CAPITULO IV

FUNCIONALES LINEALES Y OPERADORES LINEALES

§ 1. FUNCIONALES LINEALES CONTINUAS

1°. Funcionales lineales continuas sobre espacios topológicos lineales. En el § 1 del cap. III hemos considerado ya funcionales lineales definidas sobre un espacio lineal. En el caso de funcionales definidas sobre un espacio topológico lineal, representan interés principal las funcionales lineales c o n t i n u a s; como de costumbre, una funcional f, definida sobre un espacio E, se llama *continua*, cuando para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x_0 \in E$ existe una vecindad U del elemento x_0 tal que

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \text{ para } x \in U. \tag{1}$$

Si E es un espacio topológico lineal de d i m e n s i ó n f i n i t a, toda funcional lineal sobre E es automáticamente continua. En el caso general, la linealidad de una funcional no implica su continuidad.

La siguiente proposición, aun siendo casi evidente, resulta esencial para lo sucesivo.

Si una funcional lineal f es continua en algún punto $x \in E$, es continua en todo E.

En efecto, sea y un punto arbitrario de E y sea $\varepsilon > 0$. Escojamos la vecindad U del punto x de manera que se cumpla la condición (1). Entonces el conjunto

$$V = U + (y-x)$$

será la vecindad deseada del punto y, ya que para $z \in V$, tenemos $z + x - y \in U$ y, por consiguiente,

$$|f(z)-f(y)| = |f(z-y+x)-f(x)| < \varepsilon.$$

De esta forma es suficiente comprobar la continuidad de una funcional solamente en un punto, por ejemplo, en el punto 0. Si E es un espacio con el primer axioma de numerabilidad, la continuidad de una funcional lineal sobre E se puede enunciar en términos de sucesiones, es decir, de la siguiente forma: una funcional f se llama continua en el punto $x \in E$, cuando de $x_n \to x$ se deduce que $f(x_n) \to f(x)$. Dejamos a cargo del lector la demostración de la equivalencia (en caso de que se verifique el primer axioma de numerabilidad) de esta definición con la dada anteriormente.

TEOREMA 1. *Para que una funcional lineal f sea continua sobre E, es necesario y suficiente que exista en E una vecindad del cero donde la funcional f sea acotada.*

DEMOSTRACION. Si la funcional f es continua en el punto 0, para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad del cero donde

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Viceversa, sea U una vecindad del cero tal que

$$|f(x)| \leqslant C \text{ para } x \in U$$

y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, $\frac{\varepsilon}{C} U$ es aquella vecindad del cero, donde $|f(x)| < \varepsilon$. Con esto queda demostrada la continuidad de f en el punto 0 y, por consiguiente, en todo el espacio.

EJERCICIO. Sea E un espacio topológico lineal; demuéstrese la validez de las siguientes proposiciones.

(a) Una funcional lineal f sobre E es continua cuando, y sólo cuando, existen un conjunto abierto $U \subset E$ y un número t tales que $t \overline{\in} f(U)$ (aquí $f(U)$ es el conjunto de los valores que toma f sobre U).

b) Una funcional lineal f sobre E es continua cuando, y sólo cuando, su subespacio nulo $\{x : f(x) = 0\}$ es cerrado en E.

c) Si toda funcional lineal sobre E es continua, la topología de E coincide con la topología convexa nuclear (véase el ejercicio en la pág. 180).

d) Si E es de dimensión infinita y normable, existe en él una funcional lineal discontinua (empléese la existencia en E de una base de Hamel; véase el ejercicio en la pág. 134).

(e) Supongamos que en E existe un sistema determinante de vecindades del cero y que la potencia de este sistema no sobrepasa la dimensión algebraica del espacio E (esto es, la potencia de una base de Hamel en E; véase el ejercicio en la pág. 134). Entonces, existe sobre E una funcional lineal no continua.

2°. Relación entre la continuidad de una funcional lineal y su acotación sobre conjuntos acotados. Recordemos que un conjunto M, situado en un espacio topológico lineal, ha sido llamado acotado, cuando para cualquier vecindad U del cero existe un número n

tal que $M \subset nU$. Demostremos el siguiente teorema que establece la relación existente entre la continuidad de una funcional lineal y su comportamiento sobre conjuntos acotados.

TEOREMA 2. *Para que una funcional lineal f sea continua sobre E, es necesario y, en caso de que E verifique el primer axioma de numerabilidad, también suficiente que sea acotada sobre todo conjunto acotado.*

DEMOSTRACION. NECESIDAD. Una funcional continua es acotada sobre cierta vecindad U del cero, de manera que

$$|f(x)| \leqslant C \text{ para } x \in U.$$

Si M es un conjunto acotado, tenemos que $M \subset nU$ para un n determinado y, por consiguiente,

$$|f(x)| \leqslant Cn \text{ sobre } M.$$

SUFICIENCIA. Sea $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ un sistema numerable determinante de vecindades del cero en E. Si la funcional f no es continua, no está acotada en cada una de estas vecindades. Por eso, en cada una de las vecindades U_k se puede indicar un punto x_k en el cual $|f(x)| > k$. La sucesión $\{x_k\}$ tiende a cero y representa, por consiguiente, un conjunto acotado; la funcional f no está acotada sobre este conjunto. Es decir, si la funcional f no es continua en un espacio E que verifica el primer axioma de numerabilidad, existe en E un conjunto acotado sobre el cual la funcional no está acotada. El teorema queda demostrado.

Una funcional lineal acotada sobre todo conjunto acotado se llamará funcional lineal *acotada*. La acotación de una funcional lineal no implica, en general, su continuidad.

3°. **Funcionales lineales continuas sobre espacios normados.** Veamos más detalladamente el caso particular importante cuando E es un espacio normado. Como todo espacio normado verifica el primer axioma de numerabilidad, la continuidad de una funcional lineal en él equivale a su acotación. Pero en un espacio normado un conjunto es acotado si, y sólo si, está contenido en una bola con centro en el origen de coordenadas. Por eso la acotación de una funcional en un espacio normado significa que la funcional está acotada en cada bola. Debido a la linealidad, esta última condición equivale a que la funcional está acotada sobre la bola unitaria

$$\|x\| \leqslant 1$$

del espacio E.

Sea f una funcional lineal acotada ($=$continua) en un espacio normado E. El número

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|,$$

esto es, la cota superior mínima de los valores que toma $|f(x)|$ sobre la bola unitaria del espacio E, se llamará *norma de la funcional lineal* f. Señalemos las siguientes propiedades evidentes de $\|f\|$:

1)
$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}, \tag{2}$$

esto sigue directamente de que para todo $x \neq 0$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right|.$$

2) Para cualquier $x \in E$

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|. \tag{3}$$

En efecto, si $x \neq 0$, el elemento $\frac{x}{\|x\|}$ pertenece a la bola unitaria, es decir, por definición de la norma de una funcional

$$\left| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|f\|,$$

de donde se deduce (3). En cambio, si $x = 0$, en los miembros de derecha y de izquierda de (3) figura 0.

En lo sucesivo sólo consideraremos funcionales lineales continuas; omitiremos, para abreviar, la palabra «continua».

Veamos algunos ejemplos de funcionales lineales en espacios normados.

1. Sea R^n el espacio euclídeo de n dimensiones y sea a un vector fijo de él. Entonces, el producto escalar

$$f(x) = (x, a),$$

donde x recorre todo R^n, representa, evidentemente, una funcional lineal sobre R^n. Debido a la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, tenemos

$$|f(x)| = |(x, a)| \leqslant \|x\| \cdot \|a\|; \tag{4}$$

por consiguiente, esta funcional es acotada y, por lo tanto, continua sobre R^n. De la desigualdad (4) tenemos que

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|a\|.$$

Puesto que el miembro derecho de esta desigualdad no depende de x, tendremos

$$\sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|a\|,$$

es decir, $\|f\| \leqslant \|a\|$. Pero tomando $x=a$, obtenemos

$$|f(a)|=(a, a)=\|a\|^2, \text{ es decir, } \frac{|f(a)|}{\|a\|}=\|a\|.$$

Por eso

$$\|f\|=\|a\|.$$

2. La integral

$$I(x)=\int_a^b x(t)\,dt,$$

donde $x(t)$ es una función continua sobre $[a, b]$, representa una funcional lineal en el espacio $C_{[a,b]}$. Esta funcional es acotada y su norma es igual a $b-a$. En efecto,

$$|I(x)|=\left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leqslant \max|x(t)|(b-a)=\|x\|(b-a)$$

y para $x \equiv \text{const}$ se alcanza la igualdad.

3. Consideremos un ejemplo más general. Sea $y_0(t)$ una función fija continua sobre $[a, b]$. Pongamos para toda función $x(t) \in C_{[a,b]}$

$$F(x)=\int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt. \tag{5}$$

Esta funcional es lineal. Además, es acotada, ya que

$$|F(x)|=\left|\int_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt\right| \leqslant \|x\| \int_a^b |y_0(t)|\,dt. \tag{6}$$

De manera que la funcional (5) es lineal y acotada; luego, es continua. De (6) se deduce que

$$\|F\| \leqslant \int_a^b |y_0(t)|\,dt.$$

(Demuéstrese que de hecho tiene lugar la igualdad exacta).

4. Consideremos en el espacio $C_{[a,b]}$ la funcional lineal

$$\delta_{t_0}(x)=x(t_0)$$

ya mencionada en el punto 5 del § 1 del cap. III. Su valor en la función $x(t)$ se define como el valor de $x(t)$ en el punto dado t_0. Está claro que

$$|x(t_0)| \leqslant \|x\|$$

y que para $x \equiv \text{const}$ tiene lugar la igualdad. De aquí se deduce inmediatamente que la norma de la funcional δ_{t_0} es igual a 1.

5. En todo espacio euclídeo X, al igual que en R^n, se puede definir una funcional lineal, escogiendo un elemento fijo $a \in X$ y tomando para cualquier $x \in X$

$$F(x) = (x, a).$$

Al igual que en el caso de R^n, es fácil comprobar que

$$\|F\| = \|a\|.$$

Al concepto de la norma de una funcional lineal en un espacio normado se puede dar la siguiente interpretación geométrica clara. Hemos visto anteriormente (cap. III, § 1) que a toda funcional lineal se puede poner en correspondencia un hiperplano L dado por la ecuación

$$f(x) = 1.$$

Busquemos la distancia d de este hiperplano al punto 0. Por definición $d = \inf\limits_{f(x)=1} \|x\|$. Puesto que siempre

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|,$$

de $f(x) = 1$ se deduce que $\|x\| \geqslant \frac{1}{\|f\|}$ para todo $x \in L$, es decir, que $d \geqslant \frac{1}{\|f\|}$. Por otro lado, de acuerdo con la definición de la norma de f, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un elemento x_ε que verifica la condición $f(x_\varepsilon) = 1$ y tal que

$$1 > (\|f\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|;$$

por eso

$$d = \inf_{f(x)=1} \|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos

$$d = \frac{1}{\|f\|},$$

es decir, la norma de la funcional lineal $f(x)$ es el valor inverso de la distancia desde el hiperplano $f(x) = 1$ hasta el punto 0.

4°. Teorema de Hahn — Banach en un espacio normado. En el § 2 del cap. III hemos demostrado el teorema de Hahn — Banach, según el cual toda funcional lineal $f(x_0)$, que está definida sobre un subespacio L de un espacio lineal E y que verifica la condición

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \tag{7}$$

donde p es una funcional convexa fija sobre E, se puede prolongar a todo el E conservando la condición. En el caso de funcionales lineales acotadas en espacios normados, este teorema se puede enunciar de la siguiente manera:

Sean E un espacio normado real; L, un subespacio suyo y f_0, una funcional lineal acotada sobre L. Esta funcional lineal se puede prolongar a una funcional lineal f, definida sobre todo el espacio E, sin aumentar la norma, esto es, de manera que

$$\|f_0\|_{\text{sobre } L} = \|f\|_{\text{sobre } E}.$$

En efecto, sea

$$\|f_0\|_{\text{sobre } L} = k.$$

Está claro que $k\|x\|$ es una funcional convexa. Tomándola igual a p y aplicando el teorema de Hahn—Banach, demostrado en el § 2 del cap. III, obtendremos el resultado necesario.

En la forma que acabamos de dar, el teorema de Hahn—Banach admite la siguiente interpretación geométrica. La ecuación

$$f_0(x) = 1 \tag{8}$$

define en el subespacio L un hiperplano que se encuentra a la distancia $\frac{1}{\|f_0\|}$ del cero. La posibilidad de prolongar la funcional f_0, sin incrementar su norma, hasta una funcional definida en todo E, significa que este hiperplano puede completarse hasta un hiperplano en todo E y de manera que la distancia hasta el cero de este hiperplano mayor sea la misma que la del hiperplano (8).

Aplicando la variante compleja del teorema de Hahn—Banach (teorema 4a del § 2 del cap. III), es fácil demostrar la validez de la siguiente proposición:

Sean E un espacio normado complejo y f_0 una funcional lineal acotada, definida sobre un subespacio $L \subset E$. Entonces existe una funcional lineal acotada f, definida en todo E, que verifica las condiciones:

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in L,$$
$$\|f\|_{\text{sobre } E} = \|f_0\|_{\text{sobre } L}.$$

5°. Funcionales lineales en espacios normados numerables. Sea E un espacio normado numerable con las normas $\|\cdot\|_k$

($k=1, 2, \ldots$); sin perder generalidad, se puede considerar que para todo $x \in E$

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \ldots \leqslant \|x\|_n \leqslant \ldots \tag{9}$$

Sea f una funcional lineal continua sobre E; entonces, existe en E una vecindad U del cero en la cual la funcional f está acotada. De acuerdo con las desigualdades (9) y la definición de la topología en un espacio normado numerable, existen un número natural k y un $\varepsilon > 0$ tales que la bola $S_{k,\varepsilon} = \{x : \|x\|_k < \varepsilon\}$ está contenida en la vecindad U; entonces, la funcional f está acotada sobre esta bola y, por consiguiente, es acotada y continua respecto a la norma $\|\cdot\|_k$, esto es, existe un $C > 0$ tal que

$$f|(x)| \leqslant C \|x\|_k, \quad x \in E.$$

Por otro lado, es evidente que una funcional lineal acotada respecto a una de las normas $\|\cdot\|_n$ es continua sobre E. Por consiguiente, si E_n^* es el conjunto de todas las funcionales lineales sobre E, continuas respecto a la norma $\|\cdot\|_n$, y si E^* es el conjunto de todas las funcionales lineales continuas sobre E, tenemos

$$E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^*. \tag{10}$$

Además, de la condición (9) se deduce que

$$E_1^* \subset E_2^* \subset \ldots \subset E_n^* \subset \ldots$$

Siendo f una funcional lineal continua sobre E, esto es, $f \in E^*$, su *orden* se define como el menor de los números n tales que $f \in E_n^*$; en virtud de la igualdad (10), toda funcional lineal continua sobre E tiene un orden finito.

6°. Existencia de un número suficiente de funcionales lineales continuas. Si el espacio topológico lineal E no se sujeta a limitaciones adicionales, puede ocurrir que no exista sobre él ninguna funcional lineal continua diferente del cero idéntico. No obstante, puede señalarse una clase amplia de espacios para los cuales existe un número suficientemente grande de funcionales lineales continuas. Aceptemos la siguiente terminología. Diremos que sobre el espacio E existe un *número suficientemente grande* de funcionales lineales continuas, cuando para cualesquiera $x_1 \neq x_2$ de E existe una funcional lineal continua f, definida sobre E, tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esta condición equivale, evidentemente, a que para todo $x_0 \neq 0$ exista una funcional f tal que $f(x_0) \neq 0$.

Para cada espacio normado E existe un número suficientemente grande de funcionales lineales continuas.

En efecto, sea x_0 un elemento no nulo de E. Definamos para los elementos de tipo λx_0 la funcional f_0, tomando

$f_0(\lambda x_0) = \lambda$, y prolonguemos después esta funcional (valiéndonos, del teorema de Hahn—Banach) hasta una funcional continua, definida sobre todo el espacio E. Obtendremos una funcional f tal que $f(x_0) = 1 \neq 0$.

Si E es un espacio normado numerable con las normas $\|\cdot\|_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y si $x_0 \in E$ y $x_0 \neq 0$, podemos construir, repitiendo el razonamiento anterior, una funcional lineal f, definida sobre E y continua respecto a la norma $\|\cdot\|_1$, tal que $f(x_0) \neq 0$; puesto que esta funcional será, evidentemente, continua sobre E, *para todo espacio normado numerable existe también un número suficientemente grande de funcionales lineales continuas.*

Finalmente, si E es un espacio real localmente convexo y separable, para cualquier elemento no nulo $x_0 \in E$ existe una vecindad U del cero convexa y simétrica $(U = -U)$ tal que $x_0 \overline{\in} U$; sea p_U la funcional de Minkowski para la vecindad U, esto es,

$$p_U(x) = \inf\left\{t\colon t > 0,\ \frac{x}{t} \in U\right\}.$$

De lo demostrado en el § 2 del cap. III se deduce que p_U es una funcional convexa sobre E finita y simétrica (es decir, tal que $p_U(-x) = p_U(x)$) y que, además,

$$p_U(x) < 1, \quad x \in U,$$
$$p_U(x_0) \geqslant 1.$$

Consideremos en E el subespacio lineal unidimensional $L_0 = \{\lambda x_0\}$ y definamos en él una funcional lineal f_0, tomando $f_0(\lambda x_0) = \lambda$. Está claro que $|f_0(x)| \leqslant p_U(x)$ para $x \in L_0$ y que $f_0(x_0) = 1$. De acuerdo con el teorema de Hahn — Banach, existe una prolongación f de la funcional f_0, definida en todo el E, que verifica la condición $|f(x)| \leqslant p_U(x)$ para todos los $x \in E$. En particular, para $x \in U$, tenemos $|f(x)| \leqslant p_U(x) < 1$, de manera que la funcional f es acotada sobre U y, por consiguiente, continua sobre E.

Como $f(x_0) = 1$, hemos demostrado que *para todo espacio real localmente convexo y separable existe un número suficientemente grande de funcionales lineales continuas* (una proposición análoga es válida también para un espacio complejo). En realidad, este hecho es el que determina en lo fundamental la importancia para el Análisis de la clase de espacios localmente convexos.

§ 2. ESPACIO DUAL

1°. Definición de espacio dual. Para funcionales lineales se puede definir las operaciones de adición y multiplicación por números. Sean f_1 y f_2 dos funcionales lineales definidas sobre un espacio topológico lineal E. La suma de ellas f_1+f_2 es la funcional lineal

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x), \quad x\in E.$$

El producto αf_1 de la funcional lineal f_1 por el número α es la funcional

$$f(x)=\alpha f_1(x), \quad x\in E.$$

Está claro que la suma f_1+f_2 y el producto αf_1 representan funcionales lineales. Además, de la continuidad de las funcionales f_1 y f_2 se deduce que f_1+f_2 y αf_1 son también funcionales continuas sobre E.

Es fácil ver que las operaciones de adición y multiplicación de funcionales por números así definidas satisfacen todos los axiomas de un espacio lineal. En otras palabras, el conjunto de todas las funcionales lineales continuas, definidas sobre un espacio topológico lineal E, forma un espacio lineal. Se llama espacio *dual* a E y se denota mediante E^*.

Además de las operaciones lineales, en el espacio dual E^* se pueden introducir diferentes topologías. Consideremos primero el caso más sencillo cuando el espacio inicial E es normado.

2°. Espacio dual a un espacio normado. Para las funcionales lineales continuas, definidas sobre un espacio normado, hemos introducido el concepto de norma tomando

$$\|f\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Esta norma verifica todas las condiciones contenidas en la definición de un espacio normado. En efecto,

1) $\|f\|>0$ para cualquier funcional lineal no nula f;

2) $\|\alpha f\|=|\alpha|\cdot\|f\|$;

3) $$\|f_1+f_2\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|f_1(x)+f_2(x)|}{\|x\|}\leqslant\sup_{x\neq 0}\frac{|f_1(x)|}{\|x\|}+\sup_{x\neq 0}\frac{|f_2(x)|}{\|x\|}=\|f_1\|+\|f_2\|.$$

De esta forma, el espacio E^*, dual a un espacio normado, puede ser provisto de una estructura natural de espacio normado. La topología en E^*, correspondiente a la norma introducida, se llama *topología fuerte en* E^*. Si es deseable subrayar que E^* se considera como un espacio normado, en lugar de E^* escribiremos $(E^*, \|\cdot\|)$.

Establezcamos la siguiente propiedad importante del espacio dual a un espacio normado.

TEOREMA 1. *El espacio dual* $(E^*, \|\cdot\|)$ *es completo.*

DEMOSTRACION. Sea $\{f_n\}$ una sucesión fundamental de funcionales lineales. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $\|f_n - f_m\| \leqslant \varepsilon$ para todo $n, m \geqslant N$. De aquí obtenemos para cualquier $x \in E$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

es decir, para cualquier $x \in E$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converge. Pongamos

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Comprobemos que f representa una funcional lineal continua. Comprobemos primero la linealidad:

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \\ = \lim_{n \to \infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Escojamos ahora N de manera que $\|f_n - f_{n+p}\| < 1$ para todo $n \geqslant N$ y todo $p \geqslant 0$. Entonces, $\|f_{n+p}\| < \|f_n\| + 1$ para todo $p \geqslant 0$. Por consiguiente,

$$|f_{n+p}(x)| \leqslant (\|f_n\| + 1) \cdot \|x\|.$$

Pasando al límite para $p \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{p \to \infty} |f_{n+p}(x)| = |f(x)| \leqslant (\|f_n\| + 1)\|x\|,$$

es decir, la funcional $f(x)$ es acotada. Demostremos ahora que la funcional f es el límite de la sucesión $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ Sea $\varepsilon > 0$. Escojamos n tan grande que $\|f_n - f_{n+p}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $p \geqslant 0$. Por definición de la norma existe un elemento $x_{n,\varepsilon}$ tal que

$$\|f_n - f\| \leqslant \frac{|f_n(x_{n,\varepsilon}) - f(x_{n,\varepsilon})|}{\|x_{n,\varepsilon}\|} + \frac{\varepsilon}{3} = \\ = \left| f_n\left(\frac{x_{n,\varepsilon}}{\|x_{n,\varepsilon}\|}\right) - f\left(\frac{x_{n,\varepsilon}}{\|x_{n,\varepsilon}\|}\right)\right| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces,
$$\|f_{n+p} - f\| \leqslant \left| f_{n+p}\left(\frac{x_{n,\varepsilon}}{\|x_{n,\varepsilon}\|}\right) - f\left(\frac{x_{n,\varepsilon}}{\|x_{n,\varepsilon}\|}\right)\right| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Pero el primer sumando del miembro derecho tiende a cero para $p \to \infty$. Por consiguiente, para todo p suficientemente grande se cumplirá la desigualdad

$$\|f_{n+p} - f\| < \varepsilon.$$

El teorema queda demostrado.

Subrayemos una vez más que este teorema es válido independientemente de si es completo o no el espacio inicial.

Observación. *Si el espacio normado* E *no es completo y* $\bar{E}$ *es su completación, los espacios* E^* *y* $(\bar{E})^*$ *son isomorfos.* En efecto, podemos aceptar que E está sumergido en $\bar{E}$ como un subconjunto siempre denso; por eso, toda funcional $f \in E^*$ lineal continua sobre E tiene la única prolongación por continuidad $\bar{f}$ de E a todo el $\bar{E}$. Está claro que $\bar{f} \in (\bar{E})^*$, que $\|\bar{f}\| = \|f\|$ y que toda funcional de $(\bar{E})^*$ es una prolongación de alguna funcional de E^* (a saber, de su restricción sobre E). Por consiguiente, la aplicación $f \to \bar{f}$ representa una aplicación isomórfica del espacio E^* a todo el espacio $(\bar{E})^*$.

3°. Ejemplos de espacios duales. 1. Sea E el espacio lineal de n dimensiones (real o complejo). Escojamos en E una base $e_1, \ldots, e_n$; entonces, todo vector $x \in E$ se representa de manera única en la forma $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Si f es una funcional lineal sobre E, está claro que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i; \tag{1}$$

por consiguiente, una funcional lineal se determina unívocamente por los valores que toma en los vectores de la base $e_1, \ldots, e_n$ con la particularidad de que estos valores pueden escogerse arbitrariamente. Definamos las funcionales lineales $f_1, \ldots, f_n$, tomando

$$f_j(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{cuando } i = j, \\ 0, & \text{cuando } i \neq j. \end{cases}$$

Es evidente que estas funcionales son linealmente independientes. Está claro que

$$f_j(x) = x_j;$$

por eso, la fórmula (1) se puede escribir en la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, f_i(x).$$

Por consiguiente, las funcionales $f_1, \ldots, f_n$ forman una base en el espacio E^*, es decir, E^* es un espacio lineal de n dimensiones. La base $f_1, \ldots, f_n$ de E^* se llama *dual* respecto a la base

$e_1, \ldots, e_n$ de E. Diferentes normas en el espacio E inducen distintas normas en E^*. Señalemos algunos ejemplos de pares de normas correspondientes en E y en E^*; en las fórmulas (a), (b), (c) y (d) $x_1, \ldots, x_n$ son las coordenadas del vector $x \in E$ en la base $e_1, \ldots, e_n$, mientras que $f^1, \ldots, f^n$ son las coordenadas de la funcional $f \in E^*$ en la base dual $f_1, \ldots, f_n$.

$$\text{(a)}\ \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f^i|^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{(b)}\ \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f^i|^q\right)^{\frac{1}{q}}; \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;$$

$$\text{(c)}\ \|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \quad \|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f^i|;$$

$$\text{(d)}\ \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|f\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |f^i|.$$

2. Consideremos el espacio c_0 de las sucesiones $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ convergentes a cero con la norma $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$ y demostremos que *el espacio* $(c_0^*, \|\cdot\|)$ *dual a él es isomorfo al espacio* l_1 *de todas las sucesiones absolutamente sumables* $f = \{f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$ *con la norma* $\|f\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Cualquier sucesión $f \in l_1$ define en el espacio c_0 una funcional lineal acotada f mediante la fórmula

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n; \tag{2}$$

está claro que $|\tilde{f}(x)| \leqslant \|x\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$, de manera que $\|\tilde{f}\| \leqslant \|f\|$. Consideremos en c_0 los vectores

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots 1, 0, \ldots),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y pongamos $x^{(N)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{f_n}{|f_n|} e_n$ $\left(\text{si } f_n = 0, \text{ aceptamos que } \frac{f_n}{|f_n|} = 0\right)$.

Entonces, $x^{(N)}\in c_0$, $\|x^{(N)}\|\leqslant 1$ y

$$\tilde{f}(x^{(N)})=\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n}{|f_n|}\tilde{f}(e_n)=\sum_{n=1}^{N}|f_n|,$$

de manera que $\lim\limits_{N\to\infty}\tilde{f}(x^{(N)})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n|=\|f\|$. Por consiguiente, $\|\tilde{f}\|\geqslant$ $\geqslant\|f\|$; comparando esto con la desigualdad de sentido opuesto, obtenida anteriormente, llegamos a la conclusión de que $\|\tilde{f}\|=\|f\|$. Hemos construido, de esta forma, una aplicación lineal isométrica $f\longrightarrow\tilde{f}$ del espacio l_1 en el espacio c_0^*; queda por comprobar que la imagen del espacio l_1 mediante esta aplicación coincide con todo el c_0^*, es decir, que toda funcional $\tilde{f}\in c_0^*$ se puede representar en la forma (2), donde $f=\{f_n\}\in l_1$. Para todo $x=\{x_n\}\in c_0$, tenemos $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_ne_n$; la serie que figura en el miembro derecho converge en c_0 al elemento x, ya que $\left\|x-\sum\limits_{n=1}^{N}x_ne_n\right\|=\sup\limits_{n>N}|x_n|\longrightarrow 0$ para $N\longrightarrow\infty$. Como la funcional $\tilde{f}\in c_0^*$ es continua, tenemos $\tilde{f}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\tilde{f}(e_n)$; por eso, es suficiente comprobar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\tilde{f}(e_n)|<\infty$. Tomando $x^{(N)}=\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{\tilde{f}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|}e_n$ y observando que $x^{(N)}\in c_0$, $\|x^{(N)}\|\leqslant 1$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{N}|\tilde{f}(e_n)|=\sum_{n=1}^{N}\frac{\tilde{f}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|}\tilde{f}(e_n)=\tilde{f}(x^{(N)})\leqslant\|\tilde{f}\|,$$

de donde, debido a la arbitrariedad de N, sacamos la conclusión de que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\tilde{f}(e_n)|<\infty$.

3. No es difícil demostrar que el espacio l_1^* dual al espacio l_1 es isomorfo al espacio m compuesto por todas las sucesiones acotadas $x=\{x_n\}$ con la norma $\|x\|=\sup\limits_{n}|x_n|$.

4. Sean $p>1$ y l_p el espacio de todas las sucesiones $x=\{x_n\}$ tales que

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty;$$

se puede demostrar que el espacio l_p^* dual a él es isomorfo al espacio l_q, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. La forma general de una funcional lineal continua sobre l_p es:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n;\quad x=\{x_n\}\in l_p,\quad f=\{f_n\}\in l_q.$$

La demostración se basa en la desigualdad de Hölder.

Pongamos en claro la estructura del espacio dual al de Hilbert.

TEOREMA 2. *Sea H un espacio real de Hilbert. Para toda funcional lineal f continua sobre H existe el único elemento $x_0\in H$ tal que*

$$f(x)=(x,\ x_0),\quad x\in H; \tag{3}$$

además, resulta que $\|f\|=\|x_0\|$. Viceversa, si $x_0\in H$, la fórmula (3) define una funcional lineal continua f tal que $\|f\|=$ $=\|x_0\|$. Por consiguiente, los espacios H^* y H son isomorfos.

DEMOSTRACION. Es evidente que la fórmula (3) define para todo $x_0\in H$ una funcional lineal sobre H. Como $|f(x)|=|(x,\ x_0)|\leqslant$ $\leqslant\|x\|\cdot\|x_0\|$, esta funcional es continua y como $f(x_0)=\|x_0\|^2$, tenemos además $\|f\|=\|x_0\|$. Comprobemos que toda funcional lineal continua f sobre H se puede representar en la forma (3). Si $f=0$, tomamos $x_0=0$. Sea ahora $f\neq 0$ y sea $H_0=\{x:f(x)=0\}$ el subespacio nulo de la funcional f; como f es continua, H_0 es un subespacio lineal cerrado de H. En el punto 6 del § 1 del cap. III ha sido demostrado que la codimensión del subespacio de ceros de cualquier funcional lineal es igual a 1. Por eso y tomando en consideración el corolario 3 del teorema 7 del § 4 del cap. III, llegamos a la conclusión de que el complemento ortogonal $H_0^{\perp}$ del espacio H_0 es unidimensional, esto es, existe un elemento y_0 (no nulo) ortogonal a H_0 y tal que todo vector $x\in H$ se puede representar de manera única en la forma $x=y+$ $+\lambda y_0$, donde $y\in H_0$. Podemos aceptar, evidentemente, que $\|y_0\|=1$; pongamos $x_0=f(y_0)\,y_0$. Entonces, para cualquier $x\in H$ tenemos

$$x=y+\lambda y_0,\quad y\in H_0,$$
$$f(x)=\lambda f(y_0),$$
$$(x,\ x_0)=\lambda(y_0,\quad x_0)=\lambda f(y_0)(y_0,\ y_0)=\lambda f(y_0).$$

De manera que $f(x)=(x,\ x_0)$ para todo $x\in H$. Si $f(x)=(x,\ x_0')$, $x\in H$, tenemos $(x,\ x_0-x_0')=0$, de donde, tomando $x=x_0-x_0'$, encontramos que x_0-x_0'. El teorema queda demostrado.

Observaciones. 1. Sea E un espacio euclídeo no completo y sea H el espacio de Hilbert que representa su completación. Como los espacios E^* y H^* son isomorfos (véase la observación de la pág. 196) y H^* es isomorfo a H, es válida la siguiente proposición: *el espacio E^* dual a un espacio euclídeo no completo E es isomorfo a la completación H del espacio E*.

2. El teorema 2 es válido también para un espacio de Hilbert complejo (la demostración es la misma, solamente hay que sustituir $x_0=f(y_0)y_0$ por $x_0=\overline{f(y_0)}y_0$). La única diferencia entre el caso complejo y real consiste en que, en el caso complejo, la aplicación del espacio H en el espacio H^*, que pone en correspondencia al elemento $x_0\in H$ la funcional $f(x)=(x, x_0)$, es un isomorfismo lineal *conjugado*, esto es, pone en correspondencia al elemento λx_0 la funcional $\bar{\lambda}f$.

4°. Estructura del espacio dual a un espacio normado numerable. Sea E un espacio normado numerable con las normas

$$\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\ldots\leqslant\|x\|_n\leqslant\ldots,\quad x\in E.$$

De lo demostrado en el punto 5 del § 1 se deduce que el espacio E^*, dual a E, se representa en forma de la unión

$$E^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^*$$

de una cadena creciente $E_1^*\subset E_2^*\subset\ldots\subset E_n^*\subset\ldots$ de espacios normados E_n^* (en otras palabras, E_n^* es el conjunto de todas las funcionales lineales sobre E continuas respecto a la norma $\|\cdot\|_n$). De esta forma, si se conocen los espacios E_n^*, se conoce también el espacio E^* (en el sentido de que se conocen los elementos que lo componen y las operaciones lineales en él). En cuanto a la topología de E^*, ésta se puede introducir de diferentes modos; algunos de ellos serán examinados en lo sucesivo. Señalemos además que con frecuencia resulta cómodo considerar el espacio E_n^* como el dual a la completación del espacio E respecto a la norma $\|\cdot\|_n$; esto es posible en virtud de la observación que hemos hecho después de la demostración del teorema 1.

Ejemplo. Sea Φ un espacio real de Hilbert numerable compuesto por todas las sucesiones $x=\{x_n\}$ tales que

$$\|x\|_k=\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^kx_n^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,\quad k=1,\ 2,\ \ldots;$$

los productos escalares en Φ vienen dados por

$$(x,\ y)_k=\sum_{n=1}^{\infty}n^kx_ny_n,\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

El espacio Φ con el producto escalar $(\cdot,\ \cdot)_k$ es un espacio euclídeo; sea Φ_k su completación. Es fácil ver que Φ_k se puede identificar con el espacio de Hilbert de todas las sucesiones $x=\{x_n\}$ tales que $\|x\|_k<\infty$. De acuerdo con el teorema 2, el espacio Φ_k^*, dual al espacio Φ_k, es isomorfo al espacio Φ_k; este isomorfismo consiste en que a cada funcional lineal continua $f\in\Phi_k^*$ se pone en correspondencia una sucesión $\bar{f}=\{f_n\}$ tal que

$$\|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k|f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

$$f(x)=(x,\ \bar{f})_k=\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n f_n,\ x=\{x_n\}\in\Phi_k,$$

y, viceversa, cada sucesión de este tipo determina un elemento de Φ_k^*. Definamos ahora la funcional $f\in\Phi_k^*$ no mediante la sucesión $\{f_n\}$ sino a partir de la sucesión $\{g_n\}$, donde $g_n=n^kf_n$. Entonces,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n \text{ y } \|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}g_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por consiguiente, Φ_k^* se puede identificar con el espacio de Hilbert de las sucesiones $\{g_n\}$, que verifican la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}g_n^2<\infty,$$

y con el producto escalar

$$(g^{(1)},\ g^{(2)})=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}g_n^{(1)}g_n^{(2)}.$$

Como $\Phi^*=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Phi_k^*$, Φ^* es el espacio de todas las sucesiones $\{g_n\}$ que satisfacen la condición: existe un número entero positivo k tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}g_n^2<\infty.$$

Además, cada una de estas funcionales toma en el elemento $x=\{x_n\}\in\Phi$ un valor determinado igual a $\sum_{n=1}^{\infty} x_ng_n$. Es decir, si el espacio Φ es la intersección de una cadena decreciente de espacios de Hilbert

$$\Phi=\bigcap\Phi_k,\ \Phi_1\supset\Phi_2\supset\ldots\supset\Phi_k\supset\ldots,$$

el espacio Φ^* es la unión de una cadena creciente de espacios de Hilbert

$$\Phi^* = \bigcup \Phi_k^*, \quad \Phi_1^* \subset \Phi_2^* \subset \ldots \subset \Phi_k^* \subset \ldots$$

Conviene introducir la denotación $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$. Si además denotamos l_2 mediante Φ_0, obtenemos la siguiente cadena infinita en ambos sentidos de espacios de Hilbert

$$\ldots \subset \Phi_k \subset \ldots \subset \Phi_1 \subset \Phi_0 \subset \Phi_{-1} \subset \ldots \subset \Phi_{-k} \subset \ldots,$$

donde $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$ para cada $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5°. Topología en el espacio dual. Siendo E un espacio normado, hemos definido una vecindad del cero en E^* como el conjunto de funcionales que verifican la condición

$$\|f\| < \varepsilon.$$

En otras palabras, se toma por sistema de vecindades del cero en el espacio E^*, dual a un espacio normado, el conjunto de funcionales tales que $|f(x)| < \varepsilon$, cuando x recorre la bola unitaria $\|x\| \leqslant 1$ del espacio E. En el caso en que E no es un espacio normado, sino un espacio topológico lineal, es natural, para definir la topología en E^*, considerar en E en lugar de una bola unitaria un conjunto arbitrario acotado A y definir una vecindad del cero en E^* como el conjunto de funcionales lineales que verifican la condición

$$|f(x)| < \varepsilon \text{ para todos los } x \in A.$$

De esta forma en E^* queda determinado el conjunto de vecindades del cero, cada una de las cuales se define mediante un número positivo ε y un conjunto acotado $A \subset E$. No vamos a comprobar aquí, aunque no es difícil de hacerlo, que el sistema de vecindades, definido de esta manera, satisface efectivamente las condiciones que debe verificar un sistema de conjuntos para que pueda ser tomado por un sistema determinante de vecindades del cero en un espacio topológico lineal.

Está claro que si el espacio E es normado, la topología de E^*, que acabamos de describir, coincide con la que se define en E^* mediante la norma. La topología descrita del espacio, dual a un espacio topológico lineal (a un espacio normado, en particular), se llamará topología *fuerte* en E^* (a diferencia de la topología débil de E^* de la cual hablaremos en el § 3).

Subrayemos que *la topología fuerte del espacio E^* es necesariamente separable y localmente convexa* (independientemente de la topología que tiene E). En efecto, si $f_0 \in E^*$ y $f_0 \neq 0$, existe un elemento $x_0 \in E$ tal que $f_0(x_0) \neq 0$, pongamos $\varepsilon = \frac{1}{2}|f_0(x_0)|$ y

$A = \{x_0\}$; entonces, está claro que $f_0 \overline{\in} U_{\varepsilon, A}$, es decir, que E^* es separable. Para demostrar la convexidad local de la topología fuerte de E^*, es suficiente observar que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier conjunto acotado $A \subset E$ la vecindad $U_{\varepsilon, A}$ es un conjunto convexo en E^*. Denotaremos la topología fuerte de E^* mediante el símbolo b; si es preciso señalar que E^* se considera con la topología fuerte, escribiremos a veces (E^*, b) (en lugar de E^*).

6°. Segundo espacio dual. Puesto que las funcionales lineales continuas sobre un espacio topológico lineal E forman por sí mismas un espacio topológico lineal (el espacio (E^*, b) dual a E), se puede hablar del espacio E^{**} de funcionales lineales continuas sobre E^*, es decir, del *segundo espacio dual* a E, etc.

Señalemos que todo elemento x_0 de E define en E^* una funcional lineal. En efecto, tomemos

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0), \tag{4}$$

donde x_0 es un elemento fijo de E, mientras que f recorre todo el E^*. La igualdad (4) pone en correspondencia a cada f un número $\psi_{x_0}(f)$, esto es, define una funcional sobre E^*. Como además

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha\psi_{x_0}(f_1) + \beta\psi_{x_0}(f_2),$$

esta funcional es lineal.

Es más, toda funcional de este tipo es continua sobre E^*. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sea A un conjunto acotado de E que contiene x_0. Consideremos en E^* la vecindad $U(\varepsilon, A)$ del cero. De acuerdo con la definición de $U(\varepsilon, A)$, tenemos

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad f \in U(\varepsilon, A)$$

Pero esto significa que la funcional ψ_{x_0} es continua en el punto 0 y, por consiguiente, en todo el espacio E^*.

Hemos obtenido de esta forma una aplicación de todo el espacio E en un subconjunto del espacio E^{**}. Esta aplicación es, evidentemente, lineal. Si sobre E existe un número suficientemente grande de funcionales lineales (por ejemplo, si E es normado o localmente convexo y separable), esta aplicación resulta biunívoca, ya que para cualesquiera dos diferentes x', $x'' \in E$ existe una funcional $f \in E^*$ tal que $f(x') \neq f(x'')$, es decir, $\psi_{x'}$ y $\psi_{x''}$ son diferentes funcionales sobre E^*. Esta aplicación de E en E^{**} se llama *aplicación natural del espacio E en el segundo espacio dual*. Denotémosla con π. Si $\pi(E) = E^{**}$, el espacio E (separable y localmente convexo) se llama *semirreflexivo*. En el espacio E^{**} (considerado como dual a (E^*, b)) se puede introducir la topología fuerte que denotaremos con b^*; esta topología induce en el espacio E la topología $\pi^{-1}(b^*)$ (tal que un conjunto $Q \subset E$ se considera abierto si su imagen $\pi(Q)$ es la intersección de $\pi(E)$ con un subconjunto abierto del espacio (E^{**}, b^*)). Se puede demostrar que la topología $\pi^{-1}(b^*)$ es no más débil que la topología inicial del espacio E (es decir, que todo conjunto abierto en esta topología inicial es también abierto en la topología $\pi^{-1}(b^*)$); esto significa que la aplicación π^{-1}, que transforma $\pi(E)$ en E, es continua. Siendo el espacio E semirreflexivo y la aplicación π: $E \longrightarrow E^{**}$ continua, se dice que E es un espacio *reflexivo*. De lo expuesto se deduce: si E es reflexivo, la aplicación natural $\pi: E \longrightarrow E^{**}$ representa un isomorfismo entre los espacios topológicos lineales E y $E^{**} = (E^{**}, b^*)$ (es decir, es biunívoca y bicontinua).

Puesto que podemos ahora considerar todo elemento de E también como un elemento del espacio E^{**}, conviene para los valores de la funcional lineal $f \in E^*$ emplear, en lugar de la denotación $f(x)$, una denotación más simétrica

$$f(x) = (f, x). \tag{5}$$

Siendo fijo $f \in E^*$, podemos considerar (f, x) como una funcional sobre E, y siendo fijo x, como una funcional sobre E^* (y en este caso x aparece ya como un elemento de E^{**}).

Si E es un espacio normado (y, por consiguiente, son también normados los espacios E^*, E^{**}, etc.), *la aplicación natural del espacio E en E^{**} es una isometría.*

En efecto, sea x un elemento de E. Designemos mediante $\|x\|$ su norma en E y mediante $\|x\|_2$ la norma de su imagen en E^{**}. Demostremos que $\|x\| = \|x\|_2$. Sea f un elemento arbitrario de E^*. Entonces,

$$|(f, x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|, \quad \text{es decir,} \quad \|x\| \geqslant \frac{|(f, x)|}{|f|},$$

y, puesto que el miembro izquierdo de la última desigualdad no depende de f,

$$\|x\| \geqslant \sup \frac{|(f, x)|}{\|f\|} = \|x\|_2.$$

Por otro lado, según el teorema de Hahn—Banach, para todo $x_0 \in E$ existe una funcional lineal f_0 tal que

$$|(f_0, x_0)| = \|f_0\| \cdot \|x_0\| \tag{6}$$

(para construir esta funcional es suficiente tomar $f_0(x) = \alpha$ para los elementos de tipo $x = \alpha x_0$ y extender después esta funcional, conservando su norma, a todo el E). De (6) se desprende que

$$\|x\|_2 = \sup_{f \in E^*} \frac{|(f, x)|}{\|f\|} \geqslant \|x\|,$$

es decir, $\|x\| = \|x\|_2$, que es lo que queríamos demostrar. Por consiguiente, el espacio normado E es isométrico a la variedad lineal (en general, no cerrada) $\pi(E)$ de E^{**}; identificando E con $\pi(E)$, podemos aceptar que $E \tilde{\subset} E^{**}$.

Puesto que para los espacios normados la aplicación natural $\pi: E \longrightarrow E^{**}$ es isométrica, resulta que los conceptos de semirreflexividad y reflexividad coinciden en el caso de espacios normados.

Como el espacio, dual a un espacio normado, es completo, todo espacio normado reflexivo E es completo.

Los espacios euclídeos de dimensión finita y el espacio de Hilbert representan los ejemplos más sencillos de espacios reflexivos (para ellos se tiene incluso que $E = E^*$).

El espacio c_0 de sucesiones convergentes a cero ofrece un ejemplo de un espacio no reflexivo completo. En efecto, como hemos demostrado anteriormente (ejemplo 2 del § 2), el espacio dual a c_0 es el espacio l_1 de todas las series numéricas absolutamente convergentes y el dual de este último coincide con el espacio m de todas las sucesiones acotadas.

El espacio $C_{[a, b]}$ de funciones continuas sobre un segmento $[a, b]$ es también no reflexivo. Sin embargo, no daremos aquí la demostración de esta proposición[1].

Como ejemplo de un espacio reflexivo, que no coincide con su dual, puede servir el espacio l_p para $1 < p \neq 2$ (puesto que $l_p^* = l_q$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tenemos $l_p^{**} = l_q^* = l_p$).

EJERCICIO. Demuéstrese que un subespacio cerrado de un espacio reflexivo es también reflexivo.

§ 3. TOPOLOGIA DEBIL Y CONVERGENCIA DEBIL

1°. Topología débil en un espacio topológico lineal. Consideremos un espacio topológico lineal E y el conjunto de todas las funcionales continuas sobre él. Si $f_1, \ldots, f_n$ es un sistema finito arbitrario de estas funcionales y ε es un número positivo, el conjunto

$$\{x: |f_i(x)| < \varepsilon; \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{1}$$

[1] *Se* puede demostrar incluso una proposición más fuerte: no existe *ningún* espacio normado para el cual $C_{[a, b]}$ sea el espacio dual.

es abierto en E y contiene el punto 0, esto es, representa una vecindad del cero. La intersección de dos vecindades de este tipo siempre contiene un conjunto de tipo (1) y, por consiguiente, en E se puede introducir una topología para la cual la totalidad de los conjuntos de tipo (1) constituirá el sistema determinante de vecindades del cero. Ella se denomina *topología débil* del espacio E. En otras palabras, la topología débil en E es la topología más débil de este espacio lineal respecto a la cual son continuas todas las funcionales lineales que son continuas respecto a la topología inicial de este espacio.

Está claro que todo conjunto de E abierto en el sentido de la topología débil es también abierto en la topología inicial del espacio E, pero la recíproca no es, en general, válida (los conjuntos de tipo (1) no forman necesariamente un sistema determinante de vecindades del cero en la topología inicial). De acuerdo con la terminología, aceptada en el § 5 del cap. II, esto significa que la topología débil del espacio E es más débil que la topología inicial. Esto justifica su denominación.

Si en E existe un número suficientemente grande de funcionales lineales continuas (por ejemplo, si E es normado), la topología débil de E verifica el axioma de separabilidad de Hausdorff. Es fácil comprobar asimismo que las operaciones de adición y multiplicación por números, definidas en E, son continuas respecto a la topología débil de este espacio.

2°. Convergencia débil. Incluso en el caso de espacios normados, la topología débil de E puede no satisfacer el primer axioma de numerabilidad. Por consiguiente, esta topología no puede describirse, en general, en términos de sucesiones convergentes. No obstante, la convergencia en E determinada por esta topología representa un concepto importante. Se llama *convergencia débil*. A diferencia de ésta, la convergencia definida por la topología inicial del espacio E (por la norma, si E es normado) se llama *convergencia fuerte*.

Es obvio que el concepto de convergencia débil se puede enunciar de la siguiente manera: la sucesión $\{x_n\}$ de elementos de E se llama *débilmente convergente* a $x_0 \in E$, cuando para cualquier funcional $\varphi(x)$ lineal continua sobre E la sucesión numérica $\{\varphi(x_n)\}$ converge a $\varphi(x_0)$. En efecto, admitiendo, para simplificar, que $x_0=0$, supongamos que $\varphi(x_n) \to 0$ para toda $\varphi \in E^*$. Entonces, cualquiera que sea la vecindad débil

$$U=\{x:|\varphi_i(x)|<\varepsilon, \quad i=1, 2, \ldots, k\}$$

del punto 0, existe un N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geqslant N$ (para ello es suficiente escoger N_i de manera que $|\varphi_i(x_n)|<\varepsilon$, cuando

$n \geq N_i$, y tomar después $N = \max N_i$). Viceversa, si para cada vecindad U del cero existe un N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$, la condición $\varphi(x_n) \to 0$ para $n \to \infty$ se cumple, evidentemente, para cada funcional fija $\varphi \in E^*$.

Consideremos más detalladamente el concepto de convergencia débil en el caso de espacios normados.

TEOREMA 1. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión débilmente convergente en un espacio normado, existe una constante C tal que*

$$\|x_n\| \leq C.$$

En otras palabras, *toda sucesión débilmente convergente de un espacio normado es acotada.*

DEMOSTRACION. Siendo la sucesión $\{x_n\}$ no acotada, cualquiera que sea la bola cerrada $S[f_0, \varepsilon] = \{f : \|f - f_0\| \leq \varepsilon\}$ de E^*, el conjunto numérico

$$\{(f, x_n)\},$$

donde $n = 1, 2, \ldots$ y f recorre esta bola, no es acotado. En efecto, si la sucesión $\{x_n\}$ es acotada sobre la bola $S[f_0, \varepsilon]$ es también acotada sobre la bola $S[0, \varepsilon] = \{g : \|g\| \leq \varepsilon\}$, ya que siendo $g \in S[0, \varepsilon]$, tenemos $f_0 + g \in S[f_0, \varepsilon]$ y $(g, x_n) = (f_0 + g, x_n) - (f_0, x_n)$ y los números (f_0, x_n) son acotados debido a la convergencia débil de la sucesión $\{x_n\}$. Pero si $|(g, x_n)| \leq C$ para todo $g \in S[0, \varepsilon]$, tenemos, debido a que la aplicación natural de E en E^* es isométrica,

$$\|x_n\| \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

esto es, las normas $\|x_n\|$ están acotadas en su conjunto. Por consiguiente, si la sucesión $\{x_n\}$ es no acotada, tampoco será acotada sobre cualquier bola de E^*. Tomemos una bola $B_0 \subset E^*$. Existen un número n_1 y un elemento $f \in B_0$ tales que $|(f, x_{n_1})| > 1$. Puesto que (f, x) depende continuamente de f, la desigualdad $|(f, x_{n_1})| > 1$ se verificará para todos los f pertenecientes a una bola cerrada $B_1 \subset B_0$. Razonando de la misma manera, encontraremos en B_1 una bola cerrada B_2 y un número n_2 tales que para todo $f \in B_2$ se cumple la desigualdad $|(f, x_{n_2})| > 2$, etc.; en general, para cada k encontraremos un número n_k y una bola $B_k \subset B_{k-1}$ tales que

$$|(f, x_{n_k})| > k \text{ para } f \in B_k.$$

Se puede admitir, además, que los radios de las bolas B_k tienden a cero cuando $k \to \infty$. Puesto que el espacio E^* es completo, existe un elemento $\bar{f}$ perteneciente a todas las bolas B_k (¡principio de bolas encajadas!). Pero en tal caso

$$|(\tilde{f}, x_{n_k})| > k$$

para todo k y esto contradice a la convergencia débil de la sucesión $\{x_n\}$.

Observación. Al demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es acotada respecto a la norma nos hemos valido solamente de que la sucesión numérica (f, x_n) es acotada para todo $f \in E^*$. Por eso, si la sucesión $\{x_n\}$ de E es tal que la sucesión numérica (f, x_n) es acotada para toda $f \in E^*$, existe una constante C tal que $\|x_n\| \leqslant C$. Este resultado admite la siguiente generalización: *todo subconjunto débilmente acotado* (esto es, acotado en la topología débil) *Q de un espacio normado E es fuertemente acotado (es decir, está contenido en una bola).* En efecto, supongamos que existe una sucesión $\{x_n\} \subset Q$ tal que $\|x_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$. Como Q es débilmente acotado, el conjunto $\{x_n\}$ también es débilmente acotado, es decir, es absorbido por cualquier vecindad débil del cero; en particular, para cualquier $f \in E^*$ existe un N tal que $\{x_n\} \subset N\,\{x: |(f, x)| < 1\}$, de donde se sigue que $|(f, x_n)| < N$ para todo n. Pero esto, de acuerdo con la observación hecha anteriormente, contradice a que $\|x_n\| \to \infty$. Si tenemos en cuenta que la acotación débil de un conjunto Q significa que cualquier funcional lineal continua sobre él es acotada, llegamos al siguiente resultado importante: *para que un subconjunto Q de un espacio normado sea acotado es necesario y suficiente que cualquier funcional $f \in E^*$ sea acotada sobre Q.*

El teorema que sigue permite frecuentemente determinar la convergencia débil de una u otra sucesión.

TEOREMA 2. *La sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio normado E converge débilmente al elemento $x \in E$, si*

1) $\|x_n\|$ están acotadas en su conjunto por una constante M;

2) $f(x_n) \to f(x)$ para toda $f \in \Delta$, donde Δ es un conjunto cuya cápsula lineal es siempre densa en E^*.

DEMOSTRACION. Se desprende de las condiciones del teorema y de la definición de una funcional lineal que si φ es una combinación lineal de elementos de Δ, entonces,

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x).$$

Sea ahora φ un elemento arbitrario de E y sea $\{\varphi_k\}$ una sucesión de combinaciones lineales de elementos de Δ convergente a φ. Demostremos que $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Sea M tal que

$$\|x_n\| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ y } \|x\| \leqslant M.$$

Estimemos la diferencia $|\varphi(x_n)| - \varphi(x)$. Como $\varphi_k \to \varphi$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un K tal que $\|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon$ para todos los $k \geqslant K$. Por eso,

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leqslant |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + \\ + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon M + \\ + \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)|.$$

Pero, $\varphi_k(x_n) \longrightarrow \varphi_k(x)$ para $n \longrightarrow \infty$, por hipótesis. Luego, $\varphi(x_n) - \varphi(x) \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, para cualquier $\varphi \in E^*$.

Ejemplos. Veamos el sentido que tiene el concepto de convergencia débil en algunos espacios concretos.

1. *En el espacio euclídeo de dimensión finita* R^n la convergencia débil coincide con la fuerte. En efecto, sea $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormal de R^n y sea $\{x_k\}$ una sucesión de R^n convergente débilmente al elemento x. Entonces,

$$(x_k, e_i) = x_k^i \longrightarrow (x, e_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

es decir, las primeras coordenadas de los vectores x_k tienden a la primera coordenada del vector límite x, sus segundas coordenadas convergen a la segunda coordenada del vector x, etc. Pero entonces,

$$\rho(x_k, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0,$$

es decir, $\{x_n\}$ converge fuertemente a x. Puesto que la convergencia fuerte implica la débil, queda demostrada la equivalencia en R^n de estas convergencias.

2. *Convergencia débil en* l_2. Para que la sucesión acotada $\{x^{(k)}\}$ converja débilmente a x, es suficiente que se cumplan las condiciones

$$(x^{(k)}, e_i) = x_k^i \longrightarrow x^i = (x, e_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

donde

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

En efecto, las combinaciones lineales de los elementos e_i son siempre densas en el espacio l_2 (que coincide, como hemos visto, con su dual). Por eso nuestra proposición se desprende del teorema 2.

Por consiguiente, la convergencia débil de una sucesión acotada $\{x^{(k)}\}$ de l_2 significa que la sucesión numérica de las coordenadas x_k^i de estos vectores converge para cada $k = 1, 2, \ldots$ No es difícil ver que la convergencia débil de l_2 no coincide con la fuerte. En efecto, demostremos que la sucesión $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ converge débilmente al 0 en l_2. Toda funcional lineal

f en l_2 puede ser representada como el producto escalar $f(x)=(x, a)$ del vector $x \in l_2$ por un vector fijo $a=(a_1, a_2, \ldots)$. Por eso,

$$f(e_n)=a_n,$$

y como $a_n \longrightarrow 0$ para $n \longrightarrow \infty$ cualquiera que sea $a \in l_2$, obtenemos

$$\lim f(e_n)=0$$

para cada funcional lineal en l_2.

Al mismo tiempo, la sucesión $\{e_n\}$ no converge, en el sentido fuerte, a ningún límite.

EJERCICIOS. 1. Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio de Hilbert H converge débilmente al elemento $x \in H$ de manera que $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ para $n \longrightarrow \infty$. Demuéstrese que en este caso la sucesión $\{x_n\}$ converge fuertemente a x, es decir $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

1. Demuéstrese que la proposición del ejercicio 1 sigue siendo válida si se sustituye la condición $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ por la condición $\|x_n\| \leqslant \|x\|$ para todo n o por la condición $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \|x_n\| \leqslant \|x\|$.

3. Sea H un espacio (separable) de Hilbert y sea Q un subconjunto suyo acotado. Entonces, la topología en Q inducida por la topología débil del espacio H se puede definir mediante una métrica.

4. Demuéstrese que todo subconjunto cerrado convexo de un espacio de Hilbert es cerrado respecto a la topología débil (en particular, todo subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert es débilmente cerrado). Dése un ejemplo de un conjunto cerrado de un espacio de Hilbert que no sea débilmente cerrado.

3. *Convergencia débil en el espacio $C_{[a, b]}$ de funciones continuas.* Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión acotada de funciones de $C_{[a, b]}$ convergente débilmente a la función $x(t)$. Entre las funcionales definidas sobre $C_{[a, b]}$ se encuentran, en particular, las funcionales δ_{t_0} cada una de las cuales representa el valor de la función en un punto fijo t_0 (véase el ejemplo 4 del punto 3 del § 1). Para cada una de estas funcionales δ_{t_0} la condición

$$\delta_{t_0} x_n(t) \longrightarrow \delta_{t_0} x(t)$$

significa que

$$x_n(t_0) \longrightarrow x(t_0).$$

Por consiguiente, si la sucesión $\{x_n(t)\}$ converge débilmente, ella

1) es equiacotada, esto es, $|x_n(t)| \leqslant C$ para todo $n=1, 2, \ldots$ y cualquier $a \leqslant t \leqslant b$;

2) converge en cada punto.

Se puede demostrar que el conjunto de estas dos condiciones no es sólo necesario sino también suficiente para la convergencia débil de la sucesión $\{x_n(t)\}$ en $C_{[a, b]}$.

Está claro que esta convergencia no coincide con la convergencia respecto a la norma de $C_{[a, b]}$, es decir, con la convergencia uniforme de las funciones continuas. (Dése un ejemplo correspondiente.)

3°. Topología débil y convergencia débil en el espacio dual. En el punto 4 del parágrafo anterior hemos introducido en el espacio dual E^* la topología que hemos llamado fuerte y que se define de la siguiente manera: como sistema de vecindades del cero se toma la totalidad de los conjuntos de tipo

$$\{f : |f(x)| < \varepsilon, \ x \in A\},$$

donde A es un conjunto acotado cualquiera de E y ε es un número positivo arbitrario. Si ahora consideramos en lugar de conjuntos acotados todos los subconjuntos finitos $A \subset E$, obtendremos la así llamada *topología débil en el espacio dual* E^*. Como todo conjunto finito $A \subset E$ es acotado (pero no viceversa, en general), está claro que la topología débil del espacio E^* es más débil que la topología fuerte de este espacio. En general, estas dos topologías no coinciden.

La topología débil, introducida en E^*, define en este espacio una convergencia que se llama *convergencia débil de funcionales.* La convergencia débil de funcionales lineales representa un concepto importante que desempeña un papel esencial en diversas cuestiones del Análisis Funcional, en particular en la teoría de las así llamadas funciones generalizadas, de las cuales hablaremos en el parágrafo siguiente.

La convergencia débil de la sucesión $\{\varphi_n\}$ de funcionales lineales significa, evidentemente, la convergencia de esta sucesión en todo elemento fijo de E. En otras palabras, la sucesión $\{\varphi_n\}$ se llama débilmente convergente a $\varphi \in E^*$, cuando para cada $x \in E$ se cumple la relación

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x).$$

Sea E (y, por consiguiente, E^*) un espacio de Banach. Tiene lugar el siguiente teorema análogo al teorema 1.

TEOREMA 1*. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión débilmente convergente de funcionales lineales sobre un espacio de Banach, existe un número constante C tal que*

$$\|f_n\| \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots$$

En otras palabras, toda sucesion débilmente convergente de elementos del espacio, dual a un espacio de Banach, es acotada respecto a la norma.

La demostración de este teorema no difiere en nada de la demostracion del teorema 1.

El siguiente teorema es completamente análogo al teorema 2.

TEOREMA 2*. *Una sucesión de funcionales lineales* $\{\varphi_n\}$ *de* E^* *converge débilmente a* $\varphi \in E^*$, *cuando*

1) *esta sucesión es acotada*, esto es
$$\|\varphi_n\| \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots;$$
2) *la relación* $(\varphi_n, x) \to (\varphi, x)$ *se cumple para todos los* x, *pertenecientes a un conjunto tal que las combinaciones lineales de sus elementos son siempre densas en* E.

La demostración es la misma que para el teorema 2.

Veamos un e j e m p l o. Sea E el espacio $C_{[a,\, b]}$ de funciones continuas y sea[1]
$$\varphi(x) = x(0),$$
es decir, sea φ la δ-función (véase el § 1, ejemplo 4). Sea, además, $\{\varphi_n(t)\}$ una sucesión de funciones continuas que verifican las siguientes condiciones:

1) $\varphi_n(t) = 0$ para $|t| > \frac{1}{n}$, $\varphi_n(t) \geqslant 0$ para $|t| \leqslant \frac{1}{n}$;

2) $\int\limits_a^b \varphi_n(t)\, dt = 1$.

Entonces, para cualquier función $x(t)$ continua sobre $[a, b]$, tenemos, empleando el teorema del valor medio,
$$\int\limits_a^b \varphi_n(t)\, x(t)\, dt = \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\, x(t)\, dt \to x(0) \text{ para } n \to \infty.$$
La expresión
$$\int\limits_a^b \varphi_n(t)\, x(t)\, dt$$
representa una funcional lineal sobre $C_{[a,\, b]}$. De esta forma la δ-función se puede representar como límite, en el sentido de convergencia débil de funcionales lineales sobre $C_{[a,\, b]}$, de una sucesión de funciones «corrientes».

Observación. El espacio E^* de las funcionales lineales sobre un espacio E se puede considerar desde dos puntos de vista: como espacio dual al espacio inicial E o como espacio principal E^*, relacionando con él su espacio dual E^{**}. De acuerdo

[1] Consideramos que $0 \in [a, b]$. Se podría, claro está, tomar en lugar del punto $t = 0$ otro punto cualquiera.

con esto, la topología débil puede introducirse en E^* de dos modos: o bien como en el espacio de funcionales, definiendo las vecindades en E^* mediante todos los sistemas finitos de elementos de E, o bien como en el espacio principal mediante el espacio E^{**}. En el caso de un espacio reflexivo esto, por supuesto, es lo mismo. En cambio, si E no es reflexivo, éstas serán dos topologías diferentes en E^*. Para evitar la confusión que puede surgir aquí, la topología débil definida en el espacio principal (esto es, la topología en E^*, definida mediante E^{**}) se llamará *topología débil*, mientras que la topología débil del espacio de las funcionales (esto es, la topología en E^*, definida mediante E) se llamará *topología* $*$-débil. Es evidente que la topología $*$-débil en E^* es más débil que la topología débil del espacio E^* (es decir, la topología débil tiene no menos conjuntos abiertos que la topología $*$-débil).

4°. Topología $*$-débil en conjuntos acotados. En diferentes aplicaciones del concepto de convergencia débil de funcionales lineales desempeña un papel importante el siguiente teorema.

TEOREMA 3. *Si E es un espacio normado lineal separable, cualquier sucesión acotada de funcionales lineales continuas sobre E contiene una subsucesión débilmente convergente.*

DEMOSTRACION. Escojamos en E un conjunto numerable siempre denso $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión acotada (respecto a la norma) de funcionales lineales sobre E, la sucesión numérica

$$\varphi_1(x_1),\ \varphi_2(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n(x_1),\ \ldots$$

es acotada. Por eso, se puede extraer de $\{\varphi_n\}$ una subsucesión

$$\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)},\ \ldots,$$

de manera que la sucesión numérica

$$\varphi_1^{(1)}(x_1),\ \varphi_2^{(1)}(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)}(x_1),\ \ldots$$

converja. Asimismo se puede extraer de la subsucesión $\{\varphi_n^{(1)}\}$ una subsucesión

$$\varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)},\ \ldots,$$

de manera que converja la sucesión

$$\varphi_1^{(2)}(x_2),\ \varphi_2^{(2)}(x_2),\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)}(x_2),\ \ldots$$

Continuando este proceso, obtendremos un sistema de sucesiones

$$\begin{array}{l}\varphi_1^{(1)},\ \varphi_2^{(1)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(1)},\ \ldots,\\ \varphi_1^{(2)},\ \varphi_2^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(2)},\ \ldots,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{array}$$

(donde cada una es subsucesion de la anterior), tal que $\{\varphi_n^{(k)}\}$ converge en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Entonces, tomando la subsucesión «diagonal»

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(2)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}, \ldots,$$

obtendremos una sucesión de funcionales lineales tal que

$$\varphi_1^{(1)}(x_n), \ \varphi_2^{(2)}(x_n), \ \ldots$$

converge para todos los n. Pero esto significa (en virtud del teorema 2*) que la sucesión $\varphi_1^{(1)}(x), \varphi_2^{(2)}(x), \ldots$ converge también para todo $x \in E$. El teorema queda demostrado.

Este teorema, junto con el teorema 1*, indica que en el espacio E^*, dual a un espacio separable de Banach, los subconjuntos acotados, y sólo ellos, son relativamente numerables compactos en la topología $*$-débil. Probemos que, de hecho, tiene lugar aquí la compacidad y no sólo la compacidad numerable.

Demostremos, ante todo, el siguiente teorema.

TEOREMA 4. *La topología inducida en la bola cerrada unitaria S del espacio E^*, dual a un espacio normado separable E, por la topología $*$-débil de este espacio se puede definir mediante la métrica*

$$\rho(f, g) = \sum 2^{-n} |(f-g, x_n)|,$$

donde $\{x_n\}$ es un conjunto fijo numerable y siempre denso en la bola unitaria del espacio E.

DEMOSTRACION. Está claro, que la función $\rho(f, g)$ tiene todas las propiedades de la distancia; además, es invariante respecto a las traslaciones:

$$\rho(f+h, \ g+h) = \rho(f, g).$$

Por eso, basta comprobar que a) cualquier «bola»

$$Q_\varepsilon = \{f : \rho(f, 0) < \varepsilon\}$$

contiene una intersección de S con alguna vecindad débil del cero en E^* y que b) toda vecindad débil del cero en E^* contiene una intersección de S con alguna Q_ε.

Escojamos N de manera que $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$ y consideremos la vecindad débil del cero

$$V = V_{x_1, \ldots, x_N; \, \varepsilon/2} = \left\{f : |(f, x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ k = 1, 2, \ldots, N\right\}.$$

Entonces, si $f \in S \cap V$, tenemos

$$\rho(f, 0) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |(f, x_n)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |(f, x_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon,$$

es decir, $S \cap V \subset Q_\varepsilon$. Con esto queda demostrada la proposición a). Demostremos la proposición b). Sea

$$U = U_{y_1, \ldots, y_m;\, \delta} = \{f : |(f, y_k)| < \delta,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$$

una vecindad $*$-débil del cero en E^*. Podemos admitir que $\| y_k \| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$; puesto que el conjunto $\{x_n\}$ es siempre denso en S, existen unos números $n_1, \ldots, n_m$ tales que $\| y_k - x_{n_k} \| < \frac{\delta}{2}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Sea $N = \max(n_1, \ldots, n_m)$ y sea $\varepsilon = 2^{-(N+1)}\delta$. Entonces, para $f \in S \cap Q_\varepsilon$ de la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |(f, x_n)| < \varepsilon$$

obtenemos que $|(f, x_n)| < 2^n \varepsilon$; en particular,

$$|(f, x_{n_k})| < 2^{n_k} \varepsilon \leqslant 2^N \varepsilon = \frac{\delta}{2}.$$

Por consiguiente, para todo $k = 1, 2, \ldots, m$ tenemos

$$|(f, y_k)| \leqslant |(f, x_{n_k})| + |(f, y_k - x_{n_k})| < \frac{\delta}{2} + \| f \| \cdot \| y_k - x_{n_k} \| < \delta.$$

Es decir, $S \subset Q_\varepsilon \subset U$. El teorema queda demostrado. Está claro, que este resultado se extiende automáticamente a cualquier bola y, por consiguiente, a cualquier subconjunto acotado $M \subset E^*$.

Hemos demostrado (teorema 3) que de toda sucesión acotada de E^* se puede extraer una subsucesion $*$-débilmente convergente. En otras palabras, en el espacio E^*, dual a un espacio normado lineal separable y provisto de la topología $*$-débil, todo subconjunto acotado M es relativamente numerable compacto. Pero, de acuerdo con el último teorema, cada conjunto de este tipo es un espacio topológico metrizable y en el caso de espacios métricos la compacidad y la compacidad numerable coinciden. Por consiguiente, obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 3*. *Todo conjunto acotado M del espacio E^*, dual a un espacio de Banach separable, es relativamente compacto en el sentido de la topología $*$-débil del espacio E^*.*

Si E es un espacio normado lineal separable, toda bola cerrada del espacio (E^*, b) es cerrada en la topología $*$-débil del espacio E^*.

Como una traslación en el espacio E^* transforma toda colección de conjuntos cerrados (en la topología $*$-débil) en sí misma, basta demostrar que en la topología $*$-débil es cerrada toda bola de tipo $S_c = \{f : \|f\| \leqslant c\}$. Sea $f_0 \overline{\in} S_c$. Según la definición de la norma de una funcional, existe un vector $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$, $f_0(x) = \alpha > c$. Entonces, el conjunto $u_f = \left\{f : f(x) > \frac{\alpha + c}{2}\right\}$ es una vecindad $*$-débil de la funcional f_0 que no contiene ningún elemento de la bola S_c; por consiguiente, la bola S_c es cerrada en la topología $*$-débil.

De la proposición demostrada y del teorema 3* se deduce el siguiente teorema.

TEOREMA 5. *Toda bola cerrada del espacio, dual a un espacio normado separable, es compacta en la topología $*$-débil.*

El teorema 3* representa un caso particular del siguiente resultado general: *si E es un espacio topológico lineal localmente convexo, todo subconjunto acotado de E^* es relativamente compacto en el sentido de la topología $*$-débil.*

No daremos aquí la demostración de esta proposición general.

§ 4. FUNCIONES GENERALIZADAS

1°. Ampliación del concepto de función. En diferentes cuestiones del Análisis resulta necesario interpretar el término «función» con diferente grado de generalidad. A veces se consideran funciones continuas, en otros casos es preciso suponer que se trata de funciones diferenciables una o varias veces, etc. Sin embargo, en muchos casos el concepto clásico de función resulta insuficiente, aun cuando sea interpretado en el sentido más general, esto es, como una regla cualquiera que a todo valor de x del campo de definición de esta función pone en correspondencia un número $y = f(x)$. He aquí dos ejemplos importantes.

1) Es cómodo determinar la distribución de masas a lo largo de una recta mediante la densidad de esta distribución. Sin embargo, si la recta tiene puntos que llevan masas positivas, está claro que la densidad de esta distribución no se puede describir de antemano con ninguna función «corriente».

2) Aplicando el aparato del Análisis Matemático a unos u otros problemas, tropezamos con situaciones, cuando no se pueden efectuar unas u otras operaciones del Análisis; por ejemplo, una función que no tenga derivada (en varios o incluso en todos los pun-

tos) no se puede derivar, si por derivada se entiende una función «corriente». Claro está que las dificultades de este orden se podrían evitar limitándose a considerar solamente funciones, digamos, analíticas. Sin embargo, tal restricción del conjunto de funciones admisibles no es, en muchos casos, deseable.

Por suerte, resulta, sin embargo, que estas dificultades y otras semejantes pueden ser superadas con no menos éxito no restringiendo sino ampliando sustancialmente el concepto de función, introduciendo las así llamadas funciones generalizadas. Como base para introducir las definiciones correspondientes, nos servirá el concepto de espacio dual, considerado anteriormente.

Subrayamos una vez más, que la introducción de funciones generalizadas se debió no al deseo de ampliar lo más posible los conceptos del Análisis sino a problemas absolutamente concretos. De hecho, en la Física estos conceptos se empleaban ya desde hace mucho tiempo, en todo caso antes de que atrajeron la atención seria de los matemáticos. Antes de pasar a las definiciones exactas, expongamos la idea principal.

Sea f una función fija definida sobre la recta e integrable en cada intervalo finito y sea φ una función continua que se anula fuera de un intervalo finito (tales funciones se llamarán en lo sucesivo *terminales*). A cada función φ de este tipo se puede poner en correspondencia mediante la función fija f el número

$$(f, \varphi,) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad (1)$$

(debido a la terminalidad de $\varphi(x)$, la integral se toma, de hecho, respecto a un intervalo finito). En otras palabras, la función f se puede considerar como una funcional (lineal, debido a las propiedades principales de la integral) definida sobre un espacio de funciones terminales. Sin embargo, las funcionales de tipo (1) no son las únicas que se pueden definir en este espacio; por ejemplo, haciendo corresponder a cada función φ su valor en el punto $x=0$, obtendremos una funcional lineal que no se puede representar en la forma (1). De manera que las funciones $f(x)$ se incluyen de un modo natural en un conjunto más amplio, el conjunto de todas las funcionales lineales sobre funciones terminales.

El conjunto de funciones φ se puede escoger de diversas maneras; podrían tomarse, por ejemplo, todas las funciones terminales conjuntas. Sin embargo, como veremos más adelante, conviene sujetar las funciones admisibles φ no *sólo* a las condiciones de continuidad terminalidad sino también a unas condiciones suficientemente rígidas de diferenciabilidad.

2°. Espacio de funciones básicas. Pasemos ahora a las definiciones precisas. Consideremos sobre la recta el conjunto K de todas las funciones terminales φ que tienen derivadas continuas de todos los órdenes[1]. Las funciones, pertenecientes a K, constituyen un espacio lineal (con las operaciones habituales de adición de funciones y multiplicación de éstas por números). En este espacio no se puede introducir una norma que sea conveniente desde el punto de vista de la teoría que se expone a continuación; sin embargo, resulta natural definir en él del siguiente modo el concepto de convergencia.

La sucesión $\{\varphi_n\}$ de elementos de K se llama convergente a la función $\varphi \in K$, cuando: 1) existe un intervalo fuera del cual se anulan todas las φ_n; 2) la sucesión $\{\varphi_n^{(k)}\}$ de derivadas de orden[2] k $(k=1, 2, \ldots)$ converge uniformemente en este intervalo a $\varphi^{(k)}$.

El espacio lineal K con la convergencia que hemos definido en él se llamará espacio básico y sus elementos, funciones básicas.

No es difícil describir la topología de K que induce la convergencia definida en K. Esta topología es generada por un sistema de vecindades del cero tal que cada vecindad se determina por un sistema finito $\gamma_0, \ldots, \gamma_m$ de funciones continuas positivas y consta de todas aquellas funciones de K que verifican para todo x las desigualdades

$$|\varphi(x)| < \gamma_0(x), \ \ldots, \ |\varphi^{(m)}(x)| < \gamma_m(x).$$

Dejamos a cargo del lector la demostración de que esta topología genera efectivamente la convergencia en K descrita anteriormente. Señalemos, que en K existen también otras topologías que generan esta convergencia.

EJERCICIO. Sea K_m el subespacio del espacio K compuesto por todas las funciones $\varphi \in K$ que son iguales a 0 fuera del segmento $[-m, m]$. En el espacio K_m se puede definir una estructura de espacio normado numerable, si tomamos

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |x| \leqslant m}} |\varphi^{(k)}(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Compruébese que la topología (convergencia de sucesiones, respectivamente) del espacio K_m generada por este sistema de normas coincide con la topología (convergencia, respectivamente) inducida en K_m por la topología (convergencia) del espacio K descrita anteriormente. Está claro que $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ $\ldots \subset K_m \subset \ldots$ y que $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$. Demuéstrese que un conjunto $Q \subset K$ es acotado respecto a la topología definida en K, cuando, y sólo cuando, existe un m tal que Q es un subconjunto acotado del espacio normado numerable K_m. Sea T una funcional lineal sobre el espacio K; demuéstrese que

---

[1] El intervalo, fuera del cual la función φ es igual a 0, puede ser diferente para distintas $\varphi \in K$.

[2] Por derivada de orden cero se comprende, como de costumbre, la propia función.

las cuatro siguientes condiciones son equivalentes: (a) la funcional T es continua respecto a la topología del espacio K; (b) la funcional T es acotada en todo conjunto acotado $Q \subset K$; (c) si $\varphi_n \in K$ y $\varphi_n \longrightarrow 0$ (en el caso de la convergencia de sucesiones definida en K), $T(\varphi_n) \longrightarrow 0$; (d) para todo m la restricción T_m de la funcional T al subespacio $K_m \subset K$ es una funcional continua sobre K_m.

3°. Funciones generalizadas.

DEFINICION 1. Se llama *función generalizada* (definida en la recta $-\infty < x < \infty$) a toda funcional lineal continua $T(\varphi)$ sobre el espacio básico K. La continuidad de la funcional se entiende aquí en el sentido de que $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ cuando la sucesión φ_n converge a φ en el espacio básico K.

Observemos, ante todo, que toda función $f(x)$ integrable en un intervalo finito cualquiera genera una función generalizada. En efecto, la expresión

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

es una funcional lineal continua en K. Estas funciones generalizadas se llamarán en lo sucesivo *regulares*, mientras que todas las demás, esto es, las que no pueden representarse en la forma (2), se llamarán *singulares*.

Indiquemos algunos ejemplos de funciones generalizadas singulares.

1. «δ-función»:

$$T(\varphi) = \varphi(0).$$

Ella es una funcional lineal en K, es decir, de acuerdo a la terminología convenida más arriba, una función generalizada. Esta funcional se representa generalmente en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

donde por $\delta(x)$ se entiende una «función» que es igual a cero para todo $x \neq 0$ y se convierte en el infinito en el punto $x = 0$ de manera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

En el § 1 hemos considerado ya la δ-función como una funcional en el espacio de todas las funciones continuas definidas en un segmento. Veremos, sin embargo, que la consideración de la δ-función como una funcional sobre K tiene determinadas ventajas.

2. «δ-función desplazada». Sea

$$T(\varphi) = \varphi(a).$$

De acuerdo con la denotación (3), es natural representar esta funcional en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

3. «Derivada de la δ-función». A cada $\varphi \in K$ se pone en correspondencia el número $-\varphi'(0)$. Más adelante explicaremos por qué es natural considerar esta funcional como derivada de la funcional señalada en el ejemplo 1.

4. Consideremos la función $\frac{1}{x}$. Ella no es integrable en ningún intervalo que contenga el punto cero. Sin embargo, para cada $\varphi \in K$ la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\frac{1}{x}\,dx$$

existe y es finita en el sentido del valor principal. En efecto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\frac{1}{x}\,dx = \int_{a}^{b} \varphi(x)\,\frac{1}{x}\,dx = \int_{a}^{b} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{a}^{b} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx.$$

Aquí (a, b) es el intervalo fuera del cual φ se anula. En la primera de estas integrales bajo el signo de la integral aparece una función acotada, mientras que la segunda integral, comprendida en el sentido del valor principal, es finita. De esta forma, $\frac{1}{x}$ es una funcional sobre K, es decir, una función generalizada. Se puede demostrar que ninguna de las funciones generalizadas señaladas en los ejemplos 1, 2, 3 y 4 es regular (es decir, no puede representarse en la forma (2) cualquiera que sea la función f localmente integrable).

4°. Operaciones con funciones generalizadas. El conjunto de funciones generalizadas es el espacio lineal dual a K. Por consiguiente, en este conjunto están definidas las operaciones de adición y multiplicación por números. Es evidente, además, que para las funciones generalizadas regulares, es decir, para las funciones «corrientes» sobre la recta, su adición como funciones generalizadas (esto es, como funcionales lineales) coincide con la operación habitual de adición de funciones. Lo mismo se refiere a la multiplicación por números.

Introduzcamos en el espacio de funciones generalizadas la operación de paso al límite. Diremos que la sucesión de funciones generalizadas $\{f_n\}$ converge a f, cuando para cada $\varphi \in K$ se cumple la relación

$$(f_n, \varphi) \longrightarrow (f, \varphi).$$

En otras palabras, definimos la convergencia de funciones generalizadas como la convergencia $*$-débil de funcionales lineales sobre K. El espacio de funciones generalizadas provisto de esta convergencia se denotará mediante K^*.

Si α es una función indefinidamente diferenciable, es natural definir el producto de α por la función generalizada f mediante la fórmula

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$$

(la expresión del miembro derecho tiene sentido, ya que $\alpha\varphi \in K$). Todas estas operaciones, adición y multiplicación por números y funciones indefinidamente diferenciables, son continuas.

No introducimos el concepto de producto de dos funciones generalizadas. Se puede demostrar que es imposible definir este producto si se quiere que esta operación sea continua y que, además, coincida para las funciones generalizadas regulares con la multiplicación corriente de funciones.

Definamos ahora la operación de diferenciación de funciones generalizadas y examinemos sus propiedades.

Sea primero T una funcional de K definida mediante una función f diferenciable (en el sentido corriente):

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Es natural definir su derivada como la funcional $\frac{dT}{dx}$ dada mediante la fórmula

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Empleando la fórmula de integración por partes y teniendo en cuenta que toda función básica φ se anula fuera de un intervalo finito, obtenemos

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx;$$

de esta forma, hemos obtenido para $\frac{dT}{dx}$ una expresión en la que no figura la derivada de f. Estas consideraciones sugieren la siguiente definición.

DEFINICION 2. Se llama *derivada* $\frac{dT}{dx}$ de la función generalizada T a la funcional definida mediante la fórmula

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = -T(\varphi').$$

Está claro que la funcional definida mediante esta fórmula es lineal y continua, es decir, representa una función generalizada. Análogamente se definen la segunda, la tercera, etc. derivadas.

Denotando la función generalizada mediante el símbolo f, denotaremos su derivada (comprendida en el sentido que acabamos de definir) mediante el símbolo corriente f'.

Directamente de la definición de la derivada de una función generalizada se deduce la validez de las proposiciones siguientes:

1. *Toda función generalizada tiene derivadas de todos los órdenes.*

2. *Si una sucesión* $\{f_n\}$ *de funciones generalizadas converge a una función generalizada* f (en el sentido de la definición de convergencia de funciones generalizadas), *la sucesión* $\{f_n'\}$ *de derivadas converge a la derivada* f' *de la función límite.* Esto equivale a que toda serie convergente compuesta por funciones generalizadas se puede derivar término a término cualquier número de veces.

Veamos algunos ejemplos.

1. De lo expuesto anteriormente se ve que siendo f una función regular (es decir, «verdadera») cuya derivada existe y es continua (o continua a trozos), la derivada de ella, como de función generalizada, coincide con su derivada en el sentido corriente.

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } x \geqslant 0, \\ 0 \text{ para } x < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Esta función define la funcional lineal

$$(f, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx.$$

De acuerdo con la definición de la derivada de una función generalizada, tenemos

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0)$$

(puesto que φ es igual a 0 en el infinito). Por consiguiente, la derivada de la función (5) (de la «función salto unidad») es la δ-función.

3. De los ejemplos 1 y 2 se ve claramente que si f es una función que en los puntos $x_1, x_2, \ldots$ tiene saltos iguales a $h_1, h_2, \ldots$ respectivamente y es diferenciable en los demás puntos (en el sentido corriente), su derivada (como de una función generalizada) representa la suma de la derivada corriente f' (en los puntos donde ésta existe) más la suma de tipo

$$\sum_i h_i \delta(x-x_i).$$

4. Aplicando la definición de derivada de una función generalizada a la δ-función, obtendremos que esta derivada representa la funcional que en cada función $\varphi \in K$ toma el valor $-\varphi'(0)$. Es precisamente la funcional que hemos denominado ya «derivada de la δ-función».

5. Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}. \tag{6}$$

Su suma representa una función de período 2π que en el intervalo $(-\pi, \pi)$ se define mediante las fórmulas

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{para } 0 < x \leqslant \pi \\ -\dfrac{\pi + x}{2} & \text{para } -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$$

La derivada generalizada de esta función es igual a

$$-\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{7}$$

Representa una función generalizada (al aplicarla a cualquier función terminal $\varphi(x)$ siempre obtendremos solamente un número finito de sumandos diferentes de cero). Por otro lado, derivando término a término la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$ obtenemos una serie divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

Sin embargo, en el sentido de convergencia de funciones generalizadas, esta serie converge (y precisamente a la expresión (7)). Por consiguiente, el concepto de función generalizada permite dar un sentido completamente determinado a la suma de una serie que en el sentido corriente diverge. Lo mismo se refiere a muchas integrales divergentes. Con situaciones de este tipo se tropieza frecuentemente en la teoría cuántica del campo y en otras varias ramas de la Física Teórica.

5°. **Suficiencia del conjunto de funciones básicas.** Hemos definido las funciones generalizadas como funcionales lineales sobre un espacio, el espacio K de funciones terminales indefinidamente diferenciables. En general, podíamos escoger el espacio básico de alguna otra manera. Veamos las consideraciones que pueden determinar la selección de uno u otro espacio para el espacio de funciones básicas. Sujetando los elementos de K a las exigencias rígidas de terminalidad y diferenciabilidad indefinida, hemos obtenido con ello, en primer lugar, un conjunto suficientemente amplio de funciones generalizadas (toda restricción del espacio básico lleva, evidentemente, a la ampliación del espacio dual) y, en segundo lugar, una gran libertad para aplicar a las funciones generalizadas las operaciones principales del Análisis (paso al límite, diferenciación). Pero al mismo tiempo el espacio de funciones básicas no puede ser muy restringido. Debe tener un número suficiente de elementos para que mediante ellos se puedan distinguir dos funciones diferentes. Hablando con más rigor, si f_1 y f_2 son dos funciones integrables (es decir, dos funciones generalizadas regulares), debe existir un elemento φ del espacio básico tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\varphi(x)dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

Comprobemos que el espacio K satisface esta condición. Con más precisión, *sean f_1 y f_2 dos distintas funciones continuas* (y, por consiguiente, localmente integrables) *sobre la recta. Entonces, existe una función $\varphi \in K$ tal que se cumple la condición* (8).

En efecto, pongamos $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Si $f(x) \not\equiv 0$, existe un punto x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$. Entonces, $f(x) \neq 0$ y conserva su signo en un intervalo (α, β) que contiene el punto x_0. Consideremos la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-\alpha)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{(x-\beta)^2}} & \text{para } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{para los demás } x. \end{cases}$$

Esta función se anula fuera de (α, β) y es positiva dentro de este intervalo; además, tiene derivadas de todos los órdenes, de manera que $\varphi \in K$. Es evidente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\varphi(x)\,dx \neq 0.$$

Luego, hemos demostrado que el espacio K contiene un número suficientemente grande de funciones para que sea posible distinguir dos funciones continuas cualesquiera[1].

6°. Reconstrucción de una función por su derivada. Ecuaciones diferenciales en la clase de funciones generalizadas. Las ecuaciones diferenciales son una de las regiones principales de aplicación de la teoría de funciones generalizadas. Fueron precisamente las ecuaciones diferenciales que estimularon, en gran medida, el desarrollo de la teoría de funciones generalizadas. Estas aplicaciones están relacionadas, en general, con ecuaciones en derivadas parciales y su estudio detallado sale de los márgenes de este libro. Sin embargo, consideraremos aquí algunas cuestiones más sencillas, relacionadas con la solución de ecuaciones diferenciales (ordinarias) con funciones generalizadas. Comencemos por la ecuación elemental de tipo

$$y' = f(x)$$

($f(x)$ es una función o bien generalizada o bien «corriente»), es decir, por el problema de reconstrucción de una función a partir de su derivada.

TEOREMA 1. *Sólo las constantes son soluciones (en la clase de funciones generalizadas) de la ecuación*

$$y' = 0. \tag{9}$$

DEMOSTRACION. La ecuación (9) significa que

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0 \tag{10}$$

para toda función básica $\varphi \in K$. La igualdad (10) define la funcional y sobre el conjunto $K^{(1)}$ de funciones básicas, cada una de las cuales puede representarse como derivada de cierta función básica.

Una función básica φ_0 puede representarse como derivada de otra función básica si, y sólo si,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx = 0. \tag{11}$$

[1] Esta proposición se puede extender también a funciones substancialmente más generales que las continuas, pero para ello habría que recurrir al concepto de integrabilidad según Lebesgue, del cual hablaremos en el capítulo VI.

En efecto, si $\varphi_0(x)=\varphi_1'(x)$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx=\varphi_1(x)\,\Big|_{-\infty}^{\infty}=0. \tag{12}$$

Viceversa, si se cumple la igualdad (11), la expresión

$$\varphi_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_0(t)\,dt \tag{13}$$

es una función indefinidamente diferenciable y, además, terminal debido a (12). Su derivada es $\varphi_0(x)$. Observemos ahora que toda función básica φ se puede representar en la forma

$$\varphi=\varphi_0+c\varphi_1,$$

donde φ_1 es una función básica fija que verifica la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)\,dx=1,$$

c es una constante y $\varphi_0(x)$ es tal que $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x)\,dx=0$. En efecto, basta tomar

$$c=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx \ \text{ y } \ \varphi_0(x)=\varphi(x)-\varphi_1(x)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx.$$

Por consiguiente, al definir el valor de la funcional (= función generalizada) y para la función básica $\varphi_1(x)$, la funcional resulta unívocamente determinada en todo el K. Poniendo $(y,\ \varphi_1)=\alpha$, obtenemos

$$(y,\ \varphi)=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\varphi(x)\,dx,$$

es decir, la función generalizada y es la constante α, que es lo que necesitábamos demostrar. De aquí se deduce que si para dos funciones generalizadas f y g se cumple la igualdad $f'=g'$, se tiene $f-g=\text{const}$.

Consideremos ahora la ecuación

$$y'=f(x) \tag{14}$$

donde $f(x)$ es una función generalizada. Probemos que para todo $f\in K^*$ la ecuación (14) tiene una solución perteneciente a K^*. Es natural llamar esta solución *primitiva* de la función generalizada f. La ecuación (14) significa que

$$(y, -\varphi') = (y', \varphi) = (f, \varphi) = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)\, d\xi\right) \qquad (15)$$

para cualquier función básica $\varphi \in K$. Esta igualdad define el valor de la funcional y para todas las funciones básicas que pueden ser representadas como φ', donde $\varphi \in K$. Como hemos visto al demostrar el teorema 1, cualquier elemento $\varphi \in K$ puede representarse en la forma

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx,$$

donde φ_0 es la derivada de una función $\varphi^* \in K$ y $\varphi_1(x)$ es un elemento fijo de K que verifica la condición $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, dx = 1$. Si tomamos, además, $(y, \varphi_1) = 0$, la funcional y quedará definida en todo el K:

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_0) = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(\xi)\, d\xi\right).$$

Es fácil comprobar que esta funcional es lineal y continua. Además, satisface la condición (14). En efecto, para todo $\varphi \in K$

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)\, d\xi\right) = (f, \varphi).$$

Luego, para cada función generalizada $f(x)$ existe una solución de la ecuación

$$y' = f(x),$$

es decir, cada función generalizada tiene primitiva. Según el teorema 1, esta primitiva se define unívocamente, a menos de una constante aditiva arbitraria, por la función $f(x)$.

Los resultados obtenidos se pueden extender fácilmente a sistemas de ecuaciones lineales. Nos limitaremos aquí a dar los enunciados correspondientes, omitiendo las demostraciones.

Consideremos un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n funciones incógnitas

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (16)$$

donde a_{ik} son funciones indefinidamente diferenciables. Este sistema tiene una determinada cantidad de soluciones «clásicas» (es decir, soluciones que representan funciones «corrientes» y, además, indefinidamente diferenciables). Se puede demostrar que, en la clase de funciones generalizadas, el sistema (16) no tiene ninguna otra solución.

Para un sistema no homogéneo de tipo

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + f_i, \tag{17}$$

donde f_i son funciones generalizadas y a_{ik} funciones corrientes indefinidamente diferenciables, existe en la clase de funciones generalizadas una solución que, salvo una solución arbitraria del sistema homogéneo (16), es única.

Si en el sistema (17) no sólo a_{ik} sino también f_i son funciones «corrientes», todas las soluciones que este sistema tiene en K' también resultan ser funciones corrientes.

7°. Algunas generalizaciones. Hemos considerado más arriba funciones generalizadas «de una variable real», esto es, funciones generalizadas sobre la recta. Es posible, basándose en las mismas ideas, introducir funciones generalizadas sobre un conjunto acotado, digamos, sobre un segmento o una circunferencia, así como funciones generalizadas de varias variables, funciones generalizadas de argumento complejo, etc. Además, incluso para las funciones generalizadas sobre la recta, la definición dada anteriormente no es la única posible. Veamos brevemente algunas de estas generalizaciones y modificaciones del concepto de función generalizada.

a) *Funciones de varias variables.* Consideremos en el espacio n-dimensional el conjunto K^n de funciones $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que tienen derivadas parciales de todos los órdenes respecto a todos sus argumentos y tales que cada una de estas funciones se anula fuera de un paralelepípedo

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

El conjunto K^n representa un espacio lineal (con las habituales operaciones de adición de funciones y multiplicación de las mismas por números), en el cual se puede definir una convergencia del siguiente modo: $\varphi_k \to \varphi$, cuando existe un paralelepípedo

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

fuera del cual se anula cada una de las funciones φ_k y cuando en este paralelepípedo se tiene uniformemente

$$\frac{\partial^r \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \to \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r\right),$$

cualesquiera que sean r, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Una función generalizada de n variables es cualquier funcional lineal continua sobre K^n. Toda función $f(x)$ «corriente» de n variables, integrable en cualquier recinto acotado del espacio n-dimensional, es, al mismo tiempo, una función generalizada. Los valores de la funcional que le corresponde vienen dados por la fórmula

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx \quad (x = (x_1, \ldots, x_n),\ dx = dx_1 \ldots dx_n).$$

Al igual que en el caso de $n = 1$, diferentes funciones continuas determinan diferentes funcionales (es decir, representan diferentes funciones generalizadas).

Para las funciones generalizadas de n variables los conceptos de paso al límite, de derivada, etc. se introducen con los mismos métodos que en el caso de una variable. Por ejemplo, las derivadas parciales de una función generalizada se introducen mediante las fórmulas

$$\left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \varphi(x)\right) = (-1)^r \left(f(x), \frac{\partial^r \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right).$$

De aquí se desprende que cada función generalizada de n variables tiene derivadas parciales de todos los órdenes.

b) *Funciones generalizadas complejas.* Escojamos ahora para las funciones básicas el conjunto de funciones terminales, indefinidamente diferenciables sobre la recta, que toman valores complejos. Las funcionales lineales sobre el espacio $\tilde{K}$ de estas funciones es natural llamarlas funciones generalizadas complejas. Recordemos que en un espacio lineal complejo existen funcionales lineales de primera y segunda especie. Las primeras satisfacen la condición (α es un número)

$$(f, d\varphi) = \alpha(f, \varphi)$$

y las segundas, la condición

$$(f, \alpha\varphi) = \bar{\alpha}(f, \varphi).$$

Si $f(x)$ es una función corriente de valores complejos sobre la recta, se le puede asignar una funcional lineal de primera especie sobre $\tilde{K}$ de dos modos

$$(f, \varphi)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (18_1)$$

y

$$(f, \varphi)_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx. \tag{18$_2$}$$

A esta misma función $f(x)$ se le pueden asignar dos funcionales lineales de segunda especie, a saber:

$$_1(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{\varphi(x)}\, dx \tag{18$_3$}$$

y

$$_2(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, \overline{\varphi(x)}\, dx. \tag{18$_4$}$$

La selección de una de estas cuatro posibilidades significa una manera determinada de inmersión del espacio de funciones «corrientes» en el espacio de funciones generalizadas. Las operaciones con las funciones generalizadas complejas se definen análogamente al caso de funciones reales.

c) *Funciones generalizadas sobre una circunferencia.* A veces conviene considerar funciones generalizadas definidas sobre un conjunto acotado. A título de ejemplo más sencillo, consideremos las funciones sobre una circunferencia. Por espacio de funciones básicas tomaremos el conjunto de todas las funciones indefinidamente diferenciables sobre una cincunferencia definiendo para ellas las operaciones de adición y multiplicación por números del modo habitual. La sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ de funciones de este espacio se llama convergente, cuando para cada $k=0, 1, 2, \ldots$ converge uniformemente sobre toda la circunferencia la sucesión de derivadas $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$. Puesto que el conjunto de argumentos (la cincunferencia) es, en este caso, acotado, la condición de terminalidad de las funciones básicas desaparece automáticamente. Las funcionales lineales sobre este espacio se llamarán funciones generalizadas sobre la circunferencia. Toda función corriente sobre la circunferencia se puede considerar como una función periódica definida sobre la recta. Extendiendo esta idea a las funciones generalizadas, se puede identificar las funciones generalizadas sobre la circunferencia con las funciones generalizadas periódicas. Es natural entender por función generalizada periódica (de período a) una funcional f que verifica la condición

$$(f(x), \varphi(x-a) = (f(x), \varphi(x))$$

para toda función básica φ. Como ejemplo de función generalizada periódica puede servir la función

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi),$$

que ha sido mencionada anteriormente.

b) *Otros espacios básicos.* Hemos definido más arriba las funciones generalizadas sobre la recta como las funcionales lineales sobre el espacio K de funciones terminales indefinidamente diferenciables. Sin embargo, esta selección del espacio básico no es la única posible. Por ejemplo, en lugar del espacio K de funciones terminales, se podría haber tomado el espacio, algo más amplio, de todas las funciones $\varphi(x)$ indefinidamente diferenciables sobre la recta que decrecen, junto con sus derivadas, más rápido que cualquier potencia de $\frac{1}{|x|}$. Hablando con más precisión, admitiremos que $\varphi(x)$ pertenece al espacio básico, que denotaremos S, cuando para cualesquiera fijos p, $q = 0, 1, 2, \ldots$ existe una constante $C_{p,q}$ (que depende de p, q y φ) tal que

$$|x^p \varphi^{(q)}(x)| < C_{pq}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{19}$$

La convergencia en S se define del siguiente modo: la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ se llama convergente hacia $\varphi(x)$, cuando para cada $q = 0, 1, 2, \ldots$ la sucesión $\{\varphi_n^{(q)}(x)\}$ converge uniformemente en cualquier intervalo finito y cuando en las desigualdades

$$|x^p \varphi_n^{(q)}(x)| < C_{pq}$$

las constantes C_{pq} se pueden escoger de manera que no dependan de n.

De esta forma se obtiene un conjunto de funciones generalizadas algo más reducido que en el caso del espacio K. Por ejemplo, la función

$$f(x) = e^{x^2}$$

es una funcional lineal continua sobre K, pero no sobre S. Es cómodo tomar S por espacio básico al considerar, por ejemplo, la transformación de Fourier de funciones generalizadas. En general, como ha demostrado el desarrollo de la teoría de funciones generalizadas, no es necesario sujetarse a una elección determinada del espacio básico, sino que conviene variarla según los problemas que se consideran. Sin embargo, es necesario requerir de manera esencial que, por un lado, haya «un número suficientemente grande» de funciones básicas (para que se pueda mediante ellas distinguir las funciones «corrientes», más rigurosamente, las funcionales regulares) y que, por otro lado, estas funciones básicas sean diferenciables suficiente número de veces.

EJERCICIO. Compruébese que en el espacio S se puede introducir una estructura de espacio normado numerable, tomando, por ejemplo,

$$\|\varphi_n\| \sum_{p+q=n} \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leqslant i \leqslant p \\ 0 \leqslant j \leqslant q}} = |(1+|x|^i)\varphi^{(j)}(x)|,$$

y que la convergencia de sucesiones en este espacio normado numerable equivale a la convergencia definida más arriba.

§ 5. OPERADORES LINEALES

1°. Definición y ejemplos de operadores lineales. Sean E y E_1 dos espacios topológicos lineales. Se llama *operador lineal* que actúa de E en E_1 a toda aplicación

$$y = Ax \quad (x \in E,\ y \in E_1),$$

que verifica la condición

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

El conjunto D_A de todos los $x \in E$ para los cuales está definida la aplicación A se llama *campo de definición* del operador A; en general, no se supone que $D_A = E$; sin embargo, siempre admitiremos que D_A es una variedad lineal, esto es, que si $x,\ y \in D_A$, también $\alpha x + \beta y \in D_A$ para todos los α, β.

Un operador A se llama *continuo en el punto* $x_0 \in D_A$, cuando para cualquier vecindad V del punto $y_0 = Ax_0$ existe una vecindad U del punto x_0 tal que $Ax \in V$ siempre que $x \in U \cap D_A$. El operador A se llama *continuo*, cuando es continuo en cada punto $x \in D_A$.

No es difícil probar que, cuando E y E_1 son espacios normados, esta definición equivale a la siguiente: un operador A se llama continuo, cuando para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que de la desigualdad

$$\|x' - x''\| < \delta \ (x',\ x'' \in D_A)$$

se deduce

$$\|Ax' - Ax''\| < \varepsilon.$$

Está claro que el concepto de funcional lineal, introducido al principio de este capítulo, es un caso particular de operador lineal. Es decir, una funcional lineal es un operador lineal que transforma el espacio dado E en la recta numérica E_1. En esta suposición, las definiciones de linealidad y continuidad, que hemos enunciado para un operador lineal, se transforman en las correspondientes definiciones que hemos introducido con anterioridad para las funcionales.

Del mismo modo, una serie de conceptos y resultados que se exponen a continuación para los operadores lineales, representan una generalización suficiente automática de los resultados expuestos ya en el § 1 de este capítulo para el caso de funcionales lineales.

Ejemplos de operadores lineales.

1. Sea E un espacio lineal topológico. Pongamos

$$Ax = x \text{ para todo } x \in E.$$

Este operador, que transforma cada elemento del espacio en sí mismo, se llama *operador unidad*.

2. Si E y E_1 son dos espacios topológicos lineales arbitrarios y

$$Ox = 0 \text{ para todo } x \in E$$

(aquí 0 es el elemento cero del espacio E_1), se dice que O es el *operador nulo*.

3. (Forma general de un operador lineal que transforma un espacio de dimensión finita en otro de dimensión finita). Sea A un operador lineal que transforma el espacio R^n de n dimensiones con la base $e_1, \ldots, e_n$ en el espacio R^m de m dimensiones con la base $f_1, \ldots, f_m$. Si x es un vector arbitrario de R^n, tenemos

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

y, debido a la linealidad del operador A,

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i.$$

De manera que el operador A queda definido si se conoce en qué transforma los vectores $e_1, \ldots, e_n$ de la base. Consideremos el desarrollo del vector Ae_i según la base $f_1, \ldots, f_m$. Tenemos

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j.$$

De aquí se ve que el operador A se define por la matriz de los coeficientes a_{ij}. La imagen en R^m del espacio R^n representa un subespacio lineal cuya dimensión es igual, evidentemente, al rango de la matriz $\|a_{ij}\|$, esto es, no es mayor, en todo caso, que n. Señalemos que en un espacio de dimensión finita todo operador lineal es automáticamente continuo.

4. Consideremos el espacio de Hilbert H y un subespacio H_1 suyo. Desarrollando H en la suma directa del subespacio H_1 y su complemento ortogonal, es decir, representando cada elemento

$h \in H$ en la forma

$$h = h_1 + h_2 \quad (h_1 \in H_1,\ h_2 \perp H_1)$$

podemos tomar

$$Ph = h_1.$$

Es natural llamar este operador P operador proyectivo, que proyecta todo el H sobre H_1. La linealidad y continuidad se comprueban sin dificultad.

5. Consideremos en el espacio de funciones continuas sobre el segmento $[a, b]$ el operador dado mediante la fórmula

$$\psi(t) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(s)\,ds, \tag{1}$$

donde $K(s, t)$ es una función fija continua de dos variables. La función $\psi(t)$ es continua cualquiera que sea la función continua $\varphi(s)$, de manera que el operador (1) transforma el espacio de funciones continuas en sí mismo. Su linealidad es obvia. Para poder hablar de su continuidad, es necesario señalar previamente la topología que se ha tomado en nuestro espacio de funciones continuas. Proponemos al lector demostrar la continuidad de este operador en los casos en que a) se considera el espacio $C_{[a,\,b]}$, esto es, el espacio de funciones continuas con la norma $\|\varphi\| = \max|\varphi(t)|$; b) se considera el espacio $C^2_{[a,\,b]}$, es decir, $\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. Consideremos en el mismo espacio de funciones continuas el operador

$$\psi(t) = \varphi_0(t)\,\varphi(t),$$

donde $\varphi_0(t)$ es una función continua fija. La linealidad de este operador es evidente. Demuéstrese su continuidad en el caso de las normas señaladas en el ejemplo anterior.

7. Uno de los ejemplos de operador lineal más importantes para el Análisis, es el operador de diferenciación. Puede ser considerado en diferentes espacios.

a) Consideremos el espacio de funciones continuas $C_{[a,\,b]}$ y el operador

$$Df(t) = f'(t)$$

que actúa en él. Este operador (que consideramos que actúa de $C_{[a,\,b]}$ en $C_{[a,\,b]}$ otra vez) está definido, evidentemente, no en todo el espacio de funciones continuas, sino en la variedad lineal de funciones que tienen derivada continua. El operador D es lineal, pero no es continuo. Esto se ve, por ejemplo, de que la sucesión

$$\varphi_n(t)=\frac{\operatorname{sen} nt}{n}$$

converge a 0 (en la métrica de $C_{[a,\,b]}$), mientras que la sucesión

$$D\varphi_n(t)=\cos nt$$

no converge.

b) El operador de diferenciación puede ser considerado como un operador que actúa del espacio D_1 de funciones con derivada continua sobre $[a, b]$ con la norma

$$\|\varphi\|_1=\text{máx}\,|\varphi(t)|+\max|\varphi'(t)|$$

en el espacio $C_{[a,\,b]}$. En este caso el operador D es lineal y continuo y transforma todo el D_1 en todo el $C_{[a,\,b]}$.

c) No resulta muy conveniente considerar el operador de diferenciación como un operador que actúa de D_1 en $C_{[a,\,b]}$, ya que, a pesar de obtener en este caso un operador continuo definido sobre todo el espacio, este operador no se puede aplicar dos veces a cualquier función de D_1. Es más cómodo considerar el operador de diferenciación en un espacio aún más reducido que D_1, en el espacio D_∞ de funciones indefinidamente diferenciables sobre $[a, b]$, cuya topología se define mediante un sistema numerable de normas

$$\|\varphi\|_n=\sup_{n,\,t}(|\varphi(t)|,\ |\varphi'(t)|,\ \ldots,\ |\varphi^{(n)}(t)|).$$

El operador de diferenciación transforma este espacio en sí mismo y, como es fácil de comprobar, es continuo sobre este espacio.

d) Las funciones indefinidamente diferenciables constituyen una clase muy reducida. Las funciones generalizadas ofrecen la posibilidad de considerar el operador de diferenciación como un operador definido en un espacio substancialmente más amplio y, al mismo tiempo, como un operador continuo. En el parágrafo anterior hemos hablado ya de cómo se define la operación de diferenciación para las funciones generalizadas. De lo allí expuesto se desprende que la diferenciación es un operador lineal en el espacio de funciones generalizadas y que, además, es continuo en el sentido de que de la convergencia de la sucesión $\{f_n(t)\}$ de funciones generalizadas hacia $f(t)$ se deduce la convergencia de la sucesión de sus derivadas hacia la derivada de la función generalizada $f(t)$.

2°. Continuidad y acotación. Un operador lineal que actúa de E en E_1 se llama *acotado*, cuando está definido sobre todo el E y transforma cada conjunto acotado en un conjunto también acotado. Entre la acotación y la continuidad de un operador lineal existe una relación estrecha y tienen lugar las siguientes proposiciones.

I. *Todo operador continuo es acotado.*

En efecto, sea $M \subset E$ un conjunto acotado y sea $AM \subset E_1$ un conjunto no acotado. Entonces, existe en E_1 una vecindad V del cero tal que ninguno de los conjuntos $\frac{1}{n} AM$ está contenido en V. Pero en este caso, existe una sucesión $\{x_n\} \subset M$ tal que ninguno de los elementos $\frac{1}{n} Ax_n$ pertenece a V y obtenemos[1] que $\frac{1}{n} x_n \to 0$ en E, mientras que la sucesión $\left\{\frac{1}{n} Ax_n\right\}$ no converge hacia el 0 en E_1; esto contradice a la continuidad del operador A.

II. *Si A es un operador acotado que actúa de E en E_1 y si en el espacio E se cumple el primer axioma de numerabilidad, el operador A es continuo.*

En efecto, si A no es continuo, existen una vecindad V del cero en E_1 y un sistema determinante $\{U_n\}$ de vecindades del cero en E, tales que para cada n existe un elemento $x_n \in \frac{1}{n} U_n$ tal que $Ax_n \overline{\in} V$. La sucesión $\{nx_n\}$ es acotada en E (e incluso converge hacia 0), mientras que la sucesión $\{nAx_n\}$ no es acotada en E_1 (ya que no está contenida en ninguno de los conjuntos V). De manera que si el operador A no es continuo y en E se cumple el primer axioma de numerabilidad, el operador A tampoco es acotado. Nuestra proposición queda demostrada.

Por consiguiente, en los espacios con el primer axioma de numerabilidad (a los que pertenecen, en particular, todos los espacios normados y normados numerables) la acotación de un operador lineal equivale a su continuidad.

Todos los operadores mencionados en los ejemplos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 del punto anterior, son continuos. Como en todos los espacios allí considerados se cumple el primer axioma de numerabilidad, todos los operadores mencionados son acotados.

Si E y E_1 son espacios normados, la condición de acotación de un operador que actúa de E en E_1, se puede enunciar así: un operador A se llama acotado si transforma toda bola en un conjunto acotado. Debido a la linealidad de A, esta condición

[1] Véase el ejercicio del punto 3 del § 5.

se puede enunciar así: A es acotado, cuando existe una constante C tal que para todo $f \in E$

$$\| Af \| \leqslant C \| f \| .$$

El menor de los números C que satisfacen esta desigualdad se llama *norma* del operador A y se denota mediante $\| A \|$.

TEOREMA 1. *Para cualquier operador acotado A que actúa de un espacio normado en otro espacio normado, se tiene*

$$\| A \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Ax \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} . \qquad (2)$$

DEMOSTRACION. Denotemos[1]

$$\alpha = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Ax \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} .$$

Probemos primero que $\| A \| \geqslant \alpha$.

Puesto que $\alpha = \sup \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un elemento x_ε tal que

$$\frac{\| Ax_\varepsilon \|}{\| x_\varepsilon \|} > \alpha - \varepsilon,$$

es decir,

$$\| Ax_\varepsilon \| > (\alpha - \varepsilon) \| x_\varepsilon \| ,$$

de donde se deduce que

$$\alpha - \varepsilon < \| A \| ;$$

como ε es un número positivo arbitrario, obtenemos $\alpha \leqslant \| A \|$.

Probemos ahora que la desigualdad $\alpha < \| A \|$ es imposible. Sea

$$\| A \| - \alpha = \varepsilon > 0.$$

Entonces,

$$\alpha < \| A \| - \frac{\varepsilon}{2} .$$

Pero de aquí se deduce que cualquiera que sea el punto x se cumplen las desigualdades

$$\frac{\| Ax \|}{\| x \|} \leqslant \alpha < \| A \| - \frac{\varepsilon}{2}$$

o bien

$$\| Ax \| \leqslant \left(\| A \| - \frac{\varepsilon}{2} \right) \| x \| ,$$

---

[1] La igualdad $\sup\limits_{\| x \| \leqslant 1} \| Ax \| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$ es evidente debido a la linealidad de A.

es decir, $\|A\|$ no es la cota inferior de aquellos M para los cuales

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\|.$$

Por consiguiente,

$$\|A\| = \alpha.$$

3°. Suma y producto de operadores.

DEFINICION 1. Sean A y B dos operadores lineales que actúan del espacio topológico lineal E en el espacio E_1. La *suma* $A+B$ de ellos es el operador C que pone en correspondencia al elemento $x \in E$ el elemento

$$y = Ax + Bx \in E_1.$$

Es fácil comprobar que $C = A + B$ es un operador lineal, continuo, si son continuos A y B. El campo de definición D_C del operador C es la intersección $D_A \cap C_B$ de los campos de difinición de los operadores A y B.

Si E y E_1 son espacios normados y si los operadores A y B son acotados, el operador C es también acotado y, además,

$$\|C\| \leqslant \|A\| + \|B\|. \tag{3}$$

En efecto, para todo x

$$\|Cx\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant (\|A\| + \|B\|)\|x\|,$$

de donde se deduce (3).

DEFINICION 2. Sean A y B dos operadores lineales, A actuando del espacio E en E_1 y B actuando de E_1 en E_2. Se llama *producto* BA de los operadores A y B al operador C que pone en correspondencia al elemento $x \in E$ el elemento

$$z = B(Ax)$$

de E_2. El campo de definición D_C del operador $C = BA$ se compone de todos los $x \in D_A$ tales que $Ax \in D_B$. Está claro que el operador C es lineal. Es continuo, si son continuos A y B.

Si A y B son operadores acotados que actúan en espacios normados, el operador $C = BA$ también es acotado y, además,

$$\|C\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|. \tag{4}$$

En efecto,

$$\|Cx\| = \|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|, \tag{5}$$

de donde se sigue (4).

La suma y el producto de tres y más operadores se definen sucesivamente. Ambas operaciones son asociativas.

El producto de un operador A por un número k (se denota con kA) se define como el operador que pone en correspondencia al elemento x el elemento kAx.

El conjunto $\mathscr{L}(E, E_1)$ de todos los operadores lineales continuos, definidos en todo el espacio E, que transforman E en E_1 (donde E y E_1 son dos espacios topológicos lineales fijos), forma un espacio lineal respecto a las operaciones de adición y multiplicación por números, definidas más arriba. Si E y E_1 son espacios normados, $\mathscr{L}(E, E_1)$ es también un espacio normado (con la norma de operador que se ha definido anteriormente).

EJERCICIO. Sean E un espacio normado y E_1 un espacio normado completo. Entonces, el espacio normado $\mathscr{L}(E, E_1)$ es completo. Si $A_k \in \mathscr{L}(E, E_1)$ y $\sum_{1=k}^{\infty} \| A_k \| < \infty$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ converge a un operador $A \in \mathscr{L}(E, E_1)$ y

$$\| A \| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| A_k \|. \tag{6}$$

4°. **Operador inverso, inversibilidad.** Sea A un operador que actúa de E en E_1 y sean D_A el campo de definición y R_A el campo de valores de este operador.

DEFINICION. Un operador A se llama *inversible*, cuando para cualquier $y \in R_A$ la ecuación

$$Ax = y$$

tiene solución única.

Si A es inversible, a cada $y \in R_A$ se puede poner en correspondencia un elemento único $x \in D_A$ que es la solución de la ecuación $Ax = y$. El operador que realiza esta correspondencia se llama *inverso* de A y se denota mediante A^{-1}.

TEOREMA 2. *Un operador A^{-1}, inverso de un operador lineal A, es también lineal.*

DEMOSTRACION. Basta comprobar que se cumple la igualdad

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2. \tag{7}$$

Pongamos $Ax_1 = y_1$ y $Ax_2 = y_2$. Debido a la linealidad de A, tenemos

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2. \tag{8}$$

De acuerdo con la definición de operador inverso,

$$A^{-1} y_1 = x_1, \quad A^{-1} y_2 = x_2,$$

de donde, multiplicando estas igualdades por α_1 y α_2, respectivamente, y sumando, encontramos

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Por otro lado, de (8) y de la definición de operador inverso se deduce que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$$

que junto con la igualdad anterior da

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2.$$

TEOREMA. 3 (teorema de Banach sobre el operador inverso). *Sea A un operador lineal acotado, que efectúa una transformación biunívoca del espacio de Banach E sobre el espacio de Banach E_1. Entonces, el operador inverso A^{-1} es acotado.*

Para demostrar este teorema es necesario el siguiente lema.

LEMA. *Sea M un conjunto siempre denso de un espacio de Banach E. Entonces, todo elemento no nulo $y \in E$ se puede desarrollar en una serie*

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots,$$

donde $y_k \in M$ e $\|y_k\| \leqslant \frac{3\|y\|}{2^k}$.

DEMOSTRACION. Construimos la sucesión de elementos y_k del siguiente modo: escogemos y_1 de manera que sea

$$\|y - y_1\| \leqslant \frac{\|y\|}{2}, \tag{9}$$

lo cual es posible, ya que la desigualdad (9) define una esfera de radio $\frac{\|y\|}{2}$ y centro en el punto y, dentro de la cual debe existir un elemento de M (M es siempre denso en E). Escojamos $y_2 \in M$ de manera que $\|y - y_1 - y_2\| < \frac{\|y\|}{4}$, y_3 de manera que $\|y - y_1 - y_2 - y_3\| \leqslant \frac{\|y\|}{8}$ y, en general, escojamos y_n de manera que $\|y - y_1 - \ldots - y_n\| \leqslant \frac{\|y\|}{2^n}$. Tal selección es siempre posible, ya que M es siempre denso en E. De acuerdo con la elección de los elementos y_k:

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \to 0 \text{ para } n \to \infty,$$

esto es, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ converge hacia y. Estimemos las normas de los elementos y_k:

$$\|y_1\|=\|y_1-y+y\|\leqslant\|y_1-y\|+\|y\|=\frac{3\|y\|}{2},$$

$$\|y_2\|=\|y_2+y_1-y+y-y_1\|\leqslant\|y-y_1-y_2\|+\|y-y_1\|\leqslant\frac{3\|y\|}{4}.$$

Finalmente,

$$\|y_n\|=\|y_n+y_{n-1}+\ldots+y_1-y+y-y_1-\ldots-y_{n-1}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|y-y_1-\ldots-y_n\|+\|y-y_1-\ldots-y_{n-1}\|\leqslant\frac{3\|y\|}{2^n}.$$

El lema queda demostrado.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3. Consideremos en el espacio E_1 los conjuntos M_k, donde M_k es la totalidad de los y y que satisfacen la desigualdad $\|A^{-1}y\|\leqslant k\|y\|$. Todo elemento del espacio E_1 se encuentra en cierto M_k, es decir, $E_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k$. De acuerdo al teorema de Baire sobre las categorías (cap. II, § 3, punto 3°), al menos uno de los conjuntos M_k, digamos M_n, es denso en una bola B_0. Consideremos dentro de la bola B_0 una capa esférica P, esto es, el conjunto de puntos z, para los cuales se cumple la desigualdad

$$\beta<\|z-y_0\|<\alpha,$$

donde

$$0<\beta<\alpha,\ y_0\in M_n.$$

Trasladando paralelamente la capa esférica P de manera que su centro coincida con el origen de coordenadas, obtendremos la capa esférica P_0.

Probemos que en P_0 es denso un conjunto M_N. Sea $z\in P\cap M_n$; entonces, $z-y_0\in P_0$ y

$$\|A^{-1}(z-y_0)\|\leqslant\|A^{-1}z\|+\|A^{-1}y_0\|\leqslant n(\|z\|+\|y_0\|)\leqslant$$
$$\leqslant n(\|z-y_0\|+2\|y_0\|)=n\|z-y_0\|\left(1+\frac{2\|y_0\|}{\|z-y_0\|}\right)\leqslant$$
$$\leqslant n\|z-y_0\|\left(1+\frac{2\|y_0\|}{\beta}\right). \quad (10)$$

La magnitud $n\left[1+\frac{2\|y_0\|}{\beta}\right]$ no depende de z. Tomemos $N=1+\left[1+\frac{2\|y_0\|}{\beta}\right]$. Entonces, debido a (10), $z-y_0\in M_N$ y como M_n es denso en P, M_N será denso en P_0. Consideremos un elemento y arbitrario no nulo de E_1. Siempre se puede escoger λ de manera que sea $\beta < \|\lambda y\| < \alpha$, es decir, que $\lambda y \in P_0$. Puesto que M_N es denso en P_0, se puede construir una sucesión $y_k \in M_N$ convergente hacia λy. Entonces, la sucesión $\frac{1}{\lambda} y_k$ converge hacia y. Es evidente que si $y_k \in M_N$, también $\frac{1}{\lambda} y_k \in M_N$ para cualquier número real $\lambda \neq 0$; por consiguiente, M_N es denso en $E_1 \setminus \{0\}$ y, por esto, también en E_1.

Consideremos un elemento no nulo $y \in E_1$; de acuerdo con el lema, puede ser desarrollado en una serie de elementos de M_N:

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k + \ldots,$$

siendo $\|y_k\| < \frac{3\|y\|}{2^k}$.

Consideremos en el espacio E la serie formada por las imágenes recíprocas de los elementos y_k, es decir, por elementos $x_k = A^{-1} y_k$.

Esta serie converge a un elemento x, ya que tiene lugar la desigualdad $\|x_k\| = \|A^{-1} y_k\| \leqslant N \|y_k\| < N \frac{3\|y\|}{2^k}$; además,

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leqslant 3N \|y\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3N \|y\|.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y el operador A es continuo, se puede aplicar A a esta serie término por término. Obtendremos

$$Ax = Ax_1 + Ax_2 + \ldots = y_1 + y_2 + \ldots = y,$$

de donde $x = A^{-1} y$. Además,

$$\|A^{-1} y\| = \|x\| \leqslant 3N \|y\|$$

y como esta estimación es válida para cualquier $y \neq 0$, el operador A^{-1} es acotado. El teorema queda demostrado.

EJERCICIOS. 1. Sean E, E_1 dos espacios normados. Un operador lineal A, que actúa de E en E_1, con el campo de definición $D_A \in E$, se llama *cerrado*, cuando de las condiciones $x_n \in D_A$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ se deduce que $x \in D_A$ y $Ax = y$. Compruébese que todo operador acotado es cerrado. Consideremos el producto directo $E \times E_1$ de los espacios E y E_1, esto es, el espacio lineal normado, compuesto de todos los pares posibles $[x, y]$, donde $x \in E$, $y \in E_1$, con la norma $\|[x, y]\| = \|x\| + \|y\|_1$ (mediante $\|\cdot\|$ designamos la norma en E y mediante $\|\cdot\|_1$, la norma en E_1). Se puede poner en correspondencia al operador A el conjunto $G_A = \{[x, y]: x \in D_A,\ y = Ax\} \subset E \times E_1$, que se denomina gráfico del operador. Compruébese que G_A es un conjunto lineal de $E \times E_1$ que es cerrado cuando, y sólo cuando, el operador A es cerrado.

Demuéstrese que *si E y E_1 son espacios de Banach y si el operador A está definido en todo E y es cerrado, es acotado (teorema de Banach sobre el gráfico cerrado).*

Sugerencia. Aplíquese el teorema 3 al operador $P:\{x, Ax\} \to x$ que actúa de G_A en E.

2. Demuéstrese que siendo A un operador lineal continuo que transforma biunívocamente un espacio completo normado numerable E sobre un espacio completo normado numerable E_1, el operador inverso A^{-1} es continuo. Enúnciese y demuéstrese el teorema sobre el gráfico cerrado para el caso de espacios normados numerables.

TEOREMA 4. *Sea A_0 un operador lineal acotado que transforma un espacio de Banach E sobre otro espacio de Banach E_1 y que tiene el inverso acotado A_0^{-1} y sea ΔA un operador lineal acotado que transforma E en E_1 y tal que $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$. Entonces, el operador $A = A_0 + \Delta A$ transforma E sobre E_1 y tiene inverso acotado.*

DEMOSTRACION. Fijemos un elemento cualquiera $y \in E_1$ y consideremos la aplicación B del espacio E en sí mismo, definida mediante la fórmula

$$Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta Ax.$$

De la condición $\|\Delta A\| < \|A_0^{-1}\|^{-1}$, se deduce que la aplicación B es contraída. Puesto que E es completo, existe un único punto fijo x de la aplicación B

$$x = Bx = A_0^{-1}\ y - A_0^{-1}\Delta\, Ax,$$

de donde

$$Ax = A_0x + \Delta\, Ax = y.$$

Si $Ax' = y$, también x' será un punto fijo de la aplicación B, de manera que $x' = x$. Por consiguiente, para todo $y \in E_1$ la ecuación $Ax = y$ tiene en E una solución única, esto es, el operador A tiene inverso A^{-1}. En vista del teorema 3, el operador A^{-1} es acotado, que es lo que se quería demostrar.

TEOREMA 5. *Sean E un espacio de Banach, I el operador unidad de E y A un operador lineal acotado que aplica E en sí mismo y tal que $\|A\| < 1$. Entonces, el operador $(I - A)^{-1}$ existe, es acotado y represéntase en la forma*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{11}$$

DEMOSTRACION. La existencia y acotación del operador $(I - A)^{-1}$ se desprende del teorema 4 (además, esto se desprende también del razonamiento que sigue). Como $\|A\| < 1$, tenemos $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A^k\| \leqslant$

$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| A \|^k < \infty$. El espacio E es completo y por eso de la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \| A^k \|$ se deduce que la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ representa un operador lineal acotado. Para un n cualquiera tenemos

$$(I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k (I-A) = I - A^{n+1};$$

pasando al límite para $n \to \infty$ y tomando en consideración que $\| A^{n+1} \| \leqslant \| A \|^{n+1} \to 0$, encontramos

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I-A) = I,$$

de donde

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

que es lo que queríamos demostrar.

EJERCICIO. Sea A un operador lineal acotado que aplica un espacio de Banach E sobre un espacio de Banach E_1. Demuéstrese que existe una constante $\alpha > 0$ tal que si $B \in \mathscr{L}(E, E_1)$ y $\| A - B \| < \alpha$, el operador B aplica E sobre todo el espacio E_1 (Banach).

5°. **Operadores conjugados.** Consideremos un operador lineal continuo $y = Ax$ que aplica un espacio lineal topológico E en otro espacio E_1 del mismo tipo. Sea g una funcional lineal continua definida sobre E_1, esto es, $g \in E_1^*$. Apliquemos la funcional g al elemento $y = Ax$; es fácil comprobar que $g(Ax)$ es una funcional lineal continua definida en E; denotémosla con f. La funcional f es, de esta forma, un elemento del espacio E^*. Hemos asignado a cada funcional $g \in E_1^*$ una funcional $f \in E^*$, es decir, hemos obtenido un operador que aplica E_1^* en E^*. Este operador se llama *conjugado* del operador A y se designa mediante A^*.

Denotando la funcional f mediante (f, x), tendremos $(g, Ax) = (f, x)$ o

$$(g, Ax) = (A^* g, x).$$

Esta relación se puede tomar por definición del operador conjugado.

Ejemplo. *El operador conjugado en un espacio de dimensión finita.* Supongamos que un operador A aplica un espacio E^n (n-dimensional) en un espacio E^m (m-dimensional) y sea (a_{ij}) la matriz de este operador.

La aplicación $y=Ax$ se puede representar mediante el sistema de igualdades

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

y la funcional f, (x) en la forma

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j x_j.$$

De la igualdad

$$f(x)=g(Ax)=\sum_{i=1}^{m} g_i y_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij}x_j=\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij},$$

tendremos $f_j=\sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$. Como $f=A^*g$, de aquí se deduce que el operador A^* se define mediante la matriz traspuesta de la matriz del operador A.

Las siguientes propiedades de operadores conjugados siguen directamente de la definición.

1. El operador A^* es lineal.
2. $(A+B)^*=A^*+B^*$.
3. Si k es un número complejo, $(kA)^*=kA^*$.

Menos evidente es el siguiente resultado.

TEOREMA 6. *El operador A^*, conjugado a un operador lineal acotado A que aplica un B-espacio E en un B-espacio E_1, es también acotado y*

$$\| A^* \| = \| A \|.$$

DEMOSTRACION. En virtud de las propiedades de la norma de un operador, tenemos

$$|(A^*g,\ x)|=|(g,\ Ax)|\leqslant \| g \|\cdot\| A \|\cdot\| x \|,$$

de donde $\| A^*g \| \leqslant \| A \|\cdot\| g \|$; por consiguiente,

$$\| A^* \| \leqslant \| A \|. \qquad (12)$$

Sea $x\in E$ y $Ax\neq 0$; tomemos $y_0=\frac{Ax}{\| Ax \|}\in E_1$; es obvio que $\| y_0 \|=1$. De acuerdo con el corolario del teorema de Hahn — Banach, existe una funcional g, tal que $\| g \|=1$ y $(g_0,\ y_0)=1$, es decir, tal que $(g,\ Ax)=\| Ax \|$. De las relaciones

$$\| Ax \| = |(g,\ Ax)| = |(A^*g,\ x)| \leqslant \| A^*g \|\cdot\| x \| \leqslant \| A^* \|\cdot\| g \|\cdot\| x \| = \| A^* \|\cdot\| x \|$$

obtenemos $\| A \| \leqslant \| A^* \|$, lo que, junto con la desigualdad (12), da

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

El teorema queda demostrado.

6°. Operador conjugado en un espacio euclídeo. Operadores autoconjugados. Consideremos el caso, cuando A es un operador acotado que actúa en un espacio de Hilbert H (real o complejo). De acuerdo con el teorema sobre la expresión general de una funcional lineal continua en un espacio de Hilbert, la aplicación τ que a cada $y \in H$ asigna la funcional lineal

$$(\tau y)(x) = (x, y)$$

es un isomorfismo (o un isomorfismo conjugado, cuando H es complejo) del espacio H sobre todo el espacio dual H^*. Sea A^* el operador conjugado del operador A. Está claro que la aplicación $\tilde{A}^* = \tau^{-1}A^*\tau$ representa un operador lineal acotado que actúa en H; es fácil ver que para cualesquiera $y \in H$

$$(Ax, y) = (x, \tilde{A}^*y).$$

Como $\|A^*\| = \|A\|$ y las aplicaciones τ y τ^{-1} son isométricas, tenemos $\|\tilde{A}^*\| = \|A\|$.

Todo lo expuesto anteriormente para un espacio de Hilbert, es válido también, por supuesto, para un espacio euclídeo (real o complejo) de dimensión finita.

Tomemos el siguiente acuerdo. Siendo R un espacio euclídeo (de dimensión finita o infinita), llamaremos operador conjugado del operador A, que actúa en R, al operador $\tilde{A}^*$, definido más arriba, que actúa en el mismo espacio R.

Es preciso subrayar que esta definición difiere de la definición de operador conjugado en un espacio arbitrario de Banach E, de acuerdo con la cual el operador conjugado A^* actúa en el espacio dual E^*. A veces, el operador $\tilde{A}^*$, en diferencia del operador A^*, se denomina *conjugado de Hermite.* Para no complicar la terminología ni las denotaciones, en lo que sigue escribiremos A^* en lugar de $\tilde{A}^*$ y llamaremos este operador *conjugado*, teniendo en cuenta, sin embargo, que en el caso de un espacio euclídeo el concepto de operador conjugado se comprenderá siempre tal como ha sido enunciado en esta sección.

Está claro, que en un espacio euclídeo R el operador conjugado de A se puede definir como un operador que para todos $x, y \in R$ verifica la igualdad

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Puesto que en el caso de un espacio euclídeo los operadores A y

A^* actúan en un mismo espacio, puede tener lugar la igualdad $A = A^*$. Hagamos la siguiente definición que destaca una clase importante de operadores en un espacio euclídeo (en particular, de Hilbert).

DEFINICION. Un operador lineal acotado que actúa en un espacio euclídeo R se llama *autoconjugado*, cuando $A = A^*$, es decir, cuando

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

para todos los $x, y \in R$.

Señalemos la siguiente propiedad importante del operador A^* conjugado a un operador A que actúa en un espacio euclídeo R. Un subespacio R_1 del espacio R se llama *invariante* respecto al operador A, cuando de $x \in R_1$ se deduce que $Ax \in R_1$. *Si el subespacio R_1 es invariante respecto de A, su complemento ortogonal $R_1^{\perp}$ es invariante respecto de A^*.* En efecto, si $y \in R_1^{\perp}$, tenemos para todo $x \in R_1$

$$(x, A^*y) = (Ax, y) = 0,$$

ya que $Ax \in R_1$. En particular, si A es un operador autoconjugado, el complemento ortogonal de cualquier subespacio invariante suyo es invariante respecto de A.

EJERCICIO. Demuéstrese que siendo A y B dos operadores lineales acotados en un espacio euclídeo, se verifican las igualdades

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*,$$
$$(AB)^* = (B^* A^*),$$
$$(A^*)^* = A,$$
$$I^* = I \ (I \text{ es el operador unidad}).$$

7°. **Espectro de un operador. Resolvente** [1]. En la teoría de los operadores y en sus aplicaciones desempeña un papel primordial el concepto de espectro de un operador. Recordemos primero este concepto para el caso de operadores en un espacio de dimensión finita.

Sea A un operador lineal en el espacio n-dimensional E^n. El número λ se llama *valor propio* del operador A, cuando la ecuación

$$Ax = \lambda x$$

tiene soluciones no nulas. El conjunto de todos los valores propios se denomina *espectro* del operador A y todos los demás valores de λ se llaman *regulares*. En otras palabras, λ es un punto

[1] Siempre que se hable del espectro de un operador, consideramos que el operador actúa en un espacio complejo.

regular, cuando el operador $(A-\lambda I)$ es invertible. Además, el operador $(A-\lambda I)^{-1}$, como todo operador en un espacio de dimensión finita, es acotado. Por consiguiente, en un espacio de dimensión finita existen dos posibilidades:

1) la ecuación $Ax=\lambda x$ tiene solución no nula, es decir, λ es un valor propio de A; en este caso el operador $(A-\lambda I)^{-1}$ no existe;

2) existe el operador acotado $(A-\lambda I)^{-1}$, esto es, λ es un punto regular.

En el caso de dimensión infinita puede darse una tercera posibilidad, a saber:

3) el operador $(A-\lambda I)^{-1}$ existe, es decir, la ecuación $Ax=\lambda x$ tiene solamente solución nula, pero este operador no es acotado.

Introduzcamos la terminología siguiente. El número λ se llama *regular* para el operador A, que actúa en un espacio E (complejo) topológico lineal, cuando el operador $(A-\lambda I)^{-1}$, llamado *resolvente* del operador A, *está definido en todo el E y es continuo*. El conjunto de todos los demás valores de λ se llama *espectro* del operador A. Al espectro pertenecen todos los valores propios del operador A, ya que, si $(A-\lambda I)x=0$ para un $x\neq 0$, no existe $(A-\lambda I)^{-1}$. El conjunto de ellos se llama *espectro puntual*. La parte restante del espectro, es decir, el conjunto de valores de λ para los cuales $(A-\lambda I)^{-1}$ existe, pero no es continuo, se llama *espectro continuo*. De manera que cada valor de λ es para el operador A o bien regular, o bien valor propio, o bien punto del espectro continuo. La posibilidad de que un operador tenga espectro continuo es lo que distingue de un modo substancial la teoría de operadores en un espacio de dimensión infinita del caso de dimensión finita.

Sea A un operador que actúa en un B-espacio. Si el punto λ es regular, es decir, el operador $(A-\lambda I)^{-1}$ existe y es acotado, para un δ suficientemente pequeño el operador $(A-(\lambda+\delta)I)^{-1}$ también existe y es acotado (teorema 4), es decir, el punto $\lambda+\delta$ es también regular. Por consiguiente, *los puntos regulares constituyen un conjunto abierto*. Es decir, *el espectro*, esto es, el complemento de este conjunto, *es un conjunto cerrado*.

TEOREMA 7. *Si A es un operador lineal acotado en un espacio de Banach y si $|\lambda|>\|A\|$, λ es un punto regular.*

DEMOSTRACION. Como, evidentemente,

$$(A-\lambda I)=-\lambda\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)$$

tenemos

$$R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}.$$

Para $\|A\| < |\lambda|$, esta serie converge (véase el teorema 5), es decir, el operador $A-\lambda I$ tiene inverso acotado. En otras palabras, el espectro del operador A está contenido en el círculo de radio $\|A\|$ con centro en el cero.

Ejemplo. Consideremos en el espacio $C_{[0,1]}$ el operador A definido mediante la fórmula

$$Ax(t) = \mu(t)\,x(t),$$

donde $\mu(t)$ es una función continua fija. Tenemos

$$(A-\lambda I)\,x(t) = (\mu(t)-\lambda)\,x(t),$$

de donde

$$(A-\lambda I)^{-1}x(t) = \frac{1}{\mu(t)-\lambda}\,x(t).$$

El espectro del operador considerado A se compone de todos los λ tales que $\mu(t)-\lambda$ se anula para cierto t, comprendido entre 0 y 1, es decir, el espectro coincide con el conjunto de todos los valores de la función $\mu(t)$ sobre el segmento $[0, 1]$. Por ejemplo, si $\mu(t)=t$, el espectro representa el segmento $[0, 1]$ y no hay valores propios, es decir, el operador de multiplicación por t representa un ejemplo de operador con espectro puramente continuo.

Observaciones. (1) Todo operador lineal acotado, definido en un espacio de Banach completo, que tiene al menos un elemento diferente de cero, tiene espectro no vacío. Existen operadores, cuyo espectro se compone de un solo punto (por ejemplo, el operador de multiplicación por un número).

(2). Se puede precisar el teorema 7 del siguiente modo. Sea

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

(se puede demostrar que este límite existe cualquiera que sea el operador acotado A); entonces, el espectro del operador A se encuentra íntegramente dentro del círculo de radio r y centro en el cero. El número r se llama *radio espectral* del operador A.

(3). Los operadores resolventes R_μ y R_λ, correspondientes a los puntos μ y λ, conmutan y satisfacen la relación

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu-\lambda)\,R_\mu R_\lambda$$

que se puede comprobar fácilmente multiplicando ambos miembros de esta igualdad por

$$(A-\lambda I)(A-\mu I).$$

De aquí se deduce que, siendo λ_0 un punto regular de A, la derivada de R_λ respecto a λ en $\lambda=\lambda_0$, es decir, el límite

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{R_{\lambda_0+\Delta\lambda}-R_{\lambda_0}}{\Delta\lambda}$$

existe (en el sentido de convergencia según la norma de operador) y es igual a $R_{\lambda_0}^2$.

EJERCICIO. Sea A un operador autoconjugado y acotado en un espacio complejo de Hilbert H. Demuéstrese que su espectro es un subconjunto cerrado y acotado del eje real.

§ 6. OPERADORES TOTALMENTE CONTINUOS

1°. Definición y ejemplos de operadores totalmente continuos. Una clase de operadores, que se aproxima por sus propiedades a la clase de operadores que actúan en espacios de dimensión finita y que, al mismo tiempo, es muy importante desde el punto de vista de las aplicaciones, es la clase formada por los así llamados operadores totalmente continuos. Estudiaremos ahora las propiedades principales de estos operadores, limitándonos al caso de espacio de Banach.

DEFINICION. Un operador A que aplica el espacio de Banach E en sí mismo se llama *totalmente continuo*, cuando transforma cada conjunto acotado en uno relativamente compacto.

En un espacio normado de dimensión finita, todo operador lineal es totalmente continuo, ya que transforma cualquier conjunto acotado en otro, acotado también, y en un espacio de dimensión finita todo conjunto acotado es relativamente compacto.

En un espacio de dimensión infinita la continuidad total de un operador es un requerimiento más fuerte que su continuidad simple (es decir, que la acotación). Por ejemplo, el operador unidad en el espacio de Hilbert es continuo, pero no totalmente continuo. (Demuéstrese esto independientemente del ejemplo 1 que se considera a continuación).

Veamos algunos ejemplos.

1. Sea I el operador unidad en un espacio de Banach E. Probemos que siendo E de dimensión infinita, el operador I no es totalmente continuo. Para ello bastará, evidentemente, demostrar que la bola unitaria de E (que, por supuesto, se transforma mediante el operador I en sí misma) no es compacta. Esto, a su vez, se desprende del siguiente lema que nos hará falta también en lo sucesivo.

LEMA. Sean $x_1, x_2, \ldots$ *vectores linealmente independientes de un espacio normado* E *y sea* E_n *el subespacio generado por los vectores* $x_1, \ldots, x_n$. *Entonces, existe una sucesión de vectores* $y_1, \ldots, y_n$ *que satisface las siguientes condiciones:*

$$1)\ \|y_n\| = 1; \quad 2)\ y_n \in E_n; \quad 3)\ \rho(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$$

(aquí $\rho(y_n E_{n-1})$ es la distancia del vector y_n hasta E_{n-1}, es decir, $\inf\limits_{x \in E_{n-1}} \| y_n - x \|$).

DEMOSTRACION. En efecto, como los vectores $x_1, x_2, \ldots$ son linealmente independientes, tenemos $x_n \overline{\in} E_{n-1}$ y $\rho(x_n, E_{n-1}) = \alpha > 0$. Sea x^* un vector de E_{n-1} tal que $\| x_n - x^* \| < 2\alpha$. Entonces, $\rho(x_n - x^*, E_{n-1}) = \alpha$ y el vector

$$y_n = \frac{x_n - x^*}{\| x_n - x^* \|}$$

satisface todas las condiciones 1), 2) y 3). Por y_1 se puede tomar $\frac{x_1}{\| x_1 \|}$. El lema queda demostrado.

Empleando este lema, se puede construir en la bola unitaria de cualquier espacio normado de dimensión infinita una sucesión de vectores $\{y_n\}$ para la cual $\rho(y_{n-1}, y_n) > \frac{1}{2}$. Está claro que esta sucesión no puede contener ninguna subsucesión convergente. Esto significa precisamente que no hay compacidad.

2. Sea A un operador lineal continuo que transforma un espacio de Banach E en un subespacio suyo de dimensión finita. Este operador es totalmente continuo, ya que transforma todo subconjunto acotado $M \subset E$ en un subconjunto acotado de un espacio de dimensión finita, es decir, en un conjunto relativamente compacto.

En particular, en un espacio de Hilbert el operador de proyección ortogonal sobre un subespacio es totalmente continuo cuando, y sólo cuando, este subespacio tiene dimensión finita.

Un operador que transforma un espacio de Banach E en un subespacio de dimensión finita se llama *degenerado*.

3. Consideremos en el espacio l_2 el operador A definido del siguiente modo: si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, entonces,

$$Ax = \left(x_1, \frac{1}{2} x_2, \ldots, \frac{1}{n} x_n, \ldots \right). \tag{1}$$

Este operador es totalmente continuo. En efecto, como todo conjunto acotado de l_2 está contenido en alguna bola de este espacio, basta demostrar que las imágenes de las bolas son relativamente compactas; debido a la linealidad del operador, basta comprobar esto para la bola unitaria. Pero el operador (1) transforma la bola unitaria del espacio l_2 en el conjunto de puntos que satisfacen la condición

$$\sum n^2 x_n^2 \leqslant 1$$

y la compacidad de este conjunto ha sido demostrada ya en el cap. II, § 7.

EJERCICIO. Sea $Ax=(a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n, \ldots)$; ¿qué condiciones debe cumplir la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots$ para que este operador sea totalmente continuo en l_2?

4. En el espacio de funciones continuas $C_{[a,\,b]}$, forman una clase importante de operadores totalmente continuos los operadores que pueden representarse en la forma

$$Ax=y(s)=\int_a^b K(s,\ t)\,x(t)\,dt. \tag{2}$$

Probemos la validez de la siguiente proposición: *si la función $K(s,\ t)$ es acotada sobre el cuadrado $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$ y todos sus puntos de discontinuidad se encuentran en un número finito de curvas*

$$t=\varphi_k(s),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

donde φ_k son funciones continuas, la fórmula (2) *define en el espacio $C_{[a,\,b]}$ un operador totalmente continuo.*

En efecto, observemos, ante todo, que en las condiciones señaladas la integral (2) existe para cualquier s del segmento $[a,\,b]$, es decir, la función $y(s)$ está definida. Sea ahora

$$M=\sup_{a\leqslant s,\ t\leqslant b}|K(s,\ t)|$$

y sea G el conjunto de puntos $(s,\ t)$ en los cuales se cumple, al menos para un $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, la desigualdad

$$|t-\varphi_k(s)|<\frac{\varepsilon}{12\,Mn}.$$

Sea F el complemento del conjunto G respecto al cuadrado $a\leqslant s$, $t\leqslant b$. Como F es compacto y la función $K(s,\ t)$ es continua sobre F, existe un $\delta>0$ tal que

$$|K(s',\ t)-K(s'',\ t)|<\frac{\varepsilon}{3\,(b-a)}$$

para cualesquiera dos puntos $(s',\ t)$, $(s'',\ t)$ de F que satisfacen la condición

$$|s'-s''|<\delta. \tag{3}$$

Estimemos la diferencia $y(s')-y(s'')$ admitiendo que s' y s'' satisfacen la condición (3). Tenemos

$$|\,y(s')-y(s'')\,|\leqslant\int_a^b|K(s',\ t)-K(s'',\ t)|\,|x(t)|\,dt\,|;$$

para evaluar la integral que figura en el miembro derecho, dividamos el segmento de integración $[a, b]$ en dos partes: la unión de intervalos

$$\bigcup_{k=1}^{n}\left[\left\{t\colon |t-\varphi_k(s')|<\frac{\varepsilon}{12Mn}\right\}\cup\left\{t\colon |t-\varphi_k(s'')|<\frac{\varepsilon}{12Mn}\right\}\right],$$

que denotaremos mediante P, y la parte restante del segmento $[a, b]$ que denotaremos mediante Q. Observando que P es la unión de intervalos tales que la suma de sus longitudes no pasa de $\frac{\varepsilon}{3M}$, obtenemos

$$\int_P |K(s', t)-K(s'', t)|\ |x(t)|\,dt<\frac{2\varepsilon}{3}\|x\|.$$

La integral sobre Q admite, obviamente, la estimación

$$\int_Q |K(s', t)-K(s'', t)|\ |x(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{3}\|x\|.$$

Por consiguiente,

$$|y(s')-y(s'')|<\varepsilon\|x\|. \tag{4}$$

La desigualdad (4) muestra que la función $y(s)$ es continua, es decir, la fórmula (2) define, en efecto, un operador que transforma el espacio $C_{[a, b]}$ en sí mismo. Además, se ve de la misma desigualdad que, siendo $\{x(t)\}$ un conjunto acotado de $C_{[a, b]}$, el conjunto correspondiente $\{y(s)\}$ es equicontinuo. Finalmente, si $\|x\|\leqslant C$, tenemos

$$\|y\|=\sup|y(s)|\leqslant\sup\int_a^b |K(s, t)|\ |x(t)|\,dt\leqslant M(b-a)\|x\|.$$

De manera que el operador (2) transforma todo conjunto acotado de $C_{[a, b]}$ en un conjunto de funciones equiacotado y equicontinuo, es decir, relativamente compacto.

4a. La exigencia de que los puntos de discontinuidad de la función $K(s, t)$ se encuentren sobre un número finito de curvas que intersectan las rectas $s=\text{const}$ en un solo punto, es substancial. Sea, por ejemplo,

$$K(s, t)=\begin{cases}1 & \text{para } s<\frac{1}{2},\\[2pt] 0 & \text{para } s\geqslant\frac{1}{2};\end{cases}$$

el operador (2) con este núcleo, que está definido sobre el cuadrado $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ y que tiene por puntos de discontinuidad todo el segmento $s = \frac{1}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, transforma la función $x(t) = 0$ en una función discontinua.

4b. Si se toma $K(s, t) = 0$ para $t > s$, el operador (2) obtiene la forma

$$y(s) = \int_a^s K(s, t)\, x(t)\, dt. \tag{5}$$

Admitiremos que la función $K(s, t)$ es continua para $t < s$; entonces, de lo dicho en el ejemplo 4 se deduce que el operador (5) es totalmente continuo en $C_{[a, b]}$.

Este operador se llama *operador de Volterra*[1].

Observación. Con la definición que hemos adoptado de operador totalmente continuo puede resultar que la imagen de la bola unitaria cerrada no sea compacta (aunque es relativamente compacta). En efecto, consideremos en el espacio $C_{[-1, 1]}$ el operador de integración

$$(Jx)(s) = \int_1^s x(t)\, dt;$$

según hemos demostrado más arriba, J es un operador totalmente continuo en $C_{[-1, 1]}$. Tomemos

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ nt & \text{para } \quad 0 < t \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{para } \quad \frac{1}{n} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

En este caso, $x_n \in G_{[-1, 1]}$, $\|x_n\| = 1$ para todos los n e

$$y_n(t) = (Jx_n)(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} nt^2 & \text{para } \quad 0 < t \leqslant \frac{1}{n}, \\ t - \frac{1}{2n} & \text{para } \quad \frac{1}{n} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Está claro que la sucesión $\{y_n\}$ converge en $C_{[-1, 1]}$ a la función

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t & \text{para } \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

[1] Vitto Volterra, matemático italiano, autor de varias obras sobre Análisis Funcional y Ecuaciones Integrales.

que no es imagen (en la aplicación J) de ninguna función de $C_{[-1,1]}$, ya que la función $y'(t)$ es discontinua.

Sin embargo, se puede demostrar que si el espacio es reflexivo (por ejemplo, de Hilbert) la imagen de la bola unitaria cerrada por una aplicación lineal totalmente continua es un compacto (para la demostración hay que valerse del resultado del ejercicio del punto 6 del § 2).

2°. Propiedades principales de operadores totalmente continuos.

TEOREMA 1. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de operadores totalmente continuos en un espacio de Banach E que converge, según la norma, a un operador A, el operador A es también totalmente continuo.*

DEMOSTRACION. Para probar la continuidad total del operador A bastará probar que cualquiera que sea la sucesión acotada x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de elementos de E ($\|x_n\| \leqslant C$), se puede extraer de la sucesión $\{Ax_n\}$ una subsucesión convergente.

Como el operador A_1 es totalmente continuo, de la sucesión $\{A_1x_n\}$ se puede extraer una subsucesión convergente. Sea

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_n^{(1)},\ \ldots \tag{6}$$

una sucesión tal que $\{A_1x_n^{(1)}\}$ converge. Consideremos ahora la sucesión $\{A_2x_n^{(1)}\}$. De ella podemos también extraer una subsucesión convergente. Sea

$$x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_n^{(2)},\ \ldots$$

tal subsucesión de la sucesión (6) que $\{A_2x_n^{(2)}\}$ converge. Es evidente, entonces, que $\{A_1x_n^{(2)}\}$ también converge. Razonando de un modo análogo, escojamos de la sucesión $\{x_n^{(2)}\}$ una subsucesión

$$x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ \ldots,\ x_n^{(3)},\ \ldots$$

tal que $\{A_3x_n^{(3)}\}$ converge, etc. Tomemos después la sucesión diagonal

$$x_1^{(1)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_n^{(n)},\ \ldots$$

Cada uno de los operadores $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ transforma esta sucesión en una convergente. Probemos que la sucesión $\{Ax_n^{n}\}$ también converge. Con ello quedará demostrada la continuidad total de A. Como el espacio E es completo, bastará demostrar que $\{Ax_n^{(n)}\}$ es una sucesión fundamental. Tenemos

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| \leqslant \|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)}\| + \\ + \|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\| + \|A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|. \tag{7}$$

Escojamos primero k de manera que $\|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}$ y después busquemos un N tal que para todos los $n > N$ y $m > N$ se cumpla la relación

$$\| A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(esto es posible, ya que la sucesión $\{A_k x_n^{(n)}\}$ converge). En estas condiciones, obtenemos de (7) que

$$\| A x_n^{(n)} - A x_m^{(m)} \| < \varepsilon$$

para todos los n y m suficientemente grandes. El teorema queda demostrado.

Es fácil comprobar que una combinación lineal de operadores totalmente continuos es de nuevo un operador totalmente continuo. Por consiguiente, los operadores totalmente continuos forman, en el espacio $\mathscr{L}(E, E)$ de todos los operadores lineales acotados, definidos en E, un subespacio lineal cerrado.

Veamos ahora si el conjunto de operadores totalmente continuos está cerrado respecto a la operación de multiplicación de operadores. Resulta que en este orden es válida una afirmación substancialmente más profunda.

TEOREMA 2. *Si A es un operador totalmente continuo y B un operador acotado, los operadores AB y BA son totalmente continuos.*

DEMOSTRACION. Si el conjunto $M \subset E$ es acotado, BM también es acotado. Por consiguiente, ABM es relativamente compacto y esto significa precisamente que el operador AB es totalmente continuo. Además, si M es acotado, tenemos que AM es relativamente compacto y, debido a la continuidad de B, el conjunto BAM resulta también relativamente compacto, es decir, el operador BA es totalmente continuo. El teorema queda demostrado.

COROLARIO. *En un espacio E de dimensión infinita un operador totalmente continuo no puede tener un inverso acotado.*

En efecto, en el caso contrario, el operador unidad $I = A^{-1}A$ sería totalmente continuo en E, lo cual es imposible (véase el ejemplo 1).

Observación. El teorema 2 indica que los operadores totalmente continuos forman en el anillo de todos los operadores acotados $\mathscr{L}(E, E)$ un ideal bilateral [1].

TEOREMA 3. *El operador conjugado a un operador totalmente continuo es totalmente continuo.*

DEMOSTRACION. Sea A un operador totalmente continuo en un espacio de Banach E. Probemos que el operador conjugado A^*,

---

[1] Un *ideal* (bilateral) de un anillo R es un subanillo $\mathfrak{A}$ tal que, si $a \in \mathfrak{A}$ y $r \in R$, se tiene $ar \in \mathfrak{A}$ y $ra \in \mathfrak{A}$.

que actúa en E^*, transforma cada subconjunto acotado de E^* en uno relativamente compacto. Como todo subconjunto acotado de un espacio normado se encuentra en una bola, bastará demostrar que A^* transforma cada bola en un conjunto relativamente compacto. Debido a la linealidad del operador A^*, es suficiente demostrar que la imagen A^*S^* de la bola unitaria cerrada $S^* \subset E^*$ es relativamente compacta.

Consideremos los elementos de E^* como funciones definidas no sobre todo el espacio E, sino solamente sobre el compacto $\overline{AS}$, que es la adherencia de la imagen de la bola unitaria por la aplicación A. Entonces, el conjunto Φ de funciones, correspondientes a las funcionales que pertenecen a S^*, será equiacotado y equicontinuo. En efecto, si $\|\varphi\| \leqslant 1$; tenemos

$$\sup_{x \in \overline{AS}} |\varphi(x)| = \sup_{x \in AS} |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \sup_{x \in S} \|Ax\| \leqslant \|A\|$$

y

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x' - x''\| \leqslant \|x' - x''\|.$$

Por consiguiente, el conjunto Φ es relativamente compacto en el espacio $C(\overline{AS})$ (en virtud del teorema de Arzelá). Pero el conjunto Φ, considerado con la métrica inducida por la métrica habitual del espacio de funciones continuas $C(\overline{AS})$, es isométrico al conjunto A^*S^* (con la métrica inducida por la norma del espacio E^*). En efecto, si $g_1, g_2 \in S^*$, se tiene

$$\|A^*g_1 - A^*g_2\| = \sup_{x \in S} (A^*g_1 - A^*g_2, x)| =$$
$$= \sup_{x \in S} |(g_1 - g_2, Ax)| = \sup_{z \in AS} |(g_1 - g_2 z)| =$$
$$= \sup_{z \in \overline{AS}} |(g_1 - g_2, z)| = \rho(g_1, g_2).$$

Como Φ es relativamente compacto, es totalmente acotado; luego es también totalmente acotado el conjunto A^*S^* isométrico a él. Por esto A^*S^* es relativamente compacto en E^*. El teorema queda demostrado.

Observación. No es difícil comprobar que el conjunto Φ es cerrado en $C(\overline{AS})$, de manera que es compacto; por eso también es compacto el conjunto A^*S^*, aunque (como se deduce de la observación hecha en la pág. 254) la imagen por una aplicación totalmente continua arbitraria de la bola cerrada unitaria puede no ser un compacto. La situación en el teorema que acabamos de demostrar difiere de la general en que la bola cerrada unitaria S^* de E^* es compacta en la topología $*$-débil del espacio E^* (véase el teorema 3 del § 3). De aquí se deduce precisamente la compacidad (según la métrica del espacio E^*) de la imagen del conjunto S^* para cualquier operador totalmente continuo.

EJERCICIOS. 1. Sea A un operador lineal acotado en un espacio de Banach. Demuéstrese que siendo el operador A^* totalmente continuo, el operador A es también totalmente continuo.

2. Para que un operador lineal A en un espacio de Hilbert H sea totalmente continuo es necesario y suficiente que su operador conjugado (de Hermite) A^* sea totalmente continuo.

3°. Valores propios de un operador totalmente continuo.

TEOREMA 4. *Todo operador totalmente continuo A en un espacio de Banach E tiene para cualquier $\rho > 0$ sólo un número finito de vectores propios linealmente independientes, correspondientes a valores propios, cuyos valores absolutos no son mayores que ρ.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos, ante todo, que el subespacio invariante E_λ, compuesto por todos los vectores propios del operador A que corresponden a un valor propio λ no nulo, es de dimensión finita. En efecto, si fuese E_λ de dimensión infinita, el operador A no sería totalmente continuo en el subespacio E_λ y, por consiguiente, en todo el E también. Por eso, para terminar la demostración del teorema bastará probar que, si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión arbitraria de valores propios, diferentes dos a dos, de un operador totalmente continuo A, se tiene $\lambda_n \to 0$ para $n \to \infty$. A su vez, para ello es suficiente probar que no existe una sucesión infinita de valores propios $\{\lambda_n\}$, diferentes dos a dos, tal que la sucesión $\left\{\frac{1}{\lambda_n}\right\}$ sea acotada. Supongamos que existe tal sucesión y sea x_n el vector propio correspondiente al valor propio λ_n. Los vectores $x_1, x_2, \ldots$ son linealmente independientes[1]. Sea $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ el subespacio generado por los vectores $x_1, \ldots, x_n$, es decir, sea E_n el conjunto de todos los elementos de tipo

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k.$$

Para cada $y \in E_n$ tenemos

$$y - \frac{1}{\lambda_n} Ay = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) x_k,$$

de donde se ve que

$$y - \frac{1}{\lambda_n} Ay \in E_{n-1}.$$

[1] La independencia lineal de los vectores correspondientes a diferentes valores propios de un operador, que actúa en un espacio normado, se demuestra igual que para los operadores en un espacio de dimensión finita (véase, por ejemplo, *Kurosch A. G., Curso de Álgebra Superior*. Editorial MIR, Moscú, 1968, pág. 213.)

Escojamos una sucesión $\{y_n\}$ de manera que

1) $y_n \in E_n$; 2) $\|y_n\| = 1$; 3) $\rho(y_n, E_{n-1}) = \inf\limits_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}$

(la existencia de una sucesión de este tipo ha sido demostrada en el lema de la pág. 250). Si la sucesión $\left\{\frac{1}{\lambda_n}\right\}$ es acotada, entonces, $\left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}$ es una sucesión acotada en E. Pero, al mismo tiempo, la sucesión $\left\{A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}$ no contiene ninguna subsucésión convergente, ya que para cualesquiera $p > q$

$$\left\|A\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right)\right\| = \left\|y_p - \left[y_p - \frac{1}{\lambda_p} A y_p + A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right)\right]\right\| > \frac{1}{2},$$

puesto que $y_p - \frac{1}{\lambda} A y_p + A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right) \in E_{p-1}$. La contradicción obtenida demuestra el teorema.

4°. Operadores totalmente continuos en un espacio de Hilbert. En lo que precede hemos tratado de operadores totalmente continuos en un espacio de Banach arbitrario. Ahora completaremos nuestra exposición con algunos resultados referentes a operadores totalmente continuos en un espacio de Hilbert.

Hemos llamado un operador A totalmente continuo, cuando transforma todo conjunto acotado en uno relativamente compacto. Como $H = H^*$, es decir, H es el espacio dual a uno separable, todos los conjuntos acotados de él (y solamente ellos) son débilmente compactos. Por consiguiente, un operador totalmente continuo en un espacio de Hilbert puede definirse como un operador que transforma un conjunto débilmente compacto en un conjunto relativamente compacto según la topología fuerte. Finalmente, resulta cómoda, a veces, la siguiente definición de un operador totalmente continuo en un espacio de Hilbert: un operador A se llama totalmente continuo en H, cuando transforma toda sucesión débilmente convergente en una convergente fuertemente.

En efecto, supongamos que esta condición se cumple y sea M un conjunto acotado de H. Cada subconjunto infinito del conjunto M contiene una sucesión débilmente convergente. Si ésta se transforma en una sucesión fuertemente convergente, AM es compacto. Viceversa, sean A un operador totalmente continuo, $\{x_n\}$ una sucesión de convergencia débil y x su límite débil. Entonces, $\{Ax_n\}$ contiene una subsucesión que converge fuerte. Al mismo tiempo, debido a la continuidad de A, $\{Ax_n\}$ converge débilmente hacia Ax, de donde se sigue que $\{Ax_n\}$ no puede tener más de un punto de acumulación. Por consiguiente, $\{Ax_n\}$ es una sucesión convergente.

5°. Operadores autoconjugados y totalmente continuos en H. Para el caso de operadores lineales autoconjugados, que actúan en un espacio euclídeo de dimensión finita, se conoce el teorema sobre la reducción de la matriz de una transformación lineal de este tipo a la forma diagonal respecto a una base ortonormal. En este punto demostraremos un teorema que representa la generalización de este resultado al caso de operadores autoconjugados y totalmente continuos en un espacio de Hilbert. Los resultados de este punto son válidos tanto para el espacio de Hilbert real, como complejo. Para concretar, admitiremos que H es complejo.

Demostremos, ante todo, algunas propiedades de los vectores y valores propios de operadores autoconjugados en H, que son además, totalmente análogas a las propiedades correspondientes de operadores autoconjugados de dimensión finita.

I. Todos los valores propios de un operador A, autoconjugado y acotado en H, son reales.

En efecto, sea $Ax = \lambda x$, $\|x\| \neq 0$; entonces,

$$\lambda (x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda} (x, x),$$

de donde $\lambda = \bar{\lambda}$.

II. Los vectores propios de un operador autoconjugado y acotado, correspondientes a diferentes valores propios, son ortogonales.

Efectivamente, si $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ y $\lambda \neq \mu$, tenemos

$$\lambda (x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (y, \mu y) = \mu (x, y),$$

de donde $(x, y) = 0$.

Demostremos ahora el siguiente teorema fundamental.

TEOREMA 5 (Hilbert—Schmidt). *Para cualquier operador lineal A autoconjugado y totalmente continuo en un espacio de Hilbert H existe un sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ de vectores propios, correspondientes a los valores propios $\{\lambda_n\}$ tal que cada elemento $\xi \in H$ se puede escribir de manera única en la forma*

$$\xi = \sum c_k \varphi_k + \xi',$$

donde el vector ξ' verifica la condición $A\xi' = 0$; además,

$$A\xi = \sum \lambda_k c_k \varphi_k$$

y

$$\lim \lambda_n = 0 \ (n \to \infty).$$

Para demostrar este teorema principal necesitaremos de las siguientes proposiciones auxiliares.

LEMA 1. *Si $\{\xi_n\}$ converge débilmente hacia ξ y el operador A es totalmente continuo, se tiene*

$$Q(\xi_n) = (A\xi_n,\ \xi_n) \to (A\xi,\ \xi) = Q(\xi).$$

DEMOSTRACION. Para cualquier n

$$|(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi)| \leqslant |(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi_n)| + |(A\xi,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi)|.$$

Pero

$$|(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi_n)| \leqslant \|\xi_n\| \cdot \|A(\xi_n - \xi)\|$$

y

$$|(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi)| = |(\xi,\ A(\xi_n - \xi))| \leqslant \|\xi\| \cdot \|A(\xi_n - \xi)\|$$

y, como los números $\|\xi_n\|$ son acotados y $\|A(\xi_n - \xi)\| \to 0$, tenemos

$$|(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi)| \to 0,$$

que es lo que se quería demostrar.

LEMA 2. *Si una funcional*

$$|Q(\xi)| = |(A\xi,\ \xi)|,$$

donde A es un operador lineal autoconjugado y acotado, alcanza un máximo en el punto ξ_0 de la bola unitaria, entonces

$$(\xi_0,\ \eta) = 0$$

implica que

$$(A\xi_0,\ \eta) = (\xi_0,\ A\eta) = 0.$$

DEMOSTRACION. Es obvio que $\|\xi_0\| = 1$. Tomemos

$$\xi = \frac{\xi_0 + a\eta}{\sqrt{1 + |a|^2 \|\eta\|^2}},$$

donde a es un número complejo arbitrario. De $\|\xi_0\| = 1$ se sigue que

$$\|\xi\| = 1.$$

Como

$$Q(\xi) = \frac{1}{1 + |a|^2 \|\eta\|^2} [Q(\xi_0) + 2a(A\xi_0,\ \eta) + a^2 Q(\eta)],$$

para valores pequeños de a tenemos

$$Q(\xi) = Q(\xi_0) + 2a(A\xi_0,\ \eta) + O(a^2).$$

De la última igualdad se ve claramente que si $(A\xi_0,\ \eta) \neq 0$, se puede escoger a de manera que $|Q(\xi)| > |Q(\xi_0)|$ y esto contradice a la condición del lema.

Del lema 2 se deduce inmediatamente que si $|Q(\xi)|$ alcanza un máximo para $\xi=\xi_0$, entonces, ξ_0 es un vector propio del operador.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. Construiremos los vectores φ_k por inducción en el orden de decrecimiento de los valores absolutos de sus correspondientes valores propios

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\ldots\geqslant|\lambda_n|\geqslant\ldots$$

Para construir el elemento φ_1 consideremos la expresión $|Q(\xi)|=|(A\xi,\ \xi)|$ y demostremos que alcanza un máximo sobre la bola unitaria. Sea

$$S=\sup_{\|\xi\|\leqslant 1}|(A\xi,\ \xi)|$$

y sea $\xi_1,\ \xi_2,\ldots$ una sucesión tal que $\|\xi_n\|=1$ y

$$|(A\xi_n,\ \xi_n)|\longrightarrow S \text{ para } n\longrightarrow\infty.$$

Como la bola unitaria es débilmente compacta en H, se puede escoger de $\{\xi_n\}$ una subsucesión que converge débilmente hacia un elemento η. En este caso $\|\eta\|\leqslant 1$ y, en virtud del lema 1

$$|(A\eta,\ \eta)|=S.$$

Tomaremos por φ_1 el elemento η. Está claro que $\|\eta\|$ es exactamente igual a 1. (En efecto, sea $\eta=\eta_1$ y $\|\eta_1\|<1$. Tomemos $\eta=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|}$; entonces, $\|\eta\|=1$ y $|(A\eta,\ \eta)|>S$, lo que contradice a la definición de S.) Además,

$$A\varphi_1=\lambda_1\varphi_1,$$

de donde

$$|\lambda_1|=\frac{|(A\varphi_1,\ \varphi_1)|}{(\varphi_1,\ \varphi_1)}=|(A\varphi_1,\ \varphi_1)|=S.$$

Supongamos ahora que se han construido ya los vectores propios

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,$$

correspondientes a los valores propios

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n.$$

Consideremos la funcional

$$|(A\xi,\ \xi)|$$

sobre el conjunto de elementos pertenecientes a

$$M_n'=H\ominus M(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n)$$

(es decir, ortogonales a $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$), tales que $\|\xi\|<1$. M_n' representa un subespacio invariante respecto de A (ya que

$M(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ es invariante y A es autoconjugado). Aplicando a M'_n los razonamientos anteriores, encontraremos en M'_n un vector propio del operador A; denotémoslo mediante φ_{n+1}.

Se puede dar dos casos: 1) después de un número finito de pasos obtendremos un subespacio M'_{n_0} en el cual $(A\xi, \xi) \equiv 0$; 2) $(A\xi, \xi) \not\equiv 0$ sobre M'_n para todo n.

En el primer caso, el lema 2 implica que el operador A transforma M'_{n_0} en cero, esto es, que M'_{n_0} consta solamente de los vectores propios correspondientes a $\lambda = 0$. El sistema construido de vectores $\{\varphi_n\}$ consta de un número finito de elementos.

En el segundo caso, obtendremos una sucesión $\{\varphi_n\}$ de vectores propios para cada uno de los cuales $\lambda_n \neq 0$. Probemos que $\lambda_n \to 0$. La sucesión $\{\varphi_n\}$ (como cualquier sucesión ortonormal) converge débilmente hacia el cero y por esto los elementos $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ deben converger, según la norma, hacia el cero, de donde $\lambda_n = \| A\varphi_n \| \to 0$.

Sea

$$M' = H \ominus M\{\varphi_n\} = \bigcap_n M'_n \neq 0.$$

Si $\xi \in M'$ y $\xi \neq 0$, tenemos

$$(A\xi, \xi) \leqslant \lambda_n \|\xi\|^2 \text{ para todo } n,$$

es decir,

$$(A\xi, \xi) = 0,$$

de donde, en virtud del lema 2 (para $\max |(A\xi, \xi)| = 0$) aplicado a M', obtenemos $A\xi = 0$, es decir, el operador A transforma el subespacio M' en cero.

De la construcción del conjunto $\{\varphi_n\}$, está claro que todo vector se puede representar en la forma

$$\xi = \sum c_k\varphi_k + \xi', \text{ donde } A\xi' = 0,$$

de donde se desprende que

$$A\xi = \sum \lambda_k c_k \varphi_k.$$

El teorema queda demostrado. Este teorema desempeña un papel fundamental en la teoría de Ecuaciones Integrales, de las cuales hablaremos en el capítulo X.

Observación. El teorema demostrado significa que para todo operador autoconjugado y totalmente continuo A de H existe una base ortogonal del espacio H compuesta por los vectores propios de este operador. En efecto, para obtener una base de este tipo bastará completar el sistema de vectores propios $\{\varphi_n\}$ construido en la demostración del teorema con una base ortogonal arbitraria del subespacio M' que es transformado por el operador A en el cero. En otras palabras, obtenemos aquí un resultado completamente análogo al teorema sobre la reducción de la matriz de un operador autoconjugado de dimensión finita a la forma diagonal en una base ortogonal.

Para los operadores no autoconjugados de un espacio n-dimensional esta reducción es, en general, imposible, sin embargo, es válido el siguiente teorema: *toda transformación lineal en un espacio n-dimensional tiene al menos un vector propio.* Es fácil ver que esta proposición no es extensible a operadores totalmente continuos en H. He aquí un ejemplo correspondiente. Consideremos en l_2 el siguiente operador A:

$$Ax = A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{n-1}, \ldots\right).$$

Este operador no tiene ningún vector propio. En efecto, si

$$Ax = \lambda x,$$

se tiene

$$\lambda x_1 = 0, \ \lambda x_2 = x_1, \ \ldots, \ \lambda x_n = \frac{x_{n-1}}{n-1}, \ \ldots,$$

de donde $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots = 0$.

CAPITULO V

ELEMENTOS DEL CALCULO DIFERENCIAL EN ESPACIOS LINEALES

En las cuestiones del Análisis Funcional que hemos tocado en los capítulos anteriores el papel principal correspondió a los conceptos de funcional lineal y operador lineal. Sin embargo, algunos problemas que surgen en el Análisis Funcional tienen un carácter sustancialmente no lineal e imponen la necesidad de desarrollar, junto al Análisis Funcional «lineal», el Análisis Funcional «no lineal», es decir, estudiar funcionales no lineales y operadores no lineales en espacios de dimensión infinita. Al Análisis Funcional no lineal pertenece, de hecho, una rama clásica de las Matemáticas que es el Cálculo de Variaciones, cuyos fundamentos fueron dados ya en los siglos XVII y XVIII en las obras de Bernoulli, Euler, Legendre y Jacobi. No obstante, el Análisis Funcional no lineal representa, en su conjunto, una rama relativamente moderna de las Matemáticas, aún muy lejos de su culminación. En este capítulo expondremos algunos conceptos primarios referentes al Análisis Funcional no lineal, principalmente, a la teoría de diferenciación, así como algunas aplicaciones de estos conceptos.

§ 1. DIFERENCIACION EN ESPACIOS LINEALES

1°. Diferencial fuerte (diferencial de Fréchet). Sean X e Y dos espacios normados y F una aplicación que actúa de X en Y y está definida sobre un subconjunto abierto O del espacio X. Diremos que esta aplicación es *diferenciable* en un punto dado $x \in O$, cuando existe un operador lineal acotado $L_x \in \mathscr{L}(X, Y)$ tal que

$$F(x+h)-F(x)=L_x(h)+\alpha(x, h), \tag{1}$$

donde
$$\frac{\|\alpha(x, h)\|}{\|h\|} \to 0 \text{ para } \|h\| \to 0. \tag{2}$$

La expresión $L_x(h)$ (que para cada $h \in X$ representa, evidentemente, un elemento del espacio Y) se llama *diferencial fuerte* (o *diferencial de Fréchet*) de la aplicación F en el punto x. El propio operador lineal L_x se llama *derivada*, más precisamente, *derivada fuerte* de la aplicación F en el punto x. Denotaremos esta derivada mediante el símbolo $F'(x)$.

Si la aplicación F es diferenciable en el punto x, la derivada correspondiente se determina de manera única. En efecto, sea

$$F(x+h) - F(x) = L_x^{(1)}(h) + \alpha_1(x, h) = L_x^{(2)}(h) + \alpha_2(x, h);$$

entonces,

$$L_x^{(1)}(h) = L_x^{(2)}(h) = \alpha_2(x, h) - \alpha_1(x, h)$$

y, en virtud de (2),

$$\frac{\|L_x^{(1)}(h) - L_x^{(2)}(h)\|}{h} \to 0 \text{ para } \|h\| \to 0. \tag{3}$$

Pero, si para algún h se tiene

$$\frac{\|L_x^{(1)}(h) - L_x^{(2)}(h)\|}{h} = \lambda \neq 0,$$

tendremos para cualquier $\varepsilon \neq 0$

$$\frac{\|L_x^{(1)}(\varepsilon h) - L_x^{(2)}(\varepsilon h)\|}{h} = \lambda,$$

y la relación (3) no se cumple.

Señalemos ahora algunos resultados elementales que se deducen directamente de la definición de la derivada.

1. *Si* $F(x) = y_0 = \text{const}$, *se tiene* $F'(x) \equiv 0$ *(es decir,* $F'(x)$ *es, en este caso, el operador nulo).*

2. *La derivada de una aplicación lineal continua* L *es esta misma aplicación.*

En efecto, tenemos, por definición,

$$L(x+h) - L(x) = L(h).$$

Menos obvio es el siguiente resultado importante.

3. *(Derivada de una función compuesta). Sean* X, Y *y* Z *tres espacios normados,* $U(x_0)$ *una vecindad del punto* $x_0 \in X$, F *una aplicación continua de esta vecindad en* Y, $y_0 = F(x_0)$, $V(y_0)$ *una vecindad del punto* $y_0 \in Y$ *y* G *una aplicación continua de esta vecindad en* Z. *Entonces, si la aplicación* F *es diferenciable en el punto* x_0 *y* G *es diferenciable en el punto* y_0, *la aplicación* $H = GF$

(que está definida y es continua en una vecindad del punto x_0) *es diferenciable en el punto* x_0 y

$$H'(x_0) = G'(y_0)\,F'(x_0). \tag{4}$$

Efectivamente, de acuerdo con las suposiciones hechas

$$F(x_0+\xi) = F(x_0) + F'(x_0)\,\xi + o_1(\xi)$$

y

$$G(y_0+\eta) = G(y_0) + G'(y_0)\,\eta + o_2(\eta).$$

Pero, $F'(x_0)$ y $G'(y_0)$ son operadores lineales acotados. Por eso

$$\begin{aligned} H(x_0+\xi) &= G(y_0 + F'(x_0)\,\xi + o_1(\xi)) = \\ &= G(y_0) + G'(y_0)(F'(x_0)\,\xi + o_1(\xi)) + o_2(F'(x_0)\,\xi + o_1(\xi)) = \\ &= G(y_0) + G'(y_0)\,F'(x_0)\,\xi + o_3(\xi). \end{aligned}$$

Siendo F, G y H funciones numéricas, la fórmula (4) se convierte en la conocida regla de diferenciación de una función compuesta.

4. *Sean* F *y* G *dos aplicaciones continuas que actúan de* X *en* Y. *Si* F *y* G *son diferenciables en el punto* x_0, *las aplicaciones* $F+G$ *y* aF (a es un número) *son también diferenciables en este punto y*

$$(F+G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0) \tag{5}$$

y

$$(aF)'(x_0) = aF'(x_0). \tag{6}$$

En efecto, de las definiciones de suma de operadores y de producto de un operador por un número, obtenemos inmediatamente que

$$\begin{aligned} (F+G)(x_0+h) &= F(x_0+h) + G(x_0+h) = \\ &= F(x_0) + G(x_0) + F'(x_0)\,h + G'(x_0)\,h + o_1(h) \end{aligned}$$

y

$$aF(x_0+h) = aF(x_0) + aF'(x_0)\,h + o_2(h)$$

de donde se deducen las igualdades (5) y (6).

2°. Diferencial débil (diferencial de Gato). Sea de nuevo F una aplicación que actúa de X en Y. Se llama *diferencial débil*, o *diferencial de Gato*, de la aplicación F en el punto x al límite

$$DF(x,\ h) = \frac{d}{dt} F(x+th)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t},$$

donde la convergencia se entiende como la convergencia según la norma del espacio Y.

La diferencial débil $DF(x, h)$ puede no ser lineal respecto a h. Si esta linealidad tiene lugar, es decir, si

$$DF(x,\ h) = F'_c(x)\,h,$$

donde $F'_c(x)$ es un operador lineal, este operador se llama *derivada débil* (o *derivada de Gato*).

Señalemos que para las derivadas débiles no se cumple, como regla general, el teorema sobre la diferenciación de una función compuesta. (Dése un ejemplo).

3°. Fórmula de incremento finito. Supongamos que O es un conjunto abierto de X y que el segmento $[x_0, x]$ está contenido íntegramente en O. Sea, además, F una aplicación de X en Y, definida sobre O, que tiene derivada débil F'_c en cada punto del segmento $[x_0, x]$. Poniendo $\Delta x = x - x_0$ y tomando una funcional arbitraria $\varphi \in Y^*$, consideremos la función numérica

$$f(t) = \varphi(F_c(x_0 + t\,\Delta x)),$$

definida para $0 \leqslant t \leqslant 1$. Esta función es diferenciable respecto a t. Efectivamente, en la expresión

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \varphi \frac{F(x_0 + t\,\Delta x + \Delta t\,\Delta x) - F(x_0 + t\,\Delta x)}{\Delta t}$$

se puede pasar al límite bajo el signo de la funcional lineal continua φ. Tendremos, entonces,

$$f'(t) = \varphi(F'_c(x_0 + t\,\Delta x)(\Delta x)).$$

Aplicando en el segmento $[0, 1]$ a la funcion f la fórmula de incremento finito, encontraremos

$$f(1) - f(0) = f'(\theta), \text{ donde } 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

es decir,

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \varphi(F'_c(x_0 + \theta\Delta x)(\Delta x)). \tag{7}$$

Esta relación tiene lugar para cualquier funcional $\varphi \in Y^*$ (el valor θ depende, claro está, de φ). De (7) obtenemos

$$|\varphi(F(x) - F(x_0))| \leqslant \|\varphi\| \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|F'_c(x_0 + \theta\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\|. \tag{8}$$

Escojamos ahora una funcional no nula φ de manera que

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \|\varphi\| \cdot \|F(x) - F(x_0)\|$$

(tal funcional φ existe en virtud del teorema de Hahn—Banach). Entonces, obtenemos de (8)

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|F'_c(x_0 + \theta\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\| \quad (\Delta x = x - x_0). \tag{9}$$

Esta desigual dad puede ser considerada como un análogo del teorema del valor medio para las funciones numéricas.

Aplicando la desigualdad (9) a la aplicación

$$x \to F(x) - F'_c(x_0)(\Delta x),$$

obtendremos la desigualdad siguiente:

$$\| F(x) - F(x_0) - F'_c(x_0)(\Delta x) \| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \| F'_c(x_0 + \theta \Delta x) - F'_c(x_0) \| \cdot \| \Delta x \|. \quad (10)$$

4°. **Relación entre las diferenciabilidades débil y fuerte.** Las diferenciabilidades débil y fuerte constituyen conceptos diferentes incluso en el caso de espacios de dimensión finita. Efectivamente, es bien conocido del Análisis que para una función numérica

$$f(x) = f(x_1, \ \ldots, \ x_n)$$

la existencia de la derivada

$$\frac{d}{dt} f(x + th)$$

para cualquier $h = (h_1, \ \ldots, \ h_n)$ fijo no implica aún, en el caso de $n \geqslant 2$, la diferenciabilidad de esta función, es decir, la posibilidad de representar su incremento $f(x+h) - f(x)$ como la suma de una parte lineal (respecto a h) y un miembro infinitésimo de orden superior al primero respecto a $|h|$.

Como ejemplo elemental, puede servir aquí la función de dos variables

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{cuando } x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, \text{ cuando } x_1 = x_2 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Esta función es continua en todo el plano, incluido el punto (0, 0). Tiene diferencial débil en el punto (0, 0), ya que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + th) - f0}{t} = \lim_{t \to 0} \left(h_1 + h_2 + \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^4 h_1^4 + t^2 h_2^2} \right) = h_1 + h_2.$$

Sin embargo, esta diferencial no constituye la parte lineal principal del incremento de la función (11) en el punto (0, 0). En efecto, sea

$$\omega(0, \ h) = f(0 + h) - f(0) - (h_1 + h_2) = \frac{h_1^3 h_2}{h_1^4 + h_2^2}.$$

Entonces, tomando $h_2 = h_1^2$, tendremos

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\omega(0, \ h)}{\|h\|} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1^5}{2h_1^4 \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Al mismo tiempo, si una aplicación F es diferenciable en el sentido fuerte, es diferenciable también débilmente y, además, las diferenciales fuerte y débil coinciden. Efectivamente, para una aplicación fuertemente diferenciable, tenemos

$$F(x+th)-F(x)=F'(x)(th)+o(th)=tF'(x)(h)+o(th)$$

y

$$\frac{F(x+th)-F(x)}{t}=F'(x)(h)+\frac{o(th)}{t}\to F'(x)(h).$$

Busquemos las condiciones en las cuales la diferenciabilidad débil de una aplicación F implica su diferenciabilidad fuerte.

TEOREMA 1. *Si la derivada débil $F'_c(x)$ de la aplicación F existe en una vecindad $U(x_0)$ del punto x_0 y representa en esta vecindad una función continua (operadora) de x, la derivada fuerte $F'(x_0)$ existe en el punto x_0 y coincide con la débil.*

DEMOSTRACION. Por hipótesis, la aplicación F tiene derivada débil, esto es, $DF(x_0, h)=F'_c(x_0)h$. Escojamos h de manera que $x_0+h\in U(x_0)$ y consideremos la expresión

$$\omega(x_0, h)=F(x_0+h)-F(x_0)-F'_c(x_0)h. \tag{12}$$

Si e es ahora un elemento arbitrario del espacio y^* dual a Y, obtenemos de (12)

$$(\omega(x_0, h), e)=(F(x_0+h)-F(x_0), e)-(F'_c(x_0)h, e). \tag{13}$$

Consideremos la función $f(t)=(F(x_0+th), e)$ de argumento numérico t. Esta función es diferenciable respecto a t y para ella

$$\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{F(x_0+th+\Delta th)-F(x_0+th)}{\Delta t}, e\right)=(F'_c(x_0+th)h, e).$$

Por eso, aplicando a f la fórmula de incremento finito, podemos escribir la igualdad (13) en la forma

$$(\omega(x_0, h), e)=([F'_c(x_0+\tau h)-F'_c(x_0)]h, e), \tag{13'}$$

donde $0\leqslant\tau\leqslant 1$. Para un h fijo, el elemento $e\in Y^*$ se puede escoger de manera que $\|e\|=1$ y que se cumpla la desigualdad

$$|(\omega(x_0, h), e|\geqslant\frac{1}{2}\|\omega(x_0, h)\|\cdot\|e\|=\frac{1}{2}\|\omega(x_0, h)\|.$$

De aquí y de la igualdad (13') encontramos que

$$\|\omega(x_0, h)\|\leqslant 2\|F'_c(x_0+\tau h)-F'_c(x_0)\|\cdot\|h\|.$$

Pero $F'_c(x)$ es, por hipótesis, una función operadora continua de x; por eso,

$$\lim_{h\to 0}\|F'_c(x_0+\tau h)-F'_c(x_0)\|=0,$$

de manera que $\|\omega(x_0, h)\|$ es una infinitésima de orden superior al primero respecto a $\|h\|$, es decir, $F'_c(x_0)h$ constituye la parte principal de la diferencia $F(x_0+h)-F(x_0)$. Con esto queda demostrado tanto la existencia de la derivada fuerte $F'(x_0)$ como su coincidencia con la derivada débil. En lo sucesivo consideraremos, siempre que no se diga lo contrario, aplicaciones diferenciables en el sentido fuerte y, por consiguiente, también en el débil.

5°. **Funcionales diferenciables.** Hemos introducido el concepto de diferencial de una aplicación F que actúa de un espacio normado X en otro espacio normado Y. La derivada $F'(x)$ de esta aplicación representa para cada x un operador lineal de X en Y, esto es, un elemento del espacio $\mathscr{L}(X, Y)$. En particular, si Y es la recta numérica, F es una función sobre X que toma valores numéricos, es decir, una funcional. En este caso, la derivada de la funcional F en el punto x_0 es una funcional lineal (que depende de x_0), es decir, un elemento del espacio X^*.

Ejemplo. Consideremos en el espacio de Hilbert real H la funcional $F(x)=\|x\|^2$. Entonces,

$$\|x+h\|^2-\|x\|^2=2(x, h)+\|h\|^2;$$

la expresión $2(x, y)$ constituye la parte lineal principal de esta expresión y, por consiguiente [1],

$$F'(x)=F'_c(x)=2x.$$

EJERCICIO. Calcúlese la derivada de la funcional $\|x\|$. $\left(\text{Respuesta: } \dfrac{x}{\|x\|}\right.$ para $x \neq 0$; para $x=0$ no existe$\Big)$.

6°. **Funciones abstractas.** Supongamos ahora que el espacio de argumentos X coincide con la recta numérica. La aplicación $F(x)$ que pone en correspondencia al número x un elemento de un espacio de Banach Y se llama *función abstracta*. La derivada de una función abstracta $F'(x)$ (si es que existe) representa (para cada x) un elemento del espacio Y. Para una función abstracta (que representa una función de un argumento numérico) la diferenciabilidad débil coincide con la fuerte.

7°. **Integral.** Sea F una función abstracta de argumento real t con valores en un espacio de Banach Y. Si F está definida sobre un segmento $[a, b]$, se puede definir la integral de la

[1] Basándonos en el teorema sobre la expresión general de una funcional lineal continua en un espacio de Hilbert, identificamos aquí las funcionales de H^* con los elementos correspondientes de H.

función F en el segmento $[a, b]$. Esta integral se comprende como el límite de las sumas integrales

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1}-t_k)$$

correspondientes a las particiones

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b, \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

cuando $\max|t_{k+1}-t_k| \to 0$. Esta integral (que representa, evidentemente, un elemento de Y) se denota mediante el símbolo

$$\int_a^b F(t)\,dt.$$

Razonamientos, análogos a los empleados para funciones que toman valores numéricos, demuestran que la integral de una función continua sobre un segmento existe; además, ella tiene propiedades análogas a las propiedades de la integral corriente de Riemann. Señalemos entre estas propiedades las siguientes.

1. Si U es una aplicación lineal continua fija del espacio Y en un espacio Z, se tiene

$$\int_a^b UF(t)\,dt = U\int_a^b F(t)\,dt.$$

2. Si $F(t)$ es de la forma $f(t)y_0$, donde f es una función numérica e y_0 un elemento fijo de Y, se tiene

$$\int_a^b F(t)\,dt = y_0\int_a^b f(t)\,dt.$$

3. $$\left\|\int_a^b F(t)\,dt\right\| \leqslant \int_a^b \|F(t)\|\,dt.$$

Sean X e Y de nuevo espacios normados y sea $BC(X, Y)$ el espacio lineal de todas las aplicaciones continuas acotadas[1] de X en Y. En el espacio $BC(X, Y)$ se puede introducir una topología tomando por vecindades del cero los conjuntos

$$U_{n,\varepsilon}=\{F: \sup_{\|x\|\leqslant n} \|F(x)\| < \varepsilon\}.$$

Esta topología coincide en el subespacio $\mathscr{L}(X, Y) \subset BC(X, Y)$

[1] Una aplicación $F\colon X \to Y$ se llama *acotada*, cuando para todo conjunto acotado $Q \subset X$ el conjunto $F(Q)$ es acotado en Y. Una aplicación continua no lineal no es necesariamente acotada.

de todas las aplicaciones lineales continuas de X en Y con la topología corriente de $\mathscr{L}(X, Y)$ definida por la norma de operador. Sea $J=[x_0, x_0+\Delta x]$ un segmento rectilíneo de X. Supongamos dada una aplicación continua de este segmento en el espacio $BC(X, Y)$, es decir, supongamos que a cada punto $x \in j$ se ha asignado una aplicación $F(x) \in BC(X, Y)$ que depende continuamente del parámetro vectorial $x \in J$. Entonces, se puede definir la integral de $F(x)$ en el segmento J, tomando

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta} F(x)\,dx = \int_0^1 F(x_0+t\Delta x)\,\Delta x\,dt \tag{14}$$

(aquí $F(x_0+t\Delta x)\,\Delta x$ es para cada $t \in [0, 1]$ un elemento del espacio Y, precisamente la imagen del elemento $\Delta x \in X$ mediante la aplicación $F(x_0+t\Delta x)$. Está claro que la integral que figura en el miembro derecho de la fórmula (14) existe y representa un elemento del espacio Y.

Apliquemos estas ideas al problema de reconstrucción de una aplicación a partir de su derivada.

Consideremos una aplicación F que actúa de X en Y y que tiene en el segmento $[x_0, x_0+\Delta x]$ derivada fuerte *continua* $F'(x) \in \mathscr{L}(X, Y)$. Entonces, existe la integral $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx$. Demostremos que tiene lugar la igualdad

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx = F(x_0+\Delta x) - F(x_0) \tag{15}$$

que generaliza la fórmula de Newton-Leibniz. En efecto, por definición,

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_0+t_k\,\Delta x)(\Delta x)(t_{k+1}-t_k) =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(\tilde{x}_k)(\Delta x_k),$$

donde $\tilde{x}_k = x_0+t_k\Delta x$, $\Delta x_k = (t_{k+1}-t_k)\,\Delta x$ y $\lambda = \max\limits_k (t_{k+1}-t_k)$. Pero, al mismo tiempo, para cualquier partición del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$ tenemos

$$F(x_0+\Delta x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_0+t_{k+1}\Delta x) - F(x_0+t_k\Delta x] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)].$$

De la fórmula (10) de incrementos finitos, encontramos

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(\tilde{x}_k)\,\Delta x_k] \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Delta x\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - T_k) \sup \|F'(x_k + \theta\Delta x_k) - F'(\tilde{x}_k)\|. \quad (16)$$

Como la derivada F' es continua y, por consiguiente, también uniformemente continua sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$, el miembro derecho de la desigualdad (16) tiende a cero, cuando disminuyen indefinidamente las longitudes de los elementos de la partición del segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$, y de aquí se sigue la igualdad (15).

8°. Derivadas de órdenes superiores. Sea F una aplicación diferenciable que actúa de X en Y. Su derivada $F'(x)$ es, para cada $x \in X$, un elemento de $\mathscr{L}(X, Y)$, es decir, F' es una aplicación del espacio X en el espacio de operadores lineales $\mathscr{L}(X, Y)$. Si esta aplicación es diferenciable, la derivada correspondiente a ella se llama *segunda derivada* de la aplicación F y se denota mediante el símbolo F''. De manera que $F''(x)$ es un elemento del espacio $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ de operadores lineales que actúan de X en $\mathscr{L}(X, Y)$. Probemos que los elementos de este espacio admiten una interpretación más cómoda y más clara a partir de las así llamadas aplicaciones bilineales.

Decimos que se tiene una *aplicación bilineal* B del espacio X en el espacio Y, cuando a cada par ordenado de elementos x, x' de X corresponde un elemento $y = B(x, x') \in Y$ de manera que se cumplen las siguientes condiciones:

1) para cualesquiera x_1, x_2, x_1', x_2' de X y cualesquiera números α, β se verifican las igualdades:

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, x') = \alpha B(x_1, x') + \beta B(x_2, x'),$$
$$B(x, \alpha x_1' + \beta x_2') = \alpha B(x, x_1') + \beta B(x, x_2');$$

2) existe un número positivo M tal que

$$\|B(x, x')\| \leqslant M \|x\| \cdot \|x'\| \quad (17)$$

para todos los $x, x' \in X$.

En otras palabras, la primera de estas condiciones significa que la aplicación B es lineal respecto a cada uno de sus dos argumentos; no es difícil comprobar que la segunda condición equivale a la continuidad de B respecto al conjunto de argumentos. El menor de los números M que satisface la condición (17) se llama *norma* de la aplicación bilineal B y se denota con $\|B\|$. De una manera evidente se definen las operaciones lineales para aplicaciones bilineales que tienen las propiedades habituales.

De esta forma, las aplicaciones bilineales del espacio X en el espacio Y constituyen un espacio lineal normado que denotaremos con $B(X^2, Y)$.

A cada elemento A del espacio $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ se puede poner en correspondencia un elemento de $B(X^2, Y)$, tomando

$$B(x, x') = (Ax)x'. \tag{18}$$

Es obvio que esta correspondencia es lineal. Probemos que es, además, isométrica y transforma el espacio $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ en todo el espacio $B(X^2, Y)$. En efecto, si $y = B(x, x') = (Ax)x'$, tenemos

$$\| y \| \leqslant \| Ax \| \cdot \| x' \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \| \cdot \| x' \|,$$

de donde

$$\| B \| \leqslant \| A \|. \tag{19}$$

Por otro lado, dada una aplicación bilineal B, la aplicación $x' \longrightarrow (Ax)x' = B(x, x')$ es, para un $x \in X$ fijo, una aplicación lineal del espacio X en Y.

Por consiguiente, a cada $x \in X$ se pone en correspondencia un elemento Ax del espacio $\mathscr{L}(X, Y)$; es obvio que Ax depende linealmente de x, es decir, que la aplicación bilineal B define un elemento A del espacio $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$. Además, está claro que la aplicación B se reconstruye a partir de A mediante la fórmula (18) y que

$$\| Ax \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| (Ax)x' \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| B(x, x') \| \leqslant \| B \| \cdot \| x \|,$$

de donde

$$\| A \| \leqslant \| B \|. \tag{20}$$

Comparando (19) y (20), obtenemos $\| A \| = \| B \|$. De modo que la correspondencia entre $B(X^2, Y)$ y $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ definida por la igualdad (18) es lineal e isométrica y, por consiguiente, biunívoca. Además, la imagen del espacio $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ es todo el espacio $B(X^2, Y)$.

Hemos visto que la segunda derivada $F''(x)$ es un elemento del espacio $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$. De acuerdo con lo expuesto podemos considerar que $F''(x)$ es un elemento del espacio $B(X^2, Y)$.

Veamos algunos ejemplos. Sean X e Y espacios euclídeos de dimensión finita, m y n respectivamente. Entonces, toda aplicación lineal de X en Y se puede definir mediante una $(m \times n)$-=matriz. De manera que la derivada $F'(x)$ de la aplicación F, que actúa de X en Y, es una matriz (dependiente de $x \in X$). Si en X e Y se escogen unas bases, digamos,

$$e_1, \ldots, e_m \text{ en } X \text{ y } f_1, \ldots, f_n \text{ en } Y,$$

tendremos

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_m e_m,$$
$$y = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \ldots + y_n f_n$$

y en este caso

$$F'(x) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_m} & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{Bmatrix}.$$

La segunda derivada $F''(x)$ se determina por un conjunto de $m \times m \times n$ valores $a_{ij}^k = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$. Este conjunto de valores a_{ij}^k puede ser considerado o bien como una aplicación lineal del espacio X en el espacio $\mathscr{L}(X, Y)$ definida por

$$b_j^k = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^k x_i$$

o bien como una aplicación bilineal del espacio X en Y definida mediante la fórmula

$$c^k = \sum_{i, j=1}^{m} a_{ij}^k x_i x_j'.$$

De una manera análoga se puede introducir el concepto de tercera, cuarta y, en general, n-ésima derivada de la aplicación F, que actúa de X en Y, definiendo la n-ésima derivada como la derivada de la derivada de orden $(n-1)$. Es obvio que la n-ésima derivada constituye un elemento del espacio $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, \ldots, \mathscr{L}(X, Y)))$. Repitiendo los razonamientos, empleados para la segunda derivada, se puede asignar de un modo natural a cada elemento de este espacio un elemento del espacio $N(X^n, Y)$ de las aplicaciones n-lineales de X en Y. Por una *aplicación n-lineal* se entiende aquí una correspondencia $y = N(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ entre los sistemas ordenados $(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ de elementos de X y los elementos del espacio Y que es lineal respecto a cada x^i, cuando son fijos los elementos $x', \ldots, x^{(i-1)}, x^{(i+1)}, \ldots, x^{(n)}$, y que verifica para un $M > 0$ determinado la condición

$$\| N(x', x'', \ldots, x^{(n)}) \| \leqslant M \| x' \| \cdot \| x'' \| \ldots \| x^{(n)} \|.$$

Por consiguiente, la n-ésima derivada de la aplicación F se puede considerar como un elemento del espacio $N(X^n, Y)$.

9°. Diferenciales de orden superior. Hemos definido la diferencial (fuerte) de una aplicación F como el resultado de aplicar al elemento $h \in X$ el operador lineal $F'(x)$: $dF = F'(x)(h)$. La diferencial de segundo orden se define como $d^2F = F''(x)(h, h)$, es decir, como una expresión cuadrática correspondiente a la aplicación $F''(x) \in B(X^2, Y)$. De un modo análogo, la diferencial de orden n se define mediante $d^nF = F^{(n)}(x)(h, h, \ldots, h)$, esto es, como aquel elemento del espacio Y en el cual se transforma por la aplicación $F^{(n)}(x)$ el elemento $(h, h, \ldots, h) \in X \times X \times \ldots \times X = X^n$.

10°. Fórmula de Taylor. La diferenciabilidad fuerte de la aplicación F significa que la diferencia $F(x+h) - F(x)$ se puede representar como la suma de un miembro lineal y un sumando de orden superior al primero respecto a $\|h\|$. Este resultado se generaliza en una fórmula análoga a la fórmula de Taylor para las funciones numéricas, conocida del Análisis.

TEOREMA 2. *Sea F una aplicación que actúa de X en Y, que está definida en una región $O \subset X$ y tal que $F^{(n)}(x)$ existe y representa una función uniformemente continua de x en O. Entonces, tiene lugar la igualdad*

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)(h) + \frac{1}{2!}F''(x)(h, h) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h, \ldots, h) + \omega(x, h) \qquad (21)$$

donde $\|\omega(x, h)\| = o(\|h\|^n)$.

La DEMOSTRACION se realiza por inducción. Para $n = 1$ la igualdad (21) es trivial Supongamos que ella es válida para $n-1$ cualquiera que sea la aplicación que satisface las condiciones del teorema. Entonces, para la aplicación F' tenemos

$$F'(x+h) = F'(x) + F''(x)(h) + \frac{1}{2!}F'''(x)(h, h) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)(h, h, \ldots, h) + \omega_1(x, h), \quad (22)$$

donde $\|\omega_1(x, h)\| = o(\|h\|^{n-1})$. Integrando en el segmento $[x, x+h]$ ambos miembros de la igualdad (22) y empleando la fórmula (15) de Newton—Leibniz, encontraremos

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th)\,h\,dt = \int_0^1 \Big\{F'(x) + tF''(x)(h) +$$
$$+ \frac{1}{2!}t^2F'''(x)(h, h) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}F^{(n)}(x)(h, \ldots, h)\Big\}\,h\,dt + R_n, \quad (23)$$

donde $R_n = \int_0^1 \omega_1(x, th)\,h\,dt$.

De (23) obtenemos

$$F(x+h)-F(x)=F'(x)(h)+\frac{1}{2!}F''(x)(h,\ h)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,\ \ldots,\ h)+R_n,$$

siendo

$$\| R_n\| \leqslant \int_0^1 \|\omega_1(x,\ th)\|\cdot\|h\|\,dt=o(\|h\|^n).$$

Con esto nuestra proposición queda demostrada.

La fórmula (21) se llama fórmula de Taylor para aplicaciones.

§ 2. PROBLEMAS EXTREMALES

Una de las secciones más antiguas y más elaboradas del Análisis Funcional no lineal es la búsqueda de extremos de funcionales. El estudio de estos problemas constituye el contenido del así llamado Cálculo de variaciones. Los métodos que se utilizan en el Cálculo de variaciones están sujetos, en su mayor parte a la forma especial de aquellas funcionales cuyos valores extremales se buscan. Sin embargo, se puede enunciar algunos resultados y métodos generales para funcionales más o menos arbitrarios. Sin plantearnos la tarea de dar una exposición un tanto detallada de los métodos variacionales, nos limitaremos a dar un examen breve de aquellos elementos de la teoría general de problemas para funcionales que constituyen el fundamento del Cálculo de variaciones.

1°. Condición necesaria de extremo. Sea F una funcional que toma valores reales, definida en un espacio de Banach X. Se dice que la funcional F alcanza un mínimo en el punto x_0, cuando para todos los x, suficientemente próximos a x_0 y tales que $F(x)$ está definido, se cumple la desigualdad $F(x)-F(x_0)\geqslant 0$. De manera análoga se define un máximo de una funcional. Si en un punto dado x_0 la funcional F alcanza mínimo o máximo, diremos que la funcional tiene en este punto extremo.

Diferentes problemas mecánicos y físicos pueden ser reducidos a la búsqueda del extremo de unas u otras funcionales.

Para las funciones de n variables es bien conocida la siguiente condición necesaria de extremo: si la función f es diferenciable en el punto $x_0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ y tiene extremo en este punto, en este punto $df=0$ ó, lo que es equivalente,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\ldots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

Esta condición se extiende fácilmente a las funcionales.

TEOREMA 1. *Para que una funcional diferenciable F alcance extremo en el punto x_0 es necesario que su diferencial en este punto sea igual a cero para todo h:*

$$F'(x_0)(h) \equiv 0.$$

DEMOSTRACION. Por definición de la diferenciabilidad, tenemos

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F'(x_0)(h) + o(\|h\|). \tag{1}$$

Si $F'(x_0)(h) \neq 0$ para algún h, entonces, para valores reales suficientemente pequeños de λ, el signo de toda la expresión $F'(x_0)(\lambda h) + o(\|h\|)$ coincide con el signo de su término principal $F'(x_0)(\lambda h)$. Pero $F'(x_0)$ es una funcional lineal y por eso $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)(h)$. De manera que siendo $F'(x_0)(h) \neq 0$, la expresión (1) puede tomar, para h arbitrariamente pequeños, tanto valores positivos, como negativos, es decir, no puede haber extremo en el punto x_0.

Veamos algunos ejemplos.

1. Sea

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t))\,dt, \tag{2}$$

donde f es una función continuamente diferenciable. Esta funcional, considerada en el espacio $C_{[a,b]}$ de funciones continuas, es diferenciable. En efecto,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b [f(t, x+h) - f(t, x)]\,dt = \int_a^b f'_x = (t, x)\,h(t)\,dt + o(\|h\|),$$

de donde

$$dF = \int_a^b f'_x(t, x(t))\,h(t)\,dt.$$

La igualdad a cero de esta funcional lineal para todos los $h \in C_{[a,b]}$ significa que $f'_x(t, x) = 0$. Efectivamente, para todo $x(t) \in C_{[a,b]}$ la derivada $f'_x(t, x)$ es una función continua de t. Si ella es diferente de cero en algún punto t_0, digamos, $f'_x(t_0, x(t_0)) > 0$, esta igualdad tendrá lugar también en una vecindad (α, β) del punto t_0. Entonces, tomando

$$h(t) = \begin{cases} (t-\alpha)(\beta-t) & \text{para } \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ 0 & \text{para los demás } t, \end{cases}$$

obtendremos que

$$\int_a^b f'_x(t,\ x)\, h(t)\, dt > 0.$$

La contradicción obtenida demuestra nuestra proposición. La ecuación $f'_x(t,\ x)=0$ determina, en general, una curva en la cual la funcional (2) puede alcanzar un extremo.

2. Consideremos en el mismo espacio $C_{[a,\ b]}$ la funcional

$$F(x)=\int_a^b \int_a^b K(\xi_1,\ \xi_2)\, x(\xi_1)\, x(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{3}$$

donde $K(\xi_1,\ \xi_2)$ es una función continua que satisface la condición $K(\xi_1,\ \xi_2)=K(\xi_2,\ \xi_1)$. Es fácil calcular que la diferencial de esta funcional es igual a

$$dF=2\int_a^b \int_a^b K(\xi_1,\ \xi_2)\, x(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2.$$

Si esta expresión es igual a cero para todo $h\in C_{[a,\ b]}$, tenemos, por los mismos razonamientos que en el ejemplo 1,

$$\int_a^b K(\xi_1,\ \xi_2)\, x(\xi_1)\, d\xi_1=0 \ \text{para todo} \quad \xi_2,\ a\leqslant \xi_2\leqslant b.$$

Una de las soluciones de esta ecuación es la función $x\equiv 0$. La respuesta a la pregunta de si existe extremo en este punto y si existen otros puntos en los que es posible un extremo, depende de la forma de la función $K(\xi_1,\ \xi_2)$ y exige un estudio complementario.

3. Consideremos la funcional

$$F(x)=\int_a^b f(t,\ x(t),\ x'(t))\, dt, \tag{4}$$

definida en el espacio $C^1_{[a,\ b]}$ de funciones continuamente diferenciables sobre el segmento $[a,\ b]$. Aquí $x'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$, y $f(t,\ x,\ x')$ es una función dos veces diferenciable de sus argumentos. La funcional (4) desempeña un papel principal en varias cuestiones del Cálculo de variaciones. Busquemos su diferencial. Utilizando la fórmula de Taylor, encontramos

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^b [f(t,\ x+h,\ x'+h')-f(t,\ x,\ x')]\,dt=$$

$$=\int_a^b (f'_x h+f'_{x'}h')\,dt+o(\|h\|),$$

donde $\|h\|$ es la norma de la función h como elemento del espacio $C^1_{[a,\ b]}$. Por consiguiente, la condición necesaria de extremo de la funcional (4) es

$$dF=\int_a^b (f'_x h+f'_{x'}h')\,dt=0. \tag{5}$$

En su forma integral esta condición es poco útil para buscar la función x en la que se alcanza el extremo. Démosle una forma más cómoda, integrando por partes en (5) el término $f'_{x'}h'$. Tendremos

$$\int_a^b f'_{x'}h'\,dt=f'_{x'}h\Big|_a^b-\int_a^b h\frac{d}{dt}f'_{x'}\,dt.$$

De manera que

$$dF=\int_a^b \left(f'_x=-\frac{d}{dt}f'_{x'}\right)h\,dt+f'_{x'}h\Big|_a^b=0. \tag{6}$$

Esta igualdad debe verificarse para todo h, en particular, también cuando $h(a)=h(b)=0$. Por consiguiente,

$$\int_a^b \left(f'_x-\frac{d}{dt}f'_{x'}\right)h\,dt=0$$

para todos los h tales que $h(a)=h(b)=0$, de donde, con razonamientos análogos a los empleados en el ejemplo 1, encontramos

$$f'_x-\frac{d}{dt}f'_{x'}=0. \tag{7}$$

Por eso, la igualdad (6) se reduce a

$$f'_{x'}h\,\big|_a^b=0. \tag{8}$$

Si la funcional (4) se considera para todas las funciones x continuamente diferenciables definidas sobre $[a,\ b]$, podemos escoger h de modo que $h(a)=0,\ \ h(b)\neq 0$ y entonces obtenemos de la igualdad (8)

$$f'_{x'}\,|_{t=b}=0; \tag{9}$$

por otro lado, tomando $h(b)=0$, $h(a)\neq 0$, obtenemos

$$f'_{x'}\,|_{t=a}=0. \tag{10}$$

Por consiguiente, de la condición (6) de igualdad a cero de la diferencial de la funcional (4) hemos obtenido que la función x, que ofrece extremo a la funcional (4) debe verificar la ecuación diferencial (7) y las condiciones de contorno (9) y (10) en los extremos del segmento $[a, b]$. Como la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden contiene dos constantes arbitrarias, tenemos a nuestra disposición un número de condiciones de contorno necesario precisamente para encontrar estas constantes.

2°. Segunda diferencial. Condiciones suficientes de extremo de una funcional. Volvamos de nuevo al problema sobre la búsqueda del extremo de una función de n variables. Supongamos que para la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ se cumple en el punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ la condición $df=0$. Entonces, como se sabe, para resolver el problema de si hay o no hay efectivamente en este punto un extremo, debe considerarse la segunda diferencial. Tienen lugar las siguientes proposiciones.

1. *Si una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene en un punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ mínimo, en ese punto $d^2f \geqslant 0$.* (Análogamente, si en un punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ hay máximo, en ese punto $d^2f \leqslant 0$).

2. *Si en un punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ se cumplen las condiciones*

$$df=0 \ \text{ y } \ d^2f=\sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\,dx_i\,dx_k > 0$$

(cuando no todo $dx_i=0$), *la función $f(x)$ tiene en ese punto mínimo* (análogamente, máximo, si $d^2f<0$).

Veamos en qué medida subsisten estos resultados para funcionales definidas en un espacio de Banach.

TEOREMA 2. *Sea F una funcional real, definida en un espacio de Banach X, con segunda derivada continua en una vecindad del punto x_0. Si esta funcional alcanza un mínimo en el punto x_0, entonces, $d^2F(x_0) \geqslant 0$* [1].

DEMOSTRACION. Empleando la fórmula de Taylor, tenemos

$$F(x_0+h)-F(x_0)=F'(x_0)(h)+\frac{1}{2}F''(x_0)(h,\ h)+o(\|h\|^2).$$

[1] Esta desigualdad significa que $F''(x_0)(h,\ h) \geqslant 0$ para todo h.

Si la funcional F tiene mínimo en el punto x_0, entonces, $F'(x_0)=0$ y queda la igualdad

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{1}{2}F''(x_0)(h,\ h)+o(\|h\|^2). \tag{11}$$

Si para algún h admisible tiene lugar la desigualdad

$$F''(x_0)(h,\ h)<0 \tag{12}$$

veremos, teniendo en cuenta que $F''(x_0)(\varepsilon h,\ \varepsilon h)=\varepsilon^2 F''(x_0)(h,\ h)$, que existen elementos h de norma tan pequeña como se quiera para los cuales también se cumple (12). Pero, el signo de toda la expresión (11) depende, para $\|h\|$ suficientemente pequeño, del signo de su término principal $\frac{1}{2}F(x_0)(h,\ h)$ y obtenemos que

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{1}{2}F''(x_0)(h,\ h)+o(\|h\|^2)<0,$$

es decir, que no hay mínimo en el punto x_0. Análogamente se considera el caso de máximo.

El teorema demostrado es una generalización directa del teorema correspondiente para las funciones de un número finito de variables. La situación es distinta en el caso de la condición suficiente. La condición mencionada más arriba $d\ F''(x_0)(h, h)>0$, que es suficiente para el mínimo en el caso de funciones de n variables, no resulta suficiente para funcionales definidas en un espacio de Banach de dimensión infinita. Veamos un ejemplo sencillo. Consideremos en el espacio de Hilbert la funcional

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^2}{n^3}-\sum_{n=1}^{\infty}x_n^4.$$

En el punto 0, la primera diferencial de esta funcional es igual a 0 y la segunda es igual a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^2}{n^3}$, es decir, representa una funcional definida positiva. Sin embargo, en el punto 0 no hay mínimo, ya que

$$F(0)=0 \ \text{ y } \ F\left(0,\ \ldots,\ 0,\ \frac{1}{n},\ 0,\ \ldots\right)=\frac{1}{n^5}-\frac{1}{n^4}<0.$$

Por consiguiente, en cualquier vecindad del punto 0 existen puntos en los cuales $F(x)<F(0)$.

Introduzcamos el siguiente concepto. Una funcional cuadrática B se llama *fuertemente positiva*, cuando existe un número $c>0$ tal que $B(x,\ x)\geqslant c\|x\|^2$ para todo x.

TEOREMA 3. *Si una funcional F, definida en un espacio de Banach X, verifica las condiciones*

1) $F'(x_0)=0$,

2) $F''(x_0)$ es una funcional cuadrática fuertemente positiva, F tiene mínimo en el punto x_0.

DEMOSTRACION. Escojamos $\varepsilon>0$ tan pequeño que para $\|h\|<\varepsilon$ la magnitud $o(\|h\|^2)$ en la igualdad (11) verifique la condición $|o(\|h\|^2)|<\frac{c}{4}\|h\|^2$. Entonces,

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\frac{1}{2}F''(x_0)(h, h)+o(\|h\|^2)>\frac{c}{4}\|h\|^2>0$$
$$\text{para } \|h\|<\varepsilon.$$

En un espacio de dimensión finita la positividad fuerte de una forma cuadrática equivale a que sea definida positiva y por eso (siendo igual a cero la primera diferencial) es una condición suficiente de mínimo de una función de un número finito de variables el que la segunda diferencial sea definida positiva. En el caso de dimensión infinita (como muestra el ejemplo dado más arriba), la positividad fuerte es una condición más fuerte que la de definida positiva.

La condición de positividad fuerte de la segunda diferencial que garantiza la existencia de mínimo es cómoda porque se puede aplicar a cualquier funcional (independientemente de su forma concreta) dos veces diferenciable en cualquier espacio de Banach. Al mismo tiempo, esta condición resulta demasiado tosca y difícilmente comprobable en casos prácticos importantes. En el Cálculo de variaciones se establecen unas condiciones suficientes de extremo más finas (que emplean la forma concreta de las funcionales que se consideran en los problemas variacionales); sin embargo, la exposición de estos temas no entra en la tarea de nuestro libro.

§ 3. METODO DE NEWTON

Uno de los métodos bien conocidos de resolución de ecuaciones de tipo

$$f(x)=0 \tag{1}$$

(f es una función numérica de argumento numérico, definida en un segmento $[a, b]$) es el así llamado *método de Newton* o *método de tangentes*. Consiste en que para resolver la ecuación (1) se buscan las aproximaciones sucesivas de acuerdo con la fórmula recurrente

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

(por aproximación nula x_0 se toma aquí un punto arbitrario del segmento donde está definida f). La interpretación geométrica de este método viene dada en la fig. 19. Se puede demostrar que si x^* es la única raíz de la ecuación (1) en el segmento $[a, b]$ y si la función f tiene en este segmento la primera derivada diferente de cero y la segunda derivada acotada, existe una vecin-

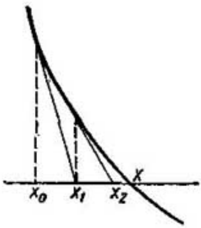

FIG. 19

dad de la raíz x^* tal que si el punto x_0 se toma en esta vecindad, la sucesión (2) converge hacia x^*.

El método de Newton se puede extender a las ecuaciones en operadores. Expondremos aquí este método para el caso de ecuaciones en operadores en espacios de Banach.

Consideremos la ecuación

$$F(x)=0, \tag{3}$$

donde F es una aplicación de un espacio de Banach X en otro espacio de Banach Y. Supongamos que la aplicación F es fuertemente diferenciable en una bola $B(x_0, r)$ de radio r (cuyo centro x_0 tomaremos como la aproximación nula de la solución que buscamos) y que su derivada F' satisface en esta bola la condición de Lipschitz, es decir,

$$\|F'(x_1)-F'(x_2)\|\leqslant L\|x_1-x_2\| \quad (L=\text{const}). \tag{4}$$

Sustituyendo, al igual que en el caso unidimensional, la expresión $F(x_0)-F(x)$ por su parte lineal principal, esto es, por el elemento $F'(x_0)(x_0-x)$, obtendremos de (3) una ecuación lineal $F'(x_0)(x_0-x)=F(x_0)$, cuya solución $x_1=x_0-[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)$ es natural tomar por la siguiente aproximación de la solución x de la ecuación $F(x)=0$ (aquí se presupone, claro está, la existencia del operador $[F'(x_0)]^{-1}$). Repitiendo estos razonamientos, obtendremos una sucesión

$$x_{n+1}=x_n-[F'(x_n)]^{-1}(F(x_n)) \tag{5}$$

de soluciones aproximadas de la ecuación (3). En el caso de dimensión infinita, la búsqueda del operador inverso $[F'(x_n)]^{-1}$ puede resultar una tarea suficientemente compleja. Por eso, conviene, a veces, emplear aquí el así llamado *método modificado de Newton*. La modificación consiste en que, en lugar de la sucesión (5), se considera la sucesión definida por la fórmula

$$x_{n+1}=x_n-[F'(x_0)]^{-1}(F(x_n)), \tag{6}$$

es decir, en cada paso el operador inverso $[F'(x_0)]^{-1}$ se toma para un mismo valor del argumento $x=x_0$. Aunque esta modificación reduce la velocidad de convergencia, resulta con frecuencia conveniente desde el punto de vista de cálculo. Pasemos ahora al enunciado y a la demostración de la proposición exacta.

TEOREMA 1. *Sean* $M=\|[F'(x_0)]^{-1}\|$, $k=\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|$ *y sea* L *la constante que figura en la desigualdad* (4). *Entonces, si* $h=MkL<\frac{1}{4}$ y t_0 *es la menor de las raíces de la ecuación* $ht^2-t+1=0$, *la ecuación* $F(x)=0$ *tiene en la bola* $\|x-x_0\|\leqslant t_0k$ una solución única x^* *y la sucesión* $\{x_n\}$ *definida por la fórmula recurrente* (6), *converge a esta solución.*

DEMOSTRACION. Consideremos en el espacio X la aplicación $Ax=x-[F'(x_0)]^{-1}F(x)$. Esta aplicación transforma la bola $\|x-x_0\|\leqslant t_0k$ en sí misma. En efecto,

$$Ax-x_0=x-x_0-[F'(x_0)]^{-1}F(x)=$$
$$=[F'(x_0)]^{-1}\{F'(x_0)(x-x_0)-F(x)+F(x_0)\}-[F'(x_0)]^{-1}F(x_0).$$

Por eso,

$$\|Ax-x_0\|\leqslant\|[F'(x_0)]^{-1}\|\cdot\|F'(x_0)(x-x_0)-F(x)+$$
$$+F(x_0)\|+\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|,$$

es decir,

$$\|Ax-x_0\|\leqslant M\|F'(x_0)(x-x_0)-F(x)+F(x_0)\|+k. \tag{7}$$

Consideremos la aplicación auxiliar

$$\Phi(x)=F(x)-F(x_0)-F'(x_0)(x-x_0).$$

Es diferenciable y su derivada es igual a

$$\Phi'(x)=F'(x)-F'(x_0).$$

Si $\|x-x_0\|<t_0k$, tiene lugar la estimación

$$\|\Phi'(x)\|=\|F'(x)-F'(x_0)\|\leqslant L\|x-x_0\|\leqslant Lt_0k.$$

De aquí, según el teorema del valor medio, obtenemos

$$\|\Phi(x)\|=\|\Phi(x)-\Phi(x_0)\|\leqslant Lt_0k\|x-x_0\|\leqslant Lt_0^2k^2. \tag{8}$$

De manera que siendo $\|x-x_0\|\leqslant t_0k$, tenemos de (7) y (8)

$$\|Ax-x_0\|\leqslant MLt_0^2k^2+k=k(MLt_0^2k+1)=k(ht_0^2+1)=kt_0,$$

y esto significa que la aplicación A transforma la bola $\|x-x_0\|\leqslant kt_0$ en sí misma. Probemos ahora que A es una aplicación contraída de esta bola. Para $\|x-x_0\|\leqslant kt_0$ tenemos

$$A'(x)=I-[F'(x_0)]^{-1}F'(x)=[F'(x_0)]^{-1}(F'(x_0)-F'(x)),$$

de donde

$$\|A'(x)\|\leqslant M\|F'(x_0)-F'(x)\|\leqslant ML\|x-x_0\|\leqslant MLkt_0.$$

Pero t_0 es la menor de las raíces de la ecuación

$$ht^2-t+1=0, \text{ es decir,}$$
$$t_0=\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h}.$$

Por esto,

$$A'(x)\|\leqslant MLkt_0=ht_0=$$
$$=h\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2h}=\frac{1-\sqrt{1-4h}}{2}=q<\frac{1}{2}, \tag{9}$$

de donde

$$\|Ax_1-Ax_2\|\leqslant\frac{1}{2}\|x_1-x_2\|,$$

es decir, A es una aplicación contraída.

Por consiguiente, la aplicación A tiene en la bola $\|x-x_0\|\leqslant\leqslant kt_0$ un punto fijo x^*, y sólo uno. Para este punto

$$x^*=x^*-[F'(x_0)]^{-1}F(x^*), \text{ es decir, } F(x^*)=0.$$

Al mismo tiempo, $Ax_n=x_n-[F'(x_0)]^{-1}F(x_n)=x_{n+1}$ y, en virtud del teorema sobre las aplicaciones contraídas, la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia x^*.

De la desigualdad (9) se desprende inmediatamente la siguiente estimación para la velocidad de convergencia del método modificado de Newton:

$$\|x_n-x^*|\leqslant\frac{q^n}{1-q}\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|,$$

es decir, el error del método modificado de Newton disminuye como los términos de una serie geométrica. Para comparar, indiquemos que el método corriente de Newton (en el que las aproximaciones se definen mediante la fórmula (5) en lugar de la fórmula (6)) converge más rápidamente que una serie geométrica: para este método

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}k.$$

Ejemplo. Consideremos la ecuación integral no lineal

$$x(s) = \int_a^b K(s,\ t,\ x(t))\,dt, \tag{10}$$

donde $K(s,\ t,\ u)$ es una función continua y continuamente diferenciable de sus argumentos. Introduciendo la aplicación $y = F(x)$, definida por la igualdad

$$y(s) = x(s) - \int_a^b K(s,\ t,\ x(t))\,dt,$$

podemos escribir la ecuación (10) en la forma

$$F(x) = 0.$$

Sea x_0 la aproximación nula para la solución de esta ecuación. Entonces, la primera rectificación $\Delta x(s) = x_1 - x_0$ se encuentra de la ecuación

$$F'(x_0)\,\Delta x = -F(x_0). \tag{11}$$

Si la función $K(s, t, u)$ y el espacio funcional, en el que se considera la ecuación (10), son tales que la derivada $F'(x)$ de la aplicación F se puede calcular «diferenciando bajo el símbolo de la integral», es decir, si

$$z = F'(x_0)(x)$$

significa que

$$z(s) = x(s) - \int_a^b K'_u(s,\ t,\ x_0(t))\,x(t)\,dt,$$

la ecuación (11) se representa en la forma

$$\Delta x(s) = \int_a^b K'_u(s, t, x_0(t))\,\Delta x(t)\,dt + \varphi_0(s), \tag{12}$$

donde

$$\varphi_0(s) = \int_a^b K(s, t, x_0(t))\, dt - x_0(s).$$

Análogamente se buscan las rectificaciones siguientes.

De manera que para buscar cada aproximación siguiente de la solución de la ecuación (10) hay que resolver una ecuación integral lineal. Cuando se emplea el método modificado de Newton, resulta que en cada uno de estos pasos hay que resolver una ecuación lineal con el mismo nucleo.

CAPITULO VI

MEDIDA, FUNCIONES MEDIBLES, INTEGRAL

El concepto de medida $\mu(A)$ de un conjunto A constituye una generalización natural de los siguientes conceptos:

1) de la longitud $l(\Delta)$ de un segmento Δ,

2) del área $S(F)$ de una figura plana F,

3) del volumen $V(G)$ de una figura G del espacio,

4) del incremento $\varphi(b)-\varphi(a)$ de una función no decreciente $\varphi(t)$ en el semisegmento $[a, b)$,

5) de la integral de una función no negativa en una región lineal, plana o del espacio, etc.

Este concepto, surgido inicialmente en la Teoría de funciones de variable real, encontró más tarde múltiples aplicaciones en la Teoría de Probabilidades, la Teoría de Sistemas Dinámicos, el Análisis Funcional y en otras ramas de las Matemáticas.

En el § 1 de este capítulo exponemos la teoría de medida para el caso de conjuntos planos, partiendo del concepto del área de un rectángulo. La teoría general de medida es explicada en los §§ 2 y 3. El lector podrá notar que todos los razonamientos que se realizan en el § 1 tienen un carácter general y se repiten, sin modificaciones sustanciales, en la teoría abstracta.

§ 1. MEDIDA DE CONJUNTOS PLANOS

1°. Medida de conjuntos elementales. Consideremos el sistema $\mathfrak{S}$ de conjuntos del plano (x, y), cada uno de los cuales se determina por una desigualdad de tipo

$$a \leqslant x \leqslant b,$$
$$a < x \leqslant b,$$
$$a \leqslant x < b,$$
$$a < x < b$$

y por una desigualdad de tipo

$$c \leqslant y \leqslant d,$$
$$c < y \leqslant d,$$
$$c \leqslant y < d,$$
$$c < y < d,$$

donde a, b, c, y d son números arbitrarios. Los conjuntos pertenecientes a este sistema se llamarán rectángulos. Un rectángulo cerrado definido por las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

es un rectángulo en el sentido corriente (con su frontera) cuando $a < b$ y $c < d$; es un segmento (cuando $a = b$ y $c < d$ ó $a < b$ y $c = d$); es un punto (para $a = b$ y $c = d$) o, finalmente, el conjunto vacío (cuando $a > b$ ó $c > d$). Un rectángulo abierto

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

representa en función de la relación entre a, b, c y d, o bien un rectángulo sin frontera, o bien el conjunto vacío. Cada rectángulo de los tipos restantes (que llamaremos rectángulos semiabiertos) constituye o bien un rectángulo sin uno, dos o tres lados, o bien un intervalo, o bien un semisegmento o bien, finalmente, un conjunto vacío.

Partiendo del concepto de área, conocido de la Geometría Elemental, definiremos la medida de cada rectángulo de la siguiente forma:

a) la medida del conjunto vacío es igual a 0;

b) la medida de un rectángulo no vacío (cerrado, abierto o semiabierto) determinado por los números a, b, c y d es igual a

$$(b-a)(d-c).$$

Luego, hemos asignado a todo rectángulo P un número $m(P)$, la medida de este rectángulo, de manera que se cumplen, evidentemente, las siguientes condiciones:

1) la medida $m(P)$ toma valores reales no negativos;

2) la medida $m(P)$ es aditiva, esto es, si $P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ y $P_i \cap P_k = \varnothing$ para $i \neq k$, entonces,

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

Nuestra tarea es extender la medida $m(P)$, definida por ahora para rectángulos, a una clase más general de conjuntos, conservando las condiciones 1) y 2).

El primer paso en esta dirección consiste en extender el concepto de medida a los así llamados conjuntos elementales. Un conjunto plano se llamará *elemental* cuando puede ser representado, al menos de una forma, como la unión de un número finito de rectángulos disjuntos dos a dos.

En lo que sigue necesitaremos el siguiente teorema.

TEOREMA 1. *La unión, la intersección, la diferencia y la diferencia simétrica de dos conjuntos elementales son también conjuntos elementales.*

DEMOSTRACION. Está claro que la intersección de dos rectángulos es de nuevo un rectángulo. Por eso, si

$$A=\bigcup_k P_k \quad \text{y} \quad B=\bigcup_j Q_j$$

son dos conjuntos elementales, también

$$A\cap B=\bigcup_{k,\,j}(P_k\cap Q_j)$$

es un conjunto elemental.

Es fácil ver que la diferencia de dos rectángulos es un conjunto elemental. Consecuentemente, sustrayendo de un rectángulo un conjunto elemental, obtenemos de nuevo un conjunto elemental (como intersección de conjuntos elementales). Sean ahora A y B dos conjuntos elementales. Es obvio que existe un rectángulo P que contiene a ambos. Entonces,

$$A\cup B=P\setminus[(P\setminus A)\cap(P\setminus B)]$$

es, de acuerdo con lo señalado anteriormente, un conjunto elemental. De las igualdades

$$A\setminus B=A\cap(P\setminus B)$$

y

$$A\bigtriangleup B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

se deduce entonces que la diferencia y la diferencia simétrica de conjuntos elementales son conjuntos elementales. El teorema queda demostrado.

Definamos ahora la medida $m'(A)$ de conjuntos elementales del siguiente modo: si

$$A=\bigcup_k P_k,$$

donde P_k son rectángulos disjuntos dos a dos, tomamos

$$m'(A) = \sum_k m(P_k).$$

Probemos que $m'(A)$ no depende de la forma de representar al conjunto A como unión de rectángulos. Sea

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j,$$

donde P_k y Q_j son rectángulos y $P_i \cap P_k = \varnothing$, $Q_i \cap Q_k = \varnothing$ para $i \neq k$. Como la intersección $P_k \cap Q_j$ de dos rectángulos es un rectángulo, tenemos, en virtud de la aditividad de la medida de rectángulos,

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{k,\,j} m(P_k \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j).$$

Es fácil ver que la medida de conjuntos elementales definida de esta forma es no negativa y aditiva.

Establezcamos la siguiente propiedad de la medida de conjuntos elementales importante para lo sucesivo.

TEOREMA 2. *Si A es un conjunto elemental y $\{A_n\}$ es un sistema finito o numerable de conjuntos elementales tal que*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

entonces,

$$m'(A) \leqslant \sum_n m'(A_n). \qquad (1)$$

DEMOSTRACION. Para cualquier $\varepsilon > 0$ y un conjunto A dado es posible, evidentemente, encontrar un conjunto elemental cerrado $\overline{A}$ contenido en A que verifique la condición

$$m'(\overline{A}) \geqslant m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\Big($Para ello es suficiente sustituir cada uno de los k rectángulos P_i que componen A por un rectángulo cerrado contenido en él de área mayor que $m(P_i) - \frac{\varepsilon}{2k}\Big)$.

Además, para cada A_n se puede encontrar un conjunto elemental abierto $\tilde{A}_n$ que contiene A y verifica la condición

$$m'(\tilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Está claro que

$$\overline{A}\subset\bigcup_n \tilde{A}_n.$$

De acuerdo con el lema de Heine—Borel, se puede extraer de $\{\tilde{A}_n\}$ un sistema finito $\tilde{A}_{n_1}, \ldots, \tilde{A}_{n_s}$ que cubre $\overline{A}$. Es obvio que

$$m'(\overline{A}\leqslant\sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i})$$

(de lo contrario $\overline{A}$ resultaría cubierto por un número finito de rectángulos de un área total menor que $m'(\overline{A})$, lo cual es imposible). Por eso,

$$m'(A)\leqslant m'(\overline{A})+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i})+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_n m'(\tilde{A}_n)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_n m'(A_n)+\sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon}{2}=\sum m'(A_n)+\varepsilon,$$

de donde, debido a la arbitrariedad de $\varepsilon>0$, se desprende (1).

2°. **Medida de Lebesgue de conjuntos planos.** La clase de conjuntos elementales no agota todos los conjuntos que se consideran en la Geometría elemental y en el Análisis clásico. Resulta natural, por eso, plantear el problema de la extensión del concepto de medida, conservando sus propiedades principales, a una clase de conjuntos más amplia que la compuesta por uniones finitas de rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas.

Este problema fue resuelto, en cierto sentido de un modo definitivo, por H. Lebesgue a principos del siglo XX.

Al presentar la teoría de medida de Lebesgue tendremos que considerar no sólo uniones finitas sino también uniones infinitas de rectángulos.

Para evitar que aparezcan en este caso conjuntos de «medida infinita», nos limitaremos a considerar en lo sucesivo conjuntos contenidos íntegramente en el cuadrado $E=\{0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

En la clase de estos conjuntos definiremos como sigue dos funciones $\mu^*(A)$ y $\mu_*(A)$.

DEFINICION 1. Se llama *medida superior* $\mu^*(A)$ del conjunto A al número

$$\inf_{A\subset\bigcup P_k}\sum m(P_k),$$

donde la cota inferior se toma respecto a todos los cubrimientos del conjunto A por medio de sistemas finitos o numerables de rectángulos.

DEFINICION 2. Se llama *medida inferior* $\mu_*(A)$ del conjunto A al número

$$1-\mu^*(E \setminus A).$$

Es fácil ver que siempre

$$\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A).$$

En efecto, supongamos que para un conjunto $A \subset E$ se tiene

$$\mu_*(A) > \mu^*(A),$$

es decir,

$$\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) < 1.$$

De acuerdo con la definición de la cota inferior máxima, existirán entonces dos sistemas de rectángulos $\{P_i\}$ y $\{Q_i\}$, que cubren A y $E \setminus A$, respectivamente, tales que

$$\sum_i m(P_i) + \sum_k m(Q_k) < 1.$$

Sea $\{R_j\}$ la unión de los sistemas $\{P_i\}$ y $\{Q_i\}$; tenemos

$$E \subset \bigcup_j R_j \quad \text{y} \quad m(E) > \sum_j m(R_j),$$

lo que contradice al teorema 2.

DEFINICION 3. Un conjunto A se llama *medible* (en el sentido de Lebesgue) cuando

$$\mu_*(A) = \mu^*(A).$$

El valor común $\mu(A)$ de las medidas superior e inferior de un conjunto medible A es su *medida de Lebesgue.*

3°. Propiedades principales de la medida de Lebesgue y de los conjuntos medibles. Demostremos primero la siguiente propiedad de la medida superior.

TEOREMA 3. *Si*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

donde $\{A_n\}$ *es un sistema finito o numerable de conjuntos, se tiene*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$

DEMOSTRACION. De acuerdo con la definición de medida superior, para cada A_n existe un sistema de rectángulos $\{P_{nk}\}$, finito o numerable, tal que $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$ y

$$\sum_k m(P_{nk}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

donde $\varepsilon > 0$ es escogido arbitrariamente. En este caso

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk}$$

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, de aquí se deduce la afirmación del teorema.

Más arriba hemos introducido ya el concepto de medida para conjuntos que hemos llamado elementales. El teorema que sigue muestra que en el caso de conjuntos elementales la definición 3 lleva al mismo resultado.

TEOREMA 4. *Los conjuntos elementales son medibles y para ellos la medida de Lebesgue coincide con la medida $m'(A)$ construida anteriormente.*

DEMOSTRACION. Si A es un conjunto elemental y $P_1, P_2, \ldots, P_k$ son los rectángulos disjuntos dos a dos que lo componen, tenemos por definición

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{k} m(P_i).$$

Como los rectángulos P_i cubren todo el A, tenemos

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_i m(P_i) = m'(A).$$

Pero si $\{Q_j\}$ es un sistema arbitrario finito o numerable de rectángulos que cubre A, entonces, de acuerdo con el teorema 2, $m'(A) \leqslant \sum_j m(Q_j)$; de manera que $m'(A) = \mu^*(A)$.

Como $E \setminus A$ es también un conjunto elemental, tenemos $m'(E \setminus A) = \mu^*(E \setminus A)$. Pero

$$m'(E \setminus A) = 1 - m'(A) \quad \text{y} \quad \mu^*(E \setminus A) = 1 - \mu_*(A),$$

de donde

$$m'(A) = \mu_*(A).$$

Por consiguiente,

$$\mu^*(A) = \mu_*(A) = m'(A).$$

Del resultado obtenido se desprende que el teorema 2 es un caso particular del teorema 3.

TEOREMA 5. *Para que un conjunto A sea medible es necesario y suficiente que se cumpla la siguiente condición: cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ existe un conjunto elemental B, tal que*

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

De esta forma, son medibles aquellos conjuntos, y sólo aquéllos, que pueden ser «aproximados» con cualquier grado de presición por conjuntos elementales. Para demostrar el teorema 5 necesitaremos el siguiente lema.

LEMA. *Para dos cualesquiera conjuntos A y B se tiene*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B).$$

DEMOSTRACION DEL LEMA. Como

$$A \subset B \cup (A \triangle B);$$

tendremos, en virtud del teorema 3,

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B).$$

De aquí se desprende la proposición del lema para el caso en que $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B)$. En cambio, si $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$, la afirmación del lema se desprende de la desigualdad

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B),$$

que se demuestra de una manera análoga.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 5. SUFICIENCIA. Supongamos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto elemental B tal que

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Entonces, de acuerdo al lema,

$$|\mu^*(A) - m'(B)| = |\mu^*(A) - \mu^*(B)| < \varepsilon \tag{2}$$

y como

$$(E \diagdown A) \triangle (E \diagdown B) = A \triangle B,$$

de la misma forma obtenemos que

$$|\mu^*(E \diagdown A) - m'(E \diagdown B)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que

$$m'(B) + m'(E \diagdown B) = m'(E) = 1,$$

encontramos de las desigualdades (2) y (3)

$$|\mu^*(A)+\mu^*(E\setminus A)-1|<2\varepsilon$$

y como $\varepsilon>0$ es arbitrario, tenemos

$$\mu^*(A)+\mu^*(E\setminus A)=1,$$

es decir, el conjunto A es medible.

NECESIDAD. Sea A medible, esto es,

$$\mu^*(A)+\mu^*(E\setminus A)=1.$$

Para un $\varepsilon>0$ arbitrario busquemos unos cubrimientos de los conjuntos A y $E\setminus A$ mediante sistemas de rectángulos $\{B_n\}$ y $\{C_n\}$ tales que

$$\sum_n m(B_n)\leqslant\mu^*(A)+\frac{\varepsilon}{3}; \text{ y } \sum_n m(C_n)\leqslant\mu^*(E\setminus A)+\frac{\varepsilon}{3}.$$

Como $\sum\limits_n m(B_n)<\infty$, existirá un N tal que

$$\sum_{n>N} m(B_n)<\frac{\varepsilon}{3};$$

tomemos

$$B=\bigcup_{n=1}^{N} B_n.$$

Demostremos que el conjunto elemental B satisface la condición $\mu^*(A\triangle B)<\varepsilon$. Está claro que el conjunto

$$P=\bigcup_{n>N} B_n$$

contiene $A\setminus B$, que el conjunto

$$Q=\bigcup_n (B\cap C_n)$$

contiene $B\setminus A$ y que, por consiguiente, $A\triangle B\subset P\cup Q$. Además,

$$\mu^*(P)\leqslant\sum_{n>N} m(B_n)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Estimemos $\mu^*(Q)$. Para ello observemos que

$$\left(\bigcup_n B_n\right)\cup\left(\bigcup_n (C_n\setminus B)\right)=E$$

de manera que

$$\sum_n m(B_n)+\sum_n m'(C_n\setminus B)\geqslant 1. \tag{4}$$

Pero, por hipótesis,

$$\sum_n m(B_n)+\sum_n m(C_n)\leqslant \mu^*(A)+\mu^*(E\setminus A)+\frac{2\varepsilon}{3}=1+\frac{2\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Sustrayendo (4) de (5), obtenemos

$$\sum_n m(C_n)-\sum_n m'(C_n\setminus B)=\sum_n m'(C_n\cap B)<\frac{2}{3}\varepsilon,$$

es decir,

$$\mu^*(Q)<\frac{2}{3}\varepsilon.$$

Por eso,

$$\mu^*(A\triangle B)\leqslant \mu^*(P)+\mu^*(Q)<\varepsilon.$$

Luego, si A es medible, cualquiera que sea $\varepsilon>0$ existe un conjunto elemental B tal que $\mu^*(A\triangle B)<\varepsilon$. El teorema queda demostrado.

TEOREMA 6. *La unión y la intersección de un número finito de conjuntos medibles son conjuntos medibles.*

DEMOSTRACION. Es obvio que basta realizar la demostración para el caso de dos conjuntos. Sean A_1 y A_2 conjuntos medibles. Entonces, para cualquier $\varepsilon>0$ existen conjuntos elementales B_1 y B_2 tales que

$$\mu^*(A_1\triangle B_1)<\frac{\varepsilon}{3},\quad \mu^*(A_2\triangle B_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Como

$$(A_1\cup A_2)\triangle(B_1\cup B_2)\subset(A_1\triangle B_1)\cup(A_2\triangle B_2),$$

tenemos

$$\mu^*[(A_1\cup A_2)\triangle(B_1\cup B_2)]\leqslant \mu^*(A_1\triangle B_1)+\mu^*(A_2\triangle B_2)<\varepsilon.$$

Pero, $B_1\cup B_2$ es un conjunto elemental; luego, en virtud del teorema 4, el conjunto $A_1\cup A_2$ es medible.

Por definición de conjunto medible, siendo A medible, también $E\setminus A$ es medible; por esto, la intersección de dos conjuntos medibles es medible en vista de la relación

$$A_1\cap A_2=E\setminus[(E\setminus A_1)\cup(E\setminus A_2)].$$

COROLARIO. *La diferencia y la diferencia simétrica de dos conjuntos medibles son medibles.*

Esto se deduce del teorema 6 y de las igualdades

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (E \setminus A_2), \quad A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1).$$

TEOREMA 7. *Si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces,*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \tag{6}$$

DEMOSTRACION. Al igual que en el teorema 6 es suficiente considerar el caso $n=2$. Escojamos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$ y sean B_1 y B_2 conjuntos elementales tales que

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \tag{7}$$
$$\mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{8}$$

Pongamos $A = A_1 \cup A_2$ y $B = B_1 \cup B_2$. De acuerdo con el teorema 6, el conjunto A es medible. Como los conjuntos A_1 y A_2 no se intersecan,

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

y, por consiguiente,

$$m'(B_1 \cap B_2) \leqslant 2\varepsilon. \tag{9}$$

De (7) y (8) resulta, en virtud del lema del teorema 5, que

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)| < \varepsilon, \tag{10}$$
$$|m'(B_2) - \mu^*(A_2)| < \varepsilon. \tag{11}$$

Puesto que la medida es aditiva en la clase de conjuntos elementales, obtenemos de (9), (10) y (11)

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Observando, además, que $A \triangle B \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, encontramos finalmente

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \mu^*(A \triangle B) \geqslant m'(B) - 2\varepsilon \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ se puede escoger tan pequeño como se quiera, tenemos

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Por ser siempre válida (en virtud del teorema (3)) la desigualdad opuesta

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

para $A = A_1 \cup A_2$, obtenemos en conclusión

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2);$$

como A_1, A_2 y A son medibles, se puede sustituir aquí μ^* por μ. El teorema queda demostrado.

TEOREMA 8. *La unión e intersección de un número numerable de conjuntos medibles son conjuntos medibles.*

DEMOSTRACION. Sea

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

un sistema numerable de conjuntos medibles y sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tomemos $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Está claro que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ y que los conjuntos A'_n son disjuntos dos a dos. En virtud del teorema 6 y de su corolario, todos los conjuntos A'_n son medibles. En virtud del teorema 7 y de la definición de la medida superior, para cualquier n finito

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leqslant \mu^*(A),$$

por lo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A'_n)$$

converge; de manera que para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que

$$\sum_{n>N} \mu(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Por ser medible el conjunto $C = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ (como unión de un número finito de conjuntos medibles), existe un conjunto elemental B tal que

$$\mu^*(C \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Como

$$A \triangle B \subset (C \triangle B) \cup \left(\bigcup_{n>N} A'_n\right),$$

de (12) y (13) se deduce que

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

En virtud del teorema 5, esto significa que el conjunto A es medible.

Puesto que los complementos de conjuntos medibles son medibles, la parte del teorema correspondiente a las intersecciones se desprende de la igualdad

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n).$$

El teorema 8 es una generalización del teorema 6. El teorema que sigue constituye una generalización correspondiente del teorema 7.

TEOREMA 9. *Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y si $A = \bigcup_n A_n$, se tiene*

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n).$$

DEMOSTRACION. Según el teorema 7, para cualquier N

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \mu(A).$$

Pasando al límite para $N \to \infty$, obtenemos

$$\mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{14}$$

Por otro lado, según el teorema 3,

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{15}$$

De (14) y (15) se desprende la afirmación del teorema.

La propiedad de la medida establecida en el teorema 9 es llamada *aditividad numerable* o *σ-aditividad*. De la σ-aditividad se deduce la siguiente propiedad de la medida llamada *continuidad*.

TEOREMA 10. *Si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ es una sucesión de conjuntos medibles sumergidos unos en otros y si $A = \bigcap_n A_n$, se tiene*

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Obviamente bastará considerar el caso $A=\varnothing$, ya que el caso general se reduce a éste sustituyendo A_n por $A_n\setminus A$. Entonces,

$$A_1=(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\ldots$$

y

$$A_n=(A_n\setminus A_{n+1})\cup(A_{n+1}\setminus A_{n+2})\cup\ldots$$

Por consiguiente,

$$\mu(A_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k\setminus A_{k+1}) \tag{16}$$

y

$$\mu(A_n)=\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k\setminus A_{k+1}); \tag{17}$$

como la serie (16) converge, su resto (17) tiende a cero para $n\to\infty$. De manera que

$$\mu(A_n)\to 0 \text{ para } n\to\infty,$$

que es lo que necesitábamos demostrar.

COROLARIO. *Si $A_1\subset A_2\subset\ldots$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles y si*

$$A=\bigcup_n A_n$$

se tiene

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

Para demostrarlo es suficiente pasar de los conjuntos A_n a sus complementos y recurrir al teorema 10.

De esta forma hemos extendido la medida de conjuntos elementales a una clase más amplia de conjuntos, llamados medibles, cerrada respecto a las operaciones de unión e intersección numerables. La medida construida es σ-aditiva en esta clase de conjuntos. Los teoremas demostrados permiten hacerse una idea de la clase de todos los conjuntos medibles según Lebesgue.

Como todo conjunto cerrado, contenido en E, se puede representar como la unión de un número finito o numerable de rectángulos abiertos, esto es, de conjuntos medibles, todos los conjuntos abiertos son, en virtud del teorema 8, medibles. Los conjuntos cerrados son complementos de los abiertos y, consecuentemente, son también medibles. Según el teorema 8, serán también medibles todos aquellos conjuntos que se puedan obtener a partir de conjuntos abiertos y cerrados mediante un número finito o numerable de operaciones consistentes en considerar uniones o intersecciones numerables. Se puede demostrar, sin embargo, que con estos conjuntos no se agota la clase de todos los conjuntos medibles según Lebesgue.

4°. Algunos suplementos y generalizaciones. Hemos considerado anteriormente sólo aquellos conjuntos del plano que son subconjuntos del cuadrado unidad $E = \{0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$. No es difícil librarse de esta restricción, por ejemplo, del siguiente modo. Considerando todo el plano como la unión de los cuadrados $E_{nm} = \{n \leqslant x \leqslant n+1, m \leqslant y \leqslant m+1\}$ (n, m son números enteros), diremos que un conjunto plano A es medible cuando es medible su intersección $A_{nm} = A_n \cap E_{nm}$ con cada uno de estos cuadrados y cuando la serie $\sum_{n, m} \mu(A_{nm})$ converge, tomando por definición

$$\mu(A) = \sum_{n, m} \mu(A_{nm}).$$

Todas las propiedades de la medida que hemos establecido anteriormente se extienden de manera obvia a este caso.

En este parágrafo hemos expuesto la construcción de la medida de Lebesgue para los conjuntos planos. De manera análoga se puede construir la medida de Lebesgue en la recta, en el espacio de tres dimensiones y, en general, en un espacio euclídeo de cualquier dimensión n. En todos estos casos la medida es construida siguiendo las mismas ideas: a partir de la medida definida de antemano para un sistema de conjuntos elementales (rectángulos en el caso del plano; intervalos (a, b), segmentos $[a, b]$ y semisegmentos $(a, b]$ y $[a, b)$ en el caso de la recta; etc.) definimos primero la medida para uniones finitas de estos conjuntos, extendiéndola después a una clase mucho más amplia de conjuntos, a la clase de conjuntos medibles según Lebesgue. Para conjuntos de un espacio de cualquier dimensión la propia definición de conjunto medible se conserva textualmente.

Al introducir el concepto de medida de Lebesgue hemos partido de la definición habitual del área. En el caso unidimensional la construcción análoga se basa en el concepto de la longitud de un intervalo (de un segmento, de un semisegmento). No obstante, es posible introducir en este caso el concepto de la medida de otra forma, algo más general (que frecuentemente aparece en la práctica).

Sea $F(t)$ una función no decreciente y continua a la izquierda definida en la recta. Pongamos

$$\begin{aligned} m(a, b) &= F(b) - F(a+0), \\ m[a, b] &= F(b+0) - F(a), \\ m(a, b] &= F(b+0) - F(a+0), \\ m[a, b) &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Es fácil ver que la función de intervalo m, definida de esta forma, es no negativa y aditiva. Aplicando a ella razonamientos análogos a los realizados en este parágrafo, podemos construir una «medida» $\mu_F(A)$. La clase de conjuntos medibles según esta medida será cerrada respecto a las uniones e intersecciones numerables, mientras que la medida μ_F será σ-aditiva. La clase de conjuntos medibles según μ_F dependerá, en general, de la selección de la función F. Sin embargo, cualquiera que sea F, los conjuntos abiertos y cerrados y, por consiguiente, todas las uniones e intersecciones numerables de los mismos serán medibles. Las medidas que se obtienen a partir de una u otra función F se llaman *medidas de Lebesgue — Stieltjes*. En particular, a la función $F(t) \equiv t$ corresponde la medida corriente de Lebesgue en la recta.

Una medida μ_F que se anula en cualquier conjunto, cuya medida corriente de Lebesgue es igual a 0, se llama *absolutamente continua*. Una medida μ_F concentrada totalmente en un conjunto finito o numerable de puntos (esto ocurrirá cada vez que el conjunto de valores de la función $F(t)$ sea finito o numerable) se llama *discreta*. Una medida μ_F se llama *singular* cuando es igual a cero para cualquier conjunto compuesto de un punto y cuando existe un conjunto M de medida de Lebesgue igual a 0 tal que la medida μ_F de su complemento es igual a 0.

Se puede demostrar que toda medida μ_F es suma de una medida absolutamente continua, una medida discreta y una medida singular. A las medidas de Lebesgue—Stieltjes volveremos en el capítulo siguiente.

Existencia de conjuntos no medibles. Como se ha demostrado, la clase de conjuntos medibles según Lebesgue es muy amplia. Surge la pregunta natural de si existen, en general, conjuntos no medibles. Vamos a demostrar que este problema se resuelve positivamente. Lo más sencillo es construir conjuntos no medibles en la circunferencia.

Sea C una circunferencia de longitud 1 y sea α un número irracional. Asignemos a una misma clase aquellos puntos de la circunferencia C que se transforman unos en otros mediante una rotación de la circunferencia C de valor angular $n\alpha\pi$ (n es un número entero). Cada una de estas clases quedará compuesta, obviamente, por un conjunto numerable de puntos. Escojamos ahora un punto en cada una de estas clases. Probemos que el conjunto obtenido de esta forma (denotémoslo con Φ_0) no es medible. Sea Φ_n el conjunto que se obtiene de Φ_0 por una rotación de valor angular $n\alpha\pi$. Es fácil ver que los conjuntos Φ_n son disjuntos dos a dos y que la unión de ellos es la circunferencia C. Si el conjunto Φ_0 fuese medible, también serían medibles los conjuntos Φ_n congruentes a él. Como

$$C = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n, \quad \Phi_n \cap \Phi_m = \varnothing \text{ para } n \neq m,$$

podríamos concluir de aquí, debido a la σ-aditividad de la medida, que

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(\Phi_n). \tag{18}$$

Pero los conjuntos congruentes tienen la misma medida; luego, si Φ_0 es medible, tenemos

$$\mu(\Phi_n) = \mu(\Phi).$$

Esto demuestra que la igualdad (18) es imposible, ya que la suma de la serie, que figura en el miembro derecho de la igualdad (18), es igual a 0 cuando $\mu(\Phi_0) = 0$ y es infinita cuando $\mu(\Phi_0) > 0$. De manera que el conjunto Φ_0 (y, consecuentemente, cualquier conjunto Φ_n) no es medible.

§ 2. CONCEPTO GENERAL DE MEDIDA. PROLONGACIÓN DE UNA MEDIDA DE UN SEMIANILLO A UN ANILLO. ADITIVIDAD Y σ-ADITIVIDAD[1]

1°. Definición de medida. Al construir la medida de conjuntos planos hemos partido de la medida (el área) de un rectángulo, extendiendo después el concepto de medida a una clase más amplia de conjuntos. Lo esencial en la construcción, expuesta en el parágrafo anterior, no es de ninguna manera la expresión concreta del área de un rectángulo; son esenciales para esta construcción dos hechos generales: 1) el área de un rectángulo es una función de conjunto no negativa que satisface la condición de aditividad, esto es,

$$m(P_1 \cup P_2) = m(P_1) + m(P_2) \text{ cuando } P_1 \cap P_2 = \varnothing$$

y 2) el conjunto de rectángulos constituye un semianillo de conjuntos. Por esto, a la construcción expuesta en el § 1 para el caso de conjuntos planos se le puede dar una forma totalmente abstracta y general. Con ello se ampliará sustancialmente la posibilidad de aplicar nuestras construcciones. A esto están dedicados los dos parágrafos que siguen.

Introduzcamos, ante todo, la siguiente definición fundamental.

DEFINICION 1. Una función $\mu(A)$ de conjunto se llama *medida* cuando

[1] En este parágrafo en lo que sigue emplearemos sistemáticamente los conceptos y resultados expuestos en el § 5 del cap. I.

1) el campo de definición $\mathfrak{S}_\mu$ de la función $\mu(A)$ es un semianillo de conjuntos;

2) los valores de la función $\mu(A)$ son reales y no negativos;

3) $\mu(A)$ es aditiva, esto es, para cualquier descomposición finita

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

de un conjunto $A \in \mathfrak{S}_\mu$ en conjuntos $A_k \in \mathfrak{S}_\mu$ se verifica la igualdad

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Observación. De la descomposición $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ se deduce que $\mu(\varnothing = 2\mu(\varnothing)$, es decir, $\mu(\varnothing) = 0$.

Los dos teoremas que vienen a continuación sobre medidas en semianillos se emplearán frecuentemente en lo sucesivo.

TEOREMA 1. *Sea μ una medida definida en un semianillo $\mathfrak{S}_\mu$. Si los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, A pertenecen a $\mathfrak{S}_\mu$ y A_k son subconjuntos disjuntos dos a dos de A, se tiene*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \mu(A).$$

DEMOSTRACION. Por ser $\mathfrak{S}_\mu$ un semianillo existe, en virtud del lema 1 del § 5 del capítulo I, la descomposición

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k, \quad s \geqslant n, \quad A_k \in \mathfrak{S}_\mu,$$

donde los n primeros conjuntos coinciden con los conjuntos dados $A_1, \ldots, A_n$. Como la medida de cualquier conjunto es no negativa, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{s} \mu(A_k) = \mu(A).$$

TEOREMA 2. *Si $A_1, \ldots, A_n$, A pertenecen a $\mathfrak{S}_\mu$ y $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, se tiene*

$$\mu(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

DEMOSTRACION. En virtud del lema 2 del § 5 del capítulo I, existe un sistema de conjuntos disjuntos dos a dos $B_1, \ldots, B_t$

de $\mathfrak{S}_\mu$ tal que cualquier conjunto $A_1, A_2, \ldots, A_n, A$ se puede representar como la unión de determinados conjuntos B_s:

$$A=\bigcup_{s\in M_0} B_s,\quad A_k=\bigcup_{s\in M_k} B_s,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

donde cada índice $s\in M_0$ pertenece también a un M_k. Luego, cada término de la suma

$$\sum_{s\in M_0}\mu(B_s)=\mu(A)$$

figura una o varias veces en la suma doble

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s\in M_k}\mu(B_s)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k).$$

De aquí se desprende precisamente que

$$\mu(A)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k).$$

En particular, para $n=1$ tenemos el resultado siguiente.

COROLARIO. *Si* $A\subset A'$, *se tiene* $\mu(A)\leqslant\mu(A')$.

2°. Prolongación de una medida en un semianillo al anillo generado. El primer paso en construir la medida de conjuntos planos consistió en extender el concepto de medida de un rectángulo a los conjuntos elementales, es decir, a las uniones finitas de rectángulos disjuntos dos a dos. Veamos ahora el análogo abstracto de este problema. Enunciemos, ante todo, la siguiente definición.

DEFINICION 2. Una medida μ se llama *prolongación* de una medida m cuando $\mathfrak{S}_m\subset\mathfrak{S}_\mu$ y cuando para todo $A\in\mathfrak{S}_m$ se cumple la igualdad

$$\mu(A)=m(A).$$

El objeto de este punto es demostrar la proposición que sigue.

TEOREMA 3. *Para cada* $m(A)$, *definida en un semianillo* $\mathfrak{S}_m$, *existe una prolongación* $\mu(A)$, *y sólo una, que tiene como campo de definición el anillo* $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ *(esto es, el anillo minimal sobre* $\mathfrak{S}_m$*).*

DEMOSTRACION. Para todo conjunto $A\in\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ existe la descomposición

$$A=\bigcup_{k=1}^{n} B_k\quad(B_k\in\mathfrak{S}_m)\tag{1}$$

(teorema 3, § 5, capítulo I). Tomemos por definición

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k). \tag{2}$$

Es fácil ver que la magnitud $\mu(A)$, definida por la igualdad (2), no depende de cómo se escoja la descomposición (1).
En efecto, consideremos dos descomposiciones

$$A = \bigcup_{i=1}^{r} B_i = \bigcup_{j=1}^{n} C_j, \quad B_i \in \mathfrak{S}_m, \quad C_j \in \mathfrak{S}_m.$$

Como todas las intersecciones $B_i \cap C_j$ pertenecen a $\mathfrak{S}_m$, tenemos, en vista de la aditividad de la medida m,

$$\sum_{i=1}^{r} m(B_i) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{n} m(C_j),$$

que es lo que queríamos demostrar. Es evidente, que la función $\mu(A)$, definida por la igualdad (2), es no negativa y aditiva. Luego, hemos demostrado la existencia de la prolongación μ de la medida m al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$. Para demostrar su unicidad observemos que, de acuerdo a la definición de prolongación, si $A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, donde B_k son conjuntos disjuntos de $\mathfrak{S}_m$, tenemos para cualquier prolongación $\tilde{\mu}$ de la medida m al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$

$$\tilde{\mu}(A) = \sum \tilde{\mu}(B_k) = \sum m(B_k) = \mu(A),$$

es decir, la medida $\tilde{\mu}$ coincide con la medida μ definida por la igualdad (2). El teorema queda demostrado.

Este teorema constituye, de hecho, la repitición, en términos abstractos, de la construcción realizada en el § 1 al prolongar la medida de rectángulos a la clase de conjuntos elementales que representa precisamente el anillo minimal sobre el semianillo de rectángulos.

3°. Aditividad numerable. En diferentes cuestiones del Análisis es preciso considerar, además de uniones finitas, uniones de un número numerable de conjuntos. En este orden la condición de aditividad, a la que hemos sometido las medidas (definición 1) resulta insuficiente y es natural sustituirla por una condición más fuerte de la así llamada aditividad numerable.

DEFINICION 3. Una medida μ se llama *aditiva numerable* (o σ-aditiva) cuando para cualesquiera conjuntos $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, que pertenecen a su campo de definición $\mathfrak{S}_\mu$ y que verifican las condiciones

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ para } i \neq j,$$

tiene lugar la igualdad

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La medida plana de Lebesgue, construida en el § 1, es σ-aditiva (teorema 9). Un ejemplo de una medida σ-aditiva de una naturaleza totalmente distinta se puede obtener del siguiente modo. Sea

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

un conjunto numerable arbitrario y sean los números $p_n > 0$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

El campo $\mathfrak{S}_m$ se compone de todos los subconjuntos del conjunto X. Tomemos para cada $A \subset X$

$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n.$$

Es fácil ver que $\mu(A)$ será una medida σ-aditiva y que $\mu(X) = 1$. Este ejemplo surge de un modo natural en diferentes cuestiones de la Teoría de probabilidades.

Señalemos un ejemplo de una medida aditiva que no es σ-aditiva. Sea X el conjunto de todos los puntos racionales del segmento $[0, 1]$ y sea $\mathfrak{S}_\mu$ el conjunto formado por las intersecciones del conjunto X con intervalos (a, b), segmentos $[a, b]$ o semisegmentos $(a, b]$ y $[a, b)$ arbitrarios. Es fácil ver que $\mathfrak{S}_\mu$ forma un semianillo. Tomemos para cada conjunto de este tipo

$$\mu(A_{ab}) = b - a.$$

Esta medida es aditiva, pero no es σ-aditiva, ya que $\mu(X) = 1$ y al mismo tiempo X es la unión de un número numerable de puntos cada uno de los cuales tiene medida 0.

Las medidas que consideraremos ahora y en el parágrafo siguiente se suponen σ-aditivas.

TEOREMA 4. *Si una medida m definida en un semianillo $\mathfrak{S}_m$ es σ-aditiva, también es σ-aditiva la medida $\mu = r(m)$ que se obtiene prolongándola al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$.*

DEMOSTRACION. Sea

$$A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m), \ B_n \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

y sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

donde $B_s \cap B_r = \varnothing$ para $s \neq r$. Entonces, existen conjuntos A_j y B_{ni} de $\mathfrak{S}_m$ tales que

$$A = \bigcup_j A_j, \quad B_n = \bigcup_i B_{ni},$$

donde los conjuntos que figuran en los miembros derechos de cada una de estas igualdades son disjuntos dos a dos y las uniones respecto a i y j son finitas (teorema 3, § 5, capítulo I).

Sea $C_{nij} = B_{ni} \cap A_j$. Es fácil ver que los conjuntos C_{nij} son disjuntos dos a dos y que

$$A_j = \bigcup_n \bigcup_i C_{nij},$$

$$B_{ni} = \bigcup_j C_{nij}.$$

Luego, debido a la σ-aditividad de la medida m sobre $\mathfrak{S}_m$, tenemos

$$m(A_j) = \sum_n \sum_i m(C_{nij}), \tag{3}$$

$$m(B_{ni}) = \sum_j m(C_{nij}) \tag{4}$$

y de acuerdo a la definición de la medida $\mu = r(m)$ sobre $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, tenemos

$$\mu(A) = \sum_j m(A_j), \tag{5}$$

$$\mu(B_n) = \sum_i m(B_{ni}). \tag{6}$$

De (3), (4), (5) y (6) se desprende que $\mu(A) = \sum_n \mu(B_n)$. (Las sumas respecto a i y j son finitas y las series respecto a n convergen.)

Demostremos ahora las siguientes propiedades fundamentales de medidas σ-aditivas que constituyen una generalización de los teoremas 1 y 2 al caso de uniones numerables de conjuntos.

TEOREMA 5. *Sea m una medida σ-aditiva y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ conjuntos pertenecientes a $\mathfrak{S}_m$.* Entonces, Iσ si $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$ y $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leqslant m(A);$$

IIσ si $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \geqslant m(A).$$

DEMOSTRACION. Si todos los A_k son disjuntos y están contenidos en A, tenemos para cualquier n

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leqslant m(A),$$

en virtud del teorema 1. Pasando aquí al límite para $n \to \infty$, obtenemos la primera afirmación del teorema.

En cuanto a la segunda afirmación, es suficiente demostrarla, de acuerdo con el teorema 4, para medidas definidas sobre un anillo, ya que de la validez de la proposición IIσ para $\mu = r(m)$ se deduce directamente su validez para la medida m. Siendo $\mathfrak{S}_m$ un anillo, los conjuntos

$$B_n = (A \cap A_n) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

pertenecen a $\mathfrak{S}_m$. Como

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n \subset A$$

y los conjuntos B_n son disjuntos dos a dos, tenemos

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Observación. La afirmación Iσ del teorema demostrado no emplea, obviamente, la σ-aditividad de la medida considerada y sigue siendo válida para cualesquiera medidas aditivas. La afirmación IIσ, al contrario, se basa de un modo sustancial, en la σ-aditividad de la medida. Efectivamente, en el ejemplo dado anteriormente de una medida aditiva, pero no σ-aditiva, todo el espacio X, de medida 1, es cubierto por una unión numerable de conjuntos, compuestos de un solo punto, que tienen medida 0. Es más, no es difícil demostrar que la condición IIσ es, en realidad, equivalente a la σ-aditividad. En efecto, sea μ una medida y sean $A, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ conjuntos de $\mathfrak{S}_\mu$ tales que todos los A_k son disjuntos dos a dos y $A = \bigcup A_k$. Entonces, en virtud de la condición Iσ (que es válida, como hemos visto, para cualquier medida), se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(A).$$

Si μ verifica además la condición IIσ, tendremos (ya que los conjuntos A_k cubren A)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geqslant \mu(A)$$

de manera que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

En la práctica resulta con frecuencia más fácil comprobar que una medida verifica la condición IIσ que demostrar su σ-aditividad.

§ 3. PROLONGACIÓN DE LEBESGUE DE UNA MEDIDA

1°. Prolongación de Lebesgue de una medida definida en un semianillo con unidad. Si la medida m definida en un semianillo $\mathfrak{S}_m$ verifica sólo la condición de aditividad (pero no es σ-aditiva), su prolongación a $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, obtenida por el procedimiento descrito en el parágrafo anterior, agota en gran medida, las posibilidades de extender la medida del semianillo inicial a una clase más amplia de conjuntos. En cambio, si la medida considerada es σ-aditiva, puede ser extendida de $\mathfrak{S}_m$ a un sistema de conjuntos mucho más amplio que el anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$. La prolongación de una medida σ-aditiva, definida en un semianillo, a una clase de conjuntos, en cierto sentido maximal, se puede realizar mediante la así llamada prolongación de Lebesgue. Consideremos primero la prolongación de Lebesgue de una medida, definida en un semianillo con unidad. El caso general será estudiado en el punto siguiente.

Supongamos que en un semianillo de conjuntos $\mathfrak{S}_m$ con unidad E está definida una medida m σ-aditiva. Definamos en el sistema $\mathfrak{A}$ de todos los subconjuntos del conjunto E las funciones $\mu^*(A)$ y $\mu_*(A)$ del siguiente modo.

DEFINICION 1. Se llama *medida superior* del conjunto $A \subset E$ al número

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup B_n} \sum_n m(B_n),$$

donde la cota inferior se toma respecto a todos los cubrimientos del conjunto A mediante sistemas finitos o numerables de conjuntos $B_n \in \mathfrak{S}_m$.

DEFINICION 2. Se llama *medida inferior* de un conjunto $A \subset E$ al número

$$\mu_*(A) = m(E) - \mu^*(E \setminus A).$$

El teorema 5 del § 2 implica que siempre $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$.

DEFINICION 3. Un conjunto $A \subset E$ se llama *medible* (según Lebesgue) cuando

$$\mu_*(A) = \mu^*(A).$$

Siendo A medible, el valor común $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ es denotado mediante $\mu(A)$ y llamado medida (de Lebesgue) del conjunto A.

Si A es medible, también será, evidentemente, medible su complemento.

En vista del teorema 5 del § 2, para cualquier prolongación σ-aditiva $\bar{\mu}$ de una medida m, definida en un semianillo, tiene lugar la desigualdad

$$\mu_*(A) \leqslant \bar{\mu}(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Consecuentemente, para un conjunto medible A toda prolongación σ-aditiva $\bar{\mu}$ de una medida m (si esta prolongación está definida en A) toma necesariamente el valor $\mu_*(A) = \mu^*(A)$. La medida de Lebesgue no es otra cosa que la prolongación σ-aditiva de la medida m a la clase de todos los conjuntos medibles en el sentido de la definición 3. Es obvio que la definición de conjunto medible se puede enunciar también así:

DEFINICION 3′. Un conjunto $A \subset E$ se llama *medible* cuando

$$\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = m(E).$$

Conviene emplear, además de la medida inicial m, su prolongación $m' = r(m)$ al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ considerada anteriormente (§ 2). Está claro que la definición 1 es equivalente a la siguiente.

DEFINICION 1′. Se llama *medida superior* de un conjunto A al número

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_n B'_n} \sum_n m'(B'_n), \quad B'_n \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m).$$

En efecto, como la medida m' es σ-aditiva (teorema 4 del § 2), cualquier suma $\sum_n m'(B'_n)$, donde $B'_n \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, puede ser sustituida por la suma equivalente

$$\sum_{n,\,k} m(B_{nk}),\ B_{nk} \in \mathfrak{S}_m,$$

donde $B'_n = \bigcup_k B_{nk}$ y $B_{ni} \cap B_{nj} = \varnothing$ para $i \neq j$.

Los resultados que siguen son fundamentales para la exposición ulterior.

TEOREMA 1. *Si*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

donde $\{A_n\}$ *es un sistema finito o numerable de conjuntos, se tiene*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$

TEOREMA 2. *Si* $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, *se tiene* $\mu_*(A) = m'(A) = \mu^*(A)$, *es decir, todos los conjuntos de* $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ *son medibles y las medidas superior e inferior de los mismos coinciden con* m'.

TEOREMA 3. *Para que un conjunto* A *sea medible es necesaria y suficiente la siguiente condición:*

para cualquier $\varepsilon > 0$ *existe un* $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ *tal que*

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

En el § 1 estas proposiciones han sido demostradas para la medida plana de Lebesgue (teoremas 3, 4 y 5 del § 1). Las demostraciones dadas allí siguen siendo válidas en el caso general que estamos considerando y por eso no las repetimos.

TEOREMA 4. *El sistema* $\mathfrak{M}$ *de todos los conjuntos medibles es un anillo.*

DEMOSTRACION. Como

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$$

y

$$A_1 \cup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)],$$

basta demostrar que si $A_1 \in \mathfrak{M}$ y $A_2 \in \mathfrak{M}$, también

$$A = A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{M}.$$

Supongamos que A_1 y A_2 son medibles; en este caso existen $B_1 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ y $B_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ tales que

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $B = B_1 \setminus B_2 \in \Re(\mathfrak{S}_m)$ y empleando la relación

$$(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

encontramos

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, de aquí se desprende que A es medible.

Observación. Es evidente que E constituye la unidad del anillo $\mathfrak{M}$ que de esta forma resulta ser un álgebra de conjuntos.

TEOREMA 5. *La función $\mu(A)$ es aditiva en el sistema $\mathfrak{M}$ de los conjuntos medibles.*

La demostración de este teorema es una repetición verbal de la demostración del teorema 7 del § 1.

TEOREMA 6. *La función $\mu(A)$ es σ-aditiva en el sistema $\mathfrak{M}$ de los conjuntos medibles.*

DEMOSTRACION. Sea

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A, \ A_i \in \mathfrak{M}; \quad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ para } i \neq j.$$

En virtud del teorema 1,

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n), \tag{1}$$

y, de acuerdo al teorema 5,

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n)$$

para cualquier N, de donde

$$\mu^*(A) \geqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{2}$$

De (1) y (2) se deduce la afirmación del teorema.

Hemos demostrado de esta forma que la función $\mu(A)$, definida en el sistema $\mathfrak{M}$, posee todas las propiedades de una medida σ-aditiva.

Ello justifica la siguiente definición.

DEFINICION 4. Se llama *prolongación de Lebesgue* $\mu = L(m)$ de una medida m a la función $\mu(A)$, definida en el sistema $\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{M}$ de los conjuntos medibles y coincidente en este sistema con la medida superior $\mu^*(A)$.

En el § 1 hemos demostrado, al considerar la medida plana de Lebesgue, que son medibles no sólo las uniones e intersecciones finitas de conjuntos medibles, sino también las uniones e intersecciones numerables de conjuntos medibles. Esto sigue siendo válido también en el caso general, es decir, tiene lugar el siguiente teorema.

TEOREMA 7. *El sistema $\mathfrak{M}$ de conjuntos medibles según Lebesgue constituye un álgebra de Borel con unidad E.*

DEMOSTRACION. Como

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

y puesto que el complemento de un conjunto medible es medible, basta demostrar lo siguiente: si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ pertenecen a $\mathfrak{M}$, también $A = \bigcup_n A_n$ pertenece a $\mathfrak{M}$. La demostración de esta proposición dada en el teorema 8 del § 1 para los conjuntos planos se conserva textualmente en el caso general.

Al igual que en el caso de medida plana de Lebesgue, la σ-aditividad de la medida implica su continuidad, esto es, siendo μ una medida σ-aditiva definida en una B-álgebra y siendo $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ una cadena decreciente de conjuntos medibles tal que

$$A = \bigcap_n A_n,$$

se tiene

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

y siendo $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ una cadena creciente de conjuntos medibles tal que

$$A = \bigcup_n A_n,$$

se tiene

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

La demostración, dada para la medida plana en el § 1 (teorema 10), se extiende textualmente al caso general.

2°. **Prolongación de una medida definida en un semianillo sin unidad.** Si el semianillo $\mathfrak{S}_m$, en el cual está definida la medida inicial m, no tiene unidad, la construcción de la prolongación de Lebesgue, expuesta en el punto anterior, debe ser modificada. La definición 1 de la medida superior se conserva, pero la medida superior μ^* estará definida sólo en el sistema S_{μ^*} de aquellos conjuntos A para cada uno de los cuales existe un cubrimiento $\bigcup_n B_n$ mediante conjuntos de $\mathfrak{S}_m$ de suma finita

$$\sum_n m(B_n).$$

La definición 2 pierde su sentido. La medida inferior puede ser definida (de una manera algo distinta) también en el caso general; pero no lo haremos. Conviene definir ahora el concepto de conjunto medible a partir de la propiedad de conjuntos medibles señalada en el teorema 3.

DEFINICION 5. Un conjunto A se llama *medible* cuando para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ tal que $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Los teoremas 4, 5 y 6 y la definición 4 subsisten. La existencia de la unidad ha sido empleada sólo durante la demostración del teorema 4. Para demostrar el teorema 4 en el caso general, debemos probar de una manera independiente que $A_1 \in \mathfrak{M}$ y $A_2 \in \mathfrak{M}$ implican que $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}$. Pero esto se desprende de la inclusión

$$A_1 \cup A_2 \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

En el caso en que $\mathfrak{S}$ no tiene unidad, el teorema 7 es sustituido por el teorema siguiente.

TEOREMA 8. *Cualquiera que sea la medida inicial m, el sistema $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{L(m)}$ de conjuntos medibles según Lebesgue es un σ-anillo; siendo A_n medibles el conjunto $A = \bigcup A_n$ es medible cuando, y sólo cuando, las medidas $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$ están acotadas por una constante que no depende de N.*

Dejamos la demostración de este teorema a cargo del lector.

Observación. En nuestra exposición la medida es siempre finita, de manera que la necesidad de la última condición es obvia.

Del teorema 8 resulta:

COROLARIO. *El sistema $\mathfrak{M}_A$ de todos los conjuntos $B \in \mathfrak{M}$, que son subconjuntos de un conjunto fijado $A \in \mathfrak{M}$, constituye un álgebra boreliana.*

Por ejemplo, el sistema de los subconjuntos de cualquier segmento $[a, b]$ medibles según Lebesgue (en el sentido de la medida lebesguiana habitual $\mu^{(1)}$ en la recta) es un álgebra boreliana de conjuntos.

Para concluir señalemos otra propiedad de las medidas de Lebesgue.

DEFINICION 6. Una medida μ se llama *completa* cuando de $\mu(A)=0$ y $A'\subset A$ se desprende $A'\in\mathfrak{S}_{\mu}$.

Evidentemente, en este caso $\mu(A')=0$. No es difícil demostrar que la prolongación lebesguiana de cualquier medida es completa. Esto se debe a que para $A'\subset A$ y $\mu(A)=0$ es necesariamente $\mu^*(A')=0$ y a que es medible cualquier conjunto C para el cual $\mu^*(C)=0$, ya que $\varnothing\in\mathfrak{R}$ y

$$\mu^*(C\triangle\varnothing)=\mu^*(C)=0.$$

Indiquemos la relación existente entre el proceso de prolongación de una medida según Lebesgue y el proceso de completación de un espacio métrico. Observemos en este orden que $m'(A\triangle B)$ puede ser considerado como la distancia entre los elementos A y B del anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$. Entonces, $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ se convierte en un espacio métrico (no completo, como regla general) y su completación, de acuerdo con el teorema 3 del § 2, se compone precisamente de todos los conjuntos medibles (aunque, sin embargo, los conjuntos A y B no se pueden distinguir desde el punto de vista métrico cuando $\mu(A\triangle B)=0$).

3°. Prolongación de una medida según Jordan. Al estudiar en el § 2 de este capítulo las medidas que verifican solamente la condición de aditividad, hemos demostrado que cada una de estas medidas m puede ser extendida del semianillo $\mathfrak{S}_m$ al anillo minimal $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ generado por este semianillo. No obstante, existe también la posibilidad de extender la medida a un anillo más amplio que $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$. La construcción correspondiente se llama *prolongación de una medida según Jordan*[1]. La idea de esta construcción, empleada en varios casos particulares ya por los matemáticos de la Grecia antigua, consiste en aproximar el conjunto «a medir» A por conjuntos A' y A'' de medida prescrita, por dentro y por fuera, esto es, de manera que

$$A'\subset A\subset A''.$$

Sea m una medida definida en un anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$.

DEFINICION 7. Diremos que un conjunto A *es medible según Jordan* cuando para cualquier $\varepsilon>0$ existen en el anillo $\mathfrak{R}$ conjuntos A' y A'' que satisfacen las condiciones

$$A'\subset A\subset A'',\quad m(A''\setminus A')<\varepsilon.$$

Es válida la siguiente proposición.

TEOREMA 9. *El sistema $\mathfrak{R}^*$ de los conjuntos medibles según Jordan es un anillo.*

[1] Camille Jordan, matemático francés (1838—1922).

Sea $\mathfrak{N}$ un sistema de conjuntos A para los cuales existe un conjunto $B \supset A$ de $\mathfrak{N}$. Para cualquier A de $\mathfrak{N}$ tomemos por definición

$$\bar{\mu}(A) = \inf_{B \supset A} m(B),$$
$$\underline{\mu}(A) = \sup_{B \subset A} m(B).$$

Las funciones $\bar{\mu}(A)$ y $\underline{\mu}(A)$ se llaman medida «exterior» e «interior», respectivamente, del conjunto A.

Es evidente que siempre

$$\underline{\mu}(A) \leqslant \bar{\mu}(A).$$

TEOREMA 10. *El anillo $\mathfrak{N}^*$ coincide con el sistema de aquellos conjuntos $A \in \mathfrak{N}$ para los cuales $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A)$.*

Para los conjuntos de $\mathfrak{N}$ tienen lugar los siguientes teoremas:

TEOREMA 11. *Si $A \subset \bigcup A_k$, se tiene $\bar{\mu}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \bar{\mu}(A_k)$.*

TEOREMA 12. *Si $A_k \subset A$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y $A_i \cap A_j = \varnothing$, se tiene*

$$\underline{\mu}(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(A_k).$$

Definamos ahora la función μ con campo de definición

$$\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{N}^*$$

como el valor común de las medidas exterior e interior:

$$\mu(A) = \underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A).$$

De los teoremas 11 y 12 y del hecho evidente de que para $A \in \mathfrak{N}$ se tiene

$$\bar{\mu}(A) = \underline{\mu}(A) = m(A),$$

se desprende la siguiente afirmación.

TEOREMA 13. *La función $\mu(A)$ es una medida y es una prolongación de la medida m.*

La construcción expuesta es aplicable a cualquier medida m definida en un anillo. En particular, se puede aplicarla a los conjuntos del plano. En este caso, se toma como anillo inicial el sistema de conjuntos elementales (es decir, las uniones finitas de rectángulos). El anillo de conjuntos elementales depende, obviamente, de la selección del sistema de coordenadas en el plano (se toman rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas). Al pasar a la medida plana de Jordan

$$J^{(2)} = j(m_2),$$

esta dependencia de la selección del sistema de coordenadas desaparece: partiendo de cualquier sistema de coordenadas $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$, relacionado con el sistema inicial $\{x_1, x_2\}$ mediante una transformación ortogonal

$$\bar{x}_1 = \cos\alpha \cdot x_1 + \operatorname{sen}\alpha \cdot x_2 + a_1,$$
$$\bar{x}_2 = -\operatorname{sen}\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 + a_2,$$

obtendremos una misma medida de Jordan

$$J^{(2)} = j(m_2) = j(\bar{m}_2)$$

(aquí $\bar{m}_2$ es la medida construida a partir de los rectángulos de lados paralelos a los ejes $\bar{x}_1, \bar{x}_2$). Este resultado se desprende del siguiente teorema general.

TEOREMA 14. *Para que las prolongaciones de Jordan $\mu_1 = j(m_1)$ y $\mu_2 = j(m_2)$ de las medidas m_1 y m_2, definidas en los anillos $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$, coincidan es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:*

$$\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{S}_{\mu_1} \quad m_1(A) = \mu_2(A) \text{ en } \mathfrak{R}_1,$$
$$\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{S}_{\mu_2} \quad m_2(A) = \mu_1(A) \text{ en } \mathfrak{R}_2.$$

Si la medida inicial m es definida en un semianillo en lugar de un anillo, es natural llamar prolongación de Jordan a la medida

$$j(m) = j(r(m))$$

que se obtiene mediante la extensión de m al anillo $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ y la prolongación ulterior según Jordan.

4°. Unicidad de prolongación de una medida. Si el conjunto A es medible según Jordan respecto a la medida μ, esto es, pertenece a $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{S}_m)$, entonces, para cualquier medida $\tilde{\mu}$, que es prolongación de m y que está definida en $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{S}_m)$, el valor $\tilde{\mu}(A)$ coincide con el valor $J(A)$ de la prolongación de Jordan $J = j(m)$. Se puede demostrar que la prolongación de la medida m a un sistema más amplio que $\mathfrak{S}_{j(m)}$ no será única. Con más precisión esto significa lo siguiente. Un conjunto A se llamará conjunto de unicidad de una medida m cuando

1) existe una medida que es prolongación de la medida m y que está definida en el conjunto A;

2) para cualesquiera dos medidas de este género μ_1 y μ_2

$$\mu_1(A) = \mu_2(A).$$

Tiene lugar el teorema: *el sistema de conjuntos de unicidad de una medida m coincide con el sistema de los conjuntos medibles según Jordan respecto a la medida m, es decir, coincide con el sistema $\mathfrak{S}_{j(m)}$.*

Sin embargo, si son consideradas solamente medidas σ-aditivas y sus prolongaciones (σ-aditivas), el sistema de los conjuntos de unicidad será, en general, más amplio.

Como el caso más importante es precisamente el de las medidas σ-aditivas, tomaremos la siguiente definición.

DEFINICION 8. Un conjunto A se llama *conjunto de σ-unicidad* de una medida σ-aditiva m cuando

1) existe una prolongación σ-aditiva λ de la medida m definida en A (es decir, tal que $A \in \mathfrak{S}_\lambda$);

2) para cualesquiera dos extensiones σ-aditivas λ_1 y λ_2 de este género es válida la igualdad

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A).$$

Si A es un conjunto de σ-unicidad de una medida σ-aditiva μ, existe de acuerdo con nuestra definición, el único valor posible $\lambda(A)$ para la prolongación σ-aditiva de la medida μ definida en A.

Es fácil ver que cada conjunto A medible según Jordan es medible también según Lebesgue (¡pero no viceversa!; dése un ejemplo) y que sus medidas de Jordan y de Lebesgue coinciden. De aquí se desprende inmediatamente que la prolongación de Jordan de una medida σ-aditiva es σ-aditiva.

Cada conjunto A medible según Lebesgue es un conjunto de σ-unicidad para la medida inicial m. En efecto, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ existe para A un $B \in \mathfrak{R}$ tal que $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Cualquiera que sea la prolongación λ, definida en A, de la medida m, tenemos

$$\lambda(B) = m'(B),$$

ya que la prolongación de la medida m a $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ es única. Además,

$$\lambda(A \triangle B) \leqslant \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$$

y, consecuentemente,

$$|\lambda(A) - m'(B)| < \varepsilon.$$

Luego, para dos cualesquiera prolongaciones σ-aditivas $\lambda_1(A)$ y $\lambda_2(A)$ de la medida m, tenemos

$$|\lambda_1(A) - \lambda_2(A)| < 2\varepsilon,$$

de donde, debido a la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$,

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A).$$

Se puede probar que los conjuntos medibles según Lebesgue agotan todo el sistema de los conjuntos de σ-unicidad de la medida inicial m.

Sea m una medida σ-aditiva con campo de definición $\mathfrak{S}$ y sea $\mathfrak{M} = L(\mathfrak{S})$ el campo de definición de su prolongación de Lebesgue. Del teorema 3 de este parágrafo se desprende fácilmente que cualquiera que sea el semianillo $\mathfrak{S}_1$ tal que

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{M},$$

siempre

$$L(\mathfrak{S}_1) = L(\mathfrak{S}).$$

§ 4. FUNCIONES MEDIBLES

1°. Definición y propiedades principales de funciones medibles. Sean X e Y dos conjuntos arbitrarios en los que se han escogido dos sistemas de subconjuntos $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}'$, respectivamente. Una función abstracta $y = f(x)$ con campo de definición X y con valores en Y se llama $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$-*medible* cuando de $A \in \mathfrak{S}'$ se deduce que $f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}$.

Por ejemplo, si X e Y son la recta numérica R^1 (es decir, si se consideran funciones reales de variable real) y si $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}'$ son el sistema de todos los subconjuntos abiertos (o todos los subconjuntos cerrados) de R^1, la definición dada de función medible coincide con la de continuidad. Si tomamos para $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}'$ el sistema de todos los conjuntos borelianos, obtendremos las así llamadas funciones B-medibles (o medibles según Borel).

En lo sucesivo, el concepto de función medible nos interesará fundamentalmente desde el punto de vista de la teoría de integración. En este plano, el papel principal corresponde al concepto de μ-medibilidad de las funciones reales definidas en un conjunto X, coincidiendo $\mathfrak{S}$ con el sistema de todos los subconjuntos μ-medibles del conjunto X y $\mathfrak{S}'$ con la colección de todos los B-conjuntos de la recta. Para simplificar, aceptaremos que X es la unidad del campo de definición $\mathfrak{S}_\mu$ de la medida μ. Como toda medida σ-aditiva puede ser prolongada, de acuerdo con los resultados del § 3, a un álgebra boreliano, es natural admitir desde el principio que $\mathfrak{S}_\mu$ es una B-álgebra. Por lo tanto, para las funciones reales daremos la siguiente definición de medibilidad:

DEFINICION 1. Una función real $f(x)$ definida en un conjunto X se llama *μ-medible* cuando

$$f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu$$

cualquiera que sea el conjunto boreliano A de la recta numérica.

TEOREMA 1. *Para que una función $f(x)$ sea μ-medible es necesario y suficiente que para cualquier c real el conjunto $\{x\colon f(x) < c\}$ sea μ-medible (es decir, pertenezca a $\mathfrak{S}_\mu$).*

DEMOSTRACION. La necesidad de la condición es obvia ya que la semirrecta $(-\infty, c)$ es un conjunto boreliano. Para demostrar la suficiencia, observemos, ante todo, que la adherencia boreliana $B(\Sigma)$ del sistema Σ de todas las semirrectas $(-\infty, c)$ coincide con el sistema B^1 de todos los conjuntos borelianos de la recta numérica. Por hipótesis, $f^{-1}(\Sigma) \subset \mathfrak{S}_\mu$. Luego,

$$f^{-1}(B(\Sigma)) = B(f^{-1}(\Sigma)) \subset B(\mathfrak{S}_\mu).$$

Pero, $B(\mathfrak{S}_\mu) = \mathfrak{S}_\mu$, ya que $\mathfrak{S}_\mu$ es una B-álgebra, por hipótesis. El teorema queda demostrado.

TEOREMA 2. *El límite de una sucesión convergente para cada $x \in X$ de funciones μ-medibles es μ-medible.*

DEMOSTRACION. Sea $f_n(x) \to f(x)$; entonces,

$$\{x\colon f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \left\{x\colon f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}. \tag{1}$$

En efecto, si $f(x) < c$, existe un k tal que $f(x) < c - \frac{2}{k}$; además, para este k se puede escoger n tan grande que para $m \geqslant n$ se cumpla la desigualdad

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

y esto significará precisamente que x figura en el miembro derecho de (1).

Viceversa, si x pertenece al miembro derecho de la igualdad (1), existe un k tal que para todos los m suficientemente grandes

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k};$$

luego, $f(x) < c$, es decir, x figura en el miembro izquierdo de la igualdad (1).

Si las funciones $f_n(x)$ son medibles, los conjuntos

$$\left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

pertenecen a $\mathfrak{S}_\mu$. Como $\mathfrak{S}_\mu$ es un álgebra boreliana, los conjuntos

$$\{x : f(x) < c\}$$

pertenecen también, en virtud de (1), a $\mathfrak{S}_\mu$ y esto demuestra que $f(x)$ es medible.

TEOREMA 3. *Una función B-medible de una función μ-medible es μ-medible.*

DEMOSTRACION 2. Sea $f(x) = \varphi[\psi(x)]$, donde φ es medible según Borel y ψ es μ-medible. Si $A \subset D'$ es un conjunto μ-medible arbitrario, su imagen recíproca $A' = \varphi^{-1}(A)$ es B-medible y la imagen recíproca $A'' = \psi^{-1}(A')$ del conjunto A' es B-medible. Como $f^{-1}(A) = A''$, de aquí sigue la medibilidad de la función f.

El teorema demostrado es aplicable, en particular, al caso de funciones continuas φ (que son siempre B-medibles).

2°. Funciones simples. En vista del estudio ulterior de funciones medibles conviene representar cada una de ellas como límite de una sucesión de así llamadas funciones simples.

DEFINICION 2. Una función $f(x)$ se llama *simple* cuando es μ-medible y toma a lo sumo un número numerable de valores.

Está claro que el concepto de función simple depende de la selección de la medida μ.

La estructura de las funciones simples es caracterizada por el siguiente teorema.

TEOREMA 4. *Una función $f(x)$ que toma a lo sumo un número numerable de valores distintos*

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

es μ-medible cuando, y sólo cuando, todos los conjuntos

$$A_n = \{x : f(x) = y_n\}$$

son μ-medibles.

DEMOSTRACION. La necesidad de la condición está clara ya que cada A_n es la imagen recíproca del conjunto compuesto por un solo punto $\{y_n\}$ y cualquier conjunto compuesto de un solo punto es boreliano. La suficiencia se deduce de que la imagen recíproca $f^{-1}(B)$ de cualquier conjunto $B \subset D^1$ es, por hipótesis, la unión $\bigcup_{y_n \in B} A_n$ de una cantidad a lo sumo numerable de conjuntos medibles A_n, es decir, es medible.

El empleo ulterior de las funciones simples se basa en el siguiente teorema.

TEOREMA 5. *Para que la función $f(x)$ sea μ-medible es necesario y suficiente que pueda ser representada como límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones medibles simples.*

DEMOSTRACION. La suficiencia se desprende del teorema 2. Para demostrar la necesidad, consideremos una función medible arbitraria $f(x)$ y tomemos $f_n(x) = \frac{m}{n}$ cuando $\frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}$ (aquí m son enteros y n son enteros positivos). Está claro que $f_n(x)$ son funciones simples; para $n \to \infty$ ellas convergen uniformemente hacia $f(x)$ ya que $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$.

3°. Operaciones aritméticas con funciones medibles.

TEOREMA 6. *La suma, la diferencia y el producto de dos funciones medibles son funciones medibles. El cociente de dos funciones medibles es también medible si el denominador no se anula.*

Realicemos la demostración de este teorema en varios pasos.

a) La suma de dos funciones medibles es medible.

Sean primero $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones μ-medibles simples que toman los valores

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

y

$$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$$

respectivamente. La suma $h(x) = f(x) + g(x)$ puede tomar solamente los valores $h = f_i + g_j$, con la particularidad de que estos valores se toman en los conjuntos

$$\{x : h(x) = h\} = \bigcup_{f_i + g_j = h} (\{x : f(x) = f_i\} \cap \{x : g(x) = g_j\}). \qquad (2)$$

El número de los valores posibles h es finito o numerable y los conjuntos $\{x : h(x) = h\}$ correspondientes a estos valores son medibles, ya que el miembro derecho de la igualdad (2) es, obviamente, un conjunto medible. Luego, $h(x) = f(x) + g(x)$ es una función medible simple.

Sean ahora $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones medibles arbitrarias; consideremos las sucesiones $\{f_n(x)\}$ y $\{g_n(x)\}$ de funciones simples convergentes hacia $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente. Entonces, las funciones simples $f_n(x) + g_n(x)$ convergen uniformemente hacia la función $f(x) + g(x)$ que, en virtud del teorema 5, es medible.

b) El producto de una función μ-medible por un número constante es μ-medible. Esta afirmación es obvia.

De a) y b) resulta:

c) La diferencia de dos funciones μ-medibles es μ-medible.

d) El producto de funciones μ-medibles es μ-medible. En efecto, consideremos la identidad $fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$. La expresión del miembro derecho es una función μ-medible. Esto se desprende de a), b) y c) y de que el cuadrado de una función medible es, en virtud del teorema 3, una función medible.

e) Si $f(x)$ es medible y $f(x) \neq 0$, también $\frac{1}{f(x)}$ es medible. En efecto, tenemos

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : f(x) > \frac{1}{c}\right\} \cup \{x : f(x) < 0\}$$

para $c > 0$,

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x : 0 > f(x) > \frac{1}{c}\right\}$$

para $c < 0$ y

$$\left\{x : \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x : f(x) < c\}$$

para $c = 0$.

En el miembro derecho figura cada una de las veces un conjunto medible. De d) y e) se deduce la medibilidad del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ (con la condición de que $g(x) \neq 0$).

En resumen, hemos probado que las operaciones aritméticas con funciones medibles llevan de nuevo a funciones medibles.

4°. Equivalencia. En el estudio de funciones medibles pueden ser despreciados frecuentemente los valores de una función en un conjunto de medida nula. En este orden introduciremos la siguiente definición.

DEFINICION 3. Dos funciones f y g definidas en un mismo conjunto medible E se llaman *equivalentes* (en símbolo $f \sim g$) cuando

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Diremos que una propiedad se verifica en *casi todo* el E cuando se verifica en todos los puntos de E con la excepción de puntos que forman un conjunto de medida nula. De esta forma, se puede decir que dos funciones se llaman equivalentes cuando coinciden en casi todos los puntos.

TEOREMA 7. *Si dos funciones f y g continuas en un segmento E son equivalentes (respecto a la medida de Lebesgue), ellas coinciden.*

DEMOSTRACION. Supongamos que en un punto x_0 se tiene $f(x_0) \neq \neq g(x_0)$, es decir, $f(x_0) - g(x_0) \neq 0$. Como $f - g$ es una función continua, existirá una vecindad del punto x_0 tal que en todos sus puntos la función $f - g$ es diferente de cero. Esta vecindad tiene medida positiva; de manera que

$$\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} > 0,$$

es decir, las funciones continuas f y g no pueden ser equivalentes, si toman diferentes valores aunque sea en un punto.

Evidentemente, para funciones medibles arbitrarias (esto es, discontinuas, en general) la equivalencia de dos funciones de ninguna manera implica su coincidencia; por ejemplo, la función igual a la unidad en los puntos racionales y al cero en los puntos irracionales es equivalente a la función igual idénticamente a cero.

TEOREMA 8. *Una función $f(x)$, definida en un conjunto medible E y equivalente en este conjunto a una función medible $g(x)$, es también medible.*

En efecto, de la definición de equivalencia se desprende que los conjuntos

$$\{x : f(x) < a\} \text{ y } \{x : g(x) < a\}$$

pueden diferir uno de otro solamente en un conjunto de medida nula; por consiguiente, si es medible el segundo de ellos, es medible también el primero.

5°. Convergencia en casi todos los puntos. Puesto que en muchos casos el comportamiento de las funciones medibles en uno u otro conjunto de medida nula no tendrá importancia para nosotros, resulta natural generalizar del siguiente modo el concepto habitual de convergencia de una sucesión de funciones.

DEFINICION 4. Una sucesión de funciones $f_n(x)$ definidas en un espacio X se llama *convergente en casi todos los puntos* hacia $F(x)$ cuando

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) \tag{3}$$

para casi todo $x \in X$ (es decir, el conjunto de aquellos puntos x en los que no se verifica (3) es de medida nula).

Ejemplo. La sucesión de funciones $f_n(x) = (-x)^n$, definidas en el segmento $[0, 1]$, converge para $n \to \infty$ hacia la función $F(x) \equiv 0$ en casi todos los puntos (a saber, en todos puntos a excepción del punto $x = 1$).

El teorema 2 admite esta generalización.

TEOREMA 2'. *Si una sucesión de funciones μ-medibles $f_n(x)$ converge hacia una función $F(x)$ en casi todo el espacio X, $F(x)$ es también medible.*

DEMOSTRACION. Sea A el conjunto, donde

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x).$$

Por hipótesis, $\mu(X \setminus A) = 0$. La función $F(x)$ es medible en A y como cualquier función es medible, evidentemente, en un conjunto de medida nula, $F(x)$ es medible en $X \setminus A$; luego, es medible también en el conjunto X.

EJERCICIO. Supongamos que una sucesión de funciones medibles $f_n(x)$ converge en casi todos los puntos hacia una función límite $f(x)$. Demuéstrese que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en casi todo punto hacia $g(x)$ cuando, y sólo cuando, $g(x)$ es equivalente a $f(x)$.

6°. Teorema de Egórov. D. F. Egórov demostró en 1913 el siguiente teorema importante que establece la relación entre la convergencia en casi todos los puntos y la convergencia uniforme.

TEOREMA 9. *Supongamos que una sucesión de funciones medibles $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en casi todo el conjunto E. Entonces, para cualquier $\delta > 0$ existe un conjunto medible $E_\delta \subset E$ tal que*
1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;
2) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ uniformemente en el conjunto E_δ.

DEMOSTRACION. De acuerdo con el teorema 2′ la función $f(x)$ es medible. Pongamos

$$E_n^m = \bigcap_{i \geqslant n} \left\{x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}.$$

De esta forma, E_n^m representa, para m y n fijos, el conjunto de todos los puntos x para los cuales

$$\left| f_i(x) - f(x) < \frac{1}{m} \right|$$

cualquiera que sea $i \geqslant n$. Sea

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

Está claro, de la definición de los conjuntos E_n^m, que para un m fijo

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots \subset E_n^m \subset \ldots$$

Debido a que una medida σ-aditiva es continua, para cualquier m y cualquier $\delta > 0$ existirá un $n_0(m)$ tal que

$$\mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}$$

Tomemos

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$$

y probemos que el conjunto E_δ construido de esta forma verifica las condiciones del teorema.

Demostremos primero que la sucesión $\{f_i(x)\}$ converge uniformemente en E_δ hacia la función $f(x)$. Esto se desprende inmediatamente de que para $x \in E_\delta$ y cualquier m

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \text{ cuando } i > n_0(m).$$

Estimemos ahora la medida del conjunto $E \setminus E_\delta$. Observemos para ello que $\mu(E \setminus E^m) = 0$ cualquiera que sea m. En efecto, si $x_0 \in E \setminus E^m$, existen valores tan grandes como se quiera de i para los cuales

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geqslant \frac{1}{m},$$

es decir, la sucesión $\{f_n(x)\}$ no converge hacia $f(x)$ en el punto x_0. Como, por hipótesis, $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en casi todos los puntos, tenemos

$$\mu(E \setminus E^m) = 0.$$

De aquí se sigue que

$$\mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) = \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Luego,

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu\left(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}\right) =$$

$$= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E^m_{n_0(m)})\right) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

Hemos demostrado el teorema.

7°. Convergencia en medida.

DEFINICION 5. Se dice que una sucesión de funciones medibles $f_n(x)$ *converge en medida* hacia una función $F(x)$ cuando para cualquier $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - F(x)| \geqslant \sigma\} = 0.$$

Los teoremas 10 y 11 que siguen establecen la relación entre los conceptos de convergencia en casi todos los puntos y convergencia en medida.

TEOREMA 10. *Si una sucesión de funciones medibles $f_n(x)$ converge en casi todos los puntos hacia una función $F(x)$, converge en medida hacia la misma función límite $F(x)$.*

DEMOSTRACION. Del teorema 2' se desprende que la función límite $F(x)$ es medible. Sea A el conjunto (de medida nula) en el que $f_n(x)$ no tiende a $F(x)$. Sean, además,

$$E_k(\sigma) = \{x : |f_k(x) - F(x)| \geqslant \sigma\},$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma),$$

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

Está claro que todos estos conjuntos son medibles. Como

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots,$$

tenemos, debido a la continuidad de la medida,

$$\mu(R_n(\sigma)) \longrightarrow \mu(M) \text{ para } n \longrightarrow \infty.$$

Comprobemos ahora que

$$M \subset A. \tag{4}$$

En efecto, si $x_0 \overline{\in} A$, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = F(x_0),$$

para un $\sigma > 0$ dado existe un n, tal que

$$|f_n(x_0) - F(x_0)| < \sigma,$$

es decir, $x_0 \overline{\in} E_n(\sigma)$ y, con más razón, $x_0 \overline{\in} M$.

Pero, $\mu(A) = 0$; de manera que (4) implica $\mu(M) = 0$ y, por consiguiente,

$$\mu(R_n(\sigma)) \longrightarrow 0 \text{ para } n \longrightarrow \infty;$$

como $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$, esto demuestra el teorema.

Es fácil ver en un ejemplo que la convergencia en medida de una sucesión de funciones no implica, en general, su convergencia en casi todos los puntos. Efectivamente, definamos para cada k natural en el semisegmento $(0, 1]$ k funciones

$$f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$$

del siguiente modo

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } \dfrac{i-1}{k} < x \leqslant \dfrac{i}{k}, \\ 0 \text{ para los demás valores de } x. \end{cases}$$

Enumerando una tras otra todas estas funciones obtendremos una sucesión que, como es fácil de comprobar, converge en medida hacia cero y al mismo tiempo no converge en ningún punto (¡demuéstrese esto!).

EJERCICIO. Supongamos que una sucesión de funciones medibles $f_n(x)$ converge en medida hacia una función límite $f(x)$. Demuéstrese que la sucesión $f_n(x)$ converge en medida hacia una función $g(x)$ cuando, y sólo cuando, $g(x)$ es equivalente a $f(x)$.

Aunque el ejemplo dado demuestra que el teorema 10 no puede invertirse completamente, tiene lugar el siguiente resultado.

TEOREMA 11. *Supongamos que una sucesión de funciones medibles $f_n(x)$ converge en medida hacia $f(x)$. Entonces, de esta sucesión se puede extraer una sucesión parcial $\{f_{n_k}(x)\}$ que converge en casi todos los puntos hacia $f(x)$.*

DEMOSTRACION. Sea $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ una sucesión de números positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

y sean $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ unos números positivos tales que la serie

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots$$

converge. Construyamos una sucesión de índices

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

del modo siguiente: n_1 es número natural tal que

$$\mu\{x : |f_{n_1}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_1\} < \eta_1$$

(un número n_1 de este tipo existe obligatoriamente); n_2 es un número tal que

$$\mu\{x: |f_{n_2}(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_2\} < \eta_2.$$

En general, n_k es un número tal que

$$\mu\{x: |f_{n_k}(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k\} < \eta_k$$
$$(n_k > n_{k-1}).$$

Mostremos que la sucesión construida converge hacia $f(x)$ en casi todos los puntos. Efectivamente, sean

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x: |f_{n_k}(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k,$$

$$Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Como

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$$

tendremos, debido a la continuidad de la medida, $\mu(R_i) \longrightarrow \mu(Q)$.

Por otro lado, está claro que $\mu(R_i) < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$, de donde se desprende que $\mu(R_i) \longrightarrow 0$ para $i \longrightarrow \infty$, es decir, $\mu(Q)=0$. Resta probar que en todos los puntos del conjunto $E \setminus Q$ tiene lugar la relación

$$f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x).$$

Sea $x_0 \in E \setminus Q$. Entonces, existirá un i_0 tal que $x_0 \overline{\in} R_{i_0}$. Ello significa que para todos los $k \geqslant i_0$

$$x_0 \overline{\in} \{x: |f_{n_k}(x)-f(x)| \geqslant \varepsilon_k\},$$

es decir,

$$|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)| < \varepsilon_k.$$

Como, por hipótesis, $\varepsilon_k \longrightarrow 0$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0).$$

El teorema queda demostrado.

8°. Teorema de Luzin. *C*-propiedad. La definición de función medible, dada al principio de este parágrafo, se refiere a funciones sobre conjuntos arbitrarios y no está relacionada, en el caso general, de manera alguna con el concepto de continuidad de una función. Sin embargo, si se trata de funciones definidas en un segmento, tiene lugar el siguiente teorema importante demostrado por N. N. Luzin en 1913:

TEOREMA 12. *Para que una función $f(x)$ definida en un segmento $[a, b]$ sea medible es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista una función $\varphi(x)$ continua en $[a, b]$ tal que*

$$\mu\{x: f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon.$$

En otras palabras, una función medible se puede convertir en una continua en $[a, b]$ variando sus valores en un conjunto de medida tan pequeña como se quiera. De una función en un segmento, que mediante una «deformación pequeña» de este tipo puede ser hecha continua, se dice que verifica la C-propiedad (término de N. N. Luzin). El teorema de Luzin muestra que para funciones de argumento numérico la C-propiedad puede ser tomada como base de la propia definición de medibilidad. Es fácil obtener la demostración del teorema de Luzin valiéndose del teorema de Egórov (¡realícese esta demostración!).

§ 5. INTEGRAL DE LEBESGUE

El concepto de la integral de Riemann, conocido del curso elemental del Análisis, es aplicable sólo a aquellas funciones que o bien son continuas o bien no tienen «demasiados» puntos de discontinuidad. Para funciones medibles que pueden ser discontinuas en todo punto donde estén definidas (o incluso pueden estar definidas en un conjunto abstracto de manera que el concepto de continuidad carece de sentido para ellas), la construcción de Riemann de la integral no es válida. Al mismo tiempo, para estas funciones existe un concepto perfecto y flexible de la integral introducido por Lebesgue.

La idea principal de la integral de Lebesgue consiste en que, a diferencia de la integral de Riemann, los puntos x se agrupan no de acuerdo a su proximidad en el eje x sino de acuerdo a la proximidad de los valores de la función en estos puntos. Esto ofrece inmediatamente la posibilidad de extender el concepto de integral a una clase muy amplia de funciones.

Además, la integral de Lebesgue se define de un mismo modo para funciones determinadas en cualesquiera espacios provistos de medida, mientras que la integral de Riemann se introduce primero para funciones de una variable y solamente después se extiende, con las modificaciones correspondientes, al caso de varias variables. Para funciones en espacios abstractos provistos de medida la integral de Riemann simplemente no tiene sentido.

En lo que sigue se considerará, siempre que no se diga lo contrario, una medida σ-aditiva $\mu(A)$ definida en un álgebra boreliana de conjuntos con unidad X. Todos los conjuntos considerados $A \subset X$ se supondrán μ-medibles y las funciones $f(x)$ estarán definidas para $x \in X$ y serán μ-medibles.

1°. Integral de Lebesgue para funciones simples. Introduciremos primero el concepto de la integral de Lebesgue para las funciones que hemos llamado con anterioridad simples, es decir, para funciones medibles con un número finito o numerable de valores.

Sea f una función simple que toma los valores

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots; \; y_i \neq y_j \text{ para } i \neq j.$$

Es natural definir la integral de la función f en el conjunto A mediante la igualdad

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \text{ donde } A_n = \{x : x \in A,\ f(x) = y_n\}, \quad (1)$$

si la serie que figura en el miembro derecho converge. De esta forma llegamos a la siguiente definición (en la que, por razones obvias, se postula de antemano la convergencia *absoluta* de esta serie).

DEFINICION 1. Una función simple f se llama *integrable* o *sumable* (respecto a la medida μ) en un conjunto A cuando la serie (1) converge absolutamente. Si f es integrable, la suma de la serie (1) se llama integral de f en el conjunto A.

En esta definición se supone que todos los y_n son diferentes. Sin embargo, el valor de la integral de una función simple se puede representar como la suma de productos de tipo $c_k\mu(B_k)$ sin suponer que todos los c_k son distintos. Esto es posible hacerlo gracias al siguiente lema.

LEMA. *Supongamos que* $A = \bigcup_k B_k$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ *para* $i = j$, *y que la función* f *toma en cada conjunto* B_k *un valor único* c_k; *entonces,*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_k c_k\mu(B_k) \quad (2)$$

y la función f *es integrable en* A *cuando, y sólo cuando, la serie* (2) *converge absolutamente.*

DEMOSTRACION. Es fácil ver que cada conjunto

$$A_n = \{x : x \in A,\ f(x) = y_n\}$$

es la unión de aquellos B_k para los cuales $c_k = y_n$. Luego,

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k\mu(B_k).$$

Como la medida es no negativa, tenemos

$$\sum_n |y_n|\,\mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k|\,\mu(B_k),$$

es decir, las series $\sum_n y_n\mu(A_n)$ y $\sum_k c_k\mu(B_k)$ son ambas absolutamente convergentes o ambas divergentes. El lema queda demostrado.

Indiquemos algunas propiedades de la integral de Lebesgue de funciones simples:

A) $\int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\,d\mu = \int_A [f(x)+g(x)]\,d\mu,$

con la particularidad de que la existencia de las integrales del miembro izquierdo implica la existencia de la integral del miembro derecho.

Supongamos, para demostrar esta propiedad, que f toma los valores f_i en los conjuntos $F_i \subset A$ y g toma los valores g_j en los conjuntos $G_j \subset A$, de manera que

$$J_1 = \int_A f(x)\,d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i), \tag{3}$$

$$J_2 = \int_A g(x)\,d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j). \tag{4}$$

Entonces, de acuerdo con el lema,

$$J = \int_A [f(x)+g(x)]\,d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j)\,\mu(F_i \cap G_j), \tag{5}$$

pero,

$$\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i \cap G_j), \quad \mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i \cap G_j),$$

de manera que la convergencia absoluta de las series (3) y (4) implica la convergencia absoluta de la serie (5); además,

$$J = J_1 + J_2.$$

B) Para cualquier constante k

$$k \int_A f(x)\,d\mu = \int_A \{kf(x)\}\,d\mu,$$

donde la existencia de la integral de miembro izquierdo implica la existencia de la integral del miembro derecho. (La comprobación es inmediata).

C) Una función simple f acotada en un conjunto A es integrable en A y, además, si $|f(x)| \leqslant M$ en A, se tiene

$$\left| \int_A f(x)\,d\mu \right| \leqslant M\mu(A).$$

(La comprobación es inmediata).

2°. Integral de Lebesgue en conjuntos de medida finita.

DEFINICION 2. Una función $f(x)$ se llamará *integrable (sumable) en un conjunto A* cuando exista una sucesión de funciones simples f_n integrables en A convergente uniformemente hacia f.

El límite

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x)\, d\mu \tag{6}$$

será denotado mediante

$$\int_A f(x)\, d\mu$$

y llamado *integral* de la función f *en el conjunto* A.

Esta definición es correcta si se verifican las siguientes condiciones:

1. El límite (6) existe cualquiera que sea la sucesión uniformemente convergente de funciones simples integrables en A.

2. Este límite no depende, para una función fijada f, de la selección de la sucesión $\{f_n\}$.

3. Para las funciones simples las definiciones de la integrabilidad y de la integral coinciden con las dadas en el punto 1.

Todas estas condiciones quedan, realmente, satisfechas.

Para demostrar la primera, basta observar que, debido a las propiedades A), B) y C) de la integral de funciones simples,

$$\left| \int_A f_n(x)\, d\mu - \int_A f_m(x)\, d\mu \right| \leqslant \mu(A) \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)|. \tag{7}$$

Para demostrar la segunda condición es preciso considerar dos sucesiones $\{f_n\}$ y $\{f_n^*\}$ convergentes hacia f. Si el límite (6) tomara valores distintos para cada una de estas dos sucesiones, no existiría el límite (6) para la sucesión obtenida como unión de estas dos, lo que estaría en contradicción con la primera condición. Finalmente, para probar la validez de la tercera condición es suficiente considerar la sucesión $f_n = f$.

Establezcamos las propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue. Una consecuencia directa de la definición es que

I. $$\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A). \tag{8}$$

II. Para cualquier constante k

$$\int_A \{kf(x)\}\, d\mu = k \int_A f(x)\, d\mu, \tag{9}$$

donde la existencia de la integral del miembro izquierdo implica la existencia de la integral del miembro derecho.

Esta propiedad se deduce, mediante el paso al límite, de la propiedad B) para las integrales de funciones simples.

III. $$\int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\,d\mu = \int_A \{f(x)+g(x)\}\,d\mu, \qquad (10)$$

donde la existencia de las integrales del miembro izquierdo implica la existencia de la integral del miembro derecho.

La demostración se obtiene, mediante el paso al límite, de la propiedad A) de la integral para funciones simples.

IV. Una función f acotada en un conjunto A es integrable en A.

La demostración se obtiene, mediante el paso al límite, de la propiedad B) de la integral de funciones simples.

V. Si $f(x) \geqslant 0$, se tiene

$$\int_A f(x)\,d\mu \geqslant 0 \qquad (11)$$

(suponiendo que la integral existe).

Para las funciones simples esta propiedad se deduce directamente de la definición y en el caso general la demostración se basa en la posibilidad de aproximar una función no negativa mediante funciones simples no negativas.

De la última propiedad se desprende inmediatamente que para $f(x) \geqslant g(x)$ se tiene

$$\int_A f(x)\,d\mu \geqslant \int_A g(x)\,d\mu, \qquad (12)$$

de manera que siendo $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todos (o casi todos) los $x \in A$, tendremos

$$m\mu(A) \leqslant \int_A f(x)\,d\mu \leqslant M\mu(A). \qquad (13)$$

VI. Si $\mu(A)=0$, se tiene $\int_A f(x)\,d\mu = 0$.

Esta afirmación se deduce directamente de la definición de la integral de Lebesgue.

VII. Si una función φ es integrable en A y $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ en casi todo el A, entonces f es integrable en A.

En efecto, si f y φ son funciones simples, omitiendo del conjunto A un conjunto de medida nula, podemos representar el conjunto A' que queda como la unión de una cantidad finita o numerable de conjuntos, en cada uno de los cuales f y φ son constantes

$$f(x)=a_n, \quad \varphi(x)=b_n \text{ y, además, } |a_n| \leqslant b_n.$$

De la integrabilidad de φ se desprende que

$$\sum_n |a_n| \mu(A_n) \leqslant \sum_n b_n \mu(A_n) = \int_{A'} \varphi(x)\, d\mu = \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

De manera que f es también integrable y

$$\left|\int_A f(x)\, d\mu\right| = \left|\int_{A'} f(x)\, d\mu\right| = \left|\sum_n a_n \mu(A_n)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_n |a_n| \mu(A_n) = \int_{A'} |f(x)|\, d\mu \leqslant \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

En el caso general esta afirmación se demuestra pasando al límite.

VIII. Las integrales

$$I_1 = \int_A f(x)\, d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)|\, d\mu \tag{14}$$

o bien existen ambas o bien ambas no existen.

En efecto, la existencia de la integral I_2 implica la existencia de la integral I_1.

Lo recíproco se desprende, en el caso de una función simple, de la definición de la integral y en el caso general se demuestra mediante el paso al límite y valiéndose de la desigualdad

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|.$$

3°. σ-aditividad y continuidad absoluta de la integral de Lebesgue. En el punto anterior hemos enunciado las propiedades de la integral de Lebesgue en un conjunto fijado. Ahora estableceremos algunas propiedades de la integral de Lebesgue considerando la expresión

$$F(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

como función de conjunto, definida en la clase de conjuntos medibles. Probemos, ante todo, la propiedad siguiente.

TEOREMA 1. Si $A = \bigcup_n A_n$; $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$, *entonces,*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum \int_{A_n} f(x)\, d\mu, \tag{15}$$

donde la existencia de la integral del miembro izquierdo implica la existencia de las integrales y la convergencia absoluta de la serie del miembro derecho.

DEMOSTRACION. Probemos primero la afirmación del teorema para el caso de una función simple f que toma los valores

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

Sean

$$B_k = \{x : x \in A, \quad f(x) = y_k\},$$
$$B_{nk} = \{x : x \in A_n, \quad f(x) = y_k\}.$$

Entonces,

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{nk}) =$$
$$= \sum_n \sum_k y_k \mu(B_{nk}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu. \quad (16)$$

Como la serie $\sum y_k \mu(B_k)$ converge absolutamente, suponiendo que f es integrable en A, y como las medidas de todos los conjuntos son no negativas, también convergen absolutamente todas las demás series de la cadena de igualdades (16).

En el caso de una función f arbitraria, se desprende, de su integrabilidad en A, que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función simple g integrable en A que verifica la condición

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon. \quad (17)$$

Para g tenemos

$$\int_A g(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} g(x)\, d\mu, \quad (18)$$

donde g es integrable en cada conjunto A_n y la serie (18) converge absolutamente. De este último hecho y de la estimación (17) se desprende que f es también integrable en cada A_n y que

$$\sum_n \left| \int_{A_n} f(x)\, d\mu - \int_{A_n} g(x)\, d\mu \right| \leqslant \sum_n \varepsilon \mu(A_n) = \varepsilon \mu(A),$$
$$\left| \int_A f(x)\, d\mu - \int_A g(x)\, d\mu \right| \leqslant \varepsilon \mu(A),$$

esto y (18) demuestra la convergencia absoluta de la serie $\sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu$ y lleva a la estimación

$$\left| \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu - \int_A f(x)\, d\mu \right| \leqslant 2\varepsilon \mu(A).$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos

$$\sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu.$$

COROLARIO. *Si f es integrable en A, f es integrable también en cualquier conjunto medible $A' \subset A$.*

Hemos demostrado que la integrabilidad en un conjunto A de una funcion $f(x)$ implica, en el caso en que $A = \bigcup A_n$ y $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, que $f(x)$ sea integrable en cada A_n y que la integral en A sea igual a la suma de las integrales en los conjuntos A_n.

Esta afirmación puede ser invertida en el sentido siguiente.

TEOREMA 2. *Si $A = \bigcup\limits_n A_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ y la serie*

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu \tag{19}$$

converge, la función f es integrable en A y

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu.$$

Lo nuevo aquí, en comparación con el teorema anterior, es la afirmación de que la convergencia de la serie (19) implica la integrabilidad de f en A.

Realicemos la demostración primero para el caso de una función simple f que toma los valores f_i en los conjuntos B_i. Tomando

$$A_{ni} = A_n \cap B_i,$$

tenemos

$$\int_{A_n} |f(x)|\, d\mu = \sum_i |f_i|\, \mu(A_{ni}).$$

La convergencia de la serie (19) implica la convergencia de las series

$$\sum_n \sum_i |f_i|\, \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i|\, \mu(B_i \cap A).$$

La convergencia de la última serie significa la existencia de la integral

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_i f_i \mu(B_i \cap A).$$

En el caso general, aproximaremos la función f mediante una función simple $\bar{f}$ de manera que

$$|f(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Entonces,

$$\int_{A_n} |\bar{f}(x)|\, d\mu \leqslant \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu + \varepsilon\mu(A_n)$$

y como la serie

$$\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$$

converge, la convergencia de la serie (19) implica la convergencia de la serie

$$\sum_n \int_{A_n} |\tilde{f}(x)| \, d\mu,$$

es decir, implica, de acuerdo con lo demostrado, la integrabilidad en A de la función simple $\tilde{f}$. Pero, entonces, la función inicial f será también integrable en A, debido a (20). El teorema queda demostrado.

Desigualdad de Chébishev. *Si* $\varphi(x) \geqslant 0$ *en* A, *entonces*

$$\mu\{x : x \in A, \ \varphi(x) \geqslant c\} \geqslant \frac{1}{c} \int_A \varphi(x) \, d\mu. \tag{21}$$

En efecto, sea

$$A' = \{x : x \in A, \ \varphi(x) \geqslant c\}.$$

Entonces,

$$\int_A \varphi(x) \, d\mu = \int_{A'} \varphi(x) \, d\mu + \int_{A \setminus A'} \varphi(x) \, d\mu \geqslant \int_{A'} \varphi(x) d\mu \geqslant c\mu(A').$$

COROLARIO. *Si*

$$\int_A |f(x)| \, d\mu = 0,$$

es $f(x) = 0$ *en casi todos los puntos.*

Efectivamente, tenemos, en virtud de la desigualdad de Chébishev,

$$\mu\left\{x : x \in A, \ |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \leqslant n \int_A |f(x)| \, d\mu = 0$$

para todos los n. Por la tanto,

$$\mu\{x : x \in A, \ f(x) \neq 0\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{x : x \in A, \ |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} = 0.$$

En el punto anterior hemos indicado que la integral de Lebesgue en un conjunto de medida nula es igual a cero cualquiera que sea la función f.

Esta afirmación puede ser considerada como el caso límite del siguiente teorema importante.

TEOREMA 3 (continuidad absoluta de la integral de Lebesgue). *Si $f(x)$ es una función sumable en un conjunto A, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\left| \int_e f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon$$

para cualquier conjunto medible $e \subset A$ tal que $\mu(e) < \delta$.

DEMOSTRACION. Observemos, ante todo, que nuestra afirmación es evidente cuando f es acotada. Sea ahora f una función arbitraria sumable en A. Tomemos

$$A_n = \{x : x \in A,\ n \leqslant |f(x)| \leqslant n+1\}$$

y

$$B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n,\ C_N = A \setminus B_N.$$

Entonces, en virtud del teorema 1,

$$\int_A |f(x)|\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A |f(x)|\, d\mu.$$

Escojamos N de manera que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |f(x)|\, d\mu = \int_{C_N} |f(x)|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

y sea

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}.$$

Si ahora $\mu(e) < \delta$, tendremos

$$\left| \int_e f(x)\, d\mu \right| \leqslant \int_e |f(x)|\, d\mu = \int_{e \cap B_N} |f(x)|\, d\mu + \int_{e \cap C_N} |f(x)|\, d\mu.$$

La primera de las integrales del miembro derecho no pasa de $\frac{\varepsilon}{2}$ (propiedad V), mientras que la segunda no es mayor que la integral referida a todo el conjunto C_N, es decir, tampoco pasa de $\frac{\varepsilon}{2}$; luego, tenemos

$$\int_e |f(x)|\, d\mu < \varepsilon.$$

Las propiedades establecidas de la integral como función de conjunto llevan al resultado siguiente. Sea f una función no negativa, sumable en un espacio X respecto a una medida μ. Entonces, la función

$$F(A)=\int_A f(x)\,d\mu$$

está definida para todos los conjuntos medibles $A\subset X$ y es no negativa y σ-aditiva, es decir, satisface la condición: si $A=\bigcup_n A_n$ y $A_i\cap A_j=\varnothing$, se tiene $F(A)=\sum_n F(A_n)$. En otras palabras la integral de una función no negativa posee, considerándola como función de conjunto, todas las propiedades de una medida σ-aditiva. Esta medida está definida en la misma σ-álgebra en la que está definida la medida inicial μ y, además, está relacionada con μ mediante la condición: si $\mu(A)=0$, también $F(A)=0$.

4°. Paso al límite bajo el signo de la integral de Lebesgue. La cuestión sobre el paso al límite bajo el signo de la integral o, que es lo mismo, sobre la posibilidad de integrar término por término una serie convergente, surge con frecuencia en diferentes problemas.

En el Análisis clásico se demuestra que una condición suficiente para poder realizar este paso al límite es la convergencia uniforme de la sucesión (serie) correspondiente.

Demostraremos ahora ciertos teoremas acerca del paso al límite bajo el signo de la integral de Lebesgue que constituyen unas generalizaciones de largo alcance de los teoremas correspondientes del Análisis clásico.

TEOREMA 4 (Lebesgue). *Si una sucesión $\{f_n\}$ converge en A hacia f y para todo n*

$$|f_n(x)|\leqslant\varphi(x),$$

donde φ es integrable en A, la función límite f es también integrable en A y

$$\int_A f_n(x)\,d\mu\to\int_A f(x)\,d\mu.$$

DEMOSTRACION. Se desprende fácilmente de las condiciones del teorema que $|f(x)|\leqslant\varphi(x)$. Por eso, como hemos señalado en el punto anterior (propiedad VII), $f(x)$ es integrable. Sean

$$A_k=\{x:k-1\leqslant\varphi(x)\leqslant k\};\quad B_m=\bigcup_{k\geqslant m}A_k=\{x:\varphi(x)\geqslant m\}.$$

Por el teorema 1

$$\int_A \varphi(x)\,d\mu = \sum_k \int_{A_k} \varphi(x)\,d\mu \tag{22}$$

y la serie (22) converge absolutamente. Además,

$$\int_{B_m} \varphi(x)\,d\mu = \sum_{k \geqslant m} \int_{A_k} \varphi(x)\,d\mu.$$

De la convergencia de la serie (22) se desprende la existencia de un m tal que

$$\int_{B_m} \varphi(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{5}.$$

En $A \setminus B_m$ se cumple la desigualdad $\varphi(x) < m$. En virtud del teorema de Egórov, se puede representar $A \setminus B_m$ en la forma $A \setminus B_m = C \cup D$, donde $\mu(D) < \frac{\varepsilon}{5m}$ y en el conjunto C la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f.

Escojamos N de manera que para $n > N$ se tenga

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{5\mu(C)}$$

en el conjunto C. Entonces,

$$\int_A (f_n(x) - f(x))\,d\mu = \int_{B_m} f_n(x)\,d\mu - \int_{B_m} f(x)\,d\mu + \\ + \int_D f_n(x)\,d\mu - \int_D f(x)\,d\mu + \int_C [f_n(x) - f(x)]\,d\mu.$$

De aquí

$$\int_A |f_n(x) - f(x)|\,d\mu < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

COROLARIO. *Si* $|f_n(x)| \leqslant M = \text{const}$ y $f_n \to f$, *tenemos*

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu.$$

Observación. Como quiera que los valores que asume una función en un conjunto de medida 0 no influyen en el valor de la integral, bastaría suponer en el teorema 4 que $\{f_n\}$ converge hacia f en casi todos los puntos y que las desigualdades $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ se cumplen también en casi todos los puntos.

TEOREMA 5 (Beppo Levi). *Supongamos que*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots$$

en un conjunto A, en el que las funciones f_n son integrables, y que sus integrales son acotadas en su conjunto

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Entonces, existe en casi todo el A el límite (finito)

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \tag{23}$$

la función f es integrable en A y

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \longrightarrow \int_A f(x)\, d\mu.$$

Además, en el conjunto, en el que no existe el límite (23), la función f puede estar definida arbitrariamente, tomándose, por ejemplo, $f(x) = 0$ en este conjunto.

DEMOSTRACION. Vamos a suponer que $f_1(x) \geqslant 0$, ya que el caso general se reduce a éste pasando a las funciones

$$\overline{f}_n = f_n - f_1.$$

Consideremos el conjunto

$$\Omega = \{x : x \in A,\ f_n(x) \longrightarrow \infty\}.$$

Es fácil ver que $\Omega = \bigcap\limits_r \bigcup\limits_n \Omega_n^{(r)}$, donde

$$\Omega_n^{(r)} = \{x : x \in A,\ f_n(x) > r\}.$$

En virtud de la desigualdad de Chébishev (21),

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leqslant \frac{K}{r}.$$

Como $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \ldots$, tenemos $\mu\left(\bigcup\limits_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant K/r$, y como para cualquier r

$$\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)},$$

encontramos de aquí que $\mu(\Omega) \leqslant K/r$. Por ser r arbitrario,

$$\mu(\Omega) = 0.$$

Con esto queda demostrado que la sucesión monótona $\{f_n(x)\}$ tiene en casi todo el A un límite finito $f(x)$.

Sea ahora $\varphi(x)=r$ para aquellos x en los cuales

$$r-1 \leqslant f(x) < r, \ r=1,\ 2,\ \ldots$$

Si demostramos la integrabilidad de $\varphi(x)$ en A, la afirmación de nuestro teorema se desprenderá inmediatamente del teorema 4.

Denotemos por A_r el conjunto de aquellos puntos $x \in A$ para los cuales $\varphi(x)=r$ y pongamos

$$B_s=\bigcup_{r=1}^{s} A_r.$$

Como las funciones f_n y f son acotadas en B_s y siempre $\varphi(x) \leqslant f(x)+1$, tenemos

$$\int_{B_s} \varphi(x)\,d\mu \leqslant \int_{B_s} f(x)\,d\mu+\mu(A)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x)\,d\mu+\mu(A) \leqslant K+\mu(A).$$

Pero,

$$\int_{B_s} \varphi(x)\,d\mu=\sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r).$$

La acotación de estas sumas implica la convergencia de la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r)=\int_A \varphi(x)\,d\mu.$$

Luego, hemos demostrado que φ es integrable en A.

COROLARIO. *Si* $\psi_n(x) \geqslant 0$ *y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\,d\mu < \infty,$$

entonces, la serie $\sum \psi_n(x)$ *converge en casi todo el* A *y*

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\right) d\mu=\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\,d\mu.$$

TEOREMA 6. (Fatou). *Si una sucesión* $\{f_n\}$ *de funciones medibles no negativas converge en casi todo el* A *hacia* f *y*

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \leqslant K,$$

f *es integrable en* A *y*

$$\int_A f(x)\,d\mu \leqslant K.$$

DEMOSTRACION. Tomemos

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x);$$

φ_n es medible, ya que

$$\{x : \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x : f_k(x) < c\}.$$

Además, como $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$, φ_n son medibles y

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K;$$

finalmente,

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

en casi todos los puntos. Por lo tanto, aplicando a $\{\varphi_n\}$ el teorema anterior, obtenemos el resultado necesario.

5°. Integral de Lebesgue en un conjunto de medida infinita. Al hablar de la integral y de sus propiedades, hemos aceptado hasta este momento que se consideran funciones definidas en uno u otro conjunto medible de medida finita. Sin embargo, tropezamos frecuentemente con funciones definidas en un conjunto de medida infinita, por ejemplo, con funciones definidas en la recta con su medida lebesguiana. Por esto es importante extender el concepto de la integral también a este caso. Nos limitaremos al caso prácticamente más esencial en el que el conjunto X puede ser representado como la unión de una cantidad a lo sumo numerable de conjuntos de medida finita [1]:

$$X = \bigcup_n X_n, \quad \mu(X_n) < \infty. \tag{24}$$

Llamaremos sucesión *exhaustiva* a toda sucesión $\{X_n\}$ de subconjuntos medibles del conjunto X que verifica la condición (24). Introduzcamos la definición siguiente.

[1] Si un espacio X, en el que está definida una medida μ, puede ser representado como la unión de una cantidad numerable de conjuntos de medida finita, la medida en X se llama σ-finita. Como ejemplos de medidas σ-finitas pueden servir las medidas de Lebesgue en la recta, el plano y el espacio n-dimensional. Medidas que no son σ-finitas se pueden obtener, por ejemplo, asignando a cada punto de la recta el peso 1 y llamando medibles a todos los subconjuntos finitos de la recta (que constituyen un anillo).

DEFINICION 3. Una función medible f, definida en un conjunto X de medida σ-finita X_μ, se llama sumable en X cuando es sumable en cada subconjunto medible $A\subset X$ de medida finita y cuando para cada sucesión exhaustiva $\{X_n\}$ de conjuntos medibles existe el límite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X_n} f(x)\,d\mu(x). \tag{25}$$

Este límite se llama integral de f en el conjunto X y se denota con

$$\int_X f(x)\,d\mu(x).$$

Está claro que el límite (25) no depende de la selección de la sucesión exhaustiva $\{X_n\}$, ya que, de lo contrario, uniendo dos sucesiones exhaustivas podríamos construir una sucesión exhaustiva para la cual el límite (25) no existiría. Está claro también que si la función f se anula fuera de un conjunto de medida finita, la definición de la integral que acabamos de enunciar coincide con la que ha sido dada en el punto 2.

Observación. La definición de la integral de una función simple, dada en el punto 1, puede ser conservada textualmente también en el caso de medida infinita. Está claro que para que una función simple sea sumable es necesario entonces que asuma cada valor diferente del cero solamente en un conjunto de medida finita. La definición de integrabilidad, dada en el punto 2, está relacionada estrechamente con la suposición de que la medida del conjunto X sea finita. En efecto, si $\mu(X)=\infty$, la convergencia uniforme de una sucesión de funciones simples sumables $\{\varphi_n\}$ no implica, en el caso general, la convergencia de la sucesión de sus integrales (¡dése un ejemplo!).

Los resultados expuestos en los puntos 2 y 3 para el caso de medida finita subsisten, en lo fundamental, para las integrales en conjuntos de medida infinita.

La diferencia substancial consiste en que, en el caso de $\mu(X)=\infty$, una función medible acotada en X no es necesariamente sumable. En particular, si $\mu(X)=\infty$, ninguna constante diferente del cero es integrable en X.

El lector comprobará fácilmente que los teoremas de Lebesgue, de Beppo Levi y de Fatou subsisten en el caso de medida σ-finita.

6°. Comparación de la integral de Lebesgue con la integral de Riemann. Veamos la relación que existe entre la integral de Lebesque y la integral de Riemann, limitándonos al caso más sencillo de la medida lineal de Lebesgue en la recta.

TEOREMA 7. *Si existe la integral de Riemann*

$$I=(R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

f es integrable en $[a, b]$ *según Lebesgue y*

$$\int_{[a,\,b]} f(x)\,d\mu=I.$$

DEMOSTRACION. Consideremos la partición del segmento $[a, b]$ en 2^n intervalos mediante los puntos

$$x_k=a+\frac{k}{2^n}(b-a)$$

y consideremos las sumas de Darboux correspondientes a esta partición

$$\Omega_n=\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk},$$

$$\omega_n=\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},$$

donde M_{nk} es la cota superior de f en el segmento

$$x_{k-1}\leqslant r\leqslant x_k,$$

y m_{nk} la cota inferior de f en el mismo segmento. Por definición de la integral de Riemann,

$$I=\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\lim_{n\to\infty}\omega_n.$$

Tomemos

$$\bar{f}_n(x)=M_{nk} \text{ para } x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,$$
$$\underline{f}_n(x)=m_{nk} \text{ para } x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k.$$

En el punto $x=b$ las funciones $\bar{f}_n$ y $\underline{f}_n$ pueden ser definidas arbitrariamente. Es fácil probar que

$$\int_{[a,\,b]} \bar{f}_n(x)\,d\mu=\Omega_n,$$

$$\int_{[a,\,b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu=\omega_n.$$

Como la sucesión $\{\bar{f}_n\}$ es no creciente y la sucesión $\{\underline{f}_n\}$ no decreciente, tenemos en casi todos los puntos

$$\bar{f}_n(x) \longrightarrow \bar{f}(x) \geqslant f(x), \quad \underline{f}_n(x) \longrightarrow \underline{f}(x) \leqslant f(x).$$

En virtud del teorema 7,

$$\int_{[a,\, b]} \bar{f}(x)\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \Omega_n = I = \lim_{n \to \infty} \omega_n = \int_{[a,\, b]} \underline{f}(x)\, d\mu.$$

De manera que

$$\int_{[a,\, b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)|\, d\mu = \int_{[a,\, b]} \{\bar{f}(x) - \underline{f}(x)\}\, d\mu = 0$$

y, por consiguiente, en casi todos los puntos

$$\bar{f}(x) - \underline{f}(x) = 0,$$

es decir,

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$$

y

$$\int_{[a,\, b]} f(x)\, d\mu = I.$$

El teorema queda demostrado.

Es fácil señalar ejemplos de funciones acotadas integrables según Lebesgue, pero no integrables según Riemann (por ejemplo, la función de Dirichlet, mencionada anteriormente, que es igual a 1 para los x racionales y al 0 para los x irracionales).

Las funciones no acotadas no son integrables según Riemann, pero muchas de ellas son integrables según Lebesgue. En particular, cualquier función $f(x) \geqslant 0$ para la cual la integral de Riemann

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

existe para cada $\varepsilon > 0$ y tiene un límite finito I para $\varepsilon \to 0$, es integrable en $[a, b]$ según Lebesgue y

$$\int_{[a,\, b]} f(x)\, d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx.$$

Señalemos que las integrables impropias

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx,$$

en el caso en que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|\, dx = \infty,$$

no existen en el sentido lebesguiano ya que, de acuerdo a la propiedad VIII del punto 2, la sumabilidad de la función $f(x)$ implica que la función $|f(x)|$ sea también sumable. Por ejemplo, la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx$$

existe como integral impropia de Riemann (convencionalmente convergente), pero no existe como integral de Lebesgue.

Si una función se considera en toda la recta (o en una semirrecta), su integral de Riemann puede existir solamente en el sentido impropio. Si esta integral converge absolutamente, también existirá en este caso la correspondiente integral de Lebesgue teniendo el mismo valor. En cambio, si esta integral converge convencionalmente, la función no será integrable en el sentido de Lebesgue. Por ejemplo, la función

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

no es integrable según Lebesgue en toda la recta ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx = \infty.$$

Sin embargo, como se sabe, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

existe y es igual a π.

§ 6. PRODUCTOS DIRECTOS DE SISTEMAS DE CONJUNTOS Y DE MEDIDAS. TEOREMA DE FUBINI

En el Análisis desempeñan un papel importante los teoremas sobre la reducción de una integral doble (o, en general, múltiple) a la integral reiterada. El resultado fundamental de la teoría de las integrales múltiples de Lebesgue es el teorema de Fubini que demostraremos al final de este parágrafo. Previamente expondremos algunos conceptos y resultados auxiliares que tienen, además, interés por sí mismos.

1°. Productos de sistemas de conjuntos. Un conjunto Z de pares ordenados (x, y), donde $x \in X$ e $y \in Y$, se llama *producto directo* de los conjuntos X e Y y se denota con $Z = X \times Y$. Del mismo modo, el conjunto Z de sucesiones finitas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_k \in X_k$, se llama producto directo de los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y se denota con

$$Z = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \overline{\times}\, X_k.$$

En particular, cuando

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X,$$

el conjunto Z es la n-ésima potencia del conjunto X:

$$Z = X^n.$$

Por ejemplo, el espacio de coordenadas n-dimensional R^n es la n-ésima potencia de la recta numérica R^1. El cubo unidad I^n, esto es, el conjunto de elementos de R^n con coordenadas que verifican las desigualdades

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

constituye la n-ésima potencia del segmento unidad $I^1 = [0, 1]$.

Si $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ son sistemas de subconjuntos de los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, entonces,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n$$

representa el sistema de subconjuntos del conjunto $X = \overline{\times}\, X_k$ que se pueden escribir en la forma

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

donde $A_k \in \mathfrak{S}_k$.

Si $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \ldots = \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}$, es $\mathfrak{R}$ la n-ésima potencia de $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^n.$$

Por ejemplo, el sistema de paralelepípedos de R^n es la n-ésima potencia del sistema de segmentos de R^1.

TEOREMA 1. *Si $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ son semianillos, también $\mathfrak{R} = \overline{\times}\, \mathfrak{S}_k$ es un semianillo.*

DEMOSTRACION. De acuerdo con la definición de semianillo debemos probar que si $A, B \in \mathfrak{R}$, entonces $A \cap B \in \mathfrak{R}$ y que, además, para $B \subset A$

se tiene $A=\bigcup_{i=1}^{m} C_i$, donde $C_1=B$, $C_i \cap C_j=\varnothing$ para $i \neq j$ y $C_i \in \mathfrak{R}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Realicemos la demostración para el caso en que $n=2$.

I. Sea $A \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, $B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$; esto significa que

$$A=A_1 \times A_2, \quad A_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad A_2 \in \mathfrak{S}_2,$$
$$B=B_1 \times B_2, \quad B_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad B_2 \in \mathfrak{S}_2.$$

Entonces,

$$A \cap B=(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$$

y como

$$A_1 \cap B_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad A_2 \cap B_2 \in \mathfrak{S}_2,$$

tenemos

$$A \cap B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2.$$

II. Supongamos ahora adicionalmente que $B \subset A$. Entonces,

$$B_1 \subset A_1, \quad B_2 \subset A_2$$

y, como $\mathfrak{S}_1$ y $\mathfrak{S}_2$ son semianillos, tienen lugar las descomposiciones

$$A_1=B_1 \cup B_1^{(1)} \cup \ldots \cup B_1^{(k)},$$
$$A_2=B_2 \cup B_2^{(1)} \cup \ldots \cup B_2^{(l)},$$
$$A=A_1 \times A_2=(B_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1 \times B_2^{(l)}) \cup$$
$$\cup (B_1^{(1)} \times B_2) \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1^{(1)} \times B_1^{(l)}) \cup$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cup (B_1^{(k)} \times B_2) \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(l)}).$$

En la última descomposición el primer término es $B_1 \times B_2=B$ y todos los términos pertenecen al sistema $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$. Esto demuestra el teorema.

Sin embargo, si los sistemas $\mathfrak{S}_k$ son anillos o anillos borelianos, ello no implica aún, en el caso general, que el producto $\underset{k}{|\times|}\, \mathfrak{S}_k$ sea un anillo o, respectivamente, un anillo boreliano.

2°. **Productos de medidas.** Supongamos que en los semianillos $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ se han definido las medidas

$$\mu_1(A_1),\ \mu_2(A_2),\ \ldots,\ \mu_n(A_n) \quad A_k \in \mathfrak{S}_k.$$

Definamos en

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n$$

la medida

$$\mu=\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$$

de la siguiente forma: si

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

entonces,

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2)\ \ldots\ \mu_n(A_n).$$

Es preciso demostrar que $\mu(A)$ es una medida, esto es, que $\mu(A)$ es aditiva. Haremos esto para el caso en que $n=2$. Supongamos que se tiene la descomposición

$$A = A_1 \times A_2 = \bigcup_k B^{(k)}, \quad B^{(i)} \cap B^{(j)} = \varnothing \text{ para } i \neq j,$$

$$B^{(k)} = B_1^{(k)} \times B_2^{(k)}.$$

En el capítulo I (lema 2 del § 5) ha sido demostrada la existencia de descomposiciones

$$A_1 = \bigcup_m C_1^{(m)}, \quad A_2 = \bigcup_n C_2^{(n)}$$

tales que los conjuntos $B_1^{(k)}$ son uniones de ciertos $C_1^{(m)}$ y los conjuntos $B_2^{(k)}$ son uniones de determinados $C_2^{(n)}$. Es obvio que

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) = \sum_n \sum_m \mu_1(C_1^{(m)})\,\mu_2(C_2^{(n)}), \tag{1}$$

$$\mu(B^{(k)}) = \mu_1(B_1^{(k)})\,\mu_2(B_2^{(k)}) = \sum_m \sum_n \mu_1(C_1^{(m)})\,\mu_2(C_2^{(n)}), \tag{2}$$

donde en el miembro derecho de la igualdad (1) aparecen justamente una vez todos los términos que figuran en los miembros derechos de las igualdades (2). Por lo tanto,

$$\mu(A) = \sum_k \mu(B_k),$$

que es lo que debíamos demostrar.

En particular, la aditividad de las medidas elementales en un espacio euclídeo n-dimensional se desprende de la aditividad de la medida lineal en la recta.

TEOREMA 2. *Si las medidas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son σ-aditivas, también es σ-aditiva la medida $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$.*

Daremos la demostración para el caso en que $n=2$. Supongamos que λ_1 es la prolongación lebesguiana de la medida μ_1. Sea $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, donde los conjuntos C y C_n pertenecen a $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, es decir,

$$C = A \times B, \quad A \in \mathfrak{S}_1, \quad B \in \mathfrak{S}_2,$$
$$C_n = A_n \times B_n, \quad A_n \in \mathfrak{S}_1, \quad B_n \in \mathfrak{S}_2.$$

Tomemos para $x \in X$

$$f_n(x) = \begin{cases} \mu_2(B_n) \text{ cuando } x \in A_n, \\ 0 \text{ cuando } x \overline{\in} A_n. \end{cases}$$

Es fácil ver que para $x \in A$

$$\sum_n f_n(x) = \mu_2(B)$$

y por esto, de acuerdo con el teorema de Beppo Levi (teorema 5 del § 5)

$$\sum_n \int_A f_n(x)\, d\lambda_1 = \int_A \mu_2(B)\, d\lambda_1 = \lambda_1(A) \cdot \mu_2(B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B).$$

Pero,

$$\int_A f_n(x)\, d\lambda_1 = \mu_2(B_n) \cdot \mu_1(A_n) = \mu(C_n)$$

de modo que

$$\sum_n \mu(C_n) = \mu(C).$$

La prolongación lebesguiana de la medida $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$ se llamará producto de las medidas μ_k y se denotará con

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n = \boxed{\otimes}\, \mu_k.$$

En particular, para

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$$

obtenemos la n-ésima potencia de la medida μ:

$$\mu^n = \overset{n}{\underset{k=1}{\boxed{\otimes}}}\, \mu_k, \quad \mu_k = \mu.$$

Por ejemplo, la medida n-dimensional de Lebesgue μ^n es la n-esima potencia de la medida lineal de Lebesgue μ.

3°. Representación de la medida plana en términos de la integral de la medida lineal de secciones y definición geométrica de la integral de Lebesgue. Sea G una región del plano (x, y) limitada por las verticales $x = a$, $x = b$ y las curvas $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$.

Como es conocido, el área de la región G es igual a la integral

$$V(G) = \int_a^b \{\varphi(x) - \psi(x)\}\, dx.$$

La diferencia $\varphi(x_0)-\psi(x_0)$ representa aquí la longitud de la sección de la región G mediante la vertical $x=x_0$. Nuestro objetivo es extender este modo de medir áreas al caso de medidas-productos arbitrarios

$$\mu=\mu_x \otimes \mu_y.$$

Vamos a suponer en lo sucesivo que las medidas μ_x y μ_y están definidas en álgebras borelianas, son σ-aditivas y verifican la condición de plenitud (si $B\subset A$ y $\mu(A)=0$, entonces B es medible), condición que, como hemos visto con anterioridad, verifican todas las prolongaciones lebesguianas.

Introduciremos las denotaciones siguientes

$$A_x=\{y\colon (x, y)\in A\} \qquad (x \text{ fijo}),$$
$$A_y=\{x\colon (x, y)\in A\} \qquad (y \text{ fijo}).$$

Si X e Y son rectas numéricas (de modo que $X\times Y$ es el plano), A_{x_0} es la proyección sobre el eje Y de la sección del conjunto A mediante la recta vertical $x=x_0$.

TEOREMA 3. *En las suposiciones señaladas se tiene*

$$\mu(A)=\int_X \mu_y(A_x)\,d\mu_x=\int_Y \mu_x(A_y)\,d\mu_y$$

para cualquier conjunto μ-medible A [1].

DEMOSTRACION. Es obvio que basta demostrar la igualdad

$$\mu(A)=\int_X \varphi_A(x)\,d\mu_x, \text{ donde } \varphi_A(x)=\mu_y(A_x), \tag{3}$$

ya que la segunda parte del teorema es totalmente análoga a la primera. Observemos que el teorema incluye automáticamente la aseveración de que para casi todos los x (en el sentido de la medida μ_x) los conjuntos A_x son medibles según la medida μ_y y de que la función $\varphi_A(x)$ es medible respecto de la medida μ_x. De lo contrario, la fórmula (3) no tendría sentido.

[1] Observemos que la integración en X se reduce, de hecho, a la integración en el conjunto $\bigcup\limits_y A_y \subset X$ fuera del cual el integrando es igual a cero. Análogamente, $\int\limits_Y = \int\limits_{\bigcup\limits_x A_x}$.

La medida μ es la extensión lebesguiana de la medida

$$m = \mu_x \times \mu_y$$

definida en el sistema $\mathfrak{S}_m$ de conjuntos de tipo

$$A = A_{y_0} \times A_{x_0}.$$

Para estos conjuntos la igualdad (3) es evidente, ya que en este caso

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \mu_y(A_{x_0}) & \text{para } x \in A_{y_0}, \\ 0 & \text{para } x \overline{\in} A_{y_0}. \end{cases}$$

La igualdad (3) se extiende sin dificultad también a los conjuntos de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ que se descomponen en uniones finitas de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathfrak{S}_m$.

En el caso general, la demostración de la igualdad (3) se basa en el lema siguiente que tiene interés independiente en la teoría de prolongaciones lebesguianas.

LEMA. *Para cualquier conjunto μ-medible A existe un conjunto B tal que*

$$B = \bigcap_n B_n, \quad B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$$

$$B_n = \bigcup_k B_{nk}, \quad B_{n1} \subset B_{n2} \subset \ldots \subset B_{nk} \subset \ldots,$$

donde los conjuntos B_{nk} son elementos de $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ y $A \subset B$ y

$$\mu(A) = \mu(B).$$

La DEMOSTRACION del lema se basa en el hecho de que, cualquiera que sea n, el conjunto A puede ser incluido, por definición de medibilidad, en la unión $C_n = \bigcup \Delta_{nr}$ de conjuntos Δ_{nr} de $\mathfrak{S}_m$ de manera que

$$\mu(C_n) < \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Tomando $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$, veremos sin dificultad que los conjuntos B_n tienen la forma $B_n = \bigcup_s \delta_{ns}$ donde δ_{ns} son elementos de $\mathfrak{S}_m$. Tomando, finalmente, $B_{nk} = \bigcup_{s=1}^{k} \delta_{ns}$, obtendremos un sistema de conjuntos B_{nk} con las propiedades requeridas. Esto demuestra el lema.

Empleando el teorema de Beppo Levi (teorema 5 del § 5), es fácil extender la igualdad (3) de los conjuntos $B_{nk} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ a los conjuntos B_n y B, ya que

$$\varphi_{B_n}(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_{B_{nk}}(x), \quad \varphi_{B_{n1}} \leqslant \varphi_{B_{n2}} \leqslant \ldots,$$
$$\varphi_B(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_{B_n}(x), \quad \varphi_{B_1} \geqslant \varphi_{B_2} \geqslant \ldots.$$

Si $\mu(A) = 0$, entonces $\mu(B) = 0$ y en casi todos los puntos

$$\varphi_B(x) = \mu_y(B_x) = 0.$$

Como $A_x \subset B_x$, para casi todos los x el conjunto A_x es medible y

$$\varphi_A(x) = \mu_y(A_x) = 0,$$
$$\int \varphi_A(x)\, d\mu_x = 0 = \mu(A).$$

Por consiguiente, la fórmula (3) es válida para conjuntos A tales que $\mu(A) = 0$. En el caso general, representaremos A en la forma $B \setminus C$, donde, en virtud de (4),

$$\mu(C) = 0.$$

Como la fórmula (3) es válida para los conjuntos B y C, es fácil probar que se cumple también para el conjunto A. Hemos terminado la demostración del teorema (3).

Consideremos ahora el caso en que Y es la recta numérica, μ_y es la medida lineal de Lebesgue y el conjunto A es el conjunto formado por puntos (x, y) de tipo

$$\{x \in M,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}, \tag{5}$$

donde M es un conjunto μ_x-medible y $f(x)$ es una función integrable no negativa. En este caso,

$$\mu_y(A_x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \in M, \\ 0 & \text{para } x \overline{\in} M \end{cases}$$

y

$$\mu(A) = \int_M f(x)\, d\mu_x.$$

Hemos demostrado con esto el teorema siguiente.

TEOREMA 4. *La integral de Lebesgue de una función no negativa $f(x)$ es igual a la medida $\mu = \mu_x \times \mu_y$ del conjunto A definido por las relaciones* (5).

En el caso en que X es también la recta numérica, el conjunto M es un segmento y la función $f(x)$ es integrable según Riemann, este teorema se reduce a la expresión conocida de la integral como el área comprendida debajo del gráfico de la función.

4°. Teorema de Fubini. Consideremos el producto triple $U = X \times Y \times Z$; si en X, Y y Z están definidas las medidas μ_x, μ_y y μ_z, la medida

$$\mu_u = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu_z$$

puede ser definida o bien como

$$\mu_u = (\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu_z$$

o bien como

$$\mu_u = \mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu_z).$$

Es fácil probar que, de hecho, estas definiciones son equivalentes.

El teorema siguiente constituye el resultado principal en la teoría de integrales múltiples.

TEOREMA DE FUBINI. *Supongamos que las medidas* μ_x y μ_y *están definidas en anillos borelianos, son* σ*-aditivas y completas; supongamos, además, que*

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

y que la función $f(x, y)$ *es integrable respecto a la medida* μ *en un conjunto*

$$A \subset X \times Y. \tag{6}$$

Entonces[1],

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y)\, d\mu_x \right) d\mu_y. \tag{7}$$

La afirmación del teorema incluye la existencia de las integrales en los paréntesis para casi todos los valores de la variable respecto a la cual se toman estas integrales.

DEMOSTRACION. Realicemos primero la demostración para el caso en que $f(x, y) \geqslant 0$. Consideremos con este fin el producto triple

$$U = X \times Y \times Z,$$

[1] Véase la llamada al pie de la página 356.

donde el tercer factor es la recta numérica, y el producto de medidas

$$\lambda = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu^1 = \mu \otimes \mu^1,$$

donde μ^1 es la medida lebesguiana lineal.

Definamos en U un subconjunto W tomando

$$(x, y, z) \in W$$

cuando

$$x \in A, \quad y \in A_x,$$
$$0 \leqslant z \leqslant f(x, y).$$

De acuerdo con el teorema 4,

$$\lambda(W) = \int_A f(x, y)\, d\mu. \tag{8}$$

Por otra parte, en vista del teorema 3,

$$\lambda(W) = \int_X \xi(W_x)\, d\mu_x, \tag{9}$$

donde $\xi = \mu_y \times \mu^1$ y W_x es el conjunto de pares (y, z) tales que $(x, y, z) \in W$. Además, de acuerdo con el teorema 3,

$$\xi(W_x) = \int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y. \tag{10}$$

Comparando (8), (9) y (10), encontramos

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x,$$

que es los que queríamos demostrar.

El caso general se reduce al estudiado mediante las relaciones

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y),$$
$$f^+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2}, \quad f^-(x, y), = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2}.$$

Observación. Como veremos en los ejemplos que indicamos más abajo, la existencia de las integrales reiteradas

$$\int_X \left(\int_{A_x} f\, d\mu_y \right) d\mu_x \quad \text{y} \quad \int_Y \left(\int_{A_y} f\, d\mu_x \right) d\mu_y \tag{11}$$

no implica, en el caso general, ni la igualdad (7) ni la integrabilidad de la función $f(x, y)$ en A. Sin embargo, *si existe al menos una de las integrales*

$$\int_X \left(\int_{A_x} |f(x, y)|\, d\mu_y \right) d\mu_x \quad \text{ó} \quad \int_Y \left(\int_{A_y} |f(x, y)|\, d\mu_x \right) d\mu_y, \tag{12}$$

$f(x, y)$ es integrable en A y tiene lugar la igualdad (7).

En efecto, supongamos, por ejemplo, que la primera de las integrales (12) existe y es igual a M. La función $f_n(x, y) = \min \times \times \{|f(x, y)|, n\}$ es medible, acotada y, consecuentemente, sumable en A. Por el teorema de Fubini

$$\int_A f_n(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f_n(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x \leqslant M. \qquad (13)$$

Las funciones f_n forman una sucesión monótona no decreciente que converge en casi todos los puntos hacia $|f(x, y)|$. En virtud del teorema de Beppo Levi, de aquí y de la desigualdad (13) se desprende que la función $|f(x, y)|$ es sumable en A. Pero, entonces, también $f(x, y)$ es sumable y para ella es válido el teorema de Fubini. De aquí se deduce nuestra afirmación.

Hemos demostrado el teorema de Fubini suponiendo que las medidas μ_x y μ_y (y, por consiguiente, también μ) son finitas. Sin embargo, es fácil probar que este teorema subsiste también en el caso de medidas σ-finitas.

Veamos unos ejemplos de funciones, para las cuales existen las integrales reiteradas (11), pero no tiene lugar la igualdad (7).

1. Sea

$$A = [-1, 1]^2$$

y

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

entonces,

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dx = 0$$

para $y \neq 0$ y

$$\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dy = 0$$

para $x \neq 0$. Por lo tanto,

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y)\, dy \right) dx = 0;$$

pero la integral, en el sentido de integral doble de Lebesgue, en el cuadrado no existe, ya que

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |f(x, y)|\, dx\, dy \geqslant \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{|\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi|}{r}\, d\varphi = 2 \int_0^1 \frac{dr}{r} = \infty.$$

2. $A=[0, 1]^2$

$$f(x, y)=\begin{cases} 2^n \text{ para } \frac{1}{2^n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}; \quad \frac{1}{2^n}\leqslant y<\frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{2n+1} \text{ para } \frac{1}{2^{n+1}}\leqslant x<\frac{1}{2^n}; \quad \frac{1}{2^n}\leqslant y<\frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 \text{ en los demás casos.} \end{cases}$$

Se puede calcular que

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x, y)\,dx\right)dy=0$$

mientras que

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x, y)\,dy\right)dx=\frac{1}{4}.$$