Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

А. Н. КОЛМОГОРОВ, С. В. ФОМИН

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» · МОСКВА

A. N. KOLMOGOROV
S. V. FOMIN

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES Y DEL ANALISIS FUNCIONAL

TRADUCIDO DEL RUSO POR
CARLOS VEGA,
catedrático de Matemáticas Superiores

1972
EDITORIAL MIR MOSCU

CDU 512.8 (075.8) = 60

Impreso en la URSS

на испанском языке

INDICE

§ 2. Espacio dual

§ 3. Topología débil y convergencia débil

§ 4. Funciones generalizadas

§ 5. Operadores lineales

§ 6. Operadores totalmente continuos

CAPITULO V - ELEMENTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN ESPACIOS LINEALES

§ 1. Diferenciación en espacios lineales

§ 2. Problemas extremales

§ 3. Método de Newton

CAPITULO VI - MEDIDA, FUNCIONES MEDIBLES, INTEGRAL

§ 1. Medida de conjuntos planos

PREFACIO

La primera edición rusa de *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional* apareció en dos fascículos en 1954 y 1960. La publicación de estos dos fascículos se debió a que, a finales de la década del 40, fue incluido en el programa de la Facultad de Mecánica y Matemáticas de la Universidad de Moscú el curso de *Análisis III* que comprendía elementos de la teoría de medida y de la teoría de funciones, ecuaciones integrales, nociones del análisis funcional y, más tarde, cálculo de variaciones. Este curso, dictado en la Universidad de Moscú primero por Andréi Kolmogórov y luego por otros profesores, entre ellos Serguéi Fomín, integró posteriormente también los programas de otras Universidades. Debido a su reducida tirada, la edición de nuestro libro se agotó rápidamente y hace tiempo que surgió la necesidad de reeditarlo.

La sustitución de los cursos de la teoría de funciones de variable real, de ecuaciones integrales y de cálculo de variaciones por el curso unificado de *Análisis III* en la Universidad de Moscú, dio lugar a grandes discusiones en su tiempo. El curso tenía por objeto habituar a los estudiantes a una visión doble: por una parte, seguir la lógica interna del desarrollo de la teoría de conjuntos, de la teoría general de aplicaciones continuas en espacios métricos y topológicos, de la teoría general de espacios lineales y de funcionales y operadores en ellos y de la teoría pura de medida e integración en «espacios generales provistos de medida», y por otra parte, no perder de vista los problemas del análisis clásico y del aplicado, a los que prestan servicio estas ramas más abstractas de las Matemáticas.

Para resolver esta tarea, en la planificación del libro damos preferencia a la línea abstracta de estructuración del curso. De la teoría general de conjuntos (capítulo I) se puede pasar o bien a los espacios métricos y topológicos y sus aplicaciones continuas (capítulo II), o bien, directamente, a los espacios provistos de medida (sin topología) y a la integración en ellos (capítulo VI). En los capítulos III y IV se estudian los espacios lineales y los funcionales y operadores lineales en ellos. De estos capítulos se puede pasar directamente al capítulo V (operadores y funcionales diferenciables no lineales). En el capítulo VIII se estudian los espacios lineales de funciones sumables. Solamente en los capítulos VII y IX se concentra, de hecho, la atención en las funciones de variable real. La exposición de la teoría de ecuaciones integrales en el capítulo X está formalmente vinculada con el segmento $[a, b]$; pero, se le puede dar, sin modificaciones esenciales, una forma más general.

Aunque en nuestro libro se exponen, en primer lugar, los conceptos generales de la teoría de funciones y del análisis funcional, el lector podrá advertir, en casi todos los capítulos, la atención que se presta a los problemas clásicos contiguos. El haber incluido en nuestro libro los capítulos VII (teoría de diferenciación), IX (series trigonométricas e integral de Fourier) y X (ecuaciones integrales lineales) hace que abarque ahora todo el programa del curso de *Análisis III* adoptado en la Universidad de Moscú, menos el cálculo de variaciones. No hemos incluido este último en nuestro libro, limitándonos a exponer en el capítulo V los rudimentos del análisis funcional no lineal.

En la nueva edición, lo mismo que en la primera, ocupa un lugar considerable la teoría general de medida. En los últimos tiempos han aparecido varias exposiciones de la teoría de integración a base del esquema de Daniell, que no utiliza el aparato de la teoría de medida. Consideramos, sin embargo, que la teoría de medida tiene por sí sola suficiente importancia, independientemente de si se introduce o no el concepto de integral, y merece ser incluida en el curso universitario.

Al revisar el libro e incluir en él nuevas secciones hemos procurado, sin embargo, conservar el estilo relativamente elemental de exposición que, según nos parece, tenía la primera edición. Esperamos que éste hallará su lugar natural en la enseñanza universitaria a la par de otros textos.

A. Kolmogórov
S. Fomin

CAPITULO I

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

§ 1. CONCEPTO DE CONJUNTO. OPERACIONES SOBRE CONJUNTOS

1°. Definiciones principales. En las Matemáticas tropezamos constantemente con distintos *conjuntos*. Podemos hablar del conjunto de facetas de un poliedro, de puntos de una recta, del conjunto de números naturales, etc. El concepto de conjunto es tan amplio que resulta difícil darle una definición que no se reduzca a sustituir simplemente la palabra «conjunto» por expresiones sinónimas: cúmulo, colección de elementos, etc.

El concepto de conjunto desempeña en las Matemáticas modernas un papel de extraordinaria importancia no sólo porque la propia teoría de conjuntos ha pasado a ser en la actualidad una disciplina sumamente vasta y enjundiosa, sino, principalmente, en virtud de la influencia que la teoría de conjuntos, nacida a fines del siglo pasado, ha ejercido y ejerce sobre todas las Matemáticas. Vamos a enunciar aquí las notaciones fundamentales y a exponer brevemente los conceptos primarios de la teoría de conjuntos que serán utilizados en los capítulos sucesivos.

Designaremos los conjuntos con letras mayúsculas A, B, ... y sus elementos con minúsculas a, b, ... La afirmación de que «el elemento a pertenece al conjunto A» se denota simbólicamente así: $a \in A$ o bien $A \ni a$; $\overline{a \in A}$ (o bien $\overline{A \ni a}$) significa que el elemento a no pertenece a A. Si todos los elementos que componen el conjunto A pertenecen también al conjunto B (con la particularidad de que el caso $A = B$ no está excluido), decimos que A es *subconjunto* del conjunto B y escribimos $A \subset B$. Por ejemplo, los números enteros forman un subconjunto del conjunto de todos los números reales.

A veces no sabemos de antemano si un conjunto (por ejemplo, el conjunto de las raíces de una ecuación) contiene o no por lo menos un elemento. De ahí, la conveniencia de introducir el llamado conjunto *vacío*, es decir, el conjunto que no contiene ni un elemento. Lo designaremos con el símbolo $\varnothing$. Cualquier conjunto contiene $\varnothing$ como subconjunto.

2°. Operaciones sobre conjuntos. Sean A y B conjuntos arbitrarios; se llama *suma* o *unión* $A \cup B$ de estos conjuntos al conjunto compuesto de todos los elementos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos A ó B (fig. 1).

De manera análoga se define la suma de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos: si A_α son conjuntos arbitrarios, su suma $\bigcup_\alpha A_\alpha$ es la colección de elementos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a uno de los conjuntos A_α.

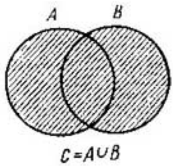

FIG. 1

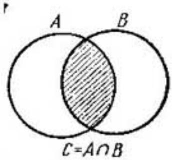

FIG. 2

Llamaremos *intersección* $A \cap B$ de los conjuntos A y B al conjunto compuesto por todos los elementos pertenecientes tanto al conjunto A como al conjunto B (fig. 2). Por ejemplo, la intersección del conjunto de todos los números pares y del conjunto de todos los números divisibles por tres está compuesta por todos los números enteros divisibles por seis. La intersección de un número cualquiera (finito o infinito) de conjuntos A_α es la colección $\bigcap_\alpha A_\alpha$ de elementos pertenecientes a cada uno de los conjuntos A_α.

Por su propia definición las operaciones de suma e intersección son conmutativas y asociativas, es decir, $A \cup B = B \cup A$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Además, verifican las siguientes relaciones distributivas:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{2}$$

En efecto, comprobemos, por ejemplo, la primera de estas igualdades[1]. Supongamos que el elemento x pertenece al conjunto que figura en la parte izquierda de la igualdad (1): $x \in (A \cup B) \cap C$. Esto significa que x pertenece a C y, además, por lo menos a uno de los conjuntos A ó B. Pero entonces x pertenece siquiera a uno de los conjuntos $A \cap C$ o $B \cap C$, es decir, figura en la parte derecha de la igualdad considerada. Viceversa, supongamos que $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Entonces, $x \in A \cap C$ o bien $x \in B \cap C$. Por consiguiente, $x \in C$ y, además, x figura en A o en B, es decir, $x \in A \cup B$. De manera que $x \in (A \cup B) \cap C$, y la igualdad (1) queda demostrada. Análogamente se verifica la igualdad (2).

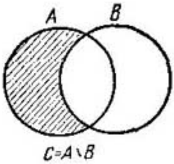

FIG. 3

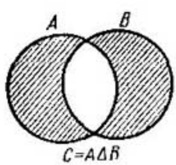

FIG. 4

Definamos la operación de resta de conjuntos. Llamaremos *diferencia* $A \setminus B$ de los conjuntos A y B a la colección de aquellos elementos de A que no pertenecen a B (fig. 3). Señalemos que aquí no se supone que $A \supset B$. A veces en lugar de $A \setminus B$ se escribe $A-B$. En algunos casos (por ejemplo, en la teoria de la medida) conviene introducir la llamada *diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B que se define como la suma de las diferencias $A \setminus B$ y $B \setminus A$ (fig. 4). Denotaremos la diferencia simétrica de los conjuntos A y B con el símbolo $A \triangle B$. De manera que según la definición,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

EJERCICIO. Demostrar que

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

En lo sucesivo deberemos considerar con frecuencia distintos conjuntos, que todos son subconjuntos de un conjunto principal S, por ejemplo, diferentes conjuntos de puntos sobre la recta nu-

[1] La igualdad de dos conjuntos $A=B$ se entiende como una igualdad idéntica, es decir, significa que cada elemento de A pertenece a B y viceversa. En otras palabras, la igualdad $A=B$ equivale a que se verifican ambas inclusiones: $A \subset B$ y $B \supset A$.

mérica. En este caso, para todo conjunto A la diferencia $S\setminus A$ se llama *complemento* del conjunto A y se denota frecuentemente mediante CA o bien A'.

En la teoría de los conjuntos y sus aplicaciones desempeña un papel muy importante el llamado principio de dualidad, que se basa en las dos siguientes relaciones:

1. *El complemento de la suma es igual a la intersección de los complementos*

$$S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}=\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha}). \tag{3}$$

2. *El complemento de la intersección es igual a la suma de los complementos*

$$S\setminus\bigcap_{\alpha}A_{\alpha}=\bigcup_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha}). \tag{4}$$

El principio de dualidad consiste en que de cualquier teorema referente a un sistema de subconjuntos de un conjunto fijo S se puede deducir de manera automática otro teorema, el teorema dual, sustituyendo los conjuntos considerados por sus complementos, la suma de conjuntos, por su intersección y la intersección, por la suma. Un ejemplo de la aplicación de este principio nos lo da el teorema 3′ del § 2 del capítulo II.

Demostremos la relación (3).

Supongamos que $x\in S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$. Esto significa que x no pertenece a la unión $\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$, es decir, no figura en ninguno de los conjuntos A_{α}. Por consiguiente, x aparece en cada uno de los complementos $S\setminus A_{\alpha}$ y por eso $x\in\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha})$. Viceversa, supongamos que $x\in\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha})$, es decir, que x pertenece a cada $S\setminus A_{\alpha}$; entonces, x no figura en ninguno de los conjuntos A_{α}, es decir, no pertenece a la suma $\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$, y por eso $x\in S\setminus\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$. La igualdad (3) queda demostrada. De manera análoga se demuestra la relación (4). (Realícese la demostración).

La expresión «diferencia simétrica» que se emplea para la operación $A\triangle B$ no es del todo acertada; esta operación es, en muchos aspectos, análoga a la suma de conjuntos $A\cup B$. En efecto, $A\cup B$ significa que unimos dos afirmaciones con el «o» *alternativo*: «el elemento pertenece al conjunto A» o «el elemento pertenece al conjunto B», mientras que $A\triangle B$ significa que unimos las mismas afirmaciones con el «o» *no alternativo*: el elemento x

pertenece a $A \triangle B$ si, y sólo si, figura o bien *solamente* en el conjunto A o bien *solamente* en el conjunto B. El conjunto $A \triangle B$ podría llamarse «suma módulo dos» de los conjuntos A y B (se toma la unión de estos dos conjuntos pero los elementos que figuran en ambos se excluyen).

§ 2. EQUIVALENCIA DE CONJUNTOS. CONCEPTO DE POTENCIA DE UN CONJUNTO

1°. Conjuntos finitos e infinitos. Al considerar diferentes conjuntos observamos que para algunos de ellos es posible señalar—aunque sea de una manera general y no de hecho—la cantidad de elementos que los componen. De este tipo es, por ejemplo, el conjunto de todos los vértices de un poliedro, el conjunto de todos los números primos inferiores a un número dado, el conjunto de todas las moléculas de agua en la Tierra, etc. Cada uno de estos conjuntos contiene un número finito, que posiblemente desconocemos, de elementos. Por otra parte, existen conjuntos compuestos por un número infinito de elementos. De este tipo son, por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales, el conjunto de todos los puntos de una recta, el conjunto de todos los círculos del plano, el conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales, etc. Vale subrayar que al decir que uno u otro conjunto es infinito entendemos que se puede escoger de él un elemento, dos elementos, etc., y después de cada una de estas operaciones en el conjunto quedarán aún otros elementos.

Dos conjuntos finitos los podemos comparar por el número de elementos que los componen y decidir si este número es el mismo o si uno de los conjuntos posee más elementos que otro. ¿Es posible comparar de manera análoga los conjuntos infinitos? En otras palabras, ¿tiene sentido preguntar qué hay más: círculos sobre el plano o puntos racionales sobre la recta, funciones definidas sobre el segmento $[0, 1]$ o rectas en el espacio, etc.?

Veamos cómo comparamos entre sí dos conjuntos finitos. Podemos proceder de dos maneras: en primer lugar, podemos contar el número de elementos de cada uno de estos conjuntos y comparar así ambos conjuntos. Pero podemos actuar de modo distinto, tratando de establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de estos conjuntos, es decir, una correspondencia que asigne a cada elemento de un conjunto un elemento, y sólo uno, del otro y viceversa. Está claro que una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos finitos se puede establecer si, y sólo si, el número de elementos en ambos conjuntos es el mismo. Por ejemplo, para ver si coinciden el número de alumnos en el grupo y la cantidad de sillas en el aula, podemos, sin contar el número de alumnos y de sillas, sentar a cada alumno en una silla determinada. Si hay lugar para todos y no queda ningún asiento sobrante, es decir, si se establece una correspondencia biunívoca entre estos dos conjuntos, ello significará que tienen el mismo número de elementos.

Señalemes ahora que el primer camino (calculando el número de elementos) es válido sólo si se comparan conjuntos finitos, mientras que el segundo (estableciendo una correspondencia biunívoca) se puede aplicar también a conjuntos infinitos.

2°. **Conjuntos numerables.** El conjunto infinito más elemental es el conjunto de los números naturales. Llamaremos *conjunto numerable* a todo conjunto cuyos elementos se puedan poner en correspondencia biunívoca con todos los números naturales. En otras palabras, un conjunto numerable es un conjunto cuyos elementos se pueden colocar en una sucesión infinita: $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ Veamos algunos ejemplos de conjuntos numerables.

1. El conjunto de todos los números enteros. Establezcamos la correspondencia entre todos números enteros y todos los números naturales según el esquema siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array}$$

En general, pongamos en correspondencia a cada número no negativo $n \geqslant 0$ el número impar $2n+1$ y a cada número negativo $n < 0$ el número par $2|n|$:

$$n \leftrightarrow 2n+1, \text{ cuando } n \geqslant 0,$$
$$n \leftrightarrow 2|n|, \text{ cuando } n < 0.$$

2. El conjunto de todos los números pares positivos. La correspondencia es evidente: $n \leftrightarrow 2n$.

3. El conjunto $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ de potencias de dos. Aquí la correspondencia es también evidente. A cada número 2^n se pone en correspondencia el número n.

4. Consideremos un ejemplo más complejo demostrando que el conjunto de todos los números racionales es numerable. Cada número racional se puede escribir, de manera única, en forma de una fracción irreducible $\alpha = \frac{p}{q}$, $q > 0$. Llamemos *altura* del número racional α a la suma $|p| + q$. Está claro que el número de fracciones de altura dada n es finito. Por ejemplo, la altura 1 la tiene sólo el número $\frac{0}{1} = 0$, la altura 2 la tienen sólo los números $\frac{1}{1}$ y $\frac{-1}{1}$, la altura 3, la tienen sólo los números $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-2}{1}$ y $\frac{-1}{2}$, etc. Coloquemos ahora todos los números raciona-

les según su altura, es decir, primero los números de altura 1, después los de altura 2, etc. Cada número racional tendrá entonces su número, es decir, quedará establecida una correspondencia biunívoca entre todos los números naturales y todos los números racionales.

Un conjunto infinito que no sea numerable se llama conjunto *no numerable*. Demostremos algunas propiedades generales de conjuntos numerables.

1. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es finito o numerable.*

DEMOSTRACION. Sea A un conjunto numerable y B un subconjunto suyo. Numeremos todos los elementos del conjunto A: a_1, a_2, ..., a_n, ... Sean a_{n_1}, a_{n_2}, ... aquellos elementos que figuran en B. Si entre los números n_1, n_2, ... existe el máximo, B es finito; en el caso contrario B es numerable.

2. *La suma de cualquier conjunto finito o numerable de conjuntos numerables es también un conjunto numerable.*

DEMOSTRACION. Sean A_1, A_2, ... conjuntos numerables. Podemos suponer que son disjuntos (sin elementos comunes) dos a dos, ya que, de lo contrario, consideraríamos en su lugar los conjuntos A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ... que son a lo sumo numerables y que tienen la misma suma que los conjuntos A_1, A_2, ... Todos los elementos de los conjuntos A_1, A_2, ... pueden escribirse en forma de la siguiente tabla infinita:

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot
\end{array}$$

en cuya primera fila aparecen los elementos del conjunto A_1, en la segunda fila, los elementos del conjunto A_2, etc. Numeremos ahora todos estos elementos desplazándonos «en diagonales», es decir, tomando por primero el elemento a_{11}; por segundo, el elemento a_{12}; por tercero, el elemento a_{21}, etc., siguiendo el sentido que indican las flechas del siguiente cuadro:

$$\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[r] & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \arrow[r] & a_{14} \arrow[dl] & \cdots \\
a_{21} \arrow[d] & a_{22} \arrow[ur] & a_{23} \arrow[dl] & a_{24} & \cdots \\
a_{31} \arrow[ur] & a_{32} \arrow[dl] & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{tikzcd}$$

Está claro que cada elemento de cada conjunto recibirá entonces un número determinado, es decir, quedará establecida una correspondencia biunívoca entre todos los elementos de todos los conjuntos A_1, A_2, ... y todos los números naturales. Nuestra afirmación resulta demostrada.

EJERCICIOS. 1. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

2. El número ξ se denomina *algebraico* si es raíz de un polinomio con coeficientes racionales. Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

3. Demostrar que el conjunto de todos los intervalos racionales (es decir, intervalos con extremos racionales) sobre la recta es numerable

4. Demostrar que el conjunto de todos los puntos del plano que tienen coordenadas reales es numerable.

Sugerencia. Empléese la propiedad 2.

3. *Todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.*

DEMOSTRACION. Sea M un conjunto infinitio. Tomemos en él un elemento cualquiera a_1. Por ser M un conjunto infinito encontraremos en él un elemento a_2 distinto de a_1, después el elemento a_3 distinto de a_1 y a_2, etc. Continuando este proceso (que no podrá interrumpirse por «falta» de elementos ya que M es infinito) obtendremos un subconjunto numerable

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

del conjunto M. Hemos demostrado la afirmación.

Este resultado señala que los conjuntos numerables son los «más pequeños» de los conjuntos infinitos. El problema sobre la existencia de conjuntos infinitos no numerables será considerado más adelante.

3°. Equivalencia de conjuntos. Buscando una correspondencia biunívoca entre unos u otros conjuntos infinitos y los números naturales, hemos llegado al concepto de conjunto numerable.

Está claro que de manera análoga pueden compararse los conjuntos no sólo con el conjunto de números naturales: este procedimiento permite comparar entre sí dos conjuntos cualesquiera. Introduzcamos la siguiente definición.

DEFINICION. Dos conjuntos M y N se llaman *equivalentes* (lo que se denota mediante $M \sim N$) si entre sus elementos se puede establecer una correspondencia biunívoca.

El concepto de equivalencia puede aplicarse a cualesquiera conjuntos tanto finitos como infinitos. Dos conjuntos finitos son equivalentes entre sí si (y sólo si) tienen el mismo número de elementos. El conjunto numerable se puede ahora definir del siguiente modo:

un conjunto se llama numerable si es equivalente al conjunto de los números naturales.

Está claro que dos conjuntos, equivalentes cada uno a un tercer conjunto, son equivalentes entre sí; en particular, todos los conjuntos numerables son equivalentes entre sí.

Ejemplos. 1. Los conjuntos de puntos de dos cualesquiera segmentos $[a, b]$ y $[c, d]$ son equivalentes entre sí. En la fig. 5 se señala cómo se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ellos: los puntos p y q corresponden uno al otro si se hallan sobre un mismo radio que parte del punto O donde se cruzan las rectas ac y bd.

2. El conjunto de todos los puntos del plano complejo es equivalente al conjunto de todos los puntos sobre una esfera.

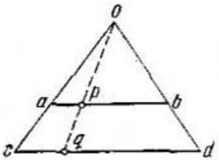

FIG. 5

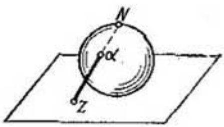

FIG. 6

La correspondencia biunívoca $\alpha \leftrightarrow z$ puede establecerse, por ejemplo, mediante la proyección estereográfica (fig. 6).

3. El conjunto de todos los números del intervalo $(0, 1)$ es equivalente al conjunto de todos los puntos de la recta. La correspondencia se puede establecer, por ejemplo, mediante la función

$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Al considerar los ejemplos de este punto y del punto 2° podemos observar que, a veces, un conjunto infinito puede resultar equivalente a una parte propia. Por ejemplo, resulta haber «tantos» números naturales como números enteros o incluso racionales; el intervalo $(0, 1)$ tiene «tantos» puntos como los tiene la recta, etc. Esta situación es característica para todos los conjuntos infinitos. En efecto, en el punto 2° (propiedad 3) hemos demostrado que de todo conjunto infinito M se puede elegir un subconjunto numerable; supongamos que éste sea el conjunto

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Dividamos A en dos subconjuntos numerables

$$A_1 = \{a_1, a_3, a_5 \ldots\} \text{ y } A_2 = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\}.$$

Entre los conjuntos numerables A y A_1 se puede establecer una correspondencia biunívoca que se puede extender luego hasta una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $A\cup(M\setminus A)=M$ y $A_1\cup(M\setminus A)=M\setminus A_2$ refiriendo a cada elemento de $M\setminus A$ ese mismo elemento. El conjunto $M\setminus A_2$ es un subconjunto propio del conjunto M. Llegamos de esta forma a la siguiente proposición:

Todo conjunto infinito es equivalente a un subconjunto propio.

Esta propiedad se puede tomar como la definición de un conjunto infinito.

EJERCICIO. Demostrar que siendo M un conjunto infinito arbitrario y A numerable, resulta $M\sim A\cup A$.

4°. Innumerabilidad del conjunto de los números reales. En el punto 2° hemos visto varios ejemplos de conjuntos numerables. La cantidad de estos ejemplos se puede ampliar considerablemente. Además, hemos demostrado que tomando la suma finita o numerable de conjuntos numerables obtendremos de nuevo conjuntos numerables. Surge naturalmente la pregunta ¿existen conjuntos infinitos no numerables? La respuesta afirmativa la da el siguiente teorema.

TEOREMA 1. *El conjunto de números reales comprendidos entre el cero y la unidad es innumerable.*

DEMOSTRACION. Supongamas que existe una lista (de todos o una parte) de los números reales α, pertenecientes al segmento $[0, 1]$:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=0,\, a_{11}a_{12}a_{13}\,\ldots\, a_{1n}\,\ldots,\\ \alpha_2=0,\, a_{21}a_{22}a_{23}\,\ldots\, a_{2n}\,\ldots,\\ \alpha_3=0,\, a_{31}a_{32}a_{33}\,\ldots\, a_{3n}\,\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n=0,\, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\,\ldots\, a_{nn}\,\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\qquad(1)$$

Aquí a_{ik} es la k-ésima cifra decimal del número α_i. Consideremos la fracción

$$\beta=0,\ b_1b_2\ldots b_n\ldots$$

construida del siguiente modo: b_1 es una cifra arbitraria distinta de a_{11}; b_2 es una cifra arbitraria distinta de a_{22}, etc., en general, b_n es una cifra arbitraria distinta de a_{nn}. Esta fracción decimal no puede coincidir con ninguna de las que figuran en la lista (1). En efecto, la fracción β se distingue de la fracción α_1 al menos por su primera cifra; de la segunda fracción, por su segunda cifra, etc.; en general, puesto que $b_n \neq a_{nn}$ para todo n, la fracción β se distingue de cualquiera de las fracciones α_i que figuran en la lista (1). Luego, ninguna lista de números reales pertenecientes al segmento $[0, 1]$ puede consumirlo.

La demostración expuesta necesita una pequeña precisión puesto que algunos números $\left(\text{concretamente los números de la forma } \frac{p}{10^q}\right)$ pueden tener dos representaciones decimales: bien con un número infinito de ceros o bien con un número infinito de nueves; por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5000 \ldots = 0{,}4999 \ldots$$

Por consiguiente, el hecho de que dos fracciones decimales no coincidan no significa todavía que representan números distintos.

Sin embargo, si la fracción β se construye de manera que no contenga ni ceros ni nueves, (tomando, por ejemplo, $b_n = 2$, si $a_{nn} = 1$, y $b_n = 1$, si $a_{nn} \neq 1$) esta objeción quedará superada.

EJERCICIO. Demostrar que los números que tienen dos distintas representaciones decimales forman un conjunto numerable.

De manera que el segmento $[0, 1]$ ofrece un ejemplo de un conjunto infinito no numerable. Veamos algunos ejemplos de conjuntos equivalentes al conjunto formado por los puntos del segmento $[0, 1]$.

1. El conjunto de todos los puntos pertenecientes a un segmento $[a, b]$ o intervalo (a, b) cualquiera.
2. El conjunto de todos los puntos de la recta.
3. Los conjuntos de todos los puntos del plano, del espacio, de la superficie de una esfera, de los puntos que se encuentran dentro de una esfera, etc.
4. El conjunto de todas las rectas del plano.
5. El conjunto de todas las funciones continuas de una o varias variables.

En los casos 1 y 2 la demostración no ofrece dificultades (véanse los ejemplos 1 y 3 del punto 3°). En los demás casos la demostración directa no es tan sencilla.

EJERCICIO. Demostrar, aprovechando los resultados de este punto y del ejercicio 2 del punto 2°, la existencia de números trascendentes, es decir, de números no algebraicos.

5°. **Concepto de potencia de un conjunto.** Si dos conjuntos finitos son equivalentes, tienen el mismo número de elementos. Cuando dos conjuntos equivalentes entre si M y N son arbitrarios se dice que M y N tienen la misma *potencia*. Así pues, la potencia es aquello común que tienen todos los conjuntos equivalentes entre sí. En el caso de conjuntos finitos el concepto de potencia coincide con el concepto habitual del número de elementos del conjunto. La potencia del conjunto de los números naturales (es decir, de cualquier conjunto numerable) se denota mediante el símbolo $\aleph_0$ (se lee "alef cero"). Los conjuntos equivalentes al conjunto de todos los números naturales comprendidos entre 0 y 1 se dice que tienen potencia de *continuo*. Esta potencia se denota mediante el símbolo c (o el símbolo $\aleph$).

En las observaciones que concluyen este capítulo tocamos el problema, muy profundo, de la existencia de potencias intermedias entre $\aleph_0$ y c. Como regla general, los conjuntos infinitos que se emplean en el análisis son numerables o tienen potencia de continuo. En el caso de las potencias de conjuntos finitos, es decir, en el caso de los números naturales, tenemos, además del concepto de igualdad, los conceptos de «más» y «menos». Veamos cómo pueden extenderse estos últimos al caso de potencias infinitas.

Sean A y B dos conjuntos arbitrarios y $m(A)$ y $m(B)$ sus potencias. Si A es equivalente a B, $m(A)=m(B)$ por definición. Si A es equivalente a una parte del conjunto B y A no contiene ninguna parte equivalente a B, se acepta, naturalmente, que $m(A)$ es menor que $m(B)$, es decir, $m(B)$ es mayor que $m(A)$. Sin embargo, existen, lógicamente, otras dos posibilidades, además de las mencionadas:

a) B contiene una parte equivalente a A y A contiene una parte equivalente a B.

b) A y B no son equivalentes y ninguno posee una parte equivalente al otro.

Del teorema de Cantor — Bernstein, que se expone en el siguiente punto, se desprende que en el caso a) los conjuntos A y B son equivalentes, es decir tienen potencias iguales. En cuanto al caso b), que equivaldría a la existencia de potencias incomparables, resulta que no puede realizarse. Esto se deduce del teorema de Zermelo que enunciamos en el § 4.

De lo anterior resulta (si aceptamos sin demostración los teoremas de Cantor — Bernstein y de Zermelo) que dos conjuntos arbitrarios A y B o bien tienen la misma potencia o bien verifican una de las relaciones

$$m(A) < m(B) \text{ o } m(A) > m(B).$$

Hemos señalado más arriba que los conjuntos numerables son los «más pequeños» entre los conjuntos infinitos y hemos demostrado luego que existen conjuntos infinitos de potencia superior: los conjuntos de potencia de continuo. ¿Existen potencias infinitas superiores a la potencia de continuo? En general, ¿existe o no una potencia «máxima»? Resulta que tiene lugar el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Sea M un conjunto cualquiera y $\mathfrak{M}$ el conjunto formado por todos los subconjuntos del conjunto M. Entonces, la potencia de $\mathfrak{M}$ es superior a la potencia del conjunto inicial M.*

DEMOSTRACION. Es fácil ver que la potencia $\mathfrak{m}$ del conjunto $\mathfrak{M}$ no puede ser inferior a la potencia m del conjunto inicial M; en efecto, los subconjuntos de M formados por un solo elemento representan en $\mathfrak{M}$ un subconjunto equivalente al conjunto M. Basta demostrar que las potencias $\mathfrak{m}$ y m no coinciden. Supongamos que entre los elementos $a, b, \ldots$ del conjunto M y algunos elementos $A, B, \ldots$ del conjunto $\mathfrak{M}$ (es decir, algunos subconjuntos de M) se ha logrado establecer una correspondencia biunívoca:

$$a \leftrightarrow A, \; b \leftrightarrow B, \; \ldots$$

Demostremos que esta correspondencia no puede consumir todos los subconjuntos del conjunto M, es decir, todos los elementos del conjunto $\mathfrak{M}$. Sea X la colección de elementos de M que no pertenecen a los subconjuntos que les corresponden. Más detalladamente: si $a \leftrightarrow A$ y $a \in A$, el elemento a no se incluye en X, pero si $a \leftrightarrow A$ y $a \overline{\in} A$, el elemento a se incluye en X. Es evidente que X representa un subconjunto de M, es decir, un elemento de $\mathfrak{M}$. Demostremos que al subconjunto X no le puede corresponder ningún elemento de M. Supongamos que tal elemento $x \leftrightarrow X$ existe y veamos si pertenece o no al subconjunto X. Aceptemos que $x \overline{\in} X$; por definición, en X figura t o d o elemento que no pertenece al subconjunto que le corresponde y, por lo tanto, x debe ser incluido en X. Viceversa, si se acepta que el elemento x pertenece a X, deduciremos que x no puede figurar en X, ya que éste contiene sólo los elementos que no aparecen en los subconjuntos que les corresponden. De manera que el elemento x correspondiente al subconjunto X debe simultáneamente pertenecer y no pertenecer a X. De aquí se desprende que tal elemento no existe, es decir, que no se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto M y todos sus subconjuntos. El teorema queda demostrado.

De este modo, para cualquier potencia podemos construir efectivamente un conjunto de potencia superior, después otro de potencia aún mayor, etc., obteniendo así una escala de potencias no acotada superiormente.

EJERCICIO. Demostrar que la totalidad de las funciones numéricas (o, en general de funciones que toman valores en un conjunto compuesto por lo menos de dos elementos) definidas sobre un conjunto M tiene una potencia superior a la de M.

Sugerencia. Aprovéchese que el conjunto de todas las funciones características sobre M (es decir, de funciones que sólo toman valores 0 y 1) es equivalente al conjunto formado por todos los subconjuntos de M.

6°. Teorema de Cantor-Bernstein. Demostraremos ahora el siguiente teorema importante al que nos hemos referido ya en el punto anterior.

TEOREMA (CANTOR — BERNSTEIN). *Sean A y B dos conjuntos arbitrarios. Si en A existe un subconjunto A_1 equivalente a B y en B un subconjunto B_1 equivalente a A, los conjuntos A y B son equivalentes.*

DEMOSTRACION. Sea f la aplicación biyectiva[1] de A en B_1 y sea g la aplicación biyectiva de B en A_1, es decir,

$$f(A)=B_1\subset B,\ g(B)=A_1\subset A.$$

Entonces, $gf(A)=g(f(A))=g(B_1)$ es un conjunto, que denotaremos con A_2, contenido en A_1 y equivalente al conjunto A. De manera análoga $fg(B)=f(g(B))=f(A_1)=B_2$ es un conjunto contenido en B_1 y equivalente a B. Sea ahora A_3 aquel subconjunto de A en el que se transforma el conjunto A_1 mediante la aplicación gf y sea A_4 aquel conjunto en el que se transforma A_2 mediante la misma aplicación gf. En general, sea A_{k+2} aquel conjunto en el que se transforma el conjunto A_k mediante la aplicación gf ($k=1, 2, \ldots$). Está claro que

$$A\supset A_1\supset A_2\supset \ldots \supset A_k\supset A_{k+1}\supset \ldots$$

Si ponemos

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

podremos representar A mediante la siguiente suma de conjuntos disjuntos dos a dos:

$$A=(A\setminus A_1)\cup(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\ \ldots\ \cup(A_k\setminus A_{k+1})\cup\ \ldots\ \cup D.$$

---

[1] A veces se emplea el término «aplicación biunívoca». (*N. del T.*)

De un modo análogo el conjunto A_1 se puede representar en la forma:

$$A_1 = D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots \cup (A_k \setminus A_{k+1}) \cup \dots$$

Evidentemente, estas dos fórmulas pueden escribirse así:

$$A = D \cup [(A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots] \cup \\ \cup [(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots], \quad (2)$$

$$A_1 = D \cup [(A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots] \cup \\ \cup [(A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots]. \quad (3)$$

Observemos ahora que el conjunto $A \setminus A_1$ es equivalente al conjunto $A_2 \setminus A_3$ (ya que el primero se transforma en el segundo

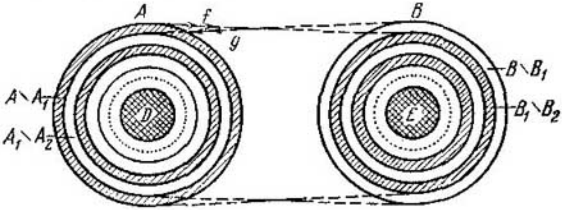

FIG. 7

mediante la aplicación gf); del mismo modo $A_2 \setminus A_3$ es equivalente a $A_4 \setminus A_5$, etc. Por eso, los conjuntos que figuran en las segundas líneas de las fórmulas (2) y (3) son equivalentes. En cuanto a las primeras líneas de estas fórmulas, son sencillamente idénticas. De aquí se desprende que entre los elementos de los conjuntos A y A_1 se puede establecer una correspondencia biunívoca. Pero A_1 es equivalente a B por hipótesis. De manera que A es equivalente a B. El teorema queda demostrado.

Podemos incluso «permitirnos el lujo» (aunque no hay necesidad de ello) de escribir explícitamente la correspondencia biunívoca φ que transforma A en B. Es la siguiente:

$$\varphi(a) = \begin{cases} g^{-1}(a), & \text{si } a \in D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots \\ f(a), & \text{si } a \in (A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots \end{cases}$$

(fig. 7)

§ 3. APLICACIONES. PARTICIÓN EN CLASES

1°. Aplicaciones de conjuntos. Concepto general de función. En el Análisis el concepto de función se introduce del siguiente modo. Sea X un conjunto sobre la recta numérica. Se dice que sobre este conjunto está definida una función f si a cada elemento $x \in X$ se le ha puesto en correspondencia un número determinado $y = f(x)$. El conjunto X se denomina en este caso *campo de deficinión* de esta función y el conjunto Y formado por todos los valores que toma esta función, *campo de valores* de la misma.

Si en vez de conjuntos numéricos consideramos conjuntos de naturaleza arbitraria, llegaremos al concepto más general de función: sean M y N dos conjuntos arbitrarios. Se dice que está definida sobre M una función f con valores en N si a cada elemento $x \in M$ se le pone en correspondencia un elemento, y sólo uno, y de N. En el caso de conjuntos de naturaleza arbitraria (y a veces también en el caso de conjuntos numéricos) en lugar del término "función" se usa «aplicación» y se habla de la aplicación de un conjunto en otro [1].

Si a es un elemento de M, el elemento $b = f(a)$ de N que le corresponde se denomina *imagen* del elemento a (para la aplicación f). La colección de todos los elementos de M que tienen por imagen el elemento $b \in N$ se denomina *imagen recíproca* [2] (en términos más precisos, *imagen recíproca completa*) del elemento b y se denota mediante $f^{-1}(b)$.

Sea A un conjunto de M; la totalidad $\{f(a) : a \in A\}$ de todos los elementos del tipo $f(a)$, donde $a \in A$, se denomina *imagen de A* y se designa $f(A)$. Para todo conjunto B de N se puede, a su vez, definir la imagen recíproca $f^{-1}(B)$; a saber: $f^{-1}(B)$ es la totalidad de todos aquellos elementos de M cuyas imágenes pertenecen a B. Puede ocurrir que ningún elemento b de B tiene imagen recíproca y en este caso la imagen recíproca completa $f^{-1}(B)$ será el conjunto vacío.

Aquí nos limitaremos a exponer las propiedades más generales de las aplicaciones.

Convendremos en emplear la siguiente terminología. Diremos que f es una aplicación del conjunto M «sobre» el conjunto N, si $f(M) = N$; en el caso general, es decir, cuando $f(M) \subset N$, se dice que f es una aplicación de M «en» N.

Señalemos las propiedades principales de las aplicaciones.

---

[1] De hecho hemos tropezado ya anteriormente con el concepto de aplicaciones de conjuntos (por ejemplo, al introducir el concepto de equivalencia de conjuntos, al demostrar el teorema de Cantor—Bernstein, etc.).

[2] En algunos libros de texto se emplea el término «preimagen». (*Nota del T.*)

TEOREMA 1. *La imagen recíproca de la unión de dos conjuntos es igual a la unión de sus imágenes recíprocas:*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

DEMOSTRACION. Supongamos que el elemento x pertenece al conjunto $f^{-1}(A \cup B)$. Ello significa que $f(x) \in A \cup B$, o sea, $f(x) \in A$ o bien $f(x) \in B$. En este caso x debe pertenecer al menos a uno de los dos conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$, es decir, $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Viceversa, si $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, entonces x pertenece al menos a uno de los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$, es decir, $f(x)$ figura al menos en uno de los conjuntos A y B; en otras palabras, $f(x) \in A \cup B$ y, por lo tanto, $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

TEOREMA 2. *La imagen recíproca de la intersección de dos conjuntos es igual a la intersección de sus imágenes recíprocas:*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

DEMOSTRACION. Si $x \in f^{-1}(A \cap B)$, debe ser $f(x) \in A \cap B$, o sea, $f(x) \in A$ y $f(x) \in B$, y, por lo tanto, $x \in f^{-1}(A)$ y $x \in f^{-1}(B)$, es decir, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Viceversa, si $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, es decir, $x \in f^{-1}(A)$ y $x \in f^{-1}(B)$, entonces, $f(x) \in A$ y $f(x) \in B$, en otras palabras, $f(x) \in A \cap B$). Por lo tanto, $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Los teoremas 1 y 2 se verifican también en el caso de la unión o intersección de un número arbitrario (finito o infinito) de conjuntos.

TEOREMA 3. *La imagen de la unión de dos conjuntos es igual a la unión de sus imágenes:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

DEMOSTRACION. Si $y \in f(A \cup B)$, esto significa que $y = f(x)$, donde x pertenece al menos a uno de los conjuntos A y B. Por consiguiente, $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Viceversa, si $y \in f(A) \cup f(B)$, entonces, $y = f(x)$, donde x pertenece al menos a uno de los conjuntos A y B, es decir, $x \in A \cup B$ y, por lo tanto, $y = f(x) \in f(A \cup B)$.

Vale subrayar que *la imagen de la intersección de dos conjuntos no coincide, en general, con la intersección de sus imágenes.* Supongamos, por ejemplo, que la aplicación considerada representa la proyección del plano sobre el eje x. En este caso los segmentos

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 0,$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 1$$

no se intersecan y, sin embargo, sus imágenes coinciden.

2°. Partición en clases. Relación de equivalencia. En diferentes cuestiones tropezamos con la partición de unos u otros conjuntos en subconjuntos disjuntos dos a dos. Por ejemplo, se puede partir el plano (considerado como un conjunto de puntos) en rectas paralelas al eje x; podemos imaginarnos el espacio de tres dimensiones como un conjunto de esferas concéntricas de distintos radios; se puede dividir a los habitantes de una ciudad determinada en grupos según el año de nacimiento, etc.

Cada vez que un conjunto M se representa, de uno u otro modo, como la unión de subconjuntos disjuntos dos a dos, hablamos de la *partición del conjunto M en clases.*

Comúnmente nos encontramos con particiones realizadas de acuerdo con uno u otro criterio, según el cual se unen en clases los elementos del conjunto M. Por ejemplo, la totalidad de los triángulos del plano se puede partir en clases de triángulos iguales o en clases de triángulos de la misma área; todas las funciones de x pueden partirse en clases agrupando en una misma clase todas las funciones que tienen el mismo valor en el punto dado x, etc.

Los criterios, según los cuales se realiza la partición en clases de los elementos de uno u otro conjunto, pueden ser muy diversos. Sin embargo, no son del todo arbitrarios. Supongamos, por ejemplo, que queremos partir en clases todos los números reales, incluyendo el número b en la misma clase que el número a si, y sólo si, $b > a$. Está claro que de esta forma no podremos obtener ninguna partición de los números reales en clases, ya que si $b > a$, es decir, si el elemento b debe ser incluido en la misma clase que a, entonces, $a < b$, es decir, el número a *no se puede incluir* en la misma clase que el número b. Además, como a no es mayor de sí mismo, ¡*a no debe figurar* en la clase con sí mismo! Otro ejemplo. Veamos si se puede partir en clases los puntos del plano incluyendo dos puntos en una misma clase si, y sólo si, la distancia entre ellos es menor de 1. Está claro que es imposible realizar esta partición, puesto que si la distancia entre a y b y entre b y c es inferior a 1, ello no significa, de ningún modo, que la distancia de a a c es menor de 1. Por eso, al incluir a en la misma clase con b y b en la misma clase con c, resultará que en una misma clase pueden aparecer dos puntos, la distancia entre los cuales es mayor a 1.

Los ejemplos dados sugieren las condiciones que aseguran que uno u otro criterio permite verdaderamente realizar la partición de los elementos de un conjunto en clases.

Sea M un conjunto y sean «marcados» algunos de los pares (a, b) de elementos de este conjunto[1]. Si (a, b) es un par

[1] Con la particularidad de que los elementos a y b se toman en un orden determinado, es decir, (a, b) y (b, a) son, en general, pares distintos.

«marcado», diremos que el elemento a está ligado al elemento b por la relación φ, lo que denotaremos con el símbolo $a \underset{\varphi}{\sim} b$. Por ejemplo, si se trata de la partición de los triángulos en clases de triángulos de la misma área, $a \underset{\varphi}{\sim} b$ significa que «el triángulo a tiene la misma área que el triángulo b». Una relación φ se llama *relación de equivalencia* si, por sus propiedades, es:

1) *reflexiva*: $a \underset{\varphi}{\sim} a$ para todo elemento $a \in M$;
2) *simétrica*: si $a \underset{\varphi}{\sim} b$, entonces $b \underset{\varphi}{\sim} a$;
3) *transitiva*: si $a \underset{\varphi}{\sim} b$ y $b \underset{\varphi}{\sim} c$, entonces $a \underset{\varphi}{\sim} c$.

Estas condiciones son necesarias y suficientes para que la relación φ (¡el criterio!) permita partir en clases el conjunto M. En efecto, *toda* partición de un conjunto en clases determina una relación de equivalencia entre sus elementos: si $a \underset{\varphi}{\sim} b$ significa que «a se encuentra en la misma clase que b», es fácil probar que la relación φ será reflexiva, simétrica y transitiva. Viceversa, si φ es una relación de equivalencia entre los elementos del conjunto M, siempre obtendremos una partición de este conjunto en clases incluyendo en una misma clase aquellos elementos de M, y sólo aquellos, que son equivalentes.

Efectivamente, sea K_a la clase de elementos de M equivalentes a un elemento fijado a. De la propiedad reflexiva se desprende que el propio elemento a pertenece a la clase K_a. Probemos ahora que dos clases K_a y K_b o bien coinciden o bien no tienen elementos comunes. Supongamos que existe un elemento c que pertenece simultáneamente a K_a y K_b, es decir, $c \underset{\varphi}{\sim} a$ y $c \underset{\varphi}{\sim} b$.

Entonces $a \underset{\varphi}{\sim} c$, debido a la propiedad simétrica, y

$$a \underset{\varphi}{\sim} b \tag{1}$$

debido a la propiedad transitiva.

Si x es ahora un elemento arbitrario de K_a, es decir, $x \underset{\varphi}{\sim} a$, de (1) y de la propiedad transitiva se sigue que $x \underset{\varphi}{\sim} b$, es decir, $x \in K_b$.

De la misma forma se demuestra que todo elemento $y \in K_b$ figura en K_a. Por consiguiente, dos clases K_a y K_b que tienen al menos un elemento común coinciden. De manera que a partir de la relación de equivalencia dada hemos obtenido efectivamente una partición del conjunto M en clases.

El concepto de partición de un conjunto en clases está estrechamente vinculado al concepto de aplicación considerado en el punto anterior.

Sea f una aplicación del conjunto A en el conjunto B. Si unimos en una misma clase todos aquellos elementos de A cuyas imágenes en B coinciden, obtendremos evidentemente una partición del conjunto A. Viceversa, consideremos un conjunto arbitrario A y alguna partición de este conjunto en clases. Sea B

la totalidad de clases en las que se ha partido el conjunto A. Si a cada elemento $a \in A$ ponemos en correspondencia aquella clase (es decir, aquel elemento de B) a la que a pertenece, obtendremos una aplicación del conjunto A sobre el conjunto B.

Ejemplos. 1. Consideremos la proyección del plano xy sobre el eje x. Las imágenes recíprocas de los puntos del eje x son las rectas verticales. Por consiguiente, a esta aplicacion le corresponde la partición del plano en rectas paralelas.

2. Dividamos todos los puntos del espacio de tres dimensiones en clases incluyendo en una misma clase los puntos equidistantes del origen de coordenadas. De este modo, cada clase representa una esfera de un radio determinado. La totalidad de estas clases puede identificarse con el conjunto de todos los puntos pertenecientes al rayo $[0, \infty)$. Por lo tanto, a la partición del espacio tridimensional en esferas concéntricas le corresponde la aplicación de este espacio sobre una semirrecta.

3. Agrupemos en una misma clase todos los números reales que tienen la misma parte fraccionaria. La aplicación que corresponde a esta partición representa la aplicación de la recta sobre la circunferencia de longitud unidad.

El concepto de equivalencia es un caso particular del concepto más general de *relación binaria* que se define del siguiente modo. Sea M un conjunto arbitrario. Designemos mediante M^2 el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), donde $a, b \in M$. Se dice que en M se tiene una relación binaria φ, si en M^2 se escoge un subconjunto R_φ arbitrario. Más exactamente, diremos que el elemento a está en relación φ con el elemento b, y escribiremos $a\varphi b$, si, y sólo si, (a, b) pertenece a R_φ. Un ejemplo de relación binaria es la relación de identidad E consistente en que aEb si, y sólo si, $a=b$; en otras palabras, ésta es la relación determinada por el subconjunto de pares de tipo (a, a). Está claro que toda relación de equivalencia φ en un conjunto M es una relación binaria; pero no es arbitraria sino que verifica las siguientes condiciones:

1) Todo par de tipo (a, a), donde $a \in M$, pertenece a R_φ (condición reflexiva).

2) Si $(a, b) \in R_\varphi$ y $(b, c) \in R_\varphi$, entonces también $(a, c) \in R_\varphi$ (condición transitiva).

3) Si $(a, b) \in R_\varphi$, entonces también $(b, a) \in R_\varphi$ (condición simétrica).

De manera que la relación de equivalencia es una relación binaria que cumple las condiciones reflexiva, transitiva y simétrica. En el párrafo siguiente estudiaremos otro caso particular importante de relación binaria, la ordenación parcial.

§ 4. CONJUNTOS ORDENADOS. NÚMEROS TRANSFINITOS

En este párrafo exponemos varios conceptos relacionados con la idea de ordenación de los elementos de los conjuntos, limitándonos a dar las nociones elementales; una exposición más detallada se puede encontrar en la bibliografía que señalamos al final del libro.

1°. Conjuntos parcialmente ordenados. Sea M un conjunto arbitrario y φ una relación binaria en él. Se dice que ella es una relación de orden parcial si verifica la propiedad reflexiva $[(a, a) \in R_\varphi]$, la propiedad transitiva [si $(a, b \in R_\varphi$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R_\varphi]$ y la siguiente condición conocida como propiedad *antisimétrica:* si $a\varphi b$ y $b\varphi a$, entonces $a=b$. El orden parcial se denota generalmente por medio del símbolo $\leqslant$. De manera que $a \leqslant b$ significa que el par (a, b) pertenece al conjunto R_φ correspondiente. Entonces se dice que el elemento a no supera a b o bien que está contenido en b. Un conjunto en el que está dado un orden parcial se dice *parcialmente ordenado.*

Veamos ejemplo de conjuntos parcialmente ordenados.

1. Todo conjunto puede considerarse, de un modo trivial, como un conjunto parcialmente ordenado aceptando que $a \leqslant b$ si, y sólo si, $a=b$. En otras palabras, el orden parcial puede determinarse en cualquier conjunto mediante la relación binaria de identidad E. Este ejemplo no es, por supuesto, de gran interés.

2. Sea M el conjunto de todas las funciones continuas sobre el segmento $[\alpha, \beta]$. Obtendremos evidentemente un orden parcial aceptando que $f \leqslant g$ si, y sólo si, $f(t) \leqslant g(t)$ para todo t, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

3. El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado resulta parcialmente ordenado si $M_1 \leqslant M_2$ significa que $M_1 \subset M_2$.

4. El conjunto de todos los números naturales resulta parcialmente ordenado si $a \leqslant b$ significa «b es divisible por a».

Sea M un conjunto arbitrario parcialmente ordenado. En el caso de que $a \leqslant b$ y $a \neq b$ emplearemos el símbolo $<$, es decir, escribiremos $a < b$, y diremos que *a es menor que b* o bien *a está contenido estrictamente en b.* A veces en lugar de $a \leqslant b$ emplearemos la denotación equivalente $b \geqslant a$ y diremos en este caso que b es no menor que a (o mayor que a, si $b \neq a$) o bien que b *sigue* a a. El elemento a de un conjunto parcialmente ordenado se denomina *maximal* si de $a \leqslant b$ se deduce que $b=a$. El elemento a se llama *minimal* si de $c \leqslant a$ se sigue que $c=a$.

Un conjunto parcialmente ordenado se llama *dirigido* si para cualesquiera dos de sus puntos a y b existe un tercer punto c que los sigue ($a \leqslant c$, $b \leqslant c$).

2°. Aplicaciones que conservan el orden. Sean M y M' dos conjuntos parcialmente ordenados y f una aplicación biunívoca de M sobre M'. Diremos que esta aplicación *conserva el orden*, si de $a \leqslant b$, donde $a, b \in M$, se deduce que $f(a) \leqslant f(b)$ (en M'). La aplicación f se llama *isomorfismo* de los conjuntos parcialmente ordenados M y M' si $f(a) \leqslant f(b)$ se cumple *cuando, y sólo cuando*, $a \leqslant b$. Los propios conjuntos M y M' se denominan en este caso isomorfos.

Sea, por ejemplo, M el conjunto de los números naturales con el orden parcial señalado en el ejemplo 4 del punto 1 y sea M' el mismo conjunto, pero ordenado del modo natural, es decir, de manera que $b > a$ si $b - a$ es un número positivo. Entonces, la aplicación de M sobre M', que a cada número n le pone en correspondencia ese mismo número, conserva el orden (pero no representa un isomorfismo).

La propia relación de isomorfismo entre conjuntos parcialmente ordenados es, evidentemente, una relación de equivalencia (ya que es simétrica, transitiva y reflexiva). Por lo tanto, si tenemos una colección de conjuntos parcialmente ordenados, todos los conjuntos de esta colección[1] pueden dividirse en clases de conjuntos isomorfos. Cuando lo que nos interesa no es la naturaleza de los elementos de los conjuntos, sino sólo el orden parcial que en ellos existe, se puede, claro está, considerar como idénticos dos conjuntos parcialmente ordenados isomorfos.

3°. Conjuntos ordenados. Tipos ordinales. Puede suceder que siendo a y b elementos de un conjunto parcialmente ordenado no se cumpla ninguna de las relaciones $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$. En este caso se dice que los elementos a y b son *incomparables*. De manera que la relación de orden resulta definida sólo para algunos pares de elementos y por eso hablamos del orden *parcial*. En cambio, si el conjunto parcialmente ordenado M no posee elementos incomparables, decimos que M es un *conjunto ordenado (linealmente ordenado, totalmente ordenado)*. Es decir, M es un conjunto ordenado, si está parcialmente ordenado y si para cualesquiera dos elementos distintos $a, b \in M$ se tiene obligatoriamente que o bien $a < b$ o bien $b < a$.

Los conjuntos considerados en los ejemplos 1, 2, 3 y 4 del

---

[1] Nos abstenemos de emplear conceptos como «todos los conjuntos parcialmente ordenados» porque son, al igual que el concepto del «conjunto de todos los conjuntos», internamente contradictorios por su esencia y no pueden incluirse en concepciones matemáticas rigurosas.

primer punto son conjuntos parcialmente ordenados pero no ordenados. Ejemplos elementales de conjuntos ordenados son los números naturales, el conjunto de todos los números racionales, el conjunto de todos los números reales del segmento $[0, 1]$, etc. (con las relaciones naturales de «mayor» y «menor» que existen en estos conjuntos).

Está claro que cualquier subconjunto de un conjunto ordenado también está ordenado.

El orden es un caso particular del orden parcial y por eso a los conjuntos ordenados se puede aplicar el concepto de aplicación que conserva el orden y, en particular, el concepto de isomorfismo.

Se dice que unos conjuntos tienen el mismo *tipo ordinal* si son ordenados e isomorfos. De manera que el tipo ordinal es lo común que tienen todos los conjuntos ordenados isomorfos, de la misma forma que la potencia es lo común que tienen todos los conjuntos equivalentes (considerados independientemente de cualquier relación de orden que pueda existir en ellos).

La serie de números naturales $1, 2, 3, \ldots$ con la relación natural de orden entre sus elementos es el ejemplo más elemental de conjunto ordenado. Su tipo ordinal se acostumbra a denotar con el símbolo ω.

Dos conjuntos ordenados isomorfos tienen, por supuesto, la misma potencia (ya que el isomorfismo es una correspondencia *biunívoca*) y por eso se puede hablar de la potencia que responde al tipo ordinal dado (por ejemplo, al tipo ω le corresponde la potencia $\aleph_0$). La afirmación recíproca, sin embargo, no es cierta: un conjunto de una potencia dada puede ser ordenado, en general, de diferentes modos. Sólo en el caso de conjuntos finitos el tipo ordinal queda determinado unívocamente por el número n de sus elementos (y se denota también mediante n). Pero ya en el conjunto numerable de los números naturales es posible, además de su tipo «natural» ω, considerar, por ejemplo, el siguiente tipo:

$$1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots,$$

cuando cualquier número par sigue a cualquier impar y los números pares e impares se ordenan entre sí por su magnitud. Se puede probar que a la potencia $\aleph_0$ le corresponde una cantidad infinita, e incluso innumerable, de diferentes tipos ordinales.

4°. Suma ordenada de conjuntos ordenados. Sean M_1 y M_2 dos conjuntos ordenados y θ_1 y θ_2 sus tipos ordinales, respectivamente. En la unión $M_1 \cup M_2$ de los conjuntos M_1 y M_2 se puede introducir un orden aceptando que cada par de elementos de M_1 está ordenado igual que en M_1, que cada par de elementos de M_2 tiene el mismo orden que en M_2 y que *cualquier* elemento de M_1 *precede* a cualquier elemento de M_2. (¡Compruébese que así queda efectivamente establecido un orden!) El conjunto ordenado obtenido de esta forma lo llamaremos *suma ordenada* de los sonjuntos M_1 y M_2 y lo designaremos M_1+M_2. Subrayemos que es importante el orden de los sumandos: la suma M_2+M_1 no es isomorfa, en general, a la suma M_1+M_2.

Se dice que el tipo ordinal de la suma M_1+M_2 es la *suma ordenada* de los tipos ordinales θ_1 y θ_2 y se denota mediante $\theta_1+\theta_2$.

Esta definición se puede fácilmente extender al caso de un número finito arbitrario de sumandos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.

Ejemplo. Consideremos los tipos ordinales ω y n. Es fácil ver que $n+\omega=\omega$; en efecto, si a la serie de los números naturales $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ agregamos a su izquierda un número finito de elementos, obtendremos el mismo tipo ordinal ω. Sin embargo, el tipo ordinal $\omega+n$, es decir, el tipo ordinal del conjunto

$$1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, a_1, a_2, \ldots a_n,$$

no es, evidentemente, igual a ω.

5°. **Conjuntos bien ordenados. Números transfinitos.** Hemos introducido anteriormente los conceptos de orden parcial y de orden. Ahora introduciremos un concepto más restringido, pero muy importante, el concepto de buen orden.

DIFINICION. Se dice que un conjunto ordenado *está bien ordenado* si cualquiera de sus subconjuntos no vacíos tiene un elemento mínimo (es decir, un elemento que precede a todos los del subconjunto).

Si un conjunto ordenado es finito, obviamente, está bien ordenado. Un ejemplo de un conjunto ordenado, pero no bien ordenado, nos ofrece la totalidad de los números racionales del segmento $[0, 1]$. Este conjunto, en sí, tiene un elemento mínimo, el número 0, pero el subconjunto suyo formado por los números racionales *positivos* no tiene elemento mínimo.

Está claro que todo subconjunto (no vacío) de un conjunto bien ordenado está bien ordenado.

El tipo ordinal de un conjunto bien ordenado se llama *número ordinal (número ordinal transfinito* o más brevemente *transfinito ordinal*, particularmente si se quiere subrayar que se trata de un conjunto infinito).

La serie de los números naturales (con la relación de orden corriente) representa no sólo un conjunto ordenado sino bien ordenado. De manera que su tipo ordinal ω es número ordinal

(¡transfinito!). También lo es $\omega+k$, es decir, el tipo del conjunto

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k.$$

Al contrario, el conjunto

$$\ldots,\ -n,\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1 \tag{1}$$

está ordenado, pero no está bien ordenado. Aquí todo subconjunto no vacío tiene un elemento máximo (es decir, un elemento que sigue a todos) pero no tiene, en general, un elemento mínimo (por ejemplo, el conjunto (1), en sí, no lo tiene). El tipo ordinal (¡que no es un número ordinal!) del conjunto (1) suele denotarse mediante el símbolo ω^*.

Demostremos la siguiente proposiicón, simple pero importante.

LEMA 1. *La suma ordenada de un número finito de conjuntos bien ordenados es un conjunto bien ordenado.*

En efecto, sea M un subconjunto arbitrario de la suma ordenada $M_1+M_2+\ldots+M_n$ de conjuntos bien ordenados; consideremos el primero de los conjuntos M_k que contiene elementos de M. La parte del conjunto M que figura en M_k representa un subconjunto del conjunto bien ordenado M_k y, por lo tanto, tiene el primer elemento. Este será también el primer elemento de M.

COROLARIO. *La suma ordenada de números ordinales es un número ordinal.*

Podemos, entonces, a partir de ciertos números ordinales construir números ordinales nuevos. Por ejemplo, partiendo de los números naturales (es decir, de los números ordinales finitos) y del número ordinal ω, se pueden obtener los números ordinales

$$\omega+n,\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+n,\ \omega+\omega+\omega, \text{ etc.}$$

El lector podrá construir sin dificultad los conjuntos bien ordenados correspondientes a estos transfinitos ordinales.

Además de la suma ordenada de tipos ordinales se puede introducir el *producto ordenado*. Sean M_1 y M_2 dos conjuntos ordenados según los tipos θ_1 y θ_2. Tomemos varios ejemplares del conjunto M_1, uno por cada elemento de M_2, y sustituyamos los elementos de M_2 por estos ejemplares de M_1. El conjunto obtenido de este modo se llama producto ordenado de M_1 y M_2 y se denota mediante $M_1 \cdot M_2$. Desde el punto de vista formal el conjunto $M_1 \cdot M_2$ se compone de los pares (a, b), donde $a \in M_1$ y $b \in M_2$, aceptándose que $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ siempre que $b_1 < b_2$ (cualesquiera que sean a_1, a_2) y $(a_1, b) < (a_2, b)$ si $a_1 < a_2$.

De un modo análogo se define el producto ordenado de un número finito arbitrario de factores $M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_p$. El tipo ordinal θ del producto $M_1 \cdot M_2$ de conjuntos ordenados se llama *producto de los tipos ordinales* θ_1 y θ_2:

$$\theta=\theta_1 \cdot \theta_2.$$

El producto ordenado, al igual que la suma ordenada, no es conmutativo.

LEMA 2. *El producto de conjuntos bien ordenados es un conjunto bien ordenado.*

Sea M un subconjunto cualquiera del producto $M_1 \cdot M_2$; el conjunto M está compuesto por pares (a, b). Consideremos los segundos elementos b de todos los pares que figuran en M. Ellos forman un subconjunto de M_2. Puesto que M_2 está bien ordenado, este subconjunto tiene el primer elemento. Denotémoslo mediante b_1 y consideremos todos los pares de M del tipo (a, b_1). Los primeros elementos a de estos pares forman un subconjunto en M_1. Puesto que M_1 está bien ordenado, entre ellos existe el primer elemento. Sea éste a_1. Es fácil ver que el par (a_1, b_1) será entonces el primer elemento de M.

COROLARIO. *El producto ordenado de números ordinales es un número ordinal.*

Ejemplos. Se ve fácilmente que $\omega+\omega=\omega\cdot 2$, $\omega+\omega+\omega=\omega\cdot 3$. Es fácil también construir los conjuntos ordenados según los tipos $\omega\cdot n$, ω^2, $\omega^2\cdot n$, ω^3, ..., ω^p, ... Todos estos conjuntos tienen potencia numerable.

Se puede introducir, así mismo, otras operaciones con los tipos ordinales como, por ejemplo, la potencia y considerar entonces números ordinales como, por ejemplo, ω^ω, ω^{ω^ω}, etc.

6°. Comparación de números ordinales. Si n_1 y n_2 son dos números ordinales finitos, o bien coinciden o bien uno es mayor que otro. Veamos cómo se puede extender esta relación de orden a los números ordinales transfinitos.

Con este fin introduciremos los siguientes conceptos. Todo elemento a de un conjunto bien ordenado M determina el *segmento inicial* $P=$(la totalidad de elementos $<a$) y el *resto* $Q=$ $=$(la totalidad de elementos $\geqslant a$).

Sean α y β dos números ordinales y M y N dos conjuntos de tipo α y β, respectivamente. Diremos que $\alpha=\beta$ si los conjuntos M y N son isomorfos, que $\alpha<\beta$ si M es isomorfo a algún segmento inicial de N y que $\alpha>\beta$ si, al contrario, N es isomorfo a un segmento inicial de M.

TEOREMA. *Dos números ordinales α y β arbitrarios verifican una, y sólo una, de las relaciones:*

$$\alpha=\beta,\ \alpha<\beta \text{ o bien } \alpha>\beta.$$

Para demostras esta proposición estableceremos, ante todo, el siguiente lema.

LEMA. *Si f es una aplicación isomorfa de un conjunto bien ordenado A sobre algún subconjunto suyo B, entonces $f(a)\geqslant a$ para todo $a\in A$.*

En efecto, si existen elementos $a\in A$ tales que $f(a)<a$, entre ellos podremos encontrar el primero (¡tenemos buen orden!). Sea éste a_0 y sea $b_0=f(a_0)$. Entonces, $b_0<a_0$ y, por ser f un isomorfismo, $f(b_0)<f(a_0)=b$, es decir, a_0 no sería el primero de los elementos con esta propiedad.

De este lema se deduce inmediatamente que un conjunto bien ordenado no puede ser isomorfo a un segmento suyo, ya que si A fuese isomorfo al segmento determinado por el elemento a, tendríamos que $f(a) < a$. En otras palabras, las relaciones

$$\alpha = \beta \text{ y } \alpha < \beta$$

no pueden tener lugar simultáneamente. Del mismo modo no puede ser a la vez $\alpha = \beta$ y $\alpha > \beta$. Por otro lado, tampoco pueden verificarse simultáneamente las relaciones

$$\alpha < \beta \text{ y } \alpha > \beta,$$

ya que si esto fuese así, tendríamos (¡por la propiedad transitiva!) que $\alpha < \alpha$ lo que, como hemos visto, es imposible. Hemos demostrado de esta forma que si se verifica una de las relaciones $\alpha \gtreqless \beta$ las otras dos no se cumplen. Probemos ahora que una de estas relaciones siempre tiene lugar, es decir, que cualesquiera dos números ordinales son comparables.

Consideremos para cada número ordinal α el conjunto $W(\alpha)$ de los números ordinales $< \alpha$. Los números que figuran en $W(\alpha)$ son comparables y el propio conjunto $W(\alpha)$ (ordenado según la magnitud de los números ordinales) es de tipo α. En efecto, si el conjunto

$$A = \{\ldots, a, \ldots, b, \ldots\}$$

es de tipo α, los números ordinales inferiores a α corresponden biunívocamente, por definición, a los segmentos iniciales del conjunto A y, por consiguiente, a los elementos de este conjunto. En otras palabras, los elementos de un conjunto de tipo α pueden ser numerados mediante los números ordinales inferiores a α:

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_p, \ldots).$$

Sean ahora α y β dos números ordinales; entonces, $A = W(\alpha)$ y $B = W(\beta)$ son conjuntos de tipo α y β, respectivamente. Sea, además, $C = A \cap B$ la intersección de los conjuntos A y B, es decir, la totalidad de números ordinales inferiores simultáneamente a α y β. El conjunto C está bien ordenado; sea γ su tipo. Demostremos que $\gamma \leqslant \alpha$. En efecto, si $C = A$, entonces $\gamma = \alpha$; si $C \neq A$ tendremos que C es un segmento del conjunto A y por eso

$$\gamma < \alpha.$$

Efectivamente, para todos los $\xi \in C$, $\eta \in A \setminus C$ los números ξ y η son comparables, es decir, $\xi \gtreqless \eta$. Pero es imposible que sea $\eta < \xi < \alpha$, ya que en este caso tendríamos $\eta \in C$. Por lo tanto,

$\xi < \eta$, lo cual significa que C es un segmento del conjunto A y que $\gamma < \alpha$. Además, γ es el primer elemento del conjunto $A \setminus C$. De manera que

$$\gamma \leqslant \alpha \text{ y, análogamente, } \gamma \leqslant \beta.$$

Ahora bien, no puede ocurrir que $\gamma < \alpha$ y $\gamma < \beta$, ya que en este caso tendríamos que

$$\gamma \in A \setminus C, \quad \gamma \in B \setminus C,$$

es decir, por una parte, $\gamma \overline{\in} C$ y, por otra, $\gamma \in A \cap B = C$. Por consiguiente, sólo pueden darse los siguientes casos

$$\gamma = \alpha, \quad \gamma = \beta, \quad \alpha = \beta,$$
$$\gamma = \alpha, \quad \gamma < \beta, \quad \alpha < \beta,$$
$$\gamma < \alpha, \quad \gamma = \beta, \quad \alpha > \beta,$$

es decir, α y β son comparables. El teorema queda demostrado.

Puesto que a cada número ordinal le corresponde una potencia determinada y puesto que la comparabilidad de los números ordinales implica, obviamente, la comparabilidad de las potencias correspondientes, llegamos al siguiente resultado:

Si A y B son dos conjuntos bien ordenados, entonces, o bien son equivalentes (tienen la misma potencia) o bien la potencia de uno es mayor que la potencia del otro (en otras palabras, los conjuntos bien ordenados no pueden tener potencias incomparables).

Consideremos la totalidad de todos los números ordinales correspondientes a la potencia finita o numerable. Ellos forman un conjunto bien ordenado. Es fácil ver que este conjunto es, en sí, no numerable. En efecto denotemos, según se acostumbra comúnmente, mediante ω_1 el tipo ordinal del conjunto de todos los transfinitos numerables. Si la potencia correspondiente a este tipo fuese numerable, también sería numerable el conjunto de tipo ordinal $\omega_1 + 1$. Pero es obvio que el número ω_1 sigue a *todos* los transfinitos correspondientes a la potencia finita o numerable.

Designemos mediante $\aleph_1$ la potencia correspondiente al transfinito ordinal ω_1. Es fácil ver que no puede existir ni una potencia m que verifique la desigualdad

$$\aleph_0 < m < \aleph_1.$$

Verdaderamente, si hubiese tal m, en el conjunto $W(\omega_1)$ de todos los transfinitos ordinales precedentes a ω_1 tendría que existir un subconjunto de potencia m. Este subconjunto estaría bien ordenado y sería no numerable. Pero entonces su tipo ordinal α tendría que preceder a ω_1 y, al mismo tiempo, seguir a todos los transfinitos numerables. Esto contradecería a la definición de ω_1.

7°. Axioma de elección, teorema de Zermelo y otras proposiciones equivalentes a ellos. El hecho de que las potencias de dos cualesquiera conjuntos bien ordenados son obligatoriamente comparables sugiere el siguiente planteamiento: ¿es posible establecer de alguna manera un buen orden en un conjunto cualquiera? Esto permitiría afirmar que no existen potencias incomparables. Una respuesta positiva a este problema fue dada por Zermelo quien demostró que *todo conjunto puede ser bien ordenado*. Con este teorema está vinculada una serie de problemas profundos y de principio. Esto se debe a que su demostración (que no la daremos aquí) se basa, de un modo esencial, en el llamado *axioma de elección* que consiste en lo siguiente:

Si tenemos un conjunto cualquiera M, existe una función φ que pone en correspondencia a todo subconjunto no vacío $A\subset M$ un elemento determinado $\varphi(A)$ de este subconjunto.

Uno de los problemas más complejos y discutidos que surgen al fundamentar la teoría de los conjuntos es la legalidad de aplicar este axioma a conjuntos arbitrarios en los razonamientos que se hacen. No tenemos posibilidad de entrar aquí en su discusión. Observaremos, sin embargo, que la renuncia al axioma de elección restringe, de manera muy esencial, la posibilidad de diferentes construcciones en la teoría de los conjuntos.

Enunciemos algunas proposiciones, cada una de ellas equivalente al axioma de elección (es decir, cualquiera de ellas puede ser demostrada si se acepta el axioma de elección y, viceversa, el axioma de elección puede ser demostrado si se toma por verdadera alguna de estas proposiciones). Es obvio, ante todo, que una de estas proposiciones es el propio teorema de Zermelo. En efecto, si suponemos que el conjunto M está bien ordenado, es suficiente para construir la función $\varphi(A)$, cuya existencia se afirma en el axioma de elección, tomar el primer elemento en cada subconjunto $A\subset M$.

Antes de enunciar las demás proposiciones equivalentes al axioma de elección introduciremos los siguientes conceptos. Sea M un conjunto parcialmente ordenado. Todo subconjunto suyo A cuyos dos elementos cualesquiera son comparables (en el sentido del orden parcial existente en M) se llama *cadena*. Una cadena se llama *maximal* si no forma parte propia de ninguna otra cadena perteneciente a M. Finalmente, diremos que el elemento a del conjunto parcialmente ordenado M es una cota superior del subconjunto $M'\subset M$ si cualquier elemento $a'\in M'$ es menor que a.

TEOREMA DE HAUSDORFF. *Toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado está contenida en alguna de las cadenas maximales de este conjunto.*

El siguiente teorema es, posiblemente, la forma más conveniente de las proposiciones equivalentes al axioma de elección.

TEOREMA DE ZORN. *Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado M admite una cota superior, todo elemento de M precede a un elemento maximal.*

No reproduciremos aquí la demostración de la equivalencia de todas estas proposiciones (el axioma de elección, el teorema de Zermelo, el teorema de Hausdorff y el teorema de Zorn).

Si el conjunto de las cotas superiores del subconjunto A tiene elemento mínimo a, se dice que a es la *cota superior mínima* del subconjunto A; de un modo análogo se define la *cota inferior máxima*. Un conjunto parcialmente ordenado se llama *retículo* o *estructura* si todo subconjunto *finito* no vacío de él admite cota superior mínima y cota inferior máxima.

8°. Inducción transfinita. Un método ampliamente extendido de demostración de unas u otras proposiciones es el método de inducción matemática. Como se sabe, consiste en lo siguiente. Supongamos que se tiene una proposición $P(n)$ que se enuncia para cada número natural n y supongamos que:

1) La proposición $P(1)$ es cierta.

2) Bajo la hipótesis de la validez de $P(k)$ para todo $k \leqslant n$, se deduce que $P(n+1)$ es cierta.

Entonces, la proposición $P(n)$ es válida para todos los $n = 1, 2, \ldots, n, \ldots$. En efecto, en el caso contrario podríamos encontrar entre aquellos n para los cuales $P(n)$ no es cierta el número mínimo, digamos, n_1. Es obvio que $n_1 > 1$, es decir, $n_1 - 1$ es también un número natural, y esto contradice a la condición 2).

Se puede emplear un método análogo sustituyendo la serie de los números naturales por un conjunto bien ordenado cualquiera. En este caso de habla de la *inducción transfinita.* De manera que el método de inducción transfinita consiste en lo siguiente. Sea A un conjunto bien ordenado (se puede considerar, si se quiere, que es el conjunto de todos los transfinitos ordinales inferiores a uno dado) y sea $P(a)$ una proposición que se enuncia para todo $a \in A$ y tal que $P(a)$ es cierta para el primer elemento de A y es cierta para a si es válida para todos los elementos precedentes al elemento a. Entonces, $P(a)$ es cierta para todo $a \in A$. Efectivamente, si en A existiesen elementos para los cuales $P(a)$ no se cumple, podríamos encontrar en el conjunto formado por ellos el primer elemento, digamos a^*, y obtendríamos una contradicción ya que para todos los elementos $a < a^*$ la proposición $P(a)$ sería cierta.

La inducción transfinita puede, en principio, aplicarse a un conjunto cualquiera, ya que éste puede ser bien ordenado de acuerdo con el teorema de Zermelo. Sin embargo, en la práctica conviene más, casi siempre, sustituirlo por el teorema de Zorn, donde sólo se necesita la existencia de un orden parcial en el conjunto considerado.

§ 5. SISTEMAS DE CONJUNTOS [1]

1°. Anillo de conjuntos. Se llama *sistema de conjuntos* a todo conjunto cuyos elementos son, en sí, ciertos conjuntos. Si no se especifica lo contrario, estudiaremos sistemas cuyos elementos son cada uno un subconjunto de cierto conjunto fijado X. Denotaremos los sistemas de conjuntos con letras góticas mayúsculas. Serán de interés principal para nosotros aquellos sistemas de conjuntos que resultan cerrados respecto a las operaciones introducidas en el § 1.

DEFINICION 1. Un sistema no vacío de conjuntos $\mathfrak{R}$ se llama *anillo* si de $A \in \mathfrak{R}$ y $B \in \mathfrak{R}$ se deduce $A \triangle B \in R$ y $A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Puesto que para cualesquiera dos conjuntos A y B

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$$

y

$$A \setminus B = A \triangle (A \cap B),$$

resulta que si $A \in \mathfrak{R}$ y $B \in \mathfrak{R}$, también pertenecen a $\mathfrak{R}$ los conjuntos $A \cup B$ y $A \setminus B$. Consecuentemente, un anillo de conjuntos es un sistema de conjuntos invariante respecto a las operaciones de unión e intersección y de resta y diferencia simétrica. Es obvio que todo anillo es, además, invariante respecto a la operación de toda unión o intersección finitas, es decir, respecto a las operaciones del tipo

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Todo anillo contiene el conjunto vacío $\varnothing$ ya que siempre $A \setminus A = \varnothing$. El sistema que consta sólo del conjunto vacío representa el menor anillo de conjuntos posible.

Un conjunto E se llama *unidad* del sistema de conjuntos $\mathfrak{S}$ si pertenece a $\mathfrak{S}$ y si, además, para todo $A \in \mathfrak{S}$ se verifica la igualdad

[1] Los conceptos que se introducen en este párrafo serán empleados en el capítulo VI al exponer la teoría general de la medida. Por eso este párrafo puede ser estudiado más tarde. Aquellos lectores que piensan, al estudiar la teoría de la medida, limitarse sólo a la medida sobre el plano (§ 1 del capítulo VI) pueden omitirlo completamente.

$$A \cap E = A.$$

De manera que la unidad de un sistema de conjuntos $\mathfrak{S}$ no es otra cosa que el conjunto maximal de este sistema que contiene todos los demás conjuntos que figuran en $\mathfrak{S}$.

Un anillo de conjuntos provisto de la unidad se denomina *álgebra* de conjuntos.

Ejemplos. 1. Cualquiera que sea el conjunto A, el sistema $\mathfrak{M}(A)$ de todos subconjuntos suyos representa un álgebra de conjuntos siendo la unidad el conjunto $E = A$.

2. Cualquiera que sea el conjunto no vacío A, el sistema $\{\varnothing, A\}$ formado por el conjunto A y el conjunto vacío $\varnothing$ representa un álgebra de conjuntos siendo la unidad el conjunto $E = A$.

3. El sistema de todos los subconjuntos finitos de un conjunto arbitrario A es un anillo de conjuntos. Este anillo representará un álgebra si, y sólo si, el propio conjunto A es finito.

4. El sistema de todos los subconjuntos acotados de la recta númerica es un anillo de conjuntos sin unidad.

Directamente de la definición de un anillo de conjuntos se desprende el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *La intersección* $\mathfrak{R} = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{R}_{\alpha}$ *de un conjunto cualquiera de anillos es también un anillo.*

Demostremos un resultado simple pero de importancia para lo sucesivo.

TEOREMA 2. *Cualquiera que sea el sistema no vacío de conjuntos* $\mathfrak{S}$ *existe un anillo y sólo uno,* $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ *que contiene* $\mathfrak{S}$ *y está contenido en cualquier anillo* $\mathfrak{R}$ *que contiene* $\mathfrak{S}$.

DEMOSTRACION. Es fácil ver que el anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ se determina unívocamente por el sistema $\mathfrak{S}$. Para demostrar la existencia de este anillo, consideremos la unión $X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ de todos los conjuntos A que figuran en $\mathfrak{S}$ y el anillo $\mathfrak{M}(X)$ de todos los subconjuntos del conjunto X. Sea $\sum$ la totalidad de los anillos de conjuntos que están contenidos en $\mathfrak{M}(X)$ y contienen $\mathfrak{S}$. La intersección

$$\mathfrak{P} = \bigcap_{\mathfrak{R} \in \Sigma} \mathfrak{R}$$

de todos estos anillos será precisamente el anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

En efecto, cualquiera que sea el anillo $\mathfrak{R}^*$ conteniendo $\mathfrak{S}$, la intersección $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{M}(X)$ será un anillo de $\sum$ y, por consiguiente,

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}^*,$$

es decir, $\mathfrak{P}$ verifica realmente la condición de ser el anillo minimal. Este anillo se llama anillo minimal sobre el sistema $\mathfrak{S}$ y se denota $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

2°. **Semianillo de conjuntos.** En varios problemas, por ejemplo, en la teoría de medida, desempeña un papel importante, además del concepto de anillo, el concepto más general de semianillo de conjuntos.

DEFINICION 2. Un sistema de conjuntos $\mathfrak{S}$ se llama *semianillo* si contiene el conjunto vacío $\varnothing$, está cerrado respecto a la operacción de intersección y cumple la siguiente propiedad: si A y $A_1 \subset A$ pertenecen a $\mathfrak{S}$, se puede representar el conjunto A en la forma $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, donde A_k son conjuntos de $\mathfrak{S}$ disjuntos dos a dos y el primero de ellos es el conjunto dado A_1.

Todo sistema de conjuntos disjuntos dos a dos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cuya unión es el conjunto dado A se llamará, en lo sucesivo, *descomposición finita* del conjunto A.

Todo anillo de conjuntos $\mathfrak{R}$ es un semianillo ya que si A y $A_1 \subset A$ figuran en $\mathfrak{R}$, tiene lugar la descomposición

$$A = A_1 \cup A_2, \text{ donde } A_2 = A \setminus A_1 \in \mathfrak{R}.$$

Un ejemplo de un semianillo que no es anillo de conjuntos obtendremos al tomar la totalidad de los intervalos (a, b), los segmentos $[a, b]$ y los semisegmentos $[a, b)$ y $(a, b]$ de la recta numérica[1]).

Veamos algunas propiedades de los semianillos de conjuntos.

LEMA 1. *Supongamos que los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, A$ pertenecen al semianillo $\mathfrak{S}$ y que, además, los conjuntos A_i son subconjuntos de A disjuntos dos a dos. Entonces, los conjuntos A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se pueden tomar como los n primeros miembros en la descomposición finita*

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k, \quad s \geqslant n,$$

del conjunto A siendo todos los $A_k \in \mathfrak{S}$.

DEMOSTRACION. Emplearemos el método de inducción matemática. Para $n = 1$ la afirmación del lema es válida de acuerdo con la definición de semianillo. Supongamos que esta proposición es

---

[1]) En los intervalos se incluye, por supuesto, el intervalo «vacío» (a, a) y en los segmentos, el segmento compuesto por un solo punto $[a, a]$.

cierta para $n=m$ y consideremos $m+1$ conjuntos $A_1, \ldots, A_m$, A_{m+1} que verifican las condiciones del lema. Por hipótesis:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_p,$$

donde todos los conjuntos $B_q (q = 1, 2, \ldots, p)$ pertenecen a $\mathfrak{S}$. Tomemos

$$B_{q1} = A_{m+1} \cap B_q.$$

De acuerdo con la definición de semianillo tiene lugar la descomposición

$$B_q = B_{q1} \cup B_{q2} \cup \ldots \cup B_{qr_q},$$

donde todos los B_{qj} pertenecen a $\mathfrak{S}$. Es fácil ver que

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1} \cup \bigcup_{q=1}^{p} \bigcup_{j=2}^{r_q} B_{qj}.$$

De modo que hemos demostrado la afirmación del lema para $n = m+1$ y, por consiguiente, para todo n.

LEMA 2. *Cualquiera que sea el sistema finito de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ pertenecientes al semianillo $\mathfrak{S}$, existe en $\mathfrak{S}$ un sistema finito de conjuntos $B_1, \ldots, B_t$, disjuntos dos a dos, tal que todo A_k se puede representar mediante la unión*

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s$$

de algunos de los conjuntos B_s.

DEMOSTRACION. Para $n=1$ el lema resulta trivial, ya que es suficiente tomar, en este caso, $t=1$ y $B_1 = A_1$. Supongamos que el lema es cierto para $n=m$ y consideremos en $\mathfrak{S}$ un sistema de conjuntos $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$ cualquiera. Sean $B_1, B_2, \ldots, B_t$ los conjuntos de $\mathfrak{S}$ que verifican las condiciones del lema respecto a $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Tomemos

$$B_{s1} = A_{m+1} \cap B_s.$$

En virtud del lema 1 tiene lugar la descomposición

$$A_{m+1} = \bigcup_{s=1}^{t} B_{s1} \cup \bigcup_{p=1}^{q} B'_p, \quad B'_p \in \mathfrak{S}, \tag{1}$$

y de acuerdo con la definición propia de semianillo, la descomposición

$$B_s = B_{s1} \cup B_{s2} \cup \ldots \cup B_{sf_s}, \quad B_{sj} \in \mathfrak{S}.$$

fácil ver que

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} \bigcup_{j=1}^{r_s} B_{sj}, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

y que los conjuntos

$$B_{sj}, \; B'_p$$

son disjuntos dos a dos. Es decir, los conjuntos B_{sj}, B'_p verifican las condiciones del lema respecto a $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$. El lema queda demostrado.

3°. Anillo engendrado por un semianillo. Hemos visto ya en el primer punto que para todo sistema de conjuntos $\mathfrak{S}$ existe un anillo minimal, y sólo uno, que contiene a $\mathfrak{S}$. Sin embargo, no es fácil construir de hecho a partir de $\mathfrak{S}$ el anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ en el caso de un sistema $\mathfrak{S}$ arbitrario. Esto resulta posible en el importante caso cuando $\mathfrak{S}$ representa un semianillo, como se ve del siguiente teorema.

TEOREMA 3. *Si $\mathfrak{S}$ es un semianillo, $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ coincide con el sistema $\mathfrak{Z}$ de conjuntos A que admiten descomposiciones finitas*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

en conjuntos $A_k \in \mathfrak{S}$.

DEMOSTRACION. Comprobemos que el sistema $\mathfrak{Z}$ forma un anillo. Si A y B son conjuntos cualesquiera de $\mathfrak{Z}$, tienen las descomposiciones

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^{m} B_k, \quad A_k \in \mathfrak{S}, \; B_k \in \mathfrak{S}.$$

Puesto que $\mathfrak{S}$ es un semianillo, los conjuntos

$$C_{ij} = A_i \cup B_j$$

también pertenecen a $\mathfrak{S}$. En virtud del lema 1 existen las descomposiciones

$$A_i = \bigcup_j C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}; \quad B_j = \bigcup_i C_{ij} \cup \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}, \tag{2}$$

donde $D_{ik}, E_{jl} \in \mathfrak{S}$. De (2) se desprende que los conjuntos $A \cap B$ y $A \triangle B$ admiten las descomposiciones siguientes:

$$A \cap B = \bigcup_{i,\,j} C_{ij}, \quad A \triangle B = \bigcup_{i,\,k} D_{ik} \cup \bigcup_{j,\,l} E_{jl},$$

es decir, pertenecen a $\mathfrak{Z}$. Por lo tanto, $\mathfrak{Z}$ es realmente un anilo; es obvio que entre los anillos que contienen $\mathfrak{S}$, éste es el anillo minimal.

4°. Algebras de Borel. En varios problemas, en la teoría de la medida, en particular, es preciso considerar la unión e intersección de una cantidad numerable, y no sólo finita, de conjuntos. Por eso conviene introducir los siguientes conceptos, además del de anillo de conjuntos.

DEFINICION 3. Un anillo de conjuntos se llama *σ-anillo* si junto con toda sucesión de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ contiene la unión

$$S=\bigcup_n A_n.$$

DEFINICION 4. Un anillo de conjuntos se llama *δ-anillo* si junto con toda sucesión de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ contiene la intersección

$$D=\bigcap_n A_n.$$

Es natural llamar *σ-álgebra* a todo σ-anillo con unidad y *δ-álgebra* a todo δ-anillo con unidad. Es fácil ver, sin embargo, que estos dos conceptos coinciden: toda σ-álgebra es al mismo tiempo una δ-álgebra y toda δ-álgebra, una σ-álgebra. Esto se deduce de las relaciones de dualidad:

$$\bigcup_n A_n=E\setminus\bigcup_n (E\setminus A_n),$$

$$\bigcap_n A_n=E\setminus\bigcup_n (E\setminus A_n)$$

(véase el § 1). Las δ-álgebras o, que es lo mismo, las σ-álgebras suelen llamarse *álgebras de Borel* o, simplemente, *B-álgebras*.

El ejemplo más sencillo de una B-álgebra es la totalidad de los subconjuntos de un conjunto A.

Si se tiene un sistema de conjuntos $\mathfrak{S}$, siempre existe al menos una B-álgebra que contiene este sistema. En efecto, pongamos

$$X=\bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A$$

y consideremos el sistema $\mathfrak{B}$ de todos los subconjuntos del conjunto X. Está claro que $\mathfrak{B}$ es una B-álgebra que contiene $\mathfrak{S}$. Si $\tilde{\mathfrak{B}}$ es una B-álgebra arbitraria que contiene $\mathfrak{S}$

y $\tilde{X}$ es su unidad, todo $A \in \mathfrak{S}$ está contenido en $\tilde{X}$ y, por consiguiente, $X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A \subset \tilde{X}$. Una B-álgebra $\mathfrak{B}$ se llama *irreducible* (respecto al sistema $\mathfrak{S}$) cuando $\tilde{X} = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$. En otras palabras, una B-álgebra irreducible es una B-álgebra que no contiene puntos no pertenecientes a ninguno de los conjuntos $A \in \mathfrak{S}$. Es natural limitarse siempre a considerar sólo estas B-álgebras.

Para las B-álgebras irreducibles tiene lugar un teorema análogo al teorema 2 demostrado anteriormente para los anillos.

TEOREMA 4. *Cualquiera que sea el sistema de conjuntos no vacío $\mathfrak{S}$ existe una B-álgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ irreducible (respecto a este sistema) que contiene $\mathfrak{S}$ y está contenida en cualquier B-álgebra que contiene $\mathfrak{S}$.*

LA DEMOSTRACIÓN se realiza exactamente del mismo modo que la demostración del teorema 2. La B-álgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ se llama *B-álgebra minimal sobre el sistema $\mathfrak{S}$* o *clausura boreliana del sistema $\mathfrak{S}$*.

En el Análisis desempeñan un papel importante los llamados *conjuntos de Borel* o *B-conjuntos*, es decir, los conjuntos de la recta numérica pertenecientes al B-álgebra minimal sobre la totalidad de los segmentos $[a, b]$.

5°. Sistemas de conjuntos y aplicaciones. Señalemos algunos resultados que nos harán falta al estudiar las funciones medibles.

Sea $y = f(x)$ una función definida sobre el conjunto M y que toma valores en el conjunto N y sea $\mathfrak{M}$ algún sistema de subconjuntos del conjunto M. Designemos mediante $f(\mathfrak{M})$ el sistema de todas las imágenes $f(A)$ de los conjuntos pertenecientes a $\mathfrak{M}$. Sea, además, $\mathfrak{N}$ algún sistema de conjuntos contenidos en N y $f^{-1}(\mathfrak{N})$ el sistema de todas las imágenes recíprocas $f^{-1}(A)$ de los conjuntos que figuran en $\mathfrak{N}$. Tienen lugar las siguientes proposiciones (dejamos a cargo del lector las demostraciones):

1) Si $\mathfrak{N}$ es un anillo, también lo es $f^{-1}(\mathfrak{N})$.
2) Si $\mathfrak{N}$ es un álgebra, también lo es $f^{-1}(\mathfrak{N})$.
3) Si $\mathfrak{N}$ es una B-álgebra, también lo es $f^{-1}(\mathfrak{N})$.
4) $\mathfrak{R}(f^{-1}, \mathfrak{N}) = f^{-1}(\mathfrak{R}(\mathfrak{N}))$.
5) $\mathfrak{B}(f^{-1}\mathfrak{N}) = f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathfrak{N}))$.

¿Continuarán siendo ciertas estas proposiciones si sustituimos f^{-1} por f y $\mathfrak{N}$ por $\mathfrak{M}$?

Observaciones finales. La teoría de conjuntos surge como una rama de las Matemáticas en los trabajos del matemático alemán Georg Cantor. Las ideas de Cantor, recibidas primero con desconfianza, obtienen más tarde una amplia divulgación y en el siglo veinte el punto de vista de la teoría de conjuntos se convierte en base de las más diferentes ramas de las Matemáticas: conceptos tan fundamentales como grupo, anillo, cuerpo, espacio lineal, etc., se definen generalmente como conjuntos compuestos por elementos de una naturaleza arbitraria que verifican unos u otros axiomas complementarios. En el desarrollo sucesivo de la teoría de conjuntos surgieron varias dificultades lógicas y esto condujo, naturalmente, a tratar de sustituir la teoría de conjuntos « ingenua » por construcciones axiomáticas rigurosas. Aquí resultó que algunos problemas de la teoría de conjuntos que, al parecer, admiten una solución determinada de tipo « sí » o « no », tienen, en realidad, otra naturaleza. Uno de ellos es el famoso problema de continuo: ¿ existen potencias no numerables inferiores al continuo? Basándose en cierta axiomática (en la discusión de la cual no podemos aquí entrar), Gödel demostró que la solución negativa de este problema no contradice a la teoría axiomática mencionada y, más tarde, Cohen demostró que su solución positiva no es contradictoria en el mismo sentido.

La teoría de conjuntos se expone, con mayor o menor detalle y generalidad, en varios libros de texto.

CAPITULO II

ESPACIOS METRICOS Y TOPOLOGICOS

§ 1. CONCEPTO DE ESPACIO MÉTRICO

1°. Definición y ejemplos principales. Una de las operaciones principales del Análisis es el paso al límite. Esta operación descansa sobre el hecho de que en la recta numérica está definida la distancia entre dos puntos. Muchos resultados principales del Análisis no tienen nada que ver con la naturaleza algebraica del conjunto de los números reales (es decir con el hecho de que forman un cuerpo) y sólo se apoyan en aquellas propiedades de los números reales que están relacionadas con el concepto de distancia. Generalizando la interpretación de los números reales como un conjunto en el que se ha definido la distancia entre sus elementos, llegamos al concepto de espacio métrico, uno de los conceptos más importantes de la matemática moderna. A continuación exponemos los resultados fundamentales de la teoría de los espacios métricos y de sus generalizaciones, los espacios topológicos. Los resultados de este capítulo son esenciales para toda la exposición ulterior.

DEFINICION. Un *espacio métrico* es un par (X, ρ), compuesto de un conjunto (espacio) X de elementos (puntos) y de una distancia, es decir, una función unívoca real y no negativa $\rho(x, y)$ definida para dos cualesquiera elementos x e y de X y que verifica las tres condiciones siguientes:

1) $\rho(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,
2) (axioma de simetría): $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3) (axioma triangular): $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

El propio espacio métrico, es decir, el par (x, ρ), lo denotaremos, como regla general, mediante una letra:

$$R = (X, \rho).$$

En los casos en que la equivocación esté excluida denotaremos frecuentemente el espacio métrico con el mismo símbolo X que describe la «reserva de puntos».

Señalemos ejemplos de espacios métricos. Algunos de estos espacios desempeñan un papel muy importante en el Análisis.

1. Tomando para los elementos de un conjunto arbitrario

$$\rho(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{si } x=y, \\ 1, & \text{si } x\neq y, \end{cases}$$

obtendremos, evidentemente, un espacio métrico que puede ser denominado espacio de puntos aislados.

2. El conjunto de los números reales con la distancia

$$\rho(x, y)=|x-y|$$

forma el espacio métrico R^1.

3. El conjunto de grupos ordenados de n números reales

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con la distancia

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \tag{1}$$

se denomina *espacio aritmético euclídeo de n dimensiones R^n*. Es evidente que en R^n se verifican los axiomas 1 y 2. Demostremos que en R^n también se cumple el axioma triangular.

Sean $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, \ldots, y_n)$ y $z=(z_1, \ldots, z_n)$; entonces el axioma triangular se puede escribir en la forma:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2}. \tag{2}$$

Si tomamos $y_k-x_k=a_k$ y $z_k-y_k=b_k$, tendremos $z_k-x_k=$ $=a_k+b_k$ y la desigualdad (2) obtiene la forma:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}. \tag{3}$$

Pero esta desigualdad se deduce inmediatamente de la conocida desigualdad de Cauchy—Buniakovski [1]:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{4}$$

En efecto, de acuerdo con esta desigualdad tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + $$
$$+ 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2;$$

con esto queda demostrada la desigualdad (3) y, por consiguiente, la desigualdad (2).

4. Consideremos el mismo conjunto de grupos ordenados de n números reales $x = (x_1, \ldots, x_n)$, pero definiendo la distancia en él mediante la fórmula

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|. \tag{5}$$

Se ve inmediatamente que se cumplen los axiomas 1, 2 y 3. Denotaremos este espacio métrico con el símbolo R_1^n.

5. Tomemos de nuevo el conjunto de los ejemplos 3 y 4 definiendo la distancia entre sus elementos mediante la fórmula

$$\rho_0(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k - z_k|. \tag{6}$$

Es evidente que se cumplen los axiomas 1, 2 y 3. Para muchas cuestiones del Análisis este espacio, que denotaremos R_0^n, es no menos cómodo que el espacio euclídeo R^n.

Los tres últimos ejemplos muestran que a veces es importante tener, en efecto, diferentes denotaciones para el espacio métrico y para el conjunto de sus puntos, ya que una misma reserva de puntos puede ser metrizada de diferentes maneras.

6. El conjunto $C_{[a, b]}$ de todas las funciones reales continuas definidas en el segmento $[a, b]$ con la distancia

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |g(t) - f(t)| \tag{7}$$

[1] La desigualdad de Cauchy—Buniakovski se sigue de la identidad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2,$$

que se puede comprobar directamente.

también forma un espacio métrico. Los axiomas 1, 2 y 3 se comprueban directamente. Este espacio desempeña un papel muy importante en el Análisis. Lo denotaremos con el mismo símbolo $C_{[a,b]}$ que empleamos para el conjunto de los puntos de este espacio. En lugar de $C_{[0,1]}$ escribiremos simplemente C.

7. Designemos mediante l_2 el espacio métrico cuyos puntos son todas las sucesiones

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

de números reales que verifican la condición

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \infty$$

y en el que la distancia viene dada por

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}. \qquad (8)$$

La función $\rho(x, y)$ así definida tiene sentido para todos $x, y \in l_2$, ya que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2$ converge siempre que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2<\infty$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k^2<\infty$; esto se desprende de la siguiente desigualdad elemental

$$(x_k \pm y_k)^2 \leqslant 2(x_k^2+y_k^2).$$

Al mismo tiempo vemos que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ pertenecen a l_2, también $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n, \ldots) \in l_2$. Comprobemos ahora que la función (8) verifica los axiomas de espacio métrico. Los axiomas 1 y 2 son evidentes y el axioma 3 adquiere en este caso la forma

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k-x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2} \qquad (9)$$

De acuerdo con lo dicho anteriormente converge cada una de las tres series que aquí figuran. Por otro lado para todo n se verifica la desigualdad

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}$$

(véase el ejemplo 4). Pasando al límite para $n \to \infty$ obtenemos (9), es decir, la desigualdad triangular en l_2.

8. Consideremos, al igual que en el ejemplo 6, el conjunto de todas las funciones continuas en el segmento $[a, b]$, pero definiendo la distancia de otro modo, a saber

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{10}$$

Este espacio métrico lo denotaremos $C^2_{[a, b]}$ y lo llamaremos *espacio de funciones continuas con métrica cuadrática*. Los axiomas 1 y 2 del espacio métrico son otra vez evidentes, mientras que el axioma triangular se deduce directamente de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski en su forma integral[1]

$$\left(\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \right)^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\, dt \cdot \int_a^b y^2(t)\, dt.$$

9. Consideremos el conjunto de todas las sucesiones acotadas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de números reales. Admitiendo

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|, \tag{11}$$

obtenemos un espacio métrico que denotaremos m. Los axiomas 1, 2 y 3 se verifican evidentemente.

10. El conjunto de todos los grupos ordenados de n números reales con la distancia

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}, \tag{12}$$

donde p es un número fijo arbitrario $\geqslant 1$, representa un espacio métrico que denotaremos $R_p^{(n)}$. También en este caso es obvio que se verifican los axiomas 1 y 2. Comprobemos el axioma 3. Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ tres puntos de $R_p^{(n)}$. Pongamos

$$y_k - x_k = a_k, \quad z_k - y_k = b_k.$$

La desigualdad

$$\rho_p(x, z) \leqslant \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z)$$

---

[1] Esta desigualdad puede obtenerse, por ejemplo, de la siguiente identidad que se comprueba fácilmente

$$\left(\int_a^b x(t)\, y(t)\, dt \right)^2 = \int_a^b x^2(t)\, dt \int_a^b y^2(t)\, dt - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [x(s)\, y(t) - y(s)\, x(t)]^2 \, ds\, dt.$$

que debemos demostrar puede representarse entonces en la forma

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}. \qquad (13)$$

Esta es la *desigualdad de Minkowski*. Para $p=1$ la desigualdad de Minkowski es obvia (el valor absoluto de la suma no sobrepasa la suma de los valores absolutos) y, por consiguiente, podemos limitarnos a considerar el caso $p>1$[1].

La demostración de la desigualdad (13) para $p>1$ se basa en la *desigualdad de Hölder:*

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}, \qquad (14)$$

donde los números $p>1$ y $q>1$ cumplen la condición

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \qquad (15)$$

Observemos que la desigualdad (14) es homogénea. Ello significa que si se cumple para dos vectores cualesquiera

$$a=(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ y } b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

también se verifica para los vectores λa y μb, donde λ y μ son números arbitrarios. Por eso es suficiente demostrar la desigualdad (14) para el caso de que

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q=1. \qquad (16)$$

Supongamos, pues, que se cumple la condición (16); demostremos que

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant 1. \qquad (17)$$

Consideremos en el plano (ξ, η) la curva dada por la ecuación $\eta=\xi^{p-1}$ $(\xi>0)$, o, que es lo mismo, por la ecuación $\xi=\eta^{q-1}$ (fig. 8). Del dibujo se ve claramente que para cualesquiera valores positivos a y b será $S_1+S_2\geqslant ab$. Calculemos las áreas S_1 y S_2:

$$S_1=\int_0^a\xi^{p-1}\,d\xi=\frac{a^p}{p}, \quad S_2=\int_0^b\eta^{q-1}\,d\eta=\frac{b^q}{q}.$$

[1] Para $p<1$ la desigualdad de Minkowski no tiene lugar. En otras palabras, si pretendiéramos considerar el espacio $R_p^{(n)}$ para $p<1$, en este espacio no se cumpliría el axioma triangular.

Por lo tanto, se verifica la siguiente desigualdad numérica

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Poniendo $a = |a_k|$, $b = |b_k|$ y sumando respecto a k desde 1 hasta n, obtendremos tomando en cuenta (15) y (16)

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1.$$

Hemos demostrado la desigualdad (17) y, por consiguiente, la desigualdad general (14). Para $p=2$ la desigualdad de Hölder (14) se convierte en la desigualdad de Cauchy—Buniakovski (4).

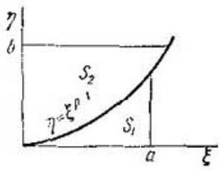

FIG. 8

Pasemos a demostrar ahora la desigualdad de Minkowski. Para ello consideremos la identidad

$$(|a|+|b|)^p = (|a|+|b|)^{p-1}|a| + (|a|+|b|)^{p-1}|b|.$$

Tomando en la identidad escrita $a = a_k$, $b = b_k$ y sumando respecto a k desde 1 hasta n, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p = \\ = \sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

Aplicando ahora a cada una de las sumas que figuran a la derecha la desigualdad de Hölder y tomando en consideración que $(p-1)q = p$, encontramos

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p \leqslant \\ \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/q} \left(\left[\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right]^{1/p}\right).$$

Dividiendo ambas partes de esta desigualdad por

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/q},$$

obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}$$

y de aquí se deduce inmediatamente la desigualdad (13). Con esto queda comprobado el axioma triangular para el espasio $R_p^{(n)}$.

La métrica ρ_p considerada en este ejemplo coincide para $p=2$ con la métrica euclídea (ejemplo 3) y para $p=1$ con la métrica del ejemplo 4. Se puede demostrar que la métrica

$$\rho_0(x, y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|y_k-x_k|,$$

introducida en el ejemplo 5, es el caso límite de la métrica $\rho_p(x, y)$, es decir,

$$\rho_0(x, y)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p}.$$

De la desigualdad

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

establecida anteriormente, es fácil deducir la *desigualdad integral de Hölder*

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b|y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$$

que se verifica para cualesquiera funciones $x(t)$ e $y(t)$ siempre que las integrales que figuran a la derecha tengan sentido. A su vez, de aquí se obtiene la *desigualdad integral de Minkowski*

$$\left(\int_a^b|x(t)+y(t)|^p dt\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|y(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

11. Veamos otro ejemplo interesante de espacio métrico. Sus elementos son todas las sucesiones de números reales

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$$

tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty,$$

donde $p \geqslant 1$ es un número fijo, y la distancia viene dada por la fórmula

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | y_k - x_k |^p \right)^{1/p}. \tag{18}$$

Denotaremos este espacio métrico mediante l_p.

De acuerdo con la desigualdad de Minkowski (13) tenemos para n cualquiera

$$\left(\sum_{k=1}^{n} | y_k - x_k |^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} | x_k |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} | y_k |^p \right)^{1/p}.$$

Por hipótesis, las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} | y_k |^p$$

convergen; por eso, pasando al límite para $n \to \infty$, obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} | y_k - x_k |^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} | y_k |^p \right)^{1/p} < \infty. \tag{19}$$

Esto demuestra que la fórmula (18) mediante la cual se define la distancia en l_p, tiene sentido para cualesquiera $x, y \in l_p$. Al mismo tiempo, la desigualdad (19) muestra que en l_p se verifica el axioma triangular. Los demás axiomas son evidentes.

Un número ilimitado de nuevos ejemplos proporciona la siguiente idea. Sea $R = (X, \rho)$ un espacio métrico y M cualquier subconjunto de X. En este caso el conjunto M con la misma función $\rho(x, y)$ pero definida ya para x e y de M también representa un espacio métrico, que se denomina *subespacio* del espacio R.

2°. Aplicaciones continuas de espacios métricos. Isometría. Sean X e Y dos espacios métricos y f una aplicación del espacio X en Y. Por lo tanto, a cada elemento $x \in X$ se pone en correspondencia un elemento $y = f(x)$ de Y. Esta aplicación se dice *continua* en el punto $x_0 \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal, que para todos $x \in X$ que cumplen la desigualdad

$$\rho(x, x_0) < \delta,$$

se verifica la desigualdad

$$\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(aquí ρ es la distancia en X y ρ_1 la distancia en Y). Si la aplicación f es continua en todos los puntos del espacio X, se dice que f es continua sobre X. Si X e Y son dos conjuntos numéricos, es decir, f es una función numérica definida sobre un subconjunto X de la recta numérica, esta definición de la continuidad de una aplicación coincide con definición, conocida del Análisis elemental, de la continuidad de una función.

Siendo la aplicación f del espacio X sobre el espacio Y biunívoca, existe la aplicación inversa $x=f^{-1}(y)$ del espacio Y sobre el espacio X. Si la aplicación f es biunívoca y bicontinua (es decir, tanto f como f^{-1} son aplicaciones continuas), se la denomina aplicación homeomorfa o *homeomorfismo* y los espacios X e Y, entre los cuales se puede establecer una aplicación homeomorfa, se denominan espacios homeomorfos. Como ejemplo de espacios homeomorfos pueden servir toda la recta numérica $(-\infty, \infty)$ y un intervalo, por ejemplo, el intervalo $(-1, 1)$. En este caso el homeomorfismo se establece mediante la fórmula

$$y=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x.$$

Un caso importante particular de homeomorfismo en la así llamada aplicación isométrica de espacios métricos.

Una aplicación biunívoca f del espacio métrico $R=(X, \rho)$ sobre el espacio métrico $R'=(Y, \rho')$ se denomina aplicación *isométrica*, si

$$\rho(x_1, x_2)=\rho'(f(x_1), f(x_2))$$

para cualesquiera $x_1, x_2 \in R$. Dos espacios R y R', entre los cuales se puede establecer una correspondencia de isometría, se denominan *isométricos*.

La isometría de dos espacios R y R' significa que las relaciones métricas entre sus elementos son las mismas; puede ser distinta sólo la naturaleza de los propios elementos, lo que, desde el punto de vista de la teoría de espacios métricos, no tiene importancia. En lo sucesivo los espacios isométricos serán considerados como idénticos.

Al final del § 5 de este capítulo volveremos a tratar, desde un punto de vista más general, los conceptos aquí introducidos (continuidad, homeomorfismo).

§ 2. CONVERGENCIA. CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS

1°. Puntos de acumulación. Adherencia. En este parágrafo expondremos algunos conceptos principales de la teoría de espacios métricos que emplearemos frecuentemente en lo sucesivo.

Una *bola abierta* $B(x_0, r)$ en el espacio métrico R es el conjunto de los puntos $x \in R$ que verifican la condición

$$\rho(x, x_0) < r.$$

El punto fijo x_0 se llama *centro* y el número r, *radio* de esta bola.

Una *bola cerrada* $B[x_0, r]$ es el conjunto de los puntos $x \in R$ que cumplen la condición

$$\rho(x, x_0) \leqslant r.$$

Una bola abierta de radio ε y centro en x_0 se denominará también *ε-vecindad*[1] del punto x_0 y se denotará $O_\varepsilon(x_0)$.

EJERCICIO. Dése un ejemplo de espacio métrico y dos bolas $B(x, \rho_1)$ y $B(y, \rho_2)$ en él, tales que $\rho_1 > \rho_2$, $B(x, \rho_1) \subset B(y, \rho_2)$.

Un punto $x \in R$ se denomina *punto de adherencia* del conjunto $M \subset R$, si cualquier vecindad suya contiene al menos un punto de M. La totalidad de los puntos de adherencia del conjunto M se denota mediante $[M]$ y se llama la *adherencia* (también clausura) de este conjunto. De esta manera hemos definido para los conjuntos de un espacio métrico la *operación de adherencia* que consiste en el paso del conjunto M a su adherencia $[M]$.

TEOREMA 1. *La operación de adherencia tiene las siguientes propiedades:*

1) $M \subset [M]$,
2) $[[M]] = [M]$,
3) *si* $M_1 \subset M_2$, *entonces* $[M_1] \subset [M_2]$,
4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

DEMOSTRACION. La primera afirmación es evidente, ya que todo punto perteneciente a M es un punto de adherencia del conjunto M. Demostremos la segunda propiedad. Sea $x \in [[M]]$. En este caso, en cualquier vecindad $O_\varepsilon(x)$ de este punto existirá un punto $x_1 \in [M]$. Pongamos $\varepsilon - \rho(x, x_1) = \varepsilon_1$ y consideremos la bola $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Esta bola se encuentra íntegramente dentro de la bola $O_\varepsilon(x)$. En efecto, si $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, tendremos $\rho(z, x_1) < \varepsilon$ y puesto que $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, encontraremos, de acuerdo con el axioma triangular, que

$$\rho(z, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

es decir, $z \in O_\varepsilon(x)$. Como $x_1 \in [M]$, existirá en $O_{\varepsilon_1}(x)$ un punto $x_2 \in M$. Pero en este caso $x_2 \in O_\varepsilon(x)$ y, puesto que $O_\varepsilon(x)$ es una vecindad arbitraria de x, tendremos $x \in [M]$. Hemos demostrado la segunda afirmación.

La tercera propiedad es evidente. Demostremos, finalmente, la cuarta.

---

[1] Algunos autores prefieren emplear en este caso el término «ε-entorno». (*N. del T.*)

Si $x \in [M_1 \cup M_2]$, x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos $[M_1]$ o $[M_2]$, es decir

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2].$$

Puesto que $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ y $M_2 \subset M_1 \cup M_2$, la inclusión inversa se desprende de la propiedad 3).

Hemos demostrado completamente el teorema.

Un punto $x \in R$ se llama *punto de acumulación* del conjunto $M \subset R$, cuando en toda vecindad suya existe un número infinito de puntos de M.

El punto de acumulación puede pertenecer y puede no pertenecer a M. Por ejemplo, si M es el conjunto de los números racionales del segmento $[0, 1]$, todo punto de este conjunto es un punto de acumulación de M.

Un punto x, *perteneciente a* M, se llama *punto aislado* de este conjunto, cuando una vecindad suya $O_\varepsilon(x)$ suficientemente pequeña no contiene otros puntos de M distintos de x. Proponemos al lector demostrar, a título de ejercicio, la siguiente afirmación:

Todo punto de adherencia del conjunto M o bien es un punto de acumulación o bien un punto aislado de este conjunto.

De aquí se puede deducir que la adherencia $[M]$ se compone, en general, de tres tipos de puntos:

1) los puntos aislados del conjunto M;

2) los puntos de acumulación del conjunto M, pertenecientes a M;

3) los puntos de acumulación del conjunto M que no pertenecen a M; de esta forma la adherencia $[M]$ se obtiene agregando a M todos sus puntos de acumulación.

2°. Convergencia. Sea $x_1, x_2, \ldots$ una sucesión de puntos en el espacio métrico R. Se dice que esta sucesión *converge al punto* x, cuando toda vecindad $O_\varepsilon(x)$ del punto x contiene todos los puntos x_n, empezando desde alguno, es decir, cuando a cada número $\varepsilon > 0$ le corresponde un número N_ε tal que $O_\varepsilon(x)$ contiene todos los puntos x_n para $n > N_\varepsilon$. El punto x se llama *límite* de la sucesión $\{x_n\}$.

Es obvio que se puede enunciar esta definición también de la siguiente manera: la sucesión $\{x_n\}$ converge a x, cuando

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

De esta definición se desprende directamente que 1) ninguna sucesión puede tener dos límites distintos y que 2) si la sucesión $\{x_n\}$ converge al punto x, toda sucesión parcial contenida en ella converge al mismo punto.

El siguiente teorema explica la relación estrecha existente entre los conceptos de punto de adherencia y de límite.

TEOREMA 2. *Para que el punto x sea un punto de adherencia del conjunto M, es necesario y suficiente que exista una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de M que converja a x.*

DEMOSTRACION. La condición es necesaria, puesto que siendo x un punto de adherencia del conjunto M, en cada vecindad $O_{1/n}(x)$ existe por lo menos un punto $x_n \in M$. Estos puntos forman una sucesión que converge a x. La suficiencia es evidente.

Siendo x un punto de acumulación del conjunto M, los puntos $x_n \in O_{1/n}(x) \cap M$, correspondientes a diferentes n, pueden escogerse de manera que no coincidan entre sí. Es decir, *para que el punto x sea un punto de acumulación de M, es necesario y suficiente que en M exista una sucesión de puntos distintos dos a dos que converga a x.*

El concepto de continuidad de una aplicación del espacio métrico X en el espacio métrico Y, que hemos introducido en el § 1, puede enunciarse ahora en términos de convergencia de sucesiones: la aplicación $y=f(x)$ es continua en el punto x_0, cuando cualquiera que sea la sucesión $\{x_n\}$ convergente a x_0, la sucesión $\{y_n=f(x_n)\}$ converge a $y_0=f(x_0)$. La demostración de la equivalencia de esta definición a la dada en el § 1 no difiere en nada de la demostración de la equivalencia de las dos definiciones de la continuidad («en el lenguaje de ε, δ» y «en el lenguage de sucesiones») de las funciones de argumento numérico y el lector podrá realizarla.

3°. Subconjuntos densos. Sean A y B dos conjuntos de un espacio métrico R. El conjunto A se dice *denso* en B, cuando $[A] \supset B$. En particular, el conjunto A es *siempre denso* (en el espacio R), cuando su adherencia $[A]$ coincide con todo el espacio R. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales es siempre denso en la recta numérica. Se dice que un conjunto A es *nunca denso*, cuando no es denso en ninguna bola.

Ejemplos de espacios provistos de un conjunto numerable siempre denso. Un espacio, que tiene un conjunto numerable siempre denso, se llama *separable*. Consideremos desde este punto de vista los ejemplos expuestos en el § 1.

1. El espacio «discreto» del ejemplo 1 del § 1 contiene un conjunto numerable siempre denso, si, y sólo si, está compuesto por un número numerable de puntos. Ello se debe a que la adherencia $[M]$ de cualquier conjunto M de este espacio coincide con M.

Todos los espacios dados en los ejemplos 2—8 del § 1 tienen conjuntos numerables siempre densos. Señalemos en cada uno de ellos un conjunto de este tipo, recomendando con insistencia al lector realizar la demostración detallada.

2. Sobre el eje real R^1, los puntos racionales.

3—5. En el espacio euclídeo de n dimensiones R^n y en los espacios R_1^n y R_0^n, el conjunto de vectores con coordenadas racionales.

6. En el espacio $C_{[a, b]}$, el conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales.

7. En el espacio l_2, el conjunto de sucesiones en cada una de las cuales todos los miembros son racionales y solamente un número finito (para cada sucesión el suyo) de estos miembros es distinto de cero.

8. En el espacio $C_{[a, b]}^2$, el conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales.

El espacio m de sucesiones acotadas (ejemplo 9 del § 1) no tiene ningún conjunto numerable siempre denso. En efecto, consideremos todas las sucesiones posibles compuestas de ceros y unidades. Ellas forman un conjunto de potencia de continuo (ya que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre estas sucesiones y subconjuntos de la serie natural). La distancia entre dos de estos puntos, definida mediante la fórmula (11) del § 1, es igual a 1. Envolvamos cada uno de estos puntos en una bola abierta de radio $^1/_2$. Estas bolas no se intersecan. Si tenemos un conjunto siempre denso en este espacio, cada una de las bolas construidas deberá contener por lo menos un punto de este conjunto y, por consiguiente, él no puede ser numerable.

4°. Conjuntos abiertos y cerrados. Consideremos los tipos más importantes de conjuntos en espacios métricos, es decir los conjuntos abiertos y cerrados. El conjunto M, perteneciente a un espacio métrico R, se llama *cerrado*, cuando coincide con su adherencia: $[M] = M$. En otras palabras, el conjunto se llama cerrado, si contiene todos sus puntos de acumulación.

En virtud del teorema 1, la adherencia de cualquier conjunto M es un conjunto cerrado. Del mismo teorema se desprende que $[M]$ es el menor conjunto cerrado que contiene a M.

Ejemplos. 1. Todo segmento $[a, b]$ de la recta numérica es un conjunto cerrado.

2. Una bola cerrada representa un conjunto cerrado. En particular, el conjunto de funciones f del espacio $C_{[a, b]}$, que verifican la condición $|f(t)| \leqslant K$, es cerrado.

3. El conjunto de funciones de $C_{[a, b]}$, que verifican la condición $|f(t)| < K$ (bola abierta), no es cerrado; su adherencia es

el conjunto de funciones que cumplen la condición $|f(t)| \leqslant K$.

4. Cualquiera que sea el espacio métrico R, el conjunto vacío $\varnothing$ y todo el espacio R son cerrados.

5. Todo conjunto, compuesto por un número finito de puntos, es cerrado.

Las propiedades principales de los conjuntos cerrados pueden enunciarse por medio del siguiente teorema.

TEOREMA 3. *La intersección de cualquier número y la unión de un número finito de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados.*

DEMOSTRACION. Sea $F = \bigcap F_\alpha$ la intersección de los conjuntos cerrados F_α y sea x un punto de acumulación del conjunto F. Ello significa que cualquier vecindad $O_\varepsilon(x)$ contiene un número infinito de puntos de F. Pero entonces $O_\varepsilon(x)$ contiene así mismo un número infinito de puntos de cada conjunto F_α y, puesto que todos los F_α son cerrados, el punto x pertenece a cada F_α; por consiguiente, $x \in F = \bigcap F_\alpha$, es decir, F es cerrado.

Sea ahora F la unión de un número finito de conjuntos cerrados: $F \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$; supongamos que el punto x no pertenece a F. Demostremos que x no puede ser un punto de acumulación de F. En efecto, x no pertenece a ninguno de los conjuntos cerrados F_i y, por consiguiente, no es punto de acumulación de ninguno de ellos. Esto quiere decir que para todo i se puede encontrar una vecindad $O_{\varepsilon_i}(x)$ del punto x que contiene, a lo sumo, un número finito de puntos de F_i. Tomando la menor de las vecindades $O_{\varepsilon_1}(x), \ldots, O_{\varepsilon_n}(x)$, obtendremos una vecindad $O_\varepsilon(x)$ del punto x que contiene a lo sumo un número finito de puntos de F.

Resumiendo, si el punto x no pertenece a F, no puede ser punto de acumulación de F, es decir, F es cerrado.

El teorema queda demostrado.

Un punto x se llama *punto interior* del conjunto M, cuando hay una vecindad $O_\varepsilon(x)$ de este punto que pertenece íntegramente a M.

Un conjunto, todos los puntos del cual son interiores, se llama *conjunto abierto*.

Ejemplos. 6. Un intervalo (a, b) de la recta numérica R^1 es un conjunto abierto; en efecto, si $a < \alpha < b$, la vecindad $O_\varepsilon(\alpha)$, donde $\varepsilon = \min(\alpha - a, b - \alpha)$, está contenida íntegramente en el intervalo (a, b).

7. Una bola abierta $B(a, r)$ de cualquier espacio métrico R es un conjunto abierto. En efecto, si $x \in B(a, r)$, tenemos

$\rho(a, x) < r$. Tomemos $\varepsilon = r - \rho(a, x)$. Entonces $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

8. El conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ que verifican la condición $f(t) < g(t)$, donde $g(t)$ es una función continua determinada, representa un subconjunto abierto del espacio $C_{[a, b]}$.

TEOREMA 4. *Para que el conjunto M sea abierto es necesario y suficiente que su complemento $R \setminus M$ al espacio R sea cerrado.*

DEMOSTRACION. Si M es abierto, cada punto x de M posee una vecindad que pertenece íntegramente a M, es decir, que no tiene ningún punto común con $R \setminus M$. Por consiguiente, ninguno de los puntos que no pertenecen a $R \setminus M$ puede ser un punto de adherencia de $R \setminus M$, es decir, $R \setminus M$ es cerrado. Viceversa, si $R \setminus M$ es cerrado, cualquier punto de M posee una vecindad que pertenece íntegramente a M, es decir, M es abierto.

Puesto que el conjunto vacío y todo el espacio R son cerrados y al mismo tiempo son complementos uno del otro, del teorema demostrado se desprende el siguiente corolario.

COROLARIO. *El conjunto vacío y todo el espacio R son abiertos.*

Del teorema 3 y del principio de dualidad (la intersección de complementos es igual al complemento de la unión y la unión de complementos es igual al complemento de las intersecciones; véase pág. 16) se sigue el siguiente teorema importante, dual al teorema 3.

TEOREMA 3'. *La unión de un número cualquiera (finito o infinito) y la intersección de un número finito de conjuntos abiertos son conjuntos abiertos.*

5°. Conjuntos abiertos y cerrados sobre la recta. La estructura de los conjuntos abiertos y cerrados en uno u otro espacio métrico puede ser muy compleja. Esto se refiere incluso a los conjuntos abiertos y cerrados de un espacio euclídeo de dos o más dimensiones. Sin embargo, en el caso unidimensional, es decir, en el caso de la recta, no es difícil dar una descripción de todos los conjuntos abiertos (y, por consiguiente, de todos los cerrados). Ella viene dada por el siguiente teorema.

TEOREMA 5. *Todo conjunto abierto de una recta numérica representa la suma de un número finito o numerable de intervalos disjuntos dos a dos*[1].

[1] Los conjuntos de tipo $(-\infty, \infty)$, (α, ∞) y $(-\infty, \beta)$ también los consideramos como intervalos.

DEMOSTRACION. Sea G un conjunto abierto sobre la recta y x un punto suyo cualquiera. De acuerdo con la definición de conjunto abierto, existe por lo menos un intervalo que contiene a x y está contenido en G. Denotemos mediante I_x la suma de todos estos intervalos y demostremos que I_x es también un intervalo. Tomemos para ello

$$a = \inf I_x, \quad b = \sup I_x$$

(puede ocurrir que $a = -\infty$ y $b = +\infty$) y comprobemos que $I_x = (a, b)$. Está claro, ante todo, que $I_x \subset (a, b)$. Viceversa, sea y un punto arbitrario de (a, b), distinto de x; probemos que $y \in I_x$. Aceptemos, para concretar, que $a < y < x$. En este caso, en I_x existirá un punto y' tal que $a < y' < y$. Esto significa que en G hay un intervalo que contiene los puntos y' y x. Pero entonces también contiene y, es decir, $y \in I_x$. Del mismo modo se puede considerar el caso $y > x$. El punto x pertenece a I_x por hipótesis. Por consiguiente, $I_x = (a, b)$. El intervalo (a, b) ha sido definido de manera que él pertenece a G y no está contenido en ningún intervalo mayor que pertenezca a G. Es evidente que los intervalos I_{x_1} e I_{x_2}, correspondientes a dos distintos puntos, o bien coinciden o bien no tienen puntos comunes (de lo contrario, I_{x_1} e I_{x_2} estarían contenidos en el intervalo $I_{x_1} \cup I_{x_2}$ mayor que cada uno de ellos y perteneciente a G). Un sistema tal de intervalos disjuntos es a lo sumo numerable: en efecto, escogiendo en cada uno de estos intervalos y de una manera arbitraria un punto racional, estableceremos una correspondencia biunívoca entre estos intervalos y ciertos subconjuntos del conjunto de números racionales. Está claro, finalmente, que la suma de estos intervalos coincide con G. El teorema queda demostrado.

Puesto que los conjuntos cerrados son complementos de los abiertos, de aquí se sigue que todo conjunto cerrado sobre la recta se obtiene omitiendo de la recta un número finito o numerable de intervalos.

Los ejemplos más simples de conjuntos cerrados son los segmentos, los puntos aislados y la suma de un número finito de conjuntos de estos tipos. Consideremos un ejemplo más complejo de conjunto cerrado sobre la recta, el así llamado *conjunto de Cantor*.

Sea F_0 el segmento $[0, 1]$. De él excluyamos el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y designemos mediante F_1 el conjunto cerrado que queda. Después, omitamos de F_1 los intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ y designemos mediante F_2 el conjunto cerrado que queda (compuesto por cuatro segmentos). En cada uno de estos cuatro segmentos excluyamos el intervalo abierto central de longitud $\frac{1}{3^3}$, etc. (fig. 9). Continuando este proceso, obtendremos una sucesión decreciente de conjuntos cerrados F_n. Tomemos

$$F=\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

F es un conjunto cerrado (como intersección de cerrados). Se obtiene omitiendo del segmento $[0, 1]$ un número numerable de

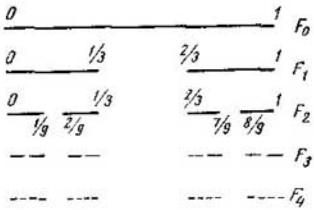

FIG. 9

intervalos. Examinemos la estructura del conjunto F. Pertenecen a él, evidentemente, los puntos

$$0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9},\ \ldots \tag{1}$$

que representan los extremos de los intervalos omitidos. El conjunto F no se compone, sin embargo, solamente de estos puntos. En efecto, se puede describir los puntos del segmento $[0, 1]$, que pertenecen al conjunto F, de la siguiente forma. Representemos cada uno de los números x, $0\leqslant x\leqslant 1$, en el sistema ternario:

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\ldots+\frac{a_n}{3^n}+\ldots,$$

donde los números a_n pueden tomar los valores 0, 1 y 2. Al igual que en el caso de fracciones decimales, algunos números pueden tener dos representaciones. Por ejemplo,

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{0}{3^2}+\ldots+\frac{0}{3^n}+\ldots=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3^n}+\ldots$$

Es fácil comprobar que al conjunto F pertenecen aquellos números, y solamente aquellos, x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, que pueden representarse al menos de una forma mediante una fracción ternaria tal que en la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ no figura la unidad. Por consiguiente, a cada punto $x \in F$ se le puede poner en correspondencia la sucesión

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{2}$$

donde a_n es igual a 0 ó a 2. La totalidad de estas sucesiones forma un conjunto de potencia de continuo. Es fácil comprobar esto, si se pone en correspondencia a cada sucesión (2) la sucesión

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots, \tag{2'}$$

donde $b_n = 0$, cuando $a_n = 0$, y $b_n = 1$, cuando $a_n = 2$. La sucesión (2') puede ser considerada como la representación de un número real y, $0 \leqslant y \leqslant 1$ mediante una fracción binaria. De este modo obtenemos una aplicación del conjunto F sobre todo el segmento $[0, 1]$. De aquí se desprende que F tiene potencia de continuo [1]. Puesto que el conjunto de los puntos (1) es numerable, el conjunto F no puede limitarse a ellos.

EJERCICIOS. 1. Demuéstrese directamente que el punto $\frac{1}{4}$ pertenece al conjunto F sin ser extremo de ninguno de los intervalos omitidos.

Sugerencia. El punto $\frac{1}{4}$ divide el segmento $[0, 1]$ en dos partes según la razón $\frac{1}{3}$. También divide en dos partes según la razón $\frac{1}{3}$ el segmento $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ que queda después de la primera exclusión, etc.

Los puntos (1) se llaman *puntos de primer género* del conjunto F y los demás puntos suyos se denominan *puntos de segundo género*.

2. Demuéstrese que los puntos de primer género forman un conjunto siempre denso en F.

3. Demuéstrese que los números $t_1 + t_2$, donde $t_1, t_2 \in F$ llenan todo el segmento $[0, 2]$.

Hemos demostrado que el conjunto F es de potencia de continuo, es decir, tiene tantos puntos como todo el segmento $[0, 1]$.

Es interesante comparar esto con el siguiente resultado: la suma de longitudes de todos los intervalos omitidos es igual a $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots$, es decir, ¡exactamente a la unidad!

---

[1] La correspondencia establecida entre F y el segmento $[0, 1]$ es unívoca, pero no es biunívoca (porque un mismo número puede ser representado, a veces, por diferentes fracciones). De aquí se deduce que la potencia de F es no menos que la de continuo. Pero F es parte del segmento $[0, 1]$ y, por consiguiente, su potencia no puede ser mayor que la potencia de continuo.

Observaciones complementarias.

(1) Sea M un conjunto de un espacio métrico R y sea x un punto de este espacio. *La distancia del punto x al conjunto M* se define por el número

$$\rho(M, x) = \inf_{a \in M} \rho(a, x).$$

Si $x \in M$, tenemos $\rho(M, x) = 0$; en cambio, $\rho(M, x) = 0$ no implica que $x \in M$. De acuerdo con la definición de punto de adherencia, obtenemos inmediatamente que $\rho(M, x) = 0$ si, y sólo si, x es un punto de adherencia del conjunto M.

Por eso se puede decir que la operación de adherencia consiste en que al conjunto se añaden todos aquellos puntos cuyas distancias al conjunto sean igual a cero.

(2) De una manera análoga se define la distancia entre dos conjuntos. Si A y B son dos conjuntos del espacio métrico R, tenemos

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \rho(a, b).$$

Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces $\rho(A, B) = 0$; la afirmación contraria no tiene, en general, lugar.

(3) Sea M_K el conjunto de todas las funciones f de $C_{[a, b]}$ que verifican la condición de Lipschitz: para todos los $t_1, t_2 \in [a, b]$

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant K |t_2 - t_1|,$$

donde K es un número fijo. El conjunto M_K es cerrado. Coincide con la adherencia del conjunto de funciones diferenciables en $[a, b]$ y tales que $|f'(t)| \leqslant K$.

(4) El conjunto $M = \bigcup_K M_K$ de todas las funciones que verifican la condición de Lipschitz, cada una con su número K, no es cerrado. Su adherencia coincide con todo el espacio $C_{[a, b]}$.

(5) Un conjunto abierto G de un espacio euclídeo de n dimensiones se llama *conexo*, cuando dos cualesquiera puntos $x, y \in G$ pueden unirse mediante una quebrada que pertenece íntegramente a G. Por ejemplo, el conjunto formado por los puntos interiores del círculo $x^2 + y^2 < 1$ es conexo. Al contrario, la suma de dos círculos

$$x^2 + y^2 < 1 \text{ y } (x-2)^2 + y^2 < 1$$

es un conjunto desconexo (¡aun cuando estos círculos tienen un punto común de adherencia!). Un subconjunto abierto H de un conjunto abierto G se llama *componente* del conjunto G, cuando es conexo sin ser parte de ningún otro subconjunto abierto conexo mayor del conjunto G. Valiéndose del teorema de Zorn, es fácil ver que tiene lugar la siguiente afirmación: todo conjunto abierto G de un espacio euclídeo de n dimensiones es la suma de un número a lo sumo numerable de componentes disjuntos dos a dos.

En el caso de $n = 1$, es decir, en la recta, todo conjunto abierto conexo es un intervalo (incluyéndose en los intervalos los intervalos infinitos $(-\infty, a)$, (b, ∞) y $(-\infty, \infty)$). Por consiguiente, el teorema 5 sobre la estructura de los conjuntos abiertos de la recta contiene dos afirmaciones: a) todo conjunto abierto de la recta es la suma de un número finito o numerable de componentes y b) un conjunto abierto conexo de la recta es un intervalo. La primera de estas afirmaciones se cumple también para los conjuntos de los espacios euclídeos de n dimensiones (y admite otras generalizaciones), mientras que la segunda afirmación se refiere solamente a la recta.

§ 3. ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS

1°. Definición y ejemplos de espacios métricos completos. Desde los pasos iniciales en el estudio del Análisis Matemático, podemos persuadirnos del papel tan importante que desempeña en el Análisis la propiedad de complitud de la recta numérica, es decir, el hecho de que toda sucesión fundamental de números reales converge a un límite determinado. La recta numérica representa el ejemplo más sencillo de los así llamados espacios métricos *completos*, cuyas propiedades principales consideraremos en este punto.

Una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico R se llamará *fundamental*, cuando verifique el criterio de Cauchy, es decir, cuando para cualquier $\varepsilon>0$ exista un número N_ε tal, que $\rho(x_{n'}, x_{n''})<\varepsilon$ para cualesquiera $n'>N_\varepsilon$, $n''>N_\varepsilon$.

Del axioma triangular se sigue inmediatamente que toda sucesión convergente es fundamental. En efecto, si $\{x_n\}$ converge a x, cualquiera que sea $\varepsilon>0$ se puede encontrar un número N_ε tal que $\rho(x_n, x)<\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n>N_\varepsilon$. Por eso $\rho(x_{n'}, x_{n''})\leqslant$ $\leqslant\rho(x_{n'}, x)+\rho(x_{n''}, x)<\varepsilon$ para cualesquiera $n'>N_\varepsilon$ y $n''>N_\varepsilon$.

DEFINICION 1. Un espacio R se llama *completo*, cuando toda sucesión fundamental de él converge.

Ejemplos. Todos los espacios considerados en el § 1, a excepción del señalado en el ejemplo 8, son completos. En efecto:

1. En el espacio de puntos aislados (ejemplo 1 del § 1) son fundamentales sólo las sucesiones estacionarias, es decir, en las que se repite constantemente, comenzando desde cierto número, un mismo punto. Toda sucesión de este tipo converge evidentemente y, por consiguiente, este espacio es completo.

2. La complitud del espacio R^1, compuesto por los números reales, es conocida del Análisis.

3. La complitud del espacio euclídeo R^n se sigue inmediatamente de la complitud de R^1. En efecto, sea $\{x^{(p)}\}$ una sucesión fundamental de puntos de R^n; esto significa que para todo $\varepsilon>0$ existe un $N=N_\varepsilon$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(p)}-x_k^{(q)})^2<\varepsilon^2$$

para todos p, q mayores que N. Aquí $x^{(p)}=\{x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\}$. En este caso para todo $k=1, 2, \ldots, n$ obtendremos la desigualdad correspondiente a la coordenada $x_k^{(p)}$:

$$|x_k^{(p)}-x_k^{(q)}|<\varepsilon$$

siempre que $p, q > N$; por consiguiente, $\{x_k^{(p)}\}$ es una sucesión numérica fundamental. Tomemos

$$x_k = \lim_{p\to\infty} x_k^{(p)} \text{ y } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Es obvio entonces que

$$\lim_{p\to\infty} x^{(p)} = x.$$

4—5. La complitud de los espacios R_0^n y R_1^n se demuestra de una manera totalmente análoga.

6. Demostremos la complitud del espacio $C_{[a, b]}$. Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión fundamental de $C_{[a, b]}$. Ello significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

siempre que $n, m > N$ y para todo t, $a \leqslant t \leqslant b$. De aquí se deduce que la sucesión $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente. En este caso, como se sabe, su límite $x(t)$ será una función continua. Haciendo tender m al infinito en la desigualdad anterior, obtendremos

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon$$

para todo t y para todo $n > N$ y esto significa precisamente que $\{x_n(t)\}$ converge a $x(t)$ en el sentido de la métrica del espacio $C_{[a, b]}$.

7. El espacio l_2. Sea $\{x^{(n)}\}$ una sucesión fundamental en l_2. Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que

$$\rho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon, \text{ para } n, m > N. \tag{1}$$

Aquí

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots).$$

De (1) se desprende que cualquiera que sea k,

$$(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon,$$

es decir, la sucesión de números reales $\{x_k^{(n)}\}$ es fundamental cualquiera que sea k y, por consiguiente, converge. Tomemos $x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$. Sea x la sucesión $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$. Debemos demostrar que

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, es decir, $x \in l_2$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0$.

Demostrémoslo. De la desigualdad (1) se deduce que para todo número fijo M

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)}-x_k^{(m)})^2<\varepsilon.$$

Fijando n, pasemos al límite para $m\to\infty$. Tendremos

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(n)}-x_k)^2\leqslant\varepsilon.$$

Esta relación se verifica para cualquier M. Pasando en ella al límite para $M\to\infty$, obtendremos

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2\leqslant\varepsilon. \tag{2}$$

De la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)})^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2$ se deduce la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2$ (véase el ejemplo 7 del § 1) y con esto queda demostrada la afirmación a). Ahora bien, puesto que ε es arbitrariamente pequeño, la desigualdad (2) significa que

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x^{(n)},\ x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^n-x_k)^2}=0,$$

es decir, que $x^{(n)}\to x$ en la métrica de l_2. Queda también demostrada la afirmación b).

8. Es fácil ver que el espacio $C^2_{[a,\,b]}$ no es completo. Consideremos, por ejemplo, la siguiente sucesión de funciones continuas

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1 & \text{para } -1\leqslant t\leqslant-\frac{1}{n},\\ nt & \text{para } -\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant\frac{1}{n},\\ 1 & \text{para } \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

Es una sucesión fundamental de $C^2{}_{[-1,\,1]}$, puesto que

$$\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\varphi_m(t))^2\,dt\leqslant\frac{2}{\min(n,\,m)}.$$

Sin embargo, no converge a ninguna función de $C^2_{[-1,\,1]}$. En efecto, sea f una función de $C^2_{[-1,\,1]}$ y sea ψ la función discontinua, idéntica a -1 para $t<0$ y $+1$ para $t\geqslant 0$.

De la desigualdad de Cauchy — Buniakovski (que, evidentemente, se verifica también, para las funciones continuas a trozos) se deduce que

$$\left(\int_{-1}^{1}(f(t)-\psi(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_{-1}^{1}(f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\left(\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puesto que f es una función continua, la integral del miembro de la izquierda es distinta de cero. Además, es obvio que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\,dt=0.$$

Por eso, $\int_{-1}^{1}(f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt$ no puede tender a cero para $n\to\infty$.

EJERCICIO. Demuéstrese que el espacio de todas las sucesiones acotadas (ejemplo 9 del § 1) es completo.

2°. Principio de bolas encajadas. En el Análisis se emplea con frecuencia el así llamado lema de intervalos encajados. En la teoría de espacios métricos desempeña un papel semejante el siguiente teorema, llamado principio de bolas encajadas.

TEOREMA 1. *Para que un espacio métrico R sea completo es necesario y suficiente que cualquier sucesión de bolas cerradas de este espacio, encajadas unas en otras y cuyos radios tienden a cero, tenga una intersección no vacía.*

DEMOSTRACION. NECESIDAD. Supongamos que el espacio R es completo y sea B_1, B_2, B_3, ... una sucesión de bolas cerradas, encajadas unas en otras. Sea r_n el radio y x_n, el centro de la bola B_n. La sucesión de centros $\{x_n\}$ es fundamental, ya que $\rho(x_n, x_m)<r_n$ para $m>n$ y $r_n\to 0$ para $n\to\infty$. Puesto que R es completo, existe $\lim_{n\to\infty}x_n$. Tomemos

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n;$$

entonces, $x\in\bigcap_n B_n$. En efecto, la bola B_n contiene todos los puntos de la sucesión $\{x_k\}$, excepto, posiblemente, los puntos

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Por consiguiente, x es un punto de acumulación de toda bola B_n. Pero B_n es un conjunto cerrado y por eso $x \in B_n$ para todo n.

SUFICIENCIA. Sea $\{x_n\}$ una sucesión fundamental. Demostremos que tiene un límite. Puesto que es fundamental, podemos encontrar un punto x_{n_1} de ella tal que $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ para todo $n \geqslant n_1$. Consideremos la bola cerrada de radio 1 con centro en x_{n_1} y denotémosla mediante B_1. Escojamos luego un punto x_{n_2} de $\{x_n\}$ tal que sea $n_2 > n_1$ y $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ para todo $n \geqslant n_2$. Consideremos la bola B_2 de radio $\frac{1}{2}$ y centro en x_{n_2}. En general, si los puntos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ ya se han escogido $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$, escogeremos el punto $x_{n_{k+1}}$ de manera que sea $n_{k+1} > n_k$ y $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ para todo $n \geqslant n_{k+1}$ y lo envolveremos en una bola cerrada B_{k+1} de radio $\frac{1}{2^k}$. Continuando este proceso, obtendremos una sucesión de bolas cerradas B_k, encajadas unas en otras; la bola B_k es de radio $\frac{1}{2^{k-1}}$. Esta sucesión de bolas tiene, por hipótesis, un punto común; denotémoslo x. Es obvio que este punto x es el límite de la sucesión $\{x_{n_k}\}$. Pero una sucesión fundamental, que contiene una sucesión parcial convergente a x, converge al mismo límite. Por consiguiente, $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. El teorema queda demostrado.

EJERCICIOS. 1. Dado un conjunto M de un espacio métrico el número

$$d(M) = \sup_{x,\, y \in M} \rho(x, y)$$

se llama diámetro del conjunto M. Demuéstrese que en un espacio métrico completo toda sucesión de conjuntos cerrados no vacíos, encajados unos en otros y cuyos diámetros tienden a cero, tiene una intersección no vacía.

2. Dese un ejemplo de un espacio métrico completo y de una sucesión de bolas cerradas de este espacio, encajadas unas en otras, que tiene una intersección *vacía*.

3. Demuéstrese que un subespacio de un espacio métrico completo R es completo si, y sólo si, es cerrado en R.

3°. **Teorema de Baire.** El siguiente teorema desempeña un papel fundamental en la teoría de los espacios métricos completos.

TEOREMA DE BAIRE. *Un espacio métrico completo R no puede representarse como la unión de un número numerable de conjuntos nunca densos*[1].

---

[1] Se dice que el conjunto M es nunca denso en R, cuando cada bola $B \subset R$ contiene otra bola B', que no tiene con M ningún punto común.

DEMOSTRACION. Supongamos lo contrario. Sea $R=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, donde cada uno de los conjuntos M_n es nunca denso. Sea S_0 una bola cerrada de radio 1. Puesto que M_1 no es denso en S_0, ya que es nunca denso, existe una bola cerrada S_1 de radio menor que $\frac{1}{2}$ y tal que $S_1 \subset S_0$ y $S_1 \cap M_1=\varnothing$. El conjunto M_2 no es denso en S_1 y por eso la bola S_1 contiene una bola cerrada S_2 de radio menor que $\frac{1}{3}$ tal que $S_2 \cap M_2=\varnothing$, etc. De esta forma obtenemos una sucesión de bolas cerradas $\{S_n\}$, encajadas unas en otras, cuyos radios tienden a cero, siendo, además, $S_n \cap M_n=\varnothing$. En virtud del teorema 1 del punto anterior, la intersección $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ contiene un punto x. De acuerdo con el procedimiento seguido, este punto no puede pertenecer a ninguno de los conjuntos M_n y, por consiguiente, $x \,\overline{\in}\, \bigcup\limits_n M_n$, es decir, $R \neq \bigcup\limits_n M_n$, lo que está en contradicción con la suposición hecha.

En particular, *todo espacio métrico completo sin puntos aislados es innumerable*. En efecto, en este espacio todo punto es nunca denso.

4°. Completación de un espacio. Si el espacio R no es completo, siempre puede ser incluido de cierta manera (y de hecho de una manera única) en un espacio completo.

DEFINICION 2. Sea R un espacio métrico. Un espacio métrico completo R^* se llama *completación* del espacio R, si:

1) R es un subespacio del espacio R^*;

2) R es siempre denso en R^*, es decir, $[R]=R^*$. (Aquí $[R]$ significa, claro está, la adherencia del espacio R en R^*).

Por ejemplo, el espacio de todos los números reales es completación del espacio de los números racionales.

TEOREMA 2. *Todo espacio métrico R posee una completación y esta completación es única, a menos de una aplicación isométrica que transforma los puntos de R en sí mismos.*

DEMOSTRACION. Comencemos por la *unicidad*. Debemos comprobar que si R^* y R^{**} son dos completaciones del espacio R, existe una aplicación biunívoca φ del espacio R^* sobre R^{**} tal que:

1) $\varphi(x)=x$ para todo $x \in R$;

2) si $x^* \leftrightarrow x^{**}$ e $y^* \leftrightarrow y^{**}$, entonces $\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**})$, donde ρ_1 es la distancia en R^* y ρ_2, la distancia en R^{**}.

La aplicación φ se construye del siguiente modo. Sea x^* un punto arbitrario de R^*. En este caso, de acuerdo con la definición de completación, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de R que converge a x^*. Los puntos $\{x_n\}$ pertenecen también a R^{**}. Puesto que R^{**} es completo, $\{x_n\}$ converge en R^{**} a un punto x^{**}. Está claro que x^{**} no depende de cómo se escoge la sucesión $\{x_n\}$, convergente al punto x^*. Tomemos $\varphi(x^*) = x^{**}$. La aplicación φ es la aplicación isométrica que necesitamos.

En efecto, está claro que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in R$. Además, supongamos que

$$\{x_n\} \to x^* \text{ en } R^* \text{ y } \{x_n\} \to x^{**} \text{ en } R^{**},$$
$$\{y_n\} \to y^* \text{ en } R^* \text{ y } \{y_n\} \to y^{**} \text{ en } R^{**};$$

entonces,

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n \to \infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n)$$

y al mismo tiempo

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n \to \infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Por consiguiente,

$$\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Demostremos ahora la *existencia* de la completación. La idea de esta demostración es la misma que en la teoría de Cantor de los números reales. La situación ahora es incluso más simple que en la teoría de los números reales, ya que allí era necesario, además, definir todas las operaciones aritméticas para los antes nuevos introducidos, es decir, para los números irracionales.

Sea R un espacio métrico arbitrario. Dos sucesiones fundamentales $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ de R se llamarán equivalentes (denotación $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$), cuando $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$. Esta relación de equivalencia es reflexiva, simétrica y transitiva. De aquí se desprende que todas las sucesiones fundamentales, que pueden formarse por medio de los puntos del espacio R, se dividen en clases de sucesiones equivalentes entre sí. Definamos ahora el espacio R^* del siguiente modo. Tomemos como puntos de este espacio todas las clases de sucesiones equivalentes entre sí y determinemos la distancia entre ellos como sigue. Sean x^* e y^* dos de estas clases. Escojamos en cada una de estas clases un representante, es decir, una sucesión fundamental $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Pongamos

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n \to \infty} (\rho(x_n, y_n). \tag{3}$$

Demostremos que es correcto definir así la distancia, es decir, que el límite (3) existe y no depende de cómo se escogen los representantes $\{x_n\} \in x^*$ e $\{y_n\} \in y^*$.

Puesto que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son fundamentales, obtenemos, por medio del axioma triangular, que para todos n y m suficientemente grandes

$$\begin{aligned}|\rho(x_n, y_n)-\rho(x_m, y_m)| &= \\ &= |\rho(x_n, y_n)-\rho(x_n y_m)+\rho(x_n, y_m)-\rho(x_m, y_m)| \leqslant \\ \leqslant |\rho(x_n, y_n)-\rho(x_n, y_m)| &+ |\rho(x_n, y_m)-\rho(x_m, y_m)| \leqslant \\ &\leqslant \rho(y_n, y_m)+\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad (4)\end{aligned}$$

Por consiguiente, la sucesión de números reales $s_n=\rho(x_n, y_n)$ verifica el criterio de Cauchy y, por lo tanto, tiene un límite. Este límite no depende de la selección de $\{x_n\} \in x^*$ e $\{y_n\} \in y^*$. En efecto, sea

$$\{x_n\}, \ \{x'_n\} \in x^* \text{ e } \{y_n\}, \ \{y'_n\} \in y^*.$$

Obtenemos por un razonamiento, análogo a (4),

$$|\rho(x_n, y_n)-\rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n)+\rho(y_n, y'_n).$$

Puesto que $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ e $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, de aquí se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)=\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Demostremos ahora que R^* se cumplen los axiomas de espacio métrico.

El axioma 1 se desprende inmediatamente de la definición de equivalencia de sucesiones fundamentales.

El axioma 2 es obvio.

Comprobemos ahora el axioma triangular. En el espacio inicial R este axioma se cumple y por eso

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n)+\rho(y_n, z_n).$$

Pasando al límite para $n \longrightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)+\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n),$$

es decir,

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z).$$

Demostremos ahora que R^* es una completación del espacio R.

A cada punto $x \in R$ le corresponde una clase de sucesiones fundamentales equivalentes entre sí, a saber, la totalidad de las sucesiones convergentes al punto x. Además, si

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ e } y = \lim_{n\to\infty} y_n, \text{ tenemos } \rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Por consiguiente, obtendremos una aplicación isométrica de R en el espacio R^*, si a todo punto $x \in R$ le ponemos en correspondencias la clase de sucesiones fundamentales convergentes a x.

En adelante podemos identificar el espacio R con su imagen en R^* y considerar R como un subconjunto de R^*.

Demostremos ahora que R es siempre denso en R^*. En efecto, sean x^* un punto de R^* y $\varepsilon > 0$ un número arbitrario. Tomemos en x^* un representante, esto es, una sucesión fundamental $\{x_n\}$. Sea N tal que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m > N$. En este caso

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

para $n \geqslant N$, es decir, una vecindad arbitraria del punto x^* contiene un punto de R. Por consiguiente, la adherencia de R en R^* es todo el espacio R^*.

Resta demostrar que el espacio R^* es completo. Observemos, ante todo, que R^* ha sido construido de manera que toda sucesión fundamental

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{5}$$

compuesta de puntos pertenecientes a R, converge en R^* a un punto determinado, a saber, al punto $x^* \in R^*$ determinado por la sucesión (5). Además, puesto que R es denso en R^*, para toda sucesión fundamental $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots$ de puntos de R^* se puede construir una sucesión equivalente $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, compuesta de puntos, pertenecientes a R. Para ello es suficiente escoger a título de x_n cualquier punto de R tal que $\rho(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}$.

La sucesión $\{x_n\}$ así obtenida es fundamental y, de acuerdo con lo demostrado, converge a un punto $x^* \in R^*$. Pero esto significa que la sucesión $\{x_n^*\}$ también converge a x^*. El teorema queda demostrado completamente.

§. 4 PRINCIPIO DE APLIGACIONES CONTRAÍDAS Y SUS APLIGACIONES

1°. Principio de aplicaciones contraídas. A título de aplicación del concepto de complitud consideremos el así llamado *principio de aplicaciones contraídas*. Representa un instrumento útil para la demostración de diferentes teoremas de existencia y unicidad por ejemplo, en la teoría de ecuaciones diferenciales).

Sea R un espacio métrico. La aplicación A del espacio R en sí mismo se llama *contraída*, cuando existe un número $\alpha < 1$ tal que para cualesquiera dos puntos $x, y \in R$ se verifica la desigualdad

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y). \qquad (1)$$

Toda aplicación contraída es continua. En efecto, si $x_n \to x$, tenemos, de acuerdo con (1), $Ax_n \to Ax$.

TEOREMA 1 (principio de aplicaciones contraídas). *Toda aplicación contraída, definida en un espacio métrico completo R, tiene un punto fijo, y sólo uno, (es decir, la ecuación $Ax = x$ tiene una solución, y solamente una).*

DEMOSTRACION. Sea x_0 un punto arbitrario de R. Pongamos $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$, etc.; en general, $x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0$.

Demostremos que la sucesión $\{x_n\}$ es fundamental. En efecto, suponiendo, para concretar, que $m \geqslant n$, tenemos

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^nx_0, A^mx_0) \leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n\{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\}$$
$$\leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Puesto que $\alpha < 1$, esta magnitud resulta tan pequeña como se quiera, siempre que n sea suficientemente grande.

Debido a la complitud de R, la sucesión $\{x_n\}$, que es fundamental, tiene límite. Pongamos

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Pero la aplicación A es continua; por eso

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Por consiguiente, queda demostrada la *existencia* del punto fijo. Probemos que es *único*. Si

$$Ax = x, \quad Ay = y,$$

la desigualdad (1) nos da

$$\rho(x, y) < \alpha\rho(x, y);$$

puesto que $\alpha < 1$, de aquí se deduce que

$$\rho(x, y) = 0, \text{ es decir, que } x = y.$$

EJERCICIO. Demuéstrese que para la existencia de un punto fijo no es suficiente que se cumpla la condición $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ para todo $x \neq y$.

2°. Aplicaciones elementales del principio de aplicaciones contraídas. El principio de aplicaciones contraídas puede emplearse para demostrar teoremas de existencia y unicidad de soluciones de diferentes ecuaciones. Junto con la demostración de la existencia y de la unicidad de la solución de la ecuación $Ax=x$, el principio de aplicaciones contraídas ofrece un método aproximado para buscar esta solución (el método de aproximaciones sucesivas). Veamos los siguientes ejemplos elementales.

1. Sea f una función, definida en el segmento $[a, b]$, que verifica la condición de Lipschitz

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant K|x_2-x_1|$$

con una constante $K<1$ y que transforma el segmento $[a, b]$ en sí mismo. En este caso, f es una aplicación contraída y, de acuerdo con el teorema demostrado, la sucesión x_0, $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, ... converge a la única raíz de la ecuación $x=f(x)$.

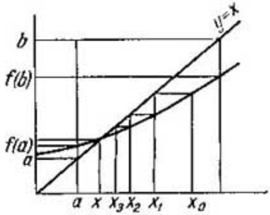

FIG. 10

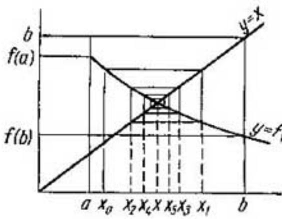

FIG. 11

En particular, la aplicación será contraída, si la función tiene en el segmento $[a, b]$ una derivada $f'(x)$ tal que

$$|f'(x)| \leqslant K \leqslant 1.$$

En las figuras 10 y 11 están representadas las aproximaciones sucesivas para el caso $0<f'(x)<1$ y para el caso $-1<f'(x)<0$, respectivamente.

Supongamos ahora que tenemos una ecuación de tipo $F(x)=0$, que $F(a)<0$, $F(b)>0$ y $0<K_1 \leqslant F'(x) \leqslant K_2$ sobre $[a, b]$. Para encontrar la raíz, introduzcamos la función $f(x)=x-\lambda F(x)$ y busquemos la solución de la ecuación $x=f(x)$, equivalente a la ecuación $F(x)=0$. Puesto que $f'(x)=1-\lambda F'(x)$, tenemos

$1-\lambda K_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1-\lambda K_1$ y no costará ningún esfuerzo escoger el número λ de manera que se pueda emplear el método de aproximaciones sucesivas. La idea aquí expuesta es un método extendido que se emplea para buscar la raíz.

2. Consideremos la aplicación A del espacio de n dimensiones en sí mismo definida por el sistema de ecuaciones lineales

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Si A es una aplicación contraída, podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas para resolver la ecuación $x=Ax$.

¿Bajo qué condiciones la aplicación A será contraída? La respuesta depende de cómo se escoja la métrica en el espacio. Consideremos tres variantes.

a) El espacio R_0^n, es decir, $\rho(x,\ y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|$;

$$\begin{aligned}\rho(y',\ y'')&=\max_i|y_i'-y_i''|=\max_i\Big|\sum_j a_{ij}\ (x_j'-x_j'')\Big|\leqslant\\&\leqslant\max_i\sum_j|a_{ij}|\,|x_j'-x_j''|\leqslant\max_i\sum_j|a_{ij}|\max|x_j'-x_j''|=\\&=\Big(\max_i\sum_j|a_{ij}|\Big)\rho(x',\ x'').\end{aligned}$$

De aquí la condición de contracción

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leqslant\alpha<1,\ i=1,\ \ldots,\ n. \tag{2}$$

b) El espacio R_1^n, es decir, $\rho(x,\ y)=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$;

$$\begin{aligned}\rho(y',\ y'')=\sum_i|y_i'-y_i''|=\sum_i\Big|\sum_j a_{ij}(x_j'-x_j'')\Big|\leqslant\\\leqslant\sum_i\sum_j|a_{ij}|\,|x_j'-x_j''|\leqslant\Big(\max_j\sum_i|a_{ij}|\Big)\rho(x',\ x'').\end{aligned}$$

De aquí la condición de contracción

$$\sum_i|a_{ij}|\leqslant\alpha<1,\ j=1,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

c) El espacio R^n, es decir $(x,\ y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_1-y_i)^2}$. En virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, tenemos

$$\rho^2(y',\ y'')=\sum_i\Big|\Big(\sum_j a_{ij}(x_j'-x_j'')\Big)^2\leqslant\Big(\sum_i\sum_j a_{ij}^2\Big)\rho^2(x',\ x'').$$

De aquí la condición de contracción

$$\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

Por consiguiente, si se verifica al menos una de las condiciones (2), (3) ó (4), existe un punto y sólo uno, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i$ [1]; además las aproximaciones sucesivas de esta solución tienen la forma

$$\begin{gathered} x^{(0)} = (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}), \\ x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_n^{(1)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(k)} = (x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}), \end{gathered}$$

donde

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i$$

y $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ puede ser un punto cualquiera de R^n.

Cada una de las condiciones (2), (3) y (4) *es suficiente* para que la aplicación $y = Ax$ sea contraída. Respecto a la condición (2) se puede demostrar que es también necesaria para que la aplicación $y = Ax$ sea contraída (en el sentido de la métrica a)).

Ninguna de las condiciones (2), (3) y (4) es necesaria para que se pueda aplicar el método de aproximaciones sucesivas. Se pueden dar ejemplos, cuando una de estas condiciones se verifica, pero las otras dos no se cumplen.

Si $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$ (en este caso se cumplen las tres condiciones), es aplicable el método de aproximaciones sucesivas.

Si $|a_{ij}| = \frac{1}{n}$ (en este caso las tres sumas son iguales a 1), es fácil ver que el método de aproximaciones sucesivas no puede aplicarse.

3°. Teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales. En el punto anterior hemos señalado algunos ejemplos

---

[1] En particular, de cualquiera de las condiciones (2), (3) ó (4) se deduce que

$$\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

elementales de aplicación del principio de aplicaciones contraídas en los espacios de una y n dimensiones. Sin embargo, las aplicaciones más importantes para el Análisis del principio de aplicaciones contraídas se refieren a los espacios funcionales de infinitas dimensiones. Ahora veremos cómo mediante este principio se puede obtener teoremas de existencia y unicidad de la solución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales e integrales.

1. Supongamos que se tiene una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{5}$$

con la condición inicial

$$y(x_0)=y_0 \tag{6}$$

y que la función f, definida y continua en un recinto plano G que contiene el punto (x_0, y_0) verifica la condición de Lipschitz respecto a y:

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant M|y_1-y_2|.$$

Demostremos que entonces existe en un segmento $|x-x_0|\leqslant d$ una solución, y sólo una, $y=\varphi(x)$ de la ecuación (1), que verifica la condición inicial (6) (teorema de Picard).

La ecuación (5) junto con la condición inicial (6) es equivalente a la ecuación integral

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt. \tag{7}$$

Debido a la continuidad de la función f, tenemos $|f(x, y)|\leqslant K$ para un recinto $G'\subset G$ que contiene el punto (x_0, y_0). Escogemos ahora el número $d>0$ de manera que se cumplan las condiciones:

1) $(x, y)\in G'$, siempre que $|x-x_0|\leqslant d$, $|y-y_0|\leqslant Kd$;

2) $Md<1$.

Designemos mediante C^* el espacio de funciones continuas φ, definidas sobre el segmento $|x-x_0|\leqslant d$ y tales que $|\varphi(x)-y_0|\leqslant Kd$, con la métrica $\rho(\varphi_1, \varphi_2)=\max\limits_{x}|\varphi(x_1)-\varphi_2(x)|$.

El espacio C^* es completo, ya que representa un subespacio cerrado del espacio completo de todas las funciones continuas sobre $[x_0-d, x_0+d]$. Consideremos la aplicación $\psi=A\varphi$ definida mediante la fórmula

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt,$$

donde $|x-x_0|\leqslant d$. Esta aplicación transforma el espacio completo C^* en sí mismo y es contraída en él. En efecto, sea $\varphi \in C^*$ y $|x-x_0| \leqslant d$. En este caso,

$$|\psi(x)-y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right| \leqslant Kd$$

y, por consiguiente, $A(C^*) \subset C^*$. Además,

$$|\psi_1(x)-\psi_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant Md \max_x |\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|.$$

Puesto que $Md < 1$, la aplicación A es contraída.

De aquí se deduce que la ecuación $\varphi = A\varphi$ (es decir, la ecuación (7)) tiene una solución, y sólo una, en el espacio C^*.

2. Supongamos que se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \; i=1, 2, \ldots, n, \qquad (8)$$

con las condiciones iniciales

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i}, \; i=1, 2, \ldots, n \qquad (9)$$

y que las funciones f_i, definidas y continuas en un recinto G del espacio R^{n+1} que contiene el punto $(x_0, y_0, \ldots, y_{0n})$, verifican la condición de Lipschitz

$$|f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})| \leqslant$$
$$\leqslant M \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|.$$

Demostremos que entonces existe en un segmento $|x-x_0| \leqslant d$ una solución, y sólo una, del problema inicial (8) y (9), es decir, un sistema, y sólo uno, de funciones φ_i que verifican las ecuaciones (8) y las condiciones iniciales (9).

El sistema (8) junto con las condiciones iniciales (9) es equivalente al sistema de ecuaciones integrales

$$\varphi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\, dt, \; i=1, \ldots, n. \quad (10)$$

Debido a la continuidad, las funciones f_i son acotadas en un recinto $G' \subset G$ que contiene el punto $(x_0, y_0, \ldots, y_{0n})$, es decir, existe una constante K tal que $|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant K$.

Escojamos ahora el número $d > 0$ de manera que se cumplan las condiciones:

1) $(x, y_1, \ldots, y_n) \in G'$, siempre que $|x - x_0| \leqslant d$, $|y_i - y_{0i}| \leqslant Kd$;

2) $Md < 1$.

Consideremos ahora el espacio C_n^*, cuyos elementos son los sistemas ordenados $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de n funciones, definidas y continuas para todo x, siempre que $|x - x_0| \leqslant d$, y tales que $|\varphi_i(x) - y_{0i}| \leqslant Kd$, y cuya métrica está definida por

$$\rho(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = \max_{x,\, i} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|.$$

Este espacio es completo. La aplicación $\bar{\psi} = A\bar{\varphi}$, dada mediante el sistema de ecuaciones integrales

$$\psi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\, dt,$$

es una aplicación contraída del espacio completo C_n^* en sí mismo. En efecto,

$$\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x) =$$
$$= \int_{x_0}^{x} [f_i(t, \varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_n^{(1)}(t)) - f_i(t, \varphi_1^{(2)}(t), \ldots, \varphi_n^{(2)}(t))]\, dt$$

y, por consiguiente,

$$\max_{x,\, i} |\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)| \leqslant Md \max |\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)|.$$

La aplicación A es contraída, ya que $Md < 1$.

De aquí se deduce que la ecuación $\bar{\varphi} = A\bar{\varphi}$ tiene una solución, y sólo una, en el espacio C_n^*.

4°. Aplicación del principio de aplicaciónes contraídas a ecuaciones integrales. Empleamos ahora el método de aplicaciones contraídas para demostrar la existencia y unicidad de la solucíón de la ecuación integral lineal no homogénea de Fredholm de segunda especie, es decir de la ecuación

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy + \varphi(x), \tag{11}$$

donde K (llamada *núcleo*) y φ son funciones dadas; f, la función incógnita y λ, un parámetro arbitrario.

Como veremos, nuestro método es aplicable solamente para valores suficientemente pequeños del parámetro λ.

Supongamos que $K(x, y)$ y $\varphi(x)$ son continuas cuando $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$, y, por consiguiente, $|K(x, y)| \leqslant M$. Consideremos la aplicación $g = Af$ del espacio completo $C_{[a, b]}$ en sí mismo, definida por la fórmula

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) \, dy + \varphi(x).$$

Tenemos

$$\rho(g_1, g_2) = \max |g_1(x) - g_2(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| M (b - a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Por consiguiente, la aplicación A es contraída, si $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

Del principio de aplicaciones contraidas deducimos que para todo λ, tal que $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, la ecuación de Fredholm tiene una solución continua única. Las aproximaciones sucesivas $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ de esta solución tienen la forma

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) \, dy + \varphi(x),$$

donde $f_0(x)$ es una función continua cualquiera.

El principio de aplicaciones contraídas puede ser también empleado en el caso de una ecuación integral no lineal de tipo

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) \, dy + \varphi(x), \tag{12}$$

donde K y φ son continuas y, además, K verifica la condición de Lipschitz respecto a su argumento «funcional»:

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leqslant M |z_1 - z_2|.$$

En este caso, para la aplicación $g = Af$ del espacio completo $C_{[a, b]}$ en sí mismo, definida por

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) \, dy + \varphi(x), \tag{13}$$

obtenemos la desigualdad

$$\max |g_1(x) - g_2(x)| \leqslant |\lambda| M (b - a) \max |f_1(x) - f_2(x)|,$$

donde $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Por consiguiente, la aplicación A será contraída, siempre que $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$.

Consideremos finalmente la ecuación integral del tipo Volterra

$$f(x)=\lambda\int_a^x K(x,\ y)\ f(y)\,dy+\varphi(x). \tag{14}$$

En diferencia de las ecuaciones de Fredholm, el extremo superior de la integral es aquí la variable x. Formalmente esta ecuación puede considerarse como caso particular de la ecuación de Fredholm, completando la definición de la función K mediante la igualdad

$$K(x,\ y)=0 \text{ para } y>x.$$

Sin embargo, en el caso de la ecuación integral de Fredholm hemos tenido que limitarnos a pequeños valores del parámetro λ, mientras que en el caso de la ecuación de Volterra el principio de aplicaciones contraídas (y el método de aproximaciones sucesivas) puede emplearse para todos los valores de λ. Hablando con más precisión, se trata de la siguiente generalización del principio de aplicaciones contraídas:

Sea A una aplicación continua del espacio métrico completo R en sí mismo tal que la aplicación A^n es contraída para algún n; en este caso, la ecuación

$$Ax=x$$

tiene una solución, y sólo una.

En efecto, tomemos un punto arbitrario $x_0\in R$ y consideremos la sucesión $A^{kn}x_0\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Repitiendo la parte correspondientemente de la demostración del principio de aplicaciones contraídas, podemos probar que esta sucesión converge. Pongamos

$$x=\lim_{k\to\infty} A^{kn}x_0.$$

Afirmamos que

$$Ax=x.$$

Efectivamente, debido a la continuidad de A, tenemos

$$Ax=\lim_{k\to\infty} A^{kn}Ax_0.$$

Puesto que la aplicación A es contraída,

$$\rho\,(A^{kn}Ax_0,\ A^{kn}x_0)\leqslant\alpha\rho\,(A^{(k-1)n}Ax_0\leqslant\ldots\ \alpha^k\rho\,(Ax_0,\ x_0).$$

Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty}\rho\,(A^{kn}\,Ax_0,\ A^{kn}x_0)=0,$$

es decir, $Ax=x$.

Demostremos la unicidad del punto fijo. Como todo punto fijo respecto a A también será fijo respecto a la aplicación A^n y ésta es, a su vez, contraída, este punto fijo puede ser solamente único.

Probemos ahora que cierta potencia de la aplicación

$$Af(x)=\lambda\int_a^x K(x, y) f(y)\,dy+\varphi(x)$$

es una aplicación contraída. Sean f_1 y f_2 dos funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$. Entonces

$$|Af_1(x)-Af_2(x)|=\left|\lambda\int_a^x K(x, y)(f_1(y)-f_2(y))\,dy\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda|M(x-a)\max|f_1(x)-f_2(x)|.$$

Aquí

$$M=\max|K(x, y)|.$$

De aquí

$$|A^2f_1(x)-A^2f_2(x)|\leqslant|\lambda|^2M^2\frac{(x-a)^2}{2}\max|f_1(x)-f_2(x)|$$

y, en general,

$$|A^nf_1(x)-A^nf_2(x)|\leqslant|\lambda|^nM^n\frac{(x-a)^n}{n!}m\leqslant|\lambda|^nM^nm\frac{(b-a)^n}{n!},$$

donde $m=\max|f_1(x)-f_2(x)|$.

Cualquiera que sea el valor λ, podemos escoger n tan grande que

$$\frac{|\lambda|^nM^n(b-a)^n}{n!}<1,$$

es decir, la aplicación A^n será contraída para n suficientemente grandes. Por consiguiente, la ecuación de Volterra (14) tiene solución, y además única, cualquiera que sea λ.

§ 5. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

1°. Definición y ejemplos de espacios topológicos. Hemos introducido los conceptos principales de la teoría de espacios métricos (punto de acumulación, punto de adherencia, adherencia de un conjunto, etc.) basándonos en el concepto de vecindad o, que de hecho es lo mismo, en el concepto de conjunto abierto. Estos últimos conceptos (vecindad y conjunto abierto) se definían, a su vez, mediante la métrica existente en el espacio considerado.

Podemos, sin embargo, escoger otro camino y, sin introducir métrica ninguna en el conjunto dado R, definir directamente en R, mediante axiomas, el sistema de conjuntos abiertos. Este camino conduce a los *espacios topológicos*; respecto a ellos los espacios métricos representan un caso, aunque muy importante, pero especial.

DEFINICION. Sea X un conjunto cualquiera. Se llama *topología* en X a todo sistema τ de subconjuntos G de X que verifica dos condiciones:

1°. El propio conjunto X y el conjunto vacío $\varnothing$ pertenecen a τ.

2°. La unión $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ de un número cualquiera (finito o infinito) y la intersección $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ de un número finito de conjuntos de τ pertenecen a τ.

El conjunto X junto con la topología τ, definida en él, es decir, el par (X, τ) se llama *espacio topológico*.

Los conjuntos, pertenecientes al sistema τ, se llaman *abiertos*.

Un espacio métrico está constituido por un conjunto de puntos y una métrica introducida en este conjunto; de la misma forma, un espacio topológico está constituido por un conjunto de puntos y una topología introducida en él. Por consiguiente, definir un espacio topológico significa definir un conjunto X y una topología τ en él, es decir, indicar aquellos subconjuntos que se consideran abiertos en X.

Está claro, que en un mismo conjunto X se puede introducir diferentes topologías, convirtiéndolo de esta forma en diferentes espacios topológicos. Sin embargo, denotaremos el espacio topológico, es decir, el par (X, τ), mediante *una* letra, digamos T. Llamaremos puntos a los elementos del espacio topológico.

Los conjuntos $T \setminus G$, complementarios a los abiertos, se llaman conjuntos *cerrados* del espacio topológico T. En virtud de las relaciones de dualidad (§ 1, capítulo I), de los axiomas 1° y 2° se deduce que:

1′. El conjunto vacío $\varnothing$ y todo el espacio T son cerrados.

2′. La intersección de un número cualquiera (finito o infinito) y la unión de un número finito de conjuntos cerrados son cerrados.

En todo espacio topológico se introducen, a partir de estas definiciones y de un modo natural, los conceptos de vecindad, puntos de adherencia, adherencia de conjuntos, etc.:

Se llama *vecindad* del punto $x \in T$ a todo conjunto abierto $G \subset T$ que contiene el punto x; un punto $x \in T$ se llama *punto de adherencia* del conjunto $M \subset T$, cuando toda vecindad del punto x contiene al menos un punto de M; un punto x se llama *punto de acumulación* del conjunto M, cuando toda vecindad del punto x contiene un número infinito de puntos de M. La totalidad de los puntos de adherencia del conjunto M se llama *adherencia* del conjunto M y se denota mediante el símbolo $[M]$. Es fácil ver (realícese la demostración) que los conjuntos cerrados, definidos más arriba como complementos de abiertos, *y solamente ellos, verifican la condición* $[M] = M$. *Al igual que en el caso de espacios métricos,* $[M]$ *es el menor conjunto cerrado que contiene a* M.

Ejemplos. 1. En virtud del teorema 3 del § 2, los conjuntos abiertos de cualquier espacio métrico verifican los axiomas 1° y 2° de la definición de un espacio topológico. Por consiguiente, todo espacio métrico es un espacio topológico.

2. Sea T un conjunto arbitrario. Consideremos como abiertos todos sus subconjuntos. Es obvio, entonces, que se cumplen los axiomas 1° y 2°, es decir, obtenemos efectivamente un espacio topológico. En él todos los conjuntos son a la vez abiertos y cerrados y, por eso, cada uno de ellos coincide con su adherencia. Esta topología trivial se observa, por ejemplo, en el espacio métrico, señalado en el ejemplo 1 del § 1.

3. Otro caso extremo se obtiene al considerar en un conjunto arbitrario X la topología compuesta sólo de dos conjuntos: el conjunto X y el conjunto vacío $\varnothing$. Aquí la adherencia de todo conjunto no vacío coincide con todo X. Este espacio topológico (que no representa, claro está, gran interés) puede ser llamado «espacio de puntos *pegados*».

4. Supongamos que T consta solamente de dos puntos a y b y que los conjuntos abiertos son todo el T, el conjunto vacío y el conjunto compuesto solamente del punto b. Los axiomas 1° y 2° se cumplen. En este espacio (que frecuentemente se llama *espacio de dos puntos conexos*) los conjuntos cerrados son: todo el T, el conjunto vacío y el punto a. La adherencia del conjunto puntual $\{b\}$ coincide con todo el T.

2°. **Comparación de topologías.** Supongamos que en un mismo conjunto X se tienen dos topologías τ_1 y τ_2 (con ello quedan definidos *dos* espacios topológicos: $T_1 = (X_1, \tau_1)$ y $T_2 = (X_1, \tau_2)$. Se dice que la topología τ_1 es *más fuerte* que la topología τ_2, cuando el sistema de conjuntos τ_2 está contenido en τ_1. De la topología τ_2 se dice en este caso que es más débil que τ_1.

En el conjunto de todas las topologías posibles del conjunto X se introduce, de manera natural, el orden parcial (la topología τ_2 precede a la τ_1, cuando es más débil que τ_1). Esta totalidad de topologías tiene el elemento maximal — la topología en la que son abiertos todos los subconjuntos (ejemplo 2) — y el elemento minimal — la topología en la que son abiertos solamente todo el X y $\varnothing$ (ejemplo 3).

TEOREMA 1. *La intersección* $\tau = \bigcap_\alpha \tau_\alpha$ *de un conjunto cualquiera de topologías de* X *es una topología de* X. *Esta topología* τ *es más débil que cualquiera de las topologías* τ_α.

DEMOSTRACION. Está claro que $\cap \tau_\alpha$ contiene a X y $\varnothing$. Además, cada sistema τ_α es cerrado respecto a cualesquiera sumas e intersecciones finitas; de aquí se deduce que $\tau = \bigcap_\alpha \tau_\alpha$ también posee esta propiedad.

COROLARIO. *Sea* B *un sistema arbitrario de subconjuntos del conjunto* X; *entonces existe una topología minimal de* X *que contiene a* B.

En efecto, existen topologías que contienen a B (por ejemplo, aquella en la que todo $A \subset X$ es abierto). La intersección de todas las topologías que contienen a B es la deseada. Esta topología minimal se llama topología generada por el sistema B y se denota con $\tau(B)$.

Sea X un conjunto arbitrario y A un subconjunto suyo. Llamaremos *traza* del sistema de conjuntos B sobre el subconjunto A al sistema B_A, compuesto de subconjuntos de tipo $A \cap B$, $B \in B$. Es fácil ver que la traza (sobre A) de la *topología* τ (definida en X) representa una topoloqía τ_A de A. Por consiguiente, todo subconjunto A de cualquier espacio topológico resulta ser un espacio topológico. El espacio topológico (A, τ_A) se llama *subespacio* del espacio topológico inicial (X, τ). Está claro que dos distintas topologías τ_1 y τ_2 de X pueden producir una misma topología en $A \subset X$.

3°. Sistemas determinantes de vecindades. Base. Axiomas de numerabilidad. Como hemos visto, para definir una topología en un espacio T hay que señalar en él el sistema de conjuntos abiertos. Sin embargo, en muchos casos concretos es más cómodo señalar no la totalidad de subconjuntos abiertos del espacio dado, sino un sistema determinante de subconjuntos que permite definir unívocamente la totalidad de los subconjuntos abiertos. Por ejemplo, en el espacio métrico hemos introducido primero el concepto de bola abierta (= ε-vecindad) y después hemos definido los conjuntos abiertos como aquellos que junto con cada punto contienen una vecindad suya en forma de bola. En otras palabras, en el espacio métrico son abiertos aquellos conjuntos y solamente aquellos que se pueden representar como la suma de bolas abiertas (en número finito o infinito). En particular son abiertos en la recta los conjuntos que se puede representar como la suma de un número de intervalos y solamente estos conjuntos. Estas consideraciones nos conducen al importante concepto de *base* de un espacio topológico.

DEFINICION. Una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos abiertos se llama *base* del espacio topológico T, cuando todo conjunto abierto de T se puede representar como suma de cierto número de conjuntos de $\mathcal{G}$.

Por ejemplo, la colección de todas las bolas abiertas (de todos los radios y centros posibles) constituye una base en un espacio métrico. En particular, el sistema de todos los intervalos es una base en la recta. Si se toman solamente los intervalos con extremos racionales, también constituyen una base en la recta, ya que mediante la suma de estos intervalos se puede representar cualquier intervalo y, por consiguiente, cualquier conjunto abierto sobre la recta.

De lo expuesto se desprende que la topología τ del espacio T queda definida, si se indica en este espacio una base $\mathcal{G}$. Esta topología τ coincide con la colección de conjuntos que pueden representarse como suma de conjuntos de $\mathcal{G}$. Para que esta forma de introducir la topología tenga un valor práctico es necesario señalar aquellas condiciones que debe cumplir un sistema $\mathcal{G}$ de subconjuntos del conjunto dado T para que la colección de todas las sumas posibles de conjuntos de $\mathcal{G}$ pueda ser considerada como la colección de conjuntos abiertos en T (es decir, para que estas sumas verifiquen los axiomas 1° y 2° de espacio topológico).

Estas condiciones vienen dadas por el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Supongamos que en un conjunto T se ha escogido un sistema $\mathcal{G}$ de subconjuntos G_α que verifica las siguientes condiciones:*

a) *Todo punto $x \in T$ está contenido al menos en un subconjunto $G_\alpha \in \mathcal{G}$.*

b) *Si $x \in G_\alpha$ y $x \in G_\beta$, existe un $G_\gamma \in \mathcal{G}$ tal que*

$$x \in G_\gamma \subset G_\alpha \cap G_\beta.$$

Si declaramos abiertos en T al conjunto vacío y a todos los conjuntos que se pueden representarse como la suma de determinados $G_\alpha \in \mathcal{G}$, el conjunto T resultará un espacio topológico (es decir, estas sumas verificarán los axiomas 1° y 2°) y el sistema $\mathcal{G}$ será una base de él.

DEMOSTRACION. De las condiciones del teorema se deduce inmediatamente que todo el T y el conjunto vacío son conjuntos abiertos y que la unión de cualquier número de conjuntos abiertos será abierta. Demostremos que la intersección de cualquier número finito de conjuntos abiertos será abierta. Es suficiente realizar la demostración para el caso de dos conjuntos. Sea $A = \bigcup_\alpha G_\alpha$ y $B = \bigcup_\beta G_\beta$; entonces, $A \cap B = \bigcup_{\alpha, \beta} (G_\alpha \cap G_\beta)$. Por hipótesis, para todo punto $x \in G_\alpha \cap G_\beta$ existe un $G_\gamma \in \mathcal{G}$ tal que $x \in G_\gamma \subset G_\alpha \cap G_\beta$. Por consiguiente, el conjunto $G_\alpha \cap G_\beta$ es abierto, ya que puede ser representado como la suma de todos los G_γ contenidos en él. Pero en este caso es también abierto el conjunto $A \cap B = \bigcup (G_\alpha \cap G_\beta)$. El hecho de que $\mathcal{G}$ constituye una base del espacio topológico construido se desprende de la forma misma en que se han definido los conjuntos abiertos en T.

Para probar si una colección dada de conjuntos abiertos es base o no suele ser útil el siguiente criterio.

TEOREMA 3. *Para que un sistema $\{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos sea una base del espacio topológico T es necesario y suficiente que para todo conjunto abierto G y todo punto $x \in G$ exista un conjunto G_α de este sistema tal que $x \in G_\alpha \subset G$.*

DEMOSTRACION. *Si $\{G_\alpha\}$ es base, todo abierto $G \subset T$ es suma de determinados G_α:*

$$G = \bigcup_i G_{\alpha_i}$$

y, por consiguiente, todo punto $x \in G$ pertenece a algún G_α contenido en G. Viceversa, si se cumple la condición del teorema, $\{G_\alpha\}$ es base. En efecto, sea G un conjunto abierto arbitrario. Para todo punto $x \in G$ podemos encontrar un $G_\alpha(x)$ tal que $x \in G_\alpha(x) \subset G$. La suma de estos $G_\alpha(x)$, construidos para cada $x \in G$, coincide con G.

Es fácil ver, mediante este criterio, que la colección de todas las bolas abiertas de un espacio métrico constituye una base. La colección de todas las bolas de radio racional también constituye una base. En la recta es una base, por ejemplo, la colección de todos los intervalos racionales (es decir, de todos los intervalos de extremos racionales).

Una clase importante de espacios topológicos la constituyen los *espacios de base numerable*, es decir, los espacios en los que existe por lo menos una base, compuesta por un número, a lo sumo numerable, de conjuntos. Los espacios de base numerable suelen también llamarse *espacios con el segundo axioma de numerabilidad.*

Si un espacio topológico tiene una base numerable, en él existe obligatoriamente un conjunto numerable siempre denso, es decir, un conjunto numerable, cuya adherencia es todo el T. En efecto, sea $\{G_n\}$ una tal base. Tomemos en cada elemento de esta base un punto arbitrario x_n. El conjunto numerable $X=\{x_n\}$ es siempre denso en T, ya que, de lo contrario, el conjunto abierto no vacío $G=T\setminus[X]$ no contendría ningún punto de X y esto no puede ocurrir puesto que G es la suma de determinados conjuntos del sistema $\{G_n\}$ y $x\in G_n$.

Para los espacios métricos se cumple también la afirmación recíproca:

Si en el espacio métrico R existe un conjunto $\{x_n\}$ numerable siempre denso, también existe en R una base numerable.

En efecto, una tal base es, por ejemplo, la constituida por las bolas abiertas $B\left(x_n, \frac{1}{m}\right)$, donde n y m recorren todos los valores naturales. Por lo tanto, tiene lugar el siguiente teorema:

TEOREMA 4. *Un espacio métrico R tiene una base numerable si, y sólo si, existe en él un conjunto siempre denso.*

En virtud de este teorema, todos los ejemplos de espacios métricos, provistos de subconjuntos numerables siempre densos, ofrecen, al mismo tiempo, ejemplos de espacios métricos con el segundo axioma de numerabilidad. El espacio de las sucesiones acotadas (véase el ejemplo 9 del § 1) que no tiene ningún subconjunto numerable siempre denso, tampoco tiene base numerable.

Observación. El teorema 4 no se cumple, en general, para los espacios topológicos arbitrarios (no métricos): se puede dar ejemplos de espacios, provistos de un conjunto numerable siempre denso, que no tienen base numerable. Expliquemos la razón de este fenómeno. Para todo punto x de un espacio métrico R existe un sistema *numerable* $\mathfrak{U}$ de vecindades $\left(\text{por ejemplo, el sistema de bolas abiertas } B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right)$, que cumple la siguiente condición: cualquiera que sea el conjunto abierto G que contiene al punto x, existe una vecindad der sistema $\mathfrak{U}$ que pertenece íntegramente a G. Un sistema tal de vecindades se llama *sistema determinante de vecindades del punto x*. Si para un punto x de un espacio topológico T existe un sistema determinante de vecindades, se dice que en este punto se cumple el *primer axioma de numerabilidad.* Si esto tiene lugar para cada punto del espacio T, el espacio T se llama espacio con el primer axioma de numerabilidad.

Sin embargo, en un espacio topológico arbitrario (aun cuando esté compuesto por un número numerable de puntos) puede no tener lugar el primer axioma de numerabilidad. Por eso no se puede extender al caso de un epsacio topológico arbitrario aquellos razonamientos que en el caso de espacio métrico nos permitieron deducir de la existencia de un conjunto numerable siempre denso la existencia en este espacio de una base numerable.

Un sistema $\{M_\alpha\}$ de conjuntos se llama *cubrimiento* del espacio topológico T, cuando $\bigcup_\alpha M_\alpha = T$. Un cubrimiento, compuesto por conjuntos abiertos o cerrados, se llama cubrimiento abierto o cerrado, respectivamente. Si una parte $\{M_{\alpha_i}\}$ del cubrimiento M_α también constituye un cubrimiento del espacio T, se dice que $\{M_{\alpha_i}\}$ es un subcubrimiento del cubrimiento $\{M_\alpha\}$.

TEOREMA 5. *Si T es un espacio topológico de base numerable, de todo cubrimiento suyo abierto se puede extraer un subcubrimiento finito o numerable.*

DEMOSTRACION. Sea $\{O_\alpha\}$ un cubrimiento abierto del espacio T. Entonces, todo punto $x \in T$ está contenido en un O_α. Sea $\{G_n\}$ la base numerable de T. Para todo $x \in T$ existe un elemento $G_n(x)$ de esta base tal que $x \in G_n(x) \subset O_\alpha$. La totalidad de conjuntos $G_n(x)$, obtenidos de esta forma, es finita o numerable y cubre todo T. Escogiendo para cada $G_n(x)$ uno de los conjuntos O_α, que lo contienen, obtendremos un subcubrimiento finito o numerable del cubrimiento $\{O_\alpha\}$. El teorema queda demostrado.

De acuerdo con la definición de espario topológico el conjunto vacío y todo el espacio T son a la vez abiertos y cerrados. Todo espacio, que no tiene ningún otro conjunto a la vez abierto y cerrado, se llama *conexo*. La línea recta R^1 representa uno de los ejemplos más simples de espacios conexos. Pero si extraemos de R^1 aunque sea un sólo punto, el espacio que queda ya no será conexo.

4°. Sucesiones convergentes en T. El concepto de sucesión convergente, conocido de los espacios métricos, se extiende fácilmente al caso de los espacios topológicos. A saber, la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de puntos de T se llama *convergente al punto* x, cuando toda vecindad del punto x contiene todos los puntos de esta sucesión, comenzando de alguno. Sin embargo, en los espacios topológicos este concepto de convergencia no desempeña ese papel fundamental que le corresponde en los espacios métricos. Esto se debe a que en un espacio métrico R un punto x es un punto de adherencia del conjunto $M \subset R$ si, y sólo si, en M existe una sucesión convergente a x, mientras que en un espacio topológico esto, como regla general, no se cumple. Si x es un punto de adherencia para M (es decir, pertenece a $[M]$) en un espacio topológico T, ello no implica la existencia en M de una sucesión convergente a x. Consideremos, a título de ejemplo, el segmento $[0, 1]$, llamando abiertos aquellos subconjuntos suyos (además del conjunto vacío) que se obtienen omitiendo de él un número finito o numerable de puntos. Es fácil ver que los axiomas 1° y 2° (pág. 90) se cumplen, es decir, que tenemos un espacio topológico. En este espacio serán convergentes sólo las sucesiones estacionarias, es decir, tales que sus elementos, empezando de cierto número, coinciden: $x_n = x_{n+1} = \ldots$ (¡demuéstrese esto!). Por otro lado, si cogemos, por ejemplo, a título de M el semisegmento $(0, 1]$, el punto 0 será para él un punto de adherencia (¡compruébese!), pero ninguna sucesión de puntos de M converge a 0 en nuestro espacio.

Las sucesiones convergentes «recobran su importancia», si en vez de considerar espacios topológicos arbitrarios nos limitamos a aquellos espacios, en los que se verifica el primer axioma de numerabilidad, es decir, cuando para todo punto x del espacio T existe un sistema numerable determinante de vecindades. En este caso, todo punto de adherencia x de un conjunto arbitrario $M \subset T$ puede ser representado como límite de cierta sucesión de puntos de M. En efecto, sea $\{O_n\}$ un sistema numerable determinante de vecindades del punto x. Podemos admitir que $O_{n+1} \subset O_n$ $\left(\text{de lo contrario, sustituiríamos } O_n \text{ por } \bigcap_{k=1}^{n} O_k\right)$. Sea x_k un punto arbitrario de M perteneciente a O_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Está claro que un punto x_k así debe existir, ya que de lo contrario x no sería punto de adherencia para M. Es obvio que la sucesión $\{x_k\}$ converge a x.

Como hemos señalado, todos los espacios métricos verifican el primer axioma de numerabilidad. Es por eso que en el caso de espacios métricos hemos podido enunciar, en términos de convergencia de sucesiones, conceptos como adherencia, punto de adherencia, etc.

5°. Axiomas de separabilidad. Aunque muchos conceptos principales de la teoría de espacios métricos se extienden fácilmente a cualesquiera espacios topológicos, sin embargo, un espacio topológico arbitrario representa un ente demasiado general desde el punto de vista de los problemas del Análisis. En estos espacios se producen, a veces, situaciones que difieren de modo sustancial de lo que puede ocurrir en los espacios métricos. Así, hemos visto (ejemplo 4, pág. 91) que en un espacio topológico un conjunto finito de puntos puede no ser cerrado, etc.

Entre los espacios topológicos se pueden destacar espacios que por sus propiedades se aproximan a los espacios métricos. Para ello hay que agregar a los axiomas 1° y 2° de espacio topológico unas u otras condiciones adicionales. Condiciones de este tipo son, por ejemplo, los axiomas de numerabilidad que permiten estudiar la topología del espacio a partir del concepto de convergencia. Otro tipo importante de condiciones adicionales y de naturaleza distinta son los así llamados *axiomas de separabilidad.* Enunciaremos esta serie de axiomas en orden de generalización.

T_1. *Primer axioma de separabilidad*: para dos cualesquiera diferentes puntos x e y del espacio T existe una vecindad O_x del punto x, que no contiene al punto y, y una vecindad O_y del punto y, que no contiene al punto x.

Los espacios que verifican este axioma se llaman T_1-espacios. Un ejemplo de un espacio topológico, que no es T_1-espacio, lo ofrece el espacio de dos puntos conexos.

En un T_1-espacio todo punto es un conjunto cerrado. En efecto, si $x \neq y$, existe una vecindad O_y del punto y que no contiene a x, es decir, $y \overline{\in} [x]$. De manera que $[x] = x$. Por consiguiente, en un T_1-espacio resulta también cerrado todo conjunto compuesto de un número finito de puntos. Es más, se puede demostrar fácilmente que el axioma T_1 equivale a exigir que todos estos conjuntos sean cerrados.

El axioma T_2 es una acentuación del primer axioma de separabilidad.

T_2. *Segundo axioma de separabilidad o axioma de Hausdorff:* para dos cualesquiera puntos x e y del espacio topológico T existen vecindades O_x y O_y de intersección vacía.

Los espacios que verifican este axioma se llaman T_2*-espacios* o *espacios de Hausdorff.* Todo espacio de Hausdorff es un T_1-espacio, pero no viceversa. A título de ejemplo de un T_1-espacio que no es espacio de Hausdorff podemos señalar el segmento [0, 1], en el que se consideran abiertos el conjunto vacío y todos los conjuntos que se obtienen omitiendo del segmento a lo sumo un número numerable de puntos.

Generalmente, en el Análisis no se emplean espacios más generales que los de Hausdorff. Es más, como regla general, los espacios, que representan interés para el Análisis, verifican además la siguiente condición, más fuerte aún, llamada condición de normalidad del espacio.

Se llama *espacio normal* a un T_1-espacio en el que cualesquiera dos conjuntos cerrados tienen vecindades[1] de intersección vacía.

Todo espacio normal es de Hausdorff. Un ejemplo de un espacio de Hausdorff que no es normal lo ofrece el segmento $[0, 1]$, en el que las vecindades de todos los puntos, excepto el punto 0, se definen de la manera corriente, mientras que para las vecindades del cero se toman todos los semisegmentos $[0, \alpha)$ de los que se han excluido los puntos de tipo $\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Esto es un espacio de Hausdorff: el punto 0 y la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ representan dos conjuntos cerrados de intersección vacía de este espacio que no pueden ser separados mediante dos vecindades de intersección vacía.

Son espacios normales, por ejemplo, todos los espacios métricos. En efecto, sean X e Y dos conjuntos cerrados de intersección vacía de un espacio métrico R. Todo punto $x \in X$ tiene una vecindad O_x que no se interseca con Y y, por consiguiente, está a una distancia positiva ρ_x de Y. De la misma forma todo punto $y \in Y$ está a una distancia positiva ρ_y de X. Consideremos los conjuntos abiertos[2]

$$U = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{\rho_x}{2}\right) \text{ y } V = \bigcup_{y \in Y} B\left(y, \frac{\rho_y}{2}\right),$$

que contienen a X e Y respectivamente, y demostremos que la intersección de estos conjuntos es vacía. Supongamos que $z \in U \cap V$. En este caso, existe en X un punto x_0, tal que $\rho(x_0, z) < \frac{\rho_{x_0}}{2}$, y en Y un punto y_0 tal que $\rho(z, y_0) < \frac{\rho_{y_0}}{2}$. Supongamos, para concretar, que $\rho_{x_0} \leqslant \rho_{y_0}$. Entonces

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) < \frac{\rho_{x_0}}{2} + \frac{\rho_{y_0}}{2} \leqslant \rho_{y_0},$$

es decir, $x_0 \in B(y_0, \rho_{y_0})$; pero esto contradice a la definición de ρ_{y_0}. Hemos demostrado nuestra afirmación.

Todo subespacio de un espacio métrico es por sí mismo un espacio métrico y por eso también posee la propiedad de normalidad. Esto, como regla general, no tiene lugar para los espa-

---

[1] Se llama vecindad de un conjunto M de un espacio topológico T a todo conjunto abierto U que contiene a M.

[2] Aquí $B(x, r)$ representa, como siempre, una bola abierta de radio r y centro en x.

cios normales arbitrarios: un subespacio de un espacio normal no es necesariamente normal. De manera que la normalidad de un espacio no es una propiedad heredera [1].

Una propiedad heredera es la así llamada *regularidad total* de los espacios topológicos. Un T_1-espacio topológico se llama *totalmente regular*, cuando para todo conjunto cerrado $F \subset T$ y todo punto $x_0 \in T \setminus F$ existe una función continua real f, definida sobre T, que es igual a cero en x_0, a la unidad sobre F y que verifica la condición $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Todo espacio normal es totalmente regular [2], pero no viceversa. Todo subespacio de un espacio totalmente regular (de un espacio normal, en particular) es totalmente regular. A. N. Tíjonov, a quien se debe el propio concepto de espacio totalmente regular, ha demostrado que la clase de espacios totalmente regulares coincide con la clase de todos los subespacios normales. Desde el punto de vista del Análisis, la importancia de los espacios totalmente regulares radica en que sobre cualquier espacio de esta índole se puede definir un número «suficientemente grande» de funciones continuas, ya que para cualesquiera dos puntos distintos x e y de un espacio totalmente regular T existe una función real continua, definida sobre T, que toma en estos puntos diferentes valores.

6°. Aplicaciones continuas. Homeomorfismo. El concepto de aplicación continua, que hemos introducido en el § 1 para los espacios métricos, es extensible, naturalmente, a espacios topológicos arbitrarios.

DEFINICION. Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación f del espacio X en el espacio Y se llama *continua en el punto* x_0, cuando para toda vecindad U_{y_0} del punto $y_0 = f(x_0)$ existe una vecindad V_{x_0} del punto x_0 tal que $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$. Una *aplicación* $f\colon X \to Y$ se llama *continua*, cuando es continua para todo punto $x \in X$. En particular, una aplicación continua del espacio topológico X en la recta numérica se llama *función continua* sobre este espacio topológico. Es fácil ver, que en el caso de espacios métricos esta definición coincide, en efecto, con la definición de una aplicación continua de un espacio métrico en otro, que ha sido dada en el § 1 de este capítulo.

---

[1] Una propiedad P se llama *heredera*, si siendo justa para todo el espacio topológico T también se verifica para cualquiera de sus subespacios.

[2] Este resultado (lejos de ser evidente) se desprende del siguiente teorema de P. S. Urisón: si T es un espacio normal y F_1 y F_2 dos conjuntos suyos cerrados y de intersección vacía, existe una función f, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, continua, definida sobre T, que es igual a cero sobre F_1 e igual a la unidad sobre F_2.

Enunciemos ahora el concepto de continuidad de una aplicación de un espacio topológico en otro en términos de conjuntos abiertos, es decir, en términos de las *topologías* de los dos espacios considerados. Notemos que la aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ puede ser considerada aplicación *sobre*, ya que siempre podemos considerar el subespacio $f(X) \subset Y$ en vez de Y.

TEOREMA 6. *Para que una aplicación f de un espacio topológico X en un espacio topológico Y sea continua, es necesario y suficiente que la imagen recíproca $\Gamma = f^{-1}(G)$ de todo conjunto abierto $G \subset Y$ sea abierta* (en X).

DEMOSTRACION. NECESIDAD. Sea f una aplicación continua y G un conjunto abierto en Y. Demostremos que $\Gamma = f^{-1}(G)$ es abierto. Sea x un punto cualquiera de Γ e $y = f(x)$. Entonces, G representa una vecindad del punto y. De acuerdo con la definición de continuidad, existe una vecindad V_x del punto x, tal que $f(V_x) \subset G$, es decir, $V_x \subset \Gamma$. En otras palabras, si $x \in \Gamma$, existe una vecindad V_x de este punto contenida en Γ. Pero esto significa precisamente que Γ es abierto.

SUFICIENCIA. Sea $\Gamma = f^{-1}(G)$ abierto, cuando $G \subset Y$ es abierto. Consideremos un punto arbitrario $x \in X$ y una vecindad arbitraria U_y del punto $y = f(x)$. Puesto que $y \in U_y$, el punto x pertenece al conjunto $f^{-1}(U_y)$. Este es un conjunto abierto y puede ser considerado como aquella vecindad del punto x, cuya imagen está contenida en U_y. Hemos demostrado el teorema.

Observacion. Sean X e Y conjuntos arbitrarios y f una aplicación de X en Y. Supongamos que Y está provisto de una topología τ (es decir, de un sistema de conjuntos que contiene a Y y a $\varnothing$ y que resulta cerrado respecto a las operaciones de sumas cualesquiera e intersecciones finitas). Debido a que la imagen recíproca de la suma (intersección) de conjuntos es igual a la suma (intersección) de las imágenes reciprocas (teoremas 1 y 2 del § 3, cap. I), obtenemos que la imagen recíproca de la topología τ (es decir, la colección de todos los conjuntos $f^{-1}(G)$, donde $G \in \tau$) es una topología en X, que denotaremos $f^{-1}(\tau)$. Si ahora X e Y son espacios topológicos, con topologías τ_x y τ_y respectivamente, el teorema 6, que da la condición necesaria y suficiente de la continuidad de la aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, puede ser enunciado así: la aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua si, y sólo si, la topología τ_x es *más fuerte* que la topología $f^{-1}(\tau_y)$.

Teniendo en cuenta que la imagen recíproca del complemento es igual al complemento de la imagen recíproca, obtenemos el teorema dual al teorema 6.

TEOREMA 6'. *Para que la aplicación f de un espacio topológico X en un espacio topológico Y sea continua, es necesario y suficiente que la imagen recíproca de todo conjunto cerrado de Y sea cerrada.*

Es fácil ver que la *imagen* de un conjunto abierto (cerrado) ofrecida por una aplicación continua no es necesariamente abierta (cerrada). Consideremos, por ejemplo, la aplicación del semisegmento $X=[0, 1)$ en una circunferencia de la misma longitud. El conjunto $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, cerrado en $[0, 1)$, se transforma en este caso en un conjunto no cerrado de la circunferencia (fig. 12).

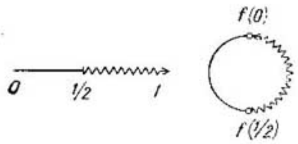

FIG. 12

Para las aplicaciones continuas se cumple el siguiente teorema, análogo al teorema, bien conocido del Análisis, sobre la continuidad de la función compuesta.

TEOREMA 7. *Sean X, Y, y Z espacios topológicos y sean f y φ aplicaciones continuas de X en Y y de Y en Z, respectivamente. Entonces la aplicación $x \longrightarrow \varphi(f(x))$ del espacio X en Z es continua.*

La demostración de este teorema se obtiene del teorema 6.

Una aplicación f del espacio topológico X sobre el espacio topológico Y biunívoca y bicontinua a la vez se llama *homeomorfismo* y los espacios X e Y se llaman *homeomorfos*. Los espacios homeomorfos entre sí tienen las mismas propiedades topológicas y desde el punto de vista topológico pueden considerarse como dos ejemplares de un mismo espacio. Las topologías de dos espacios homeomorfos son imágenes e imágenes recíprocas una de la otra. La relación homeomorfa es reflexiva, simétrica y transitiva; por consiguiente, la totalidad de los espacios topológicos se divide en clases disjuntas de espacios homeomorfos entre sí.

Observación. El concepto de homeomorfismo ya fue introducido en el § 1 para los espacios métricos. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que las propiedades métricas de dos espacios métricos homeomorfos pueden ser distintas[1]. Así, uno de ellos puede ser completo y el otro no serlo. Por ejemplo, el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es homeomorfo a la recta numérica (el homeomorfismo correspondiente viene dado por la función $x \longrightarrow \operatorname{tg} x$) y, sin embargo, la recta es un espacio completo y el intervalo no lo es.

7°. Distintos métodos de definición de topologías en un espacio. Metrizabilidad. La forma más directa y, por su esencia, más elemental de introducir una topología en un espacio consiste en señalar directamente aquellos conjuntos que se consideran abiertos. La totalidad de estos conjuntos debe verificar las condiciones 1° y 2° (véase la pág. 90). Equivalente a ella es la forma dual que consiste en indicar la colección de conjuntos cerrados. Es obvio que esta colección debe verificar las condiciones 1′ y 2′ (pág. 90). Sin embargo, este método se puede aplicar, de hecho, en reducidos casos. Por ejemplo, ya en el caso del plano no se puede dar, por lo visto, una descripción directa de los subconjuntos abiertos (de la forma como se logra hacer esto para la recta (teorema 5 del § 2)).

Un método que se emplea frecuentemente para introducir una topología en un espacio consiste en indicar en él una base; de hecho, precisamente de este modo, se introduce la topología en los espacios métricos, donde, a partir de la métrica, se define la base, es decir, la colección de bolas abiertas.

Otra forma posible de definir una topología en un espacio consiste en introducir en él el concepto de convergencia. Sin embargo, hemos señalado ya en el punto 3 que este procedimiento no es universal: por medio de él sólo se pueden introducir topologías en espacios, en los que se cumple el primer axioma de numerabilidad. No obstante, desde el punto de vista del Análisis este método resulta frecuentemente útil[2].

En un espacio se puede introducir la topología definiendo en él axiomáticamente la operación de adherencia. Se dice que en el conjunto X se ha introducio la operación de adherencia, cuando a todo $A \subset X$ se le ha puesto en correspondencia un conjunto $[A] \subset X$, llamado adherencia de A, de manera que la operación

---

[1] La métrica del espacio R determina unívocamente su topología, pero no viceversa: una misma topología en $R=(X, \rho)$ se puede obtener introduciendo en X diferentes métricas.

[2] Más aun si tenemos en cuenta que generalizando el concepto de convergencia (convergencia respecto a los así llamados filtros) este método resulta aplicable también en el caso general.

consistente en pasar del conjunto A al conjunto $[A]$ verifica las propiedades 1), 2), 3) y 4) indicadas en el teorema 1 del § 2.

Uno de los métodos más importantes, aunque lejos de ser universal, de introducir una topología consiste en definir en el espacio una métrica. Como hemos visto, todo espacio métrico es normal y verifica el primer axioma de numerabilidad. Por eso si en algún espacio no se cumple una de estas dos condiciones, no se puede introducir la topología en él mediante ninguna métrica.

DEFINICION. Un espacio topológico se llama *metrizable*, cuando su topología puede ser introducida mediante alguna métrica.

De acuerdo con lo que acabamos de señalar, la normalidad del espacio y el primer axioma de numerabilidad son condiciones necesarias para que el espacio sea metrizable. Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones por separado ni, incluso, ambas juntas son suficientes para que el espacio sea metrizable. No obstante, tiene lugar el siguiente teorema, que pertenece a P. S. Urisón:

para que en espacio topológico provisto de base numerable sea metrizable, es necesario y suficiente que sea normal.

La necesidad de esta condición es evidente.

§ 6. COMPACIDAD

1°. Concepto de compacidad. En el Análisis desempeña un papel fundamental el siguiente hecho, conocido como lema de Heine—Borel:

de cualquier cubrimiento del segmento $[a, b]$ de la recta numérica por medio de intervalos se puede extraer un subcubrimiento finito.

Esta afirmación continúa siendo válida, cuando en vez de intervalos se consideran cualesquiera conjuntos abiertos: de todo cubrimiento abierto del segmento $[a, b]$ se puede extraer un subcubrimiento finito.

Partiendo de esta propiedad del segmento de la recta numérica, introducimos el siguiente concepto importante.

DEFINICION. Un espacio topológico T se llama *compacto*, cuando cualquier cubrimiento abierto suyo contiene un subcubrimiento finito. Un espacio topológico compacto que verifica el axioma de separabilidad de Hausdorff se llama un *compacto*.

Como veremos más adelante, la propiedad de compacidad la tienen, además de los segmentos, todos los subconjuntos cerrados acotados de un espacio euclídeo de cualquier dimensión finita. Al contrario, la recta, el plano y el espacio de tres dimensiones son ejemplos elementales de espacios no compactos.

Un sistema de subconjuntos $\{A\}$ del conjunto T se llama sistema *centrado*, cuando cualquier intersección finita $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ de elementos de este sistema es no vacía. De la definición dada de compacidad y de las relaciones de dualidad se deduce el siguiente teorema.

TEOREMA 1. *Para que un espacio topológico T sea compacto, es necesario y suficiente que verifique la condición (R):*
todo sistema centrado de subconjuntos cerrados de este espacio tiene intersección no vacía.

En efecto, sea $\{F_\alpha\}$ un sistema centrado de subconjuntos cerrados de T y sea T un espacio compacto. Los conjuntos $G_\alpha = T \setminus F_\alpha$ son abiertos; además, como cualquier intersección finita $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ es no vacía, ningún sistema finito de conjuntos $G_i = T \setminus F_i$ puede cubrir todo T. Pero en este caso todos los G_α tampoco forman cubrimiento (compacidad); esto significa que $\bigcap F_\alpha \neq \varnothing$. Por consiguiente, si T es un espacio compacto, en él se verifica la condición (R). Viceversa, supongamos que T verifica la condición (R) y que $\{G_\alpha\}$ es un cubrimiento abierto del espacio T. Tomando $F_\alpha = T \setminus G_\alpha$, obtenemos que $\bigcap F_\alpha = \varnothing$ y de aquí se desprende (condición (R)) que el sistema $\{F_\alpha\}$ no puede ser centrado, es decir, existen $F_1, \ldots, F_n$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$. Pero en este caso los conjuntos correspondientes $G_i = T \setminus F_i$ constituyen un subcubrimiento finito del cubrimiento $\{G_\alpha\}$. Por consiguiente, de la condición (R) se deduce la compacidad.

Veamos algunas propiedades principales de los espacios compactos.

TEOREMA 2. *Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*

DEMOSTRACION. Sea F un subconjunto cerrado de un espacio compacto T y sea $\{F_\alpha\}$ un sistema centrado cualquiera de subconjuntos cerrados del subespacio $F \subset T$. En tal caso, todo F_α es cerrado también en T, es decir, $\{F_\alpha\}$ es un sistema centrado de conjuntos cerrados de T. Por consiguiente, $\bigcap F_\alpha \neq \varnothing$. De aquí, de acuerdo con el teorema 1, se desprende la compacidad de F.

Puesto que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también de Hausdorff, obtenemos de aquí el siguiente corolario.

COROLARIO. *Todo subconjunto cerrado de un compacto es un compacto.*

TEOREMA 3. *Un compacto resulta cerrado en cualquier espacio de Hausdorff que lo contiene.*

DEMOSTRACION. Sea K un conjunto compacto en un espacio de Hausdorff T y sea $y \in K$. Entonces, para todo punto $x \in K$ existe una vecindad U_x del punto x y una vecindad V_x del punto y tales que

$$U_x \cap V_x = \varnothing .$$

Las vecindades U_x forman un cubrimiento abierto del conjunto K. Debido a la compacidad de K, se puede extraer de él un subcubrimiento finito $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$. Pongamos

$$V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \ldots \cap V_{x_n}.$$

Entonces, V es una vecindad del punto y que tiene intersección vacía con $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} \supset K$. Por consiguiente, $y \overline{\in} [K]$, es decir, K es cerrado. El teorema queda demostrado.

Los teoremas 2 y 3 indican que en los espacios de Hausdorff la compacidad es una propiedad *interna* del espacio, es decir, que todo compacto continúa siendo un compacto, aunque sea sumergido en espacios de Hausdorff cada vez más amplios.

TEOREMA 4. *Todo compacto representa un espacio normal.*

DEMOSTRACION. Sean X e Y dos subconjuntos cerrados disjuntos de un compacto K. Es fácil ver, repitiendo los razonamientos realizados en la demostración del teorema anterior, que para todo punto $y \in Y$ existe una vecindad suya U_y y un conjunto abierto $O_y \supset X$ tales que $U_y \cap O_y = \varnothing$. Extraigamos del cubrimiento $\{U_y\}$ del conjunto Y un subcubrimiento finito $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$. Entonces, los conjuntos abiertos

$$O^{(1)} = O_{y_1} \cap \ldots \cap O_{y_n}$$

y

$$O^{(2)} = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \ldots \cup U_{y_n}$$

verificarán las condiciones necesarias:

$$O^{(1)} \supset X, \quad O^{(2)} \supset Y$$

y

$$O^{(1)} \cap O^{(2)} = \varnothing .$$

2°. Aplicaciones continuas de espacios compactos. Las aplicaciones continuas de espacios compactos, en particular, de compactos, tienen varias propiedades interesantes e importantes.

TEOREMA 5. *La imagen continua de un espacio compacto es un espacio compacto.*

DEMOSTRACION. Sea X un espacio compacto y f una aplicación continua de él sobre el espacio topológico Y. Consideremos algún cubrimiento $\{V_\alpha\}$ del espacio Y mediante conjuntos abiertos y tomemos $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Los conjuntos U_α son abiertos (como imágenes recíprocas de conjuntos abiertos en caso de una aplicación continua) y forman un cubrimiento del espacio X. De este cubrimiento se puede extraer, debido a la compacidad de X, un subcubrimiento finito $U_1, U_2, \ldots, U_n$. En este caso, los conjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_n$, donde $V_i = f(U_i)$, cubrirán a todo el espacio Y.

TEOREMA 6. *Toda aplicación biunívoca y continua de un compacto X sobre otro compacto Y es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que de las condiciones del teorema se deduce la continuidad de la aplicación inversa φ^{-1}. Sea F un conjunto cerrado de X y sea $P = \varphi(F)$ su imagen en Y. De acuerdo con el teorema anterior, P es un compacto y, por consiguiente, P es cerrado en Y. De manera que la imagen recíproca por la aplicación φ^{-1} de todo conjunto cerrado $F \subset X$ es cerrada. Esto significa precisamente que la aplicación φ^{-1} es continua.

3°. Compacidad numerable.

TEOREMA 7. *Si T es un espacio compacto, todo subconjunto suyo infinito tiene al menos un punto de acumulación.*

DEMOSTRACION. Si T contiene un conjunto infinito X sin puntos de acumulación, se puede escoger en él un conjunto numerable

$$X_1 = (x_1, x_2, \ldots)$$

que tampoco tiene puntos de acumulación. Pero los conjuntos

$$X_n = (x_n, x_{n+1} \ldots)$$

forman entonces un sistema centrado de conjuntos cerrados de T, que tiene intersección vacía, es decir, T no es un espacio compacto. Introduzcamos la siguiente definición.

DEFINICION. Un espacio T se llama espacio *compacto numerable*, cuando todo subconjunto infinito suyo tiene al menos un punto de acumulación.

El teorema 7 significa, por lo tanto, que todo espacio compacto es compacto numerable. La recíproca, en general, no se cumple. He aquí un ejemplo «tradicional» de un espacio compacto numerable, pero no compacto. Consideremos el conjunto X de todos los números ordinales α menores que el primer número ordinal innumerable Ω. Llamemos intervalo (α, β) de X a la totalidad de números ordinales γ, que verifican las desigualdades $\alpha < \gamma < \beta$. Llamemos conjunto abierto en X a toda unión de un número arbitrario de intervalos. Es fácil comprobar que el espacio construido es compacto numerable, pero no compacto.

El siguiente teorema deja clara la relación existente entre los conceptos de compacidad y compacidad numerable.

TEOREMA 8. *Para que un espacio topológico sea compacto numerable, es necesaria y suficiente cada una de estas dos condiciones:*

1) Todo cubrimiento abierto numerable del espasio T contiene un subcubrimiento finito.

2) Todo sistema centrado numerable de conjuntos cerrados de T tiene una intersección no vacía.

DEMOSTRACION. La equivalencia de las condiciones 1) y 2) se desprende inmediatamente de las relaciones de dualidad. Ahora bien, si T no es compacto numerable, podemos demostrar, repitiendo los razonamientos empleados al demostrar el teorema 7, que en T existe un sistema centrado numerable de conjuntos cerrados, cuya intersección es vacía. Con esto queda establecido que la condición 2) (y, por consiguiente, la condición 1)) es suficiente. Demostremos la necesidad de la condición 2). Sea T un espacio compacto numerable y sea $\{F_n\}$ un sistema numerable centrado de conjuntos cerrados de T. Probemos que $\cap F_n \neq \varnothing$. Sea

$$\Phi_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k.$$

Está claro que todos los Φ_n son no vacíos (debido a que $\{F_n\}$ es un sistema centrado), que forman un sistema no creciente

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots$$

y que

$$\cap \Phi_n = \cap F_n.$$

Pueden darse dos casos:

1) Comenzando de un número n_0,

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \ldots$$

Es evidente, entonces, que $\cap \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \varnothing$.

2) Entre los Φ_n hay un número infinito de conjuntos distintos dos a dos. Basta entonces, evidentemente, considerar el caso en que todos los Φ_n son distintos entre sí. Sea

$$x_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}.$$

La sucesión $\{x_n\}$ representa un conjunto infinito de puntos diferentes de T; debido a la compacidad numerable de T, esta sucesión debe tener al menos un punto de acumulación, digamos, x_0. Puesto que Φ_n contiene todos los puntos $x_n, x_{n+1}, \ldots$, el punto x_0 es un punto de acumulación para Φ_n y, como Φ_n es cerrado, $x_0 \in \Phi_n$. Por consiguiente, $\bigcap\limits_n \Phi_n \ni x_0$, es decir, $\bigcap\limits_n \Phi_n \neq \varnothing$.

De manera que los espacios compactos numerables son aquellos espacios topológicos, en los que de cada cubrimiento abierto *numerable* se puede extraer un subcubrimiento finito, mientras que en un espacio compacto *todo* cubrimiento abierto contiene un subcubrimiento finito.

Aunque en el caso general la compacidad numerable no implica la compacidad, tiene lugar el siguiente resultado importante.

TEOREMA 9. *Para los espacios de base numerable los conceptos de compacidad y compacidad numerable coinciden.*

En efecto, del teorema 6 del § 5 se deduce que de cualquier cubrimiento abierto del espacio T, provisto de una base numerable, se puede extraer un subcubrimiento numerable. Si T es, además, compacto numerable, de este último se puede extraer, de acuerdo con el teorema anterior, un subcubrimiento finito. Con esto queda establecido que T es un espacio compacto.

Observación. De hecho, el concepto de compacidad numerable de un espacio topológico resulta (a diferencia del concepto de compacidad) poco acertado y poco natural. Surgió en las Matemáticas debido a una especie de «inercia». Como quedará demostrado en el punto siguiente, en el caso de espacios métricos estos dos conceptos coinciden (al igual que en el caso de espacios de base numerable). El concepto de compacidad en los espacios métricos significaba inicialmente la existencia de un punto de acumulación en todo subconjunto infinito, o sea, coincidía con la definición de compacidad numerable. La extensión «automática» de esta definición de los espacios métricos a los topológicos condujo precisamente al concepto de espacio topológico compacto numerable. En la literatura, especialmente anticuada, el término «compacidad» se entiende a veces como «compacidad numerable», mientras que un espacio topológico compacto en el sentido de la definición que hemos introducido (es decir, espacio en que todo cubrimiento abierto suyo contiene un subcubrimiento finito) se llama *bicompacto*. Además, un espacio de Hausdorff compacto se llama un *bicompacto*, reservándose el término de «un compacto» para los espacios métricos compactos. Nos atendremos a la terminología (compacidad, compacidad numerable) que hemos introducido más arriba; además, los espacios métricos compactos los llamaremos simplemente compactos y en los casos, cuando resulte deseable subrayar la presencia de la métrica, diremos «compactos métricos».

4°. Conjuntos relativamente compactos. Un conjunto M, perteneciente a un espacio de Hausdorff T, que no sea cerrado en T, no puede ser compacto. Por ejemplo, ningún subconjunto no cerrado de la recta numérica es un compacto. Puede, sin embargo, ocurrir que la adherencia $[M]$ de un tal conjunto M de T tenga ya la propiedad de compacidad. Por ejemplo, esto sucede para *todo subconjunto acotado* de la recta numérica o de un espacio de n dimensiones. Introduzcamos la siguiente definición.

DEFINICION. Un conjunto M, perteneciente a un espacio topológico T, se llama *relativamente compacto* (en T), cuando su adherencia en T es compacta. De la misma forma se dice que M es *relativamente compacto numerable en* T, cuando todo subconjunto infinito $A \subset M$ tiene al menos un punto de acumulación (que puede pertenecer, pero puede y no pertenecer a M).

El concepto de compacidad relativa (a diferencia del concepto de compacidad) está relacionado, evidentemente, con aquel espacio T, en el que se considera el conjunto dado. Por ejemplo, el conjunto de los puntos racionales del intervalo $(0, 1)$ es relativamente compacto, si se considera como un subconjunto de la recta numérica, pero no será relativamente compacto si se considera como un subconjunto del espacio de todos los números racionales.

El concepto de compacidad relativa adquiere su mayor importancia en el caso de los espacios métricos que trataremos en el parágrafo siguiente.

§ 7. COMPACIDAD EN ESPASIONS MÉTRICOS

1°. Acotación total. Puesto que los espacios métricos representan un caso particular de los espacios topológicos, a ellos se extienden los resultados y definiciones, expuestos en el parágrafo anterior. En el caso de los espacios métricos la compacidad está estrechamente ligada al concepto de *acotación total* que ahora introduciremos.

Sea M un conjunto de un espacio métrico R y ε un número positivo. Se dice que el conjunto A de R es una ε-red de M, cuando para todo punto $x \in M$ existe al menos un punto $a \in A$ tal que

$$\rho(x, a) \leqslant \varepsilon.$$

Por ejemplo, los puntos de coordenadas enteras forman una $\frac{1}{\sqrt{2}}$-red del plano. Un conjunto M se llama *totalmente acotado*, cuando cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ existe una ε-red *finita* suya. Está claro, que un conjunto totalmente acotado es necesariamente acotado, como la suma de un número finito de conjuntos acotados; la afirmación recíproca no es, en general, justa, como lo demuestra el ejemplo 2 que citamos más abajo.

Frecuentemente resulta útil la siguiente observación obvia: si el conjunto M es totalmente acotado, su adherencia $[M]$ es también totalmente acotada.

De la definición de acotación total se desprende inmediatamente que todo espacio métrico R totalmente acotado es *separable*. En efecto, construyamos para todo n una $\frac{1}{n}$-red finita de R. La suma, respesto a n, de todas estas redes representa un conjunto numerable siempre denso en R.

Ejemplos. 1. En el espacio euclídeo de n dimensiones la acotación total coincide con la acotación corriente, es decir, con la posibilidad de sumergir el conjunto dado dentro de un cubo suficientemente grande. En efecto, si dividimos este cubo en cubos de dimensión ε, los vértices de estos últimos formarán una $\frac{\sqrt{n}}{2}\varepsilon$-red finita en el cubo inicial y, por consiguiente, en cualquier conjunto, contenido en este cubo.

2. La esfera unitaria S del espacio l_2 ofrece un ejemplo de un conjunto acotado, pero no totalmente. En efecto, consideremos los siguientes puntos de S

$$\begin{gathered}
e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \\
e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \\
\cdots\cdots\cdots \\
e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

La distancia entre dos cualesquiera de estos puntos e_n y e_m $(n \neq m)$ es igual a $\sqrt{2}$. De aquí se desprende que en S no puede existir una ε-red finita para ningún $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Consideremos en l_2 el conjunto Π de puntos

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$$

que verifican las siguientes condiciones

$$|x_1|\leqslant 1,\ |x_2|\leqslant\frac{1}{2},\ \ldots,\ |x_n|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots$$

Este conjunto se llama *paralelepípedo fundamental* (o «ladrillo de Hilbert») del espacio l_2. Representa un ejemplo de un conjunto totalmente acotado de infinitas dimensiones. Para demostrar que es totalmente acotado podemos proceder del siguiente modo.

Sea dado $\varepsilon>0$. Escogemos n de manera que $\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{2}$. A todo punto

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots) \tag{1}$$

de Π pongamos en correspondencia el punto

$$x^*=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ 0,\ 0,\ \ldots) \tag{2}$$

de este mismo conjunto. En este caso

$$\rho(x,\ x^*)=\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{4^k}}<\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

El conjunto Π^* de puntos de Π de tipo (2) es totalmente acotado (por ser un conjunto acotado de un espacio de n dimensiones). Tomemos en Π^* una $\frac{\varepsilon}{2}$-red finita. Está claro que será al mismo tiempo una ε-red de Π.

2°. Compacidad y acotación total.

TEOREMA 1. *Todo espacio métrico R compacto numerable es totalmente acotado.*

DEMOSTRACION. Supongamos que R no es totalmente acotado. Esto significa que para algún $\varepsilon_0>0$ no existe en R una ε_0-red finita. Tomemos en R un punto arbitrario a_1. Existe en R al menos un punto, digamos a_2, tal que $\rho(a_1,\ a_2)>\varepsilon_0$ (de lo contrario, el punto a_1 resultaría ser una ε_0-red de R). De la misma forma, en R existe un punto a_3 tal que

$$\rho(a_1,\ a_3)>\varepsilon_0\quad\text{y}\quad\rho(a_2,\ a_3)>\varepsilon_0,$$

ya que, de lo contrario, el par de puntos a_1, a_2 representaría una ε_0-red. Determinados ya los puntos $a_1,\ \ldots,\ a_k$, escojamos el punto $a_{k+1}\in R$ de manera que

$$\rho(a_i,\ a_{k+1})>\varepsilon_0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Mediante este proceso obtenemos una sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots$ que no tiene ningún punto de acumulación, ya que $\rho(a_i, a_j) > \varepsilon_0$ para $i \neq j$. Pero en tal caso R no es un espacio compacto numerable, que es lo que queríamos demostrar.

COROLARIO 1. *Un espacio métrico R compacto numerable tiene un conjunto numerable siempre denso y una base numerable.*

En efecto, construyamos en R una $\frac{1}{n}$-red finita para todo $n=1, 2, \ldots$ y tomemos la unión de estas redes. Esta será precisamente el conjunto numerable siempre denso en R. La existencia de una base numerable en un espacio métrico, provisto de un conjunto numerable siempre denso, fue demostrada ya anteriormente (teorema 5 del § 5).

Recordando el teorema 9 del § 6, obtenemos el siguiente corolario importante.

COROLARIO 2. *Todo espacio métrico compacto numerable es compacto.*

Hemos demostrado que la acotación total es una condición necesaria de la compacidad de un espacio métrico. Esta condición no es suficiente; por ejemplo, la totalidad de los puntos racionales del segmento $[0, 1]$ con la definición corriente de la distancia entre ellos es un espacio totalmente acotado, pero no compacto: la sucesión de puntos de este espacio

$$0;\ 0{,}4;\ 0{,}41;\ 0{,}414;\ 0{,}4142;\ \ldots,$$

es decir, la sucesión de aproximaciones decimales del número $\sqrt{2}-1$ no tiene en este espacio punto de acumulación. Sin embargo, tiene lugar el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Para que un espacio métrico R sea un compacto, es necesario y suficiente que sea*

1) *totalmente acotado,*
2) *completo.*

DEMOSTRACION. La necesidad de la acotación total ya la hemos demostrado. La necesidad de la complitud es evidente: en efecto, si $\{x_n\}$ es una sucesión fundamental sin límite de R, esta sucesión no tiene en R ningún punto de acumulación. Probemos ahora que siendo R totalmente acotado y completo, es compacto. Para ello es suficiente demostrar que toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de R tiene al menos un punto de acumulación.

Construyamos una bola cerrada de radio 1 en torno a cada uno de los puntos que forman una 1-red en R. Puesto que estas bolas cubren todo el R y el número de ellas es finito, al menos una de estas bolas, llamémosla B_1, contiene una subsucesion (sucesión parcial) infinita $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ de la sucesión $\{x_n\}$. Escojamos ahora en B_1 una 1/2-red y construyamos alrededor de todo punto de esta red una bola cerrada de radio 1/2. Al menos una de estas bolas, llamémosla B_2, contiene una subsucesión infinita $x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$ de la sucesión $\{x_n^{(1)}\}$. Busquemos luego una bola cerrada B_3 de radio 1/4 y centro en B_2 que contiene una subsucesión infinita $x_1^{(3)}, \ldots, x_n^{(3)}, \ldots$ de la sucesión $\{x_n^{(2)}\}$, etc. Consideremos con toda bola B_n una bola cerrada A_n con centro en el mismo punto, pero de un radio dos veces mayor. Es fácil ver que las bolas A_n están encajadas unas en otras. Debido a la complitud del espacio R, la intersección $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ es no vacía y consta de un sólo punto x_0. Este punto es un punto de acumulación de la sucesión inicial $\{x_n\}$, ya que toda vecindad suya contiene una bola B_k y, por consiguiente, una subsucesión infinita $\{x_n^{(k)}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$.

3°. Compacidad relativa de subconjuntos en un espacio métrico. El concepto de compacidad relativa, introducido en el parágrafo anterior para subconjuntos de un espacio topológico arbitrario, es aplicable, en particular, a los subconjuntos de un espacio métrico. Es evidente, además, que el concepto de compacidad relativa coincide en este caso con el concepto de compacidad numerable relativa. Destaquemos el siguiente resultado simple, pero importante.

TEOREMA 3. *Para que un conjunto M de un espacio métrico completo R sea relativamente compacto, es necesario y suficiente que sea totalmente acotado.*

La demostración se obtiene inmediatamente del teorema 2 y del hecho evidente de que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es también completo.

La importancia de este teorema estriba en que, como regla general, resulta más fácil establecer la acotación total de uno u otro conjunto, que demostrar directamente su compacidad relativa. Al mismo tiempo, para las aplicaciones del Análisis tiene importancia precisamente la compacidad.

Observación. Al demostrar la acotación total de uno u otro conjunto M (es decir, al construir en él una ε-red finita para todo $\varepsilon > 0$) de un espacio métrico R, no es necesario que esta ε-red pertenezca a M. Es suficiente que esta ε-red finita pueda ser construida mediante puntos, pertenecientes a R. En efecto, si los puntos

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$$

son tales que para todo punto x

$$\rho(x, a_k) \leqslant \varepsilon$$

para cierto k, obtendremos una 2ε-red en el conjunto M, compuesta por puntos de este conjunto, al sustituir todo punto a_k mediante un punto b_k que verifique las condiciones

$$\rho(a_k, b_k) \leqslant \varepsilon, \quad b_k \in M$$

4°. **Teorema de Arzelá.** La demostración de la compacidad de un conjunto de un espacio métrico, es un problema que encontramos con bastante frecuencia en el Análisis. Al mismo tiempo, la aplicación directa del teorema 2 del punto 2 no siempre resulta simple. Para los conjuntos, situados en un espacio concreto, se puede dar criterios especiales de compacidad, que resultan más cómodos para la aplicación práctica.

En un espacio euclídeo de n dimensiones la compacidad de un conjunto es equivalente, como hemos visto, a su acotación. Sin embargo, esto ya no es cierto para espacios métricos más generales.

En el Análisis, uno de los espacios métricos más importantes es el espacio $C_{[a, b]}$. Para los subconjuntos de este espacio, un criterio importante y frecuentemente empleado de compacidad relativa lo ofrece el así llamado teorema de Arzelá.

Para poder enunciarlo, necesitamos los siguientes conceptos.

Una familia Φ de funciones φ, definidas sobre un segmento, se llama *equiacotada*, cuando existe un número K tal que

$$|\varphi(x)| < K$$

para todo $x \in [a, b]$ y toda $\varphi \in \Phi$.

Una familia $\Phi = \{\varphi\}$ se llama *equicontinua*, cuando para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

para todas las funciones $\varphi \in \Phi$ y para todo par x_1, x_2 de $[a, b]$ tal que $\rho(x_1, x_2) < \delta$.

TEOREMA 4 (ARZELÁ). *Para que una familia Φ de funciones continuas, definidas sobre el segmento $[a, b]$, sea relativamente compacta en $C_{[a, b]}$, es necesario y suficiente que esta familia sea equiacotada y equicontinua.*

DEMOSTRACION. NECESIDAD. Sea la familia Φ relativamente compacta en $C_{[a, b]}$. Entonces, de acuerdo con el teorema 3 del punto anterior, para cada ε positivo existe en Φ una $\frac{\varepsilon}{3}$-red finita $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Cada una de las funciones φ_i, siendo continua sobre un segmento, es acotada:

$$|\varphi_i(x)| \leqslant K_i.$$

Pongamos $K = \max K_i + \frac{\varepsilon}{3}$. Por definición de $\frac{\varepsilon}{3}$-red, para todo $\varphi \in \Phi$ tenemos, al menos para un φ_i,

$$\rho(\varphi_1, \varphi_i) = \max_x |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por consiguiente,

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K.$$

Es decir, Φ es una familia equiacotada.

Luego, puesto que cada una de las funciones φ_i que forman la $\frac{\varepsilon}{3}$-red es continua y, por consiguiente, uniformemente continua sobre $[a, b]$, para un $\frac{\varepsilon}{3}$ dado existe un δ_i tal que

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

siempre que $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

Sea $\delta = \min \delta_i$. Entonces, para $|x_1 - x_2| < \delta$ y para cualquier función $\varphi \in \Phi$, tomando φ_i de manera que $\rho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \\ &\quad \leqslant |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \\ &\qquad < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos demostrado con ello la equicontinuidad de la familia Φ.

SUFICIENCIA. Sea Φ una familia equiacotada y equicontinua de funciones. De acuerdo con el teorema 3, para demostrar su compacidad relativa en $C_{[a, b]}$, es suficiente probar que existe en $C_{[a, b]}$ una ε-red finita de ella cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. Sea

$$|\varphi(x)| \leqslant K \text{ para todos } \varphi \in \Phi$$

y sea $\delta > 0$ escogido de manera que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5} \text{ para } |x_1 - x_2| < \delta$$

y para todos $\varphi \in \Phi$. Dividamos el segmento $[a, b]$ del eje x mediante los puntos $x_0 = a_1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ en intervalos de longitud menor que δ y construyamos rectas verticales a través de estos puntos. Dividamos el segmento $[-K, K]$ del eje y mediante los puntos $y_0 = -K < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = K$ en intervalos de longitud $< \frac{\varepsilon}{5}$ y construyamos rectas horizontales a través de estos puntos. De esta forma el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $-K \leqslant y \leqslant K$ resultará dividido en células con lado horizontal de longitud $< \delta$ y con lado vertical de longitud $< \frac{\varepsilon}{5}$. Asignemos ahora a cada función $\varphi \in \Phi$ la quebrada $\psi(x)$ con vértices en los puntos (x_k, y_l), es decir, en los nodos de la red construida, y que diverge de la función $\varphi(x)$ en los puntos x_k en menos que $\frac{\varepsilon}{5}$ (la existencia de una quebrada de este tipo es evidente).

Puesto que, por la construcción,

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5},$$

$$|\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

y

$$|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5},$$

tenemos

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Puesto que la función $\psi(x)$ es lineal entre los puntos x_k y x_{k+1}, tenemos

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\varepsilon}{5} \text{ para todos } x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Sea ahora x un punto arbitrario del segmento $[a, b]$ y sea x_k el punto de la división escogida más próximo a x por la izquierda. Entonces

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + \\ + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Por consiguiente, las quebradas $\psi(x)$ representan una ε-red respecto a Φ. El número de ellas es finito; luego, Φ es totalmente acotada. Hemos demostrado completamente el teorema.

5°. **Teorema de Peano.** El teorema de Arzelá tiene múltiples aplicaciones. A título de aplicación suyo veamos el siguiente teorema de existencia para ecuaciones diferenciales ordinarias con el miembro derecho continuo.

TEOREMA 5 (Peano). *Sea*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \qquad (3)$$

una ecuación diferencial dada. Si la función f es continua en un recinto cerrado G, al menos una curva integral de la ecuación dada pasa por cada punto interior $(x_0,\ y_0)$ de este recinto.

DEMOSTRACION. Puesto que la función f es continua en un recinto cerrado, es acotada:

$$|f(x,\ y)|<M=\text{const.}$$

Tracemos por el punto $(x_0,\ y_0)$ las rectas con pendiente M y $-M$. Tracemos, además, las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ de manera que los dos triángulos con vértice común en $(x_0,\ y_0)$ que ellas producen pertenezcan íntegramente al interior de la región G.

Construyamos ahora para la ecuación dada las así llamadas quebradas de Euler del siguiente modo: tracemos por el punto $(x_0,\ y_0)$ la recta de pendiente $f(x_0,\ y_0)$. Tomemos en esta recta un punto $(x_1,\ y_1)$ y tracemos, a través de él, una recta de pendiente $f(x_1,\ y_1)$. En esta recta tomemos un punto $(x_2,\ y_2)$ y tracemos, a través de él, una recta de pendiente $f(x_2,\ y_2)$, etc. Consideremos ahora la sucesión de quebradas de Euler $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_n,\ \ldots$, que pasan por el punto $(x_0,\ y_0)$ y tales que la longitud del mayor de los eslabones de la línea L_k tiende a cero para $k\longrightarrow\infty$. Sea φ_k la función, cuya gráfica es la línea L_k. Las funciones $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots$ poseen las siguientes propiedades:

1) están definidas en un mismo segmento $[a,\ b]$,
2) son equiacotadas,
3) son equicontinuas.

En virtud del teorema de Arzelá, se puede extraer de la sucesión $\{\varphi_k\}$ una subsucesión uniformemente convergente. Sea $\varphi^{(1)},\ \varphi^{(2)},\ \ldots,\ \varphi^{(k)},\ \ldots$ esta sucesión.

Pongamos $\varphi(x)=\lim\varphi^{(k)}(x)$ para $k\longrightarrow\infty$. Está claro que $\varphi(x_0)=y_0$. Resta probar que φ verifica sobre el segmento $[a,\ b]$ la ecuación diferencial dada. Para ello es necesario demostrar que cualquiera que sea $\varepsilon>0$

$$\left|\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}-f(x',\ \varphi(x'))\right|<\varepsilon,$$

siempre que la magnitud $|x''-x'|$ sea suficientemente pequeña. A su vez, para demostrar esto es preciso establecer para k suficientemente grande

$$\left|\frac{\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')}{x''-x'}-f(x',\ \varphi^{(k)}(x'))\right|<\varepsilon,$$

siempre que la diferencia $|x''-x'|$ sea suficientemente pequeña.

Puesto que f es continua en la región G, para cualquier $\varepsilon>0$ se puede encontrar un $\eta>0$ tal que

$$f(x',\ y')-\varepsilon<f(x,\ y)<f(x',\ y')+\varepsilon$$
$$(y'=\varphi(x')),$$

siempre que

$$|x-x'|<2\eta \quad \text{e} \quad |y-y'|<4M\eta.$$

El conjunto de puntos $(x,\ y)\in G$, que verifican estas dos desigualdades, constituye un rectángulo Q. Sea ahora K tan grande que para todo $k>K$

$$|\varphi(x)-\varphi^{(k)}(x)|<4\eta$$

y todos los eslabones de la quebrada L_k tienen longitud menor que η. Entonces, si $|x-x'|<2\eta$, todas las quebradas de Euler $\varphi^{(k)}$, correspondientes a $k>K$, se encuentran íntegramente en el interior de Q.

Además, sean (a_0, b_0), (a_1, b_1), ..., (a_{n+1}, b_{n+1}) los vértices de la quebrada $\varphi^{(k)}$, donde

$$a_0 \leqslant x' < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < x'' \leqslant a_{n+1}$$

(suponemos, para concretar, que $x''>x'$; el caso $x''<x'$ se considera análogamente). Entonces,

$$\begin{gathered}\varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x')=f(a_0, b_0)(a_1-x'),\\ \varphi^{(k)}(a_{i+1})-\varphi^{(k)}(a_i)=f(a_i, b_i)(a_{i+1}-a_i); \quad i=1, 2, \ldots, n-1,\\ \varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(a_n)=f(a_n, b_n)(x''-a_n).\end{gathered}$$

De aquí, para $|x''-x'|<\eta$, obtenemos

$$[f(x', y')-\varepsilon](a_1-x') < \varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x') < [f(x', y')+\varepsilon](a_1-x'),$$
$$f(x', y')-\varepsilon](a_{i+1}-a_i) < \varphi^{(k)}(a_{i+1})-\varphi^{(k)}(a_i) <$$
$$< [f(x', y')+\varepsilon](a_{i+1}-a_i); \quad i=1, \ldots, n-1,$$
$$[f(x', y')-\varepsilon](x''-a_n) < \varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(a_n) < [f(x', y')+\varepsilon](x''-a_n).$$

Sumando estas desigualdades, encontramos

$$[f(x', y')-\varepsilon](x''-x') < \varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x') < [f(x', y')+\varepsilon](x''-x'),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Diferentes subsucesiones de la sucesión de quebradas de Euler pueden converger a diferentes soluciones de la ecuación (3). Por eso, la solución φ que hemos obtenido no es, en general, la única solución de la ecuación $y'=f(x, y)$ que pasa por el punto (x_0, y_0).

6. Teorema generalizado de Arzelá. Sean X e Y dos compactos métricos y sea C_{XY} el conjunto de todas las aplicaciones continuas f del compacto X en Y. Definamos la distancia en C_{XY} mediante la fórmula

$$\rho(f, g)=\sup_{x\in X}\rho(f(x), g(x)).$$

Es fácil comprobar que C_{XY} se convierte de esta forma en un espacio métrico.

TEOREMA 6 (teorema generalizado de Arzelá). *Para que un conjunto $D\subset C_{XY}$ sea relativamente compacto, es necesario y suficiente que las funciones f que integran D sean equicontinuas, es decir, que para cualquier $\varepsilon>0$ exista un $\delta>0$ tal que de*

$$\rho(x', x'')<\delta \tag{4}$$

se deduzca

$$\rho(f(x'), f(x''))<\varepsilon \tag{5}$$

cualesquiera que sean f de D y x' y x'' de X.

DEMOSTRACION. La necesidad se demuestra igual que en el teorema 4.

Demostremos la suficiencia. Para ello sumerjamos C_{XY} en el espacio M_{XY} de todas las aplicaciones del compacto X en el compacto Y con la misma métrica

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

que ha sido introducida en C_{XY}, y demostremos la compacidad relativa del conjunto D en M_{XY}. Puesto que C_{XY} es cerrado en M_{XY}[1], la compacidad relativa del conjunto D en M_{XY} implica su compacidad relativa en C_{XY}.

Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y escojamos δ de manera que de (4) se siga (5) para todo f de D y todo x', x'' de X. Es fácil ver que X se puede representar como la unión de conjuntos disjuntos E_i tales que de $x', x'' \in E_i$ se deduce que $\rho(x', x'') < \delta$. En efecto, para ello es suficiente escoger los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de manera que formen una $\frac{\delta}{2}$-red en X y tomar, por ejemplo,

$$E_i = S(x_i, \delta) - \bigcup_{j<i} S(x_j, \delta).$$

Consideremos ahora en el compacto Y una ε-red finita $y_1, y_2, \ldots, y_m$; denotemos mediante L la colección de funciones $g(x)$ que toman los valores y_j sobre los conjuntos E_i. El número de estas funciones es, evidentemente, finito. Probemos que forman una 2ε-red respecto a D en M_{XY}. En efecto, sea $f \in D$. Para todo punto x_i de $x_1, \ldots, x_n$ existe un punto y_j de $y_1, \ldots, y_m$ tal que

$$\rho(f(x_i), y_j) < \varepsilon.$$

Sea la función $g \in L$ escogida de manera que $g(x_i) = y_i$. Entonces,

$$\rho(f(x), g(x)) \leqslant \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), g(x_i)) + \\ + \rho(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon,$$

si i se ha escogido de manera que $x \in E_i$.

De aquí se desprende que $\rho(f, g) < 2\varepsilon$ y, por consiguiente, la compacidad de D en M_{XY} y, por lo tanto, en C_{XY} queda demostrada.

---

[1] Esto se debe a que el límite de una sucesión uniformemente convergente de aplicaciones continuas es también una aplicación continua. La proposición enunciada representa una generalización directa del teorema conocido del Análisis y se demuestra igual que este teorema.

§ 8. Funciones reales sobre espacios métricos y topológicos

1°. Funciones y funcionales continuas y uniformemente continuas. Una función real sobre un espacio topológico (en particular, métrico) T es una aplicación del espacio T en el espacio R^1 (la recta numérica). Así, por ejemplo, una función real sobre el espacio R^n de n dimensiones es la función ordinaria de n variables.

Cuando el propio espacio T se compone de funciones, las funciones definidas sobre él se llaman *funcionales*. Veamos algunos ejemplos de funcionales de funciones x, definidas sobre el segmento $[0, 1]$:

$$F_1(x) = \sup x(t);$$
$$F_2(x) = \inf x(t);$$
$$F_3(x) = x(t_0), \text{ donde } t_0 \in [0, 1];$$
$$F_4(x) = \varphi[x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_n)], \text{ donde } t_i \in [0, 1]$$

y la función $\varphi(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ está definida para todo s_i real;

$$F_5(x) = \int_0^1 \varphi[t, x(t)]\,dt, \text{ donde } \varphi(t, s) \text{ está definida y}$$

es continua para todo $0 \leqslant t \leqslant 1$ y todo s real;

$$F_6(x) = x'(t_0), \text{ donde } t_0 \in [0, 1];$$
$$F_7(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + x'^2(t)}\,dt;$$
$$F_8(x) = \int_0^1 |x'(t)|\,dt.$$

Las funcionales F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 están definidas sobre el espacio C de todas las funciones continuas sobre el segmento $[0, 1]$; F_6 está definida sólo para las funciones diferenciables en el punto t_0; F_7 para aquellas funciones para las cuales la expresión $\sqrt{1 + x'^2(t)}$ es integrable y F_8 para funciones para las cuales $|x'(t)|$ es integrable.

La funcional $F_1(x)$ es continua sobre C, ya que

$$\rho(x, y) = \sup|x - y| \text{ y } |\sup x - \sup y| \leqslant \sup|x - y|.$$

Las funcionales F_2, F_3 y F_5 son también continuas sobre C; la funcional F_4 es continua sobre C, cuando la función φ que lo determina es continua respecto a todos sus argumentos. La funcional F_6 es discontinua en todo punto de C donde está definida. En efecto, sea $x(t)$ una función tal que $x'(t_0) = 1$ y $|x(t)| < \varepsilon$ y sea $y = x_0 + x$. Entonces, $y'(t_0) = x_0'(t_0) + 1$, mientras que

$\rho(y, x_0) < \varepsilon$. Esta funcional F_8 resultará continua, si se considera sobre el espacio $C^{(1)}$, compuesto de funciones que tienen derivada continua y provisto de la métrica

$$\rho(x, y) = \sup_t [\,|x(t) - y(t)| + |x'(t) - y'(t)|\,].$$

La funcional F_7 es también discontinua sobre el espacio C. En efecto, sea $x_0(t) \equiv 0$ y $x_n(t) = \frac{1}{n}$ sen $2\pi nt$. Entonces, $\rho(x_n, x_0) = = \frac{1}{n} \to 0$; sin embargo, $F_7(x_n) > 4$ para todo n, mientras que $F_7(x_0) = 1$. Por consiguiente, $F_7(x_n)$ no tiende a $F_7(x_0)$, cuando $x_n \to x_0$. El mismo ejemplo sirve para demostrar que la funcional F_8 es también discontinua sobre el espacio C. Ambas funcionales F_7 y F_8 son continuas en el espacio $C^{(1)}$.

Para las funciones, definidas sobre un espacio métrico, subsiste el concepto habitual de continuidad uniforme: la función $f(x)$ es uniformemente continua sobre un espacio métrico R, cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \text{ siempre que } \rho(x_1, x_2) < \delta.$$

Por ejemplo, la funcional F_1 es uniformemente continua sobre el espacio C (¡compruébese esto!).

Para las funciones reales sobre compactos métricos tiene lugar el siguiente teorema, que generaliza el teorema bien conocido del curso elemental de Análisis acerca de las funciones continuas sobre un segmento.

TEOREMA 1. *Una función real continua sobre un compacto métrico es uniformemente continua.*

DEMOSTRACION. Supongamos que $f(x)$ es continua, pero no uniformemente continua, sobre un compacto métrico K. Entonces, para cierto ε positivo y cualquier n natural existirán x_n y x'_n de K tales que

$$\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}, \text{ mientras que } |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon.$$

De la sucesión $\{x_n\}$ se puede extraer, debido a la compacidad de K, una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a un punto $x \in K$. En este caso $\{x'_{n_k}\}$ también converge a x; pero para cada k debe cumplirse al menos una de las desigualdades

$$|f(x) - f(x'_{n_k})| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x) - f(x_{n_k})| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

y esto contradice a la continuidad de la función f en el punto x.

2°. Funciones continuas y semicontinuas sobre espacios compactos. Más arriba hemos visto que el teorema sobre la continuidad uniforme de una función continua sobre un segmento subsiste para las funciones definidas sobre cualesquiera compactos métricos. En cuanto a las demás propiedades de funciones continuas sobre un segmento, conocidas del Análisis, algunas de ellas se extienden, como veremos ahora, a espacios compactos cualesquiera (no necesariamente métricos).

TEOREMA 2. *Sea T un espacio compacto y f una función continua sobre él. Entonces, f es acotada sobre T y alcanza sobre T sus extremos superior e inferior.*

DEMOSTRACION. Una función continua es una aplicación continua de T en la recta numérica R^1. La imagen de T en R^1 es, de acuerdo con el teorema general 3 del § 6, compacta. Pero un subconjunto compacto de la recta numérica es cerrado y acotado y, por consiguiente, no sólo tiene extremos superior e inferior finitos, sino que contiene incluso estos extremos. El teorema queda demostrado.

EJERCICIO. Sea K un compacto métrico y A una aplicación de K en si mismo tal que $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ para $x \neq y$. Demuéstrese que la aplicación A tiene en K un punto fijo único.

Las afirmaciones del último teorema admiten una generalización al caso de funciones de una clase más amplia, a saber, al caso de las así llamadas funciones semicontinuas.

Una función $f(x)$ se llama *semicontinua inferiormente (superiormente)* en el punto x_0, cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad del punto x_0 tal que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ $(f(x) < f(x_0) + \varepsilon)$.

Por ejemplo, la función «parte entera de x», $f(x) = E(x)$ es semicontinua superiormente. Si aumentamos (disminuimos) el valor $f(x_0)$ de una función continua en un punto x_0, obtendremos una función semicontinua superiormente (inferiormente). Si $f(x)$ es semicontinua superiormente, la función $-f(x)$ es semicontinua inferiormente. Estas dos observaciones permiten obtener inmediatamente un gran número de ejemplos de funciones semicontinuas.

Para el estudio de las propiedades de semicontinuidad de funciones reales conviene permitirles que tomen valores infinitos. Si $f(x_0) = -\infty$, consideraremos que la función f es semicontinua inferiormente en x_0; en cambio, si para todo $h > 0$ existe una vecindad del punto x_0 tal que $f(x) < -h$, admitiremos que la función f es semicontinua también superiormente en el punto x_0.

Si $f(x_0) = +\infty$, consideraremos que la función f es semicontinua superiormente en x_0; en cambio, si para todo $h > 0$ existe una vecindad del punto x_0 tal que $f(x) > h$, admitiremos que la función f es semicontinua también inferiormente en el punto x_0.

Sea $f(x)$ una función real sobre un espacio métrico R. Se llama *límite superior* $\overline{f}(x_0)$ de la función $f(x)$ en el punto x_0 a la magnitud (finita o infinita) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left[\sup\limits_{x \in S(x_0, \varepsilon)} f(x)\right]$. Se llama *límite inferior* $\underline{f}(x_0)$ a la magnitud (finita o infinita) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left[\inf\limits_{x \in S(x_0, \varepsilon)} f(x)\right]$. La diferencia $\omega f(x_0) = \overline{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)$ (si es que tiene sentido, es decir, si al menos uno de los números $\overline{f}(x_0)$, $\underline{f}(x_0)$ es finito) se llama *oscilación* de la función $f(x)$ en el punto x_0. Es fácil ver que para la continuidad de $f(x)$ en el punto x_0 es necesario y suficiente que $\omega f(x_0) = 0$, es decir, que $-\infty < \underline{f}(x_0) = \overline{f}(x_0) < +\infty$.

Para cualquier función $f(x)$, la función $\overline{f}(x)$ es semicontinua superiormente y la función $\underline{f}(x)$, semicontinua inferiormente. Esto se obtiene fácilmente de la definición de los límites superior e inferior.

Veamos un ejemplo importante de una funcional semicontinua.

Definamos la longitud de la curva $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ mediante la funcional

$$L_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

donde el extremo superior (que puede ser igual a $+\infty$) se toma respecto a todas las divisiones posibles del segmento $[a, b]$. Esta funcional está definida sobre todo el espacio M de las funciones reales acotadas. Para las funciones continuas coincide con el valor del límite

$$\lim_{\max |x_i - x_{i-1}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Finalmente, en caso de funciones con derivada continua puede ser representada en la forma

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

La funcional $L_a^b(f)$ es semicontinua inferiormente en M, como se deduce fácilmente de su definición.

El teorema, establecido anteriormente, se generaliza al caso de funciones semicontinuas.

TEOREMA 2a. *Una función finita semicontinua inferiormente (superiormente) sobre un espacio compacto T está acotada inferiormente (superiormente).*

En efecto, supongamos que $\inf f(x) = -\infty$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $f(x_n) < -n$. Puesto que el espacio T es compacto, el subconjunto infinito $\{x_n\}$ suyo tiene al menos un punto de acumulación x_0. Por hipótesis la función f es finita y semicontinua inferiormente; por eso, existirá una vecindad U del punto x_0 tal que $f(x) > f(x_0) - 1$ para $x \in U$. Pero en este caso la vecindad U puede contener solamente un número finito de puntos del conjunto $\{x_n\}$ y esto contradice a que x_0 es un punto de acumulación de este conjunto.

De manera análoga se demuestra el teorema en el caso de una función semicontinua superiormente.

TEOREMA 2b. *Una función finita semicontinua inferiormente (superiormente) sobre un espacio compacto T alcanza su extremo inferior (superior).*

Supongamos que la función $f(x)$ es semicontinua inferiormente. Entonces, de acuerdo con el teorema 2a, tiene un extremo inferior finito y, además, existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $f(x_n) \leqslant \leqslant \inf f(x) + \frac{1}{n}$.

Debido a la compacidad de T, el conjunto $\{x_n\}$ tiene un punto de acumulación x_0. Si fuese $f(x_0) > \inf f$, existirían, en virtud de la semicontinuidad inferior de la función f, una vecindad U del punto x_0 y un $\delta > 0$ tales que $f(x) > \inf f + \delta$ para $x \in U$. Pero en este caso la vecindad U no podría contener ningún subconjunto infinito del conjunto $\{x_n\}$. Por consiguiente, $f(x_0) = \inf f$, que es lo que se quería demostrar.

§ 9. CURVAS CONTINUAS EN ESPACIOS MÉTRICOS

Sea dada una aplicación continua

$$P = f(t)$$

del segmento

$$a \leqslant t \leqslant b$$

en un espacio métrico R. Cuando t «recorre» el segmento desde a hasta b, el punto correspondiente P «recorre» una «curva continua» en el espacido R. Nos proponemos dar unas definiciones rigurosas, relacionadas con la idea tosca que acabamos de exponer. Consideraremos que el orden en el que se recorren los puntos de la curva es una propiedad esencial de la propia curva. Un mismo conjunto, indicado en la fig. 13, recorrido en las direcciones señaladas en las figs. 14 y 15, será considerado como diferentes curvas. A título de un ejemplo más consideremos la función real, definida sobre el segmento $[0, 1]$, que viene representada en la fig. 16. Representa una «curva», situada

[1]) Este parágrafo no está relacionado con la exposición sucesiva. El lector puede, si lo desea, omitirlo.

en el segmento [0, 1] del eje y y distinta de este segmento recorrido una vez desde el punto 0 hasta el punto 1, ya que el segmento $[A, B]$ se pasa tres veces (dos hacia arriba y una hacia abajo).

Sin embargo, si los puntos del espacio se recorren en el mismo orden, consideraremos que la selección del «parámetro» t no es esencial. Por ejemplo, las funciones representadas en las figs. 16 y 17, determinan una misma «curva», situada sobre el eje y, aun cuando los valores del parámetro t, correspondientes a algún punto de la curva, resulten distintos en los casos de la fig. 16 y la fig. 17. Por ejemplo, en el caso de la fig. 16, al punto A le corresponden sobre el eje t dos puntos aislados, mientras que en el caso de la fig. 17, corresponden sobre el eje t un punto aislado y un segmento, situado a su derecha (cuando t recorre este segmento, el punto de la curva se mantiene fijo) [1].

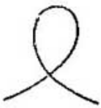

FIG. 13

FIG. 14

FIG. 15

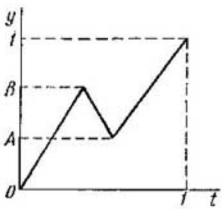

FIG. 16

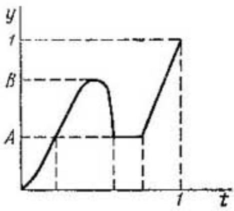

FIG. 17

Pasemos a las definiciones formales. Dos funciones continuas

$$P=f'(t') \quad \text{y} \quad P=f''(t'')$$

definidas, respectivamente, sobre los segmentos

$$a' \leqslant t' \leqslant b' \quad \text{y} \quad a'' \leqslant t'' \leqslant b''$$

y con valores en un espacio métrico R, se llaman *equivalentes*, cuando existen dos funciones continuas no decrecientes

$$t'=\varphi'(t) \quad \text{y} \quad t''=\varphi''(t),$$

definidas sobre un segmento

$$a \leqslant t \leqslant b,$$

[1]) En vista del estudio ulterior de la compacidad de sistemas de curvas conviene consentir estos segmentos de constancia del punto $P=f(t)$.

que poseen las propiedades

$$\varphi'(a)=a', \quad \varphi'(b)=b',$$
$$\varphi''(a)=a'', \quad \varphi''(b)=b'',$$
$$f'[\varphi'(t)]=f''[\varphi''(t)]$$

para todo $t \in [a, b]$.

Es fácil ver que la relación de equivalencia así introducida es reflexiva (f es equivalente a f), simétrica (si f' es equivalente a f'', también f'' es equivalente a f') y transitiva (de la equivalencia de f' y f'' y de la equivalencia de f'' y f''' se deduce la equivalencia de f' y f'''). Por eso, todas las funciones continuas del tipo considerado se dividen en clases de funciones equivalentes entre sí. Cada una de estas clases define una *curva continua* en el espacio R.

Es fácil ver que para toda función $P=f'(t')$, definida sobre un segmento $[a', b']$, existe una función equivalente a ella, definida sobre el segmento $[a'', b'']=[0, 1]$. En efecto, es suficiente tomar [1]

$$t'=\varphi'(t)=(b'-a')\,t+a', \quad t''=\varphi''(t)=t.$$

Por consiguiente, podemos suponer que toda curva viene dada en forma paramétrica mediante una función definida sobre el segmento $[0, 1]$.

Por eso resulta oportuno introducir el espacio $C(I, R)$ de aplicaciones continuas f del segmento $I=[0, 1]$ en el espacio R con la métrica

$$\rho(f, g)=\sup_t \rho(f(t), g(t)).$$

Admitiremos que la sucesión de curvas $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ converge a la curva L, cuando las curvas L_n pueden ser representadas paramétricamente en la forma

$$P=f_n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

y la curva L, en la forma

$$P=f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

de manera que $\rho(f, f_n) \longrightarrow 0$ para $n \longrightarrow \infty$.

Aplicando el teorema generalizado de Arzelá (teorema 6 del § 7), es fácil demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 1. *Si la sucesión de curvas $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, situadas en un compacto K, se puede representar paramétricamente mediante funciones equicontinuas sobre el segmento $[0, 1]$, se puede extraer de ella una subsucesión convergente.*

Definamos ahora la longitud de una curva, que en forma paramétrica viene dada por la función

$$P=f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

como el extremo superior de las sumas de tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(f(t_{i-1}), f(t_i)),$$

---

[1]) Admitimos siempre que $a < b$. Sin embargo, no excluimos las «curvas» que constan de un solo punto y que se obtienen cuando la función $f(t)$ es constante sobre $[a, b]$. Este acuerdo también resulta oportuno para lo sucesivo.

donde los puntos t_i están sujetos solamente a las condiciones

$$a=t_0\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_i\leqslant\ldots\leqslant t_n=b.$$

Es fácil ver que la longitud de una curva no depende de su representación paramétrica. Si nos limitamos a las representaciones paramétricas por medio de funciones, definidas sobre el segmento [0, 1], es fácil demostrar que la longitud de una curva es una funcional semicontinua inferiormente de f (en el espacio $C(I, R)$). En el lenguaje geométrico este resultado puede ser enunciado en forma del siguiente teorema sobre semicontinuidad.

TEOREMA 2. *Si la sucesión de curvas L_n converge a la curva L, la longitud de la curva L no es mayor que el límite inferior de las longitudes de las curvas L_n.*

Consideremos ahora especialmente las *curvas de longitud finita*. Supongamos que la curva está definida por la función paramétrica

$$P=f(t),\qquad a\leqslant t\leqslant b.$$

La función f, considerada solamente en el segmento $[a, T]$, donde $a\leqslant T\leqslant b$, define el «segmento inicial» de la curva desde el punto

$$P_a=f(a)$$

hasta el punto

$$P_T=f(T).$$

Sea

$$s=\varphi(t)$$

su longitud. Es fácil probar que

$$P=g(s)=f[\varphi^{-1}(s)]$$

es una nueva representación paramétrica de la misma curva. Aquí s recorre el segmento

$$0\leqslant s\leqslant S,$$

donde S es la longitud de toda la curva considerada. Esta representación verifica la exigencia

$$\rho(g(s_1),\ g(s_2))\leqslant|s_2-s_1|$$

(la longitud del arco es no menos que la longitud de la cuerda).

Pasando al segmento [0, 1], obtenemos la representación paramétrica

$$P=F(\tau)=g(s),\ \tau=\frac{s}{S},$$

que verifica la condición de Lipschitz

$$\rho(F(\tau_1),\ F(\tau_2))\leqslant S|\tau_1-\tau_2|.$$

Vemos, por consiguiente, que para todas las curvas de longitud

$$S\leqslant M,$$

donde M es una constante, es posible una representación paramétrica mediante funciones equicontinuas, definidas sobre el segmento [0, 1]. Por lo tanto, a ellas es aplicable el teorema 1.

Mostremos el alcance de los resultados generales obtenidos aplicándolos a la demostración de la siguiente proposición importante.

TEOREMA 3. *Si dos puntos A y B de un compacto K pueden unirse por medio de una curva continua de longitud finita, entre estas curvas existe la de longitud mínima.*

En efecto, sea Y el extremo inferior de las longitudes de las curvas, que unen los puntos A y B del compacto K. Supongamos que las longitudes de las curvas $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, que unen los puntos A y B, tienden a Y. De acuerdo con el teorema 1, de la sucesión L_n se puede extraer una subsucesión convergente. De acuerdo con el teorema 2, la curva límite de esta subsucesión no puede tener longitud mayor que Y.

Observemos, que incluso en el caso, en que K es una superficie cerrada suave (diferenciable suficiente número de veces) del espacio euclídeo de tres dimensiones, este teorema no se desprende directamente de los resultados que se establecen en el curso de Geometría Diferencial, donde se considera, generalmente, sólo el caso de puntos A y B suficientemente próximos.

Todo lo expuesto adquiriría mayor claridad, si hubiesemos provisto de una estructura de espacio métrico el conjunto de todas las curvas del espacio métrico dado R. Esto se puede hacer definiendo la distancia entre las curvas L_1 y L_2 mediante la fórmula

$$\rho(L_1, L_2) = \inf \rho(f_1, f_2),$$

donde el extremo inferior se toma respecto a todos los pares de representaciones paramétricas de la curva L_1 por medio de la función

$$P = f_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

y de la curva L_2 por medio de la función

$$P = f_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

La demostración de que esta distancia verifica los axiomas corrientes es sencilla, a excepción de un momento: ofrece ciertas dificultades demostrar que de

$$\rho(L_1, L_2) = 0$$

se deduce la identidad de las curvas L_1 y L_2. Este resultado es consecuencia directa del hecho de que el extremo inferior en la fórmula, mediante la cual hemos definido la distancia $\rho(L_1, L_2)$ se alcanza, si se escogen adecuadamente las representaciones paramétricas f_1 y f_2. Pero la demostración de esta última proposición tampoco es sencilla.

CAPITULO
III

ESPACIOS LINEALES NORMADOS Y TOPOLOGICOS

§ 1. ESPACIOS LINEALES

El concepto de espacio lineal es uno de los más importantes en las Matemáticas. Desempeñará un papel primordial no sólo en este capítulo, sino también en toda la exposición sucesiva.

1°. Definición y ejemplos de espacios lineales.

DEFINICION 1. Un conjunto no vacío L de elementos $x, y, z, \ldots$ se llama *espacio lineal*, o *vectorial*, cuando satisface las siguientes condiciones:

I. Para cualesquiera dos elementos $x, y \in L$ está definido unívocamente un tercer elemento $z \in L$, llamado suma de ellos y denotado $x+y$, tal que

1) $x+y=y+x$ (conmutatividad),

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (asociatividad),

3) en L existe un elemento 0 tal que $x+0=x$ para todo $x \in L$ (existencia del cero),

4) para todo $x \in L$ existe un elemento $-x$ tal que $x+(-x)=0$ (existencia del elemento opuesto).

II. Para cualquier número α y cualquier elemento $x \in L$ está definido el elemento $\alpha x \in L$ (producto del elemento x por el número α) de manera que

1) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,

2) $1 \cdot x = x$.

III. Las operaciones de adición y multiplicación están relacionadas entre sí mediante las leyes distributivas:

1) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

2) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

En dependencia del conjunto de los números que se admite (todos los complejos o solamente los reales), se distinguen los espacios lineales complejos y reales[1]. A menos que no se diga lo contrario, nuestros razonamientos serán válidos tanto para los espacios complejos, como para los reales.

Observemos que todo espacio lineal complejo puede ser considerado como real, si nos limitamos a la multiplicación de los vectores por números reales.

Veamos algunos ejemplos de espacios lineales, dejando a cargo del lector la comprobación, en cada uno de ellos, de los axiomas enunciados anteriormente.

1. La recta numérica, es decir, el conjunto de los números reales con las operaciones habituales de adición y multiplicación, representa un espacio lineal.

2. El espacio vectorial de n dimensiones, es decir, el conjunto de todos los sistemas posibles de n números (reales o complejos) $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, en el que la adición y la multiplicación se definen mediante las fórmulas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

es también un espacio lineal. Se denomina espacio aritmético de n dimensiones[2] y se denota mediante R^n en el caso real y C^n en el caso complejo.

3. Las funciones continuas (reales o complejas) sobre un segmento $[a, b]$ con las operaciones habituales de adición de funciones y multiplicación de funciones por números constituyen el espacio lineal $C_{[a, b]}$, uno de los más importantes para el Análisis.

4. El espacio l_2, cuyos elementos son las sucesiones de números (reales o complejos)

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

que verifican la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \tag{1}$$

con las operaciones

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)+(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)=$$
$$=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots),$$

es un espacio lineal. El hecho de que la suma de dos sucesiones, que satisfacen la condición (1), también verifica esta condi-

[1] Podrían considerarse también espacios lineales sobre un cuerpo cualquiera.

[2] Este término se explicará más en adelante.

ción, se desprende de la desigualdad elemental

$$(a_1+a_2)^2 \leqslant 2a_1^2+2a_2^2.$$

5. Las sucesiones convergentes $x=(x_1, x_2, \ldots)$, con la adición y multiplicación por números realizadas respecto a las coordenadas, forman un espacio lineal. Denotémoslo c.

6. Las sucesiones convergentes a 0, con las mismas operaciones de adición y multiplicación, forman también un espacio lineal. Denotémoslo c_0.

7. El conjunto m de todas las sucesiones numéricas acotadas, con las operaciones de adición y multiplicación por números definidas igual que en los ejemplos 4, 5 y 6, también representa un espacio lineal.

8. Finalmente, el conjunto R^∞ de todas las sucesiones numéricas, con las mismas operaciones de adición y multiplicación por números que en los ejemplos 4, 5, 6 y 7, es también un espacio lineal.

Puesto que las propiedades de un espacio lineal son las propiedades de adición y multiplicación por números de sus elementos, resulta natural introducir la siguiente definición.

DEFINICION 2. Dos espacios lineales L y L^* se llaman *isomorfos*, cuando se puede establecer entre sus elementos una correspondencia biunívoca compatible con las operaciones en L y L^*. Esto significa que de

$$x \leftrightarrow x^*$$

e

$$y \leftrightarrow y^*$$

$(x,\ y \in L,\ x^*,\ y^* \in L^*)$, se sigue

$$x+y \leftrightarrow x^*+y^*$$

y

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

(α es un número arbitrario).

Conviene a veces considerar los espacios isomorfos como diferentes r e a l i z a c i o n e s de un mismo espacio. A título de ejemplo de espacios lineales isomorfos pueden servir el espacio aritmético de n dimensiones (real o complejo) y el espacio de todos los polinomios de potencia $\leqslant n-1$ (con coeficientes reales o complejos, respectivamente) (¡demuéstrese el isomorfismo de estos espacios!)

2°. Dependencia lineal. Los elementos $x, y, \ldots, w$ de un espacio lineal L se llaman *linealmente dependientes*, cuando existen unos números $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, no todos iguales a 0, tales que

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = 0. \tag{2}$$

En el caso contrario, estos elementos se llaman linealmente independientes. En otras palabras, los elementos $x, y, \ldots, w$ son linealmente independientes, cuando de la igualdad (2) se sigue que

$$\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0.$$

Un sistema infinito de elementos $x, y, \ldots$ del espacio L se llama linealmente independiente, cuando todo subsistema finito suyo es linealmente independiente.

Si en un espacio L se pueden encontrar n elementos linealmente independientes y cualesquiera $n+1$ elementos de este espacio son linealmente dependientes, se dice que el espacio L tiene *dimensión* n. En cambio, si en L se puede indicar un sistema, compuesto por un número finito cualquiera de elementos linealmente independientes, se dice que el espacio L *es de dimensión infinita*. Se llama *base* de un espacio L de n dimensiones a todo sistema de n elementos linealmente independientes. Es fácil comprobar que los espacios R^n en el caso real y C^n en el caso complejo son de dimensión n, justificando de esta forma su denominación.

En el curso del Algebra Lineal se consideran espacios lineales de dimensión finita. Nosotros, al contrario, nos dedicaremos, como regla general, a los espacios de dimensión infinita que, desde el punto de vista del Análisis, representan el mayor interés. Proponemos al lector comprobar que cada uno de los espacios, señalados en los ejemplos 3, 4, 5, 6, 7 y 8, es de dimensión infinita.

3°. **Subespacios.** Un subconjunto no vacío L' de un espacio lineal L se llama *subespacio*, cuando representa un espacio lineal respecto de las operaciones de adición y multiplicación por números definidas en L.

En otras palabras, $L' \subset L$ es un subespacio, cuando de $x \in L'$, $y \in L'$ se deduce que $\alpha x + \beta y \in L'$ cualesquiera que sean α y β.

En todo espacio lineal L existe el subespacio formado solamente del elemento cero, el subespacio nulo. Por otro lado, todo el L puede ser considerado como un subespacio suyo. Un subespacio, diferente de L, que contiene al menos un elemento no nulo, se llama *propio*.

Veamos ejemplos de subespacios propios.

1. Sea L un espacio lineal y x un elemento suyo no nulo. El conjunto de elementos $\{\lambda x\}$, donde λ toma todos los valores

numéricos (reales o complejos), forma, evidentemente, un subespacio unidimensional. Este subespacio es propio, si la dimensión de L es mayor que 1.

2. Consideremos el espacio de funciones continuas $C_{[a, b]}$ (ejemplo 3) y en él el conjunto de t o d o s los polinomios $P_{[a, b]}$. Está claro que los polinomios forman en $C_{[a, b]}$ un subespacio (de dimensión infinita al igual que todo el $C_{[a, b]}$). Al mismo tiempo, el propio espacio $C_{[a, b]}$ puede ser considerado como un subespacio de un espacio más amplio de todas las funciones, tanto continuas, como discontinuas, sobre $[a, b]$.

3. Consideremos, finalmente, los espacios l_2, c_0, c, m y $R^{\overline{\infty}}$ (ejemplos 4, 5, 6, 7 y 8 del punto 1). Cada uno de ellos es un subespacio propio del siguiente.

Sea $\{x_\alpha\}$ un conjunto no vacío cualquiera de elementos de un espacio lineal L. Entonces, existe en L un subespacio mínimo (posiblemente coincidente con L) que contiene $\{x_\alpha\}$. En efecto, existe en L al menos un subespacio que contiene $\{x_\alpha\}$: es todo el L. Además, está claro que *la intersección de cualquier conjunto $\{L_\gamma\}$ de subespacios es de nuevo un subespacio*. Efectivamente, si $L^* = \bigcap_\gamma L_\gamma$ y x, $y \in L^*$, también $\alpha x + \beta y \in L^*$ para todos los α y β. Tomemos ahora todos los subespacios, que contienen el sistema de vectores $\{x_\alpha\}$, y consideremos su intersección. Esta será precisamente el menor subespacio, que contiene el sistema dado de vectores $\{x_\alpha\}$. Este subespacio minimal se llamará *subespacio generado por el conjunto* $\{x_\alpha\}$ o *cápsula lineal* del conjunto $\{x_\alpha\}$. Denotaremos este subespacio mediante $L(\{x_\alpha\})$.

EJERCICIO. Un sistema linealmente independiente $\{x_\alpha\}$ de elementos de un espacio lineal L se llama *base de Hamel*, cuando su cápsula lineal coincide con L. Demuéstrense las siguientes proposiciones:

1) en todo espacio lineal existe una base de Hamel;

2) si $\{x_\alpha\}$ es una base de Hamel en L, todo vector $x \in L$ se representa de manera única mediante una combinación lineal finita de algunos vectores del sistema $\{x_\alpha\}$;

3) dos bases cualesquiera de Hamel de un espacio lineal L tienen la misma potencia; la potencia de una base de Hamel de un espacio lineal L suele llamarse *dimensión algebraica* de este espacio;

4) dos espacios lineales son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión algebraica.

4°. Espacios cocientes. Sea L un espacio lineal y L' algún subespacio suyo. Diremos que dos elementos x e y de L pertenecen a una misma *clase de equivalencia* (según L'), cuando la diferencia de ellos $x - y$ pertenece a L'. El conjunto de todas estas clases se llamará *espacio cociente* de L según L' y se denotará con L/L'. En todo espacio cociente se introducen, de una manera natural, las operaciones de adición y multiplicación por números. A saber, sean ξ y η dos clases, representando elementos de L/L'. Tomemos en cada una de estas clases un elemento, digamos, x e y respectivamente, y llamemos suma de las clases ξ y η a aquella clase ζ, que contiene el elemento $x+y$, y producto de la clase ξ por el número α aquella clase que contiene el elemento αx. Es fácil probar que el resultado no cambiará, si los representantes x e y se sustituyen por cualesquiera otros representantes x' e y' de las mismas clases ξ y η. De esta forma quedan, efectivamente, definidas las operaciones lineales para los elementos del espacio cociente L/L'. Una comprobación directa demuestra que estas operaciones verifican todas las condiciones, contenidas en la definición de un espacio lineal. En otras palabras, *todo espacio cociente L/L'* (con las operaciones de adición y multiplicación por números que acabamos de definir en él) *representa un espacio lineal.*

Si L es un espacio de n dimensiones y el subespacio suyo L' tiene dimensión k, el espacio cociente es de dimensión $n-k$ (¡demuéstrese esto!).

Sea L un espacio lineal arbitrario y L' algún subespacio suyo. La dimensión del espacio cociente L/L' se llama *codimensión* del subespacio L' del espacio L.

Si el subespacio $L' \subset L$ tiene codimensión finita n, se pueden escoger en L los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de manera que todo elemento $x \in L$ quedará representado (unívocamente) en la forma

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + y,$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números e $y \in L'$. En efecto, sea n la dimensión del espacio cociente L/L'. Tomemos en este espacio cociente una base

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

y escojamos en cada clase ξ_k arbitrariamente un elemento que designaremos con x_k. Sea ahora x un elemento cualquiera de L y ξ aquella clase en L/L' que contiene a x. Entonces

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n.$$

Esto significa, por definición, que todo elemento de ξ, en particular, el elemento x, difiere sólo en un elemento de L' de la combinación lineal construida con elementos, tomados por uno en cada clase $\xi_1, \ldots, \xi_n$, es decir,

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + y.$$

Dejamos al lector la demostración de que esta representación es única.

5°. **Funcionales lineales.** Una función numérica f, definida sobre un espacio lineal L, se llamará *funcional*[1]. Una funcional f se llama *aditiva*, cuando

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ para todos los } x,\ y\in L;$$

se llama *homogénea*, cuando

$$f(\alpha x)=\alpha f(x) \ (\alpha \text{ es un número}).$$

Una funcional f, definida en un espacio lineal *complejo*, se llama *conjugada homogénea*, cuando $f(\alpha x)=\overline{\alpha} f(x)$, donde $\overline{\alpha}$ es el número complejo conjugado de α.

Una funcional aditiva homogénea se llama *funcional lineal*. Una funcional aditiva conjugada homogénea se llama *conjugada lineal* (o *antilineal*).

Señalemos ejemplos de funcionales lineales.

1. Sea R^n el espacio aritmético de n dimensiones, compuesto por los elementos $x=(x_1, \ldots, x_n)$ y sea $a=(a_1, \ldots, a_n)$ un elemento determinado de R^n. Entonces,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

es una funcional lineal en R^n. La expresión

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\overline{x_i}$$

representa una funcional conjugada lineal en C^n.

2. Las integrales

$$I[x]=\int_a^b x(t)\,dt \ \text{ e } \ \overline{I}[x]=\int_a^b \overline{x(t)}\,dt$$

representan, respectivamente, funcionales lineal y conjugada lineal en el espacio $C_{[a,\,b]}$.

3. Consideremos un ejemplo más general. Sea y_0 una función determinada continua sobre $[a, b]$. Tomemos para toda función $x\in C_{[a,\,b]}$

$$F(x)=\int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt.$$

[1] Aquí la palabra «funcional» se entiende en un sentido algo distinto que en el § 8 del capítulo II, donde hemos llamado funcional a una función numérica definida sobre un espacio métrico, cuyos elementos son funciones. En adelante, tendremos que tratar con espacios lineales, que al mismo tiempo son métricos y cuyos elementos son funciones. Por eso, no resultará esencial cierta discordancia en los términos de este capítulo y el anterior.

La linealidad de esta funcional se deduce de las propiedades principales de la operación de integración. La funcional

$$\bar{F}_1(x)=\int_a^b \overline{x(t)}\, y_0(t)\, dt$$

será conjugada lineal.

4. Consideremos en este mismo espacio $C_{[a, b]}$ una funcional lineal de otro tipo, tomando

$$\delta_{t_0}(x)=x(t_0),$$

es decir, haciendo igual el valor de la funcional δ_{t_0} para la función x al valor de esta función en un punto fijo t_0.

Frecuentemente, resulta necesario considerar esta funcional, por ejemplo, en la Mecánica Cuántica, donde suele escribirse en la forma

$$\delta_{t_0}(x)=\int_a^b x(t)\,\delta(t-t_0)\, dt,$$

entendiéndose por δ la «función» que es igual a cero en todo punto, excepto el punto $t=0$, y cuya integral es igual a la unidad (δ-función de Dirac). Como veremos en el capítulo siguiente, la δ-función se puede representar como límite, en cierto sentido, de una sucesión de funciones «auténticas» φ_n cada una de las cuales se anula fuera de una ε_n-vecindad ($\varepsilon_n \to 0$ para $n \to \infty$) del punto $t=0$ y verifica la condición $\int_a^b \varphi_n(t)\, dt=1$.

5. Veamos un ejemplo de una funcional lineal en el espacio l_2. Sea k un número entero positivo determinado. Para todo

$$x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

de l_2 tomemos

$$f_k(x)=x_k.$$

Esta funcional es evidentemente lineal. Funcionales de este tipo pueden considerarse también en otros espacios de sucesiones, por ejemplo, en c_0, c, m y R^∞ (ejemplos 5, 6, 7 y 8 del primer punto).

6°. Interpretación geométrica de una funcional lineal. Sea f una funcional lineal, distinta del cero idéntico, en un espacio lineal L. El conjunto L_f de elementos x de L que satisfacen la condición

$$f(x)=0$$

representa un subespacio del espacio L, que se llama *subespacio* *de ceros* de la funcional f. En efecto, si $x,\ y \in L_f$, tenemos

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0.$$

El subespacio L_f tiene codimensión 1. En efecto, tomemos un elemento x_0 que no pertenece a L_f, es decir, un elemento tal que $f(x_0) \neq 0$. Tal elemento existe, ya que $f(x) \not\equiv 0$. Podemos admitir, sin perder generalidad, que $f(x_0) = 1$, ya que en el caso contrario podríamos dividir x_0 por $f(x_0)$ $\left(f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right) = 1\right)$. Para un elemento x cualquiera tenemos $x = f(x) \cdot x_0 + y$, de manera que $f(y) = f(x - f(x)\, x_0) = 0$, es decir, $y \in L_f$.

Siendo x_0 un elemento fijo, el elemento x se representa de una manera única en la forma

$$x = \alpha x_0 + y, \text{ donde } y \in L_f.$$

En efecto, sea

$$x = \alpha x_0 + y, \qquad y \in L_f,$$
$$x = \alpha' x_0 + y', \quad y' \in L_f.$$

Entonces,

$$(\alpha - \alpha')\, x_0 = y' - y.$$

Si $\alpha = \alpha'$, será evidentemente $y' = y$. En cambio, si $\alpha \neq \alpha'$, tendremos $x_0 = \frac{y' - y}{\alpha - \alpha'} \in L_f$ y esto contradice a la selección de x_0.

De aquí se deduce que dos elementos x_1 y x_2 pertenecen a una misma clase de equivalencia según el subespacio L_f si, y sólo si, $f(x_1) = f(x_2)$. En efecto, de

$$x_1 = f(x_1) \cdot x_0 + y_1,$$
$$x_2 = f(x_2) \cdot x_0 + y_2$$

se sigue que

$$x_1 - x_2 = (f(x_1) - f(x_2) \cdot x_0 + (y_1 - y_2).$$

De aquí se ve que $x_1 - x_2 \in L_f$ si, y sólo si, el coeficiente de x_0, es decir, $f(x_1) - f(x_2)$, es igual a 0.

Toda clase ξ según el subespacio L_f se determina por cualquiera de sus representantes. A título de este representante podemos tomar el elemento de tipo $\alpha \cdot x_0$. De aquí se ve que el subespacio L/L_f es efectivamente unidimensional y que L_f tiene codimensión 1.

El subespacio L_f determina, salvo un factor constante, la funcional lineal que se anula en él.

En efecto, sean f y g dos funcionales que tienen el mismo espacio de ceros $L_f = L_g$. Tomemos, a partir de f, un elemento

x_0 de manera que $f(x_0)=1$. Afirmamos que $g(x_0)\neq 0$. En efecto,

$$x=f(x)\,x_0+y, \quad y\in L_f=L_g,$$

y

$$g(x)=f(x)\,g(x_0)+g(y)=f(x)\,g(x_0).$$

Si fuese el valor $g(x_0)$ igual a 0, la funcional g resultaría igual idénticamente a cero. De la igualdad $g(x)=g(x_0)\,f(x)$ se deduce precisamente que las funciones g y f son proporcionales.

Sea L' un subespacio de codimensión 1 en el espacio lineal L; entonces, toda clase de equivalencia del espacio L según el subespacio L' se llama *hiperplano* paralelo al subespacio L' (en particular, el propio subespacio L' es un hiperplano que contiene el 0, es decir, que «pasa por el origen de coordenadas»). En otras palabras, el hiperplano M' paralelo al subespacio L' es el conjunto que se obtiene a partir de L' mediante una traslación paralela a un vector $x_0\in L$:

$$M'=L'+x_0=\{y:y=x+x_0,\ x\in L'\}.$$

Está claro que, si $x_0\in L'$, tenemos $M'=L'$; en cambio, si $x_0\in L'$, tendremos $M'\neq L'$. Si f es una funcional lineal no trivial sobre el espacio L, el conjunto $M_f=\{x:f(x)=1\}$ es un hiperplano paralelo al subespacio L_f de ceros de la funcional f (en efecto, fijando un elemento x_0, para el cual $f(x_0)=1$, podemos representar todo vector $x\in M_f$ en la forma $x=x_0+y$, donde $y\in L_f$). Por otro lado, si M' es un hiperplano paralelo al subespacio L' (de codimensión 1) que no pasa por el origen de coordenadas, existe una funcional lineal f única tal que $M'=\{x:f(x)=1\}$. En efecto, sea $M'=L'+x_0$, $x_0\in L$; en este caso, todo elemento $x\in L$ se puede representar de manera única en la forma $x=\alpha x_0+y$, donde $y\in L'$. Tomando $f(x)=\alpha$, obtenemos la funcional lineal deseada; la unicidad se deduce de que, siendo $g(x)\equiv 1$ para $x\in M'$, tenemos $g(y)\equiv 0$ para $y\in L'$, de manera que

$$g(\alpha x_0+y)=\alpha=f(\alpha x_0+y).$$

Por consiguiente, hemos establecido una correspondencia biunívoca entre todas las funciones lineales no triviales, definidas sobre L, y todos los hiperplanos de L que no pasan por el origen de coordenadas.

EJERCICIO. Sean $f, f_1, \ldots, f_n$ funcionales lineales sobre un espacio lineal L tales que de $f_1(x)=\ldots=f_n(x)=0$ se deduce que $f(x)=0$. Entonces, existen unas constantes $a_1, \ldots, a_n$ tales que $f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$, para todo $x\in L$.

§ 2. CONJUNTOS CONVEXOS Y FUNCIONALES CONVEXAS. TEOREMA DE HAHN — BANACH

1°. Conjuntos convexos y cuerpos convexos. Varios capítulos importantes de la teoría de espacios lineales tienen como base el concepto de *convexidad* que, apoyándose en ideas geométricas evidentes, admite, al mismo tiempo, un enunciado puramente analítico.

Sea L un espacio lineal real y x, y dos puntos suyos. Se llama *segmento (cerrado)* en L, que une los puntos x e y, al conjunto de todos los elementos de tipo

$$\alpha x+\beta y, \text{ donde } \alpha, \ \beta \geqslant 0, \ \alpha+\beta=1.$$

El segmento sin los puntos extremos x e y se llama *segmento abierto*.

Un conjunto $M\subset L$ se llama *convexo*, cuando junto con dos cualesquiera puntos suyos x e y contiene también al segmento que los une.

Llamaremos *núcleo* de un conjunto arbitrario $E\subset L$ al conjunto de puntos suyos x tales que para todo $y\in L$ existe un número $\varepsilon=\varepsilon(y)>0$ tal que $x+ty\in L$ para $|t|<\varepsilon$.

Un conjunto convexo, cuyo núcleo no es vacío se llama *cuerpo convexo*.

Ejemplos. 1. En el espacio euclídeo de tres dimensiones, el cubo, la bola, el tetraedro y el semiespacio representan cuerpos convexos. Un segmento, un plano o un triángulo del mismo espacio son conjuntos convexos, pero no cuerpos convexos.

2. Consideremos en el espacio de funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ el conjunto de funciones que verifican la condición

$$|f(t)|\leqslant 1.$$

Este conjunto es convexo; en efecto, si

$$|f(t)|\leqslant 1 \text{ y } |g(t)|\leqslant 1,$$

entonces, para $\alpha+\beta=1$, α, $\beta\geqslant 0$

$$|\alpha f(t)+\beta g(t)|\leqslant \alpha+\beta=1.$$

3. La bola unitaria de l_2, es decir, el conjunto de puntos $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que $\sum x_n^2\leqslant 1$, es un cuerpo convexo. Su núcleo se compone de los elementos x que verifican la condición $\sum x_n^2<1$.

4. El paralelepípedo fundamental Π en l_2 es un conjunto convexo, pero no un cuerpo convexo. En efecto, sea $x\in\Pi$; esto significa que $|x_n|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ para todo $n=1, 2, \ldots$ Tomemos

$y_0=\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$. Sea $x+ty_0 \in \Pi$, es decir, $\left|x_n+\frac{t}{n}\right| \leqslant \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$; entonces, $\left|\frac{t}{n}\right| \leqslant \left|x_n+\frac{t}{n}\right|+|x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}$, de donde se sigue que $t=0$ y, por consiguiente, el núcleo del conjunto Π es vacío.

EJERCICIO. Sea Φ el conjunto de puntos $x=(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ de l_2 que verifican la condición $\sum n^2x_n^2 \leqslant 1$. [Demuéstrese que Φ es un conjunto convexo, pero no un cuerpo convexo.

Si M es un conjunto convexo, su núcleo $I(M)$ es también convexo. En efecto, sean $x, y \in I(M)$ y $z=\alpha x+\beta y$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$. Entonces, para un elemento dado $a \in L$ existen $\varepsilon_1>0$ y $\varepsilon_2>0$ tales que, siendo $|t_1|<\varepsilon_1$, $|t_2|<\varepsilon_2$, los puntos $x+t_1a$ e $y+t_2a$ pertenecen al conjunto M; por consiguiente, a él pertenece también el punto $\alpha(x+ta)+\beta(y+ta)=z+ta$, si $|t| \leqslant \leqslant \varepsilon=\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, es decir, $z \in I(M)$.

Demostremos la siguiente propiedad sencilla, pero importante, de los conjuntos convexos.

TEOREMA 1. *La intersección de cualquier número de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACION. Sea $M=\bigcap_{\alpha} M_\alpha$, donde todos los M_α son conjuntos convexos. Sean, además, x e y dos puntos arbitrarios de M. En este caso, el segmento que une los puntos x e y pertenece a cada M_α y, por consiguiente, a M. Por lo tanto, M es efectivamente convexo. Observemos que la intersección de cuerpos convexos (que, de acuerdo con lo establecido, será un conjunto convexo) no es necesariamente un cuerpo convexo (dese un ejemplo).

Para todo conjunto A de un espacio lineal L existe el menor conjunto convexo que contiene A: éste será la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen A (existe al menos un conjunto convexo que contiene A, éste es todo L). Este conjunto convexo minimal que contiene A se llama *cápsula convexa* del conjunto A.

Veamos un ejemplo importante de cápsula convexa. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ puntos de un espacio lineal. Diremos que estos puntos están en posición general, cuando no pertenecen a ningún subespacio de $(n-1)$ dimensiones. La cápsula convexa de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ que se encuentran en posición general se denomina *símplice* de n dimensiones y los propios puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ se llaman vértices de este símplice. Un símplice de dimensión cero es un punto. Un símplice unidimensional es un segmento; un bidimensional, un triángulo y un tridimensional, un tetraedro.

Si los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ se encuentran en posición general, cualesquiera $k+1$ de ellos $(k<n)$ se encuentran también en posición general y, por consiguiente, generan un símplice k-dimensional que se denomina *faceta* k-dimensional del símplice n-dimensional dado. Por ejemplo, el tetraedro con vértices e_1, e_2, e_3 y e_4 tiene cuatro facetas bidimensionales, determinadas por las ternas de vértices (e_2, e_3, e_4), (e_1, e_3, e_4), (e_1, e_2, e_4) y (e_1, e_2, e_3) respectivamente, seis facetas unidimensionales y cuatro de dimensión cero.

TEOREMA 2. *Un símplice con vértices $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ es el conjunto de todos los puntos que pueden representarse en la forma*

$$x=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k x_k,\ \alpha_k\geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k=1.$$

DEMOSTRACION. Es fácil probar que la totalidad de puntos de tipo (1) representa un conjunto convexo que contiene los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Por otro lado, todo conjunto convexo que contenga los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ debe contener también los puntos de tipo (1); consecuentemente, estos puntos forman el menor conjunto convexo que contiene los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

2°. Funcionales convexas. Al concepto de conjunto convexo está ligado estrechamente el concepto de funcional convexa.

DEFINICION. Una funcional no negativa p, definida sobre un espacio lineal real L, se llama *convexa*, si

1) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ para todos los $x, y\in L$;
2) $p(\alpha x)=\alpha p(x)$ para todos los $\alpha\geqslant 0$.

No admitimos que el valor $p(x)$ es finito para todo $x\in L$, es decir, se admite el caso en que $p(x)=+\infty$ para algunos $x\in L$.

Señalemos ejemplos de funcionales convexas.

1. La longitud de un vector en el espacio euclídeo R^n de n dimensiones. La primera condición significa en este caso que la longitud de la suma de dos vectores no sobrepasa la suma de sus longitudes (desigualdad triangular), mientras que la segunda se deduce directamente de la definición de la longitud de un vector en R^n.

2. Sea M el espacio de funciones x acotadas sobre un conjunto S y sea s_0 un punto fijo de S. Entonces,

$$p_{s_0}(x)=|x(s_0)|$$

es una funcional convexa.

3. Sea m el espacio de sucesiones numéricas acotadas $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. La funcional

$$p(x)=\sup_n |x_n|$$

es convexa.

3°. Funcional de Minkowski. Consideremos la relación existente entre las funcionales convexas y los conjuntos convexos.

TEOREMA 3. *Si p es una funcional convexa sobre un espacio lineal L y k un número positivo, el conjunto*

$$E=\{x:\ p(x)\leqslant k\}$$

es convexo. Si la funcional p es finita, el conjunto E representa un cuerpo convexo, cuyo núcleo es el conjunto

$$\{x:\ p(x)<k\}$$

(de manera que de antemano contiene el punto 0).

DEMOSTRACION. Si $x,\ y\in E$ y $\alpha+\beta=1$, $\alpha,\ \beta\geqslant 0$, tenemos

$$p(\alpha x+\beta y)\leqslant \alpha p(x)+\beta p(y)\leqslant k,$$

es decir, E es convexo. Supongamos ahora que la funcional p es finita, $p(x)<k$, que $t>0$ e $y\in L$; entonces,

$$p(x\pm ty)\leqslant p(x)+tp(\pm y).$$

Si $p(-y)=p(y)=0$, tenemos $x\pm ty\in E$ para todo t; en cambio, si al menos uno de los números $p(y)$, $p(-y)$ es distinto de cero, tendremos $x\pm ty\in E$ cuando

$$t<\frac{k-p(x)}{\max(p(y),\ p(-y))}.$$

Tomemos para k un valor determinado, digamos, $k=1$. En este caso, toda funcional finita convexa p determina unívocamente en L un cuerpo convexo E tal que $0\in I(E)$. Viceversa, sea E un cuerpo convexo, cuyo núcleo contiene el punto 0. Entonces,

$$p_E(x)=\inf\left\{r:\frac{x}{r}\in E,\ r>0\right\} \tag{2}$$

es una funcional convexa finita. Se llama *funcional de Minkowski* del cuerpo convexo E.

Probemos la convexidad de la funcional de Minkowski (2). Para todo $x\in L$, el elemento $\frac{x}{r}$ pertenece a E, cuando r es suficientemente grande; por eso, la magnitud $p_E(x)$, definida por la igualdad (2), es no negativa y finita. Si $t>0$ e $y=tx$, tenemos

$$p_E(y)=\inf\left\{r>0:\ \frac{y}{r}\in E\right\}=\inf\left\{r>0:\ \frac{tx}{r}\in E\right\}=$$
$$=\inf\left\{tr'>0:\ \frac{x}{r'}\in E\right\}=t\inf\left\{r'>0:\ \frac{x}{r'}\in E\right\}=$$
$$=tp_E(x). \qquad (3)$$

Sean ahora $x_1,\ x_2\in L$ y sea $\varepsilon>0$ arbitrario. Escojamos los números r_i $(i=1,\ 2)$ de manera que $p_E(x_i)<r_i<p_E(x_i)+\varepsilon$; entonces, $\frac{x_i}{r_i}\in E$. Pongamos $r=r_1+r_2$; entonces, $\frac{x_1+x_2}{r}=\frac{r_1x_1}{rr_1}+$ $+\frac{r_2x_2}{rr_2}$ pertenece al segmento con extremos $\frac{x_1}{r_1}$ y $\frac{x_2}{r_2}$. Como E es convexo, este segmento y, por consiguiente, el punto $\frac{x_1+x_2}{r}$ pertenecen a E y por eso

$$p_E(x_1+x_2)\leqslant r=r_1+r_2<p_E(x_1)+p_E(x_2)+2\varepsilon.$$

Puesto que ε es aquí arbitrario, tenemos

$$p_E(x_1+x_2)\leqslant p_E(x_1)+p_E(x_2). \qquad (4)$$

Las relaciones (3) y (4) significan precisamente que la funcional $p_E(x)$ es convexa.

4°. Teorema de Hahn—Banach. Sea L un espacio lineal real y sea L_0 un subespacio suyo. Supongamos, además, que sobre el subespacio L_0 se ha definido una funcional lineal f_0. Una funcional lineal f, definida sobre todo el espacio L, se llama *prolongación* de la funcional f_0, cuando

$$f(x)=f_0(x) \text{ para todo } x\in L_0.$$

El problema sobre la extensión de una funcional lineal, dada inicialmente sobre un subespacio, a un espacio mayor surge con frecuencia en el Análisis. El papel principal en estas cuestiones lo desempeña el siguiente teorema.

TEOREMA 4 (HAHN—BANACH). *Sea p una funcional convexa finita, definida sobre un espacio lineal real L, y sea L_0 un subespacio lineal de L. Si f_0 es una funcional lineal sobre L_0, que verifica sobre L_0 la condición*

$$f_0(x)\leqslant p(x), \qquad (5)$$

la funcional f_0 puede ser prolongada a una funcional f sobre L, que verifica en todo L la condición (5).

DEMOSTRACION. Probemos que, siendo $L_0\neq L$, la funcional f_0 se puede prolongar de L_0 a un subespacio mayor L', conservando la condición (5). En efecto, sea z un elemento arbitrario de L

que no pertenece a L_0 y sea L' el subespacio generado por L_0 y el elemento z. Todo elemento de L' tiene la forma

$$tz+x, \text{ donde } x \in L_0.$$

Si f' es la prolongación deseada de la funcional f_0 sobre L', tenemos

$$f'(tz+x)=tf'(z)+f_0(x),$$

o, tomando $f'(z)=c$,

$$f'(tz+x)=tc+f_0(x).$$

Escojamos ahora c de manera que en todo L' se cumpla la condición de subordinación (5), es decir, que para todo $x \in L_0$ y cualesquiera t reales se verifique la desigualdad

$$f_0(x)+tc \leqslant p(x+tz).$$

Para $t>0$ esta condición es equivalente a

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c \leqslant p\left(\frac{x}{t}+z\right), \text{ o } c \leqslant p\left(\frac{x}{t}+z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right), \tag{6}$$

y para $t<0$ es equivalente a

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right)+c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right) \text{ o } c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t}-z\right)-f_0\left(\frac{x}{t}\right). \tag{7}$$

Demostremos que siempre existe un c que cumple las condiciones (6) y (7). Sean y' e y'' elementos arbitrarios de L_0. Entonces,

$$-f_0(y'')+p(y''+z) \geqslant -f_0(y')-p(-y'-z). \tag{8}$$

En efecto, este resultado se obtiene de la desigualdad

$$f_0(y'')-f_0(y') \leqslant p(y''-y')=p((y''+z)-(y'+z)) \leqslant$$
$$\leqslant p(y''+z)+p(-y'-z).$$

Tomemos

$$c''=\inf_{y''}(-f_0(y'')+p(y''+z)), \quad c'=\sup_{y'}(-f_0(y')-p(-y'-z)).$$

Debido a que y' e y'' son arbitrarios, de (8) se deduce que $c'' \geqslant c'$. Escogiendo c de manera que

$$c'' \geqslant c \geqslant c',$$

veremos que la funcional f', definida sobre L' por

$$f'(tz+x)=tc+f_0(x),$$

verifica la condición de subordinación (5). Por consiguiente, hemos demostrado que, si la funcional f_0 está definida sobre un subespacio $L_0 \subset L$ y verifica en L_0 la condición (5), se puede extender f_0, conservando esta condición, a un subespacio mayor L'. En el caso en que se pueda escoger en L un sistema numerable de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ que genera todo L, la funcional sobre L se construye por inducción, considerando la cadena creciente de subespacios

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, \ L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\}, \ldots$$

(aquí $\{L^{(k)}, x_{k+1}\}$ representa el subespacio lineal minimal de L que contiene $L^{(k)}$ y x_{k+1}). Entonces, todo elemento $x \in L$ entrará en algún $L^{(n)}$ y, por consiguiente, la funcional resultará prolongada a todo L.

En el caso general (es decir, cuando no existe un conjunto numerable generador de L), la demostración concluye aplicándose el lema de Zorn. El conjunto $\mathcal{F}$ de todas las prolongaciones posibles de la funcional f_0, que verifican la condición de subordinación (5), es un conjunto parcialmente ordenado y todo subconjunto suyo $\mathcal{F}_0$ linealmente ordenado tiene extremo superior; este extremo superior es la funcional, definida sobre la unión de los campos de definición de las funcionales $f' \in \mathcal{F}_0$ y coincidente con cada una de estas f' en su campo de definición. De acuerdo con el lema de Zorn, existe en $\mathcal{F}$ un elemento maximal f. Este elemento maximal f representa precisamente la funcional deseada. En efecto, es una prolongación de la funcional inicial f_0, verifica la condición (5) en su campo de definición y está definida sobre todo el espacio L, ya que de lo contrario sería posible prolongarla, empleando el método descrito anteriormente, del subespacio propio, en que esté definida, a un subespacio mayor, y, por consiguiente, f no sería un elemento maximal. El teorema queda demostrado.

Señalemos también la variante compleja del teorema de Hahn—Banach.

Una funcional no negativa p, definida sobre un espacio lineal *complejo* L, se llama *convexa*, cuando para todo $x, y \in L$ y cualesquiera números complejos λ

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),$$
$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x).$$

TEOREMA 4a. *Sea p una funcional convexa finita sobre un espacio lineal complejo L y sea f_0 una funcional lineal, definida sobre un subespacio lineal $L_0 \subset L$, donde verifica la condición*

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad x \in L_0.$$

Entonces, existe una funcional lineal f, definida en todo L, que verifica las condiciones

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in L,$$
$$f(x) = f_0(x), \quad x \in L_0.$$

DEMOSTRACION. Denotemos mediante L_R y L_{0R} los espacios L y L_0, considerados como espacios lineales reales. Está claro que p es una funcional convexa finita sobre L_R y que $f_{0R}(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ es una funcional lineal real sobre L_{0R} que verifica la condición

$$|f_{0R}(x)| \leqslant p(x)$$

y, es más, la condición

$$f_{0R}(x) \leqslant p(x).$$

En virtud del teorema 4, existe una funcional lineal real f_R, definida en todo L_R, que satisface las condiciones

$$f_R(x) \leqslant p(x), \quad x \in L_R \ (=L),$$
$$f_R(x) = f_{0R}(x), \quad x \in L_{0R} \ (=L_0).$$

Es evidente que $-f_R(x) = f_R(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$ y, por lo tanto,

$$|f_R(x)| \leqslant p(x), \ x \in L_R \ (=L). \qquad (9)$$

Definamos en L la funcional f, tomando

$$f(x) = f_R(x) - if_R(ix)$$

(aquí nos valemos de que L es un espacio lineal c o m p l e j o, de manera que en él está definida la multiplicación por números complejos). Una comprobación directa muestra que f es una funcional lineal compleja sobre L y que, además,

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{para } x \in L_0,$$
$$\operatorname{Re} f(x) = f_R(x) \quad \text{para } x \in L.$$

Resta demostrar que $|f(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in L$. Supongamos lo contrario; entonces, para algún $x_0 \in L$ tendremos $|f(x_0)| > p(x_0)$. Representemos el número complejo $f(x_0)$ en la forma $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$, donde $\rho > 0$, y pongamos $y_0 = e^{-i\varphi}x_0$. Entonces, $f_R(y_0) = \operatorname{Re} f(y_0) = \operatorname{Re}[e^{-i\varphi}(x_0)] = \rho > p(x_0) = p(y_0)$ y esto contradice a la condición (9). El teorema queda demostrado.

EJERCICIO. Demuéstrese que en el teorema de Hahn—Banach se puede omitir la condición de que la funcional p sea finita.

5°. Separabilidad de conjuntos convexos en espacios lineales. Sea L un espacio real y M y N dos subconjuntos en él. Se dice que la funcional lineal f definida sobre L *separa* estos conjuntos, cuando existe un número C tal que

$$f(x) \geqslant C \text{ para } x (\in) M \text{ y } f(x) \leqslant C \text{ para } x \in N.$$

Las dos siguientes proposiciones se desprenden directamente de la definición dada.

1) Una funcional lineal f separa los conjuntos M y N si, y sólo si, separa los conjuntos $M-N$ y $\{0\}$ (es decir, el conjunto, compuesto por todos los elementos de tipo $x-y$, donde $x \in M$ e $y \in N$, y el punto 0).

2) Una funcional lineal f separa los conjuntos M y N si, y sólo si, separa los conjuntos $M-x$ y $N-x$ para todo $x \in L$.

Del teorema de Hahn—Banach se obtiene sin dificultad el siguiente teorema sobre la separabilidad de conjuntos convexos en un espacio lineal, que encuentra múltiples aplicaciones.

TEOREMA 5. *Sean M y N dos conjuntos convexos disjuntos en un espacio lineal real L, con la particularidad que al menos uno de ellos, digamos M, tiene un núcleo no vacío (esto es, representa un cuerpo convexo). Entonces, existe sobre L una funcional f lineal no nula que separa M y N.*

DEMOSTRACION. Sin perder generalidad, podemos admitir que el punto 0 pertenece al núcleo del conjunto M. (De lo contrario, consideraríamos los conjuntos $M-x_0$ y $N-x_0$, donde x_0 es algún punto del núcleo de M). Sea y_0 un punto del conjunto N; entonces, el punto $-y_0$ pertenece al núcleo del conjunto $M-N$, mientras que el punto 0 pertenece al núcleo del conjunto $K=M-N+y_0$. Como los conjuntos M y N no se intersecan, tenemos $0 \overline{\in} M-N$ e $y_0 \overline{\in} K$. Sea p la funcional de Minkowski del conjunto K. Entonces, $p(y_0) \geqslant 1$ (puesto que $y_0 \overline{\in} K$). Consideremos la funcional lineal

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha p(y_0).$$

Está definida sobre un subespacio unidimensional, compuesto por elementos de tipo αy_0, y cumple la condición

$$f_0(\alpha y_0) \leqslant p(\alpha y_0),$$

ya que $p(\alpha y_0) = \alpha p(y_0)$ para $\alpha \geqslant 0$ y $f_0(\alpha y_0) = \alpha f_0(y_0) < 0 < p(\alpha y_0)$ para $\alpha < 0$. De acuerdo con el teorema de Hahn—Banach, la funcional f_0 puede extenderse hasta una funcional lineal f, definida en todo L, que verifica en L la condición $f(y) \leqslant p(y)$. De aquí se deduce que $f(y) \leqslant 1$ para $y \in K$ y que, al mismo tiempo, $f(y_0) \geqslant 1$. Es decir, f separa los conjuntos K e $\{y_0\}$ y, por consiguiente, f separa $M-N$ y $\{0\}$; pero, entonces, f separa los conjuntos M y N. El teorema queda demostrado.

§ 3. ESPACIOS NORMADOS

En el capítulo II hemos considerado los espacios topológicos, en particular, métricos, es decir, conjuntos en los que se ha introducido, de una u otra manera, el concepto de proximidad de elementos, mientras que en los parágrafos anteriores de este capítulo hemos tratado espacios lineales. Hasta ahora hemos considerado estos dos entes, los espacios topológicos y los espacios lineales, independientemente uno del otro. No obstante, en el Análisis tropezamos, casi siempre, con espacios provistos tanto de una topología como de operaciones de adición de elementos y multiplicación de éstos por números, es decir, tropezamos con los así llamados espacios topológicos lineales. Entre los espacios topológicos lineales constituyen una clase importante los espacios normados. La teoría de estos espacios fue desarrollada en los trabajos de S. Banach y de otros autores.

1°. Definición y ejemplos de espacios normados.

DEFINICION 1. Sea L un espacio lineal. Una funcional convexa finita p, definida sobre L, se llama *norma*, cuando verifica las siguientes condiciones adicionales (además de la de convexidad):

1) $p(x)=0$ sólo si $x=0$,

2) $p(\alpha x)=|\alpha| p(x)$ para todo α.

Por consiguiente, podemos decir, recordando la definición de convexidad, que se llama *norma* en L a una funcional finita que cumple las tres condiciones siguientes:

1) $p(x) \geqslant 0$, con la particularidad de que $p(x)=0$ sólo si $x=0$,

2) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$, $x, y \in L$,

3) $p(\alpha x)=|\alpha| p(x)$ cualquiera que sea el número α.

DEFINICION 2. Un espacio lineal L en el que se ha introducido una norma se llama *espacio normado*. La norma del elemento $x \in L$ se denotará mediante el símbolo $\|x\|$.

Todo espacio normado se convierte en un espacio métrico, si para dos cualesquiera elementos $x, y \in L$ se toma

$$\rho(x, y)=\|x-y\|.$$

La validez de los axiomas de espacio métrico se desprende directamente de las propiedades 1), 2) y 3) de la norma. En los espacios normados subsisten, por consiguiente, todos los conceptos y resultados expuestos en el capítulo II para los espacios métricos.

Un espacio normado *completo* se llama *espacio de Banach* o, brevemente, *B-espacio*.

Ejemplos de espacios normados. Muchos de los espacios, considerados en el capítulo II como ejemplos de espacios métricos (y en el § 1 de este capítulo, como ejemplos de espacios lineales), pueden proveerse de hecho de una estructura natural de espacio normado.

1. La recta numérica R^1 se convierte en un espacio normado, si se toma $\|x\| = |x|$ para todo número $x \in R^1$.

2. Si en el espacio real R^n de n dimensiones con elementos

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tomamos

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \tag{1}$$

se comprobarán todos los axiomas de la norma. La fórmula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2$$

determina en R^n la misma métrica que hemos considerado ya en este espacio.

En este mismo espacio lineal se puede introducir la norma

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{2}$$

y la norma

$$\|x\|_0 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|. \tag{3}$$

Estas normas determinan en R^n las métricas que hemos considerado ya en los ejemplos 3 y 4 del § 1 del capítulo II. No ofrece dificultad comprobar que en cada uno de estos casos se cumplen efectivamente los axiomas de la norma.

En el espacio complejo C^n de n dimensiones se puede introducir la norma

$$\|x\| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

o cualquiera de las normas (2) ó (3).

3. Definamos la norma en el espacio $C_{[a, b]}$ de funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ mediante la fórmula

$$\|f\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|. \tag{4}$$

La distancia, correspondiente a esta norma, fue considerada ya en el ejemplo 6 del § 1 del capítulo II.

4. Sea m el espacio de sucesiones numéricas acotadas

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ \ldots).$$

Pongamos

$$\|x\|=\sup_n|x_n|. \tag{5}$$

Es obvio que las condiciones 1), 2), y 3) de la definición de la norma se cumplen. La métrica que induce en m esta norma coincide con aquella que hemos considerado anteriormente (cap. II, § 1, ejemplo 9).

2°. **Subespacios de un espacio normado.** Hemos definido un subespacio de un espacio lineal L (desprovisto de topología cualquiera) como un conjunto no vacío L_0 tal que, si $x,\ y\in L_0$, se tiene $\alpha x+\beta y\in L_0$. En un espacio normado, son de interés principal los subespacios lineales *cerrados*, es decir, aquellos subespacios que contienen todos sus puntos de acumulación. En un espacio normado de dimensión finita todo subespacio es automáticamente cerrado (¡demuéstrese esto!). En el caso de un espacio de dimensión infinita esto no es así. Por ejemplo, en el espacio $C_{[a,\,b]}$ de las funciones continuas con la norma (4), los polinomios forman un subespacio, pero no cerrado[1].

Otro ejemplo: en el espacio m de las sucesiones acotadas, las sucesiones, que contienen solamente un número finito de elementos diferentes de cero, constituyen un subespacio. Sin embargo, no es cerrado: su adherencia contiene, por ejemplo, la sucesión $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\right)$.

Puesto que en lo sucesivo consideraremos, como regla general, solamente subespacios cerrados, resulta lógico modificar algo la terminología establecida en el § 1. En este orden, entenderemos por subespacio de un espacio normado un subespacio *cerrado*; en particular, el subespacio generado por un sistema dado de elementos $\{x_\alpha\}$ será el menor subespacio *cerrado* que contiene $\{x_\alpha\}$. Llamaremos este subespacio *adherencia lineal* del sistema $\{x_\alpha\}$. El conjunto (no cerrado) de elementos que contiene junto con x e y cualquier combinación lineal $\alpha x+\beta y$ de ellos, se llamará *variedad lineal*.

Un sistema arbitrario de elementos, pertenecientes a un espacio normado E, se llamará *completo*, cuando el subespacio (¡cerrado!) generado por él es todo el E. Por ejemplo, en virtud del teorema de Weierstrass, el conjunto de todas las funciones $1,\ t,$

---

[1] De acuerdo con el teorema de Weierstrass, según el cual *toda* función continua sobre un segmento es límite de una sucesión uniformemente convergente de polinomios, la adherencia del subespacio de polinomios en $C_{[a,\,b]}$ es todo $C_{[a,\,b]}$.

$t^2, \ldots, t^n, \ldots$ es completo en el espacio de funciones continuas $C_{[a, b]}$.

EJERCICIOS. 1. Sea R un espacio de Banach y sea $S_1 \supset S_2 \supset \ldots S_n \supset \ldots$ una sucesión de bolas cerradas encajadas en él. Demuéstrese que tiene una intersección no vacía (aquí no se supone que los radios de estas bolas tienden a 0; compárese con el ejercicio de la pág. 75). Dése un ejemplo de una sucesión de conjuntos encajados no vacíos, acotados, cerrados y convexos de un B-espacio, con intersección vacía.

2. Sea R un B-espacio de dimensión infinita; entonces, su dimensión algebraica (véase el ejercicio de la pág. 134) es innumerable.

3. Sea R un espacio de Banach y M un subespacio suyo cerrado. Consideremos el espacio cociente $P = R/M$ y definimos en él la norma, tomando para toda clase de equivalencia ξ

$$\| \xi \| = \inf_{x \in \xi} \| x \|.$$

Demuéstrese que la funcional así definida representa efectivamente una norma en P y que, además, el espacio P con esta norma es un espacio de Banach.

4. Sea R un espacio lineal normado; demuéstrese la validez de las siguientes proposiciones:

1) todo subespacio lineal de dimensión finita de R es cerrado;

2) si M es cerrado y N es un subespacio de R de dimensión finita, la suma

$$M + N = \{x : x = y + z, \ y \in M, \ z \in N\}$$

es un subespacio lineal cerrado; dése un ejemplo de dos subespacios lineales cerrados del espacio l_2, cuya suma no es cerrada;

3) sea Q un conjunto abierto convexo de R y sea $x_0 \overline{\in} Q$; entonces, existe un hiperplano cerrado que pasa por el punto x_0 y no se intersecta con Q.

5. Dos normas $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ de un espacio lineal R se llaman *equivalentes*, cuando existen unas constantes $a, b > 0$ tales que $a \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant b \| x \|_1$ para todos $x \in R$. Demuéstrese que, siendo el espacio R de dimensión finita, cualesquiera dos normas en él son equivalentes.

§ 4. ESPACIOS EUCLIDEOS

1°. Definición de espacios euclídeos. Un método bien conocido de introducir una norma en un espacio lineal es el de definir en éste el producto escalar. Recordemos que se llama *producto escalar* en un espacio lineal real R a una función real (x, y), definida para cada par de elementos $x, y \in R$, que verifica las siguientes condiciones:

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$,
4) $(x, x) \geqslant 0$ y $(x, x) = 0$ sólo si $x = 0$.

Un espacio lineal con un producto escalar definido en él se llama *espacio euclídeo*. En un espacio euclídeo R se introduce la norma mediante la fórmula

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{1}$$

De las propiedades 1), 2), 3) y 4) del producto escalar se deduce que se cumplen todos los axiomas de la norma.

En efecto, el cumplimiento de los axiomas 1) y 3) de la norma (punto 1 del § 3) es evidente y la validez del axioma 2) (desigualdad triangular) se deduce de la *desigualdad de Cauchy—Buniakovski*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

que demostraremos ahora.

Consideremos el siguiente trinomio de segundo grado respecto a la variable real λ, no negativo para cualesquiera valores de λ:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) =$$
$$= \|x\|^2 \lambda^2 + 2(x, y)\lambda + \|y\|^2 \geqslant 0.$$

La desigualdad de Cauchy—Buniakovski afirma simplemente que el discriminante de este trinomio de segundo grado es no positivo.

Observemos que en un espacio euclídeo todas las operaciones (adición, multiplicación por número, producto escalar) son continuas, es decir, si $x_n \to x$, $y_n \to y$ (en el sentido de convergencia respecto a la norma) y $\lambda_n \to \lambda$ (como una sucesión numérica), entonces,

$$x_n + y_n \to x + y,$$
$$\lambda_n x_n \to \lambda x,$$
$$(x_n, y_n) \to (x, y).$$

La demostración de este resultado se basa en la desigualdad de Cauchy—Buniakovski y queda, a título de ejercicio, a cargo del lector.

La existencia del producto escalar en R permite definir en este espacio no sólo la norma de un vector (es decir, su longitud), sino también el ángulo entre vectores; a saber, el ángulo φ entre dos vectores x e y se define mediante la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{2}$$

De la desigualdad de Cauchy—Buniakovski

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

se deduce que el valor absoluto de la expresión que figura en el miembro derecho de (2) no sobrepasa 1, es decir, determina, efectivamente, un ángulo φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, cualesquiera que sean x e y.

Si $(x, y) = 0$, tenemos de (2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; en este caso los vectores x e y se llaman *ortogonales*.

Un sistema $\{x_\alpha\}$ de vectores de R diferentes de cero se llama *ortogonal*, cuando

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \text{ para } \alpha \neq \beta.$$

Si los vectores x_α forman un sistema ortogonal, son linealmente independientes. En efecto, sea

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \ldots + a_n x_{\alpha_n} = 0;$$

si $\{x_\alpha\}$ es un sistema ortogonal,

$$(x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + \ldots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) = 0,$$

es decir, puesto que $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$, tenemos $a_i = 0$ para todos los $i = 1, 2, \ldots, n$.

Un sistema ortogonal $\{x_\alpha\}$ *completo* (es decir, tal que el menor subespacio cerrado que lo contiene es todo el R) se llama *base ortogonal*. Si, además, la norma de cada elemento es igual a 1, el sistema $\{x_\alpha\}$ se llama *base ortonormal*. En general, un sistema $\{x_\alpha\}$ (completo o no) tal que

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 \text{ para } \alpha \neq \beta, \\ 1 \text{ para } \alpha = \beta, \end{cases}$$

se llama sistema ortonormal. Está claro que siendo $\{x_\alpha\}$ un sistema ortogonal, el sistema $\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ resulta ortonormal.

2°. **Ejemplos.** Consideremos algunos ejemplos de espacios euclídeos y bases ortogonales en ellos.

1. El espacio de coordenadas R^n de n dimensiones, cuyos elementos son los sistemas de números reales

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con las operaciones habituales de adición y multiplicación en él y con el producto escalar

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3}$$

representa un ejemplo bien conocido de espacio euclídeo. Una base ortonormal en él (una del número infinito de bases ortonormales posibles que tiene) viene dada por los vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

2. El espacio l_2 con los elementos

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \text{ donde } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

y con el producto escalar

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{4}$$

es un espacio euclídeo. En efecto, la convergencia de la serie que figura en el miembro derecho de (4) fue demostrada ya en el cap. II, § 1. Las propiedades 1), 2), 3) y 4) del producto escalar se comprueban directamente. La base ortonormal más sencilla de l_2 es la formada por los vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Son obvias la ortogonalidad y normalidad de este sistema; al mismo tiempo, el sistema (5) es completo: sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ un vector cualquiera de l_2 y sea $x^{(n)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Entonces, $x^{(n)}$ es una combinación lineal de los vectores $e_1, \ldots, e_n$ y $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ para $n \to \infty$.

3. El espacio $C^{(2)}_{[a, b]}$, compuesto por funciones continuas reales sobre $[a, b]$, con el producto escalar

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \tag{6}$$

representa también un espacio euclídeo. Entre diferentes bases ortogonales que se pueden señalar en él, es de importancia principal el sistema trigonométrico, compuesto por las funciones

$$\frac{1}{2}, \cos n \frac{2\pi t}{b-a}, \operatorname{sen} n \frac{2\pi t}{b-a} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

La ortogonalidad de este sistema se comprueba directamente.

Si consideramos las funciones continuas sobre un segmento de longitud 2π, digamos sobre $[-\pi, \pi]$, el sistema trigonométrico correspondiente será $1/2$, $\cos nt$, $\operatorname{sen} nt$ $(n=1, 2, \ldots)$.

El sistema (7) es completo. En efecto, de acuerdo con el teorema de Weierstrass, toda función φ continua sobre el segmento $[a, b]$, que toma valores iguales en los puntos a y b, puede ser representada como límite de una sucesión uniformemente convergente de polinomios trigonométricos, es decir, de combinaciones lineales de elementos del sistema (7). Con más razón esta sucesión convergerá a φ según la norma del espacio $C^{(2)}_{[a, b]}$. Si f es una función arbitraria de $C^{(2)}_{[a, b]}$, se puede representarla como límite (según la norma del espacio $C^{(2)}_{[a, b]}$)

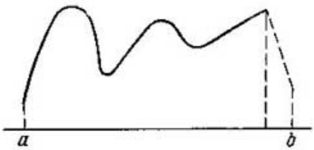

FIG. 18

de una sucesión de funciones φ_n cada una de las cuales coincide con f en el segmento $\left[a, b-\frac{1}{n}\right]$, es lineal en el segmento $\left[b-\frac{1}{n}, b\right]$ y toma en b el mismo valor que tiene en el punto a (fig. 18). Por consiguiente, todo elemento de $C^{(2)}_{[a, b]}$ se puede aproximar tanto como se quiera (en la métrica de este espacio) mediante combinaciones lineales de elementos del sistema (7) y esto demuestra precisamente su complitud.

3°. Existencia de bases ortogonales, ortogonalización. En la parte que queda de este parágrafo, nos limitaremos a espacios euclídeos separables (esto es, a los provistos de un conjunto numerable siempre denso). Cada uno de los espacios, señalados en el punto anterior, es separable (¡demuéstrese esto!). Un ejemplo de un espacio euclídeo, en el que no existe un conjunto numerable siempre denso, se puede construir de la siguiente manera. Consideremos sobre el segmento $[0, 1]$ todas las funciones posibles x, para cada una de las cuales el conjunto de puntos $t_1, t_2, \ldots$, donde ella es diferente de cero, es a lo sumo numerable y la suma $\sum x^2(t)$, tomada respecto a estos puntos, es finita. Definamos en este espacio las operaciones de adición y multiplicación por números como las habituales adición y multiplicación de funciones y el producto escalar de x por y, de la siguiente manera:

$$(x, y) = \sum x(t_i)\, y(t_i),$$

donde la suma se toma según el conjunto de puntos t_i tales que $x(t_i)\, y(t_i) \neq 0$. Proponemos al lector demostrar que en este espacio no existe ningún subconjunto numerable siempre denso.

Sea, pues, R un espacio euclídeo separable. Demostremos que *todo sistema ortogonal de un tal espacio es a lo sumo numerable.*

En efecto, sin perder generalidad podemos admitir que el sistema $\{\varphi_\alpha\}$ no sólo es ortogonal, sino también normal $\left(\text{de lo contrario, podríamos sustituirlo por el sistema } \left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}\right)$. En este caso,

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2} \text{ para } \alpha \neq \beta.$$

Consideremos el conjunto de bolas $B\left(\varphi_\alpha, \frac{1}{2}\right)$. Estas bolas no se intersecan. Si el conjunto numerable $\{\psi_n\}$ es siempre denso en R, en cada una de estas bolas hay al menos un elemento de $\{\psi_n\}$. Entonces, el número de estas bolas (y, por consiguiente, de los elementos φ_α también) es a lo sumo numerable.

Hemos señalado una base ortogonal en cada uno de los ejemplos expuestos de espacios euclídeos. Demostremos ahora el siguiente teorema general, análogo al teorema de existencia de una base ortogonal en el espacio euclídeo de n dimensiones.

TEOREMA 1 (sobre la ortogonalización). *Sea*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{8}$$

un sistema linealmente independiente de elementos de un espacio euclídeo R. Existe en R un sistema de elementos

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{9}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1) *el sistema (9) es ortogonal y normal;*
2) *todo elemento φ_n es una combinación lineal de los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$:*

$$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \ldots + a_{nn} f_n,$$

con $a_{nn} \neq 0$;
3) *todo elemento f_n se representa en la forma $f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n$, donde $b_{nn} \neq 0$.*

Todo elemento del sistema (9) queda determinado por las condiciones 1), 2) y 3) unívocamente, salvo un factor ± 1.

DEMOSTRACION. Representemos el elemento φ_1 en la forma

$$\varphi_1 = a_{11} f_1;$$

entonces, a_{11} se determina por la condición

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1,$$

de donde

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

Está claro que φ_1 se determina unívocamente (salvo el signo). Supongamos que han sido construidos ya los elementos φ_k $(k < n)$ que verifican las condiciones 1), 2) y 3). En este caso, se puede representar f_n en la forma

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{n,\,n-1}\varphi_{n-1} + h_n,$$

donde

$$(h_n, \varphi_k) = 0 \text{ para } k < n.$$

En efecto, los coeficientes correspondientes b_{nk} y, por consiguiente, el elemento h_n quedan determinados unívocamente por las condiciones

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \ldots - b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) =$$
$$= (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0.$$

Es evidente que $(h_n, h_n) > 0$ (la suposición $(h_n, h_n) = 0$ estaría en contradicción con la independencia lineal del sistema (8)). Pongamos

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}.$$

De esta construcción inductiva se desprende que h_n y, por consiguiente, también φ_n se expresan mediante $f_1, \ldots, f_n$, es decir,

$\varphi_n = a_{n1} f_1 + \ldots + a_{nn} f_n$, donde $a_{nn} = \dfrac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$. Además

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, \ (\varphi_n, \varphi_k) = 0 \ (k < n).$$

y

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n \quad (b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0),$$

es decir, φ_n verifica las condiciones del teorema.

El paso del sistema (8) al sistema (9) que satisface las condiciones 1), 2) y 3) se llama *proceso de ortogonalización*.

Está claro, que los subespacios generados por los sistemas (8) y (9) coinciden. De suerte que estos sistemas son completos o no lo son simultáneamente.

COROLARIO. *En todo espacio euclídeo separable R existe una base ortonormal.*

En efecto, sea $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ un conjunto numerable siempre denso en R. Escojamos de él un sistema completo de elementos linealmente independientes $\{f_n\}$. Para ello bastará con omitir de la sucesión $\{\psi_n\}$ todos aquellos elementos ψ_k que pueden representarse como una combinación lineal de ψ_i con $i<k$. Aplicando el proceso de ortogonalización al sistema completo de elementos linealmente independientes obtenido de esta forma, encontraremos la base ortonormal.

EJERCICIOS. 1. Dése un ejemplo de un espacio euclídeo (no separable) en el que no existe ninguna base ortogonal. Demuéstrese que en un espacio euclídeo completo (no necesariamente separable) existe una base ortonormal.

2. Demuéstrese que en un espacio euclídeo completo (no necesariamente separable) toda sucesión de conjuntos encajados no vacíos, convexos, cerrados y acotados, tiene una intersección no vacía (compárese con los ejercicios de las págs. 75 y 152).

4°. Desigualdad de Bessel. Sistemas ortogonales cerrados. Introduciendo en el espacio euclídeo R^n de n dimensiones una base ortonormal $e_1, e_2, \ldots, e_n$, todo vector $x \in R^n$ puede representarse en la forma

$$x=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \tag{10}$$

donde

$$c_k=(x,\ e_k). \tag{11}$$

Veamos de qué forma puede generalizarse el desarrollo (10) al caso de un espacio euclídeo de dimensión infinita. Sea

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots \tag{12}$$

un sistema ortonormal en un espacio euclídeo R y sea f un elemento arbitrario de R. Pongamos en correspondencia a todo elemento $f \in R$ la sucesión de números

$$c_k=(f,\ \varphi_k),\ k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{13}$$

que llamaremos *coordenadas* o *coeficientes de Fourier* del elemento f según el sistema $\{\varphi_k\}$, y la serie (por ahora formal)

$$\sum_k c_k \varphi_k, \tag{14}$$

que llamaremos *serie de Fourier* del elemento f según el sistema ortogonal $\{\varphi_n\}$.

Surgen lógicamente las siguientes preguntas: ¿converge la serie (14), es decir, tiende a algún límite (en el sentido de la métrica del espacio R) la sucesión de sus sumas parciales? y si converge ¿coincide su suma con el elemento inicial f?

Para responder a estas preguntas, consideremos primero el siguiente problema: para un n dado hay que escoger los coeficientes α_k ($k=1, 2, \ldots, n$) de manera que la distancia entre f y la suma

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k \tag{15}$$

sea minimal. Calculemos esta distancia. Como el sistema (12) es ortonormal, tenemos

$$\begin{aligned}\|f-S_n\|^2&=\left(f-\sum_{1}^{n}\alpha_k\varphi_k,\ f-\sum_{1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right)=\\&=(f,f)-2\left(f,\sum\alpha_k\varphi_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j\right)=\\&=\|f\|^2-2\sum\alpha_kc_k+\sum\alpha_k^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-c_k)^2.\end{aligned}$$

Está claro que esta expresión alcanza su mínimo cuando el último sumando es igual a 0, es decir, para

$$\alpha_k=c_k,\quad k=1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

En este caso,

$$\|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}c_k^2. \tag{17}$$

Hemos demostrado que para un n prescrito entre todas las sumas de tipo (15) la de menor desviación de f es la suma parcial de la serie de Fourier del elemento f. Geométricamente este resultado se puede interpretar del siguiente modo. El elemento

$$f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$$

es ortogonal a todas las combinaciones lineales de tipo

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi_k,$$

es decir, es ortogonal al subespacio generado por los elementos $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ cuando, y sólo cuando, se cumple la condición (16) (¡compruébese esto!). Por consiguiente, el resultado obtenido representa una generalización del conocido teorema de la Geometría Elemental: la longitud de la perpendicular bajada de un punto dado a una recta o a un plano es menor que la longitud de cualquier oblicua trazada por el mismo punto.

Puesto que siempre $\|f-S_n\|^2 \geqslant 0$, de la igualdad (17) fluye que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Aquí n es arbitrario y el miembro derecho no depende de n; por consiguiente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ converge y

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{18}$$

Esta desigualdad se llama *desigualdad de Bessel*. Geométricamente significa lo siguiente; la suma de los cuadrados de las proyecciones de un vector f sobre direcciones mutuamente ortogonales no sobrepasa el cuadrado de la longitud del propio vector f.

Introduzcamos el siguiente concepto importante.

DEFINICION. Un sistema ortonormal (12) se llama *cerrado*, cuando para cualquier $f \in R$ se cumple la igualdad

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \tag{19}$$

llamada *igualdad de Parseval*.

De la identidad (17) se deduce que el sistema (12) es cerrado si, y sólo si, para todo $f \in R$ las sumas parciales de la serie de Fourier $\sum c_n \varphi_n$ convergen a f.

El concepto de un sistema ortonormal cerrado está intimamente ligado al concepto de un sistema completo introducido anteriormente.

TEOREMA 2. *En un espacio euclídeo separable R todo sistema ortonormal completo es cerrado y viceversa.*

DEMOSTRACION. Sea el sistema $\{\varphi_n\}$ cerrado; entonces, cualquiera que sea el elemento $f \in R$, la sucesión de las sumas parciales de su serie de Fourier converge a f. Esto significa que las combinaciones lineales de los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$ son siempre densas en R, es decir, que el sistema $\{\varphi_n\}$ es completo. Viceversa, supongamos que el sistema $\{\varphi_n\}$ es completo, esto es, todo elemento $f \in R$ se puede aproximar con precisión arbitraria mediante combinaciones lineales

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

de elementos del sistema $\{\varphi_n\}$; la suma parcial

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$$

de la serie de Fourier de f da una aproximación no menos exacta. Por consiguiente, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$$

converge a f y tiene lugar la igualdad de Parseval.

En el punto anterior hemos demostrado la existencia de sistemas ortonormales completos en un espacio euclídeo separable. Como para los sistemas ortonormales los conceptos de sistema cerrado y completo coinciden, la existencia en R de sistemas ortonormales cerrados no necesita una nueva demostración y los ejemplos de sistemas ortonormales completos, señalados en el punto anterior, son al mismo tiempo, ejemplos de sistemas cerrados.

En la exposición anterior los sistemas ortogonales se suponían normales. Se puede enunciar los conceptos de coeficientes de Fourier, de serie de Fourier, etc., para cualesquiera sistemas ortogonales. Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema ortogonal arbitrario. A partir de él podemos construir un sistema normal, compuesto por los elementos $\psi_n=\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$. Para todo $f\in R$ tenemos

$$c_n=(f,\ \psi_n)=\frac{1}{\|\varphi_n\|}(f,\ \varphi_n)\ \text{ y }\ \sum c_n\psi_n=\sum\frac{c_n}{\|\varphi_n\|}\varphi_n=\sum a_n\varphi_n,$$

donde

$$a_n=\frac{c_n}{\|\varphi_n\|}=\frac{(f,\ \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{20}$$

Los coeficientes a_n, definidos mediante la fórmula (20), se llaman *coeficientes de Fourier* del elemento f según el sistema ortogonal (no normal) $\{\varphi_n\}$. Tomando en la desigualdad (18) en lugar de c_n sus expresiones $c_n=a_n\|\varphi_n\|$, deducidas de (20), obtenemos

$$\sum_n \|\varphi_n\|^2 a_n^2\leqslant\|f\|^2 \tag{21}$$

que representa la desigualdad de Bessel para un sistema ortogonal arbitrario.

5°. Espacios euclídeos completos. Teorema de Riesz — Fisher. Comenzando desde el punto 3, hemos considerado espacios euclideos separables; desde este momento vamos a suponer, además, que los espacios considerados son completos.

Sea, pues, R un espacio euclídeo separable completo y sea $\{\varphi_n\}$ un sistema ortonormal en él (no necesariamente completo). De la desigualdad de Bessel se deduce que para que los números $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ representen los coeficientes de Fourier de un elemento $x \in R$ es necesario que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

converja. Resulta que en un espacio completo esta condición no sólo es necesaria, sino también suficiente. Tiene lugar el siguiente teorema.

TEOREMA 3 (Riesz—Fisher). *Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema ortonormal arbitrario en un espacio euclídeo completo R y sean los números*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

tales que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{22}$$

converge. Entonces, existe un elemento $f \in R$ tal que

$$c_k = (f, \varphi_k)$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

DEMOSTRACION. Pongamos

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Entonces,

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2;$$

como la serie (22) converge, de aquí se deduce, en virtud de la complitud de R, la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ a un elemento $f \in R$. Además,

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i), \tag{23}$$

donde el primer sumando del miembro derecho es igual a c_i para $n \geqslant i$, mientras que el segundo sumando tiende a cero para $n \to \infty$, ya que

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leqslant \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|.$$

El miembro izquierdo de la igualdad (23) no depende de n; por eso, pasando al límite para $n \to \infty$, obtenemos

$$(f, \varphi_i) = c_i.$$

De acuerdo con la definición de f,

$$\|f - f_n\| \to 0 \text{ para } n \to \infty$$

y por eso

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f).$$

En efecto,

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \ f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0$$

para $n \to \infty$. El teorema queda demostrado.

Demostremos, para concluir, el siguiente teorema útil.

TEOREMA 4. *Para que un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ de un espacio euclídeo separable completo sea completo es necesario y suficiente que en R no exista ningún elemento diferente de cero que sea ortogonal a todos los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema completo y por consiguiente, cerrado. Si f es ortogonal a todos los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$, todos sus coeficientes de Fourier se anulan. Entonces, de la igualdad de Parseval obtenemos

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

es decir, $f = 0$.

Viceversa, supongamos que el sistema $\{\varphi_n\}$ no es completo, esto es, existe en R un elemento $g \neq 0$ tal que

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \text{ (donde } c_k = (g, \varphi_k)).$$

Entonces, de acuerdo con el teorema de Riesz—Fisher, existe un elemento $f \in R$ tal que

$$(f, \varphi_k) = c_k, \ (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

El elemento $f - g$ es ortogonal a todos los φ_i. De la desigualdad

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

se desprende que $f - g \neq 0$. El teorema queda demostrado.

EJERCICIOS. 1. Sea H un espacio euclídeo completo (no necesariamente separable); entonces existe en él un sistema ortonormal completo $\{\varphi_\alpha\}$ (véase el ejercicio de la pág. 159). Demuéstrese que para todo vector $f \in H$ tienen lugar los desarrollos

$$f=\sum_\alpha (f,\ \varphi_\alpha)\varphi_\alpha,\quad \|f\|^2=\sum_\alpha |(f,\ \varphi_\alpha)|^2,$$

donde las sumas que figuran a la derecha tienen a lo sumo un número numerable de sumandos diferentes de 0.

2. Un sistema $\{\varphi_\alpha\}$ de vectores de un espacio euclídeo R se llama *total*, cuando en R no existen elementos diferentes de 0 ortogonales a todos los $\{\varphi_\alpha\}$. El teorema 4 significa que en un espacio euclídeo completo la totalidad es equivalente a la complitud. Demuéstrese que en los espacios no completos pueden existir sistemas totales, pero no completos.

6°. Espacio de Hilbert. Teorema sobre el isomorfismo. Continuemos la consideración de espacios euclídeos completos. Nos interesarán, al igual que antes, los espacios de dimensión infinita y no de dimensión finita que se describen completamente en los cursos del Algebra lineal. Al igual que antes, admitiremos la existencia de un conjunto numerable siempre denso en los espacios considerados. Introduzcamos la siguiente definición.

DEFINICION. Un espacio euclídeo separable completo de dimensión infinita se llama *espacio de Hilbert*[1]. Es decir, un espacio de Hilbert es un conjunto H de elementos $f,\ g,\ \ldots$ de naturaleza arbitraria que verifica las siguientes condiciones:

I. H es un espacio euclídeo (es decir, un espacio lineal con un producto escalar definido en él).

II. El espacio H es completo en el sentido de la métrica $\rho(f,\ g)=\|f-g\|$.

III. El espacio H es de dimensión infinita, esto es, cualquiera que sea n se puede encontrar en él n elementos linealmente independientes.

IV. H es separable, esto es, existe en él un conjunto numerable siempre denso.

Como ejemplo de un espacio de Hilbert podemos indicar el espacio real l_2.

Recordemos que dos espacios euclídeos R y R^* se llaman isomorfos, cuando se puede establecer entre sus elementos una correspondencia biunívoca de manera que si

$$x \leftrightarrow x^*,\qquad y \leftrightarrow y^*,$$

$(x,\ y \in R;\ x^*,\ y^* \in R^*)$, se tiene

[1] Por el apellido del famoso matemático alemán David Hilbert (1862—1943) que introdujo este concepto.

$$x+y \leftrightarrow x^*+y^*,$$
$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

y

$$(x,\ y)=(x^*,\ y^*).$$

En otras palabras, un isomorfismo de espacios euclídeos es una correspondencia biunívoca que conserva tanto las operaciones lineales, definidas en estos espacios, como el producto escalar.

Como se sabe, dos espacios euclídeos arbitrarios de n dimensiones son isomorfos y, por consiguiente, cualquier espacio de este tipo es isomorfo al espacio de coordenadas R^n (ejemplo 1). Los espacios euclídeos de infinita dimensión no son necesariamente isomorfos entre sí. Por ejemplo, los espacios l_2 y $C^2_{[a,\ b]}$ no son isomorfos. Esto se ve, por ejemplo, de que el primero de ellos es completo y el segundo no lo es.

Sin embargo, tiene lugar el siguiente teorema.

TEOREMA 5. *Dos espacios de Hilbert cualesquiera son isomorfos.*

DEMOSTRACION. Probemos que todo espacio de Hilbert H es isomorfo a l_2. Con esto quedará demostrada la afirmación del teorema. Escojamos en H un sistema ortonormal completo arbitrario $\{\varphi_n\}$ y pongamos en correspondencia a todo elemento $f \in H$ el conjunto $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$ de sus coeficientes de Fourier según este sistema. Puesto que $\sum c_k^2 < \infty$, la sucesión $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots)$ es un elemento de l_2. Viceversa, en virtud del teorema de Riesz—Fisher, a todo elemento $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots)$ de l_2 le corresponde un elemento $f \in H$ para el cual los números $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n\ \ldots$ son sus coeficientes de Fourier. La correspondencia establecida entre los elementos de H y l_2 es biunívoca. Además, si

$$f^{(1)} \leftrightarrow (c_1^{(1)},\ c_2^{(1)},\ \ldots,\ c_n^{(1)},\ \ldots)$$

y

$$f^2 \leftrightarrow (c_1^{(2)},\ c_2^{(2)},\ \ldots,\ c_n^{(2)},\ \ldots),$$

tenemos

$$f^{(1)}+f^{(2)} \leftrightarrow (c_1^{(1)}+c_1^{(2)},\ c_2^{(1)}+c_2^{(2)},\ \ldots,\ c_n^{(1)}+c_n^{(2)},\ \ldots)$$

y

$$kf^{(1)} \leftrightarrow (kc_1^{(1)},\ kc_2^{(1)},\ \ldots,\ kc_n^{(1)},\ \ldots),$$

es decir, la suma se transforma en suma y el producto por un número, en el producto del elemento correspondiente por el mismo número. Finalmente, de la igualdad de Parseval se sigue que

$$(f^{(1)},\ f^{(2)})=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} c_n^{(2)}. \tag{24}$$

En efecto, de

$$(f^{(1)},\ f^{(1)})=\sum (c_n^{(1)})^2,\ (f^{(2)},\ f^{(2)})=\sum (c_n^{(2)})^2$$

y

$$(f^{(1)}+f^{(2)},\ f^{(1)}+f^{(2)})=(f^{(1)},\ f^{(1)})+2(f^{(1)},\ f^{(2)})+(f^{(2)},\ f^{(2)})=$$
$$=\sum (c_n^{(1)}+c_n^{(2)})^2=\sum (c_n^{(1)})^2+2\sum c_n^{(1)} c_n^{(2)}+\sum (c_n^{(2)})^2$$

se deduce (24). De esta forma, la correspondencia que hemos establecido entre los elementos de los espacios H y l_2 es efectivamente un isomorfismo; el teorema queda demostrado.

El teorema demostrado significa que, salvo un isomorfismo, existe sólo un espacio de Hilbert (es decir, que el sistema de axiomas I, II, III y IV es completo) y que el espacio l_2 puede considerarse como su «realización en coordenadas», de la misma forma que el espacio de coordenadas de n dimensiones con el producto escalar $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ representa la realización en coordenadas del espacio euclídeo de n dimensiones definido axiomáticamente.

Otra realización del espacio de Hilbert la podemos obtener tomando el espacio funcional $C^2_{[a,\,b]}$ y considerando su completación. En efecto, es fácil ver que la completación R^* de todo espacio euclídeo R (en el sentido en el que hemos definido la completación de un espacio métrico en el § 3 del capítulo II) se convierte en un espacio euclídeo lineal, si las operaciones lineales y el producto escalar se definen en él prolongándolas por continuidad del espacio $R\subset R^*$, es decir, tomando

$$x+y=\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n),\quad \alpha x=\lim_{n\to\infty}\alpha x_n$$

y

$$(x,\ y)=\lim_{n\to\infty}(x_n,\ y_n)$$

donde $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$, x_n, $y_n \in R$. (Es fácil ver que estos límites existen y no dependen de cómo se escojan las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$). Entonces, la completación del espacio $C^2_{[a,\,b]}$ será un espacio euclídeo completo y, evidentemente, separable y de dimensión infinita, es decir, será un espacio de Hilbert. En el capítulo VII volveremos a tratar este tema y demostraremos que los elementos que se deben agregar a $C^2_{[a,\,b]}$ para obtener un espacio completo, también se pueden representar como funciones, pero ya discontinuas (más precisamente, como funciones de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue).

7°. **Subespacios, complementos ortogonales, suma directa.** De acuerdo con las definiciones generales del § 3, llamaremos *variedad lineal* en un espacio de Hilbert H a todo conjunto L de elementos de H tal que, si f, $g \in H$, también $\alpha f + \beta g \in L$ cualesquiera que sean los números α y β. Una variedad lineal cerrada se llamará *subespacio*.

Veamos algunos ejemplos de subespacios del espacio de Hilbert.

1. Sea h un elemento arbitrario de H. El conjunto de todos los elementos $f \in H$ ortogonales a h constituye un subespacio de H.

2. Supongamos que H está realizado mediante l_2, es decir, que sus elementos son las sucesiones $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que $\sum x_k^2 < \infty$. Los elementos que verifican la condición $x_1 = x_2$ forman un subespacio.

3. Supongamos de nuevo que H está realizado mediante l_2. Los elementos $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ para los cuales $x_n = 0$ cuando $n = 2, 4, 6, \ldots$ (mientras que x_n son arbitrarios para $n = 1, 3, 5, \ldots$) forman un subespacio.

Recomendamos al lector comprobar que los conjuntos de vectores de los ejemplos 1, 2 y 3 son efectivamente subespacios.

Todo subespacio de un espacio de Hilbert o bien es un espacio euclídeo de dimensión finita o bien representa un espacio de Hilbert. En efecto, la validez de los axiomas I, II y III para cualquiera de estos subespacios es evidente, y la validez del axioma IV se deduce del siguiente lema.

LEMA. *De la existencia de un conjunto numerable siempre denso en un espacio métrico R se deduce la existencia de un conjunto numerable siempre denso en cualquier subconjunto suyo R'.*

DEMOSTRACION. Sea

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

un conjunto numerable siempre denso en R y sea

$$a_n = \inf_{\eta \in R'} \rho(\xi_n, \eta).$$

Para cualesquiera n y m naturales existe un punto $\eta_{n,m} \in R'$ tal que

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$; para todo $\eta \in R'$ existe un n tal que

$$\rho(\xi_n, \eta) < \frac{\varepsilon}{3}$$

y, por consiguiente,

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3},$$

pero, entonces, $\rho(\eta, \eta_{n,m}) < \varepsilon$, es decir, el conjunto $\{\eta_{n,m}\}$ $(n, m = 1, 2 \ldots)$, a lo sumo numerable, es siempre denso en R'.

Los subespacios del espacio de Hilbert poseen propiedades específicas (que no tienen lugar para los subespacios de un espacio normado arbitrario). Estas propiedades están relacionadas con la existencia en el espacio de Hilbert del producto escalar y del concepto de ortogonalidad, correspondiente a éste.

Aplicando el proceso de ortogonalización a una sucesión numerable siempre densa de elementos de un subespacio cualquiera del espacio de Hilbert, obtenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 6. *En todo subespacio M del espacio H existe un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ tal que su adherencia lineal coincide con M.*

Sea M un subespacio del espacio de Hilbert H. Denotemos mediante

$$M' = H \ominus M$$

el conjunto de elementos $g \in H$ ortogonales a todos los elementos $f \in M$ y demostremos que M' es también un subespacio del espacio H. La linealidad de M' es obvia, ya que de $(g_1, f) = (g_2, f) = 0$ fluye $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = 0$. Para demostrar que es cerrado, admitamos que los elementos g_n pertenecen a M' y convergen a g. Entonces, para todo $f \in M$ tenemos

$$(g, f) = \lim_{n\to\infty} (g_n, f) = 0$$

y por eso g también pertenece a M'.

El subespacio M' se llama *complemento ortogonal* del subespacio M.

Del teorema 6 se deduce fácilmente que:

TEOREMA 7. *Si M es un subespacio lineal cerrado del espacio H, todo elemento $f \in H$ se puede representar de manera única en la forma $f = h + h'$, donde $h \in M$ y $h' \in M'$.*

DEMOSTRACION. Demostremos primero que existe esta descomposición. Para ello escojamos en M un sistema ortonormal completo $\{\varphi_n\}$ y pongamos

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad c_n = (f, \varphi_n).$$

Puesto que (debido a la desigualdad de Bessel) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$

converge, el elemento h existe y pertenece a M. Tomemos

$$h' = f - h.$$

Es evidente que para todo n

$$(h', \varphi_n) = 0$$

y, como cualquier elemento de M se puede representar en la forma

$$\zeta = \sum a_n \varphi_n,$$

tenemos para $\zeta \in M$

$$(h', \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \varphi_n) = 0,$$

es decir, $h' \in M'$.

Supongamos ahora que además de la descomposición obtenida $f = h + h'$ existe otra descomposición

$$f = h_1 + h_1', \quad h_1 \in M, \quad h_1' \in M'.$$

Entonces, tenemos para cualquier n

$$(h_1, \varphi_n) = (f, \varphi_n) = c_n$$

y de aquí se deduce que

$$h_1 = h, \quad h_1' = h'.$$

Del teorema 7 fluye el siguiente corolario.

COROLARIO 1. *El complemento ortogonal del complemento ortogonal de un subespacio lineal cerrado M coincide con M.*

De esta forma resulta posible hablar de subespacios recíprocamente complementarios del espacio H. Si M y M' son dos subespacios recíprocamente complementarios y si $\{\varphi_n\}$ y $\{\varphi_n'\}$ son dos sistemas ortogonales completos (de M y de M', respectivamente), la unión de estos sistemas $\{\varphi_n\}$ y $\{\varphi_n'\}$ ofrece un sistema ortogonal completo de todo el espacio H. Por eso, tiene lugar el siguiente corolario.

COROLARIO 2. *Todo sistema ortonormal puede ser extendido a un sistema completo de H.*

Siendo el sistema $\{\varphi_n\}$ finito, el número de elementos que lo componen coincide con la dimensión del subespacio M generado por $\{\varphi_n\}$ y con la codimensión del subespacio M'. Obtenemos, de esta forma, el siguiente corolario.

COROLARIO 3. *El complemento ortogonal a un subespacio de dimensión finita n tiene codimensión n y viceversa.*

Si todo vector $f \in H$ es representado en la forma $f = h + h'$, $h \in M$, $h' \in M'$ (donde M' es el complemento ortogonal de M), se dice que H es la suma directa de los espacios recíprocamente ortogonales M y M' y se escribe

$$H = M \oplus M'.$$

Está claro que el concepto de suma directa se puede generalizar inmediatamente a un número finito cualquiera o, incluso, a un número numerable de subespacios; a saber, se dice que H es la suma directa de sus subespacios $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus \ldots ,$$

cuando

1) los subespacios M_i son ortogonales dos a dos, es decir, todo vector de M_i es ortogonal a cualquier vector de M_k para $i \neq k$;

2) todo elemento $f \in H$ se puede representar en la forma

$$f = h_1 + h_2 + \ldots + h_n + \ldots, \quad h_n \in M_n,$$

con la particularidad de que, si el número de subespacios M_n es infinito, la serie $\sum \|h_n\|^2$ converge. Es fácil probar, que si existe esta representación del elemento f, ella es única y que

$$\|f\|^2 = \sum \|h_n\|^2.$$

Junto a la suma directa de subespacios, se puede considerar la suma directa de un número finito o numerable de espacios arbitrarios de Hilbert. Si H_1 y H_2 son dos espacios de Hilbert, la suma directa de ellos se define del siguiente modo: los elementos de H son todos los pares (h_1, h_2), donde $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, y el producto escalar de dos de estos pares es igual a

$$((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = (h_1, h_1') + (h_2, h_2').$$

El espacio H contiene, evidentemente, los subespacios recíprocamente ortogonales, compuestos por pares de tipo $(h_1, 0)$ y $(0, h_2)$ respectivamente; el primero de ellos puede ser identificado de un modo natural con el espacio H_1, y el segundo, con el espacio H_2.

Análogamente se define la suma de un número finito cualquiera de espacios. La suma $H = \sum \oplus H_n$ de un número numerable de espacios $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ se define así: los elementos del espacio H son todas las sucesiones de tipo

$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots), \quad (h_n \in H_n),$$

tales que

$$\sum \|h_n\|^2 < \infty.$$

El producto escalar (h, g) de los elementos h y g de H es igual a

$$\sum (h_n, g_n).$$

8°. Propiedad característica de los espacios euclídeos. Analicemos el siguiente problema. Sea R un espacio normado. ¿Cuáles son las condiciones adicionales que debe verificar la norma, definida en R, para que el espacio R sea euclídeo, esto es, para que la norma en él se determine por un producto escalar? En otras palabras, ¿qué es lo que caracteriza los espacios euclídeos dentro de la clase de espacios normados? Esta característica viene dada por el siguiente teorema.

TEOREMA 8. *Para que un espacio normado R sea euclídeo es necesario y suficiente que para cualesquiera dos elementos f y g de él se cumpla la igualdad*

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2). \tag{25}$$

Puesto que $f+g$ y $f-g$ son las diagonales del paralelogramo construido sobre los lados f y g, la igualdad (25) expresa la conocida propiedad de paralelogramo en un espacio euclídeo: la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados. Por consiguiente, la necesidad de esta condición es obvia. Demostremos que es suficiente. Tomemos

$$(f, g)=\frac{1}{4}(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2) \tag{26}$$

y probemos que, si se cumple la igualdad (25), la función (26) satisface todos los axiomas del producto escalar. Puesto que para $f=g$ tenemos

$$(f, f)=\frac{1}{4}(\|2f\|^2-\|f-f\|^2)=\|f\|^2, \tag{27}$$

ésta será precisamente aquel producto escalar que induce en el espacio R la norma definida en él.

Ante todo, se ve inmediatamente de (26) que

$$(f, g)=(g, f),$$

es decir, se cumple la condición 1) de la definición del producto escalar. Además, se cumple también, en virtud de (27), la condición 4) de esta definición. Para demostrar la condición 2) consideremos la siguiente función de tres vectores

$$\Phi(f, g, h)=4[(f+g, h)-(f, h)-(g, h)].$$

es decir,

$$\Phi(f,\ g,\ h)=\|f+g+h\|^2-\|f+g-h\|^2-\|f+h\|^2+ \\ +\|f-h\|^2-\|g+h\|^2+\|g-h\|^2, \tag{28}$$

y demostremos que es igual idénticamente a cero. De acuerdo con (25), tenemos

$$\|f+g\pm h\|^2=2\,\|f\pm h\|^2+2\,\|g\|^2-\|f\pm h-g\|^2.$$

Sustituyendo las correspondientes expresiones en $\Phi(f,\ g,\ h)$, encontramos

$$\Phi(f,\ g,\ h)=-\|f+h-g\|^2+\|f-h-g\|^2+ \\ +\|f+h\|^2-\|f-h\|^2-\|g+h\|^2+\|g-h\|^2. \tag{29}$$

Tomando la suma media de (28) y (29), tenemos

$$\Phi(f,\ g,\ h)=\frac{1}{2}\,(\|g+h+f\|^2+\|g+h-f\|^2)-$$
$$-\frac{1}{2}\,(\|g-h+f\|^2+\|g-h-f\|^2)-\|g+h\|^2+\|g-h\|^2.$$

El primer paréntesis, en virtud de (25), es igual a

$$\|g+h\|^2+\|f\|^2$$

y el segundo, a

$$-\|g+h\|^2-\|f\|^2.$$

Es decir,

$$\Phi(f,\ g,\ h)\equiv 0.$$

Consideremos ahora, para cualesquiera f y g fijos, la función

$$\varphi(c)=(cf,\ g)-c\,(f,\ g).$$

De (26) se deduce inmediatamente que

$$\varphi(0)=\frac{1}{4}\,(\|g\|^2-\|g\|^2)=0;$$

además, $\varphi(-1)=0$, ya que $(-f,\ g)=-(f,\ g)$. Por eso para cualquier n entero

$$(nf,\ g)=(\operatorname{sign} n\,(f+\ldots+f),\ g)=\operatorname{sign} n\,[(f,\ g)+\ldots \\ \ldots+(f,\ g)]=|n|\operatorname{sign} n\,(f,\ g)=n\,(f,\ g),$$

es decir, $\varphi(n)=0$. Para p y q enteros y $q\neq 0$,

$$\left(\frac{p}{q}\,f,\ g\right)=p\left(\frac{1}{q}\,f,\ g\right)=\frac{p}{q}\,q\left(\frac{1}{q}\,f,\ g\right)=\frac{p}{q}\,(f,\ g),$$

es decir, $\varphi(c)=0$ para todo c racional; como la función φ es continua,

$$\varphi(c)\equiv 0.$$

Hemos demostrado con esto que la función (f, g) posee todas las propiedades del producto escalar.

Ejemplos. 1. Consideremos el espacio n-dimensional R_p^n en el que la norma se define por la fórmula

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p \geqslant 1$ se cumplen todos los axiomas de la norma; sin embargo, R_p^n será un espacio euclídeo sólo cuando $p=2$. En efecto, consideremos en R_p^n dos vectores

$$f=(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$g=(1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0);$$

tenemos

$$f+g=(2,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$f-g=(0,\ 2,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

de donde

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{\frac{1}{p}},\quad \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2,$$

es decir, la identidad del paralelogramo (25) no se cumple para $p \neq 2$.

2. Consideremos el espacio de funciones continuas sobre el segmento $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Pongamos

$$f(t) = \cos t,\quad g(t) = \operatorname{sen} t.$$

Tenemos

$$\|f\| = 1,\ \|g\| = 1$$

y

$$\|f+g\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}} |\cos t + \operatorname{sen} t| = \sqrt{2};$$

$$\|f-g\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}} |\cos t - \operatorname{sen} t| = 1.$$

De aquí se ve que

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Por consiguiente, la norma del espacio $C_{\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]}$ no puede ser definida mediante ningún producto escalar. Es fácil ver que el espacio $C_{[a,\ b]}$ de funciones continuas sobre cualquier segmento $[a,\ b]$ tampoco es un espacio euclídeo.

9°. **Espacios euclídeos complejos.** Junto al espacio real se puede introducir también el espacio euclídeo *complejo* (esto es, el espacio lineal complejo con producto escalar). Pero en el caso complejo resulta preciso modificar los axiomas mediante los cuales se define el producto escalar en el caso real, ya que los axiomas 1), 2), 3) y 4), enunciados al principio de este parágrafo, no pueden cumplirse simultáneamente en un espacio complejo. En efecto, de 1) y 3) se deduce

$$(\lambda x,\ \lambda x)=\lambda^2 (x,\ x),$$

de donde obtenemos para $\lambda=i$

$$(ix,\ ix)=-(x,\ x),$$

es decir, los cuadrados escalares de los vectores x e ix no pueden ser positivos al mismo tiempo. En otras palabras, los axiomas 1) y 3) son incompatibles con el axioma 4). Por eso, definiremos el producto escalar en un espacio complejo como una función $(x,\ y)$ numérica (de valores complejos) de dos vectores que verifica las siguientes condiciones:

1) $(x,\ y)=\overline{(y,\ x)}$,
2) $(\lambda x,\ y)=\lambda (x,\ y)$,
3) $(x_1+x_2,\ y)=(x_1, y)+(x_2,\ y)$,

4) $(x,\ x)\geqslant 0$ y, además, $(x,\ x)>0$ cuando $x\neq 0$.

(Por consiguiente, modificamos el primer axioma conservando los tres restantes). De 1) y 2) se deduce que $(x,\ \lambda y)=\bar{\lambda}(x, y)$. En efecto,

$$(x,\ \lambda y)=\overline{(\lambda y,\ x)}=\lambda\,\overline{(y,\ x)}=\bar{\lambda}(x,\ y).$$

Un ejemplo bien conocido de un espacio euclídeo complejo de n dimensiones es el espacio lineal $\boldsymbol{C}^n$ (§ 1, ejemplo 2), en el que el producto escalar de los elementos

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \text{ e } y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$$

se define por

$$(x,\ y)=\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{y_k}.$$

Como se sabe, todo espacio euclídeo complejo de dimensión n es isomorfo a este espacio.

Como ejemplos de espacios euclídeos complejos de dimensión infinita pueden servir:

1) el espacio complejo l_2, cuyos elementos son sucesiones de números complejos

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$

que verifican la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty,$$

y en el que el producto escalar se define mediante la fórmula

$$(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n};$$

2) el espacio $C^2_{[a, b]}$ de funciones de valores complejos continuas sobre el segmento $[a, b]$ con el producto escalar

$$(f, g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

En un espacio euclídeo complejo la longitud (norma) de un vector se define, al igual que en el caso real, mediante la fórmula

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}.$$

El concepto de ángulo entre vectores en el caso complejo no se introduce, ya que la magnitud $\frac{(x, y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ es, en general, compleja y puede no ser el coseno de ningún ángulo real; no obstante, se conserva el concepto de ortogonalidad: los elementos x e y se llaman recíprocamente ortogonales cuando $(x, y)=0$.

Si $\{\varphi_n\}$ es un sistema ortogonal de un espacio euclídeo complejo R y f es un elemento arbitrario de R, los números

$$a_n=\frac{1}{|\varphi_n|^2}(f, \varphi_n)$$

se llaman, al igual que en el caso real, coeficientes de Fourier y la serie

$$\sum_n a_n\varphi_n,$$

serie de Fourier del elemento f según el sistema ortogonal $[\varphi_n]$. Tiene lugar la desigualdad de Bessel

$$\sum_n\|\varphi_n\|^2|a_n|^2\leqslant(f, f).$$

En particular, si el sistema $[\varphi_n]$ es ortonormal, los coeficientes de Fourier según este sistema se definen mediante las fórmulas

$$c_n = (f,\ \varphi_n),$$

y la desigualdad de Bessel toma la forma

$$\sum_n |c_n|^2 \leqslant (f,\ f).$$

Un espacio euclídeo complejo separable y completo de dimensión infinita se llama espacio complejo de Hilbert. En el caso complejo subsiste el teorema sobre el isomorfismo de los espacios de Hilbert:

TEOREMA. 9. *Todos los espacios complejos de Hilbert son isomorfos entre sí.*

La realización más sencilla de un espacio complejo de Hilbert es el espacio complejo l_2. En el capítulo VII veremos otra realización, de carácter funcional, del espacio complejo de Hilbert.

Proponemos al lector comprobar que todos los teoremas demostrados anteriormente para los espacios reales euclídeos y de Hilbert, son válidos (con modificaciones insignificantes, debidas a la complejidad del producto escalar) también para los espacios complejos euclídeos y de Hilbert.

§ 5. ESPACIOS TOPOLÓGICOS LINEALES

1°. Definición y ejemplos. La definición de la norma es sólo una de las formas posibles de introducir una topología en un espacio lineal. El desarrollo de ramas del Análisis Funcional como la teoría de funciones generalizadas (trataremos de ellas en el capítulo siguiente) ha demostrado que en muchos casos conviene considerar espacios lineales con una topología definida no mediante la norma, sino de alguna otra manera.

DEFINICION. Un conjunto E se llama *espacio topológico lineal,* cuando

I. E representa un espacio lineal (con la multiplicación de elementos por números reales o complejos);

II. E es un espacio topológico;

III. las operaciones de adición y multiplicación por números en E son continuas respecto a la topología existente en E. Más detalladamente la última condición significa lo siguiente:

1) si $z_0 = x_0 + y_0$, para toda vecindad U del punto z_0 se pueden indicar vecindades V y W de los puntos x_0 e y_0 tales que $x + y \in U$ para $x \in V$, $y \in W$;

2) si $\alpha_0 x_0 = y_0$, para toda vecindad U del punto y_0 existe una vecindad V del punto x_0 y un número $\varepsilon > 0$ tales que $\alpha x \in U$ para $[\alpha_0 - \alpha] < \varepsilon$ y $x \in V$.

De la relación, existente en un espacio topológico lineal entre las operaciones algebraicas y la topología, se deduce que la topología en este espacio queda totalmente determinada al dar el *sistema de vecindades del cero*. En efecto, sea x un punto de un espacio topológico E y sea U una vecindad del cero en E. Entonces, $U+x$, esto es, la «traslación» de esta vecindad paralelamente a x, es una vecindad del punto x; es evidente, que toda vecindad de cualguier punto $x \in E$ puede obtenerse de esta forma.

De la continuidad, en un espacio topológico lineal E, de las operaciones de adición y multiplicación por números, resultan inmediatamente las siguientes afirmaciones.

1) Si U y V son conjuntos abiertos de E, el conjunto $U+V$ (es decir, la totalidad de elementos de tipo $x+y$, $x \in U$, $y \in V$) es abierto.

2) Si U es abierto, el conjunto λU (es decir, la totalidad de elementos de tipo λx, $x \in U$) es también abierto para todo $\lambda \neq 0$.

3) Si $F \subset E$ es cerrado, el conjunto λF es también cerrado para todo λ.

Ejemplos. 1. Ante todo, son espacios topológicos lineales todos los espacios normados. En efecto, de las propiedades de la norma se deduce inmediatamente que las operaciones de adición de vectores y multiplicación de éstos por números son, en un espacio normado, continuas respecto a aquella topología que induce en él la norma.

2. En el espacio R^∞ de todas las sucesiones numéricas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ definamos el sistema de vecindades del cero como sigue: cada una de estas vecindades $U(k_1, \ldots, k_r; \varepsilon)$ se define por los números enteros $k_1, \ldots, k_r$ y el número $\varepsilon > 0$ y consta de todos los $x \in R^\infty$ que verifican las condiciones:

$$|x_{k_i}| < \varepsilon, \; i = 1, 2, \ldots, r.$$

(El espacio R^∞ puede ser tanto real como complejo).

3. Sea $K_{[a, b]}$ el espacio de funciones indefinidamente diferenciables [1]) sobre el segmento $[a, b]$. Definamos la topología en $K_{[a, b]}$ por medio del siguiente sistema de vecindades del cero. Cada una de estas vecindades $U_{m, \varepsilon}$ se determina por el número m y por el número $\varepsilon > 0$ y consta de todas las funciones φ que verifican las desigualdades

$$|\varphi^{(k)}(x)| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

donde $\varphi^{(k)}$ es la derivada de orden k de la función φ.

---

[1]) Es decir, de funciones que tienen derivadas de todos los órdenes.

El hecho de que en un espacio lineal topológico la topología esté relacionada con las operaciones lineales definidas en él, impone limitaciones bastante rígidas a su topología. Resulta que *todo espacio topológico lineal verifica el así llamado axioma de separabilidad T_3*, esto es, que cualquier vecindad U de un punto arbitrario x contiene una vecindad menor W del mismo punto que junto con su adherencia pertenece a U.

Para demostrar esta proposición basta considerar las vecindades del cero. Sea U una vecindad cualquiera del cero. Debido a la continuidad en E de la operación de sustracción, existirá una vecindad W del cero tal que $W - W \subset U$. Probemos que la adherencia de la vecindad W está contenida en U. Sea $y \in [W]$. En este caso toda vecindad del punto y, en particular $y + W$, contiene un punto de W. Por consiguiente, existe un punto $z \in W$ tal que $y + z \in W$, es decir, $y \in W - W \subset U$, que es lo que se afirmaba.

Un espacio topológico lineal se llama *separable*, cuando verifica el axioma de separabilidad T_1, esto es, cuando todo subconjunto suyo compuesto de un punto resulta cerrado; es evidente que un espacio es separable cuando, y sólo cuando, la intersección de todas las vecindades del cero no contiene elementos diferentes de cero. Los espacios topológicos que verifican los axiomas de separabilidad T_1 y T_3 suelen llamarse *regulares*; de lo demostrado en el párrafo anterior se deduce que un *espacio topológico lineal separable es regular*.

En los espacios normados desempeña un papel importante el concepto de conjunto acotado. Aunque este concepto se introduce allí mediante la norma, puede ser, claro está, enunciado también para los espacios topológicos lineales arbitrarios.

Un conjunto M, situado en un espacio topológico lineal E se llama *acotado*, cuando para toda vecindad U del cero existe un $n > 0$ tal que $nU \supset M$.

Está claro que en el caso de los espacios normados este concepto de acotación coincide con la acotación según la norma (es decir, con la posibilidad de situar el conjunto dado dentro de una bola $\|x\| \leqslant R$). Un espacio E se llama *localmente acotado* cuando existe en él al menos un conjunto acotado abierto no vacío. Todo espacio normado es localmente acotado. Como ejemplo de un espacio que no es localmente acotado, puede servir el espacio R^∞, señalado en el ejemplo 2 (¡demuéstrese esto!)

EJERCICIO. Sea E un espacio topológico lineal; demuéstrese la validez de las afirmaciones siguientes:

(a) un conjunto $M \subset E$ es acotado si, y sólo si, cualesquiera que sean la sucesión $\{x_n\} \subset M$ y la sucesión $\{\varepsilon_n\}$ de números positivos, convergente a 0, la sucesión $\{e_n x_n\}$ también converge a cero;

(b) si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ y $x_n \longrightarrow x$, el conjunto $\{x_n\}$ es acotado;

(c) si E es localmente acotado, en él se cumple el primer axioma de numerabilidad.

2°. Convexidad local. Los espacios topológicos lineales arbitrarios pueden tener propiedades muy diferentes de las propiedades habituales de los espacios euclídeos o normados. Una clase importante de espacios, más generales que los normados, pero en los que subsisten muchas propiedades de los últimos, la forman los así llamados espacios *localmente convexos*.

DEFINICION. Un espacio topológico lineal E se llama *localmente convexo*, cuando todo conjunto abierto no vacío de él contiene un subconjunto abierto convexo no vacío.

Observemos que, si el espacio E es localmente convexo, para todo punto $x \in E$ y toda vecindad suya U existirá una vecindad convexa del cero V tal que $x \in V \subset U$. En efecto, basta comprobar la validez de esta afirmación para el punto $x=0$. Sea U cualquier vecindad del cero. Existe una vecindad del cero V tal que $V - V \subset U$. Como E es localmente convexo, existe un conjunto abierto convexo no vacio $V' \subset V$; sea $y \in V'$; entonces, $V' - y$ es una vecindad convexa del cero contenida en U.

Todo espacio normado es localmente convexo. En efecto, todo conjunto abierto no vacío de él contiene una bola abierta. De esta forma, todo espacio normado es localmente acotado y localmente convexo. Se puede demostrar que la clase formada por espacios con estas dos propiedades se reduce, de hecho, a los espacios normados. Con más precisión: un espacio lineal topológico E se llamará *normable*, cuando la topología existente en E puede definirse mediante una norma; tiene lugar el siguiente teorema: *todo espacio topológico lineal separable, localmente convexo y localmente acotado, es normable.*

EJERCICIOS. 1. Demuéstrese que un conjunto abierto U de un espacio topológico lineal es convexo si, y sólo si, $U + U = 2U$.

2. Sea E un espacio lineal; un conjunto $U \subset E$ se llama *simétrico*, cuando $x \in U$ implica $-x \in U$. Sea $\mathscr{B}$ la familia de todos los subconjuntos simétricos convexos del espacio E coincidentes con su núcleo (véase el § 2). Demuéstrese la validez de las afirmaciones siguientes.

(a) La familia $\mathscr{B}$ es un sistema determinante de vecindades del cero respecto a una topología separable y localmente convexa del espacio E (esta topología se llama *convexa nuclear*).

(b) La topología convexa nuclear es la más fuerte de las topologías localmente convexas compatibles con las operaciones lineales en E.

(c) Toda funcional lineal sobre E es continua respecto a una topología convexa nuclear.

3°. Espacios normados numerables. Una clase de espacios topológicos lineales muy importante para el Análisis resulta ser la clase de los así llamados *espacios normados numerables*. Para poder dar la definición correspondiente necesitamos de un concepto auxiliar.

Supongamos que en un espacio lineal E se han introducido dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Se llaman *compatibles*, cuando toda sucesión $\{x_n\}$ de E, fundamental respecto a cada una de estas normas y convergente a un límite $x \in E$ respecto a una de ellas, converge al mismo límite x respecto a la segunda norma.

Se dice que la norma $\|\cdot\|_1$ *es no más débil* que $\|\cdot\|_2$, cuando existe una constante $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \geqslant c\|x\|_2$ para todo $x \in E$.

Si la primera norma es no más débil que la segunda y ésta, no más débil que la primera, estas dos normas se llaman *equivalentes*. Dos normas se llaman comparables, cuando una de ellas es no más débil que la otra.

DEFINICION. Un espacio *normado numerable* es un espacio lineal E provisto de un sistema numerable de normas $\|\cdot\|_n$ compatibles entre sí. Todo espacio normado numerable se convierte en un espacio topológico lineal, si se toma por sistema determinante de vecindades del cero la totalidad de conjuntos $U_{r,\,\varepsilon}$, cada uno de los cuales está definido por un número r y un número positivo ε y consta de todos los elementos $x \in E$ que verifican las condiciones

$$\|x\|_1 < \varepsilon, \; \ldots, \; \|x\|_r < \varepsilon.$$

Proponemos al lector comprobar que este sistema de vecindades del cero induce, efectivamente, en E una topología respecto a la cual resultan continuas las operaciones de adición de elementos y de multiplicación de éstos por números.

Observemos que todo espacio normado numerable verifica el primer axioma de numerabilidad, ya que el sistema de vecindades del cero $U_{r,\,\varepsilon}$ puede ser sustituido (sin que varíe la topología) por un subsistema numerable, en el que ε toma solamente los valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Por eso la topología de este espacio se puede describir en términos de convergencia de sucesiones. Es más, la topología de un espacio normado numerable se puede definir por medio de una métrica, por ejemplo, por ésta:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}, \quad x, \; y \in E.$$

Proponemos al lector comprobar que la función $\rho(x, y)$ verifica todos los axiomas de distancia y es invariante respecto a las traslaciones (esto es, $\rho(x+z, y+z)=\rho(x, y)$; $x, y, z \in E$) y que la topología inducida por ella coincide con la inicial. De esta forma podemos hablar de la complitud de un espacio normado numerable, entendiéndose por ello la complitud respecto a la métrica introducida más arriba. Observemos, además, que la sucesión $\{x_k\}$ resulta fundamental respecto a la métrica ρ si, y sólo si, es fundamental respecto a cada una de las normas $\|\cdot\|_n$, y que converge (en la métrica ρ) al elemento $x \in E$ si, y sólo si, converge a x respecto a cada una de las normas $\|\cdot\|_n$. En otras palabras, la complitud de un espacio normado numerable significa que toda sucesión de él, fundamental respecto a cada una de las normas $\|\cdot\|_n$, converge.

Ejemplos. 1. Un ejemplo importante de un espacio normado numerable es el considerado anteriormente espacio $K_{[a, b]}$ de funciones indefinidamente diferenciables sobre un segmento, si admitimos que la norma $\|\cdot\|_m$ de este espacio se define mediante la fórmula

$$\|f\|_m = \sup_{\substack{a \leqslant t \leqslant b \\ 0 \leqslant k \leqslant m}} |f^{(k)}(t)|.$$

Es evidente que todas estas normas son compatibles entre sí y que definen en $K_{[a, b]}$ la misma topología que hemos descrito anteriormente.

2. Sea S el espacio de todas las funciones indefinidamente diferenciables sobre la recta, que tienden, junto con todas sus derivadas, en el infinito a cero más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|t|}$ (esto es, que verifican la condición $t^k f^{(q)}(t) \to 0$ para $|t| \to \infty$ cualesquiera que sean los números fijos k y q). Definamos en este espacio un sistema numerable de normas tomando

$$\|f\|_m = \sup_{k, q \leqslant m} |t^k f^{(q)}(t)|, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Es fácil comprobar que estas normas son compatibles entre sí. Por consiguiente, S es un espacio normado numerable.

3. Un caso particular importante de los espacios normados numerables son los así llamados espacios numerables de Hilbert. Sea H un espacio lineal en el que se ha introducido un sistema numerable de productos escalares $(\varphi, \psi)_n$ y supongamos que las normas $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$, correspondientes a estos productos escalares, son compatibles entre sí. Si un espacio de esta índole es completo, se llama espacio *numerable de Hilbert*.

4. Como ejemplo concreto de un espacio numerable de Hilbert, puede servir el siguiente espacio. Sea Φ el conjunto de

sucesiones numéricas $[x_n]$ tales que para todo entero $k \geqslant 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2$$

converge. Introduzcamos en este espacio un sistema numerable de normas, tomando

$$\| x \|_k = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2}.$$

Es fácil ver que estas normas son compatibles entre sí y que Φ es completo en el sentido señalado anteriormente. Está claro que cada una de las normas $|\cdot|_k$ puede ser definida mediante el producto escalar

$$(x, y)_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n y_n,$$

es decir, que Φ es un espacio numerable de Hilbert. Se llama *espacio de sucesiones rápidamente decrecientes.*

Si E es un espacio normado numerable, se puede aceptar que las normas $\|\cdot\|_k$, definidas en él, verifican la condición

$$\| x \|_k \leqslant \| x \|_l \text{ para } k < l, \tag{1}$$

ya que, de lo contrario, podríamos sustituir las normas $\| x \|_k$ por las normas

$$\| x \|_k' = \sup (\| x \|_1, \| x \|_2, \ldots, \| x \|_k),$$

que definen en E la misma topología que define el sistema inicial de normas. Completando el espacio E según cada una de estas normas $\|\cdot\|_k$, obtendremos un sistema de espacios normados completos E_k. Además, de la relación (1) y de la compatibilidad de las normas, se deduce que tienen lugar las inclusiones naturales

$$E_k \supset E_l \text{ para } k < l.$$

De esta forma, a todo espacio normado numerable E se puede poner en correspondencia una cadena decreciente de espacios normados completos

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k \supset \ldots; \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \supset E.$$

Se puede demostrar que el espacio E es completo cuando, y sólo cuando, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ (¡demuéstrese esto!). Por ejemplo cuando el espacio $k_{[a,\,b]}$ de funciones indefinidamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$ es la intersección de los espacios normados completos D^n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, donde el espacio D^n está compuesto por funciones, que tienen derivadas continuas de orden n inclusive, y la norma en él se define mediante la fórmula

$$\|f\|_n = \sup_{\substack{a \leqslant t \leqslant b \\ 0 \leqslant k \leqslant n}} |f^{(k)}(t)|.$$

En la década de los años 30, cuando fue construida, principalmente en los trabajos de Banach, la teoría de los espacios lineales normados, existía la opinión de que esta clase de espacios es lo suficientemente amplia para abastecer todas las necesidades concretas del Análisis. Más tarde se vio, sin embargo, que esto no es así. Resultó que en una serie de cuestiones desempeñan un papel importante espacios como el espacio de funciones indefinidamente diferenciables, el espacio R^∞ de todas las sucesiones numéricas, así como otros espacios, donde la topología natural no se puede definir mediante ninguna norma. De esta forma, los espacios lineales topológicos, pero no normados, no son necesariamente «exotiquez» o «patalogía». Al contrario, algunos de estos espacios representan una generalización del espacio euclídeo de dimensión finita no menos natural e importante que, digamos, el espacio de Hilbert.

CAPITULO IV

FUNCIONALES LINEALES Y OPERADORES LINEALES

§ 1. FUNCIONALES LINEALES CONTINUAS

1°. Funcionales lineales continuas sobre espacios topológicos lineales. En el § 1 del cap. III hemos considerado ya funcionales lineales definidas sobre un espacio lineal. En el caso de funcionales definidas sobre un espacio topológico lineal, representan interés principal las funcionales lineales c o n t i n u a s; como de costumbre, una funcional f, definida sobre un espacio E, se llama *continua*, cuando para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x_0 \in E$ existe una vecindad U del elemento x_0 tal que

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \text{ para } x \in U. \tag{1}$$

Si E es un espacio topológico lineal de d i m e n s i ó n f i n i t a, toda funcional lineal sobre E es automáticamente continua. En el caso general, la linealidad de una funcional no implica su continuidad.

La siguiente proposición, aun siendo casi evidente, resulta esencial para lo sucesivo.

Si una funcional lineal f es continua en algún punto $x \in E$, es continua en todo E.

En efecto, sea y un punto arbitrario de E y sea $\varepsilon > 0$. Escojamos la vecindad U del punto x de manera que se cumpla la condición (1). Entonces el conjunto

$$V = U + (y - x)$$

será la vecindad deseada del punto y, ya que para $z \in V$, tenemos $z + x - y \in U$ y, por consiguiente,

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y + x) - f(x)| < \varepsilon.$$