, estudiosa y entusiasta, con la cual he tenido el privilegio de convivir en las aulas, durante muchos años.

Mario Raúl Azócar

Santiago, Mayo de 1969.

EL CUERPO DE LOS COMPLEJOS

1. La noción de cuerpo.

La idea de campo o cuerpo es un concepto fundamental del algebra, que trataremos de presentar mediante la introducción de algunas definiciones.

DEF. 1

Se llama operación binaria en un conjunto no vacío:

$$S = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots\}$$

a todo criterio (*) que asigne a cada par ordenado (α,β) de elementos de S un único elemento $\alpha * \beta$ de S.

Veamos un ejemplo. Tomemos el conjunto Z^+ de los números enteros positivos y para cada par ordenado (α,β) de elementos de Z^+, asignemos un elemento también de Z^+, mediante el criterio siguiente:

$$\alpha * \beta = \alpha^2 + \beta \qquad \forall \ \alpha \in Z^+ \wedge \beta \in Z^+$$

De acuerdo a esta operación binaria, tenemos

$$4 * 5 = 16 + 5 = 21 \qquad 5 * 4 = 25 + 4 = 29$$

DEF. 2

Llamaremos grupoide toda pareja (S, *) formada por un conjunto no vacío S y una operación binaria (*) definida en S.

DEF. 3

Una operación binaria (*) definida en un conjunto no vacío S se dice conmutativa si

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha \qquad \forall \ \alpha \in S \wedge \beta \in S$$

Veamos un ejemplo. Tomemos el conjunto Z de los enteros y consideremos en él, las dos operaciones siguientes:

$$\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta + 1 \qquad 5 * 4 = 20 + 1 = 21$$

$$\alpha \circ \beta = \alpha - \beta \qquad 5 \circ 4 = 5 - 4 = 1$$

Entonces como el producto ordinario es conmutativo lo mismo ocurre con la operación (*) y como la resta no es conmutativa, la segunda operación tampoco lo es. Así tenemos:

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha \qquad \text{y} \qquad \alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$$

DEF. 4

Una operación binaria (*) definida en un conjunto no vacío S, se dice asociativa si

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma) \qquad \forall \quad \alpha \in S, \ \beta \in S, \gamma \in S$$

Veamos un ejemplo. Tomemos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y definamos en él las operaciones:

$$\alpha * \beta = \alpha + \beta + 5 \qquad\qquad 3 * 4 = 3 + 4 + 5 = 12$$

$$\alpha \circ \beta = 2\alpha - \beta \qquad\qquad 3 \circ 4 = 6 - 4 = 2$$

Haremos ver que (*) es asociativa, en efecto:

$$(\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha + \beta + 5) * \gamma = \alpha + \beta + 5 + \gamma + 5 = \alpha+\beta+\gamma+10$$

$$\alpha * (\beta * \gamma) = \alpha * (\beta + \gamma + 5) = \alpha + \beta + \gamma + 5 + 5 = \alpha+\beta+\gamma+10$$

Contrariamente veamos que $(\circ)$ no es asociativa

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = (2\alpha - \beta) \circ \gamma = 4\alpha - 2\beta - \gamma$$

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = \alpha \circ (2\beta - \gamma) = 2\alpha - 2\beta + 4\gamma$$

<u>DEF</u>. 5

Un grupoide (S, *) tiene elemento identidad para la operación (*) si existe un elemento $\varepsilon \in S$ tal que:

$$\alpha * \varepsilon = \varepsilon * \alpha = \alpha \qquad\qquad \forall \quad \alpha \in S$$

De acuerdo a esta definición es inmediato que el grupoide $(\mathbb{R}, +)$ admite al cero como elemento identidad, pues:

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \qquad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Contrariamente el grupoide $(Z^+, +)$ no tiene elemento identidad o elemento neutro, pues el conjunto Z^+, de los enteros positivos, no contiene al cero.

También resulta inmediato que el grupoide $(\mathbb{R}, \cdot)$ tiene al uno (1) como elemento neutro, pues:

$$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha \qquad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

DEF. 6

Sea $(S, *)$ un grupoide con elemento identidad ε. Un elemento α de S se dice que tiene inverso bajo la operación $(*)$ si existe en S algún elemento α', tal que:

$$\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = \varepsilon$$

El grupoide $(\mathbb{R}, +)$ tiene como elemento neutro al cero y cada elemento de $\mathbb{R}$, es decir cada número real tiene inverso bajo la operación suma (+), pues sabemos que:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0 \qquad \forall \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Similarmente el grupoide $(\mathbb{R}, \cdot)$ tiene como elemento identidad al uno (1) y cada elemento $\alpha \neq 0$ tiene inverso bajo la multiplicación, ya que:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 \qquad \forall \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$$

Veamos otro ejemplo. Tomemos arbitrariamente en el conjunto $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ un elemento α y consideremos el conjunto

$$S = \{\alpha^k \mid k \in Z\}$$

entonces el grupoide $(S, \cdot)$ es conmutativo, pues:

$$\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^n \cdot \alpha^m \qquad \forall \quad \alpha \in S, \quad m \wedge n \in Z$$

este grupoide $(S, \cdot)$ tiene como elemento neutro, α°, ya que

$$\alpha^n \cdot \alpha^\circ = \alpha^\circ \cdot \alpha^n = \alpha^n \qquad \forall \quad \alpha \in S \wedge n \in Z$$

finalmente todo elemento de S tiene inverso, en efecto:

$$\alpha^n \cdot \alpha^{-n} = \alpha^{-n} \cdot \alpha^n = \alpha^\circ \qquad \forall \quad \alpha \in S \wedge n \in Z$$

<u>DEF</u>. 7

Sea $(S, *, \circ)$ un sistema algebraico formado por un conjunto no vacío S y dos operaciones binarias $(*)$ y $(\circ)$. La operación $(\circ)$ es distributiva sobre la operación $(*)$ si:

$$\alpha \circ (\beta * \gamma) = (\alpha \circ \beta) * (\alpha \circ \gamma)$$

$$\forall \quad \alpha \in S, \beta \in S, \gamma \in S.$$

$$(\beta * \gamma) \circ \alpha = (\beta \circ \alpha) * (\gamma \circ \alpha)$$

Es inmediato que en el sistema $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la multiplicación $(\cdot)$ es distributiva sobre la suma, $(+)$ pués sabemos que:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\forall \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{R}$$

$$(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$$

Veamos otro ejemplo. En el conjunto Z de los números enteros definamos las operaciones:

$$\alpha * \beta = \alpha + 2\beta \qquad\qquad \alpha \circ \beta = 2\alpha \cdot \beta$$

Mostraremos que la operación ($\circ$) es distributiva sobre la operación (*), en efecto tenemos:

$$\alpha \circ (\beta * \gamma) = \alpha \circ (\beta + 2\gamma) = 2\alpha \cdot (\beta + 2\gamma) = 2\alpha \cdot \beta + 4\alpha \cdot \gamma$$

$$(\alpha \circ \beta) * (\alpha \circ \gamma) = (2\alpha \cdot \beta) * (2\alpha \cdot \gamma) = 2\alpha \cdot \beta + 4\alpha \cdot \gamma$$

Considerando que la operación ($\circ$) es conmutativa no es necesario verificar la distributividad por la derecha.

DEF. 8

Un campo o cuerpo es un sistema algebraico $(S, +, \cdot)$ constituído por un conjunto no vacío S y dos operaciones binarias (+) y ($\cdot$) tales que:

(A1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha \qquad \forall \quad \alpha \in S \wedge \beta \in S$

(A2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) \qquad \forall \quad \alpha \in S,\ \beta \in S,\ \gamma \in S$

(A3) $\exists\, \varepsilon \in S$ tal que $\alpha + \varepsilon = \alpha \qquad \forall \quad \alpha \in S$

(A4) $\forall \quad \alpha \in S \quad \exists\ \alpha' \in S$ tal que $\alpha + \alpha' = \varepsilon$

(M1) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \qquad \forall \quad \alpha \in S,\ \beta \in S$

(M2) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \qquad \forall \quad \alpha \in S,\ \beta \in S,\ \gamma \in S$

(M3) $\exists\ \mu \in S,\quad \mu \neq \varepsilon,$ tal que: $\alpha \cdot \mu = \alpha \quad \forall \quad \alpha \in S$

(M4) $\forall\ \alpha \in S,\ \alpha \neq \varepsilon \quad \exists\ \alpha^{-1} \in S$ tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mu$

(D1) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \qquad \forall \quad \alpha \in S,\ \beta \in S,\ \gamma \in S.$

De acuerdo a esta definición, tenemos que en todo cuerpo $(S, +, \cdot)$ los grupoides $(S, +)$ y $(S - \{\varepsilon\}, \cdot)$ son conmutativos, asociativos, con elemento neutro para cada operación; (ε) para la suma y (μ) para la multiplicación. Además cada elemento de ellos, tiene inverso en cada una de las operaciones. Finalmente la multiplicación es distributiva sobre la suma.

Como ejemplos de campos podemos mencionar los sistemas $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los racionales y $\mathbb{R}$ el conjunto de los reales.

Terminaremos estas ideas mostrando que el sistema $(S, +, \cdot)$, donde:

$$S = \{a + b\sqrt{5} \mid a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$$

es un campo.

Comencemos verificando que la suma de dos elementos de S es un elemento de S, en efecto si:

$$\alpha = a + b\sqrt{5} \qquad y \qquad \beta = c + d\sqrt{5}$$

tenemos:

$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)\sqrt{5} \in S$$

Además los axiomas (A1) y (A2) son inmediatos y obviamente el elemento neutro de la operación suma, es $\varepsilon = 0 + 0\sqrt{5}$. Finalmente el inverso de $\alpha = a + b\sqrt{5}$ es $(-\alpha) = -a - b\sqrt{5}$.

Comprobemos ahora los axiomas de multiplicación, haciendo ver previamente que el producto de dos elementos de S es un elemento de S. Para:

$$\alpha = a + b\sqrt{5} \qquad y \qquad \beta = c + d\sqrt{5}$$

tenemos

$$\alpha \cdot \beta = (a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) = (ac + 5\,bd) + (ad + bc)\sqrt{5} \in S$$

Los axiomas (M1) y (M2) son inmediatos y el elemento neutro para la multiplicación es $\mu = 1 + 0\sqrt{5}$. Ahora dado $\alpha = a + b\sqrt{5} \neq \varepsilon$, busquemos un elemento $\alpha^{-1} = x + y\sqrt{5}$ tal que: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mu = 1$. Afirmamos que dicho elemento es:

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{5}} = \frac{a - b\sqrt{5}}{a^2 - 5b^2} = \frac{a}{a^2 - 5b^2} - \frac{b}{a^2 - 5b^2}\sqrt{5} \in S$$

en efecto, tenemos que α^{-1} existe, ya que por hipótesis siendo a y b racionales no debe ocurrir que: $a^2 - 5b^2 = 0$, pues si así sucediera llegaríamos a la afirmación contradictoria:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{5} \qquad \text{con} \qquad a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}$$

que establece igualdad entre un racional y un irracional.

Además:

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = (a + b\sqrt{5})\,\frac{1}{a + b\sqrt{5}} = 1 = 1 + 0\sqrt{5} = \mu$$

Finalmente no es difícil verificar el axioma (D1), con lo cual queda probado que $(S, +, \cdot)$ es un cuerpo.

2. El Cuerpo de los Complejos.

En este párrafo nos proponemos introducir el campo de los números complejos, cuerpo que es de fundamental importancia en el estudio de la matemática.

DEF. 9

Llamaremos número complejo toda pareja ordenada (x, y) de números reales.

De acuerdo a esta definición, son números complejos, cada uno de los elementos del conjunto

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

DEF. 10

Dado un complejo (x, y), el número real x se dirá parte real del complejo, el número real y se llamará parte imaginaria del complejo.

Llamando z al complejo (x, y), o sea si $z = (x, y)$, es corriente emplear la notación siguiente:

$$x = R(z) \qquad\qquad y = I(z)$$

DEF. 11

Dados dos complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, diremos que ellos son iguales:

$$z_1 = z_2 \quad \text{si y solo si} \quad x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2$$

Teniendo presente que la igualdad de números reales es refleja, simétrica y transitiva; de acuerdo a la definición precedente, resulta inmediato que la igualdad de números complejos también posee estas propiedades.

DEF. 12

Dado un número complejo $z = (x, y)$, llamaremos complejo opuesto de z, al número complejo: $-z = (-x, -y)$.

DEF. 13

Llamaremos complejo nulo, al complejo $(0, 0) = \theta$

Trataremos ahora de dar al conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos la estructura de cuerpo. Para ello es necesario introducir dos operaciones binarias, suma (+) y producto (·) de tal modo que ellas verifiquen las condiciones (A), (M) y (D) expresadas en la definición de cuerpo.

DEF. 14

Dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, llamaremos suma de ellos al número complejo:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 \ , \ y_1 + y_2)$$

Teorema 1

(a). $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(b). $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_2)$

(c). $z + \theta = z$

(d). $z + (-z) = \theta$

Dm.

(a) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1$

(b) $(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3 , y_3)$

$= (x_1 + x_2 + x_3, \ y_1 + y_2 + y_3)$

$= (x_1 + \overline{x_2 + x_3}, \ y_1 + \overline{y_2 + y_3}) = z_1 + (z_2 + z_3)$

(c) $z + \theta = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z$

(d) $z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0) = \theta$

Corolario

El grupoide $(\mathbb{C}, +)$ es conmutativo (A1), asociativo (A2), tiene elemento neutro (A3) y cada elemento $z \in \mathbb{C}$ tiene un inverso $(-z) \in \mathbb{C}$ (A4).

DEF. 15

Dado un complejo $z = (x, y) \neq \theta$, llamaremos recíproco de él, al complejo:

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

Continuando con la idea de dar al conjunto ₵ de los números complejos la estructura de cuerpo, introduzcamos ahora la operación producto $(\cdot)$

DEF. 16

Dados dos complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, llamaremos producto de ellos, al complejo:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2 \;,\; x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$$

Teorema 2

(a). $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(b). $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

(c). $z \cdot u = z$ siendo $u = (1, 0)$

(d). $z \cdot z^{-1} = u$ $\forall \; z \neq \theta$

Dm.

(a). $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_2) \cdot (x_2, y_2)$

$$= (x_1\, x_2 - y_1\, y_2 \;,\; x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$$

$$= (x_2\, x_1 - y_2\, y_1 \;,\; x_2\, y_1 + x_1\, y_2) = z_2 \cdot z_1$$

(b). $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2\ ,\ x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \cdot (x_3, y_3)$

$$= (\overbrace{x_1\, x_2 - y_1\, y_2}\, x_3 - \overbrace{x_1\, y_2 + x_2\, y_1}\, y_3,$$

$$, \overbrace{x_1\, x_2 - y_1\, y_2}\, y_3 + \overbrace{x_1\, y_2 + x_2\, y_1}\, x_3)$$

$$= (x_1\, \overbrace{x_2\, x_3 - y_2\, y_3} - y_1\, \overbrace{y_2\, x_3 + x_2\, y_3},$$

$$, x_1\, \overbrace{x_2\, y_3 + y_2\, x_3} + y_1\, \overbrace{x_2\, x_3 - y_2\, y_3})$$

$$= (x_1, y_1) \cdot (x_2\, x_3 - y_2\, y_3\ ,\ x_2 y_3 + x_3 y_2)$$

$$= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

(c). $z \cdot u = (x, y)\ \ (1, 0) = (x - 0\ ,\ 0 + y) = (x, y) = z$

(d). $z \cdot z^{-1} = (x, y) \cdot \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\ ,\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\right)$

$$= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\ ,\ \frac{-xy + xy}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0) = u$$

<u>Corolario</u>

El grupoide (¢ - $\{\theta\}$, ·) es conmutativo (M1), asociativo (M2), tiene elemento neutro (M3), y cada elemento $z \neq \theta$ tiene un inverso $z^{-1} \in$ ¢ (M4).

Teorema 3

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Dm.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2 , x_1 y_2 + x_2 y_1) + \\ &\qquad (x_1 x_3 - y_1 y_3 , x_1 y_3 + x_3 y_1) \\ &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \end{aligned}$$

Este teorema nos muestra que el producto de complejos es distributivo sobre la suma.

Teorema 4

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos junto con las operaciones suma (+) y producto ($\cdot$) es un cuerpo.

Dm.

La tesis propuesta es consecuencia inmediata de los tres teoremas anteriores.

DEF. 17

Un subconjunto no vacío S de un cuerpo $(K, +, \cdot)$ se dice subcuerpo de K si y sólo si $(S, +, \cdot)$ es cuerpo.

Teorema 5

El conjunto de los números complejos de la forma $(x, 0)$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

Dm.

Mostraremos primero que la suma y el producto de dos elementos del conjunto

$$\mathbb{C}_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = (x, 0) \wedge x \in \mathbb{R}\}$$

es también elemento de $\mathbb{C}_0$. En efecto, tenemos

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2 + 0, x_10 + x_20) = (x_1x_2, 0)$$

Ahora como todo número z de $\mathbb{C}_0$ es número de $\mathbb{C}$, necesariamente los elementos de $\mathbb{C}_0$ verifican todas las propiedades (A), (M) y (D) contenidas en la definición de cuerpo, de aquí entonces que $\mathbb{C}_0$ es un subcuerpo del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Observación

Entre el cuerpo $(\mathbb{C}_0, +, \cdot)$ de los complejos de la forma $(x, 0)$ y el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ de los números reales, se puede establecer una correspondencia biunívoca que haga corresponder a cada elemento de $\mathbb{C}_0$ un elemento de $\mathbb{R}$ y recíprocamente a cada elemento de $\mathbb{R}$ un elemento de $\mathbb{C}_0$, en efecto, para ello basta asociar al complejo $(x, 0)$ el número real x y al número real x, el complejo $(x, 0)$.

En estas condiciones los cuerpos $(\mathbb{C}_0, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tienen idéntico comportamiento frente a la suma y al producto (cuerpos isomorfos). Sólo hay diferencia de notación, pues operando en el cuerpo $\mathbb{C}_0$, se tiene:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

y similarmente operando en el cuerpo $\mathbb{R}$, resulta

$$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$$

Deseosos de tener un simbolismo operatorio simple y expedito, eliminaremos esta teórica dualidad, tomando la definición siguiente:

DEF. 18

Los números complejos de la forma $(x, 0)$, o sea de componente imaginaria nula, serán iguales al real x, o sea:

$$(x, 0) = x \qquad \forall \quad x \in \mathbb{R}$$

De acuerdo a esta definición tenemos que:

$$\theta = (0,0) = 0 \quad y \quad u = (1, 0) = 1$$

por esta razón en lo sucesivo en lugar de escribir:

$$z + \theta = z \quad \text{pondremos} \quad z + 0 = z$$

$$z \cdot u = z \quad \text{pondremos} \quad z \cdot 1 = z$$

DEF. 19

Los números complejos de la forma $(0, y)$ se dirán imaginarios y llamaremos unidad imaginaria al complejo:

$$i = (0, 1)$$

Teorema 6

$$p(x, y) = (px, py) = (x, y)p$$

Dm.

$$p(x, y) = (p, 0) \cdot (x, y) = (px - 0y \;,\; py - 0x) = (px, py)$$

Además como:

$$p(x, y) = (p, 0)\cdot(x, y) = (x, y)\cdot(p, 0) = (x, y)p$$

queda aprobada la tesis propuesta.

<u>Teorema</u> 7

$$(x, y) = x + iy$$

<u>Dm</u>.

$$(x, y) = (x + 0\ ,\ 0 + y) = (x, 0) + (0, y)$$

$$(x, y) = x + (0, 1)\ y = x + iy$$

<u>DEF</u>. 20

Sea $z = (x, y)$ un complejo no nulo y n un entero positivo, entonces:

$$z^0 = 1 \qquad z^1 = z \qquad z^{n+1} = z^n \cdot z$$

<u>Teorema</u> 8

$$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

<u>Dm</u>.

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1, 0) \cdot (0, 1) = (0, -1) = -(0, 1) = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = (0, -1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1$$

Corolario

Si n es número entero positivo, se tiene:

$$i^{4n} = 1 \quad ; \quad i^{4n+1} = i \quad ; \quad i^{4n+2} = -1 \quad ; \quad i^{4n+3} = -i$$

Observación

Sabemos que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado, es decir, en $\mathbb{R}$ es posible definir una relación de orden, que se expresa por el símbolo (<) "menor que" y que satisface las siguientes propiedades:

(O1). Para cada par de elementos a y b de $\mathbb{R}$, es válida una y sólo una de las expresiones:

$$a < b \qquad a = b \qquad b < a$$

(O2). $\quad a < b \ \wedge \ b < c \implies a < c$

(O3). $\quad a < b \implies a + c < b + c$

(O4). $\quad a < b \ \wedge \ 0 < c \implies ac < bc$

Mostraremos a continuación que en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos no es posible definir una relación de orden. En efecto supongamos que en $\mathbb{C}$ hay una relación de orden. Haremos ver que aprovechando los axiomas (O3) y (O4) es posible mostrar que no se verifica el axioma (O1) de la tricotomía.

Consideremos los números i y 0. Obviamente se tiene $i \neq 0$. Supongamos $i < 0$, entonces por axioma (O3) tenemos:

$$i + (-i) < 0 + (-i) \quad \text{o sea} \quad 0 < -i$$

De aquí por axioma (O4) resulta:

$$(-i)\,0 < (-i)(-i) \quad \text{o sea} \quad 0 < i^2 = -1$$

y aprovechando nuevamente el axioma (O4) tenemos:

$$0(-1) < (-1)(-i) \quad \text{o sea} \quad 0 < i$$

Así hemos establecido que $i < 0$ implica $i > 0$ y esta conclusión contradice el axioma (O1).

En forma similar se puede probar que $0 < i$ implica $0 > i$, de aquí entonces que el campo $\mathbb{C}$ es un campo no ordenable.

3. Módulo de un número complejo.

DEF. 21

Llámase módulo de un número complejo $z = (x, y)$, al número real no negativo:

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

De esta definición resulta inmediato que:

$$R(z) \leq |z| \quad \text{o sea} \quad x \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$I(z) \leq |z| \quad \text{o sea} \quad y \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Teorema 9

$$z = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad |z| = 0$$

Dm.

Si $z = 0 = (0, 0)$, obviamente se tiene $|z| = 0$. Recíprocamente supongamos que $|z| = 0$, entonces tenemos:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{de donde} \quad x = y = 0$$

o sea $z = (0, 0) = 0$.

DEF. 22

Dado un número complejo $z = (x, y)$, llámase complejo conjugado de z, al número complejo $\bar{z} = (x, - y)$.

Teorema 10

$$|-z| = |z| \qquad \text{y} \qquad |\bar{z}| = |z|$$

Dm.

$$|- z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Teorema 11

$$z + \bar{z} = 2x \qquad\qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Dm.

(a). $z + \bar{z} = (x, y) + (x, -y) = (2x, 0) = 2x = 2R(z)$

(b), $z \cdot \bar{z} = (x, y) \cdot (x, -y) = (x^2 + y^2 , - xy + xy)$

$$z \cdot \bar{z} = (x^2 + y^2 , 0) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Teorema 12

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad\qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Dm.

(a) $\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_1 \quad , \quad -y_1 - y_2)$

$$= (x_1, - y_1) + (x_2, -y_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

(b) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad , \quad x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad , \quad -x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1, - y_1) \cdot (x_2, - y_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Teorema 13

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \, |z_2|$$

Dm.

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2})$$

$$= (z_1 \cdot z_2) \cdot (\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2)$$

$$= (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \; |z_2|^2$$

de donde tomando la raíz cuadrada positiva se obtiene la tesis: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \; |z_2|$

Corolario

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \quad \text{con } z_1 \neq 0 \text{ , implica } \quad z_2 = 0$$

En efecto $z_1 \cdot z_2 = 0$ implica $|z_1 \cdot z_2| = 0$, es decir $|z_1| \; |z_2| = 0$ y como $|z_1| \neq 0$, resulta que $|z_2| = 0$, de donde $z_2 = 0$

Teorema 14

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Dm.

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \cdot \bar{z}_2) + (\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2})$$

Ahora la suma de un complejo y su conjugado es el doble de la componente real del complejo, luego:

$$(z_1 \cdot \bar{z}_2) + (\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2}) = 2R\,(z_1 \cdot \bar{z}_2) \leq 2\,|z_1 \cdot \bar{z}_2|$$

o sea

$$(z_1 \cdot \bar{z}_2) + (\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2}) \leq 2\,|z_1||\bar{z}_2| = 2\,|z_1|\,|z_2|$$

Volviendo a la igualdad anterior resulta

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1||z_2|$$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (\,|z_1| + |z_2|)^2$$

y de aquí tomando la raíz positiva, queda:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

<u>Teorema</u> 15

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \qquad |z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \qquad \forall \quad z \neq 0$$

<u>Dm</u>.

De inmediato tenemos que:

(a). $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\,,\ \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{|z|^2}\,(x,\,-\,y) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

(b). $\left|z^{-1}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$

Teorema 16

Para todo $z_1 \neq 0$ y $z_2 \neq 0$, se tiene que

$$(z_1 \cdot z_2)^{-1} = z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}$$

Dm.

$$(z \quad \cdot \; z \;)^{-1} = \frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{|z_1 \cdot z_2|^2} = \frac{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_1|^2 \; |z_2|^2} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} =$$

$$= z_1^{-1} \cdot z_2^{-1}$$

Teorema 17

$$(\overline{z^{-1}}) = (\bar{z})^{-1}$$

Dm.

$$(\overline{z^{-1}}) = (\overline{\frac{\bar{z}}{|z|^2}}) = \frac{\bar{\bar{z}}}{|z|^2} = \frac{\bar{\bar{z}}}{|\bar{z}|^2} = (\bar{z})^{-1}$$

4. Diferencia y Cuociente de Nûmeros Complejos.

DEF. 23

Dados los complejos $z_1 = (x_1, x_2)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ llamaremos diferencia entre z_1 y z_2 al complejo

$$z_1 - z_2 = z_1 + (- z_2)$$

Teorema 18

$$z_1 - z_1 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$$

Dm.

(a) $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 , y_1) + (-x_2, - y_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

(b) $(z_1 - z_2) + z_2 = z_1 + (-z_2) + z_2 = z_1 + \left[(-z_2)+z_2\right] = z_1$

Teorema 19

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Dm.

(a) $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leqslant |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$

(b) $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$

Aprovechando los resultados obtenidos en (a) y (b) queda:

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z \ | + |z_2|$$

DEF. 24

Dados los complejos $z_1 = (x_1 , y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2) \neq 0$, llamaremos cuociente entre z_1 y z_2, al producto de z_1 por el recíproco de z_2. Designando este complejo por $\frac{z_1}{z_2}$, tendremos:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

Teorema 20

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \circ z}{z_2 \circ z} \qquad \forall\ z_2 \neq 0 \quad z \neq 0$$

Dm.

$$\frac{z_1 \cdot z}{z_2 \cdot z} = (z_1 \cdot z)\ (z_2 \cdot z)^{-1} = (z_1 \cdot z)\ (z^{-1} \cdot z_2^{-1}) = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2}$$

Teorema 21

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \forall \quad z_2 \neq 0$$

Dm.

$$\frac{z_1}{z_2} = |z_1 \cdot z_2^{-1}| = |z_1|\,|z_2^{-1}| = |z_1|\ \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Teorema 22

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \qquad \forall \quad z_2 \neq 0$$

Dm.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{(z_1 \quad z_2^{-1})} = \bar{z}_1 \cdot \overline{z_2^{-1}} = \bar{z}_1 \cdot (\bar{z}_2)^{-1} = \frac{\bar{z}_1}{z_2}$$

Teorema 23

$$\frac{1}{z} = z^{-1} \qquad \forall \quad z \neq 0$$

Dm

$$\frac{1}{z} = \frac{(1,0)}{z} = (1,0) \circ z^{-1} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1}$$

Corolario

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \qquad \forall \quad z_2 \neq 0$$

DEF. 25

Sea $z = x + iy$ un complejo no nulo y n un entero positivo, entonces:

$$z^{-n} = (x + iy)^{-n} = \left[(x + iy)^{-1}\right]^{n} = (z^{-1})^{n}$$

DEF. 26

Sea $z = a + ib$ un complejo y n un entero positivo, llamaremos raíz n-ésima de $z = a + ib$, a todo complejo $(x + iy)$ tal que:

$$(x + iy)^{n} = a + ib$$

La raíz n-ésima de un complejo $z = a + ib$ será indicada con cualquiera de las notaciones:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + ib} = (a + ib)^{\frac{1}{n}}$$

5. <u>Forma trigonométrica de un complejo.</u>

Dado un complejo no nulo $z = x + iy$, teniendo presente que:

$$x \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = r \qquad y \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

resulta:

$$-1 \leqslant \frac{x}{r} \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \frac{y}{r} \leqslant 1 \qquad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

expresiones que garantizan la existencia de por lo menos un ángulo ϕ, tal que:

$$\frac{x}{r} = \cos \phi \qquad \frac{y}{r} = \operatorname{sen} \phi$$

<u>DEF</u>. 27

Llamaremos argumento de un número complejo no nulo, $z = x + iy$, a un número real ϕ, tal que:

$$x = r \cos \phi \qquad y = r \operatorname{sen} \phi \qquad -\pi < \phi \leqslant \pi$$

<u>DEF</u>. 28

Llamaremos argumento del complejo nulo (0,0) al número $\phi = 0$

Para indicar que ϕ es el argumento de un complejo z, usaremos la notación: $\arg z = \phi$

Aprovechando la noción de argumento, el complejo $z = x + iy$ de módulo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se expresa por:

$$z = r\ (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$$

fórmula conocida con el nombre de forma trigonométrica del complejo z.

La forma trigonométrica de un complejo z, que también se suele llamar forma polar, corrientemente se abrevia poniendo:

$$z = r\ (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) = r \operatorname{cis} \phi$$

<u>Teorema</u> 24

Para todo complejo no nulo $z = r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$ se tiene:

$$\bar{z} = r\left[\cos(-\phi) + i \operatorname{sen}(-\phi)\right]$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\phi) + i \operatorname{sen}(-\phi)\right]$$

<u>Dm</u>.

En efecto de $z = (x, y) = r(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$, resulta $x = r \cos \phi$, $y = r \operatorname{sen} \phi$, entonces:

$$z = (x, -y) = (r \cos \phi, -r \operatorname{sen} \phi)$$

$$= r\left[\cos(-\phi) + i \operatorname{sen}(-\phi)\right]$$

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r} \{\cos(-\phi) + i \operatorname{sen}(-\phi)\}$$

<u>Corolario</u>

$$z = r(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi), \quad \text{implica}$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z \qquad\qquad \arg \frac{1}{z} = -\arg z$$

<u>Teorema</u> 25

Si $z_1 = a \operatorname{cis} \alpha$ y $z_2 = b \operatorname{cis} \beta$, se tiene:

$$z_1 \cdot z_2 = ab\,(\cos \overline{\alpha + \beta} + i \operatorname{sen} \overline{\alpha + \beta}) = ab \operatorname{cis}(\alpha + \beta)$$

<u>Dm</u>

Puesto que $z_1 = (a\cos\alpha,\ a \operatorname{sen}\alpha)$ y $z_2 = (b\cos\beta,\ b \operatorname{sen}\beta)$ aplicando la definición de producto se tiene:

$$z_1 \cdot z_2 = (ab\cos\alpha\cos\beta - ab\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$
$$,\ ab\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + ab\operatorname{sen}\alpha\cos\beta)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ab\cos\overline{\alpha + \beta}\ ,\quad ab\operatorname{sen}\overline{\alpha + \beta})$$

$$z_1 \cdot z_2 = ab\,(\cos\overline{\alpha + \beta} + i\operatorname{sen}\overline{\alpha + \beta}) = ab\operatorname{cis}(\alpha + \beta)$$

<u>Corolario</u> 1

$$\arg(z_1 + z_1) = \arg z_1 + \arg z_2$$

<u>Corolario</u> 2

Si $z = r(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$ y k es número entero:

$$z^k = r^k \ (\cos k\,\phi + i \operatorname{sen} k\,\phi)$$

<u>Corolario</u> 3 (Fórmula de Moivre)

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^k = \cos k\,\alpha + i \operatorname{sen} k\,\alpha$$

Esta igualdad de uso frecuente se obtiene del corolario anterior haciendo $r = 1$.

<u>Teorema</u> 26

Si $z_1 = a \operatorname{cis} \alpha$ y $z_2 = b \operatorname{cis} \beta \neq 0$, se tiene:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{b} \ (\cos \overline{\alpha - \beta} + i \operatorname{sen} \overline{\alpha - \beta}) = \frac{a}{b} \operatorname{cis} (\alpha - \beta)$$

<u>Dm</u>.

De inmediato se tiene:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = a \operatorname{cis} \alpha \cdot \frac{1}{b} \operatorname{cis} (-\beta)$$

o sea:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{b} \operatorname{cis} (\alpha - \beta) = \frac{a}{b} \ (\cos \overline{\alpha - \beta} + i \operatorname{sen} \overline{\alpha - \beta})$$

<u>Corolario</u>

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

Teorema 27

Si $z = a(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ y n es entero positivo:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, (n - 1)$

Dm.

Sea $\sqrt[n]{z} = w = r(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$, entonces por definición de raíz n-ésima de un complejo tenemos:

$$r^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = a(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

de donde:

$$r^n = a \qquad\qquad n\phi = \alpha + 2k\pi$$

donde k es un entero. Despejando r y ϕ e introduciendo los valores correspondientes en $w = r \operatorname{cis}\phi$, tenemos:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

El hecho que k sea un entero cualquiera podría inducir a creer que hay tantas raíces n-éximas como se desee. Haremos ver que solamente hay n raíces n-ésimas distintas, que pueden obtenerse, entre otros modos, dando a k los valores: $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, (n - 1)$.

Veamos cuando dos raíces n-ésimas de z, correspondientes a valores distintos k_1 y k_2 de k, son iguales. Para que tal cosa ocurra es necesario y suficiente que:

$$\frac{\alpha + 2k_1\pi}{n} = \frac{\alpha + 2k_2\pi}{n} + 2p\pi$$

donde p es un número entero. De esta igualdad se obtiene: $k_1 - k_2 = pn$, o sea que la diferencia entre dos valores de k debe ser múltiplo de n. Ahora dando a k los valores: 0, 1, 2, 3, ... (n - 1), la diferencia entre dos cualesquiera de estos números no es nunca múltiplo de n, por consiguiente cada uno de ellos proporciona una raíz n-ésima de z diferente de las otras. Para valores de k mayores que (n - 1) se obtiene raíces ya determinadas, pues entonces las diferencias $k_1 - k_2$ son múltiplos de n.

En la expresión

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a}\ (\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \text{ sen } \frac{\alpha + 2k\pi}{n})$$

el factor $\sqrt[n]{a}$, representa la raíz aritmética del número no negativo $a = |z|$.

<u>Corolario</u> 1

Entre las raíces de índice par de un número real positivo, siempre hay dos y solamente dos reales y opuestas

En efecto si el número es $z = a$ real positivo, su argumento es $\alpha = 0$ y si el índice es par: $n = 2p$, tenemos:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a}\ (\cos \frac{2k\pi}{2p} + i \text{ sen } \frac{2k\pi}{2p})$$

Ahora esta expresión será real solamente cuando

$$\text{sen } \frac{k\pi}{p} = 0 \qquad \text{o sea para:} \qquad k = 0 \text{ y } k = p$$

Si $k = 0$ el número es positivo y si $k = p$ el número es negativo, pues su argumento en este último caso, es $\phi = \pi$

<u>Corolario</u> 2

Entre las raíces de índice impar de un número real siempre hay una y sólo una que es real.

Si el número es real positivo, sólo habrá raíz real para $k = 0$. Además ella será positiva. Contrariamente si z es real negativo su argumento es $\alpha = \pi$ y si el índice es impar $n = 2p + 1$ tendremos:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a}\ (\cos \frac{(2k + 1)\pi}{2p + 1} + i \text{ sen } \frac{(2k + 1)\pi}{2p + 1})$$

y obviamente al dar a k los valores: 0, 1, 2, ... $(n-1=2p)$ la expresión precedente será real sólo para $k = p$. En este caso el argumento de la raíz es $\phi = \pi$, lo cual asegura que dicha raíz es un real negativo.

Corolario 3

Las raíces n-ésimas de un número complejo cualquiera z, pueden obtenerse multiplicando una de ellas, por cada una de las raíces n-ésimas de la unidad.

En efecto si w_1, w_2, ..., w_n son las raíces n-ésimas de la unidad y z_0 es una raíz n-ésima de z, los productos: z_0w_1, z_0w_2, z_0w_3, ..., z_0w_n son tales que:

$$(z_0w_1)^n = (z_0w_2)^n = \ldots\ldots\ldots = (z_0w_n)^n = z$$

es decir son raíces n-ésimas de z, además todas ellas son diferentes.

DEF. 29

Una raíz n-ésima w de la unidad, se dirá raíz primitiva si

$$w,\ w^2,\ w^3,\ \ldots\ldots\ldots,\ w^{n-1},\ w^n$$

son todas las raíces n-ésimas de la unidad.

Refiriéndonos al caso de las raíces cúbicas de la unidad:

$$w_1 = 1 \qquad w_2 = -\frac{1}{2}\,(1 - i\sqrt{3}) \qquad w_3 = -\frac{1}{2}\,(1 + i\sqrt{3})$$

ocurre que $w_1 = 1$ no es raíz primitiva, pero w_2 y w_3 lo son, pues no es difícil verificar que:

$$w^2 = w^3 \quad , \quad w_2{}^3 = 1 \qquad y \qquad w_3{}^2 = w_2 \quad , \quad w_3{}^3 = 1$$

<u>Teorema</u> 28

En la expresión que da las raíces n-ésimas de uno:

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots . (n-1)$$

w_k es raíz primitiva de la unidad si y sólo si k es primo con n.

<u>Dm</u>.

Todo consiste en determinar el menor exponente natural q tal que:

$$w_k{}^q = \cos \frac{2kq\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2kq\pi}{n} = 1$$

entonces si $q < n$, la raíz obviamente no puede ser primitiva, contrariamente si $q > n$, la raíz será primitiva, pues tendremos que

$$w_k, w_k{}^2, w_k{}^3, \ldots\ldots. w_k{}^{n-1}, 1$$

serán todas raíces de la unidad, siendo además diferentes.

Supongamos primero que k y n no son primos; entonces tendrán un divisor común d, tal que $k = pd$ y $n = qd$, en estas condiciones, tenemos:

55. La suma de dos complejos variables z_1 y z_2 dividida por la diferencia de ellos da un imaginario puro. Demuestre que los complejos z_1 y z_2 se desplazan sobre una circunferencia con centro en el origen.

Solución

Sean los complejos $z_1 = (x_1, x_2)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)}$$

$$\frac{z_1 + z_2}{z - z} = \frac{(x_1^2-x_2^2)+(y_1^2-y_2^2) + i\ [(x_1-x_2)(y_1+y_2)-(x_1+x_2)(y_1-y_2)]}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

y para que este complejo sea imaginario puro, debe ser:

$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$ o sea $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

resultado que nos muestra que $|z_1| = |z_2|$, o sea z_1 y z_2 se desplazan sobre una misma circunferencia con centro en el origen.

56. Un complejo $z = x + iy$ se mueve sobre la recta $3x + 4y + 5 = 0$. Demostrar que el valor mínimo de $|z|$ es uno.

De todas sólo w_1 y w_5 son raíces primitivas ya que 1 y 5 son primos con 6. Además no es difícil verificar que:

$$w_2^{\ 3} = 1 \qquad w_3^{\ 2} = 1 \qquad w_4^{\ 3} = 1 \qquad w_0 = 1$$

resultado que nos muestra que w_0, w_2, w_3 y w_4 no son raíces primitivas.

DEF. 30

Dado un complejo $z = a\ (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ y $\frac{p}{q}$ un racional irreductible, la potencia de exponente racional de un complejo se definirá por:

$$z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p} \qquad\qquad \text{con} \quad q > 0$$

De esta definición resulta inmediato que

$$z^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}\ \left(\cos \frac{p\alpha + 2k\pi}{q} + i \operatorname{sen} \frac{p\alpha + 2k\pi}{q}\right)$$

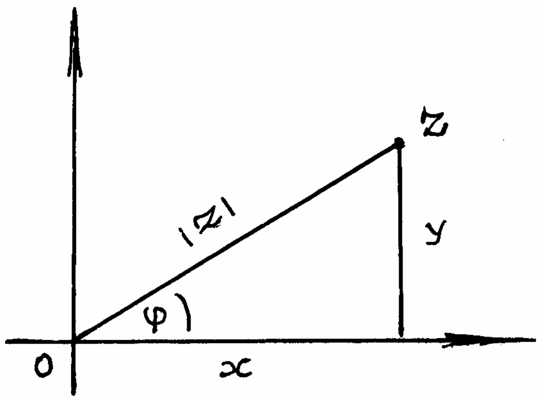
con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots q$.

La expresión precedente nos muestra que $z^{p/q}$ tiene q valores diferentes. El valor que se obtiene para $k = 0$ lo llamaremos valor principal.

6. Representación gráfica del número complejo

El estudio del cuerpo de los complejos ha sido desarrollado aritméticamente sin recurrir a ninguna representación geométrica; sin embargo teniendo presente las aplicaciones de este concepto, indicaremos dos representaciones gráficas del número complejo, que son las que corrientemente más se usan.

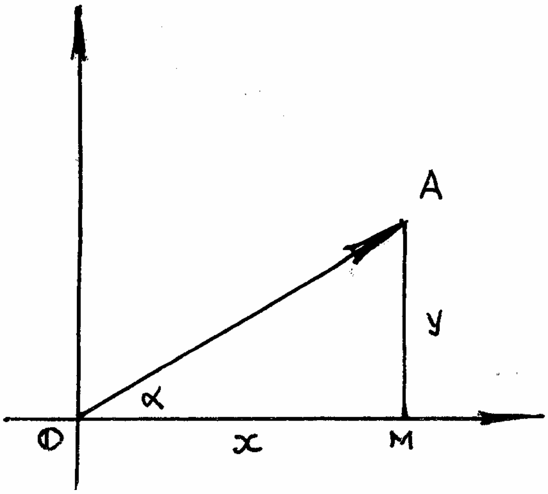
Consideremos un plano y en él un sistema de ejes cartesiano ortogonal. Sabemos desde la geometría que todo punto del plano, determina con referencia al sistema de ejes elegido, dos números reales x e y que son su abscisa y su ordenada respectivamente. Recíprocamente dados dos números reales x e y se podrá siempre individualizar un punto de este plano y solamente uno, que tenga a x como abscisa e y como ordenada.



Ahora como todo número complejo z = (x, y) es una pareja ordenada de números reales, resulta que todo complejo determina un punto del plano que tenga a x como abscisa e y como ordenada y recíprocamente todo punto (x, y) del plano determina un complejo $z = (x, y)$.

De acuerdo a estas ideas se acostumbra a tomar como representación geométrica del complejo $z = (x, y)$ al punto (x, y) del plano. De aquí que trabajando con representación geométrica de complejos serán sinónimas las expresiones: número complejo y punto del plano. Además lo corriente entonces, será expresar el complejo por una letra mayúscula, notación habitual para designar puntos de un plano.

Otra representación gráfica corriente para el complejo $z = (x, y)$ es el vector del plano xy cuyas proyecciones sobre los ejes sean precisamente los números x e y. Obviamente que para un complejo dado hay infinitos vectores que cumplen tales condiciones, entonces en rigor el complejo $z = (x, y)$ queda representado, o quizás mejor aún, representa a la clase de equivalencia de todos los vectores cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son x e y en el orden trivial, y con sentido del origen al punto (x, y)



$$A = (x,y) = x + iy = z$$

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

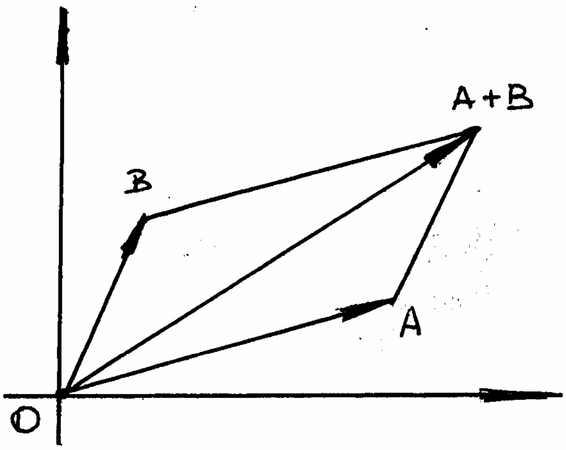
$$OM = x = |z| \cos \alpha$$

$$MA = y = |z| \operatorname{sen} \alpha$$

$$\alpha = \arg z = \arg A.$$

La representación vectorial de un complejo da una natural expresión a la igualdad de complejos, en efecto sabemos que z_1, = (x_1, y_1) y $z_2 = (x_2, y_2)$ son iguales si y sólo si: $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_1$, es decir si, geométricamente hablando, los vectores correspondientes son de igual magnitud, dirección y sentido.

<u>Representación gráfica de la suma de dos complejos</u>



$$A = (a_1, a_2) = a_1+ia_2$$

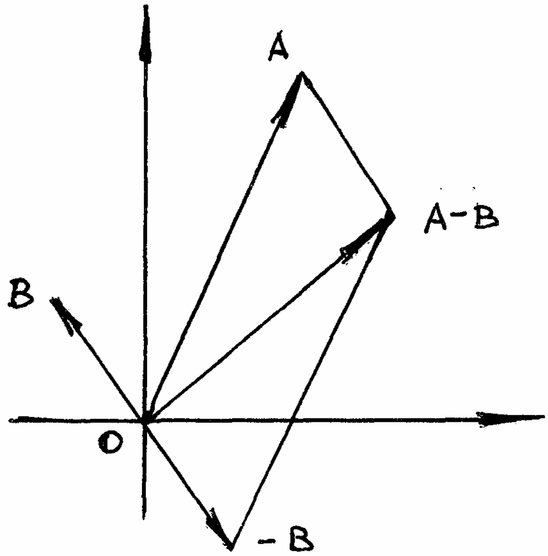
$$B = (b_1, b_2) = b_1+ib_2$$

$$A+B = (a_1+b_1 , a_2+b_2)$$

$$A+B = (a_1+b_1) + i(a_2+b_2)$$

$$|A+B| \leq |A| + |B|$$

Representación gráfica da diferencia de dos complejos



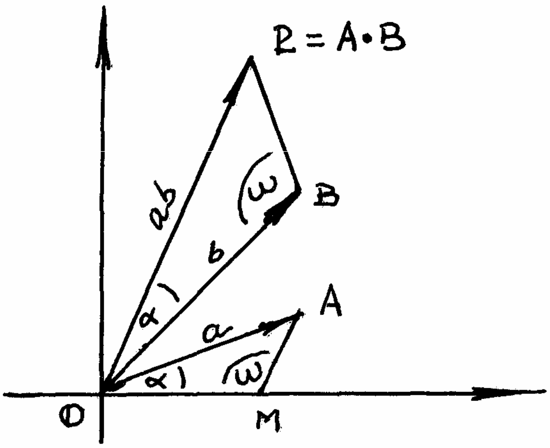
$$A - B = A + (-B)$$

(1) Para tener el vector BA = A-B basta tomar el vector que une el punto B con el punto A.

(2) La distancia entre dos puntos dados A y B se expresa por: $|A - B| = |B - A|$

(3) $|A| - |B| \leq |A - B| \leq |A| + |B|$

Representación gráfica del producto de dos complejos



$A = a(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$

$B = b(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$

$P = A \cdot B = ab \operatorname{cis} (\alpha + \beta)$

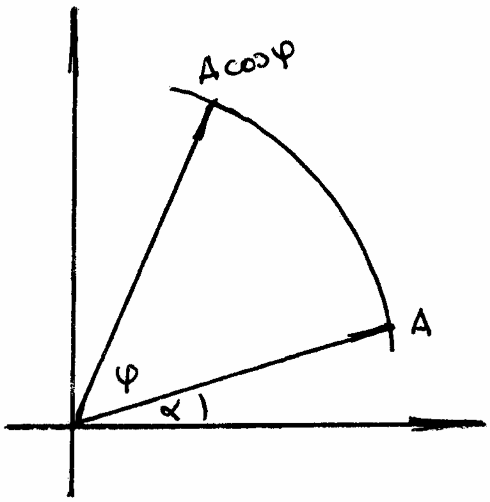
$\sphericalangle (MOA) = \alpha$ $\qquad$ $\sphericalangle (MOB) = \beta$

$OM = 1$ $\qquad$ $\sphericalangle (MOP) = \alpha + \beta$

$\dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OP}{OB}$ $\qquad$ $OP = ab = |A \cdot B|$

Se construye sobre OB un triángulo OBP semejante al triángulo OMA, donde OM = 1 es la unidad tomada en el sistema cartesiano.

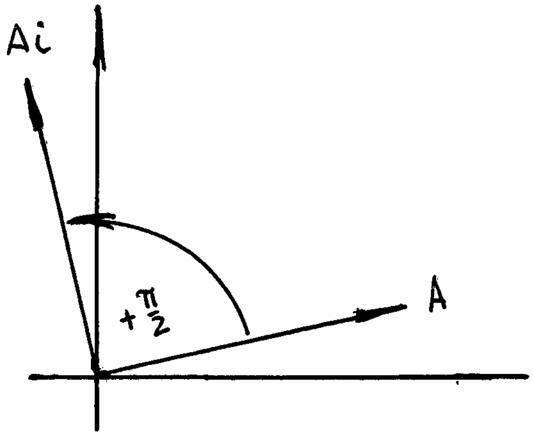
Producto por un complejo de módulo uno.

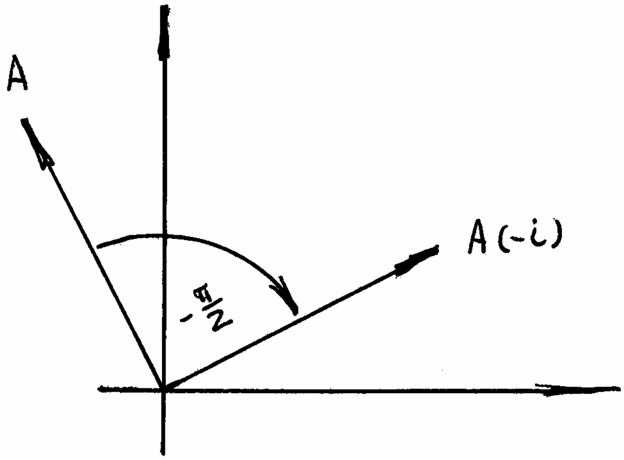


Si un complejo $A = a \text{ cis } \alpha$ se multiplica por un complejo $\text{cis } \phi$ de módulo uno, el producto,

$A \text{ cis } \phi = a(\cos \overline{\alpha+\phi} + i \text{ sen } \overline{\alpha+\phi})$

muestra que el vector A rota en un ángulo ϕ en torno a su punto inicial.

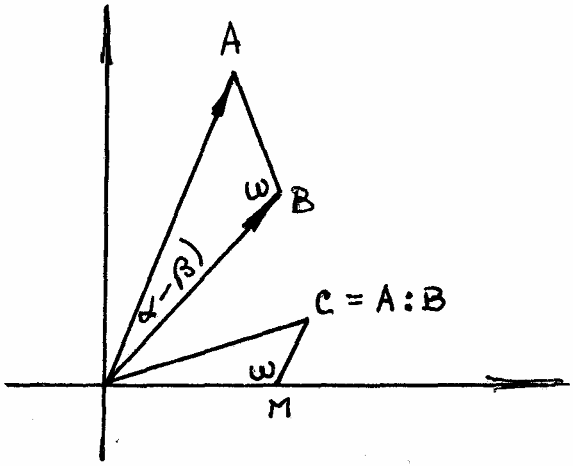




Particularmente para rotar un vector A en $(+\ \pi/2)$ bastará multiplicarlo por i y para rotarlo en $(-\ \pi/2)$ es suficiente multiplicarlo por $(-i)$, pues sabemos que:

$i = \cos(\pi/2) + i \text{ sen } (\pi/2) \qquad -i = \cos(-\ \pi/2) + i \text{ sen } (-\ \pi/2)$

Representación gráfica del cuociente de dos complejos



$A = a(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\,\alpha) = a\ \mathrm{cis}\ \alpha$

$B = b(\cos\beta + i\ \mathrm{sen}\,\beta) = b\ \mathrm{cis}\ \beta$

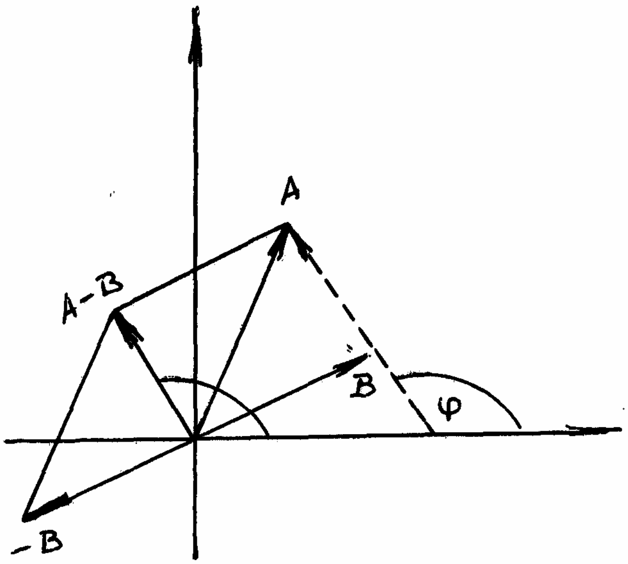
$C = \frac{A}{B} = \frac{a}{b}\ \mathrm{cis}\ (\alpha - \beta)$

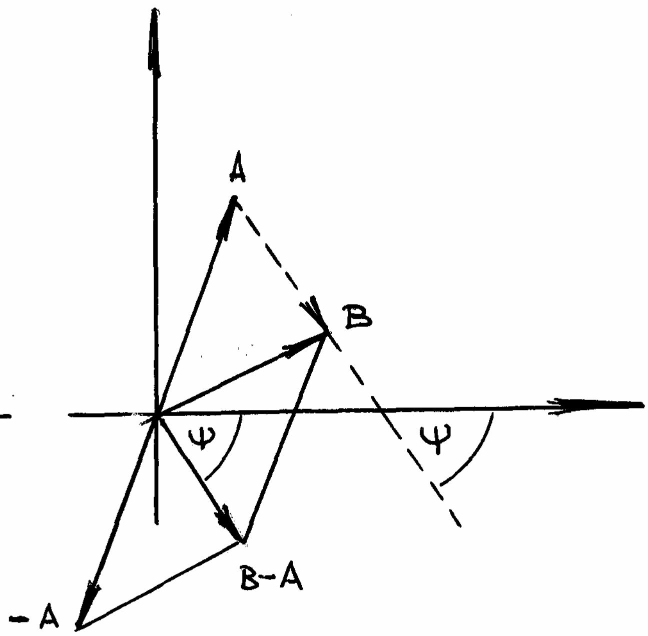
$\sphericalangle\ (MOC) = \sphericalangle\ (BOA) = \alpha - \beta$

$OM = 1 \quad \sphericalangle(MOA) = \alpha \quad \sphericalangle(MOB) = \beta$

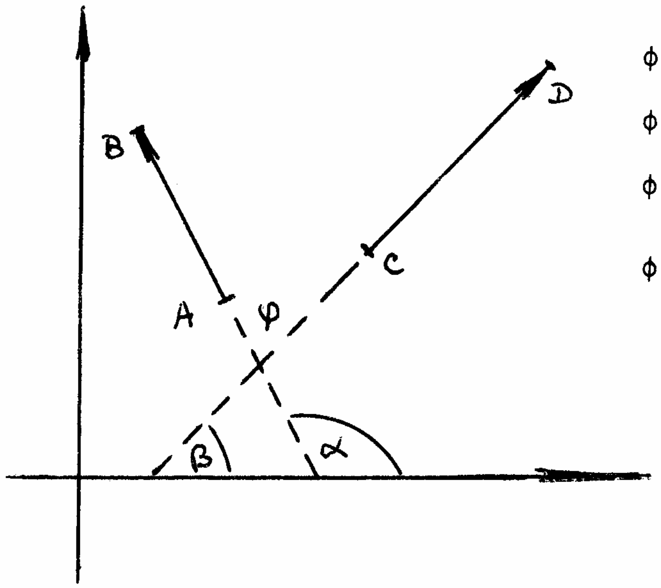
Se construye sobre OM un triángulo OMC semejante al triángulo OBA.

Representación gráfica del argumento de (A-B) y (B-A)





Angulo de dos trazos AB y CD

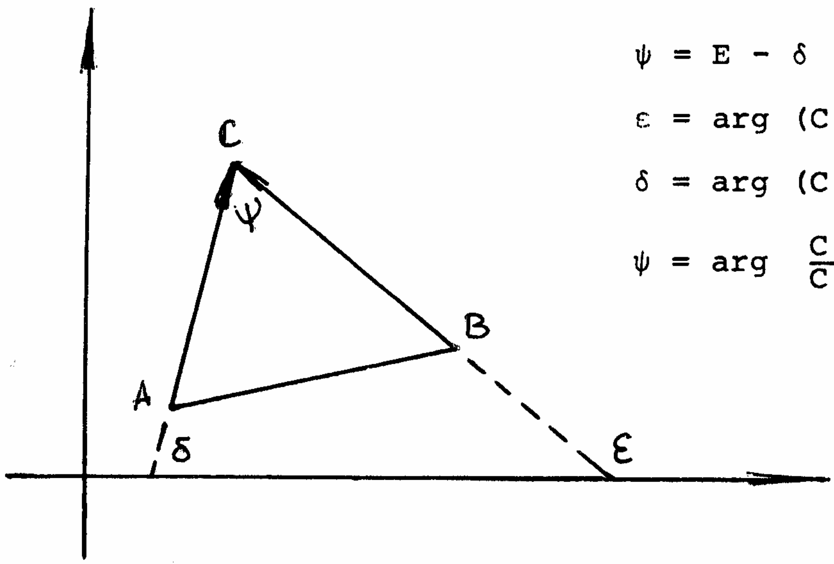


$$\phi = \sphericalangle\ (AB,\ CD)$$

$$\phi = \alpha - \beta$$

$$\phi = \arg\ (B-A) - \arg\ (D-C)$$

$$\phi = \arg\ \frac{B-A}{D-C}$$



$$\psi = E - \delta$$

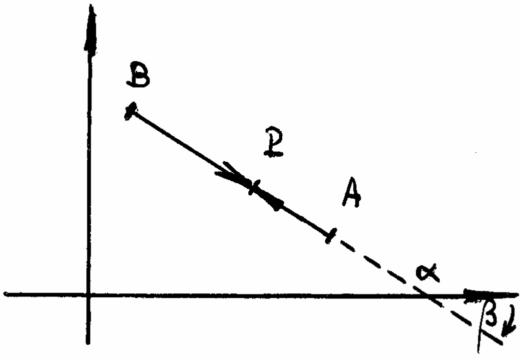
$$\varepsilon = \arg\ (C - B)$$

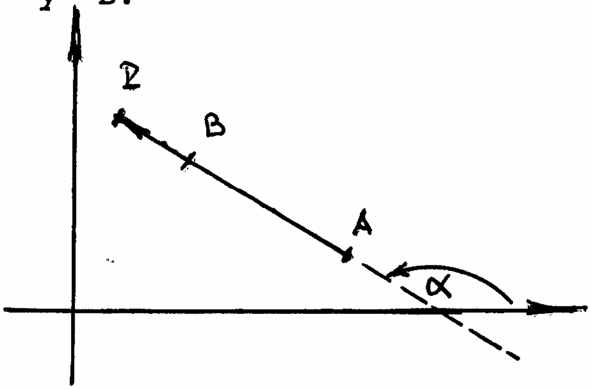
$$\delta = \arg\ (C - A)$$

$$\psi = \arg\ \frac{C - B}{C - A}$$

Expresión de un punto sobre una recta.

Trataremos de expresar mediante operaciones con números complejos el hecho que un punto P este sobre una recta determinada por dos puntos A y B.





Si el punto P está entre A y B, tenemos:

$$\text{Arg.}\ \frac{P - A}{P - B} = \arg\ (P - A) - \arg\ (P - B) = \alpha - (-\beta) = \pi$$

Si el punto P no está entre A y B, tenemos:

$$\text{Arg}\ \frac{P - A}{P - B} = \arg\ (P - A) - \arg\ (P - B) = (+\alpha) - (+\alpha) = 0$$

Esta observación nos garantiza que el complejo (P - A) / (P - B) es real cuando P está sobre la recta AB y recíprocamente, de aquí que condición necesaria y suficiente para que P esté sobre la recta AB es que sea real el complejo:

$$\frac{P - A}{P - B} = r \qquad \text{con} \quad r \in \mathbb{R}$$

De aquí despejando P, se obtiene:

$$P = \frac{A}{1-r} - \frac{rB}{1-r} \qquad \text{con } r \in \mathbb{R}$$

Considerando que la suma de los coeficientes de A y B es la unidad, en lo sucesivo para expresar que P es un punto de la recta AB, usaremos una cualesquiera de las expresiones:

$$P = aA + bB \qquad \text{con} \quad a + b = 1,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$$

o bien

$$P = aA + (1 - a)\ B \qquad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}.$$

<u>Observación</u> 1

Si C está sobre la recta determinada por los puntos A y B, ocurrirá que siempre los puntos A, B y C serán colineales y para que ello suceda es necesario y suficiente que:

$$C = aA + (1 - a)\ B \qquad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}$$

o mejor, es necesario y suficiente que:

$$aA + (1 - a)\ B - C = 0 \qquad a \in \mathbb{R}$$

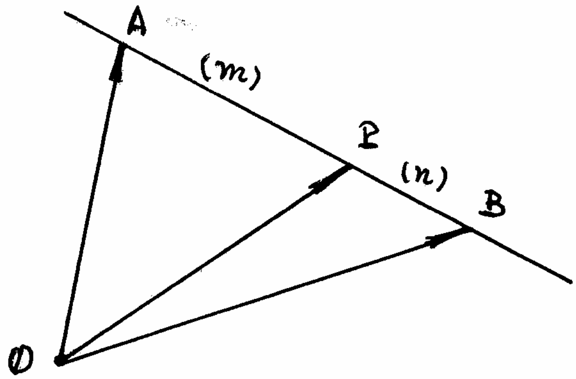
Ahora considerando que la suma de los coeficientes de A, B y C es cero, podremos decir que: tres puntos A, B y C son colineales si y sólo si existen tres números reales a, b y c, no todos nulos, de tal modo que:

$$aA + bB + cC = 0 \qquad \text{con} \qquad a + b + c = 0$$

Este teorema es de frecuente utilidad en las aplicaciones geométricas de los complejos.

Observación 2

Sabemos que si un punto P está sobre la recta determinada por los puntos A y B, el cuociente entre los complejos



(P - A) y (P - B) debe ser un número real. Particularmente si el punto P divide al trazo AB de modo que:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$$

tendremos que el cuociente entre los complejos AP = (P - A) y PB = (B - P) será precisamente dicho número real: m/n; así entonces el punto P que divide al trazo AB en la razón m : n está dado por:

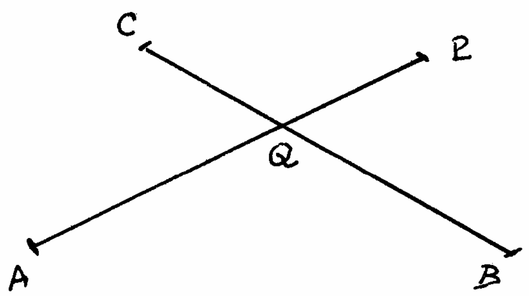
$$\frac{P - A}{B - P} = \frac{m}{n} \qquad \text{o sea por} \qquad P = \frac{nA + mB}{m + n}$$

Si el punto P fuese el punto medio M del trazo AB, tendremos que AM : MB = 1 : 1 y entonces dicho punto medio resulta dado por:

$$M = \frac{A + B}{2}$$

Expresión de un punto de un plano

Suponemos un plano determinado por tres puntos A, B y C no colineales y pretendemos expresar un punto cualquiera P del plano en términos de los puntos A, B y C conocidos.



Unamos A con P y sea Q la intersección de las rectas AP y BC. Puesto que Q es un punto de la recta BC, tenemos:

$$Q = b\,B + (1 - b)\,C$$

y como P es punto de la recta AQ resulta:

$$P = aA + (1 - a)\,Q = aA + (1 - a)\,bB + (1 - a)(1 - b)\,C$$

Considerando que la suma de los coeficientes de A, B y C es:

$$a + (1 - a)\,b + (1 - a) - b\,(1 - a) = 1$$

podemos decir que P es punto del plano determinado por los puntos no colineales A, B y C si existen tres reales a, b y c tales que:

$$P = aA + bB + cC \qquad \text{con} \qquad a + b + c = 1$$

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular: $z = (1+i)^5 / (1+i^5)$

Solución

$$\frac{(1+i)^5}{1+i^5} = \frac{(1+i)^5}{1+i} = (1+i)^4 = -4$$

2. Separar la parte real y la parte imaginaria del complejo

$$z = -8 / (1-i)^5$$

Solución

$$z = \frac{-8}{(1-i)^5} = \frac{-8(1+i)^5}{(1-i)^5\,(1+i)^5} = \frac{-8(1+i)^5}{\{(1-i)(1+i)\}^5}$$

$$z = \frac{-8}{32}(1+i)^5 = -\frac{1}{4}(1+5i+10i^2+10i^3+5i^4+i^5) = 1+i$$

3. Si a, b, c y d son reales, usando números complejos demostrar que:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

Solución

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (a+ib)(a-ib)(c+id)(c-id)\\ &= (a+ib)(c+id)(a-ib)(c-id)\\ &= (ac-bd,\ ad+bc)\cdot(ac-bc,\ -ad-bc)\\ &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2\end{aligned}$$

4. Expresar en la forma a + ib el complejo $z = 10^{\log \frac{2-i}{1-i}}$

Solución

$$10^{\log \frac{2-i}{1-i}} = \frac{2-i}{1-i} = \frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+i}{2}$$

5. Demostrar que los únicos elementos de $\mathbb{C}$ cuyo cuadrado es (-1) son i y $(-i)$.

Solución

Sea $z = x + iy$, tal que $z^2 = -1$, entonces:

$$z^2 = (x^2 - y^2,\ 2xy) = (-1,\ 0)$$

luego:

$$x^2 - y^2 = -1 \qquad\qquad 2xy = 0$$

Resolviendo el sistema se encuentra: $x = 0$, $y = \pm 1$,

así: $z = (0, 1) = i$ y $z = (0, -1) = (-1)(0, 1) = -i$

6. Determine una ecuación de segundo grado a coeficientes reales, que admita la solución.

$$z = \cfrac{i}{1 + i + \cfrac{i}{1 - i + \cfrac{i}{1 + i}}}$$

Solución

El complejo z se reduce a $z = (2 + i) / 4$ y si z es raíz de la ecuación, también lo es $\bar{z} = (2 - i) / 4$

Considerando que: $z + \bar{z} = 1$ y $z \cdot \bar{z} = 5/16$ la ecuación buscada es: $16x^2 - 16x + 5 = 0$

7. Determinar la parte real y la parte imaginaria del complejo: $z = \sqrt{3 + 4i} + \sqrt{3 - 4i}$

Solución

$$z^2 = 3 + 4i + 3 - 4i + 2\sqrt{9 + 16} = 6 + 2\sqrt{25} = 16$$

Así: $z = \pm 4$ o bien $z_1 = (4, 0)$ y $z_2 = (-4, 0)$

8. Demostrar que si la ecuación: $z^2 + (a + bi) z + (c + di) = 0$ tiene una raiz real, se verifica que: $d^2 - abd + cb^2 = 0$

Solución

Sea $z = r$ una raíz real de la ecuación, entonces:

$$r^2 + (a + ib) r + (c + id) = 0$$

Ahora, la nulidad de este complejo implica

$$r^2 + ar + c = 0 \qquad y \qquad br + d = 0$$

eliminando r entre estas dos igualdades, resulta:

$d^2 - abd + cb^2 = 0$

Demuestre que si la ecuación admite una raíz imaginaria $z = ri$, se tiene que: $d^2 + abd + ca^2 = 0$

9. Los números complejos z y w tienen suma y producto reales. Demuestre que z y w son complejos conjugados.

Solución

Sea $z = a + ib$ y $w = c + id$, entonces

$$z + w = (a + c) + i\,(b + d)$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

y para que estos números sean reales debe ser

$$b + d = 0 \qquad y \qquad ad + bc = 0$$

o sea

$$b = -d \qquad y \qquad b(c - a) = 0$$

Si $b = 0$, resulta $d = 0$ y z sería real. Supongamos entonces que $b \neq 0$ y $c - a = 0$, o sea tenemos: $d = -b$ y $c = a$. En este caso los números son

$$z = a + ib \qquad y \qquad w = a - ib$$

es decir complejos conjugados.

10. Dado el complejo $z = (a, b) \neq (0, 0)$, determinar un complejo $w = (x, y)$, tal que $z \cdot w = 1$

<u>Solución</u>

De inmediato tenemos

$$z \cdot w = (a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

luego:

$$ax - by = 1 \qquad\qquad bx + ay = 0$$

Resolviendo el sistema, se encuentra

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \qquad \text{con } a^2 + b^2 \neq 0$$

Así:

$$w = \left(\frac{a}{|z|^2}, \frac{-b}{|z|^2}\right) = \frac{1}{|z|^2} \ (a, -b) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

11. Determinar todos los complejos z, tales que $z^3 = 1$.

<u>Solución</u>

De inmediato tenemos que: $z^3 = 1$, implica

$$z^3 - 1 = 0 \qquad \text{o sea} \qquad (z - 1).(z^2 + z + 1) = 0$$

Resolviendo las ecuaciones

$$z - 1 = 0 \qquad y \qquad z^2 + z + 1 = 0$$

se encuentra:

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) \qquad z_3 = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$$

Poniendo como es costumbre $z_2 = w$, se encuentra fácilmente que $z_3 = w^2$ y que: $1 + w + w^2 = 0$

Estas igualdades es aconsejable memorizarlas, pues ellas son de frecuente empleo.

12. Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad, demostrar que: $(1 + w)(1 + 2w)(1 + 3w)(1 + 5w) = 21$

Solución

Efectuando el producto en el primer miembro se obtiene:

$$A = 1 + 11w + 41w^2 + 61w^3 + 30w^4$$

$$A = (1 + w + w^2) + 10w + 10w^2 + 30w^2(1 + w + w^2) + 31w^3$$

de donde recordando que $w^3 = 1$ y $1 + w + w^2 = 0$, resulta:

$$A = 10(1 + w + w^2) + 21 = 21.$$

De análoga manera demostrar que:

(1) $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$ $\qquad (1 + w^2)^4 = 4$

(2) $(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^4)(1 - w^5) = 9$

(3) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{w}{x-w} + \dfrac{w^2}{x-w^2} = \dfrac{3}{x^3-1}$

(4) $(x + a + b)(x + aw + bw^2)(x + aw^2 + bw) = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$

13. Determinar las raíces de la ecuación: $4x^3 - 3x + 1 = 0$

sabiendo que:

$(x + a + b)(x + aw + bw^2)(x + aw^2 + bw) = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$

Solución

De acuerdo a la hipótesis dada, las raíces de la ecuación: $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$ son:

$x_1 = -(a + b)$ $\quad$ $x_2 = -(aw + bw^2)$ $\quad$ $w_3 = -(aw^2 + bw)$

Así para tener las ráices de la ecuación

$0 = 4x^3 - 3x + 1 = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$

bastará calcular a y b, sabiendo que:

$$a^3 + b^3 = 1/4 \qquad y \qquad 3ab = 3/4$$

o sea que:

$$a^3 + b^3 = 1/4 \qquad y \qquad a^3b^3 = 1/64$$

Resolviendo el sistema se encuentra: $a = b = 1/2$ con lo cual las raíces buscadas son: $x_1 = x_2 = x_3 = 1/2$.

14. Resolver la ecuación: $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

Solución

Haciendo $z^3 = x$, la ecuación se reduce a $x^2 + 7x - 8 = 0$, cuyas raíces son $x = 1$ y $x = -8$

Así:

$z^3 = 1$ implica $z_1 = 1$ $z_2 = 1/2(-1+i\sqrt{3})$ $z_3=1/2(-1-i\sqrt{3})$

$z^3 = -8$ implica $z = 2\sqrt[3]{-1}$ y calculando $\sqrt[3]{-1}$ se tiene:

$$z_4 = -2 \qquad z_5 = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_6 = 1 - i\sqrt{3}$$

15. Determinar las raíces de la ecuación $x^3 = -1$, sabiendo que las raíces de $x^3 = 1$ son:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \qquad x_3 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Solución

Haciendo $x = -u$, la ecuación $x^3 = -1$ se transforma en: $u^3 = 1$, así las raíces pedidas son:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \qquad x_3 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Sabiendo que las raíces de la ecuación $x^4 = -1$, son

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) \qquad y \qquad \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$$

Determinar las raíces de las ecuaciones: $x^4 = i$ y $x^4 = -i$

16. Determinar las raíces de la ecuación $x^3 = i$, sabiendo que las raíces de $x^3 = 1$ son:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \qquad x_3 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Solución

Haciendo $x = -iu$, la ecuación $x^3 = i$ se transforma en: $u^3 = 1$, así las raíces pedidas son:

$$x_1 = -i \qquad x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \qquad x_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$$

Determinar las raíces de la ecuación: $x^3 = -i$

17. Si a es una raíz compleja de la ecuación $z^n - 1 = 0$, demuestre que:

$$1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1} = 0$$

Solución

Como a es raíz de $z^n - 1 = 0$, la igualdad

$$(1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^{n-1})(z - 1) = z^n - 1$$

nos da

$$(1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1})(a - 1) = 0$$

y puesto que a es número complejo, tenemos $a \neq 1$, así

$$1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1} = 0$$

18. Calcular: $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots\ldots + i^{n-1}$

<u>Solución</u>

Fácilmente se encuentra que

$$S = 1 + i + i^2 + \ldots\ldots + i^{n-1} = \frac{1 - i^n}{1 - i}$$

Designando con $\overset{\circ}{4}$ la expresión "es múltiplo de 4", debemos considerar los casos siguientes:

(a) Si $n = \overset{\circ}{4}$ tenemos $i^n = 1$ entonces $S = 0$

(b) Si $n = \overset{\circ}{4} + 1$ tenemos $i^n = i$ entonces $S = 1$

(c) Si $n = \overset{\circ}{4} + 2$ tenemos $i^n = -1$ entonces $S = 1 + i$

(d) Si $n = \overset{\circ}{4} + 3$ tenemos $i^n = -i$ entonces $S = 2i$

19. Calcular la suma

$$S = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + \ldots\ldots + (4n)i^{4n-1}$$

<u>Solución</u>

La suma S puede descomponerse en las siguientes sumas parciales:

$$S_1 = 1 + 5 + 9 + \ldots\ldots + (4n - 3) = \frac{1 + (4n - 3)}{2} \cdot n$$

$$S_2 = i\,\{2 + 6 + 10 + \ldots\ldots + (4n-2)\} = \frac{2+(4n-2)}{2} \cdot ni$$

$$S_3 = i^2 \{3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1)\} = \frac{3+(4n-1)}{2}\, ni^2$$

$$S_4 = i^3 \{4 + 8 + 12 + \dots + 4n\} = \frac{4 + 4n}{2}\, ni^3$$

luego:

$$S = \frac{4n - 2 - 4n - 2}{2} \cdot n + \frac{4n - 4 - 4n}{2} \cdot ni = -2n - 2ni$$

20. Determinar un complejo $z = (x, y)$ tal que:

$$z^2 = p + iq$$

<u>Solución</u>

Por hipótesis tenemos $(x + iy)^2 = p + iq$. De aquí igualando partes reales e imaginarias se tiene:

$$x^2 - y^2 = p \qquad\qquad 2xy = q$$

Resolviendo este sistema se encuentra

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} + p}{2}} = \pm A \qquad\qquad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} - p}{2}} = \pm B$$

Suponiendo $q \neq 0$, como $2xy = q$, resulta que (xy) y q deben tener igual signo, entonces las raíces cuadradas de $(p + iq)$ son

$$\sqrt{p + iq} = \begin{cases} A + i\,B \\ -A - i\,B \end{cases} \qquad \text{cuando} \quad q > 0$$

$$\sqrt{p + iq} = \begin{cases} A - i\,B \\ -A + i\,B \end{cases} \qquad \text{cuando} \quad q < 0$$

Calcular:

$$\sqrt{5 - 12i} = \pm (3 - 2i) \qquad \sqrt{3 + 4i} = \pm (2 + i)$$

21. Calcular $\sqrt[3]{-1728}$

Solución

De inmediato se tiene:

$$x_K = 12 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \qquad k = 0, 1, 2.$$

$$x_1 = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) = 12 \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = 6 + i\, 6\sqrt{3}$$

$$x_2 = 12 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = - 12$$

$$x_3 = 12 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3}\right) = 12\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = 6 - i\, 6\sqrt{3}$$

22. Sea k el máximo común divisor de los enteros positivos m y n. Demuestre que las raíces de $x^k = 1$ son raíces de $x^m = 1$ y $x^n = 1$

Solución

Sea $m = pk$ y $n = qk$. Si α es una raíz de la ecuación $x^k = 1$, tenemos $\alpha^k = 1$, luego:

$$\alpha^m = \alpha^{pk} = (\alpha^k)^p = 1 \qquad \alpha^n = \alpha^{qk} = (\alpha^k)^q = 1$$

Determine las raíces comunes de las ecuaciones $x^{15} = 1$ y $x^{21} = 1$.

23. Calcular el módulo del complejo $z = \dfrac{(2 - 3i)^4 (1 - i)^3}{5 + i \quad 3}$

Solución

$$|z| = \left| \frac{(2 - 3i)^4 (1 - i)^3}{5 + i \quad 3} \right| = \frac{|(2 - 3i)^4| \, |(1 - i)^3|}{|5 + i \quad 3|}$$

$$|z| = \frac{|2 - 3i|^4 \, |1 - i|^3}{(5 + 3)} = \frac{(4 + 9)^4 \, (1 + 1)^3}{8} = 13^4$$

24. Dados los complejos z y w con $|z| = 1$, demostrar que:

$$\left| \frac{z + w}{1 + \bar{z}\, w} \right| = 1$$

Solución

De $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, resulta $z = 1/\bar{z}$,

entonces:

$$z + w = \frac{1}{\bar{z}} + w = (1 + \bar{z}\,w)/\,\bar{z}$$

luego

$$(z + w)/(1 + \bar{z}\,w) = (1 + \bar{z}\,w)/\bar{z}(1 + \bar{z}\,w) = 1/\bar{z}$$

así:

$$\left|\frac{z + w}{1 + \bar{z}\,w}\right| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = |z| = 1$$

25. Sabiendo que: $|z_1| = |z_2| = \dots\dots = |z_n| = 1$, demostrar que:

$$|z_1 + z_2 + \dots\dots + z_n| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots\dots + \frac{1}{z_n}\right|$$

Solución

Para todo complejo z se tiene $|z| = |\bar{z}|$, luego:

$$|z_1 + z_2 + \dots\dots + z_n| = |\overline{z_1 + z_2 + \dots\dots + z_n}|$$

$$|z_1 + z_2 + \dots\dots + z_n| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots\dots + \bar{z}_n| \qquad \text{(a)}$$

Considerando que por hipótesis $|z_j| = 1$, para $j = 1, 2, \dots\dots n$, resulta que:

$$z_j \cdot \bar{z} = |z_j|^2 = 1 \qquad \text{implica} \qquad \bar{z}_j = \frac{1}{z_j} \qquad \text{(b)}$$

finalmente reemplazando (b) en (a), obtenemos:

$$|z_1 + z_2 + \dots\dots z_n| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots\dots + \frac{1}{z_n}\right|$$

26. Demostrar que para todo par de complejos z y w se tiene:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

Solución

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w})$$

$$|z + w|^2 = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + (z\bar{w} + \bar{z}w)$$

Análogamente se encuentra

$$|z - w|^2 = z\bar{z} + w\bar{w} - z\bar{w} - \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \bar{z}w)$$

y sumando se tiene la tesis propuesta

27. Sabiendo que todo par de complejos z_1 y z_2 verifica la igualdad:

$$2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$$

demostrar que todo par de complejos a y b verifica la igualdad.

$$|a + \sqrt{a^2 - b^2}| + |a - \sqrt{a^2 - b^2}| = |a + b| + |a - b|$$

Solución

Sea: $z_1 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$ y $z_2 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$, entonces:

$z_1 + z_2 = 2a$ $\qquad z_1 - z_2 = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ $\qquad z_1 \cdot z_2 = b^2$

Además:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}\,|2a|^2 + \frac{1}{2}\,|2\sqrt{a^2-b^2}|^2 = 2\,|a|^2+2|a^2-b^2| \quad (1)$$

Por otra parte, aprovechemos (1) y la hipótesis en:

$$\begin{aligned}(|a+\sqrt{a^2-b^2}\,|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|)^2 &= (|z_1|+|z_2|)^2\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\\ &= 2\,|a|^2+2|a^2-b^2|+2|b^2|\\ &= 2\,|a|^2+2|b|^2+2|a^2-b^2|\\ &= |a+b|^2+|a-b|^2+2|a+b||a-b|\\ &= (|a+b|+|a-b|)^2\end{aligned}$$

De donde tomando la raíz cuadrada positiva de esta igualdad se tiene la tesis.

28. Sabiendo que todo par de complejos p y q verifica la igualdad:

$$|p+\sqrt{p^2-q^2}\,|+|p-\sqrt{p^2-q^2}\,| = |p+q|+|p-q|$$

demostrar que todo par de complejos a y b verifica la igualdad:

$$\left|\frac{a+b}{2}+\sqrt{a\cdot b}\,\right|+\left|\frac{a+b}{2}-\sqrt{a\cdot b}\right| = |a|+|b|$$

Solución

Haciendo: $p + q = a$ y $p - q = b$, resulta

$p - (a + b)/2$, $q = (a - b)/2$, $p^2 - q^2 = \sqrt{a \cdot b}$

Reemplazando estos valores en la igualdad dada se obtiene la igualdad propuesta.

29. Si a es un complejo de módulo menor que uno. ($|a| < 1$), demostrar que:

$$\left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}\,z}\right|$$

es menor, igual o mayor que 1, según sea $|z|$ menor, igual o mayor que uno.

Solución

$$|z - a|^2 = (z - a)(\overline{z - a}) = |z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2$$

$$|1 - \bar{a}\,z|^2 = (1 - \bar{a}\,z)(\overline{1 - \bar{a}\,z}) = 1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |az|^2$$

$$|z - a|^2 - |1 - a\,z|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |a|^2) \quad \text{con } |a| < 1$$

$$\left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| = 1 + \frac{(|z|^2 - 1)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} \qquad \text{con } |a| < 1$$

Considerando que $(1 - |a|^2)$ y $|1 - \bar{a}z|$ son positivos, tenemos que el módulo del primer miembro será menor, igual o mayor que 1, según que $|z|$ sea menor, igual o mayor que uno.

30. Si x es un número real tal que: $-1 < x < 1$, demostrar que:

$$|z| = |1 + ix + i^2x^2 + i^3x^3 + \ldots| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Solución

Aprovechando la expresión que nos dá la suma de una serie geométrica, el módulo pedido se expresa por:

$$|z| = |(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots) + i\,(x - x^3 + x^5 - x^7 + \ldots)|$$

$$|z| = \left|\frac{1}{1 + x^2} + i\,\frac{x}{1 + x^2}\right| = \sqrt{\frac{1 + x^2}{(1 + x^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

31. La ecuación: $x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$ tiene una raíz compleja cuyo módulo es 13. Determinar las tres raíces de la ecuación.

Solución

Sea $z = a + ib$ la raíz compleja cuyo módulo es 13, entonces $\bar{z} = a - ib$ también debe ser raíz de la ecuación.

Finalmente la tercera raíz debe ser necesariamente un número real c. Aprovechando las propiedades de las raíces de toda ecuación algebraica tenemos

$$(a + bi) + (a - bi) + c = 9$$

$$(a + bi)(a - bi)\ c = 65$$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = 13$$

Resolviendo el sistema se encuentra sin dificultad que:

$z_1 = 2 + 3i \qquad z_2 = 2 - 3i \qquad z_3 = 5$

32. Demostrar que todo número complejo z de módulo r con $(z \neq - r)$ se puede poner en la forma

$$z = r\,\frac{1 + it}{1 - it}$$

siendo t un número real.

<u>Solución</u>

Llamando α al argumento de z tenemos:

$$z = r\ (\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha) = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + i\ \text{sen}\ \frac{\alpha}{2}}{\cos(-\frac{\alpha}{2}) + i\ \text{sen}(-\frac{\alpha}{2})}\ r$$

de donde simplificando por cos $\alpha/2$ que no es nulo, queda:

$$z = \frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha/2}{1 - i \operatorname{tg} \alpha/2} r = r \frac{1 + it}{1 - it} \qquad \text{con} \quad t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$$

33. Si $z + 1/z = 2 \cos a$, demostrar que: $z^n + 1/z^n = 2 \cos na$.

Solución

La condición dada se puede poner en la forma:

$$z^2 - 2z \cos a + 1 = 0$$

de donde despejando z, se tiene:

$$z = \cos a \pm \sqrt{\cos^2 a - 1} = \cos a \pm i \operatorname{sen} a$$

Así entonces tomando únicamente el signo positivo resulta:

$$z^n = \cos na + i \operatorname{sen} na$$

$$z^{-n} = \cos na - i \operatorname{sen} na$$

de donde sumando queda: $z^n + z^{-n} = 2 \cos na$.

34. Sea $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio a coeficientes reales, tal que $p(z) = a + ib$. Demuestre que $p(\bar{z}) = a - ib$.

Solución

De inmediato tenemos:

$$p(\bar{z}) = a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \ldots\ldots + a_n \bar{z}^n$$

$$p(\bar{z}) = a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 (\overline{z^2}) + \ldots\ldots + a_n (\overline{z^n})$$

$$p(\bar{z}) = \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_n z^n} = \overline{p(z)} = a - ib$$

pues sabemos que el conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados y el conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados.

De aquí se desprende que si una ecuación a coeficientes reales admite una raíz compleja z también admite como raíz a $\bar{z}$.

35. Determinar la parte real y la imaginaria de cada uno de los complejos: $z = \sqrt{i}$ y $w = 1/\sqrt{i}$.

Solución

Sea $\sqrt{i} = z = (x, y)$, entonces:

$i = (0, 1) = (x^2 - y^2 , 2xy)$

luego:

$$2xy = 1 \qquad x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$$

La primera de estas ecuaciones nos indica que x e y deben tener el mismo signo, entonces de la segunda sólo se obtiene $x = y$. Así tenemos:

$2xy = 2x^2 = 2y^2 = 1$ $\qquad$ $x = y = 1/\sqrt{2}$

de donde:

$$z = \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}\ (1,1)$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}\ (1-i)}{2} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}\ (1,\ -1)$$

36. Demuestre que el producto de las n raíces de la ecuación $x^n = a$ es $p = (-1)^{n+1}$ a. (a = positivo)

Solución

Las n raíces de $x^n = a$ están dadas por:

$$x_k = \sqrt[n]{a}\ (\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots (n-1), n.$$

Haciendo $\sqrt[n]{a} = \alpha$ y observando que

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

es una raíz n-ésima de la unidad, tenemos:

$$p = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n = (\alpha w)\cdot(\alpha w^2)\cdot(\alpha w^3)\ldots\ldots(\alpha w^n)$$

$$p = \alpha^n \cdot w^{1+2+3+\ldots\ldots+n} = a\ w^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$p = a \quad \cos(n+1)\pi + i \operatorname{sen}\ (n+1)\pi \quad = a(-1)^{n+1}$$

37. Resolver la ecuación:

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(- \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^x = 2$$

Solución

Dando a los complejos forma polar, la ecuación se reduce a:

$$\cos \frac{\pi}{3} x + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} x + \cos \frac{4\pi}{3} x + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} x = 2$$

y luego a

$$\cos \frac{5\pi}{6} x \cdot \cos \frac{\pi}{2} x + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} x \cdot \cos \frac{\pi}{2} x = 1 + i \cdot 0$$

de donde igualando partes reales e imaginarias queda:

$$\cos \frac{5\pi}{6} x \cdot \cos \frac{\pi}{2} x = 1 \qquad \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} x \cdot \cos \frac{\pi}{2} x = 0$$

Resolviendo este sistema se encuentra como única solución $x = 0$.

38. Expresar en forma polar el complejo

$$z = (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta) + i (\cos \alpha - \cos \beta)$$

Solución

Sea $z = r (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)$, entonces:

$$r^2 = x^2 + y^2 = (\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2$$

$$r^2 = 2 - 2 (\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta + \cos \alpha \cos \beta)$$

$$r^2 = 2 - 2 \cos (\alpha - \beta) = 2 \{1 - \cos (\alpha - \beta)\}$$

$$r^2 = 2 \cdot 2 \text{ sen}^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad r = 2 \text{ sen } \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Además:

$$\cos \phi = \frac{\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta}{2 \text{ sen } (\alpha - \beta)/2} \qquad \text{sen } \phi = \frac{\cos \alpha - \text{sen } \beta}{2 \text{ sen } (\alpha - \beta)/2}$$

o sea:

$$\cos \phi = \frac{2 \cos (\alpha + \beta)/2 \cdot \text{sen } (\alpha - \beta)/2}{2 \text{ sen } (\alpha - \beta)/2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{-2 \text{ sen } (\alpha + \beta)/2 \cdot \text{sen } (\alpha - \beta)/2}{2 \text{ sen } (\alpha - \beta)/2} = -\text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2}$$

entonces:

$$z = 2 \text{ sen } \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - i \text{ sen } \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

39. Determinar módulo y argumento del complejo

$$z = \cos \alpha + i \text{ sen } \alpha - 1$$

Solución

Sea $z = r (\cos \phi + i \text{ sen } \phi) = (\cos \alpha - 1) + i \text{ sen } \alpha$

entonces:

$$r \cos\phi = \cos\alpha - 1 \qquad r \operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\alpha$$

elevando al cuadrado y sumando, resulta

$$r^2 = (\cos\alpha - 1)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 2(1 - \cos\alpha) = 4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

Por otra parte eliminando r, se tiene:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = -\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = -\cot\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Así: $r = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ y $\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$

40. Demostrar que la suma de las raíces cúbicas del complejo $z = 23\,(1 + i\sqrt{3})$ es nula.

Solución

Dando forma polar al complejo obtenemos:

$$z = 23\,(1 + i\sqrt{3}) = 46\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

de donde:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{46}\left(\cos\frac{\pi + 6k\pi}{9} + i\operatorname{sen}\frac{\pi + 6k\pi}{9}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2$$

Llamando z_1, z_2 y z_3 las raíces, tenemos:

$$z_1 = \sqrt[3]{46}\operatorname{cis}\frac{\pi}{9} \qquad z_2 = \sqrt[3]{46}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{9} \qquad z_3 = \sqrt[3]{46}\operatorname{cis}\frac{13\pi}{9}$$

luego:

$$z_1 + z_2 + z_3 = \sqrt[3]{46}\ (\text{cis } \frac{\pi}{9} + \text{cis } \frac{7\pi}{9} + \text{cis } \frac{13\pi}{9})$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = \sqrt[3]{46}\ \text{cis } \frac{\pi}{9} \cdot (1 + \text{cis } \frac{6\pi}{9} + \text{cis } \frac{12\pi}{9})$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1 - (\text{cis } \frac{\pi}{9})^{18}}{1 - (\text{cis } \frac{\pi}{9})^{6}} \cdot \sqrt[3]{46}\ \ \text{cis } \frac{\pi}{9}$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1 - \cos 2\pi - i \text{ sen } 2\pi}{1 - \cos\frac{2\pi}{3} - i \text{ sen}\frac{2\pi}{3}}\ \sqrt[3]{46}\ \text{cis } \frac{\pi}{9} = 0$$

41. Demostrar que: $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$

Solución

Dando forma polar a los complejos $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ y $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, fácilmente se encuentra:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\ (\cos \frac{\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\pi}{3})$$

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\ (\cos \frac{\pi}{3} - i \text{ sen } \frac{\pi}{3})$$

de donde:

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n\ (\cos \frac{n\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{n\pi}{3})$$

$$(1 - i\sqrt{3})^n = 2^n\ (\cos \frac{n\pi}{3} - i \text{ sen } \frac{n\pi}{3})$$

Sumando estas igualdades se tiene la tesis.

42. Si x es número real y n entero positivo, resolver la ecuación:

$$\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right)^n = 1$$

Solución

$$\frac{1 + ix}{1 - ix} = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$$

$$\frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{\cos\frac{k\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}}{\cos(-\frac{k\pi}{n}) + i\ \mathrm{sen}(-\frac{k\pi}{n})} = \frac{\cos\frac{k\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}}{\cos\frac{k\pi}{n} - i\ \mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}}$$

$$\frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{1 + i\ \mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}}{1 - i\ \mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,(n - 1)$$

Así las raíces de la ecuación propuesta son:

$$x = \mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \ldots,(n - 1)$$

43. Determinar las raíces de la ecuación

$$(x + 1)^n - (x - 1)^n = 0$$

Solución

La ecuación puede ponerse en la forma:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = 1 \qquad \frac{x+1}{x-1} = \sqrt[n]{1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{1 + i\ \mathrm{tg}\ \frac{k\pi}{n}}{1 - i\ \mathrm{tg}\ \frac{k\pi}{n}} \qquad x = -i \cot \frac{k\pi}{n}$$

y dando a k los valores: 0, 1, 2, 3, ..., (n - 1).

44. Si $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \psi = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \psi = 0$, usando números complejos demostrar que:

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\psi = 3 \cos (\alpha + \beta + \psi)$$

$$\operatorname{sen} 3\alpha + \operatorname{sen} 3\beta + \operatorname{sen} 3\psi = 3 \operatorname{sen} (\alpha + \beta + \psi)$$

Solución

Aprovechando que:

$x = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \psi = 0 \qquad y = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \psi = 0$

resulta: $x + iy = \operatorname{cis} \alpha + \operatorname{cis} \beta + \operatorname{cis} \psi = 0$

Entonces elevando al cubo: $-\operatorname{cis} \alpha = \operatorname{cis} \beta + \operatorname{cis} \psi$

queda:

$$-\operatorname{cis}3\alpha = \operatorname{cis}3\beta + 3(\operatorname{cis}\beta)^2 \operatorname{cis}\psi + 3\operatorname{cis}\beta\ (\operatorname{cis}\psi)^2 + \operatorname{cis} 3\psi$$

o bien:

$$\text{cis } 3\alpha + \text{cis } 3\beta + \text{cis } 3\psi = -3\text{cis}\beta \text{ cis}\psi \ (\text{cis}\beta + \text{cis } \psi)$$

$$\text{cis } 3\alpha + \text{cis } 3\beta + \text{cis } 3\psi = -3\text{cis}(\beta+\psi)\cdot(\text{cis}\alpha+\text{cis}\beta+\text{cis}\psi-\text{cis}\alpha)$$

$$\text{cis } 3\alpha + \text{cis } 3\beta + \text{cis } 3\psi = 3 \text{ cis } (\beta + \psi) \text{ cis } \alpha$$

$$\text{cis } 3\alpha + \text{cis } 3\beta + \text{cis } 3\psi = 3 \text{ cis } (\alpha + \beta + \psi)$$

Finalmente separando partes reales e imaginarias se obtienen las igualdades pedidas.

45. Si $z_1 = \text{cis } \alpha$, $z_2 = \text{cis } \beta$, $z_3 = \text{cis } \psi$, demostrar que

$$(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1) = 8 \ z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \ \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\beta-\psi}{2} \cos \frac{\psi-\alpha}{2}$$

Solución

Sin dificultad se encuentra:

$$z_1 = \cos \alpha + i \text{ sen } \alpha \qquad \sqrt{z_1} = \cos \frac{\alpha}{2} + i \text{ sen } \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{z_1} = \cos \alpha - i \text{ sen } \alpha \qquad \sqrt{\frac{1}{z_1}} = \cos \frac{\alpha}{2} - i \text{ sen } \frac{\alpha}{2}$$

de donde:

$$\sqrt{\frac{z_1}{z_2}} + \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} = 2 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \text{sen } \frac{\alpha}{2} \text{ sen } \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{\sqrt{z_1\ z_2}} + \frac{z_2}{\sqrt{z_1\ z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{\sqrt{z_1 \cdot z_2}} = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

En forma similar se obtiene:

$$\frac{z_1 + z_3}{\sqrt{z_1 \cdot z_3}} = 2 \cos \frac{\beta - \psi}{2} \qquad \frac{z_3 + z_1}{\sqrt{z_1 \cdot z_3}} = 2 \cos \frac{\psi - \alpha}{2}$$

Finalmente multiplicando miembro a miembro estas igualdades se tiene la expresión pedida.

46. Usando números complejos demostrar que:

$$\operatorname{sen}^4 \alpha \cos^3 \alpha = \frac{1}{64} (\cos 7\alpha - \cos 5\alpha - 3\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha)$$

Solución

Tomando el complejo $z = \operatorname{cis} \alpha$ de módulo uno, tenemos:

$z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \qquad z^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$

$\bar{z} = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha \qquad \bar{z}^n = \cos n\alpha - i \operatorname{sen} n\alpha$

entonces:

$$z + \bar{z} = 2 \cos \alpha \qquad z^n + \bar{z}^n = 2 \cos n\alpha$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{sen} \alpha \qquad z^n - \bar{z}^n = 2i \operatorname{sen} n\alpha$$

$$z \cdot \bar{z} = 1 \qquad z^n \cdot \bar{z}^n = 1$$

y de aquí que:

$$(2\ i\ \text{sen}\ \alpha)^4\ (2\cos\alpha)^3 = (z-\bar{z})^4\ (z+\bar{z})^3$$

$$= \{(z-\bar{z})\ (z+\bar{z})\}^3\ (z-\bar{z})$$

$$= (z^2-\bar{z}^2)^3\ (z-\bar{z})$$

O sea:

$$16\cdot 8\ \text{sen}^4\alpha\ \cos^3\alpha = (z^6-3z^4\ \bar{z}^2+3z^2\ \bar{z}^4-\bar{z}^6)\ (z-\bar{z})$$

$$128\ \text{sen}^4\alpha\ \cos^3\alpha = (z^7+\bar{z}^7)+3z^3\bar{z}^3(z+\bar{z})-3z^2\bar{z}^2(z^3+\bar{z}^3)-z\bar{z}(z^5+\bar{z}^5)$$

$$128\ \text{sen}^4\alpha\ \cos^3\alpha = 2\cos 7\alpha + 6\cos\alpha - 6\cos 3\alpha - 2\cos 5\alpha$$

Finalmente dividiendo por 2 se tiene la tesis.

Demostrar que:

(a). $32\cos^6\alpha = \cos 6\alpha + 6\cos 4\alpha + 15\cos 2\alpha + 10$

(b). $128\ \text{sen}^5\alpha\cos^3\alpha = \text{sen}\ 8\alpha - 2\ \text{sen}\ 6\alpha - 2\ \text{sen}\ 4\alpha - 6\ \text{sen}\ 2\alpha$

47. Demostrar que:

$$C = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\text{sen}\ \frac{n\alpha}{2}}{\text{sen}\ \frac{\alpha}{2}} \cos\frac{n+1}{2}\alpha$$

$$S = \text{sen}\ \alpha + \text{sen}\ 2\alpha + \ldots + \text{sen}\ n\alpha = \frac{\text{sen}\ \frac{n\alpha}{2}}{\text{sen}\ \frac{\alpha}{2}}\ \text{sen}\ \frac{n+1}{2}\alpha$$

Solución

Multiplicando S por i, y sumando queda:

$$C + i\,S = \text{cis}\,\alpha + \text{cis}\,2\,\alpha + \ldots\ldots + \text{cis}\,n\,\alpha$$

$$C + i\,S = \frac{\text{cis}\,\alpha\,(\text{cis}\,n\alpha - 1)}{\text{cis}\,\alpha - 1}$$

$$C + i\,S = \frac{\text{cis}\,\alpha\,(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha - 1)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha - 1}$$

$$C + i\,S = \frac{\text{cis}\,\alpha\,\{-2\text{sen}^2(n\,\alpha/2)+2i\,\text{sen}(n\,\alpha/2)\cos(n\,\alpha/2)\}}{-2\text{sen}^2\,(\alpha/2)+2i\,\text{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}$$

$$C + i\,S = \frac{\text{sen}\,\frac{n\alpha}{2}}{\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\frac{n+1}{2}\,\alpha + i\,\text{sen}\,\frac{n+1}{2}\,\alpha\right)$$

Finalmente separando partes reales e imaginarias resultan las igualdades propuestas.

Demostrar que:

$$C = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha+\overline{n-1}\beta) = \frac{\text{sen}\frac{n\beta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\beta}{2}}\cos(\alpha+\overline{n-1}\tfrac{\beta}{2})$$

$$S = \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,(\alpha+\beta) + \ldots + \text{sen}(\alpha+\overline{n-1}\beta) = \frac{\text{sen}\frac{n\beta}{2}}{\text{sen}\,\frac{\beta}{2}}\text{sen}(\alpha+\overline{n-1}\tfrac{\beta}{2})$$

48. Usando números complejos demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos (\alpha + k\beta) = 2^n \cos^n \frac{\beta}{2} \cos \left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)$$

Solución

Desarrollando el primer miembro de la suma propuesta tenemos:

$$C = \binom{n}{0} \cos \alpha + \binom{n}{1} \cos (\alpha + \beta) + \ldots + \binom{n}{n} \cos (\alpha + n\beta)$$

Tomando la expresión S que se indica:

$$S = \binom{n}{0} \operatorname{sen} \alpha + \binom{n}{1} \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \ldots. + \binom{n}{n} \operatorname{sen} (\alpha + n\beta)$$

multiplicando por i y sumando, se obtiene:

$$C + i\,S = \binom{n}{0} \operatorname{cis} \alpha + \binom{n}{1} \operatorname{cis} (\alpha + \beta) + \ldots + \binom{n}{n} \operatorname{cis}(\alpha+n\beta)$$

$$C + i\,S = \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \operatorname{cis} \beta + \ldots. + \binom{n}{n} \operatorname{cis} n\beta\right\} \operatorname{cis} \alpha$$

$$C + i\,S = (1 + \operatorname{cis} \beta)^n \operatorname{cis} \alpha = 2^n \cos^n \frac{\beta}{2} \operatorname{cis} \frac{\beta}{2} \operatorname{cis} \alpha$$

$$C + i\,S = 2^n \cos^n \frac{\beta}{2} \left\{\cos \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + i \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right\}$$

De aquí separando partes reales e imaginaria se tiene la igualdad propuesta.

49. Demostrar que en todo triángulo ABC en el cual $0 < b < c$, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b}{c}\right)^{k-1} \operatorname{sen} k\,\alpha = \frac{c}{a} \operatorname{sen} \psi$$

Solución

Consideremos las dos series geométricas convergentes:

$$S = \operatorname{sen} \alpha + \frac{b}{c} \operatorname{sen} 2\,\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \operatorname{sen} 3\,\alpha + \ldots\ldots.$$

$$C = \cos \alpha + \frac{b}{c} \cos 2\,\alpha + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \cos 3\,\alpha + \ldots\ldots.$$

De aquí se obtiene sin dificultad que:

$$C + i\,S = \frac{c\,(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{c - b \cos \alpha - ib \operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\operatorname{cis} \alpha}{\operatorname{cis}(-\beta)}$$

ya que en todo triángulo se tiene:

$c - b \cos \alpha = a \cos \beta$ y $b \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen} \beta$

Finalmente considerando que: $\alpha + \beta = \pi - \psi$, se tiene:

$$C + i\,S = \frac{c}{a}\{\cos(\pi - \psi) + i \operatorname{sen}(\pi - \psi)\}$$

y separando partes reales e imaginarias resulta la tesis.

50. Si $w_1, w_2, w_3, \ldots.., w_n$ son las raíces n-ésimas de la unidad, demostrar que:

$$\frac{1}{1 - w_1 x} + \frac{1}{1 - w_2 x} + \ldots\ldots + \frac{1}{1 - w_n x} = \frac{n}{1 - x^n}$$

Solución

Si w_j es una de las raíces n-ésimas de la unidad la progresión geométrica de razón: xw_j nos dá:

$$\frac{1}{w_j^{\,n}} + \frac{x}{w_j^{\,n-1}} + \frac{x^2}{w_j^{\,n-2}} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{w_j} = \frac{1 - x^n w_j^{\,n}}{(1-xw_j)\,w_j^{\,n}} = \frac{1 - x^n}{1 - xw_j}$$

Dando a j los valores 1, 2, 3, ... n, obtenemos:

$$\frac{x^{n-1}}{w_1} + \frac{x^{n-2}}{w_1^2} + \frac{x^{n-3}}{w_1^{\,3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{w_1^{\,n}} = \frac{1 - x^n}{1 - xw_1}$$

$$\frac{x^{n-1}}{w_2} + \frac{x^{n-2}}{w_2^{\,2}} + \frac{x^{n-3}}{w_2^{\,3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{w_2^{\,n}} = \frac{1 - x^n}{1 - xw_2}$$

- -

$$\frac{x^{n-1}}{w_n} + \frac{x^{n-2}}{w_n^{\,2}} + \frac{x^{n-3}}{w_n^{\,3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{w_n^{\,n}} = \frac{1 - x^n}{1 - xw_n}$$

Sumando estas igualdades miembro a miembro y observando que la suma de cada columna del primer miembro es cero, menos la última que es n, resulta:

$$n = (1 - x^n)\ \left\{\frac{1}{1 - xw_1} + \frac{1}{1 - xw_2} + \ldots + \frac{1}{1 - xw_n}\right\}$$

51. Si w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad demostrar que:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{w}{w-x}+\frac{w^2}{w^2-x}+\ldots\ldots+\frac{w^{n-1}}{w^{n-1}-x}=\frac{n}{1-x^n}$$

<u>Solución</u>

Si $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ son las raíces de $x^n = 1$, sabemos que:

$$\frac{1}{1-w_1x}+\frac{1}{1-w_2x}+\frac{1}{1-w_3x}+\ldots\ldots+\frac{1}{1-w_nx}=\frac{n}{1-x^n}$$

Sea $w_1 = w$, entonces: $w_2 = w^2$; $w_3 = w^3$; $\ldots .w_n = w^n$ y la igualdad anterior se expresa por:

$$\frac{1}{1-wx}+\frac{1}{1-w^2x}+\frac{1}{1-w^3x}+\ldots\ldots+\frac{1}{1-w^nx}=\frac{n}{1-x^n}$$

Amplificando la primera fracción por w^{n-1}, la segunda por w^{n-2}, la tercera por w^{n-3} y así sucesivamente se tiene:

$$\frac{w^{n-1}}{w^{n-1}-x}+\frac{w^{n-2}}{w^{n-2}-x}+\ldots\ldots+\frac{w}{w-x}+\frac{1}{1-x}=\frac{n}{1-x^n}$$

52. Si $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ son las raíces n-ésimas de la unidad y k un entero, calcular la suma:

$$S = w_1{}^k + w_2{}^k + w_3{}^k + \ldots.+ w_n{}^k$$

Solución

Si k es múltiplo de n, será de la forma $k = pn$ donde p es número entero, entonces para todo w_j tenemos:

$$w_j{}^k = w_j{}^{np} = (w_j{}^n)^p = 1 \qquad \forall \; j = 1,2,3,\ldots.n$$

y en este caso la suma pedida es $S = n$

Consideremos ahora el caso en que k no es múltiplo de n. Si α es una raíz primitiva de orden n de la unidad, las demás raíces serán: α^2, α^3, ... α^n

Entonces tendremos:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j{}^k = \alpha^k + \alpha^{2k} + \alpha^{3k} + \ldots..+ \alpha^{nk} = \frac{\alpha^k(1 - \alpha^{nk})}{1 - \alpha^k}$$

Ahora considerando que $\alpha^{nk} = (\alpha^n)^k = 1$, la suma pedida, en este caso resulta ser: $S = 0$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.., \alpha_n$ son las raíces de la ecuación $x^n = a$, calcular la suma:

$$S = \alpha_1{}^k + \alpha_2{}^k + \ldots. + \alpha_n{}^k$$

53. Determine que curva debe recorrer el complejo z para que $w = (z + 1)/(z - 1)$ sea imaginario puro.

Solución

$$\text{Sea } z = x + iy, \quad \text{entonces:}$$

$$w = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{x^2+y^2-1-2\,yi}{(x-1)^2+y^2}$$

y para que este complejo sea imaginario puro debe ser: $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Así z debe recorrer una circunferencia con centro en el origen y radio uno.

54. Sea $\alpha = a + ib$ un complejo fijo y $z = x + iy$ un complejo que recorra la recta $y = mx + n$.

Determinar que curva recorre el complejo $w = \alpha + z$.

Solución

Considerando que $z = x + iy = x + i(mx + n)$, resulta que:

$$u + iv = w = a + ib + x + i\,(mx + n)$$

de donde:

$$u = a + x \qquad\qquad v = mx + n + b$$

eliminando x entre estas dos igualdades, obtenemos

$$v = mu + (n + b - m\alpha)$$

Ecuación que nos indica que $w = u + iv$ recorre una recta paralela a la recta $y = mx + n$.

55. La suma de dos complejos variables z_1 y z_2 dividida por la diferencia de ellos da un imaginario puro. Demuestre que los complejos z_1 y z_2 se desplazan sobre una circunferencia con centro en el origen.

<u>Solución</u>

Sean los complejos $z_1 = (x_1, x_2)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces:

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)}$$

$$\frac{z_1 + z_2}{z - z} = \frac{(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) + i\ [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

y para que este complejo sea imaginario puro, debe ser:

$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$ o sea $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$

resultado que nos muestra que $|z_1| = |z_2|$, o sea z_1 y z_2 se desplazan sobre una misma circunferencia con centro en el origen.

56. Un complejo $z = x + iy$ se mueve sobre la recta $3x + 4y + 5 = 0$. Demostrar que el valor mínimo de $|z|$ es uno.

Solución

Sabemos que $|z|$, geométricamente representa la distancia de z al origen. Como z recorre la recta $3x+4y+5 = 0$, el número real $|z|$ es la longitud del trazo que une el punto z de la recta con el origen. Obviamente este trazo $|z|$ tendrá longitud mínima cuando él sea la distancia del origen $(0,0)$ a la recta $3x + 4y + 5 = 0$, así entonces;

$$\text{mínimo } |z| = \frac{5}{\sqrt{9 + 16}} = 1$$

57. Un complejo $z = x + iy$ se desplaza en el plano xy de modo que $|2z - 1| = |z - 2|$, determinar que curva recorre.

Solución

La condición impuesta se expresa por:

$$|(2x - 1) + 2yi| = |(x - 2) + yi|$$

$$(2x - 1)^2 + 4y^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

Efectuando las operaciones indicadas se obtiene:

$x^2 + y^2 = 1$, resultado que nos indica que z recorre una circunferencia con centro en el origen y radio uno.

58. Determinar el lugar geométrico de un complejo $z = x + iy$ que verifica la condición: $|(1 + i)z - (1 + 3i)| \leqslant 1$.

<u>Solución</u>.

El complejo z es tal que el módulo de:

$w = (1 + i)(x + iy) - (1 + 3i) = (x - y - 1) + i(x + y - 3)$

verifica la condición:

$$(x - y - 1)^2 + (x + y - 3)^2 \leqslant 1$$

o sea:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

Así el L.G. del complejo z es un circulo de centro $(2,1)$ y radio $1/\sqrt{2}$.

59. Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad, demostrar que los puntos:

$$z_1 = 1 - w \qquad z_2 = w - w^2 \qquad z_3 = w^2 - 1$$

son los vértices de un triángulo equilátero.

<u>Solución</u>

Sea $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$, entonces:

$$z_2 = w - w^2 = (1 - w)\ w = z_1 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$$

$$z_3 = w^2 - 1 = w^2 - w^3 = (w - w^2)\ w = z_2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$$

Así z_2 es z_1 rotado en 120° y z_3 es z_2 rotado en 120°; o sea z_1, z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero.

60. Si w es una raíz cúbica compleja de la unidad, demostrar que el triángulo cuyos vértices son: z, zw, zw^2 es equilátero.

Solución

Como: 1, w y w^2 son las tres raíces cúbicas de la unidad, los complejos: z, zw y zw^2 son las raíces cúbicas del complejo $\alpha = z^3$. Siendo z, zw y zw^2 raíces cúbicas de un mismo complejo, ellas tienen todas el mismo módulo $|z| = |zw| = |zw^2|$; de aquí que los puntos z, zw, y zw^2 están en una misma circunferencia con centro en el origen y radio $|z|$.

Finalmente:

$\arg zw = \arg z + 120°$ $\qquad$ $\arg zw^2 = \arg z + 240°$

Así el triángulo de vértices: z, zw y zw^2 es un triángulo equilátero.

61. Los vértices A, B y C de un triángulo se mueven de modo que:

$$\frac{C - A}{C - B} = k_1 + ik_2 = k$$

donde k es constante. Demostrar que el triángulo ABC permanece semejante a si mismo.

Solución

De la condición dada resulta:

$$\left|\frac{C - A}{C - B}\right| = \frac{|C - A|}{|C - B|} = |k|$$

igualdad que nos indica que la razón entre los lados AC y BC es constante.

De la hipótesis también se tiene:

$$\arg \frac{C - A}{C - B} = \arg (C - A) - \arg (C - B) = \arg k$$

o sea: $\sphericalangle (ACB) = \arg k$; luego el ángulo que forman los lados AC y BC es constante y por lo tanto el triángulo ABC permanece semejante a si mismo.

62. Los complejos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ verifican siempre la igualdad:

$$w = z + \frac{a^2}{z} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Determinar que curva recorre w cuando z recorre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, con $r^2 \neq a^2$.

Solución

De la condición dada, se obtiene:

$$u = x + \frac{a^2 x}{r^2} \qquad\qquad v = y - \frac{a^2 y}{r^2}$$

entonces:

$$x = u \,/(1 + \frac{a^2}{r^2}) \qquad\qquad y = v \,/(1 - \frac{a^2}{r^2})$$

Ahora si z recorre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, tendremos:

$$\frac{u^2}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{v^2}{(r^2 - a^2)^2} = 1$$

resultado que nos indica que w recorre una elipse de semiejes $(r^2 + a^2)$ y $(r^2 - a^2)$.

63. Los complejos variables $z = x + iy$ y $w = u + iv$, verifican siempre la igualdad: $w = z^2 + a$, donde a es un real. Determinar el L.G. de w, cuando z recorre:

(a) La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

(b) La recta $x = y$

Solución

La condición $w = z^2 + a$, se expresa por:

$$u = x^2 - y^2 - a \qquad\qquad v = 2xy$$

Tomando primero $x^2 + y^2 = 1$ y eliminando x e y entre las tres igualdades se obtiene:

$$(u + a)^2 + v^2 = 1$$

resultado que nos indica que en este caso el L.G. de w es una circunferencia de radio uno y centro $(-a, 0)$.

Finalmente si z recorre la recta $x = y$, se obtiene:

$u = a$ y $v = 2x^2$. Estas ecuaciones muestran que w recorre una semirecta $u = a$, paralela al eje u con v no negativo.

64. Los complejos z y w verifican siempre la relación:

$$w = (4 + i) + \frac{3 - 3i}{z - 1}$$

Determinar el L.G. de w cuando z recorre

(a) La circunferencia: $|z| = 1$

(b) El eje de ordenadas.

Solución

De la condición dada se obtiene:

$$z = \frac{w - (1 + 4i)}{w - (4 + i)} = \frac{w - A}{w - B} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} A = 1 + 4i \\ B = 4 + i \end{array}$$

Ahora cuando $|z| = 1$, se obtiene:

$$|z| = \left|\frac{w - A}{w - B}\right| = \frac{|w - A|}{|w - B|} = 1$$

igualdad que nos indica que w recorre la simetral del trazo AB, pues $|w - A| = |w - B|$

Finalmente cuando z recorre el eje de ordenadas su argumento es $(+ \pi/2)$ o $(- \pi/2)$, luego:

$$\arg z = \arg \frac{w - A}{w - B} = \pm \frac{\pi}{2}$$

o sea los complejos $(w - A)$ y $(w - B)$ son ortogonales y entonces w recorre una circunferencia de diámetro AB.

65. Los complejos A y B son las raíces de la ecuación:

$$z^2 - (8 + 5i)\,z + (8 + 26i) = 0$$

Determinar un complejo $C = x + iy$, de tal modo que el triángulo ABC sea equilátero.

Solución

Resolviendo la ecuación se encuentra: $A = 6 + i$ y $B = 2 + 4i$. Ahora como el triángulo ABC es equilátero, tenemos $|AB| = |BC| = |CA|$ y considerando que:

$$|AB|^2 = |B - A|^2 = |-4 + 3i|^2 = 25$$

$$|BC| = |C - B|^2 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2$$

$$|CA| = |A - C|^2 = (x - 6)^2 + (y - 1)^2$$

se obtiene el sistema:

$$(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 25 \qquad (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

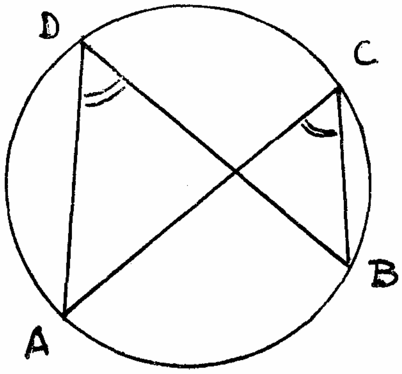
que nos dá las soluciones:

$$C_1 = \frac{8 + 3\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{5 + 4\sqrt{3}}{2} \qquad C_2 = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{5 - 4\sqrt{3}}{2}$$

66. Los cuatro números complejos A, B, C y D son concíclicos. Demostrar que el número $(C - A)(D - B) / (C - B)(D - A)$ es real.

Solución

Como los puntos A, B, C y D son concíclicos se tiene:



$$\sphericalangle\,(ACB) = \sphericalangle\,(ADB)$$

$$\arg \frac{C-A}{C-B} = \arg \frac{D-A}{D-B}$$

$$\arg \frac{C-A}{C-B} - \arg \frac{D-A}{D-B} = 0$$

O sea:

$$\arg \left(\frac{C - A}{C - B} : \frac{D - A}{D - B} \right) = 0$$

y esta igualdad es suficiente para afirmar que el número:

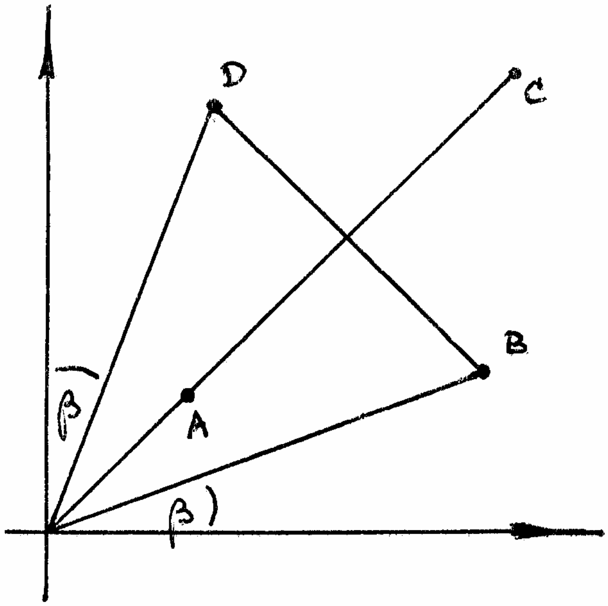
$$\frac{C - A}{C - B} : \frac{D - A}{D - B} = \frac{(C - A)}{(C - B)} \frac{(D - B)}{(D - A)}$$

es real, pues su argumento es nulo.

67. Los vértices opuestos A y C de un rombo $ABCD$ están dados por las raíces de la ecuación $z^2 - 6(1+i)z + 16i = 0$. Determinar una ecuación de segundo grado que dé los otros dos vértices.

Solución

Las raíces de la ecuación dada son $A = 2 + 2i$ y $C = 2(2 + 2i)$, de aquí que la diagonal AC es bisectriz del primer cuadrante. Ahora como AC y BD se dimidian,



tenemos:

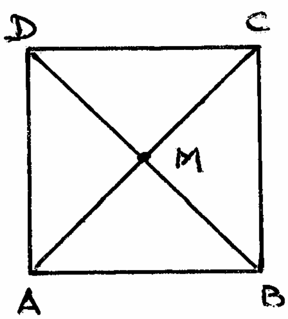
$B + D = A + C = 6(1 + i)$

Por otra parte el producto $B \cdot D$ debe ser imaginario puro (ver fig.) luego él debe ser de la forma: $B \cdot D = ai$, donde a es un real arbitrario. De las expresiones que dan $B + D$ y $B \cdot D$ se obtiene la ecuación pedida: $z^2 - 6(1 + i)\,z + ai = 0$.

Para que el real (a) quede determinado es necesario dar alguna condición adicional, por ejemplo, que: $2AC = BD$.

68. En un cuadrado ABCD, los vértices opuestos A y C son las raíces de la ecuación: $z^2 - (6 + 8i)\,z + (1 + 30i) = 0$. Determinar los otros dos vértices.

Solución



Resolviendo la ecuación se tiene:

$A = 4 + i \qquad C = 2 + 7i$

De aquí se obtiene para

el punto medio M de la diagonal AC, que $M = 3 + 4i$.

Entonces:

$MA = A - M = 1 - 3i$ $\qquad$ $MC = C - M = -1 + 3i$

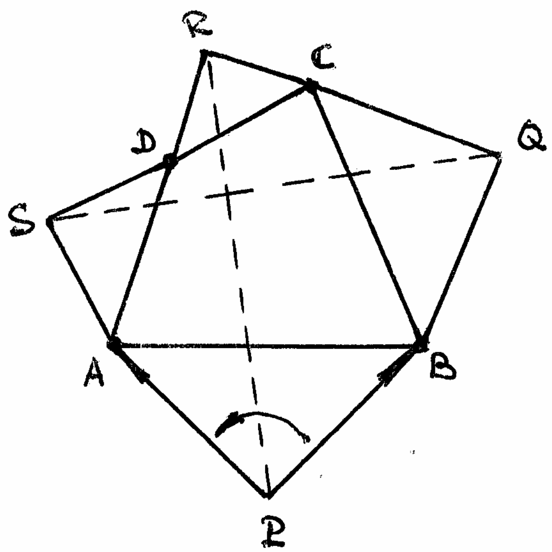
y como $MB = i\,MA$ $\quad$ y $\quad$ $MD = i\,MC$, resulta

$MB = B - M = 3 + i$ $\qquad$ $MD = D - M = -3 - i$

de donde: $B = 6 + 5i$ $\quad$ y $\quad$ $D = 3i$

69. Sobre los lados de un cuadrilátero $ABCD$ se construyen hacia el exterior triángulos rectángulos isósceles: ABP, BCQ, CDR y DAS. Demostrar que los trazos PR y QS son iguales y perpendiculares.

Solución



El vector PA es el vector PB rotado positivamente en 90°, luego:

$A - P = (B - \underline{P})\, i$

de aquí despejando $\underline{P}$ se obtiene: $P = \dfrac{A - Bi}{1 - i}$

De análoga manera resulta:

$$Q = \frac{B - Ci}{1 - i} \qquad R = \frac{C - Di}{1 - i} \qquad S = \frac{D - Ai}{1 - i}$$

entonces:

$$RP = P - R = \frac{(A - C) - (B - D)i}{1 - i}$$

$$SQ = Q - S = \frac{(B - D) - (C - A)i}{1 - i}$$

O sea: $(P - R) = i(Q - S)$, lo cual implica $|P - R| = |Q - S|$

y $PR \perp SQ$.

70. A, B, C, P, Q y R son números complejos tales que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

Demostrar que los triángulos ABC y PQR son semejantes.

<u>Solución</u>

De la condición dada se obtiene sin dificultad que:

$$\frac{C - A}{C - B} = \frac{R - P}{R - Q}$$

Esta igualdad de números complejos implica

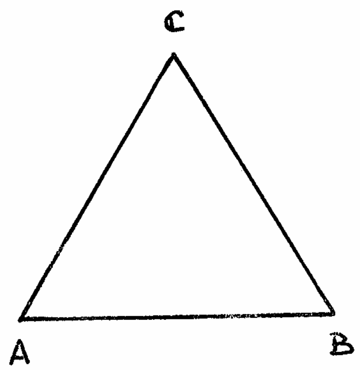
$$\frac{|C - A|}{|C - B|} = \frac{|R - P|}{|R - Q|} \quad \text{y} \quad \arg\frac{C - A}{C - B} = \arg\frac{R - P}{R - Q}$$

y estas igualdades muestran que los triángulos ABC y PQR tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual, lo que garantiza su semejanza.

71. Los complejos A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero. Demuestre que:

$$A^2 + B^2 + C^2 = A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

<u>Solución</u>



Como el triángulo ABC es equilátero, tenemos:

$$C-A = (B-A) \quad \text{cis } (\pi/3)$$
$$A-B = (C-B) \quad \text{cis } (\pi/3)$$
$$B-C = (A-C) \quad \text{cis } (\pi/3)$$

de donde:

$$\frac{C-A}{B-A} = \frac{A-B}{C-B} = \frac{B-C}{A-C} = \text{cis } (\pi/3)$$

Tomando estas igualdades dos a dos y multiplicando medios y extremos, resulta:

$$C^2 - C \cdot B - A \cdot C + A \cdot B = B \cdot A - B^2 - A^2 + A \cdot B$$
$$A^2 - A \cdot C - B \cdot A + B \cdot C = C \cdot B - C^2 - B^2 + B \cdot C$$
$$B^2 - B \cdot A - C \cdot B + C \cdot A = A \cdot C - A^2 - C^2 + C \cdot A$$

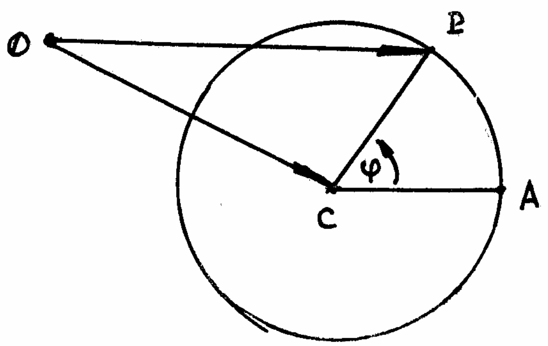
De donde sumando miembro a miembro se obtiene la igualdad propuesta.

72. Demostrar que una circunferencia de centro C y radio r, se puede expresar por:

$$P = C + \frac{1 + it}{1 - it} r$$

donde t es una variable real.

Solución



Sea $CA = r$ y $\sphericalangle (ACP) = \phi$ siendo P un punto cualquiera de la circunferencia.

Entonces:

$$OP = OC + CP$$

$$OP = OC + CA \ \text{cis}\ \phi$$

o sea:

$$P = C + r \ \text{cis}\ \phi = C + r \frac{\cos\frac{\phi}{2} + i \ \text{sen}\ \frac{\phi}{2}}{\cos(-\frac{\phi}{2}) + i \ \text{sen}\ (-\frac{\phi}{2})}$$

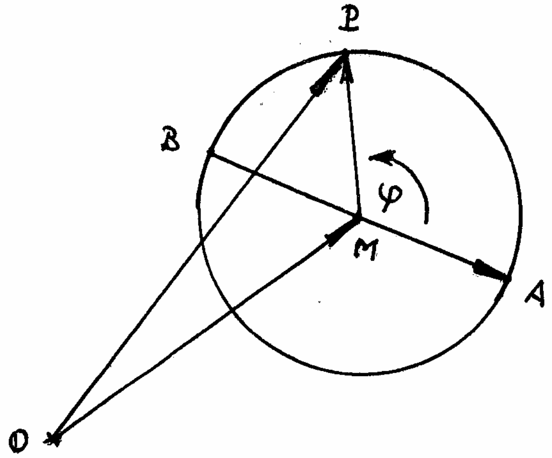
$$P = C + \frac{\cos\frac{\phi}{2} + i \ \text{sen}\ \frac{\phi}{2}}{\cos\frac{\phi}{2} - i \ \text{sen}\ \frac{\phi}{2}} r = C + \frac{1 + i \ \text{tg}\ (\phi/2)}{1 - i \ \text{tg}\ (\phi/2)} r$$

Finalmente haciendo $\text{tg}(\phi/2) = t$ se tiene la igualdad propuesta.

73. Si ϕ es variable , A y B complejos fijos, demostrar que la circunferencia de diámetro AB se expresa por:

$$2P = A(1 + \text{cis } \phi) + B(1 - \text{cis } \phi)$$

Solución



Sea M el punto medio del diámetro AB y P un punto cualquiera de la circunferencia, determinado por el ángulo variable

$$\sphericalangle (AMP) = \phi$$

Entonces:

$$OP = OM + MP = OM + MA \;\; \text{cis } \phi$$

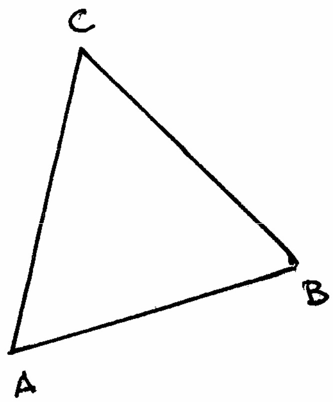
$$P = M + (A - M) \;\; \text{cis } \phi$$

$$P = \frac{A + B}{2} + \left(A - \frac{A + B}{2}\right) \;\; \text{cis } \phi$$

$$2P = A(1 + \text{cis } \phi) + B(1 - \text{cis } \phi)$$

74. Dados los complejos A y B determinar un complejo C, de tal modo que el triángulo ABC sea equilátero.

Solución



El complejo buscado C es tal que:

$$\frac{|C - A|}{|C - B|} = 1$$

$$\arg \frac{C - A}{C - B} = \frac{\pi}{3}$$

Es decir el complejo $(C - A)/(C - B)$ tiene módulo uno y argumento $(\pi/3)$, o sea:

$$\frac{C - A}{C - B} = \cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3) = \alpha$$

De aquí despejando C, se tiene la solución buscada:

$$C = \frac{A - \alpha\beta}{1 - \alpha}$$

Una comprobación simple de este resultado se obtiene tomando $A = -1$; y $B = 1$ ya que obviamente debe encontrarse

$$C = i\sqrt{3} \quad \text{o bien} \quad C = -i\sqrt{3}$$

75. Demostrar que en todo triángulo ABC se tiene:

$$a^3 \cos 3\beta + 3a^2 b \cos(\alpha - 2\beta) + 3ab^3 \cos(2\alpha-\beta)+b^3\cos 3\alpha = c^3$$

Solución

Fácilmente se establece que en todo triángulo se tiene:

$x = b \cos \alpha + a \cos \beta = c \qquad y = b \operatorname{sen} \alpha - a \operatorname{sen} \beta = 0$

De quí elevando al cubo el complejo: $x + iy$ resulta:

$$(x + iy)^3 = \{b \operatorname{cis} \alpha + a \operatorname{cis} (-\beta)\}^3 = c^3$$

O sea:

$$c^3 = b^3 \operatorname{cis} 3\alpha + 3b^2 a \operatorname{cis}(2\alpha - \beta) + 3\, ba^2 \operatorname{cis}(\alpha - 2\beta) + a^3 \operatorname{cis}(-3\beta)$$

De donde igualando partes reales queda:

$$c^3 = b^3 \cos 3\alpha + 3b^2 a \cos(2\alpha - \beta) + 3ba^2 \cos(\alpha - 2\beta) + a^3 \cos 3\beta$$