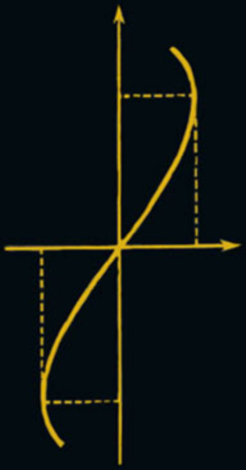
S.M. NIKOLSKI

ELEMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO



EDITORIAL MIR

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

S. M. NIKOLSKI

ELEMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por V. P. Kunaev

На испанском языке

Impreso en la URSS

INDICE

PREFACIO

Este libro fue escrito para prestar ayuda a los escolares que estudian el análisis matemático, así como a los maestros que enseñan dicha materia en la escuela. Resultará ser útil para los estudiantes de las escuelas técnicas medias, y también para la autoinstrucción o para repasar temas del análisis matemático a nivel contemporáneo.

Sus capítulos primero y segundo son los principales y están dedicados al propio análisis matemático, además pueden examinarse por separado de los demás, considerándolos como independientes. En dichos capítulos el análisis matemático se examina basándose en la geometría y la física. La gráfica continua y el movimiento de por sí sirven como base para las deducciones fundamentales. Vienen expuestas las ideas (nociones) acerca del límite de una sucesión y de una función, utilizando ejemplos y enunciando sólo las propiedades de dichos conceptos para emplearlas en lo sucesivo.

La función simple se define según Lobachevski y Dirichlet, sin complicarla. Las fórmulas de diferenciación se deducen para todas las funciones elementales.

A partir de las consideraciones geométricas elementales (en la gráfica) se exponen las nociones del crecimiento y del decrecimiento de funciones (en un segmento), de la concavidad y la convexidad de sus gráficas, de los puntos extremos y los de inflexión.

La teoría de las integrales indefinidas se examina de modo resumido reduciéndola a una tabla y a la fórmula del cambio de variables.

La integral definida se determina como el límite de una suma. Su existencia para las funciones continuas se afirma sin demostración, apelando a la representación intuitiva sobre el área de una figura curvilínea o el trabajo de una fuerza variable. La fórmula de Newton—Leibniz se explica recurriendo a razonamientos mecánicos. Se dan ejemplos de aplicación práctica. En particular se deducen las fórmulas para el área de un círculo, la longitud de una circunferencia, el volumen y la superficie de una esfera.

El primer capítulo corresponde con bastante exactitud a los programas de la escuela secundaria.

El segundo capítulo se denomina complementario, puesto que rebasa los marcos de dichos programas. Sin embargo, el autor recomienda a su lector que lo estudie. La fórmula y la serie de Taylor junto con la derivada y la integral, la fórmula de interpolación de Lagrange y las ecuaciones diferenciales son conceptos muy importantes del análisis matemático.

El tercer capítulo está dedicado al número real, en él se expone de manera completa el concepto de éste, representándolo en forma de una fracción decimal. Se revela la periodicidad de los desarrollos decimales de los números racionales. Los demás, o sea, los desarrollos no periódicos reciben el nombre de números irracionales. Se muestra como los números reales se interpretan sobre una recta numérica. Por último, se definen las operaciones aritméticas sobre los números reales, relacionando este problema con las operaciones sobre los números aproximados. En los párrafos dedicados a las funciones exponencial y potencial se presta especial atención a la definición de la primera para los valores irracionales del argumento.

El binomio de Newton y el análisis combinatorio se examinan en el cuarto capítulo.

Por último, en el quinto capítulo el lector se familiarizará con resumidos conocimientos acerca de los números complejos y de su papel al resolver ecuaciones algebraicas, por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas.

CAPÍTULO 1

ANÁLISIS MATEMÁTICO

§ 1.1. INTRODUCCIÓN

La denominación «Análisis matemático» es una modificación abreviada del nombre viejo «Cálculo infinitesimal». Este último aunque explica más, sin embargo también resulta abreviado. El título «Análisis mediante infinitesimales» caracterizaría con más exactitud la materia.

Sería mejor, que la denominación reflejara aquellos objetos que se someten al análisis (al estudio). Para el análisis matemático clásico tales objetos son ante todo las funciones, es decir, variables que dependen de otras variables. Nosotros chocamos con las funciones en la práctica cotidiana, ellas describen los movimientos y fenómenos físicos. También se manifiestan en la técnica, geometría, mecánica, química y en la economía. Estudiando las funciones, al mismo tiempo estudiamos los fenómenos concretos que ellas describen. Una misma función puede describir fenómenos cuya naturaleza es por completo distinta y por lo tanto reunir en sí las leyes y regularidades a las cuales se supeditan dichos fenómenos.

El análisis matemático es un medio para estudiar las funciones, y de esta manera sirve también para examinar los fenómenos que nos rodean.

Entre las nociones básicas del análisis matemático figuran el límite y la continuidad de una función, la derivada y la integral. En este capítulo el lector obtendrá los conocimientos primarios sobre dichas nociones, sobre sus relaciones y sus aplicaciones.

El capítulo complementario está dedicado a un concepto básico más del análisis matemático, a la fórmula de Taylor.

§ 1.2. FUNCIÓN

1.2.1. Ejemplos de funciones. En la realidad que nos rodea, en todo lugar, observamos fenómenos relacionados de modo orgánico entre sí. A menudo dichos fenómenos van acompañados de relaciones entre unas u otras magnitudes; relaciones consistentes en que una magnitud, hablando en general variable, depende, en virtud de una ley determinada, de otra variable. En dichos casos se dice que la primera magnitud es *una función* de la segunda. Con esto la segunda magnitud se llama *variable independiente* o *argumento*, mientras que la primera, *variable dependiente*.

Exponemos algunos ejemplos de funciones.

1. Supongamos que en el instante inicial $t = 0$ un punto material se encontraba en reposo, y luego (cuando $t > 0$) bajo la acción de la fuerza de gravedad comenzó a caer. Entonces el camino recorrido s por dicho punto en el tiempo t se expresará mediante la fórmula

$$s = gt^2/2 \quad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. En dicho caso nosotros tratamos con dos magnitudes t y s. A cada valor del tiempo t, en virtud de la ley expresada mediante la fórmula (1), corresponde un valor determinado de s. Cuando varía t, o sea, hay variable, respectivamente cambiará s. De este modo queda definida la función $s = gt^2/2$ para los valores no negativos de t.

2. La ley de Boyle—Mariotte se expresa por la fórmula

$$v = c/p \quad (p > 0), \tag{2}$$

donde c es una constante; p, la presión de la cantidad dada de un gas; v, el volumen del gas que corresponde a dicha presión. Aquí v es la función de p. En el caso dado p puede asumir de manera teórica sólo valores positivos, mientras que v se calcula de modo unívoco según la fórmula (2).

3. El área de un círculo de radio r es la magnitud S que depende de r de acuerdo con la fórmula

$$S = \pi r^2 \quad (r > 0). \tag{3}$$

Si modificamos r, respectivamente variará S. Puesto que aquí se trata del área de un círculo, dicha función, como se dice, está definida para r positivos.

4. Los fenómenos oscilatorios van acompañados de movimientos periódicos que por lo común se describen por medio de funciones trigonométricas, éstas varían, como sabemos, periódicamente. Por ejemplo, si ponemos en desequilibrio un resorte suspendido, estirándolo entre los límites de elasticidad, (fig. 1), su punto A comenzará a efectuar oscilaciones verticales que se expresan con bastante exactitud por la ley

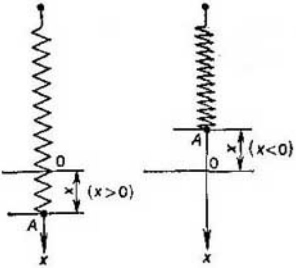


Fig. 1.

$$x = a \cos (pt + \alpha) \quad (t \geqslant 0), \tag{4}$$

donde x es la desviación del punto A respecto a la posición de equilibrio; t, el tiempo; los números a, p y α son constantes que vienen definidas por el material, las dimensiones y el estiramiento inicial del resorte.

Por ahora nos limitaremos a estos ejemplos y formularemos la definición general de la función.

1.2.2. Designaciones de los conjuntos de números. Comenzamos por ellas.

Sean a y b números reales (puntos de una recta numérica) que satisfacen las desigualdades $a < b$.

Se llama *segmento* $[a, b]$ el conjunto de números (puntos) x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$.

Se llama *intervalo* (a, b) el conjunto de números que satisfacen las desigualdades $a < x < b$.

Se llama *intervalo* $(-\infty, \infty)$ el conjunto de los números reales x (puntos de una recta numérica). Se dice además que esto es el conjunto de los números x que satisfacen las desigualdades $-\infty < x < \infty$.

Se llama *intervalo* (a, ∞) el conjunto de los números x, mayores que el número a, o como se dice, el conjunto de los números x que satisfacen las desigualdades $a < x < \infty$.

Se denomina *intervalo* $(-\infty, b)$ el conjunto de los números x, menores que el número b, o como se dice, el conjunto de los números x que satisfacen las desigualdades $-\infty < x < b$.

Nos encontraremos también con otros conjuntos de números que no tienen obligatoriamente denominaciones especiales. Se designan con diferentes letras: E, A, B, . . .

1.2.3. Definición del concepto de función. Sea E un *conjunto (colección) de números, y sea también que, en virtud de cierta ley determinada por completo, a cada número x de E se ponga en correspondencia un número y; en este caso se dice que sobre E está prefijada una función (unívoca) que se escribe en forma de:*

$$y = f(x). \tag{5}$$

Dicha definición de la función fue propuesta por N. I. Lobachevski y L. Dirichlet [1]). El conjunto E se llama *campo de representación* o *de definición* de la función $f(x)$. Dicen también que viene dada la variable independiente x la cual puede asumir los valores particulares de x del conjunto E. A cada tal valor, en virtud de la ley mencionada, corresponde un valor determinado (número) de otra variable y, denominada *función* o *variable dependiente*. La variable independiente se llama *argumento*.

Para expresar el concepto de función se utiliza el lenguaje geométrico. Dicen que viene dado el conjunto E de puntos x de una recta real, o sea, el campo de definición o de representación de la función, y una ley en virtud de la cual a cada punto del conjunto E se pone en correspondencia el número $y = f(x)$. Si queremos hablar sobre la función como de cierta ley que pone en correspondencia a cada número x de E cierto número y, es suficiente anotarla por la letra f. El símbolo $f(x)$ denota el número y, el cual, en virtud de la ley f, corresponde al valor de x. Si, por ejemplo, el número 1 pertenece al campo E de la representación de la función f, entonces $f(1)$ es *el valor de la función f* en el punto $x = 1$.

---

[1]) *N. I. Lobachevski* (1792—1856), destacado matemático ruso, creador de la geometría no euclidiana. *L. Dirichlet* (1805—1859), matemático alemán.

Si 1 no pertenece a E, dicen que la función f *no está definida* en el punto $x = 1$.

Para las funciones f y φ que tienen un mismo campo de representación E, se determinan *la suma* $f + \varphi$, *la diferencia* $f - \varphi$, *el producto* $f\varphi$ *y el cociente* f/φ. Estas son nuevas funciones, cuyos valores se expresan respectivamente mediante las fórmulas:

$$f(x) + \varphi(x),\ f(x) - \varphi(x),\ f(x)\varphi(x),\ f(x)/\varphi(x),$$
$$x \in E,$$

donde para el caso de cociente se supone que $\varphi(x) \neq 0$ sobre E.

Para designar las funciones se emplean también otras letras: F, Φ, Ψ, . . ., lo mismo que en vez de x e y se puede aplicar z, u, v, w, ...

1.2.4. Función compuesta. Con ayuda de las operaciones aritméticas se pueden construir a partir de las funciones dadas otras nuevas. Sin embargo, hay otro medio de construir funciones recurriendo a las funciones dadas. Tenemos en cuenta *la operación con la función de otra función* o *función compuesta*.

Sean dadas dos funciones $y = f(u)$ y $u = \varphi(x)$, donde G es el campo de definición de f, mientras que E es el campo de definición de φ, además supongamos que a cada x de E le corresponde mediante la función φ el valor de u perteneciente a G. Entonces se puede construir *una función compuesta*

$$y = f[\varphi(x)]$$

de x con el campo de definición E. Dicha función se denomina también *función de función*.

Por ejemplo, se puede considerar la función

$$y = e^{u^2}\ (-\infty < u < \infty) \tag{6}$$

como una función compuesta

$$y = e^z,\ z = u^2\ (-\infty < u < \infty),$$

determinada para todos los puntos de u o, como se dice, definida sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Es posible la función compuesta, en la formación de la cual toman parte n funciones:

$$z = F_1(F_2(F_3(\ldots(F_n(x))\ldots))).$$

Por ejemplo, la función

$$z = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{7}$$

es la función compuesta construida de las tres siguientes:

$$z = \sqrt{u}, \quad u = 1 - y, \quad y = x^2.$$

Puesto que la función $\sqrt{u}$ está definida sólo para $u \geqslant 0$, la función (7) está definida para los x, que satisfacen la desigualdad

$$1 - x^2 \geqslant 0$$

o bien, lo que es lo mismo, las desigualdades $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

1.2.5. Funciones elementales. Existen distintos procedimientos para representar las funciones. No obstante,

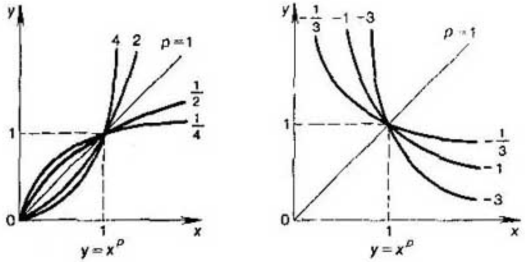


Fig. 2.

entre estos procedimientos tiene un significado de particular importancia el procedimiento de representarlas por medio de una fórmula.

Expliquemos lo que significa que una función viene dada mediante una fórmula.

Denominaremos *funciones elementales*, o sea *simples*, las siguientes:

1) *Función constante*

$$y = c \quad (-\infty < x < \infty).$$

A cada x real le corresponde un mismo valor de y igual al número c.

2) *Función potencial*

$$y = x^n \quad (-\infty < x < \infty) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

o bien (fig. 2)

$$y = x^p \quad (0 < x < \infty),$$

donde $p \neq 0$ es no natural. Aquí con cuidado consideramos que $x > 0$, puesto que, por ejemplo, para $p = {}^1/_2$ la fun-

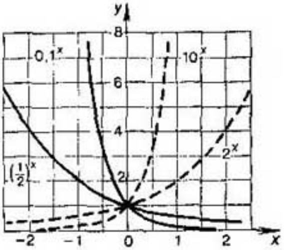


Fig. 3.

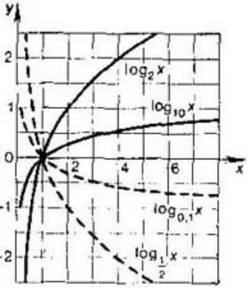


Fig. 4.

ción x^p no tiene sentido si $x < 0$, mientras que la función x^{-1}, para $x = 0$. Aunque existen casos, en que la función x^p está definida para $x \leqslant 0$, verbigracia: $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$.

3) *Función exponencial* (fig. 3)

$$y = a^x \quad (-\infty < x < \infty) \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

4) *Función logarítmica* (fig. 4)

$$y = \log_a x \quad (0 < x < \infty), > 0, \ a \neq 1.$$

5) $y = \operatorname{sen} x \quad (-\infty < x < \infty)$ (fig. 5).

6) $y = \cos x \quad (-\infty < x < \infty)$ (fig. 5).

7) $y = \operatorname{tg} x \quad (x \neq (k + \frac{1}{2})\ \pi),\ k = 0,\ \pm,\ 1 \pm 2, \ldots$ (fig. 6).

8) $y = \operatorname{arcsen} x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ (fig. 7).

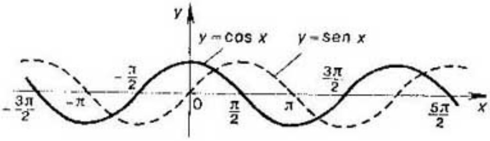


Fig. 5.

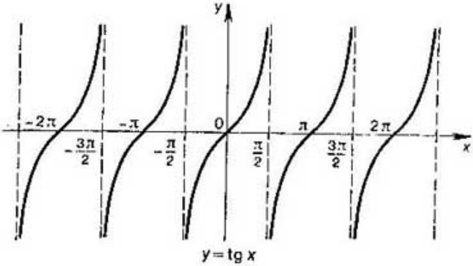


Fig. 6.

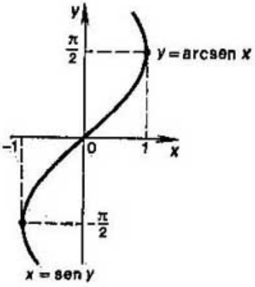


Fig. 7.

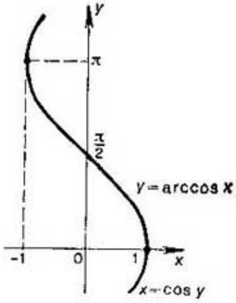


Fig. 8.

9) $y = \arccos x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ (fig. 8).

10) $y = \operatorname{arctg} x \quad (-\infty < x < \infty)$ (fig. 9).

Si las funciones elementales se combinan, permitiendo emplear un número finito de veces las operaciones de adición, resta, multiplicación, división, y de la función de función, obtendremos *las funciones* denominadas *elementales*.

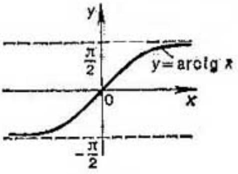


Fig. 9.

Cuando dicen que la función

$$y = F(x)$$

está representada mediante una fórmula, por lo común, se sobreentiende que $F(x)$ es cierta función elemental.

A continuación presentamos algunas funciones con las que se tropieza a menudo y que obtuvieron nombres especiales.

Función lineal

$$y = kx + b.$$

Su gráfica, como sabemos, es una recta que forma con la dirección positiva del eje x un ángulo cuya tangente es igual a k, y que corta el eje y en el punto cuya ordenada es igual a b.

Con las funciones lineales se choca muy a menudo en la práctica. Muchas leyes físicas se expresan por medio de las funciones lineales y además con bastante exactitud. Por ejemplo, la longitud l de un vástago con buena aproximación se considera como una función lineal de su temperatura:

$$l = l_0 + \alpha t,$$

donde α es el coeficiente de dilatación lineal; l_0, la longitud del vástago a $t = 0$. Si x es el tiempo, e y, la distancia recorrida durante dicho tiempo por el punto, entonces la función lineal $y = kx + b$ expresa el hecho de que el punto se mueve uniformemente con la velocidad k, mientras que el número b es la distancia del punto a partir del lugar de referencia del recorrido en el instante de tiempo $x = 0$. La posibilidad de considerar aproximadamente uniformes distintas variaciones, aunque sea en pequeños sectores y la sencillez de la función lineal la hacen muy aplicable.

Función de segundo grado

$$y = ax^2 + bx + c \quad (-\infty < x < \infty)$$

también con ella se tropieza con frecuencia en la práctica. Recordemos el movimiento uniformemente acelerado.

La gráfica de una función del segundo grado es una parábola bien conocida.

Se pueden examinar las funciones de tercer, cuarto y, en general, de n-ésimo grado. La función

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1 \quad (-\infty < x < \infty)$$

es un ejemplo de la función de cuarto grado.

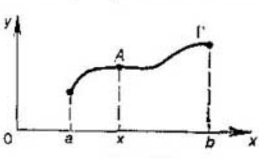


Fig. 10.

La función de grado n, o sea, como la denominan *polinomio* de grado n, se obtiene de las funciones prefijadas constantes y de la potencial $y = x$ por medio de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación tomadas en cantidades finitas. Si a dichas operaciones se añade además la división, entonces obtendremos las llamadas *funciones racionales*. He aquí ejemplos de ellas:

$$y = \frac{1+x}{1-x}, \quad y = \frac{1+x^2}{x^2-5x+6}.$$

La función racional siempre se puede anotar en forma de una fracción, cuyos numerador y denominador son polinomios. La función racional está definida para todos x reales, a excepción de aquellos x que anulan su denominador.

1.2.6. La gráfica. Un medio importante para representar una función es la gráfica. Tomemos el sistema de coordenadas rectangular (fig. 10) x, y. En el eje x de las abscisas marquemos el segmento $[a, b]$ y tracemos cualquier curva Γ que posea la siguiente propiedad: cualquier que sea el punto x del segmento. la recta, que pasa por dicho punto paralelamente al eje y, corta la curva Γ en un punto único A. Esta curva que está representada en el sistema rectangular (cartesiano) de coordenadas la llamaremos *gráfica*. La gráfica determina la función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ del modo siguiente. Si x es un punto arbitrario del segmento $[a, b]$, entonces el valor respectivo de $y = f(x)$ se define como la ordenada del punto A (véase la fig. 10). Por consiguiente, mediante la gráfica se expresa una ley determinada por completo de correspondencia entre x e $y = f(x)$.

Para conocer cómo varía durante un día la temperatura del aire, en las estaciones meteorológicas se emplea un instrumento que se llama termógrafo.

El termógrafo consta de un tambor que gira alrededor de su eje con ayuda del mecanismo de relojería, y de una caja de latón encorvada, muy sensible a las variaciones de la temperatura. Al elevarse la temperatura, dicha caja se desencorva, debido a lo que la pluma autorregistradora, articulada con esta caja por medio de un sistema de palancas, se desplaza hacia arriba. Por el contrario, la disminución de la temperatura proporciona el descenso de la pluma. Sobre el tambor se enrolla del modo respectivo una cinta de papel rayada, en la cual la pluma traza una línea continua, es decir, la gráfica de la función $T = f(t)$ que expresa la dependencia entre el tiempo y la temperatura del aire. Por medio de la gráfica obtenida se puede determinar sin cálculos los valores de la temperatura T para cada momento del tiempo t. Una vez más subrayamos, que la gráfica determina por sí misma la función independientemente de que la misma esté o no representada por una fórmula.

La función en las distintas partes del campo de definición puede estar representada por medio de distintas fórmulas. Por ejemplo, suponemos que un tren que ha salido del punto A en el instante $t = 0$ durante dos horas avanzaba a una velocidad de 100 km por hora y después de llegar al punto B, en él estuvo parado durante una hora, luego el tren en el transcurso de tres horas se desplazó a una velocidad de 80 km.p.h. Entonces la función de $s = f(t)$ que expresa la distancia (en kilómetros) del tren desde A en el instante t, de forma evidente se determinará por las tres fórmulas siguientes:

$$f(t) = \begin{cases} 100t & (0 \leqslant t \leqslant 2), \\ 200 & (2 \leqslant t \leqslant 3), \\ 200 + 80(t-3) & (3 \leqslant t \leqslant 6). \end{cases}$$

1.2.7. Tabla. La función puede ser representada en forma de una tabla. Por ejemplo, nosotros podríamos medir la temperatura T del aire cada hora. En este caso, a cada instante del tiempo $t = 0, 1, 2, \ldots, 24$ correspondería un número determinado T en forma de la tabla:

t	0	1	2	3	...
T	T_0	T_1	T_2	T_3	...

De ese modo, obtendríamos la función $T = f(t)$ definida respecto del conjunto E de los números enteros desde 0 hasta 24, representada en la tabla.

1.2.8. Función multiforme. Hasta aquí hemos entendido como función la «función uniforme». De acuerdo con su definición, a cada valor de x de cierto conjunto de números E corresponde *un número* $y = f(x)$.

Sin embargo, existen también funciones multiformes, en que a cada x del conjunto E corresponden no obligatoriamente uno, sino varios, e incluso un número infinito de valores de y.

Por ejemplo, resolviendo la ecuación

$$y^2 = x, \tag{8}$$

obtendremos para todo $x \geqslant 0$ dos soluciones

$$y = \pm\sqrt{x} \quad (x \geqslant 0),$$

que coinciden, por otra parte, para $x = 0$. De esta manera, la solución de y de la ecuación (8) es una función bivalente de los x positivos.

Un ejemplo más:

$$y = \text{Arcsen}\, x = (-1)^k \arcsen x + k\pi \tag{9}$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

En este caso la función es de infinitos valores. La función Arcsen x es un arco, cuyo seno es igual a x. Existe un conjunto infinito de estos arcos. Todos están expresados por la fórmula (9), donde arcsen $x = \varphi$, es un arco determinado, que satisface las desigualdades $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, cuyo seno es igual a x, mientras que k puede tomar cualquier valor entero.

Indicación. Muchas de las cosas del § 1.2 el lector, es posible, que las conozca. Conviene prestar atención al punto 1.2.2 en el cual vienen expuestas las designaciones estandarizadas de los conjuntos de números utilizados a menudo.

Cabe prestar atención también al punto 1.2.3, donde se da la definición clásica de la función según Lobachevski y Dirichlet. En algunos manuales escolares, no se con qué fines, dicha definición se enuncia de forma muy complicada. Es importante también conocer la definición de la función elemental expuesta en el punto 1.2.5.

§ 1.3. LÍMITE

1.3.1. Límite de una sucesión. El método de límites es el método fundamental que aplica el análisis matemático.

Para aclarar lo que es el límite, comencemos por un problema clásico. En el sistema rectangular de coordenadas viene representada una figura limitada por la parábola (fig. 11) $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 1$. Se requiere encontrar el área de dicha figura. He aquí cómo se puede proceder.

Dividimos el segmento $[0, 1]$ del eje x en n partes iguales con ayuda de los puntos:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$$

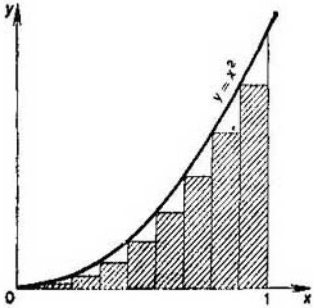


Fig. 11.

y construimos en cada una de estas partes un rectángulo, cuyo ángulo superior izquierdo alcanza la parábola. En este caso obtenemos los rectángulos rayados en la fig. 11, la suma de áreas de los cuales S_n, evidentemente, es igual a

$$S_n = 0 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \ldots \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)\, n\, (2n-1)}{6n^3}\,.^{1)}$$

---

[1]) Hemos utilizado la fórmula

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)\, n\, (2n-1)}{6},$$

Representemos S_n en la forma

$$S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{3} + \alpha_n. \tag{1}$$

La magnitud α_n, aunque tiene una forma compleja, no obstante, posee una propiedad magnífica: tiende a cero, cuando n crece indefinidamente. Tales magnitudes se denominan *infinitésimas*.

Demos la definición formal de dicha magnitud infinitésima.

La magnitud α_n que depende del valor natural $n = 1, 2, 3, \ldots$, se llama infinitésima, si, siendo tan pequeño como se quiera el número positivo ε dado, siempre se encontrará un número $N > 0$ tan grande que se cumple la desigualdad

$$|\alpha_n| < \varepsilon \quad \textit{para todos } n > N."$$

En el caso dado, debido a las desigualdades

$$|\alpha_n| = \left|\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n}\right| \leqslant \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

siendo tan pequeño como se quiera $\varepsilon > 0$, para todos $n > 1/\varepsilon$

$$|\alpha_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

es decir, se puede considerar que $N = 1/\varepsilon$.

Así pues, la suma S_n de las áreas de los rectángulos rayados en la fig. 11 puede ser escrita del modo siguiente:

$$S = \frac{1}{3} + \alpha_n,$$

---

la cual podrá ser introducida del modo siguiente. Sumando los miembros primeros y segundos de las igualdades $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ que corresponden a los valores de $k = 1, 2, \ldots, n-1$, obtenemos la ecuación

$$n^3 - 1 = 3\sigma_{n-1} + \frac{3(n-1)n}{2} + n - 1,$$

$$\text{donde } \sigma_{n-1} = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2.$$

Después de resolver esta ecuación obtenemos

$$\sigma_{n-1} = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}.$$

donde α_n es una magnitud infinitésima. Entonces es natural considerar que S_n, cuando n crece indefinidamente, tiende al número $^1/_3$, asimismo es natural considerar que

$$S = {}^1/_3$$

es el área de nuestra figura. Hemos resuelto el problema planteado.

En el curso de nuestros razonamientos, en primer lugar, hemos formulado la definición del área de nuestra figura como un número S al cual tiende la suma S_n de las áreas de los rectángulos rayados en la figura 11 cuando n crece indefinidamente, y en segundo lugar, hemos hallado dicho número. Resultó que $S = {}^1/_3$.

Demos la definición del límite. *Supongamos que viene dada una variable x_n dependiente del número natural $n = 1, 2, \ldots$. Si es posible representar x_n en forma de la suma*

$$x_n = a + \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

donde a es cierto número constante, y α_n, una infinitésima, entonces dicen que x_n tiene como su límite el número a o x_n tiende hacia a, y se anota

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

o bien

$$x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Citemos ejemplos de variables que dependen del número natural n:

$$x_n = 1/n, \quad y_n = -1/n, \quad z_n = (-1)^n/n,$$

$$u_n = q^n, \quad 0 < q < 1, \quad v_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

$$w_n = (-1)^n.$$

Las variables x_n, y_n, z_n y u_n son infinitésimas; x_n y u_n tienden a cero, tomando valores positivos, decreciendo; y_n tiende a cero tomando valores negativos, creciendo; y z_n tiende a cero, oscilando. La magnitud v_n tiende hacia 1 ($\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$). En lo que se refiere a la magnitud w_n, ésta no tiende hacia límite alguno, tomando sucesivamente los valores $+1$ y -1 [1]).

---

[1]) Si la magnitud w_n poseyese límite, la diferencia $w_{n+1} - w_n$ tendería hacia cero (véase el p. 1.3.3).

Es evidente, que si a_n es una infinitésima, su límite es igual a cero:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Ejercicio 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

Problema 1. Hallar los límites de las siguientes variables, expresándolos como la suma de una constante y una infinitésima:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^3}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-3}{n^3}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1}$.

1.3.2. Variable infinita (infinitamente grande). La variable infinita es la recíproca de la variable infinitésima.

La variable x_n se llama variable infinitamente grande, si, siendo tan grande como se quiera el número $M > 0$, se encontrará tal N que $|x_n| > M$ para todos $n > N$.

Si x_n es una variable infinita, entonces escriben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{ó} \quad x_n \to \infty \ (n \to \infty).$$

Puede suceder que la variable infinita x_n, a partir de cierto n se hace positiva y en este caso se anota

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

o bien negativa, entonces se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

He aquí ejemplos de magnitudes infinitamente grandes:

$$x_n = n, \quad y_n = -n, \quad z_n = (-1)^n n, \ u_n = n^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

En lo que se refiere a la magnitud z_n, ésta puede escribirse así

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

sin embargo, aquí no se puede sustituir el símbolo ∞ ni por el $+\infty$, ni por el símbolo $-\infty$.

1.3.3. Operaciones con los límites. Las variables x_n e y_n se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir, formando nuevas magnitudes

$$x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n y_n, \quad x_n/y_n.$$

En el caso del cociente deberá suponerse que $y_n \neq 0$ para cualesquier $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Son válidas las siguientes propiedades, en esencia evidentes, de los límites:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \\
&\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n, \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).
\end{aligned} \tag{2}$$

Dichas propiedades deberán comprenderse en el sentido de que, si existen los límites que figuran en los segundos miembros de las igualdades (2), automáticamente existirán límites en los primeros miembros de las respectivas igualdades y son válidas las propias igualdades.

Añadimos además que

$$\lim_{x_n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x_n\to A\neq 0\\ y_n\to\infty}} (x_n y_n) = \infty, \quad \lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n\neq 0}} \frac{1}{x_n} = \infty. \tag{3}$$

Un problema más complicado surge al calcular el límite del cociente x_n/y_n, cuando tanto $x_n \to 0$ como $y_n \to 0$, o si $x_n \to \infty$, e $y_n \to \infty$. En estos casos es imposible decir con anticipación a qué será igual el límite. En dependencia de las propiedades individuales de las variables x_n e y_n, el límite podrá ser cualquier número finito o infinito[1]). Puede también resultar que el cociente x_n/y_n no tiene límite alguno, incluso, infinito.

---

[1]) Es cómodo denominar los símbolos $+\infty$, $-\infty$, ∞ como números infinitos, aunque de ninguna manera son números, y entonces los números ordinarios se llaman números finitos.

Por ejemplo, sea $x_n = 1/n$, $y_n = 1/n^2$; en este caso, es patente, que $x_n \to 0$, $y_n \to 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n} = n \to +\infty, \quad \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Mientras que cuando $x_n = (-1)^n/n$, $y_n = 1/n$, la razón

$$\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$$

no tiende hacia límite alguno.

Hemos examinado las variables x_n que dependen del número natural n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Tales variables se llaman *sucesiones*.

Ejemplo 1 (las explicaciones se dan más abajo).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Tanto el numerador como el denominador de la fracción

$$\frac{n+3}{n+1}$$

tienden hacia infinito, por eso resulta imposible decir directamente a qué límite tiende dicha fracción. No obstante, después de dividir por n el numerador y el denominador resulta que tanto el numerador como el denominador tienden a la unidad. Esto ofrece la posibilidad de emplear la fórmula sobre el límite de un cociente.

Ejemplo 2 (las explicaciones se dan más abajo).

$$\lim_{n\to\infty} (n^4 - 100n^3 - 2n^2 + 1) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[n^4 \left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)\right] = +\infty.$$

A primera vista no está claro, a qué tiende la expresión inicial: el primer término n^4 tiende a $+\infty$, mientras que el término $-100n^3 - 2n^2$ tiende a $-\infty$. Pero, después de sacar del paréntesis n^4, todo se esclarece: el multiplicador $n^4 \to +\infty$, y $\left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) \to 1 \neq 0$. En este caso, el producto tiende hacia ∞, es más, hacia $+\infty$ (véase la expresión (3)).

Ejemplo 3.

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+2}) - \sqrt[3]{n}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[3]{n+2})^3 - (\sqrt[3]{n})^3}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2}\,\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} = 0,$$

puesto que el denominador de la última fracción tiende hacia $+\infty$.

No existe un procedimiento general para calcular el límite de una diferencia de dos variables, cada una de las cuales tiende hacia $+\infty$. Para cada caso concreto deberá ingeniarse su propio procedimiento.

Ejemplo 4. La suma de los primeros n términos de una progresión geométrica, cuya razón es q $(q \neq 1)$ y el primer término 1 es igual a

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - q^n \frac{1}{1-q}. \tag{4}$$

Si la progresión es decreciente, es decir, si $|q| < 1$, entonces el segundo término del segundo miembro de (4) tiende hacia cero cuando $n \to \infty$:

$$-q^n \frac{1}{1-q} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Por lo tanto existe un límite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

que se llama *suma de la serie*

$$1 + q + q^2 + \ldots \tag{5}$$

(compuesto de ¡un número infinito de términos!), y en dicho caso escriben

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots,$$

es decir, a la expresión (5) le atribuyen el número igual a la suma de la serie. En este caso se dice que *la serie* (5) *converge*.

Si $|q| > 1$, entonces

$$q^n \frac{1}{1-q} \to \infty \quad (n \to \infty);$$

para $q = 1$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = 1 + \ldots + 1 = n \to \infty.$$

Mas cuando $q = -1$, entonces

$$S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = 1, \quad \ldots$$

y S_n no tiende a límite alguno.

De lo dicho se deduce que si la condición $|q| < 1$ no se cumple, S_n no tiende a un límite finito para $n \to \infty$. En este caso se dice que la serie (5) diverge. A la última serie no se le atribuye número alguno.

Problema 2. Calcular los límites:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-3n^2+1}{n^3-100n-5}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{n^2-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^3+n}$;

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3-10n^2+2n-1)$; 6) $\lim\limits_{n\to-\infty} (n^3-10n^2+$
$+2n-1)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3-10n^2+1}$.

Tarea. Préstese atención a las propiedades de las variables que tienen un límite (finito o infinito), expresado me-

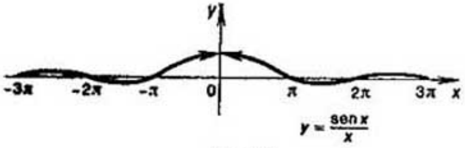


Fig. 12.

diante las fórmulas (2) del p. 1.3.3. También es necesario saber que una variable que posee un límite, igual a a, es la suma de $a + a_n$, donde a_n es una infinitésima. Acerca de la propia noción de infinitésima, aunque ya ha sido definida más arriba de manera formal, para nuestros fines es suficiente tener una imagen enteramente intuitiva, aclarada por medio de los ejemplos.

1.3.4 Límite de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Examinemos la función (fig. 12)

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Dicha función está definida para todos los valores de x, a excepción de $x = 0$. Veamos lo que ocurre con esta función cuando x se acerca cada vez más a cero, sin llegar a lograrlo. Aquí se da tabla:

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
0,50	0,9589
0,10	0,9983
0,05	0,9996

Dicha tabla proporciona la idea de que, cuando la variable independiente x se aproxima a cero, quedando positiva, nuestra función se aproxima a la unidad.

De los razonamientos geométricos se puede obtener esto hecho. En la fig. 13 está representada una circunferencia de radio 1 y con el centro en el origen de coordenadas. Sea $\overset{\frown}{AC} = \alpha$. Entonces $AB = \operatorname{sen} \alpha$, $AD = \operatorname{tg} \alpha$.

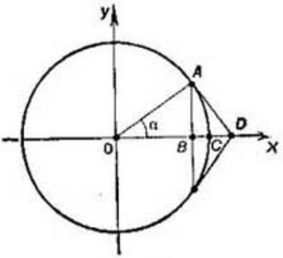


Fig. 13.

Pero, como se infiere de la figura (la longitud del arco es mayor que la longitud de la cuerda que une sus extremos y es menor que la de la quebrada que abarca dicho arco),

$$2 \operatorname{sen} \alpha < 2\alpha < 2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$1 < \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\cos \alpha < \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} < 1.$$

Si ahora α se aproxima (tiende) a 0, entonces $\cos \alpha$, como se ve en la gráfica de la función $\cos \alpha$ (fig. 5), se aproximará a 1. Pero la función (sen α)/α se encuentra todo el tiempo entre cos α y 1. Esto muestra que dicha función tiende a la unidad cuando α tiende a cero, quedando positiva. Este hecho se anota así:

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1, \tag{6'}$$

y se dice que *el límite de la función* $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ *, en el caso en que α tiende a cero, tomando valores positivos, es igual a la unidad.*

Pero si $\alpha \to 0$, tomando valores negativos, dicho límite a pesar de todo existe y es igual a la unidad. Esto se obtiene de (6') por medio de la sustitución de la variable $\alpha = -t$, en virtud de la cual, si $\alpha \to 0$, $\alpha < 0$, entonces $t \to 0$, $t > 0$:

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1. \tag{6''}$$

Las igualdades (6') y (6") se unen en una

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1 \tag{6}$$

y se dice que el límite de (sen α)/α, para $\alpha \to 0$, es igual a 1.

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y/2} = \lim_{y\to 0} \left(2\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right) = 2\cdot 1 = 2.$$

Para reducir el cálculo de este límite al conocido límite (6), sustituimos la variable x por y empleando la igualdad $y = 2x$. Es evidente que $y \to 0$ cuando $x \to 0$.

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{2(x/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Aquí ha sido efectuado el cambio $x/2 = y$, donde $y \to 0$ si $x \to 0$.

Problema 3. Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$.

Tarea. Repítase la deducción de la fórmula (6) y reténgase esta fórmula en la memoria.

1.3.5. Límite de una función. Examinemos ahora una función arbitraria

$$y = f(x).$$

Supongamos que ésta está definida en cierto *entorno derecho del punto a*, a excepción, puede ser, del propio punto a. Esto significa que dicha función está definida para los valores de x que satisfacen las desigualdades $a < x < a + \delta$, donde δ es cierto número positivo.

Se dice que *la función $y = f(x)$ tiene límite derecho en el punto a, igual a A, si del hecho de que x se aproxima (tiende) hacia a, quedando en el entorno derecho del punto a, se sigue que f (x) se aproxima hacia A.* Dicho hecho se anota así:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = A.$$

De manera análoga, *si la función $y = f(x)$ está determinada en el entorno izquierdo del punto a, a excepción, puede ser, del propio punto a, o sea, la función está prefijada para los valores de x que satisfacen las desigualdades $a - \delta < x < a$ ($\delta > 0$) para cierto $\delta > 0$, entonces dicen que esta función tiene límite izquierdo en el punto a, igual al número B, si del hecho de que x se aproxima hacia a, quedando en el entorno izquierdo de a, se deduce que f (x) se acerca (tiende) a B. Este hecho se escribe del modo siguiente:*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = B.$$

Si existen los límites izquierdo y derecho de la función $y = f(x)$ en el punto a y ambos son iguales a un mismo número A, entonces dicen que la función tiene límite en el punto a igual a A y escriben:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

En este caso, sin ninguna duda, la función se define en cierto entorno completo $a - \delta < x < a + \delta$ del punto a, excepto, puede ser, del propio punto a.

La función $y = (\operatorname{sen} x)/x$, la cual ha sido examinada anteriormente, está definida para todos los valores de x, a excepción de $x = 0$. Nosotros ya sabemos que dicha función tiene el límite igual a 1 cuando $x \to 0$.

De modo formal, la expresión «para x, que tiende hacia a, la función $f(x)$ tiende hacia A» es necesario entenderla de la forma siguiente: para todo número positivo $\varepsilon > 0$ se encontrará tal $\delta > 0$ que

$$| f(x) - A | < \varepsilon$$

para todos x, que satisfacen las desigualdades

$$0 < | x - a | < \delta.$$

Acerca de la función $f(x)$ dicen que tiende a ∞ cuando $x \to a$, si para valores de x bastante próximos de a, dicha función puede hacerse, en valor absoluto, mayor que un número tan grande como se quiera $M > 0$. En este caso escriben

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

En este caso se puede hablar sobre el límite derecho o izquierdo en el punto a y cambiar el símbolo ∞ por $+\infty$ o $-\infty$, si la función cerca de a es positiva o, respectivamente, negativa.

Por ejemplo, nosotros conocemos que

$$\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty \tag{7}$$

o lo que es más exacto (véase la fig. 6),

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x > \pi/2}} \operatorname{tg} x = -\infty. \tag{7'}$$

Cabe señalar, en resumen, que en estas definiciones el número finito a (punto de la recta numérica) se puede cambiar por el símbolo ∞ o $+\infty$, o bien $-\infty$.

Recordemos que la función

$$y = \operatorname{arctg} x$$

está dada para todos los valores de x, es decir, en el segmento $-\infty < x < \infty$. Para ella son válidas las igualdades

(véase el § 1.2 y la fig 9)

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2.$$

1.3.6. Operaciones sobre los límites de funciones. Estos últimos tienen propiedades análogas a los límites de variables que recorren sucesiones:

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} \varphi(x), \qquad (8)$$

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} \varphi(x), \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} \quad (\lim_{x\to a} \varphi(x) \neq 0). \qquad (10)$$

En particular, si $f(x)$ es constante ($f(x) = c$) y, por consiguiente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, entonces

$$\lim_{x\to a} [c\varphi(x)] = c \lim_{x\to a} \varphi(x). \qquad (11)$$

Dichas propiedades de nuevo deberán comprenderse en el sentido de que si existen límites finitos en los segundos miembros de las igualdades (8)—(11), automáticamente existirán límites en los miembros primeros de dichas igualdades y se satisfarán las mismas igualdades.

Son justas también las propiedades ($f(x) \neq 0$):

si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;

si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to x_0} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x\to x_0} (ax^2) + \lim_{x\to x_0} (bx) + \lim_{x\to x_0} c = a(\lim_{x\to x_0} x)^2 + b \lim_{x\to x_0} x + c = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} (x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 2} (x+2)} = \frac{4+4}{2+2} = 2.$$

En estos ejemplos para calcular el límite de la función cuando $x \to a$, es suficiente sustituir en ella $x = a$. Particularmente, en el ejemplo 2 esto se puede efectuar debido a que tanto el numerador como el denominador tienden hacia límites finitos y además el límite del denominador no es igual a cero.

Ejemplo 3.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x-3} = \infty.$$

Aquí no se puede utilizar la propiedad (10) que expresa que el límite del cociente es igual al cociente de los límites, puesto que el límite del denominador es igual a cero. Por otro lado, es menester considerar evidente que *si el numerador de una fracción tiende hacia un número finito, no igual a cero, mientras que el denominador tiende a cero, la fracción tiende hacia infinito.*

Ejemplo 4. Hay que calcular el límite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$

En el caso dado, el numerador y el denominador tienden a cero y los razonamientos expuestos en el ejemplo 3 también resultan inaplicables. Sin embargo, se puede proceder del siguiente modo. Para todo $x \neq 2$ tenemos $\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$, y ya que para definir el límite cuando $x \to 2$ no se toma en consideración por completo los valores de f en el punto $x = 2$, entonces

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2).$$

De esta manera, en vez de calcular el límite de una función compleja $(x^2 - 4)/(x - 2)$, es suficiente determinar el límite de otra función más simple $x + 2$. El último, si $x \to 2$, está claro que es igual a 4. Puesto que

$$\lim_{x\to 2} (x + 2) = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 = 2 + 2 = 4.$$

Los cálculos relacionados con la determinación del límite dado, en general, se exponen del modo siguiente:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = \lim_{x\to 2} x + 2 = 4.$$

Subrayamos que las funciones $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ y $\varphi(x) = x + 2$ son funciones distintas. La primera de ellas se define para $x \neq 2$, mientras que la segunda está definida para todos x. No obstante, calculando el límite de la función dada cuando $x \to 2$ no nos interesa por completo si están definidas o no dichas funciones en el propio punto $x = 2$, y puesto que $f(x) = \varphi(x)$ para $x \neq 2$, entonces

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \varphi(x) = \varphi(2).$$

Ejemplo 5. La función $y = \operatorname{sen}(1/x)$ (su gráfica está representada en la fig. 14) está definida para todos los valores de $x \neq 0$. Ella está deter-

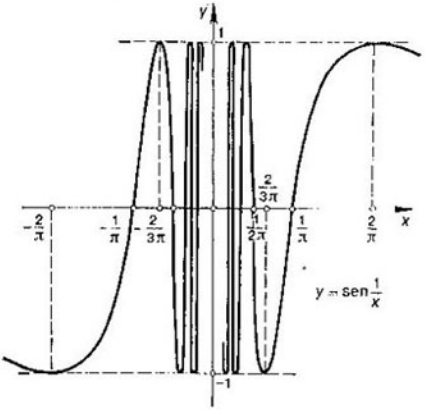


Fig. 14.

minada de ese modo en el entorno del punto $x = 0$, a excepción del propio $x = 0$. Dicha función no posee límite para $x \to 0$, debido a que la sucesión de los valores de $x_k = 2/\pi(2k+1)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ distintos de cero, tiende a cero, y al mismo tiempo

$$f(x_k) = (-1)^k$$

no tiende hacia límite alguno cuando $k \to \infty$.

Problema 4. Calcular los límites:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} kx}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{ctg} x$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{ctg} x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-1}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - 20x^2 + 1)$; 8) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3 - 20x^2 + 1)$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1})$.

1.3.7. Número e. Examinemos una variable x_n que recorre una sucesión de números

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.$$

DEFINICIÓN. *La variable x_n está acotada superiormente por el número M, si se cumplen las desigualdades $x_n \leqslant M$ para cualesquier $n = 1, 2, \ldots$.*

DEFINICIÓN. *La variable x_n no decrece, si para cualquier n*

$$x_n \leqslant x_{n+1}.$$

Es justo el importante

TEOREMA 1. *Si una variable x_n no decrece y está acotada superiormente por el número M, la misma tiene un límite que es igual a cierto número a el cual no supera M:*

$$\lim_{\alpha\to 0} x_n = a \leqslant M. \tag{12}$$

Tracemos la demostración.

Si en la recta numérica se marcan los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ y el punto M (fig. 15), entonces cada punto x_{n+1} siguiente

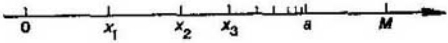


Fig. 15.

se encontrará a la derecha del anterior x_n o coincidirá con el último y al mismo tiempo todos los puntos x_n se encontrarán a la izquierda de M, o bien quizás alguno de ellos coincidirá con M (pero entonces, evidentemente, también todos los que lo siguen coincidirán con M y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M$).

Puesto que la cantidad de números n es un conjunto infinito, los puntos x_n deben espesarse obligatoriamente cerca de algún punto $a \leqslant M$, el cual será el límite de x_n.

El número a se puede encontrar de la manera siguiente. Supongamos que el número $N > M$ es natural. Tomando sucesivamente los números $0, 1, 2, \ldots, N-1$, de modo obligatorio encontraremos un número entero α_0 que satisface la siguiente propiedad: el segmento $\delta_0 = [\alpha_0, \alpha_0+1]$ contiene aunque sea un punto x_n, mientras que a la derecha de α_0+1 en la recta numérica no hay puntos x_n. Ahora dividimos por medio de los puntos α_0, 0; α_0, 1; α_0, 2; . . .; α_0, 9 el segmento δ_0 en diez partes, y examinando dichos puntos encontramos el número α_1 tal que el segmento $[\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}]$ contenga aunque sea un punto x_n, mientras que a la derecha del punto α_0, $\alpha_1 + 10^{-1}$ no haya puntos x_n. Luego examinamos los puntos

$$\alpha_0,\ \alpha_1 0;\ \alpha_0,\ \alpha_1 1;\ \ldots;\ \alpha_0,\ \alpha_1 9,$$

etc.

Como resultado obtenemos los números $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, con ayuda de los cuales construimos el número

$$a = \alpha_0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots,$$

que satisface la propiedad (12).

Observación 1. En el teorema 1 se puede considerar que la variable x_n está acotada inferiormente por el número m ($m \leqslant x_n$, $n = 1, 2, \ldots$) y no crece ($x_{n+1} \leqslant x_n$), y en este caso también existe el límite $\lim\limits_{\alpha \to 0} x_n \geqslant m$.

Examinemos la variable

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

He aquí sus primeros valores:

$$u_1 = 2;\ u_2 = 2{,}25;\ u_3 \approx 2{,}37;\ u_4 \approx 2{,}44;\ \ldots.$$

Vemos que para pequeños n la variable u_n crece. Se puede establecer también para el caso general, desarrollando la expresión (13) según el binomio de Newton (véase el punto 4.1.2), que (la demostración se expone más adelante)

$$u_n < u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Además, con ayuda del desarrollo según el binomio de Newton se demuestra, que la variable u_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) está acotada superiormente mediante el número 3. Sin embargo, en este caso, a base del teorema 1, la variable u_n tiene un límite que no sobrepasa 3. Este límite se llama *número* e, el cual es igual a[1])

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots. \tag{14}$$

Si en la fórmula (14) ponemos $\alpha = 1/n$, entonces obtenemos, que cuando $n \to \infty$ resultará que $\alpha \to 0$, y por lo tanto,

$$\lim_{\alpha \to 0}\ (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e. \tag{15}$$

[1]) El lector que se familiarice con el capítulo complementario, puede calcular independientemente el número e con cualquier grado de exactitud.

Hemos determinado la fórmula (15) suponiendo que α tiende a cero de acuerdo con la ley: $\alpha = 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Pero se puede demostrar que esta fórmula es justa para cualquier modo en que α tiende a cero, lo que se utilizará más adelante.

Es bien conocido que e es un número irracional. En lo ulterior veremos que desde el punto de vista del cálculo diferencial e integral es necesario considerar el número e como la base natural de logaritmos. El logaritmo del número x con la base e tiene una designación especial:

$$\log_e x = \ln x,$$

y se denomina *logaritmo natural del número x*.

Demostremos las afirmaciones expuestas más arriba.

Según la fórmula del binomio de Newton, para n natural tienen lugar las igualdades

$$u(n) = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$u(n+1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \times \left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \times \left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^n}.$$

Los términos de la suma $u(n)$ son menores que los términos respectivos $u(n+1)$, y, además, $u(n+1)$ tiene un término positivo (último) más de $u(n)$. Por lo tanto, $u(n) < u(n+1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y la variable $u(n)$ crece.

Luego

$$u(n) = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Esto muestra que la variable $u(n)$ está acotada superiormente por medio del número 3.

De esa manera, la variable $u(n)$ crece y está acotada superiormente por el número 3. Según el teorema 1, ella tiene un límite que no supera 3, el que llamamos número e.

Hemos demostrado la igualdad (14), cuando n tiende a infinito, recorriendo los números naturales. No obstante, la igualdad (14) es válida también en los casos, cuando n tiende a ∞ de todo signo y al mismo tiempo recorre cualesquiera valores numéricos no obligatoriamente naturales. Demostremos esto.

Sea al principio que n tiende a $+\infty$, recorriendo cualesquiera valores no obligatoriamente enteros. Designemos por $[n]$ la parte entera de n. De ese modo, por ejemplo,

$$[7,3]=7, \quad [7]=7.$$

Para todo número positivo n tienen lugar las desigualdades evidentes

$$[n] \leqslant n < [n+1].$$

Pero entonces

$$\left(1+\frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{[n]+2} < \\ < e\left(1+\frac{1}{[n]}\right)^{2}.$$

Dividiendo por $1+\frac{1}{n}$, obtendremos las desigualdades

$$\frac{\left(1+\frac{1}{[n]+1}\right)^{[n]+1}}{1+\frac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e\,\frac{\left(1+\frac{1}{[n]}\right)^{2}}{1+\frac{1}{n}}. \qquad (16)$$

Vamos a hacer que n tienda hacia $+\infty$. Entonces el número variable $[n]+1$ también tenderá hacia $+\infty$, recorriendo los números naturales. En este caso el numerador del primer miembro de las relaciones (16) tiende hacia e. En lo que se refiere al denominador, éste tiende a 1. Por consiguiente, los miembros primero y segundo de (16) tienden hacia e, pero entonces la parte media, igual a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, también tiende hacia e. Con esto está demostrada la validez de la igualdad (14), cuando n positivo tiende a $+\infty$ de acuerdo con toda ley.

Sea ahora $n \to -\infty$, entonces $m=-n \to +\infty$ y, por lo tanto

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \\ = \lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)\right] = e\cdot 1 = e.$$

Ahora la igualdad (14) ya está demostrada tanto para el caso de $n \to +\infty$, como para $n \to -\infty$, donde n no son obligatoriamente números enteros.

Por último introducimos una nueva variable α mediante la igualdad

$$\alpha = \frac{1}{n}.$$

En este caso, evidentemente,

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

y por tanto hemos demostrado la fórmula (15), cuando α tiende a cero de acuerdo con toda ley.

Ejemplo 1. Si $0 < q < 1$, entonces la variable q^n decrece ($q^{n+1} < q^n$) y está acotada inferiormente por el 0 ($0 < q^n$). Por lo tanto a base de la observación 1 existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} q^n = A \geqslant 0.$$

En efecto, $A = 0$, puesto que

$$A = \lim_{n+1 \to \infty} q^{n+1} = \lim_{n \to \infty} q^{n+1} = \lim_{n \to \infty} (q^n \cdot q) = \lim_{n \to \infty} q^n \cdot q = Aq$$

y $A = Aq$, es decir, $A(1-q) = 0$, de donde $A = 0$.

Ejemplo 2.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2} =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} [(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^2 = [\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^2 = e^2.$$

Problema 5. Calcúlense los límites:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; 4) $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1+2\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

(véase más adelante el punto 1.4.2, ejemplo 1).

§ 1.4. CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN

1.4.1. Noción de continuidad de la función. En la fig. 16 se expone la gráfica de la función $y = f(x)$ ($a \leqslant x \leqslant b$). Es natural denominarla gráfica *continua*, puesto que puede ser trazada por un movimiento continuo del lápiz sin separarlo del papel. Vamos a prefijar un punto arbitrario (número) x

en el segmento $[a, b]$. Otro punto x' del $[a, b]$ próximo al primero se puede representar en forma de $x' = x + \Delta x$, donde Δx es un número positivo o negativo que se denomina *incremento de* x. La diferencia

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

se llama *incremento de la función* f en el punto x, correspondiente al incremento Δx. En la fig. 16 Δy es igual al largo del segmento BC.

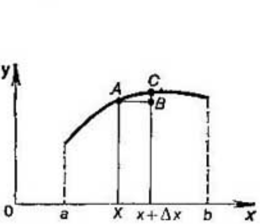


Fig. 16.

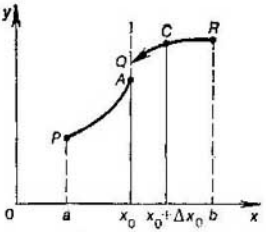


Fig. 17.

Hagamos que Δx, ininterrumpidamente, tienda hacia cero; entonces para la función examinada, es evidente, que también Δy tenderá a cero:

$$\Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0). \tag{1}$$

Examinemos ahora la gráfica de la función $F(x)$ mostrada en la fig. 17. Está compuesta de dos segmentos o trozos continuos PA y QR. Sin embargo, dichos trozos no están unidos de manera continua, y por lo tanto la gráfica se llama, naturalmente, *discontinua*. En el punto x_0 debemos de algún modo determinar nuestra función; convengamos que $F(x_0)$ es igual al largo del segmento que une A con x_0; debido a lo que el punto A se representa en la gráfica con negrillas, mientras que junto al punto Q viene trazada una flecha, la cual indica que Q no pertenece a la gráfica. Si el punto Q perteneciera a la gráfica, entonces la función f sería bivalente en el punto x_0.

Ahora añadamos el incremento Δx_0 a x_0 y determinemos el incremento respectivo de la función:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Si nosotros hacemos que Δx_0 tienda continuamente a cero, entonces, en este caso ya no se podrá decir que ΔF tenderá a cero. Para los Δx_0 negativos que tienden hacia cero, eso es cierto, pero para los positivos no es lo mismo: de la figura se ve, que si Δx_0 quedando positivo, tiende hacia cero, entonces, el correspondiente incremento ΔF, en este caso, tiende hacia un número positivo que es igual al largo del segmento AQ.

Después de dichos razonamientos, es natural, introducir la siguiente definición. *La función f prefijada en el segmento $[a, b]$ se llama continua en el punto x de este segmento, si su incremento en dicho punto, correspondiente al incremento Δx*[1]*, tiende a cero bajo cualquier modo de que Δx tienda hacia cero cuando $\Delta x > 0$ y $\Delta x < 0$.* Esta propiedad (de continuidad en x) puede ser expresada por medio de la relación (1) o también de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{2}$$

La anotación (2) se lee así: el límite de Δy es igual a cero cuando Δx tiende a cero siguiendo toda ley. Además, la expresión «siguiendo toda ley» se omite, considerando que se sobreentiende. En particular, Δx puede recorrer toda sucesión que tiende a cero, cuyos valores pueden ser tanto positivos, como negativos.

Si la función f definida en el segmento $[a, b]$ no es continua en el punto x de este segmento, es decir, en dicho punto no se cumple para esta función la condición (2) aunque tan sólo sea para un modo de que Δx tienda hacia cero, aquélla se denomina *función discontinua en el punto x*.

La función expuesta en la figura 16 es continua en todo punto x del segmento $[a, b]$; al mismo tiempo, la representada en la figura 17, evidentemente, es continua en todo el punto x del segmento $[a, b]$, a excepción del punto x_0, puesto que para el último la relación (2) no se cumple cuando $\Delta x_0 \to 0$, quedanuo positivo.

Una función continua en cualquier punto de un segmento se denomina *continua* en él.

La función continua expresa de manera matemática una propiedad, con la cual chocamos a menudo en la práctica, que consiste en lo siguiente: a un pequeño incremento de la

[1]) Aquí se toma en consideración tal Δx que $x + \Delta x$ pertenece a $[a, b]$.

variable independiente le corresponde un pequeño incremento de la variable (función) dependiente de la primera.

En calidad de excelentes ejemplos pueden servir las distintas leyes de movimiento de los cuerpos $s = f(t)$ que expresan las dependencias entre el camino (espacio) s recorrido por un cuerpo y el tiempo t. El tiempo y el espacio son continuos, además, una u otra ley de movimiento $s = f(t)$ establece entre ellos una relación continua determinada que se caracteriza por el hecho de que a un incremento pequeño del tiempo le corresponde un pequeño incremento del camino.

A la abstracción de la continuidad el hombre llegó observando los llamados medios continuos que lo rodean —sólidos, líquidos y gases—, por ejemplo los metales, el agua y el aire. En realidad, todo medio físico representa en sí una acumulación de un gran número de partículas separadas que se encuentran en movimiento. No obstante, dichas partículas y las distancias entre ellas son tan pequeñas, en comparación con los volúmenes de los medios, con los cuales nos vemos obligados a tratar en los fenómenos macroscópicos físicos, que muchos de dichos fenómenos se pueden estudiar bastante bien, si consideramos con aproximación que la masa examinada está continuamente distribuida, sin ningunos claros, en el espacio ocupado por ella. Esta suposición sirve de base para muchas disciplinas físicas, por ejemplo: la hidrodinámica, aerodinámica, teoría de elasticidad. El concepto matemático de la continuidad, como es natural, juega en estas disciplinas, lo mismo que en muchas otras, un importante papel.

De (1) se sigue que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + (f(x) - f(x_0))] =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] =$$
$$= f(x_0) + 0 = f(x_0),$$

hemos obtenido la igualdad

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{3}$$

que puede servir en calidad de otra definición equivalente de la continuidad de f en el punto x_0: *si la función f es continua en el punto x_0, entonces ella debe estar definida en el entorno de este punto, incluido el propio punto x_0, debe existir el límite de f en el punto x_0, y debe cumplirse la igualdad* (3).

La igualdad (3) puede ser escrita también de esta forma:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x). \tag{4}$$

Se dice que si la función f es continua en el punto x_0, el «límite de $f(x)$ para $x \to x_0$ es igual a f de lím x» o también dicen que los símbolos f y lím son conmutables.

1.4.2. Continuidad de las funciones elementales. En el § 1.2 se ha dado la enumeración de las funciones elementales y han sido representadas sus gráficas. Ellas son continuas en los campos de definición (intervalos o segmentos), lo que es necesario tomar en consideración para calcular los límites de dichas funciones. Por ejemplo, son válidas las igualdades:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n \quad (n = 1, 2, \ldots, -\infty < x_0 < \infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} x^p = x_0^p \quad (p \neq 0, 0 < x_0 < \infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \quad (a > 0, \ a \neq 1, \ -\infty < x_0 < \infty)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad (a > 0, \ a \neq 1, \ 0 < x_0 < \infty)$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty)$;

6) $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty)$;

7) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$

$$\left(x_0 \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right);$$

8) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen} x_0 \quad (-1 \leqslant x_0, x \leqslant 1)$;

9) $\lim\limits_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad (-1 \leqslant x_0, x \leqslant 1)$;

10) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty)$.

Ejemplo 1. Si $p \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}\cdot p} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^p = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^p = e^p.$$

Aquí la penúltima igualdad es válida en vigor de 2).

1.4.3. Continuidad de una función compuesta. Al calcular los límites de una función se debe tener en cuenta que si la función $x = \varphi(u)$ es continua en el punto u_0, y la función $f(x)$ es continua en el punto $x_0 = \varphi(u_0)$, entonces la función

$$F(u) = f[\varphi(u)]$$

es continua en el punto u_0. Puesto que

$$\lim_{u \to u_0} F(u) = \lim_{u \to u_0} f[\varphi(u)] = \lim_{x=\varphi(u) \to x_0} f[\varphi(u)] =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = F[\varphi(u_0)]. \qquad (5)$$

Ejemplo 1. La función $y = \operatorname{sen} x^3$ se puede anotar por medio de dos funciones continuas $y = \operatorname{sen} u$, $u = x^3$, debido a lo cual aquélla también es continua para todos x.

Ejemplo 2. La función $y = e^{2x}$ se puede anotar mediante dos funciones continuas $y = e^u$, $u = 2x$, por lo tanto, dicha función es continua para todos x.

Ejemplo 3. La función

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

se puede anotar en forma de una cadena de funciones

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1 - v, \quad v = x^2.$$

La primera de estas tres funciones es continua para $u \geqslant 0$, la segunda, continua para todos v, y la tercera, continua para todo x. Este hecho muestra que la función inicial es continua sólo para aquellos x, para los cuales $1 - x^2 \geqslant 0$, es decir, para los x que satisfacen las desigualdades $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Problema 1. Determinar para cuáles x son continuas las funciones e^{x^2}, $\cos^2 x$, $\cos 3x$, $\ln(1 + x)$, 10^{x+1}, $\operatorname{tg} 2x$, $x^2 + 2x - 1$, $\frac{x+3}{x-1}$.

Las funciones continuas forman la clase fundamental de funciones con las que se opera en el análisis matemático.

1.4.4. Funciones discontinuas. En la matemática las funciones discontinuas expresan los procesos a saltos (irregulares) con los que tropezamos en la naturaleza. En el caso de un golpe, por ejemplo, el valor de la velocidad de un cuerpo varía a saltos. Muchas transformaciones cualitativas van acompañadas de saltos. Por ejemplo, la razón $Q = f(t)$ entre la temperatura t de un gramo de agua (hielo) y la cantidad Q de calorías que hay en dicha agua, cuando t varía entre -10 °C y $+10$ °C, si adoptamos convencionalmente que para -10 °C la magnitud de $Q = 0$, se expresa mediante las siguientes fórmulas:

$$f(t)=\begin{cases}0{,}5t+5, & -10\leqslant t<0,\\ t+85\ \text{[1]}, & 0<t<10.\end{cases}$$

Consideramos que la capacidad calorífica del hielo es igual a 0,5. Siendo $t=0$, dicha función resulta ser indeterminada multiforme (multívoca); se puede convenir para comodidad

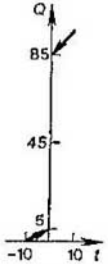


Fig. 18.

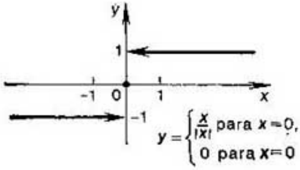


Fig. 19.

que cuanto $t=0$, dicha función toma un valor definido por completo, por ejemplo, $f(0)=45$. La función $Q=f(t)$, evidentemente, es discontinua cuanto $t=0$, está expuesta en la fig. 18.

En las figs. 6, 18, 12, 19 vienen representadas las gráficas de algunas funciones que tienen discontinuidades en ciertos puntos. La flecha muestra que en el respectivo lugar, en la gráfica, no hay punto.

La fig. 6 muestra la gráfica de la función $y=\operatorname{tg} x$, la cual es continua en todos los puntos x, a excepción del punto $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. Por ejemplo, vemos que cuando x tiende hacia $\pi/2$ creciendo, entonces $\operatorname{tg} x\to$ $\to+\infty$; pero si x tiende hacia $\pi/2$ decreciendo, entonces, $\operatorname{tg} x\to-\infty$ (véase el punto 1.3.5, (7) y (7')).

Explíquemos la fig. 19. Para $x>0$

$$\frac{x}{|x|}=\frac{x}{x}=1.$$

[1]) El calor específico de derretimiento del hielo es igual a 80 calorías para 0 °C.

Si $x<0$

$$\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-1.$$

Para $x=0$ la fórmula $x/|x|$ no tiene sentido. Pero debe tener lugar para $x=0$, $y=0$. Para comodidad, designemos dicha función por medio de $f(x)$. La última es continua en todo punto $x\neq 0$. Además

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1=1, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-1)=-1$$

y $f(0)=0$. No obstante, en este caso la función f en el punto $x=0$ es discontinua. Existen los límites derecho e izquierdo en este punto, pero el límite no existe.

En la fig. 12 está representada la gráfica de la función $f(x)=(\operatorname{sen} x)/x$. Dicha función está definida y es continua para todos $x\neq 0$. La continuidad se desprende del hecho de que las funciones $y=\operatorname{sen} x$ e $y=x$ por separado son continuas, por lo tanto, su cociente también es una función continua para aquellos x con los cuales el denominador no es igual a cero, o sea, para todos x a excepción de $x=0$.

De la gráfica se ve, además lo hemos apoyado más arriba con cálculos, que

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

Poniendo $f(0)=1$ obtendremos que la función $f(x)$ estará determinada y será continua para todos x, incluido el valor $x=0$.

Prestemos atención a la gráfica de la función $y=\operatorname{sen}(1/x)$ representada en la fig. 14. Dicha función no está determinada para $x=0$ y sus límites (derecho e izquierdo) en el punto $x=0$ no existen. Por lo tanto, la función $\operatorname{sen}(1/x)$ tendrá una discontinuidad en el punto $x=0$, aunque recurramos a determinaciones complementarias en este punto.

A menudo se encuentran funciones $f(x)$ continuas en cierto intervalo a excepción de algunos puntos x_0, donde

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

Se dice que en dichos puntos la función f tiene *una discontinuidad infinita*. Por ejemplo, la función

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)}$$

es continua entre $(-\infty, \infty)$, excepto los puntos $x = 2$, $x = -3$, donde tiene una discontinuidad infinita:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)} = \infty, \quad \lim_{x\to -3} \frac{x^2+1}{(x-2)(x+3)} = \infty.$$

Problema 2. ¿En qué puntos tienen la discontinuidad infinita las funciones

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{x+1}{x^2-3x+2}, \quad \frac{x^2+x+2}{x-3}, \quad \frac{x-2}{x+5}?$$

Tarea. Se precisa conocer las dos definiciones de la discontinuidad de las funciones $f(x)$ en el punto x_0: 1) en el lenguaje de incrementos (si $\Delta x \to 0$, entonces $\Delta y \to 0$) y 2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Se necesita conocer también que si la función $f(x)$ es continua en cualquier punto de un intervalo (segmento), su gráfica es continua en este intervalo (segmento) y viceversa, la discontinuidad de la gráfica de $f(x)$ en un intervalo (segmento) proporciona la discontinuidad de $f(x)$ en todos sus puntos.

Presten atención a la lista de las principales funciones elementales, en la cual se exponen los intervalos de su continuidad. Es también importante prestar atención a la fórmula (5) del punto 1.4.3 que expresa la continuidad de la función compuesta.

§ 1.5. DERIVADA

El concepto de la derivada surgió como resultado de intentos (esfuerzos) multiseculares, encaminados a resolver tales problemas como el problema de trazar la tangente a una curva, o sobre el cálculo de la velocidad de movimiento irregular. De semejantes problemas y del problema sobre el cálculo del área de una figura curvilínea se ocuparon los matemáticos desde los tiempos antiguos. En el siglo XVII en las obras de Newton y Leibniz dicha actividad obtuvo una determinada conclusión teórica. Newton y Leibniz[1]) crearon los métodos generales de diferenciación e integración de las funciones y demostraron un teorema muy importante, que lleva sus nombres, estableciendo una estrecha relación entre las operaciones de diferenciación y las de integración.

[1]) *Newton* (1643—1727), ilustre físico y matemático inglés. *G. W. Leibniz* (1646—1716), científico alemán, gran matemático.

Sin embargo, conviene tener en cuenta, que la exposición contemporánea de dichos problemas en mucho difiere de su exposición en los tiempos de Newton y Leibniz. En los razonamientos y conceptos, con los cuales operaban en aquellos tiempos, partiendo de nuestro punto de vista, se pueden encontrar muchos aspectos con falta de claridad; incluso los mismos matemáticos de aquella época reconocían lo dicho, lo que se corrobora por las discusiones exasperadas que tenían lugar acerca de estos problemas.

El análisis matemático moderno se basa en el concepto del límite que se cristalizó en la formulación exacta no hace mucho, a saber, en la primera mitad del siglo pasado. En este caso gran mérito pertenece al matemático francés Cauchy [1]).

El concepto de límite se utiliza esencialmente para definir las nociones de continuidad de las funciones, derivada, integral.

1.5.1. Velocidad instantánea. Supongamos que un punto se mueve por una recta y la función $s = f(t)$ expresa la dependencia entre el tiempo t $(a < t < b)$ y su distancia (teniendo en cuenta el signo) hasta el punto inicial O de dicha recta. En el instante t el punto se encuentra a una distancia $s = f(t)$ desde O. En otro instante $t + \Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$ este punto se encontrará a una distancia $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ desde O. Su velocidad media en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ es igual a

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

La velocidad instantánea, o verdadera, v del punto en el momento de tiempo t es de modo natural de definirla como un límite hacia el cual tiende v_{med} cuando $\Delta t \to 0$, o sea,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ejemplo. Es sabido que un cuerpo, que se encuentra en caída libre, bajo la acción de la fuerza de atracción de la Tierra, se mueve en el vacío según la ley

$$s = g\frac{t^2}{2},$$

[1]) *A. L. Cauchy* (1789—1857), matemático francés. En sus obras por primera vez fueron definidos los conceptos del análisis matemático (límite, continuidad, integral, ...) de la forma como éstos se formulan en la matemática contemporánea.

suponiendo que el camino se determina a partir del instante $t = 0$, cuando la velocidad del cuerpo es igual a cero.

La velocidad instantánea del cuerpo en el momento de tiempo t ($t > 0$) es igual a

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} 2t = gt,$$

y hemos obtenido la fórmula conocida para la velocidad del movimiento uniformemente acelerado:

$$v = gt.$$

Problema 1. Calcúlese la velocidad instantánea en el instante t de un punto que se mueve según la ley:

a) $s = 2t + 4$; b) $s = t^3$.

1.5.2. Tangente a una curva y la intensidad de la corriente. Examinemos cualquier curva continua Γ en un plano

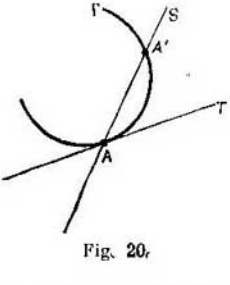


Fig. 20.

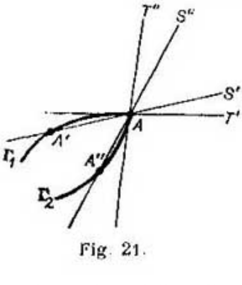
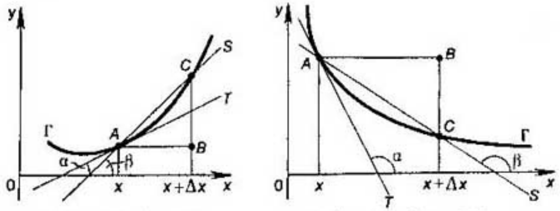


Fig. 21.

o espacio (fig. 20). Supongamos que A es un punto que se encuentra en dicha curva y A' es otro punto dispuesto también en Γ. La recta S que pasa a través de A y A' la denominaremos *secante* (de la curva Γ). Ahora comencemos a desplazar el punto A' por Γ continua e indefinidamente aproximándolo a A. En este caso la secante S girará respecto de A. Puede ocurrir que en esto S tenderá a ocupar en el límite la posición de una recta determinada por completo (que pasa, evidentemente, por A) y que designaremos mediante T. Si esto tiene lugar, se dice que la curva Γ

posee en el punto A *la tangente*. Precisamente, la recta T se llama *tangente* a Γ en el punto A.

No toda curva continua en cualquier punto suyo tiene tangente. En calidad de un ejemplo trivial puede servir la curva representada en la fig. 21. Esta curva consta de dos trozos suaves Γ_1 y Γ_2 unidos entre sí en el punto A «formando un ángulo». En la figura vienen marcados otros dos puntos



a) $\Delta x = AB$, $\Delta y = BC$ b) $\Delta x = AB$, $\Delta y = -BC$

Fig. 22.

A', A'' que se encuentran, respectivamente, en Γ_1, Γ_2; las secantes que pasan por A', A'' y A se designan con S' y S''.

Es patente que si A', A'' moviéndose respectivamente por Γ_1, Γ_2, van aproximándose hacia A, entonces las secantes S', S'' tenderán a ocupar en el límite las posiciones de dos diferentes rectas T' y T''. Por lo tanto, la curva examinada no tiene tangente en el punto A. Claro está que podrá decirse, desarrollando la definición introducida, que nuestra curva tiene en el punto A dos tangentes unilaterales, sin embargo, ahora no trataremos de esto.

Ahora suponemos que la curva Γ es la gráfica de una función $y = f(x)$ (fig. 22, *a* o *b*) continua en el intervalo (a, b).

Prefijemos sobre Γ un punto A que tiene la abscisa x y la ordenada y, y otro punto C que tiene la abscisa $x + \Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$ y la respectiva ordenada $y + \Delta y$. La secante S que pasa por A y C, evidentemente, forma con la dirección positiva del eje x un ángulo β, cuya tangente es igual a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Para el caso de la fig. 22, *a*, $0 < \beta < \pi/2$, y para el caso de la fig. 22, *b* $\pi/2 < \beta < \pi$. Hagamos que Δx tienda hacia cero; entonces, debido a la continuidad de f, también tenderá hacia cero Δy, por lo tanto, el punto C desplazándose por Γ, tenderá hacia el punto A. Si resulta (esto puede también no tener lugar) que en dicho caso la relación $\Delta y/\Delta x$ tiende, para todo modo de tendencia de Δx hacia cero, a un mismo límite finito (número) k:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \quad (\Delta x \to 0),$$

entonces también el ángulo β tenderá hacia cierto ángulo distinto de $\pi/2$. Junto con β la secante S también, girando alrededor del punto A, tenderá a ocupar como límite la posición de la recta T que pasa por A bajo el ángulo α respecto a la dirección positiva del eje x. En este caso T es la tangente a la curva Γ en el punto A y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

(Para la fig. 22, *a* $0 < \alpha < \pi/2$ y para la fig. 22, *b*, $\pi/2 < \alpha < \pi$). Hemos demostrado que, *si la relación* $\Delta y/\Delta x$ *para* $\Delta x \to 0$ *tiende a un límite finito, entonces la curva tiene en el punto* A *una tangente, cuyo ángulo con la dirección positiva del eje* x *es igual a dicho límite.*

Problema 2. Dibújese en el sistema de coordenadas rectangulares la parábola $y = x^2$ y la tangente a dicha parábola en el punto que tiene la abscisa $x = 1$. Hállese el coeficiente angular de esta tangente, formado con la dirección positiva del eje x.

Intensidad de la corriente. Admitamos que se conoce la función $Q = f(t)$ que expresa la cantidad de electricidad que ha pasado por la sección fijada de un conductor durante el tiempo t. En el período de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$ a través de la sección pasa la cantidad de electricidad $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. La intensidad media de la corriente, en este caso, es igual a

$$I_{\text{med}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

El límite de esta razón para $\Delta t \to 0$ da la intensidad de la corriente en el instante t:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

1.5.3. Derivada. Todos los tres problemas examinados, a pesar de que pertenecen a distintas ramas de los conocimientos humanos: a la mecánica, la geometría y la teoría de electricidad, condujeron a una misma operación matemática que es necesario efectuar sobre una función. Hay que encontrar el límite de la relación entre el incremento de la función y el incremento correspondiente del argumento, cuando este último incremento tiende a cero. Podríamos aumentar tanto como se quiera el número de problemas cuya solución se reduce a semejante operación. A dicha operación se reducen los problemas que tratan la velocidad de una reacción química, la densidad de una masa irregularmente distribuida, etc.

Es natural que esta operación ha obtenido en matemáticas una denominación especial. Esta operación se llama *diferenciación de una función*. El resultado de la última se denomina *derivada*.

Así pues, *la derivada de la función f dada en cierto intervalo (a, b), en el punto x de dicho intervalo, se llama el límite hacia el cual tiende la relación del incremento de la función f en dicho punto al respectivo incremento del argumento, cuando este último incremento tiende a cero*. La derivada se designa del modo siguiente [1]):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Sin embargo, se emplean con profusión también otras designaciones: y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$. Los resultados de los ejemplos examinados se pueden exponer de la siguiente forma:

La velocidad del punto, cuyo camino recorrido s es la función $s = f(t)$ del tiempo t, es igual a la derivada de esta función $s' = f'(t)$.

La pendiente α entre la tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto que tiene la abscisa x y la dirección positiva del eje x, es igual a la derivada $f'(x)$.

La intensidad de la corriente I en un conductor en el instante t, si la función $Q = f(t)$ expresa la cantidad de electricidad

---

[1]) El límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x)$, donde se examinan sólo $\Delta x > 0$ o sólo $\Delta x < 0$, se denomina respectivamente derivada *a la derecha* o *a la izquierda* de la f en el punto x. Acerca de la función f representada en el segmento $[a, b]$ se dice que es derivable en este intervalo, si posee derivada en todos los puntos del intervalo (a, b), y además, derivada a la derecha en el punto a y a la izquierda, en el punto b.

que ha pasado durante el tiempo t a través de la sección de aquél, es igual a la derivada $I = Q' = f'(t)$.

1.5.4. Continuidad de una función que tiene derivada. *Si la función f tiene en el punto x derivada, o sea, para la primera la relación $\Delta y/\Delta x$ tiende a un número finito $f'(x)$, cuando $\Delta x \to 0$:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x) \quad (\Delta x \to 0), \tag{1}$$

entonces esta función es necesariamente continua en este punto.

En efecto, de (1) se sigue que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \tag{2}$$

donde

$$\alpha(\Delta x) \to 0, \quad \Delta x \to 0.$$

Entonces el incremento Δy de nuestra función puede anotarse en forma de la suma

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$$

de dos sumandos, cada uno de los cuales tiende a cero para $\Delta x \to 0$.

Por consiguiente

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

es decir, la función f es continua en el punto x.

La afirmación inversa no siempre es justa. Si la función f es continua en el punto x, ella puede, al mismo tiempo, no tener derivada en dicho punto. Por ejemplo, la función

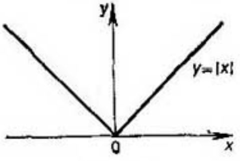


Fig. 23.

$$y = |x| \quad (-\infty < x < \infty),$$

como se ve de su gráfica (fig. 23), es continua para todos x, pero en el punto $x = 0$ no tiene derivada. En este punto no existe la tangente a la gráfica. Hay tangente a la derecha y a la izquierda, sin embargo éstas no coinciden.

Se llama *coeficiente angular* de una recta la pendiente (tangente de inclinación) entre esta recta y la dirección positiva del eje x. Las rectas S y T en la fig. 22, *a* forman ángulos agudos β, α con la dirección positiva del eje x, mientras que en la fig. 22, b, ángulos obtusos.

Problema 3. Hállense los coeficientes angulares de las tangentes a las curvas (las ecuaciones de las cuales están dadas a continuación) en los puntos prefijados x_0:

a) $y = x^2$, $x_0 = 1$;

b) $y = x^3$, $x_0 = 1$;

c) $y = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$.

Problema 4. Calcúlese $f'(0)$, si $f(x) = \sqrt{1+x}$ o $f(x) = 1/(1+x)$.

Tarea. Conviene familiarizarse con la definición de la derivada y entender bien su sentido geométrico y mecánico.

1.5.5. Fórmulas de diferenciación. Para todo n natural es válida la fórmula

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{3}$$

En realidad, considerando $\Delta x = h$, en virtud del binomio de Newton tendremos (véase más adelante el punto 4.1.2)

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n\right) =$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\lim_{h\to 0} h + \ldots (\lim_{h\to 0} h)^{n-1} = nx^{n-1},$$

donde hemos aprovechado las propiedades elementales de los límites.

De hecho la fórmula (3) es válida para todo n, positivo y negativo, no obligatoriamente natural, lo que se demostrará más abajo.

Son válidas también las fórmulas:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \tag{4}$$

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x. \tag{5}$$

Demostremos la igualdad (4), dejando la demostración de (5) al lector

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2}\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Hemos aprovechado la propiedad de $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$ y el hecho de que la función $\cos x$ es continua.

La derivada de la función $f(x)$ es a su vez la función $f'(x)$. Si la derivada de $f'(x)$ existe, ésta se llama *segunda derivada* de $f'(x)$ y se designa así: $f''(x)$.

De forma similar se definen *las derivadas sucesivas* (o *de orden superior*) $f^{(n)}(x)$ de $f(x)$ de orden n, donde n es cualquier número natural.

La segunda derivada de la función $s = f(t)$, que expresa la ley de movimiento del punto por una recta, es igual, evidentemente, a la aceleración de dicho punto en el instante t.

Ya de lo dicho se infiere que el concepto de la derivada tiene una inmensa importancia para los problemas aplicados, pero también es fundamental para la propia matemática.

Subrayamos que ***el número constante** C* que se considera como una función de x, *tiene una derivada igual a cero idénticamente* (es decir, igual a cero para todos x). En efecto,

$$f(x) = C, \quad f(x+\Delta x) = C, \quad C' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{C-C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0. \qquad (6)$$

Cabe señalar además que si las funciones $u(x)$ y $v(x)$ tienen en cierto punto x una derivada y A, B son números constantes, entonces la función

$$f(x) = Au(x) + Bv(x) \qquad (7)$$

también posee una derivada igual a

$$f'(x) = Au'(x) + Bv'(x). \qquad (8)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{Au(x+h)+Bv(x+h)-[Au(x)+Bv(x)]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left(A\,\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \left(B\,\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right) = \\
&= A \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + B \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \\
&\qquad\qquad = Au'(x) + Bv'(x). \qquad (9)
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad en esta cadena de igualdades hemos aprovechado el hecho de que el límite de la suma es igual a la suma de los límites, y en la tercera igualdad, que es correcto sacar del signo del límite la constante.

Por inducción se puede demostrar una afirmación más general [1]):

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j(x)\right)' = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j'(x),$$

donde a_j son números constantes, mientras que respecto a las funciones $u_j(x)$ suponemos que tienen derivadas.

En particular, obtendremos la derivada del polinomio:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

(a_k son constantes).

Problema 5. Deducir la fórmula (5).

Problema 6. Calcular las derivadas de las funciones:

$x^2 - 3x + 1$, $x^3 + 6x - x + 7$, $2\cos x - 3\operatorname{sen} x + x - 2$, $5\operatorname{sen} x + 4\cos x - x^2 + 7$.

Tarea. Reténganse en la memoria las fórmulas de las derivadas de x^n, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

1.5.6. Derivada de una función exponencial. La derivada de a^x se calcula mediante la fórmula

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1). \tag{10}$$

En particular,

$$(e^x)' = e^x. \tag{11}$$

Realmente

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} =$$

$$= a^x \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log_a (1+z)} = a^x \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0} \log_a (1+z)^{1/z}} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

Aquí hemos aprovechado la sustitución $a^h - 1 = z \to 0$ $(h \to 0)$, de donde $h = \log_a (1+z)$. Hay que tomar en

[1]) Es preciso tener en cuenta la designación:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{1}^{n} \alpha_j.$$

consideración que la función $\log_a u$ para $u > 0$, en particular, para $u = e$, es continua ($\log_a u \underset{u \to e}{\to} \log_a e$).

1.5.7. Derivada de una función logarítmica. La derivada de $\log_a x$ se calcula por medio de la fórmula

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \tag{12}$$

En particular,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{13}$$

En efecto,

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} = \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+z)^{1/z} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

1.5.8. Derivada del producto y del cociente. Si las funciones $u(x)$ y $v(x)$ poseen derivadas en el punto x, entonces sus producto y cociente (siendo $v(x) \neq 0$) tienen derivadas y son válidas las igualdades

$$(uv)' = uv' + u'v, \tag{14}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \tag{15}$$

Añadamos a la variable independiente x el incremento Δx. Supongamos que los incrementos respectivos de las funciones u y v serán Δu y Δv. Entonces

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta (uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta u) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = uv' + vu',$$

porque, debido a que v tiene derivada, se deduce que ella es continua, es decir, $\Delta v \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

En particular, si C es una constante, entonces

$$(Cu)' = Cu' + C'u = Cu', \tag{16}$$

ya que $C' = 0$.

Luego,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

1.5.9. Derivada de $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\operatorname{sen} x)' - \operatorname{sen} x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$(\cos x\neq 0), \qquad (17)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{\operatorname{sen} x\,(\cos x)' - \cos x\,(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x \quad (\operatorname{sen} x\neq 0). \qquad (18)$$

1.5.10. Problemas. *Problema 7.* Demostrar que

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x\neq 0);$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ x\neq 0).$$

Lo último muestra que la fórmula (3) es válida también para los n enteros negativos. Más adelante veremos que dicha fórmula es válida también para n no enteros.

Problema 8. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$\frac{x}{x-1},\quad \frac{x-1}{x+1},\quad \frac{x^2-1}{x^2+1},\quad \frac{x^2+2x-1}{x},\quad 2\operatorname{sen} x\cos x,$$

$$2e^x+3\ln x-5,\quad \sec x,\ e^x\operatorname{sen} x,\quad e^x\cos x,\quad xe^x,$$

$$x^2e^x,\ \frac{e^x}{x},\ \frac{\operatorname{sen} x}{x},\ x\ln x,\quad x^2\ln x.$$

1.5.11. Derivada de una función compuesta. Supongamos que

$$y=f(x)=\varphi\,[\psi\,(x)]$$

es una función compuesta prefijada en cierto intervalo. Al mismo tiempo es conocido que las funciones

$$y = \varphi(u), \quad u = \psi(x)$$

tienen derivadas. En este caso la función $y = f(x)$ también posee una derivada que se calcula por la fórmula

$$y'_x = y'_u u'_x, \tag{19}$$

donde y'_x es la derivada de y respecto a x ($y'_x = f'(x)$), mientras que y'_u es la derivada de y respecto a u ($y'_u = \varphi'(u)$), o

$$f'(x) = \varphi'(u)\,\psi'(x). \tag{19'}$$

Para demostrar (19), fijemos x y añadámosle un incremento arbitrario $\Delta x \neq 0$. Entonces también $u = \psi(x)$ obtendrá el correspondiente incremento Δu, mientras que y ($y = \varphi(u)$) obtendrá a su vez un determinado incremento Δy.

Para la condición de que $\Delta u \neq 0$, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\Delta u \neq 0). \tag{20}$$

Si en esta igualdad pasamos al límite, siendo $\Delta x \to 0$, entonces obtendremos

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x,$$

es decir, la fórmula (19).

Es necesario tomar en consideración que, puesto que la función $u = \psi(x)$ tiene, según la condición, derivada, entonces $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Observación. Hemos supuesto en la igualdad (20) que a cada $\Delta x \neq 0$, suficientemente pequeño, le corresponde $\Delta u \neq 0$. Si sucede que $\Delta u = 0$ para cierto Δx, entonces no se podrá ya dividir y multiplicar por Δu, y hay que demostrar la fórmula (19) mediante otro procedimiento. Lo dicho se puede realizar, sin embargo, no damos la respectiva demostración con tanta mayor razón que este caso se encuentra raramente.

Ejemplo 1. $y = e^{2x}$. Suponemos que $y = e^u$, $u = 2x$; por lo tanto

$$y'_x = (e^u)'_u\,(2x)'_x = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Ejemplo 2. $y = e^{x^2}$. Suponemos que $y = e^u$, $u = x^2$, por lo tanto

$$y'_x = (e^u)'_u (x^2)'_x = e^u 2x = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Ejemplo 3. $y = \operatorname{sen}(kx + b)$. Suponemos que $y = \operatorname{sen} u$, $u = kx + b$; por consiguiente

$$y'_x = (\operatorname{sen} u)'_u (kx + b)'_x = (\cos u) k = k \cos (kx + b).$$

Ejemplo 4. $y = x^a = e^{a \ln x}$ $(x > 0,\ a \neq 0)$. Suponemos que $y = e^u$, $u = a \ln x$; por lo tanto

$$y'_x = (e^u)' (a \ln x)' = e^u \frac{a}{x} = \frac{ae^{a \ln x}}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Hemos obtenido la fórmula

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

que es válida para todo $a \neq 0$, siendo éste no obligatoriamente entero. De ese modo, por ejemplo,

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Ejemplo 5. $y = \operatorname{sen}^3 x^2$. Suponemos que $y = u^3$, $u = \operatorname{sen} z$, $z = x^2$. Por consiguiente

$$y'_x = y'_u u'_x = y'_u u'_z z'_x = 3u^2 \cos z \cdot 2x =$$
$$= 6x \operatorname{sen}^2 z \cos z = 6x \operatorname{sen}^2 x^2 \cos x^2.$$

Problema 9. Calcular las derivadas de las funciones:

1) e^{-x^2}; 2) e^{-x}; 3) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

4) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; 5) $\cos(kx + b)$; 6) $\operatorname{sen}^3 x$;

7) $\operatorname{sen}^3 2x$; 8) $\sqrt{x+1}$; 9) $\sqrt{x^2 + x}$;

10) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; 11) $\ln(2x - 3)$; 12) $\sqrt[3]{x^2 - 1}$;

13) e^{3x-5}; 14) $\sqrt{a^2 + x^2}$; 15) $\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

1.5.12. Derivada de la función inversa. Examinemos la función $y = f(x)$ continua y creciente en el segmento $[a, b]$. Lo último significa que al mayor valor de x en el segmento $[a, b]$ le corresponde el mayor valor de y (fig. 24).

Sea $c = f(a)$, $d = f(b)$. En la fig. 24 se ve que a cada valor de y del segmento $[c, d]$ le corresponde tan sólo un valor de x del segmento $[a, b]$, tal que $y = f(x)$. Con esto, hemos prefijado en el segmento $[c, d]$ una función $x = \varphi(y)$ determinada por completo que se llama *función inversa* con respecto a la función $y = f(x)$. En la fig. 24 se ve que la función $\varphi(y)$ es continua.

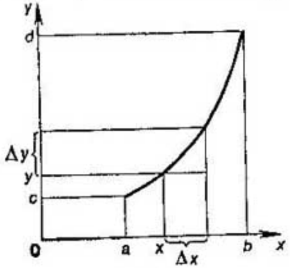


Fig. 24.

Puesto que la función $f(x)$ crece y es continua, entonces para $\Delta x \neq 0$ y $\Delta x \to 0$ resultará que $\Delta y \neq 0$ y $\Delta y \to 0$, y por lo tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x/\Delta y},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta x/\Delta y}.$$

Hemos obtenido la fórmula para la derivada de la función inversa

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad (x'_y \neq 0); \tag{21}$$

la cual será válida si existe la derivada $x'_y \neq 0$.

Derivada arcsen x. Supongamos que

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad (-1 < x < 1). \tag{22}$$

Esto es una función continua, estrictamente creciente en el intervalo $(-1, +1)$. Su función inversa, también continua y estrictamente creciente, es

$$x = \operatorname{sen} y \quad (-\pi/2 < y < \pi/2).$$

En virtud de la fórmula (21),

$$(\operatorname{arcsen} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1). \tag{23}$$

En el caso dado, $-\pi/2 < y < \pi/2$, por eso $\cos y > 0$ y ante la raíz debe encontrarse el signo $+$.

Para $x = \pm 1$ el segundo miembro de (23) se convierte en ∞. La tangente a la curva (22) en dichos puntos es paralela al eje y.

Problema 10. Mediante la fórmula (21) demostrar las igualdades:

1) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$;

2) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$;

3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (tomar en consideración que $(e^x)' = e^x$, $x > 0$);

4) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$\ln(2x)$, $\ln(ax)$, $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ $(a > 0)$, $\operatorname{arcsen} x + \arccos x$.

Tarea. Reténganse en la memoria las fórmulas de las derivadas de la suma, de la diferencia, del producto y las fórmulas de las derivadas de las funciones elementales principales: x^n, a^x, $\ln x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$, y también la fórmula de la derivada de una función compuesta. Esto les ofrecerá la posibilidad de calcular la derivada de cualquiera función elemental. Toda la dificultad aquí se reduce a saber representar cada función elemental dada en forma de una cadena de las funciones elementales principales.

§ 1.6. MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN

En la fig. 25 está representada una función continua $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, la cual supondremos que es continuamente diferenciable, es decir, tiene una derivada continua en $[a, b]$.

En el segmento $[a, b]$ hay dos puntos notables x_0 y b. Precisamente la ordenada $f(x_0)$ correspondiente al punto x_0 es la mayor entre las ordenadas $f(x)$ correspondientes a cualesquier puntos x del segmento $[a, b]$, mientras que la ordenada $f(b)$ es la menor entre las indicadas $f(x)$.

Introduzcamos algunas definiciones. El punto x_0 del segmento $[a, b]$ se llama *punto del máximo de una función f en este segmento*, si $f(x_0)$ es el mayor valor entre los de $f(x)$ correspondientes a todos x de $[a, b]$:

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

(véase la fig. 25). El punto x_1 del segmento $[a, b]$ se llama *punto del mínimo de una función f en este segmento*, si $f(x_1)$

es el menor valor entre los de $f(x)$ correspondientes a todos x de $[a, b]$:

$$f(x_1) \leqslant f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

El punto del máximo o del mínimo de f en el segmento $[a, b]$ se denomina *punto del extremo* (*extremum*) en $[a, b]$.

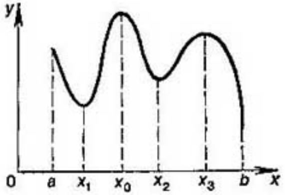


Fig. 25.

De modo análogo se definen los puntos del extremo (máximo o mínimo) en el intervalo (a, b), o sea, en el conjunto de puntos x del eje x, para los cuales $a < x < b$.

Introduzcamos más definiciones.

Se llama *entorno del punto* x_0 (del eje x) todo intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (del eje x) con el centro en este punto $(\delta > 0)$.

Se llama *entorno izquierdo del punto* x_0 el conjunto de puntos x que satisfacen las condiciones $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$.

Se llama *entorno derecho* del punto x_0 el conjunto de puntos x que satisfacen las condiciones $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$.

En la fig. 25, además del punto x_0 están marcados tres puntos notables más: x_1, x_2, x_3. El punto x_3 no es el punto del máximo en $[a, b]$. Sin embargo, se puede indicar su entorno $(x_3 - \delta, x_3 + \delta)$ tan pequeño que en éste x_3 resulta ser el punto del máximo. Dicho punto se denomina punto *del máximo local* de la función f.

Así, el punto x_0 del segmento $[a, b]$ se denomina *punto del máximo local* de la función f, si existe su entorno perteneciente al segmento $[a, b]$, en el cual x_0 es el punto del máximo.

Respectivamente, el punto x_0 del segmento $[a, b]$ se llama *punto del mínimo local* de f, si existe su entorno, que pertenece al segmento $[a, b]$ en el cual x_0 es el punto del mínimo.

Prestemos atención (véase la fig. 25) a que x_1 y x_2 son los puntos del mínimo local de f, mientras que x_0, x_3 son los puntos del máximo local de f. Además, x_0 es el punto del máximo en el segmento $[a, b]$.

Los puntos del máximo y del mínimo local de f se denominan *puntos del extremo local de* f.

En los puntos del extremo local de f, evidentemente, *la derivada de f es igual a cero* [1]. Para el caso de la fig. 25,

$$f'(x_0) = 0,\ f'(x_1) = 0,\ f'(x_2) = 0,\ f'(x_3) = 0.$$

Al mismo tiempo conviene tener en cuenta que la afirmación inversa no siempre es correcta. Si la derivada de f en cierto punto x_0 es igual a cero ($f'(x_0) = 0$), x_0 puede no ser el punto del extremo local de f (véase más abajo el ejemplo 1).

Demos la demostración formal del hecho de que *si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, que es el punto del extremo local de f, entonces la derivada de f en dicho punto es igual a cero.*

En efecto, supongamos para mayor precisión que f tiene en x_0 un máximo local. Entonces se cumple la desigualdad $f(x) \leqslant f(x_0)$ para los puntos x, lo suficiente próximos a x_0, independientemente de que x sea mayor o menor que x_0. Por consiguiente, para los puntos x, suficientemente próximos, a x_0

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0, \quad \text{si } x-x_0 > 0, \tag{1}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0, \quad \text{si } x-x_0 < 0. \tag{2}$$

Según la condición, la función f tiene una derivada en el punto x_0 y por lo tanto existe el límite

$$\lim_{x-x_0\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Sin embargo, dicho límite debe ser siempre un mismo número cuando la diferencia $x - x_0$ tiende a cero quedando o positiva o negativa. De (1) se deduce que $f'(x_0) \leqslant 0$, mientras que de (2) se desprende que $f'(x_0) \geqslant 0$, lo que es posible sólo cuando $f'(x_0) = 0$.

Ejemplo 1. La función (fig. 26) $f(x) = x^3$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ no tiene extremos locales en el segmento $[-1, +1]$, pero su derivada $f'(x) = 3x^2$ en el punto $x = 0$ es igual a cero ($f'(0) = 0$).

Lo expuesto nos ayudará a indicar el camino siguiendo el cual se puede encontrar el máximo y el mínimo (extremos) de una función en un segmento.

Sea que se necesita hallar los extremos de una función f en el segmento $[a, b]$, donde ésta es continua y tiene una

---

[1] Se podría decir que la función f tiene el máximo local derecho en el punto x_0, si $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todos x que pertenecen a cierto entorno derecho x_0 $(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta)$, lo que, por ejemplo, tiene lugar para la gráfica en la fig. 25, siendo $x_0 = a$. Sin embargo, la derivada $f'(x_0)$ en tal punto no es obligatoriamente igual a cero.

derivada continua. Encontramos la derivada $f'(x)$; igualamos la última a cero: $f'(x) = 0$; hallamos todas las raíces de la ecuación obtenida que pertenecen a (a, b), considerando que su número es finito

$$x_1, x_2, \ldots, x_N;$$

calculamos los números

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_N), f(b) \qquad (3)$$

y entre ellos eligimos el mayor y el menor que designamos, respectivamente, por medio de M y m.

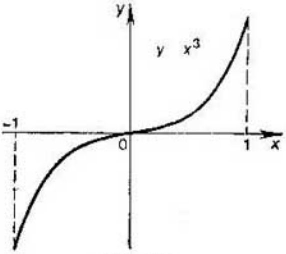


Fig. 26.

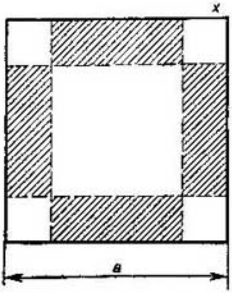


Fig. 27.

Aquel punto entre los puntos $a, x_1, x_2, \ldots, x_N, b$, para el cual los valores de (3) alcanzan el máximo, es precisamente el punto del máximo de f en $[a, b]$; designemos dicho punto con x_0.

El mismo punto, para el cual los valores de (3) alcanzan al mínimo, es el punto del mínimo de f sobre $[a, b]$; designemos este punto con x_0. Así,

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_0) = M,$$

$$\min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_0') = m.$$

Observación 1. Si en el segmento $[a, b]$ no existen en absoluto raíces de la ecuación $f'(x) = 0$, entonces M es el número máximo, y m es el mínimo entre los números $f(a)$ y $f(b)$.

Observación 2. Sucede que se necesita hallar un extremo en el intervalo (a, b), donde puede resultar que $a = -\infty$, y $b = +\infty$. En este caso, el papel de los números $f(a)$ y $f(b)$ lo jugarán los límites

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$$

y $M = \max\limits_{a<x<b} f(x)$, si $M > f(a)$ y $M > f(b)$. De otra manera, $M > f(x)$ para todos x del intervalo (a, b).

Ejemplo 2. Se da chapa cuadrada de hojalata con el lado a. En sus ángulos se cortan cuadrados iguales (fig. 27) y, doblando la hojalata por las líneas de trazos, se hace una caja rectangular. ¿Cuáles serán las dimensiones de los cuadrados cortados que proporcionen el mayor volumen?

El largo del lado de cada cuadrado cortado lo designamos con x. Entonces el volumen de la caja V es la función de x expresada por la fórmula

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant a/2).$$

Es necesario hallar el máximo de dicha función en $[0, a/2]$. Tenemos

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4(a - 2x)x = (a - 2x)(a - 6x).$$

Igualando a cero $V'(x)$ obtenemos dos raíces $x = a/2$, $x = a/6$ pertenecientes al segmento $[0, a/2]$.

El mayor de los tres números siguientes

$$V(0) = 0, \quad V(a/6) = 2a^3/27, \quad V(a/2) = 0$$

es el volumen máximo de la caja que corresponde a $x = a/6$.

Ejemplo 2. En el centro de una pista circular para patinaje con radio r, a la altura h está suspendida una farola. La luminosidad de la pista se puede expresar por medio del número T que se calcula por la fórmula

$$T = \frac{k \operatorname{sen} \alpha}{h^2 + r^2},$$

donde k es un número determinado por la potencia de la farola, y $\operatorname{tg} \alpha = h/r$ (fig. 28). Hallar la altura h del poste para la cual la pista resulte iluminada en lo máximo.

Solución. Expresemos T por medio de α, excluyendo h:

$$T = \frac{k}{r^2} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{k}{r^2} \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Hay que encontrar el máximo de la función $T = T(\alpha)$ en el intervalo $(0, \pi/2)$, es decir, entre los valores de α que satisfacen las desigualdades $0 < \alpha < \pi/2$. Resolvemos la ecuación

$$T'(\alpha) = \frac{k}{r^2}(\cos^3\alpha - 2\,\text{sen}^2\,\alpha\cos\alpha) = 0.$$

Esta se descompone en las dos siguientes ecuaciones:

$$\cos\alpha = 0,$$

$$\cos^2\alpha - 2\,\text{sen}^2\,\alpha = 0 \quad \text{ó} \quad \text{tg}^2\,\alpha = 1/2.$$

La primera ecuación en el intervalo $(0, \pi/2)$ no tiene raíces, la segunda tiene la única solución

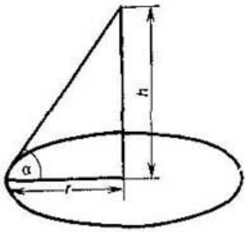


Fig. 28.

$$\alpha_0 = \text{arctg}\,(1/\sqrt{2}) \approx 35°15'.$$

Entonces tenemos

$$\lim_{\alpha\to 0} T(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha\to\pi/2} T(\alpha) = 0.$$

$$T(\alpha_0) = \frac{k}{r^2}\,\frac{\text{sen}\,\alpha_0}{3/2} = \frac{2}{3}\,\frac{k}{r^2}\,\frac{\text{tg}\,\alpha_0}{\sqrt{1+\text{tg}^2\,\alpha_0}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\frac{k}{r^2}.$$

El mayor entre estos números será $T(\alpha_0)$. A dicho número le corresponde la altura del poste que resuelve el problema:

$$h = r\,\text{tg}\,\alpha_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Sin duda, lo más probable será que la administración de la pista no tenga un poste tan alto. Tendrá que utilizar el poste de que disponga. Supongamos que la administración tiene un poste cuya altura es $H < r/\sqrt{2}$. A este poste le corresponde el ángulo

$$\alpha_1 = \text{arctg}\,\frac{H}{r} < \alpha_0.$$

La derivada $T'(\alpha)$ no se anula (no tiene raíces) en el intervalo $(0, \alpha_1)$. En este caso el máximo $T(\alpha)$ en $(0, \alpha_1)$ es el número mayor entre los de $T(0) = 0$ y $T(\alpha_1)$, es decir, el número $T(\alpha_1)$, al cual le corresponde la altura H.

De esa manera, en todo caso no hace falta disminuir el poste de que se dispone.

Problema 1. Se precisa descomponer el número 12 en dos sumandos de manera que la suma de sus cuadrados sea la mínima.

Problema 2. Es necesario descomponer el número 12 en dos factores de manera que la suma de sus cuadrados sea la máxima.

Problema 3. Hallar la altura del cilindro con volumen máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

Problema 4. Un barco dista 9 km del punto más próximo de una costa rectilínea. De este barco es necesario enviar un correo a un campamento dispuesto a quince kilómetros respecto al punto de la costa más próximo al barco (el campamento se encuentra en la costa). ¿A qué punto de la costa debe abordarse dicho correo para llegar al campamento en el plazo más corto, si su velocidad al andar es de 5 km/h y al navegar a remo, de 4 km/h?

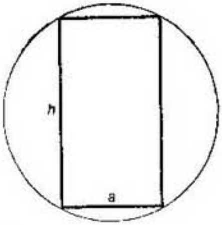


Fig. 29.

Problema 5. De un rollizo de diámetro d se requiere cortar una viga de sección rectangular con base a y altura h (fig. 29). ¿Para qué valores de a y h la resistencia de la viga será la máxima si es sabido que dicha resistencia de la viga es proporcional a ah^2?

Problema 6. Hallar el área mayor de un triángulo isósceles que está inscrito en un círculo de radio R.

Preguntas.

1. ¿Qué es un punto del máximo (mínimo) de la función $f(x)$ en el segmento?
2. ¿Qué es un punto del máximo (mínimo) local de la función $f(x)$?
3. ¿Qué es un punto del extremo de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y el punto de su extremo local?
4. ¿Puede el punto del extremo local de la función $f(x)$ ser el punto final del segmento $[a, b]$, en que está prefijada dicha función?
5. ¿A qué es igual la derivada de la función en el punto de su extremo local?

6. Citen dos ejemplos de funciones que tienen en cierto punto x_0 una derivada igual a cero ($f'(x_0) = 0$), y que al mismo tiempo x_0 no será el punto del extremo local de la función f.

7. ¿En qué consiste el método de obtener los extremos de una función en un segmento?

§ 1.7. APLICACIONES DE LA DERIVADA PARA ESTUDIAR LAS FUNCIONES

1.7.1. Crecimiento y decrecimiento de una función. La función

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

se llama *creciente* (*decreciente*) en el segmento $[a, b]$, si a mayor valor de x, perteneciente a dicho segmento, le corres-

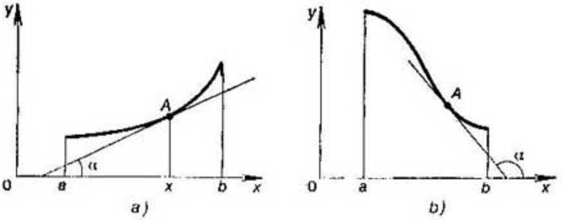


Fig. 30.

ponde mayor valor (menor) de y, o sea, si $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$).

En la fig. 30, *a* (y respectivamente en la fig. 30, *b*) está expuesta la gráfica de una función continua creciente (decreciente) en $[a, b]$.

Si la función f no sólo es continua en el segmento $[a, b]$ sino también tiene en el último una derivada continua $f'(x)$, entonces por el signo de ésta se puede determinar crece o decrece f en $[a, b]$. Precisamente, tienen lugar las afirmaciones:

1) *Si* $f'(x) > 0$ *en* (a, b), f *crece en* $[a, b]$.

2) *Si* $f'(x) < 0$ *en* (a, b), f *decrece en* $[a, b]$.

En efecto,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

donde α es el ángulo entre la tangente a la gráfica en el punto x [1]) y la dirección positiva del eje x. Mas, si $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces en todos lugares sobre (a, b) [2]) el ángulo α es agudo, y de la gráfica se infiere que en nuestro caso la función deberá crecer en $[a, b]$.

Subrayamos que en este caso la primera derivada en los puntos finales de $[a, b]$ puede ser igual a cero.

Si $f'(x) < 0$ en (a, b), en todos los puntos de (a, b) el ángulo α es obtuso lo que evidentemente puede tener lugar sólo cuando f decrece sobre $[a, b]$ [3]).

Elemplo 1. La función $y = e^x$ $(-\infty < x < \infty)$ crece en todo el eje real, ya que $y' = e^x > 0$ $(-\infty < x < \infty)$.

Elemplo 2. La función

$$y = x^2 + 2x + 1$$

tiene la derivada $y' = 2x + 2$. La desigualdad $2x + 2 > 0$ tiene lugar para $x > -1$, mientras que la desigualdad $2x + 2 < 0$ tiene lugar para $x < -1$. Por consiguiente, la función (1) decrece para $x \leqslant -1$ y crece cuando $x \geqslant -1$.

Problema 1. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

a) $x^2 - 4x + 2$; b) $-x^2 + 2x + 1$;

c) $\cos x$; d) $(x-1)^3 + 2$; e) $(x+2)^4$.

1.7.2. Convexidad y concavidad. Examinemos la función

$$y = f''(x) \quad (a < x < b).$$

Supongamos que dicha función tiene la segunda derivada continua $f''(x)$.

La segunda derivada de $f(x)$ es la primera derivada de $f'(x)$:

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Esto muestra que *si la segunda derivada de f en el intervalo (a, b) es positiva:*

$$f''(x) > 0 \quad (a < x < b), \tag{2}$$

---

1) Es decir, en el punto de la gráfica que tiene la abscisa x.

2) Es decir, para todos los valores de x del intervalo (a, b).

3) La argumentación formal de las afirmaciones 1), 2), se expone a continuación en el punto 1.7.4.

entonces la primera derivada f' crece en dicho intervalo, mientras que si la segunda derivada de f en (a, b) es negativa

$$f''(x) < 0 \quad (a < x < b), \tag{3}$$

la primera derivada f' decrece en (a, b).

En las figuras 31, 32, 33 vienen representadas las gráficas de funciones que corresponden al primer caso ($f''(x) > 0$, $a < x < b$; en los extremos de $[a, b]$ la segunda derivada puede anularse!).

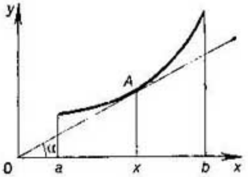


Fig. 31.

En todas las tres gráficas la pendiente de la tangente al eje x ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) crece junto con x. En la fig. 31 el ángulo α es agudo para todos los valores de x en el segmento $[a, b]$. En la fig. 32, el ángulo es obtuso; a medida que crece x el ángulo se hace cada vez más obtuso, mientras que su tangente (negativa) aumenta. Por fin, en la fig. 33 el valor de $\operatorname{tg} \alpha$, al principio, crece tomando valores negativos

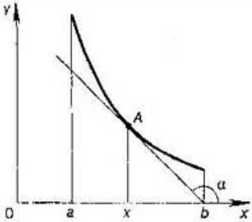


Fig. 32.

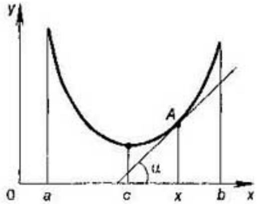


Fig. 33.

(sobre (a, c)), se anula cuando $c = 0$, y luego crece, asumiendo valores positivos (sobre (c, b)).

El crecimiento de $\operatorname{tg} \alpha$ viene suscitado por el hecho de que la segunda derivada de f es positiva en $[a, b]$.

Vemos que en todos los tres casos la gráfica está dispuesta por encima de la tangente trazada a cualquier punto suyo.

La gráfica de la función f se denomina *convexa hacia las y negativas* (*hacia las y positivas*) en el intervalo (a, b), si en todo punto de (a, b) la primera está dispuesta por encima (por debajo) de la tangente trazada a ésta.

En las figs. 34, 35, 36 se muestran ejemplos de las funciones convexas hacia las y positivas.

Es válida la afirmación que:

Si la función $y = f(x)$ tiene en el intervalo (a, b) la segunda derivada $f''(x)$ positiva (negativa), su gráfica es convexa hacia las y negativas (hacia las y positivas) en (a, b).

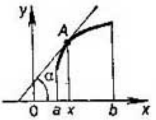


Fig. 34.

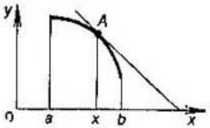


Fig. 35.

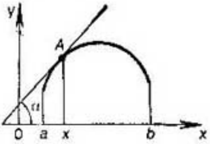


Fig. 36.

Para el caso en que $f''(x) > 0$ $(a < x < b)$, dicha afirmación ya fue explicada, para el caso cuando $f''(x) < 0$ $(a < x < b)$, esta afirmación se deduce examinando las gráficas de las figs. 34, 35, 36.

Cabe prestar atención a una afirmación importante:

Sea que la función $f(x)$ posee en el entorno del punto x_0 la segunda derivada continua.

Si

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

entonces f tiene en el punto x_0 un máximo local.

Cuando

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

f tiene en el punto x_0 un mínimo local.

La validez de esta afirmación se sigue directamente del examen de las figuras 37 y 38 [1]). Conviene tomar en consideración que debido a que la segunda derivada es negativa (positiva) en el punto x_0, se deduce en virtud de su continuidad que dicha derivada es negativa (positiva) también en cierto entorno de este punto.

1.7.3. Trazado de las gráficas esquemáticas. Para obtener la gráfica esquemática de una función $y = f(x)$, es menester ante todo determinar cuál es el campo de su defi-

[1]) La interpretación formal de dicha afirmación véase a continuación, en el punto 1.7.4.

nición. Por lo común es todo el eje x o bien el eje con puntos punzados, o bien un conjunto compuesto por varios intervalos o segmentos. Es útil mediante el cálculo hallar uno o varios puntos a través de los cuales pasa la gráfica de dicha función. Si el campo de definición no está acotado es necesario calcular los límites de la función para $x \to +\infty$ y $x \to$

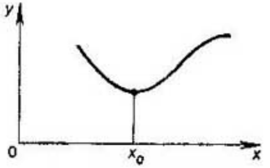


Fig. 37.

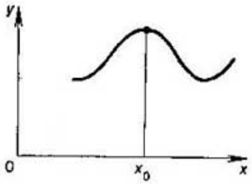


Fig. 38.

$\to -\infty$ a fin de imaginarse, como se dice, la conducta de la función en el infinito.

Es importante calcular la primera y segunda derivadas ($f'(x)$ y $f''(x)$) y encontrar las raíces de las ecuaciones

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0.$$

Para cada valor de x_0, en que la primera derivada se anula, es necesario comprobar si existe o no para dicho valor un máximo o mínimo local de la función. Deberá también calcularse para x_0 el respectivo valor de la función $f(x_0)$. De esta manera, encontraremos los puntos importantes $(x_0, f(x_0))$, a través de los cuales pasa la gráfica de la función. El conocimiento de estos puntos nos ayudará encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Por último, si logramos hallar las raíces de la ecuación $f''(x) = 0$, entonces las últimas nos ayudarán a indicar los intervalos de convexidad hacia las y positivas y las y negativas de la función.

A base de estos conocimientos ya no es difícil imaginarse la gráfica esquemática de la función investigada.

Pero pasemos a ejemplos.

Ejemplos 1. Hay que trazar la gráfica esquemática de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 1.$$

Esta función está definida y es continua en todo el eje x.

Para conocer cómo esta función se comporta en el infinito, elegimos los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left[\frac{1}{3}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right]=-\infty.$$

También tenemos

$$f(0) = 1,$$
$$f'(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5),$$
$$f''(x) = 2x - 6,$$

de donde

$$f''(3) = 0,\quad f''(x) > 0\ (x > 3),\quad f''(x) < 0\ (x < 3).$$

Anotamos los puntos x, donde $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$, y el punto $x = 0$ y calculamos los valores de la función f que corresponden a dichos puntos:

x	0	1	3	5
$f(x)$	1	10/3	−2	−22/3

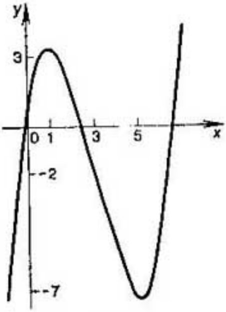


Fig. 39.

Basándonos en estos datos tracemos la gráfica esquemática de nuestra función (fig. 39).

Para el intervalo $(-\infty, 1)$ (donde $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$) la función f crece desde $-\infty$ hasta $y = 10/3$, la gráfica es convexa hacia las y positivas. En el punto $x = 1$ la función f llega a un máximo local. En el intervalo $(1, 5)$ la función f decrece, logrando para $x = 5$ un mínimo local que es igual a $y = -22/3$, y luego en el intervalo $(5, \infty)$ crece, tendiendo hacia $+\infty$ cuando $x \to +\infty$. Con la particularidad de que en el intervalo $(1, 3)$ (donde $f''(x) < 0$) la gráfica continúa teniendo la convexidad hacia las y positivas mientras que sobre el intervalo $(3, \infty)$ (donde $f''(x) > 0$) dicha gráfica tiene la convexidad hacia las y negativas.

El punto de la gráfica [1]) con abscisa $x = 3$ es notable. Al pasar x a través de este punto la convexidad hacia las y positivas de la gráfica se sustituye por la convexidad hacia las y negativas. Semejante punto se llama *punto de inflexión de la gráfica*. En el punto de inflexión la segunda derivada de f es igual a cero. En nuestro caso, $f''(3) = 0$.

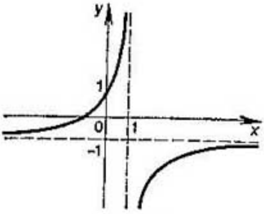


Fig. 40.

Ejemplo 2. Dibujar la gráfica esquemática de la función

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

Tenemos

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} > 0 \quad (-\infty < x < 1,\ 1 < x < +\infty),$$

$$f''(x) = \frac{4}{(1-x)^3} \begin{cases} > 0 & (x < 1), \\ < 0 & (x > 1). \end{cases}$$

Nuestra función no está definida para $x = 1$ y

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-1 + \frac{1}{x}} = -1.$$

En la fig. 40, a base de estos datos, se ha construido la gráfica esquemática de la función f.

Problema 2. Dibujar las gráficas esquemáticas de las funciones:

---

[1]) Es decir, el punto de la gráfica cuya abscisa $x = 3$.

1) x^2+x+1; 2) x^2-5x+6;

3) $-x^2+x+2$; 4) $\frac{x-1}{x+1}$;

5) $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x-2$.

1.7.4 Teoremas del valor medio. A continuación ofrecemos la demostración de teoremas que tienen gran importancia en el análisis, entre ellos figuran el teorema de Rolle y el de Lagrange. Dichos teoremas se denominan también teoremas del valor medio. Con ayuda de

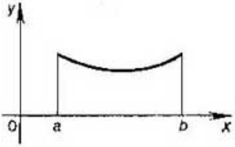


Fig. 41.

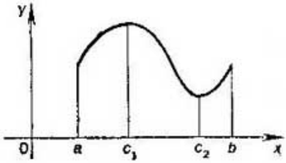


Fig. 42.

ellos se dan las argumentaciones formales de las afirmaciones demostradas en los puntos 1.7.1 y 1.7.2.

TEOREMA 1 (DE ROLLE) *Si la función f es continua en el segmento $[a, b]$, tiene una derivada en el intervalo (a, b) y toma valores iguales en los extremos del segmento $[a, b]$ $(f(a) = f(b))$. Entonces en el intervalo (a, b) siempre se encontrará un punto tal, en el cual la derivada de f será igual a cero:*

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b.$$

Las figs. 41 y 42 representan las gráficas de las funciones f que satisfacen la condición del teorema de Rolle. La primera función tiene un punto c, perteneciente al intervalo (a, b), en el cual su derivada se anula $(f'(c) = 0)$, la segunda posee dos puntos semejantes c_1 y c_2 $(f'(c_1) = f'(c_2) = 0)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que x_1 y x_2 son los puntos en los cuales f alcanza, en el segmento $[a, b]$, el mínimo y el máximo (respectivamente).

Si $f(x_1) < f(a)$, entonces el punto x_1 pertenece de modo evidente al intervalo (a, b) y en este punto la función f logra el mínimo local. Mas, en ese caso, como sabemos, $f'(x_1) = 0$ y se puede considerar que $c = x_1$.

Cuando $f(x_2) > f(a)$, el punto x_2 pertenece al intervalo (a, b) y en este punto la función f alcanza al máximo local. Pero, entonces, como sabemos, $f'(x_2) = 0$ y se puede considerar que $c = x_2$.

Queda un caso más, cuando $f(x_1) = f(x_2)$. Pero, en dicho caso, evidentemente, para todos x del segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ es igual a una misma constante $C = f(a)$. En este caso, en calidad de c puede tomarse cualquier punto del intervalo (a, b), en el que $f'(c) = 0$.

TEOREMA 2 (DE LAGRANGE). *Supongamos que la función f tiene una derivada sobre el segmento $[a, b]$. Entonces en el intervalo (a, b) se encon-*

trará un punto c tal, en el cual la derivada de f satisfará la igualdad

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b) \tag{4}$$

o, lo que es lo mismo, la igualdad

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad (a<c<b). \tag{5}$$

El teorema de Lagrange tiene un simple sentido geométrico (fig. 43). El primer miembro de la igualdad (4) es la tangente del ángulo formado por el eje x y la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$, mientras que el segundo miembro es la pendiente de la tangente a la gráfica en cierto punto c que pertenece a (a, b). El teorema de Lagrange afirma que si la curva es la gráfica de una función que tiene una derivada sobre el $[a, b]$, entonces en dicha curva existe un punto tal, correspondiente a cierta abscisa c $(a < c < b)$, en el cual la tangente a la curva es paralela a la cuerda que une los extremos de dicha curva $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

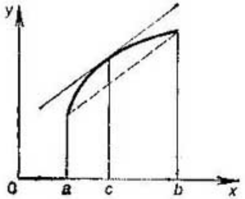


Fig. 43.

DEMOSTRACIÓN. Examinemos la función

$$F(x)=[f(b)-f(a)]x-(b-a)f(x).$$

La última tiene una derivada sobre el $[a, b]$ igual a

$$F'(x)=[f(b)-f(a)]-(b-a)f'(x).$$

Además

$$F(b)=-f(a)b+af(b),$$

$$F(a)=-af(b)-f(a)b,$$

y por lo tanto $F(a) = F(b)$. Más, entonces, según el teorema de Rolle debe existir en el intervalo (a, b) un punto c, para el cual $F'(c) = 0$, es decir,

$$[f(b)-f(a)]-(b-a)f'(c)=0 \quad (a<c<b),$$

de donde se deduce la expresión (4).

Ejemplo 1. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en el segmento $[0, 1]$, pero tiene derivada sólo en el intervalo semiabierto $(0, 1]$. Para esta función es aplicable el teorema de Lagrange, debido a que para su cumplimiento la derivada de f deberá existir sobre el intervalo $(0, 1)$.

Demostremos ahora el teorema que da la argumentación a las afirmaciones 1) y 2) del punto 1.7.1.

TEOREMA 3. *Si una función continua en el segmento $[a, b]$ tiene una derivada positiva (negativa) en el intervalo (a, b), entonces ella crece (decrece) sobre $[a, b]$. Pero si la derivada es idénticamente igual a cero en (a, b), entonces $f(x) = C$, donde C es una constante.*

Subrayemos que en los puntos $x = a$ y $x = b$ la derivada puede no existir, o ser igual a cero.

DEMOSTRACIÓN. Sean x_1, x_2 dos puntos arbitrarios que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. De acuerdo con el teorema de Lagrange, aplicado al segmento $[x_1, x_2]$, en (x_1, x_2) existirá un punto c tal, para el cual $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, puesto que según la condición $f'(c) > 0$. Pero, entonces $f(x_1) < f(x_2)$, lo que demuestra que f crece sobre $[a, b)$. En caso de que $f'(x) < 0$ en (a, b), obtendremos $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$, o sea, $f(x_2) < f(x_1)$, y esto demuestra que f decrece en $[a, b]$.

Si $f'(x) = 0$, en (a, b), $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ y $f(x_1) = f(x_2)$ para cualesquiera x_1 y x_2 del segmento $[a, b]$. Fijamos x_1 y vamos a considerar $x_2 = x$ como una variable, en este caso $f(x) = C$, donde $C = f(x_1)$.

Al fin, demostremos el teorema que da la argumentación de la última afirmación del punto 1.7.2.

TEOREMA 4. *Si la función f tiene sobre $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ una derivada positiva (negativa) f'' del segundo orden y en el punto x_0 la primera derivada igual a cero ($f'(x_0) = 0$), entonces en este punto f alcanza un mínimo (máximo) local.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f''(x) > 0$ sobre $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ y $f'(x_0) = 0$. Puesto que la segunda derivada es la primera derivada de la primera derivada: $f''(x) = (f'(x))'$, entonces a base del teorema 3 la función $f'(x)$ sobre el segmento $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ crece. Pero $f'(x_0) = 0$. Por lo tanto

$$f'(x) < 0 \quad \text{en} \quad [x_0 - \delta, x_0)$$

y

$$f'(x) > 0 \quad \text{en} \quad (x_0, x_0 + \delta].$$

Emplearemos ahora el teorema 3 para f. Ya que la función f es continua en el segmento $[x_0 - \delta, x_0]$ y tiene una derivada negativa sobre el intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$, ella decrece sobre el segmento $[x_0 - \delta, x_0]$. Puesto que, luego, la función $f(x)$ es continua en el segmento $[x_0, x_0 + \delta]$ y posee una derivada positiva sobre el intervalo $(x_0, x_0 + \delta]$, entonces ella crece en el segmento $[x_0, x_0 + \delta]$. Pero esto muestra que la función $f(x)$ tiene un mínimo en el punto x_0. De modo análogo se demuestra el teorema para el caso en que $f''(x) < 0$, llevándonos a la conclusión de que existe un máximo en x_0.

§ 1.8. FUNCIÓN PRIMITIVA. INTEGRAL INDEFINIDA

1.8.1. Función primitiva (o simplemente **primitiva**). Sabemos que el número constante C, considerado como una función de x, tiene una derivada que es de modo idéntico igual a cero (o sea, igual a cero para todos x).

La afirmación inversa también es válida: *si conocemos que la derivada de una función es idénticamente igual a cero $f'(x) \equiv 0$, entonces dicha función es una constante.*

De los razonamientos mecánicos esta simple afirmación es completamente evidente [1]. En realidad, supongamos que la función $s = f(t)$ expresa la ley del movimiento rectilíneo de un punto, además, su velocidad es de manera idéntica igual a cero: $v = f'(t) = 0$. En este caso el punto no se mueve y la distancia s hasta el punto inicial 0 es igual a una constante para todo t. El hecho de que en este razonamiento hemos sustituido x por t, no tiene importancia; el tiempo puede designarse también con x.

Examinemos una función continua arbitraria f prefijada en el intervalo (a, b), es decir, sobre un conjunto de valores de x que satisfacen las desigualdades $a < x < b$.

La función F se llama *la primitiva* para f sobre el intervalo (a, b) [2], si en dicho intervalo la derivada de F es igual a f:

$$F'(x) = f(x).$$

Está claro que si la función F es primitiva para f en (a, b), y C es una constante, la función $F(x) + C$ es también una primitiva para f, puesto que

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

Al contrario, si F y F_1 son funciones primitivas para $f(x)$ en (a, b), entonces ellas difieren de modo inevitable entre sí, sobre todo el intervalo (a, b), en cierta constante C:

$$F_1(x) = F(x) + C. \tag{1}$$

En efecto, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - - f(x) \equiv 0$. Pero, en este caso, como hemos indicado antes, existe un número (constante) C tal que $F_1(x) - F(x) = C$ sobre (a, b), de donde se sigue la expresión (1).

Así pues, mediante los razonamientos mecánicos hemos establecido un hecho importante: *si F es cualquier función*

---

[1]) La demostración formal: véase el teorema 3 del punto 1.7.4.

[2]) De modo análogo se define la primitiva para f en el segmento $[a, b]$, es decir, el conjunto de valores de x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$. Aquí es necesario considerar que la derivada en el punto a es la derivada derecha, mientras que en el punto b, la izquierda:

$$F'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(a+h) - F(a)}{h},$$

$$F'(b) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

primitiva de f sobre el intervalo (a, b), todas las primitivas posibles de f en dicho intervalo se expresan por medio de la fórmuja $F(x) + C$, donde en lugar de C se puede poner todo número.

1.8.2. Integral indefinida. Demos ahora la siguiente definición:

Se denomina *integral indefinida* de una función f continua sobre el intervalo (a, b), su función primitiva arbitraria. La integral indefinida se designa del modo siguiente:

$$\int f(x)\,dx.$$

De lo expuesto se deduce que *si F es cierta función primitiva determinada para f en el intervalo (a, b), entonces la integral indefinida de f sobre este intervalo es igual a*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

donde C es una constante.

Si f_1, f_2 son funciones continuas en el intervalo (a, b) y A_1, A_2 son ciertas constantes, tiene lugar la igualdad siguiente que expresa la propiedad fundamental de la integral indefinida:

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x))\,dx = A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx + C, \tag{3}$$

donde C es cierta constante.

En efecto, según la definición de la integral indefinida, el primer miembro de (3) no es más que una de las primitivas de $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$. Por otra parte, tiene lugar la igualdad

$$\begin{aligned}(A_1 \int f_1(x)\,dx + A_2 \int f_2(x)\,dx' &= \\ = A_1 \left(\int f_1(x)\,dx\right)' + A_2 \left(\int f_2(x)\,dx\right)' &= \\ = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x),&\end{aligned} \tag{4}$$

puesto que las integrales $\int f_1\,dx$, $\int f_2\,dx$ designan respectivamente ciertas funciones primitivas de f_1 y f_2. Por lo tanto, el segundo miembro de (3) sin el último término C es también una primitiva para $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$, pero en este caso el segundo miembro difiere del primero de (3) en cierta constante.

La propiedad (3) se difunde por inducción a cualquier número finito de funciones continuas sobre (a, b) $f_1, \ldots, f_n$ y de las constantes $A_1, \ldots, A_n$:

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} A_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{n} A_j \int f_j(x)\, dx + C. \tag{5}$$

Como corolario para $A_1 = 1$, $A_2 = \pm 1$, $n = 2$ se infiere la igualdad

$$\int (f_1 \pm f_2)\, dx = \int f_1\, dx \pm \int f_2\, dx + C,$$

y para $A_1 = A$ y $A_2 = 0$, $f_1 = f$, la igualdad

$$\int Af\, dx = A \int f\, dx + C.$$

Ejemplos.

$$\int x^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n} + C \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} + C, \qquad a \neq 0, \tag{7}$$

$$\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C, \quad a \neq 0. \tag{8}$$

En efecto,

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \frac{1}{n}(x^n)' = x^{n-1},$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} ax}{a}\right)' = \frac{1}{a}(\operatorname{sen} ax)' = \frac{1}{a} a \cos ax = \cos ax,$$

$$\left(-\frac{\cos ax}{a}\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = \operatorname{sen} ax.$$

De (5) y (6) se desprende que la integral indefinida del polinomio $P_n(x) = \sum_{0}^{n} a_k x^k$ de grado n (a_k son constantes) es igual a

$$\int P_n(x)\, dx = \sum_{0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Exponemos la tabla fundamental de las integrales indefinidas, compuesta directamente a partir de las fórmulas de derivadas de las funciones elementales (véanse los puntos 1.5.5—1.5.12).

$$\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C\quad (a\neq -1),\qquad \int \cos x\,dx=\operatorname{sen} x+C,$$

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C^{1)}\qquad \int \sec^2 x\,dx=\operatorname{tg} x+C,$$

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad (a\neq 1,\ a>0),\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\operatorname{arcsen} x+C=-\arccos x+C_1\ (C_1-C=\pi/2),$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx=-\cos x+C,\qquad \int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C.$$

En cada una de estas igualdades la derivada del segundo miembro es igual a la función subintegral del primer miembro.

Problema 1. Calcular las integrales [2]:

$$1)\ \int\sqrt{x}\,dx;\quad 2)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x}};\qquad 3)\ \int\frac{dx}{x^2};$$

$$4)\ \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx;\qquad 5)\ \int\frac{dx}{x^2+4};$$

$$6)\int(2\operatorname{sen} x-3\cos x)\,dx;\qquad 7)\ \int\operatorname{tg}^2 x\,dx;$$

$$8)\ \int 2^x\,dx;\quad 9)\ \int\frac{xe^x-x}{x}\,dx;\quad 10)\ \int\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

1.8.3. Cambio de la variable. Al calcular las integrales indefinidas se utiliza con frecuencia *el método de sustitución o de cambio de la variable.* Dicho método se reduce a la fórmula

$$\int f\,[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du+C,\tag{9}$$

en que $f(u)$ es una función continua y $u=\varphi(x)$, una función que tiene una derivada continua. Esto se debe interpretar así. Si se logra representar la expresión subintegral de la siguiente forma

$$F(x)\,dx=f\,[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx,$$

[1] Para $x>0$ tenemos $(\ln|x|)'=(\ln x)'=1/x$, y para $x<0$, $(\ln|x|)'=[\ln(-x)]'=-1/(-x)=1/x$.

[2] La resolución de los problemas 5) y 10) puede aplazarse hasta el punto 1.8.3.

en esta integral se puede efectuar de modo puramente formal el cambio de $u = \varphi(x)$ y $du = \varphi'(x)\,dx$, integrar la expresión obtenida $f(u)\,du$ respecto a la variable u, y después sustituir u por $\varphi(x)$. La expresión $du = \varphi'(x)\,dx$ se llama *diferencial de la función* $\varphi(x)$. Para el análisis dicha expresión tiene importancia independiente, pero en este libro la utilizaremos solamente como designación.

Expliquemos la fórmula (9) recurriendo al ejemplo

$$\int \cos(kx)\,k\,dx = \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C = \operatorname{sen} kx + C.$$

Hemos realizado la sustitución $u = kx$, $du = (kx)'\,dx = k\,dx$, en virtud de la cual nuestra integral se ha convertido en una integral de las expuestas en la tabla.

Para demostrar la fórmula (9), es menester cerciorarnos de que la derivada de su primer miembro respecto a x es igual a la derivada respecto a x de su segundo miembro. En realidad

$$\left(\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx\right)'_x = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x),$$

$$\left(\int f(u)\,du\right)'_x = \left(\int f(u)\,du\right)'_u u'_x =$$
$$= f(u)\,\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Citemos varios ejemplos de aplicación del método de sustitución

$$\int e^{kx}\,dx = \int e^t\,\frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}\int e^t\,dt = \frac{1}{k}\,e^t + C = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

(sustitución $kx = t$, de donde $k\,dx = dt$).

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int dt = -t + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$\left(\text{sustitución } t = \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ de donde } dt = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right).$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 u}\; a\cos u\,du =$$
$$= a^2 \int \cos^2 u\,du = a^2 \int \frac{1 + \cos 2u}{2}\,du = \frac{a^2}{2}\left(u + \frac{\operatorname{sen} 2u}{2}\right) +$$

$$+C=\frac{a^2}{2}(u+\operatorname{sen}u\cos u)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

(sustitutión $x=a\operatorname{sen}u$).

$$\int\cos kx\,dx=\frac{1}{k}\int\cos kx\,k\,dx=\frac{1}{k}\int\cos u\,du=$$

$$=\frac{1}{k}\operatorname{sen}u+C=\frac{1}{k}\operatorname{sen}kx+C,$$

$$\int\sqrt{1+x^2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du=\frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}+C=\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3}+C$$

(sustitución $u=1+x^2$, $du=2x\,dx$).

$$\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+C$$

(sustitución $u=1+x^2$, $du=2x\,dx$).

Problema 2. Calcular las integrales:

1) $\int\frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx$; 2) $\int(x^2+1)^5\,x\,dx$; 3) $\int\operatorname{tg}x\,dx$;

4) $\int e^{x^2}x\,dx$; 5) $\int e^{x^3}x^2\,dx$; 6) $\int\cos^2 x\,dx$;

7) $\int e^{3x}\,dx$; 8) $\int\cos 3x\,dx$; 9) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$;

10) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 11) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; 12) $\int x^{x^2-1}x\,dx$.

1.8.4. Problema de integración de las funciones elementales. Como se deduce de los ejemplos, el método de cambio de variables de manera notoria amplía la clase de aquellas funciones elementales que ahora podemos integrar, es decir, obtener para éstas las funciones primitivas que de nuevo sean funciones elementales. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, desde el punto de vista de cálculo, los asuntos relacionados con la integración son, en general, mucho más complejos que los de diferenciación.

Del § 1.5 es conocido que la derivada de toda función elemental es de nuevo la función elemental, la cual puede obtenerse de manera enteramente efectiva aprovechando las reglas de diferenciación. No obstante, la afirmación inversa, hablando en general, no es justa, puesto que existen tales funciones elementales, cuyas integrales indefinidas no son a su vez funciones elementales. Por ejemplo, a dichas funciones pertenecen e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y otras. Para obtener las integrales de ellas conviene emplear métodos aproximados, e introducir en uso nuevas funciones que no se reducen a las elementales. No tenemos la posibilidad de retenernos en dicho problema, pero cabe señalar sólo que ya en las matemáticas elementales se pueden encontrar muchos ejemplos cuando una operación directa es realizable para cierta clase de números, mientras que la operación inversa con la misma clase de números no se puede cumplir; así, el cuadrado de cualquier número racional es también un número racional, sin embargo la raíz cuadrada de un número racional no es siempre un número racional.

Preguntas y tareas.

1. ¿Qué es la función primitiva para una función dada?
2. ¿Qué es la integral indefinida de una función?
3. Reténganse en la memoria las fórmulas (3) y (9) que expresan las propiedades fundamentales de la integral indefinida y la tabla fundamental de dichas integrales (véase el punto 1.8.2).
4. Aduzcan tres ejemplos de empleo del método de cambio de variables en la integral indefinida.

§ 1.9. INTEGRAL DEFINIDA

1.9.1. Area de una figura curvilínea. Definición de la integral definida. Representemos en el segmento $[a, b]$ (a y b son números finitos) una función continua no negativa $f(x)$. Su gráfica se expone en la fig. 44. Planteemos el problema: se necesita de modo racional determinar la noción del área de una figura acotada por la curva $y = f(x)$, el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$, y calcular dicha área. El problema planteado es natural de resolverlo así.

Efectuemos la partición del segmento $[a, b]$ en n partes por medio de los puntos

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

elijamos en cada uno de los segmentos parciales

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

un punto arbitrario ξ_j, determinemos los valores de $f(\xi_j)$ de la función f en dichos puntos y compongamos la suma

$$S_n = \sum_0^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \tag{3}$$

esta magnitud se llama *suma integral* y, evidentemente, es

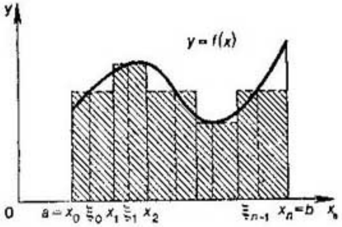


Fig. 44.

igual a la suma de las áreas de los rectángulos rayados (fig. 44).

Ahora hagamos tender hacia cero todos los Δx_j y además de tal manera que el segmento parcial máximo (el más grande) de la partición tienda a cero. Si en este caso la magnitud S_n tiende hacia un límite determinado S, que no depende del procedimiento de partición (1) y de elección de los puntos ξ_j sobre los segmentos parciales, entonces la magnitud S se denomina *área de una figura curvilínea dada*. De ese modo

$$S = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_j \to 0} \sum_0^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j. \tag{4}$$

Así pues, hemos definido el área de nuestra figura curvilínea. Surge una pregunta: ¿tiene o no cada figura su área, con otras palabras, tiende o no en realidad hacia un límite finito su suma integral S_n, cuando el máx $\Delta x_j \to 0$? Dicha pregunta se resuelve positivamente: *toda figura curvilínea como la definida más arriba, correspondiente a cierta función continua $f(x)$, posee realmente área en el sentido de la definición indicada, expresada por el número S que depende de esta figura.*

Otro interrogante que surge aquí, ¿hasta qué punto es natural la definición dada del área? se resuelve en la práctica. Nosotros sólo diremos que la práctica ha justificado por completo dicha definición.

Pero prestemos atención a la expresión (4). Distrayéndonos del problema sobre la determinación del área, podemos considerar dicha expresión como cierta operación, con ayuda de la cual, a partir de la función dada f, prefijada sobre $[a, b]$, se determina el número S. Esto es lo que se llama *operación de integración* de una función f en el segmento (finito) $[a, b]$, y su resultado, si existe, se denomina *integral definida* de f sobre $[a, b]$ que se anota así:

$$S = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

Según dicha definición, la función $f(x)$ no es obligatoriamente positiva sobre $[a, b]$, puede ser negativa o cambiar su signo en $[a, b]$.

Así pues, *se llama integral definida de la función f sobre el segmento $[a, b]$ el límite de la suma integral* (4), *cuando el segmento parcial máximo de la partición* (1) *tiende hacia cero.*

En la teoría de la integral definida se demuestra que *toda función continua en el segmento $[a, b]$ es integrable en este segmento, o sea, para nuestra función existe el límite* (5). De aquí se deduce el hecho mencionado de que toda figura del tipo examinado más arriba (véase la fig. 44) tiene área.

Ejemplo. El área S (fig. 11) acotada por la parábola $y = x^2$, el eje x y la recta $x = 1$, como fue demostrado en el punto 1.3.1 es igual a

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Demostrar directamente, mediante métodos elementales, el hecho de que la suma $\sum_{0}^{n-1} (x_j)^2\,\Delta x_j$, correspondiente a la partición arbitraria de [0, 1] y la elección arbitraria de los puntos ξ_j, que pertenecen a los segmentos $[x_j, x_{j+1}]$, tiende a 1/3 cuando el máx $\Delta x_j \to 0$ no es tan fácil. Esto, sin embargo, se sigue de la afirmación mencionada de que la integral definida de una función continua en un segmento (finito) siempre existe.

1.9.2. Trabajo. Masa de un vástago. Citemos otros ejemplos de problemas prácticos, cuya resolución se reduce al cálculo de integrales definidas.

Trabajo. Supongamos que a un punto en movimiento por una recta, se le aplica, a lo largo de dicha recta, una fuerza variable $F = f(x)$, donde $f(x)$ es una función continua de x que es la abscisa del punto en cuestión. El trabajo de la fuerza F durante el movimiento del punto desde a hasta b es igual a

$$W = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx,$$

donde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. En realidad, en virtud de la continuidad de f el producto $f(x_j)\,\Delta x_j$ es próximo al trabajo verdadero en $[x_j, x_{j+1}]$, mientras que la suma de tales productos es próxima al trabajo verdadero sobre $[a, b]$, además será tanto más próxima cuanto menor sea máx Δx_j.

Masa de un vástago de densidad variable. Vamos a considerar que el segmento $[a, b]$ del eje x tiene una masa de la densidad lineal variable $\rho(x) \geqslant 0$, donde $\rho(x)$ es una función continua en $[a, b]$. La masa total de este segmento es igual a la integral

$$M = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_j \to 0} \sum_{0}^{n-1} \rho(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b \rho(x)\,dx,$$

donde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

1.9.3. Teorema de Newton — Leibniz. El cálculo directo de la integral definida por la fórmula (5) está relacionado con ciertas dificultades: las sumas integrales de las funciones algo complejas tienen una forma enredada y frecuentemente resulta difícil reducirlas a una forma cómoda para calcular los límites. En todo caso, en este sentido no ha logrado crear métodos generales. Es interesante destacar que por primera vez un problema de dicho género fue resuelto por Arquímedes. Por medio de razonamientos que recuerdan remotamente el método moderno de límites, él calculó el área de un segmento de la parábola. En lo sucesivo, durante varios siglos, muchos matemáticos resolvían problemas sobre el cálculo de áreas de figuras y volúmenes de cuerpos. A pesar de todo aún en el siglo XVII el planteamiento de tales problemas y los métodos de su resolución tenían un carácter especialmente particular. Un progreso esencial, en dicho problema, proporcionaron Newton y Leibniz que indicaron el método general para resolver tales problemas. Ellos mostraron que el cálculo de la integral definida de una función puede ser reducido a la obtención de su primitiva.

TEOREMA DE NEWTON – LEIBNIZ. *Supongamos que se prefija una función $f(x)$ continua sobre $[a, b]$, y sea además que $F(x)$ es su primitiva. Entonces es válida la igualdad*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (6)$$

La fórmula (6) muestra que si para la función f es conocida su primitiva F, el cálculo de la integral definida de f en $[a, b]$ se reduce a una simple sustitución de los números a y b en F. Demos una sencilla interpretación mecánica de este teorema. Vamos a considerar que x es el tiempo, y la función $y = F(x)$ expresa la ley del movimiento rectilíneo de un punto, o sea, y es la distancia con respectivo signo, en el instante x, del punto en movimiento hasta el punto cero fijo.

El camino recorrido por el punto durante el intervalo de tiempo $a \leqslant x \leqslant b$, evidentemente, es igual a [1])

$$\Lambda = F(b) - F(a). \qquad (7$$

Por otro lado, el camino puede calcularse mediante la integración de la velocidad $f(x) = F'(x)$ del punto:

$$\Lambda = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (8)$$

[1]) Por cierto, el término «el camino recorrido por el punto» no expresa del todo bien dado fenómeno. Si, por ejemplo, la ley de movimiento es tal que al principio el punto se mueve a la derecha, recorriendo una distancia Λ_1, y luego a la izquierda, recorriendo el camino Λ_2, entonces $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$.

Hemos dividido el intervalo de tiempo $[a, b]$ en partes por medio de los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. En vigor de la continuidad de la función f, la velocidad del punto en el intervalo de tiempo $[x_j, x_{j+1}]$ puede considerarse aproximadamente constante e igual al número $f(x_j)$. Entonces el camino recorrido por el punto en este intervalo de tiempo, será de modo aproximado igual a $f(x_j)\,\Delta x_j$, mientras que todo el camino será aproximadamente igual a la suma $\sum\limits_{j=2}^{n} f(x_j)\,\Delta x_j$. Si el máx $\Delta x_j \to 0$, dicha suma tiende hacia el número que es igual al valor verdadero del camino recorrido por el punto durante el intervalo de tiempo $[a, b]$. Simultáneamente este número es, por lo visto, la integral definida de la función $f(x)$ entre los límites desde a hasta b. Pero, entonces, de (7) y (8) se deduce (6).

En general, se anota que

$$F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ejemplos.

$$\int_a^b x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n}\Big|_a^b = \frac{1}{n}(b^n - a^n) \quad (n \neq 0),$$

$$\int_a^b \cos\alpha x\,dx = \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\Big|_a^b = \frac{1}{\alpha}(\operatorname{sen}\alpha b - \operatorname{sen}\alpha a), \quad \alpha \neq 0.$$

Problema 1. Calcular el área acotada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ y el eje x.

Problema 2. Determinar el área acotada por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x.

Problema 3. Calcular la integral $\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$.

Problema 4. Calcular el área acotada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ en el segmento $[\pi, 2\pi]$ y el eje x.

Problema 5. Determinar el camino, recorrido en el vacío por un cuerpo en caída libre, durante los primeros T segundos de movimiento, si se conoce que la velocidad de la caída libre en el vacío $v = v_0 + gt$, donde t es el tiempo; g, la aceleración de la gravedad; v_0, la velocidad inicial.

Problema 6. Al estirar un muelle entre los límites de su elasticidad, la fuerza de resistencia que aparece en él, es igual a $F = kx$, donde x es el alargamiento del muelle, y k, el coeficiente que refleja las propiedades del muelle. Calcular el trabajo que habrá que gastar para obtener un alargamiento igual a l.

Problema 7. Calcular las integrales $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$ y $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$, trazar las gráficas de las funciones x y x^3 y explicar los resultados.

Preguntas.

1. ¿Qué es la integral definida de la función $f(x)$?

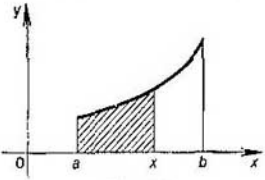


Fig. 45.

2. ¿Cómo se calcula la integral definida de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ por medio de la primitiva de $f(x)$?
3. ¿En qué consiste la relación entre la integral definida y el área de la figura correspondiente?
4. ¿Cómo se calcula el trabajo de una fuerza con ayuda de la integral definida?

1.9.4. La integral como una función del límite superior.
Observación. Sea $f(x)$ una función continua sobre el segmento $[a, b]$ y u un punto arbitrario de este segmento $(a \leqslant u \leqslant b)$. Por ahora consideraremos que $u > a$. Si utilizamos la fórmula de Newton — Leibniz para el segmento $[a, u]$, entonces obtendremos la igualdad

$$\int_{a}^{u} f(x)\,dx = F(u) - F(a).$$

Vamos a considerar que

$$\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

En este caso la fórmula (9) sigue siendo válida también para $u = a$.
Suponemos que

$$\Phi(u) = \int_{a}^{u} f(x)\,dx \quad (a \leqslant u \leqslant b). \tag{10}$$

Cuando u se considera variable con valores del segmento $[a, b]$, entonces $\Phi(u)$ es una función de u. Se llama *integral de f como función del límite superior.*

Si $f(x)$ es una función positiva, $\Phi(u)$ es el área de la figura acotada superiormente por la curva $y = f(x)$ y que se encuentra sobre el segmento $[a, u]$ del eje x. En la fig. 45 esta área viene rayada. De las igualdades (9) y (10) se desprende que

$$\Phi(u) = F(u) - F(a) \quad (a \leqslant u \leqslant b).$$

Vemos que la función $\Phi(u)$ difiere de $F(u)$ en una constante igual a $-F(a)$. Pero $F(u)$ es la primitiva de $f(u)$ sobre el segmento $[a, b]$. Por lo tanto $\Phi(u)$ también es la primitiva de $f(u)$ sobre el segmento $[a, b]$. Por cuya razón, si diferenciamos $\Phi(u)$ respecto de u, obtenemos $f(u)$:

$$\frac{d}{du}\int_a^u f(x)\,dx = f(u) \quad (a \leqslant u \leqslant b). \tag{11}$$

Aquí el símbolo $\frac{d}{du}$ designa la operación de tomar una derivada respecto de u.

Al sustituir en la igualdad (11) las letras x, u respectivamente por t, x obtenemos la fórmula

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{12}$$

§ 1.10. PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Las propiedades fundamentales de la integral definida se expresan por las fórmulas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \text{ donde } A \text{ es una constante,} \tag{2}$$

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = \int_c^d f(u)\,du, \text{ donde } c = \varphi(a),\ d = \varphi(b). \tag{4}$$

La propiedad (1) (para el caso cuando $a < c < b$) se infiere de la fig. 46: el área del trapecio curvilíneo sobre $[a, b]$ es igual al área sobre $[a, c]$ más el área sobre $[c, b]$.

La propiedad (2) expresa que el área de un trapecio curvilíneo, determinado por la función $f(x)$, aumenta en A veces para la función $Af(x)$.

La propiedad (3) muestra que el área de un trapecio curvilíneo, determinado por la suma $f(x) + \varphi(x)$, es igual a la suma de las áreas de los respectivos sumandos $f(x)$ y $\varphi(x)$.

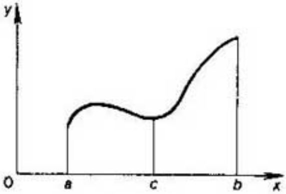


Fig. 46.

Sin duda, en estas explicaciones suponemos implícitamente que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ lo mismo que el número A son no negativos. En efecto, si, por ejemplo, $f(x) < 0$ sobre $[a, b]$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área del respectivo trapecio curvilíneo, tomado con el signo menos. Sin embargo, en este caso, y en general, en otros casos las propiedades (1), (2), (3) son válidas.

De (2) sigue

$$\int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^b [Af(x) + B\varphi(x)]\,dx = \int_a^b Af(x)\,dx + \int_a^b B\varphi(x)\,dx =$$

$$= A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

donde A y B son constantes.

La última igualdad se aplica, con facilidad, por inducción a cualquier número finito de sumandos. Por ejemplo,

$$\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx - 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^{\pi/2} (2\cos x + 3\,\mathrm{sen}\, x)\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx + 3\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\, x\, dx =$$

$$= 2\,\mathrm{sen}\, x\Big|_0^{\pi/2} - 3\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 2 + 3 = 5.$$

Problema 1. Calcular las integrales:

1) $\int_1^3 (x^2 - 3x + 2)\, dx$; 2) $\int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$;

3) $\int_0^{\pi/2} (\cos 2x - \mathrm{sen}\, 3x)\, dx$; 4) $\int_0^1 (e^{x^2}x + e^{-x})\, dx$;

5) $\int_0^{2\pi} (\cos 3x + \mathrm{sen}\, 2x)\, dx$.

En la fórmula (4) $\varphi(x)$ es una función creciente, continuamente diferenciable, para la cual $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$. Si $F(u)$ es la función primitiva para $f(u)$, entonces

$$(F[\varphi(x)])'_x = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x),$$

por lo tanto

$$\int_c^d f(u)\, du = F(d) - F(c) = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] =$$

$$= \int_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\, dx.$$

Ejemplo.

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\, 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\, 2\theta \cdot 2d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, u\, du = \frac{1}{2}(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

(sustitución $u = 2\theta$; $\theta = 0$, $u = 0$; $\theta = \pi/2$, $u = \pi$).

Problema 2. Calcular las integrales:

1) $\int_0^1 e^{x^2}x\, dx$; 2) $\int_0^1 e^{3x}\, dx$; 3) $\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, \frac{\theta}{2}\, d\theta$;

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx$; 5) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$;

6) $\int\limits_0^1 (x^2+1)^3 x\, dx$; 7) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx$.

§ 1.11. APLICACIONES GEOMETRICAS DE LAS INTEGRALES

1.11.1. Area de un círculo. La ecuación de una circunferencia (fig. 47) de radio R con el centro en el origen de

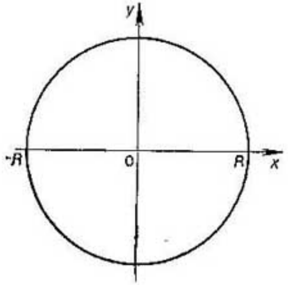


Fig. 47.

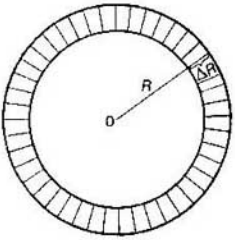


Fig. 48.

coordenadas x, y, tiene la forma

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Por consiguiente, la ecuación de su parte dispuesta por encima del eje x, se anota de la siguiente forma

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Pero en este caso el área del círculo de radio R es igual a (las explicaciones siguen)

$$S = 2 \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, R \cos\theta\, d\theta =$$

$$=2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=$$

$$=2R^2\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]\Bigg|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}=2R^2\frac{\pi}{2}=\pi R^2.$$

En la segunda igualdad de esta cadena hemos cumplido una sustitución de la variable

$$x=R\operatorname{sen}\theta,\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

y hemos usado la fórmula (4) del § 1.10, aplicándola en orden inverso. Durante el crecimiento de la variable θ desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$ la variable x crece desde $-R$ hasta R. Al mismo tiempo

$$dx = R\cos\theta\,d\theta.$$

Indiquemos que sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$ la función $\cos\theta$ es no negativa.

1.11.2. Longitud de una circunferencia. El área de un círculo es la función $S = \pi R^2$ de R. Añadamos a R un incremento $\Delta R > 0$. En ese caso el incremento respectivo

$$\Delta S = S(R + \Delta R) - S(R)$$

representará en sí el área del anillo rayado en la fig. 48. La longitud de la circunferencia $L(R)$ es también una función de R. Es evidente,

$$L(R)\,\Delta R < \Delta S < L(R + \Delta R)\,\Delta R,$$

por lo tanto

$$L(R)<\frac{\Delta S}{\Delta R}<L(R+\Delta R).$$

Pasando al límite en dichas igualdades para $\Delta R\to 0$, teniendo en cuenta que la función $L(R)$ es continua, obtenemos

$$\lim_{\Delta R\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta R}=L(R),$$

o sea

$$L(R) = S'(R) = (\pi R^2)' = 2\pi R,$$

y al fin hemos obtenido la fórmula de la longitud de la circunferencia.

1.11.3. Volumen de un cuerpo de rotación. Dado que Γ es una curva, descrita en el sistema rectangular de coordenadas x, y por una función continua positiva $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Calculemos el volumen V del cuerpo de rotación, limitado por la superficie de rotación de la curva Γ que gira alrededor del eje x y por los planos que pasan perpendicularmente al eje x por los puntos $x = a$, $x = b$ (véase la fig. 49).

Realicemos la partición del segmento $[a, b]$ en partes con ayuda de los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ y vamos a considerar que el elemento de volumen ΔV_k del cuerpo de rotación, limitado por los planos que pasan perpendicularmente al eje x por los puntos x_k y x_{k+1}, es igual de modo aproximado, al volumen de un cilindro con altura $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ y radio $y_k = f(x_k)$:

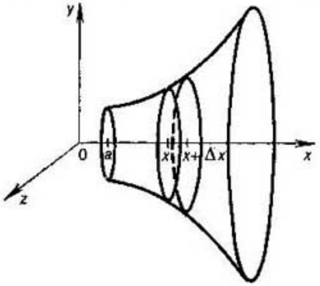


Fig. 49.

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \, \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \, \Delta x_k.$$

Pero, en este caso, el volumen V puede anotarse por medio de una igualdad aproximada

$$V \approx \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

Para obtener la igualdad exacta, conviene tomar el límite

$$V = \lim_{\text{máx}\, \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx,$$

y así obtenemos la fórmula del volumen de un cuerpo de rotación

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx. \qquad (1)$$

1.11.4. Volumen de una esfera. El volumen V de una esfera de radio R es igual a

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

En efecto, el círculo de radio R en el plano xOy tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = R ,$$

mientras que la semicircunferencia superior Γ tiene la ecuación

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Al girar Γ alrededor del eje x, obtendremos la superficie de nuestra esfera. Pero entonces según la fórmula (1)

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3} \pi R^3. \qquad (2)$$

1.11.5. Area de la superficie de una esfera. El volumen de una esfera de radio R

$$V(R) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

es una función de R.

El área $S(R)$ de la superficie de dicha esfera puede ser obtenida como una derivada

$$S(R) = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{V(R + \Delta R) - V(R)}{\Delta R} = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)' = 4\pi R^2.$$

Aclaremos dichos razonamientos. El incremento del volumen de una esfera que corresponde al respectivo incremento ΔR,

$$\Delta V = V(R + \Delta R) - V(R),$$

evidentemente, es igual al volumen de una capa limitada interiormente por la superficie esférica de radio R y por fuera mediante la superficie esférica de radio $R + \Delta R$. Cuando $S(R)$ es el área de la superficie de la esfera de radio R, entonces, con evidencia,

$$S(R)\, \Delta R < \Delta V < S(R + \Delta R)\, \Delta R$$

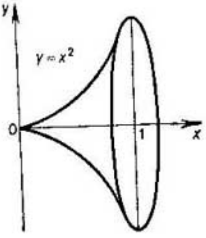


Fig. 50.

o

$$S(R) < \frac{\Delta V}{\Delta R} < S(R + \Delta R).$$

Por eso, tomando en consideración la continuidad de $S(R)$, obtenemos

$$S(R) = \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V'(R).$$

Problema 1. Calcular el volumen de un cilindro circular de altura H y radio de la base R.

Problema 2. Determinar el volumen de un cuerpo de rotación, limitado por un plano que pasa, a través del punto $x = 1$ en el eje x, perpendicularmente al último, y por la superficie de rotación formada por una curva que gira en torno del eje x:

$$1)\ y = x^2 \text{ (fig. 50)};\quad 2)\ y = x^3;\quad 3)\ y = \sqrt{x}.$$

§ 1.12. UTILIZACIÓN DE LAS INTEGRALES EN LA FISICA Y MECÁNICA

1.12.1. Trabajo de una carga eléctrica. Sean c y c' dos cargas que se encuentran en una recta y distan r una de la otra. La fuerza de su interacción F está dirigida a lo largo de esta recta y es igual a $F = a/r^2$ ($a = kcc'$, donde k es una constante). El trabajo W de dicha fuerza, cuando la carga c es inmóvil, y la carga c' se mueve por un segmento $[R_1, R_2]$, podrá ser calculado partiendo el segmento $[R_1, R_2]$ en partes de longitud Δr_i. En cada una de estas partes vamos a considerar de modo aproximado que la fuerza es constante, entonces el trabajo en cada semejante tramo será igual a $\frac{a}{r_i^2}\Delta r_i$. Haciendo estos tramos de partición cada vez más pequeños, cerciorarémonos que el trabajo W es igual a una integral

$$W = \lim_{\Delta r \to 0} \sum \frac{a}{r^2} \Delta r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{a}{r^2}\, dr \quad (0 < R_1 < R_2).$$

Esta integral la hallamos de repente, tomando en cuenta que

$$\frac{a}{r^2} = \left(-\frac{a}{r}\right)';$$

de donde

$$W = -\frac{a}{r}\Big|_{R_1}^{R_2} = a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

En particular, el trabajo efectuado por la fuerza F durante el traslado de la carga c', que al principio se encontraba a la distancia R_1 de la carga c, hasta en el infinito, es igual

$$W = \lim_{R_2 \to 0} a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{a}{R_1} \quad (0 < R_1).$$

Para $c' = 1$ hemos obtenido el potencial de la carga c como una función de R.

1.12.2. Presión de un líquido sobre la pared. Un depósito de altura H está lleno de agua. Calcular la presión del agua contra una pared rectangular del depósito si la base de dicho rectángulo es igual a a.

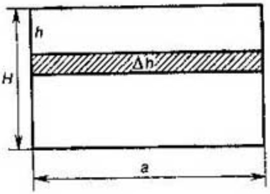


Fig. 51.

Dividimos la altura en pequeñas partes iguales Δh. La pared resultará partida en «elementos» (uno de los cuales está rayado, fig. 51). Puesto que un metro cúbico de agua pesa una tonelada, la presión de la columna de líquido de altura h_im, con sección de 1 m^2 es igual a h_i toneladas. Al mismo tiempo, la presión del agua sobre un elemento que se encuentra en la profundidad h_j es igual al producto de h_j por el área del elemento: $h_ia\,\Delta h$. El valor de la presión sobre la pared es aproximadamente igual a

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} ah_i\,\Delta h = a\sum_{i=1}^{n} h_i\,\Delta h,$$

donde la suma está aplicada a todos los Δh. Su expresión exacta es igual a una integral

$$P = \lim_{\Delta h \to 0} a\sum_{i=1}^{n} h_i\,\Delta h = a\int_0^H h\,dh = a\left.\frac{h^2}{2}\right|_0^H = \frac{aH^2}{2}.$$

1.12.3. Centro de gravedad. El centro de gravedad de un sistema de puntos materiales

$$(x_1,\ y_1),\quad (x_2,\ y_2),\ \ldots,\ (x_N,\ y_N),$$

cuyas masas, respectivamente, son

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_N,$$

tiene las coordenadas

$$x_0 = \frac{\sum\limits_{1}^{N} m_j x_j}{\sum\limits_{1}^{N} m_j}, \quad y_0 = \frac{\sum\limits_{1}^{N} m_j y_j}{\sum\limits_{1}^{N} m_j}.$$

Estas fórmulas se emplean para las masas que están distribuidas continuamente por el área. En este caso el papel de las sumas finitas lo juegan las integrales.

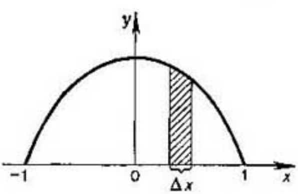


Fig. 52.

Encontremos el centro de gravedad de un segmento de la parábola $y = 1 - x^2$, cuya masa está uniformemente distribuida por el mismo, y su área está limitada por abajo por el eje x (fig. 52). Con este fin el segmento $[-1, 1]$ del eje x se divide en n partes iguales, de un largo Δx. En la fig. 52 una de estas partes viene rayada. Debido a la pequeñez de Δx podemos considerar que la masa del elemento rayado del segmento es igual a

$$\rho f(x_i)\,\Delta x = \rho y_i\,\Delta x$$

está concentrada en el punto $(x_i, y_i/2)$. Aquí ρ es la densidad de distribución de la masa.

En virtud de la simetría del segmento, la abscisa de su centro de gravedad es igual a $x_0 = 0$. En tanto que la ordenada puede expresarse aproximadamente en forma de

$$y_0 \approx \frac{\rho \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i}{2} y_i\,\Delta x}{\rho \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,\Delta x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\,\Delta x}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\,\Delta x},$$

donde la suma está distribuida entre todos los segmentos de partición $[-1, 1]$.

La expresión exacta para la ordenada del centro de gravedad de nuestra figura la obtendremos pasando al límite para $\Delta x \to 0$:

$$y_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta x}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\int\limits_a^b y^2\, dx}{\int\limits_a^b y\, dx}, \qquad (1)$$

donde en el caso dado $a = -1$, $b = 1$. De esta manera

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^2\, dx}{\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5}.$$

La expresión (1) puede considerarse como la fórmula común para la ordenada del centro de gravedad de la figura

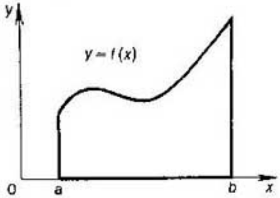


Fig. 53.

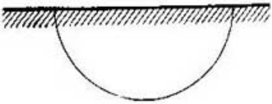


Fig. 54.

representada en la fig. 53, cuando su masa está distribuida uniformemente. La fórmula correspondiente para x_0 tiene la siguiente forma

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2} \int\limits_a^b xy\, dx}{\int\limits_a^b y\, dx}.$$

Problema 1. En un depósito con agua está sumergida una placa semicircular del radio R de modo que su diámetro se encuentra al nivel del agua (fig. 54). Determinar la presión del agua sobre uno de los lados de la placa.

Problema 2. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del semicírculo superior $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Problema 3. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del segmento de la parábola $y = x^2$ limitado por encima por la recta $y = 1$.

Problema 4. La intensidad de la corriente en un conductor es función del tiempo: $y = 1 + t^2$. ¿Qué cantidad de electricidad pasa a través de la sección del conductor durante el intervalo de tiempo $0 \leqslant t \leqslant 3$?

CAPÍTULO 2 (COMPLEMENTARIO)

FÓRMULA Y SERIE DE TAYLOR

§ 2.1. INTEGRACIÓN POR PARTES

Nos será útil un método importante de integración: la integración por partes. Dicho procedimiento se reduce a la fórmula siguiente:

$$\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx. \qquad (1)$$

Aquí $u(x)$ y $v(x)$ son funciones continuamente diferenciables sobre el segmento $[a, b]$. Puede suceder que la función subintegral en el primer miembro de (1) sea posible de representar en forma del producto $u'(x)\, v(x)$, donde u y v son ciertas funciones. En ese caso todas las dificultades se pueden reducir al cálculo de la integral de $u(x)\, v'(x)$ que puede resultar más sencilla.

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA (1). Tenemos

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \text{ó} \quad u'v = (uv)' - uv'.$$

Integrando esta igualdad respecto de $[a, b]$ obtendremos la expresión (1).

Ejemplo

$$\int_0^1 e^x x\, dx = \int_0^1 (e^x)'\, x\, dx =$$

$$= (e^x x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x 1\, dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

Problema 1. Calcular las integrales:

$$1) \int_0^1 e^{-x} x\, dx; \quad 2) \int_0^1 e^x x^2\, dx; \quad 3) \int \ln x\, dx;$$

$$4) \int_1^2 x \ln x\, dx; \quad 5) \int \operatorname{arctg} x\, dx; \quad 6) \int \operatorname{arcsen} x\, dx.$$

§ 2.2. DESIGUALDADES PARA LAS INTEGRALES DEFINIDAS

Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son continuas y satisfacen, sobre el segmento $[a, b]$, la desigualdad

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{1}$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

En realidad, de (1) para las sumas integrales de las funciones f y φ se desprende

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\, \Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\xi_j)\, \Delta x_j,$$

y después de pasar al límite para máx $\Delta x_j \to 0$ dicha desigualdad se conserva, es decir, obtendremos la expresión (2). Aquí hay que tener en cuenta que $\Delta x_j > 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Como corolario de (2) obtendremos una afirmación útil: si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones continuas sobre $[a, b]$, además $\varphi(x) \geqslant 0$ y $\psi(x)$ satisface la desigualdad

$$|\psi(x)| \leqslant M \tag{3}$$

para todos x pertenecientes a $[a, b]$, donde M es una constante, entonces

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \psi(x)\, dx \right| \leqslant M \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{4}$$

En verdad, de (3) se deduce

$$-M \leqslant \psi(x) \leqslant M.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\varphi(x) \geqslant 0$, obtendremos

$$-M\varphi(x) \leqslant \varphi(x)\psi(x) \leqslant M\varphi(x)$$

y, por consiguiente,

$$-M\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Pero estas dos desigualdades son equivalentes a la desigualdad (4).

En particular, de (4) para $\varphi(x) \equiv 1$ obtenemos

$$\left|\int_a^b \psi(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a).$$

§ 2.3. POLINOMIOS DE TAYLOR

Las siguientes funciones

$$4$$
$$2+3x$$
$$1+2x-x^2$$
$$3+7x+2x^2+x^3$$

pueden servir como ejemplos de polinomios de grado nulo, primero, segundo y tercero, respectivamente.

En general, se denomina *polinomio de grado n* la suma

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k \quad (a_n \neq 0),$$

donde a_k son números constantes prefijados y x, la variable independiente.

Los polinomios son cómodos en la práctica. A fin de calcularlos, partiendo de los x dados, resulta necesario efectuar sólo las operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

Por lo común, los polinomios se utilizan para aproximar por medio de ellos otras funciones más complejas. Uno de los métodos más importantes para aproximar las funciones por medio de un polinomio es la fórmula de Taylor [1]).

Deduzcamos la fórmula de Taylor. Prefijemos la función $f(x)$ sobre el segmento $[-a, a]$ que tiene derivadas de cuales-

[1]) *B. Taylor*, matemático inglés (1685—1731).

quiera órdenes. Tracemos su gráfica en el sistema rectangular de coordenadas (fig. 55). A través del punto A cuya abscisa es $x = 0$, tracemos una recta paralela al eje x. Su ecuación será

$$y = f(0).$$

Hemos obtenido un polinomio de grado nulo

$$Q_0(x) = f(0),$$

que se puede considerar como la *aproximación nula de una función* f en un entorno suficientemente pequeño del punto $x = 0$,

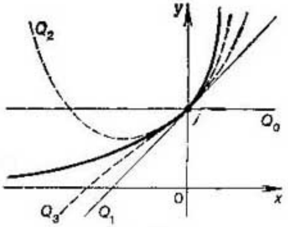


Fig. 55.

$$f(x) \approx f(0). \qquad (1)$$

La función $f(x)$ es continua y por lo tanto difiere poco de $f(0)$ para los valores de x correspondientes al pequeño entorno del punto $x = 0$. Además, en el propio punto $x = 0$ la igualdad aproximada se convierte en una igualdad exacta.

Tracemos ahora por el punto A una tangente a nuestra curva. Su ecuación tiene la siguiente forma

$$y = kx + b,$$

donde

$$b = f(0), \quad k = f'(0).$$

De este modo, la ecuación de una tangente se puede escribir en forma de

$$y = f(0) + f'(0)\,x.$$

Hemos obtenido un polinomio de primer grado

$$Q_1(x) = f(0) + f'(0)\,x,$$

el cual puede considerarse como la *primera aproximación de la función* $f(x)$ en el entorno del punto $x = 0$:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x. \qquad (2)$$

De la figura se infiere que la primera aproximación es mejor que la de grado nulo, en todo caso, para los x de un entorno suficientemente pequeño del punto $x = 0$.

Los miembros, primero y segundo, de la igualdad aproximada (2) no sólo son iguales en el punto $x = 0$, sino que también sus derivadas son iguales entre sí en dicho punto:

$$Q_1(0) = f(0) \quad \text{y} \quad Q_1'(0) = f'(0).$$

En la práctica la igualdad aproximada (2) se utiliza ampliamente.

Así pues, un polinomio de primer grado

$$Q_1(x) = f(0) + f'(0)\,x$$

posee la propiedad notable de que él mismo coincide con la función f en el punto 0 y tiene la derivada que coincide con la derivada de f en este punto. Encontremos ahora un polinomio de segundo grado

$$Q_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{3}$$

tal, que simultáneamente se satisfagan las igualdades

$$f(0) = Q_2(0), \quad f'(0) = Q_2'(0) \quad f''(0) = Q_2''(0),$$

sustituyendo $x = 0$ en $Q_2(x)$, obtendremos

$$f(0) = a_0.$$

Tomando la derivada de $Q_2(x)$, obtendremos

$$Q_2'(x) = a_1 + 2a_2 x$$

y adoptando $x = 0$, llegaremos a la igualdad

$$f'(0) = a_1.$$

Por fin, diferenciando $Q_2(x)$, obtendremos

$$Q_2''(x) = 2a_2,$$

de donde

$$f''(0) = 2a_2$$

y, por consiguiente,

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}.$$

Así pues, el polinomio buscado de segundo grado tiene la siguiente forma

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2, \quad (2! = 1 \cdot 2).$$

Hemos anotado 2! en vez de 2, teniendo en cuenta las generalizaciones posteriores. Planteemos un problema más: se requiere encontrar un polinomio de tercer grado

$$Q_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

tal, que al mismo tiempo se cumplan las igualdades

$$f(0) = Q_3(0),\ f'(0) = Q_3'(0),\ f''(0) = Q_3''(0),\ f'''(0) = Q_3'''(0). \tag{4}$$

Tenemos

$$Q_3'(x) = a_1 + 2a_2(x) + 3a_3x^2,$$
$$Q_3''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x,$$
$$Q_3'''(x) = 3\cdot 2a_3 = 3!a_3.$$

Por lo tanto, tomando en consideración (4), obtendremos

$$f(0) = Q_3(0) = a_0,$$
$$f'(0) = Q_3'(0) = 1!\,a_1,$$
$$f''(0) = 2!\,a_2$$
$$f'''(0) = 3!\,a_3.$$

Por consiguiente, el polinomio buscado de tercer grado tiene la siguiente forma

$$Q_3(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3.$$

De modo análogo, se puede plantear el problema más general: hay que encontrar un polinomio de grado n

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

tal, que simultáneamente se cumplan las igualdades

$$f(0) = Q_n(0)$$
$$f'(0) = Q_n'(0),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$f^{(k)}(0) = Q_n^{(n)}(0).$$

Diferenciando $Q_n(x)$ sucesivamente n veces y sustituyendo $x = 0$, obtendremos

$$a_0 = f(0),$$
$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!},$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Por lo tanto, el polinomio buscado $Q_n(x)$ de grado n tiene la forma de

$$Q_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

La función $Q_n(x)$ se llama *n-ésimo polinomio de Taylor de una función de grado x*.

El coeficiente x^k en el polinomio de Taylor se calcula según la fórmula $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, es decir, se toma la *k-ésima* derivada de f, sustituyendo en ella $x = 0$, y el resultado obtenido se divide entre $k!$.

Así pues, si necesitamos aproximar la función f en un entorno pequeño del punto $x = 0$, tiene sentido emplear la igualdad aproximada

$$f(x) \approx Q_n(x),$$

donde $Q_n(x)$ es el polinomio de Taylor de la función f.

Las gráficas de los polinomios de Taylor consecuentes de la función f según los grados x se aproximan cada vez más a la gráfica de f, por lo menor en un entorno bastante pequeño del punto A, claro está, en caso de que la función f sea diferenciable un número suficiente de veces.

Ejemplo 1. En la fig. 55 viene representada la curva $y = f(x)$. En calidad de su aproximación nula en el entorno del punto es natural tomar la gráfica de su polinomio de Taylor $y = Q_0(x)$ que no es más que la recta $y = f(0)$ paralela al eje x. Mientras que en calidad de la primera aproximación a nuestra curva es natural tomar la tangente a dicha gráfica en el punto $x = 0$. Su ecuación es $y = Q_1(x)$, donde $Q_1(x) = f(0) + f'(0)x$. La siguiente aproximación es la segunda $y = Q_2(x)$, donde $Q_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2$. Es un polinomio de Taylor en potencias x de segundo grado, es decir, tal polinomio de segundo grado que tanto el propio polinomio, como sus derivadas de primer y segundo orden en el punto A, coinciden respectivamente con $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$. Vemos que las gráficas de los polinomios de Taylor consecuentes de la función f en potencias x se aproximan cada vez más estrechamente a la gráfica f, por lo menos, en un entorno bastante pequeño del punto A, claro está, en caso de que la función f sea diferenciable un número suficiente de veces.

§ 2.4. TÉRMINO RESIDUAL DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

En este párrafo demostramos una fórmula importante

$$f(x) = Q_n(x) + R_n(x), \tag{1}$$

donde

$$Q_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{2}$$

la cual se denomina *fórmula de Taylor de la función f en potencias x con término residual integral.*

En esta fórmula, como vemos, $Q_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Taylor de la función f en potencias x. En lo que se refiere a la función $R_n(x)$, la última se denomina el *n-ésimo término residual de la fórmula de Taylor de la función f.*

La integral (2) deberá comprenderse de la manera siguiente. Se fija (se considera constante) un valor arbitrario de x sobre el segmento $[-a, a]$ y se realiza una integración por la variable t desde 0 hasta x. La función $(x-t)^n$ se considera como una función de t, debido a lo que la integral (3) será cierta función $R_n(x)$ de x, examinada sobre el segmento $[-a, a]$.

Se dice que el *término residual $R_n(x)$ está prefijado por la igualdad* (3) *en forma integral.* Existen otras formas más para expresar el término residual de la fórmula de Taylor.

Exponemos la demostración de la fórmula (1) de Taylor para $n = 3$. Cuando n es arbitrario, la demostración es análoga.

Así pues, fijemos (consideremos constante) el valor arbitrario del segmento $[-a, a]$ e integremos respecto de t desde 0 hasta x. Empleando la integración por partes, obtendremos:

$$R_3(x) = \frac{1}{3!} \int_0^x (x-t)^3 f^{(4)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{3!} \left[(x-t)^3 f^{(3)}(t) \Big|_{t=0}^{t=x} + 3 \int_0^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt \right] =$$

$$= -\frac{1}{3!} x^3 f^{(3)}(0) + \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt =$$

$$= -\frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{1}{2!} \Big[(x-t)^2 f''(t) \Big|_{t=0}^{t=x} +$$

$$+ 2 \int_0^x (x-t) f^n(t)\, dt \Big] = \frac{f'''(0)}{3!} x^3 - \frac{f''(0)}{2!} x^2 +$$

$$+ \int_0^x (x-t) f''(t)\, dt - -\frac{f'''(0)}{3!} x^3 - \frac{f''(0)}{2!} x^2 -$$

$$-\frac{f'(0)}{1!} x + \int_0^x f'(t)\, dt = -\frac{f'''(0)}{3!} x^3 -$$

$$-\frac{f''(0)}{2!} x^2 - \frac{f'(0)}{1!} x - f(0) + f(x).$$

La última igualdad es cierta en virtud de la fórmula de Newton—Leibniz

$$\int_0^x f'(t)\, dt = f(x) - f(0).$$

Hemos demostrado que

$$R_3(x) = -Q_3(x) + f(x),$$

de donde

$$f(x) = Q_3(x) + R_3(x).$$

Esta es la fórmula de Taylor para $n = 3$. Hemos indicado que la deducción de la fórmula general de Taylor para n arbitrario es análoga.

Mencionemos la siguiente estimación para el término residual: si existe una constante positiva M tal que

$$|f^{n+1}(x)| \leqslant M \tag{4}$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$ y cualquier x que pertenece al segmento $[0, a]$, entonces

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{5}$$

En efecto,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n M\,dt = \frac{M}{n!} \int_0^x (x-t)^n\,dt =$$

$$= \frac{-M}{n!} \left. \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right|_{t=0}^{t=x} = \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{6}$$

En la primera desigualdad de esta cadena es necesario tener en cuenta la desigualdad (4) del § 2.2.

El segundo miembro de la desigualdad (6) tiende a cero cuando $n \to \infty$, y además muy rápidamente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Ma^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

lo que es evidente para $0 \leqslant a \leqslant 1$[1]).

Esto se utiliza para apreciar el error de aproximación $f(x) \approx Q_n(x)$. En el caso cuando la condición (4) no se satisface, hay otras valoraciones que sustituyen la estimación (5), sin embargo, no nos detendremos en este problema.

Ejemplo 2. Examinemos la función

$$y = \operatorname{sen} x.$$

Anotemos para esta función la fórmula de Taylor cuando $n = 4$. Obtenemos

$f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$,
$f'''(x) = -\cos x$, $f^{\mathrm{IV}}(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{\mathrm{V}}(x) = \cos x$;
$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$,
$f'''(0) = -1$, $f^{\mathrm{IV}}(0) = 0$.

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x),$$

donde, de acuerdo con la fórmula (5), si nos limitamos con los valores de x desde 0 hasta $\pi/4$ (es decir, vamos a considerar $a = \pi/4$), teniendo en cuenta que para nuestro caso

[1]) No aducimos la demostración para $a > 1$, pero no la necesitaremos.

$M = 1$ (véase (4)) se cumplen las desigualdades

$$|R_4(x)| \leqslant \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 < \frac{1}{400}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Por consiguiente, tiene lugar la igualdad aproximada

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$$

con una exactitud de hasta 1/400.

Si en el desarrollo de sen x según la fórmula de Taylor se toma mayor número de términos, obtenemos un polinomio de grados más altos que aproxima con aún mayor exactitud.

Recurriendo a semejantes métodos se calculan las tablas trigonométricas y muchas otras.

Problema 1. Mostrar que las fórmulas de Taylor para las funciones $\cos x$, e^x, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^m$ para $n = 4$ tienen la siguiente forma

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x),$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_n(x),$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}x^4 + R_4(x).$$

Problema 2. Para la función $\cos x$ hallar M y estimar el resto cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

Problema 3. Para la función e^x hallar M y estimar el resto si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Problema 4. Anotar las fórmulas examinadas en el problema 1 para $n = 6$

Problema 5. Calcular los números e, $e^{1/2}$, $\cos(1/100)$, $\operatorname{sen}(1/10)$ con una exactitud de hasta 10^{-4}. Los ángulos se miden en radianes.

§ 2.5. FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Del párrafo anterior nos enteramos de que la fórmula de Taylor puede servir como buen medio de aproximación de una función con ayuda de polinomios. Otro medio importante para estos fines es la fórmula de interpolación de Lagrange.

2.5.1. Polinomio de Lagrange de primer grado. Al principio deduciremos la fórmula de Lagrange correspondiente al caso en que la función f se interpola por una función lineal, o sea, por un polinomio de primer grado.

Supongamos que viene dada la función

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

sobre el segmento $[a, b]$, además están prefijados los valores de x_1, x_2 del argumento x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$.

Pongamos

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$$

y planteemos el problema: es necesario encontrar un polinomio de primer grado

$$P_1(x) = kx + b \tag{1}$$

el cual en los puntos $x = x_1$ y $x = x_2$ coincide con la función f. Con otras palabras, se necesita encontrar los números k y b para satisfacer las igualdades

$$P_1(x_1) = f(x_1) = y_1, \quad P_1(x_2) = f(x_2) = y_2.$$

Este problema se resuelve de modo simple. Es evidente que deben cumplirse las igualdades

$$kx_1 + b = y_1,$$

$$kx_2 + b = y_2,$$

las cuales pueden considerarse como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas k y b. Dicho sistema tiene un determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 < 0,$$

distinto de cero. Por lo tanto posee el único par de soluciones para k, b. Después de hallar los números k, b, sustituyéndolos en la expresión (1), obtenemos el polinomio buscado de primer grado.

No es difícil de percibir que éste puede ser anotado en la forma siguiente

$$y = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2. \tag{2}$$

En efecto, el segundo miembro de (2) es

$$y = kx + b,$$

$$k = \frac{y_1}{x_1 - x_2} + \frac{y_2}{x_2 - x_1}, \quad b = -\frac{x_2 y_1}{x_1 - x_2} - \frac{x_1 y_2}{x_2 - x_1},$$

de donde se ve que la función (2) es un polinomio de primer grado.

Luego, si sustituimos en (2) $x = x_1$ o $x = x_2$, entonces, respectivamente, obtenemos $y = y_1$, $y = y_2$.

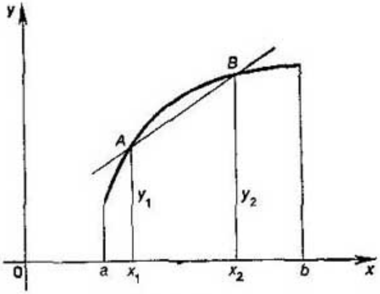


Fig. 56.

Hemos comprobado directamente que la fórmula (2) da la solución del problema planteado. Esta última como ha sido aclarado es la única.

La fórmula (2) se denomina *fórmula de interpolación de Lagrange de la función* f.

El polinomio $P_1(x)$ se llama *polinomio interpolador de Lagrange de primer grado que interpola la función* f *en los puntos (nodos de interpolación)* $x = x_1$ y $x = x_2$.

A estos razonamientos se les puede comunicar un carácter geométrico. En la fig. 56 viene representada la gráfica de la función $y = f(x)$.

Sobre el segmento $[a, b]$ del eje x están marcados dos puntos x_1 y x_2 $(x_1 < x_2)$. Les corresponden los puntos A y B de la gráfica. Las ordenadas de los puntos A, B han sido designadas con y_1, y_2. La recta que pasa a través de A y B tiene la ecuación $y = kx + b$, cuyo segundo miembro es un polinomio de primer grado que resuelve el problema planteado.

Si la curva $y = f(x)$ es suave, es decir, su derivada es continua y el segmento $[x_1, x_2]$ es bastante pequeño, entonces el polinomio P_1 que interpola la función f, difiere poco de ella. Por lo tanto, tiene sentido examinar la igualdad aproximada

$$f(x) \approx P(x) \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_2). \tag{3}$$

A semejantes igualdades se recurre ampliamente en la práctica. La función compuesta se sustituye por otra simple, que es una función lineal. La función f puede no estar dada por una fórmula, sino por ejemplo, puede estar representada mediante una gráfica o tabla. Con ayuda de una igualdad aproximada ella se sustituye por una función lineal cercana a la primera.

Se dice que al resolver el problema en cuestión hemos interpolado la función f en los puntos x_1, x_2.

2.5.2. Polinomio de Lagrange de segundo grado. Prefijemos ahora sobre el segmento $[a, b]$ tres valores: x_1, x_2, x_3, o sea,

$$a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b.$$

Les corresponden los valores de la función f:

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad y_3 = f(x_3).$$

Planteemos el problema de encontrar un polinomio de segundo grado

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{4}$$

tal que dicho polinomio coincida con la función f en los puntos x_1, x_2, x_3, es decir, que se satisfagan simultáneamente las igualdades

$$\begin{aligned} P_2(x_1) &= f(x_1) = y_1, \\ P_2(x_2) &= f(x_2) = y_2, \\ P_2(x_3) &= f(x_3) = y_3. \end{aligned}$$

De ese modo, los números a_0, a_1, a_2 deben satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 &= y_1, \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 &= y_2, \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 &= y_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Hemos obtenido un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas a_0, a_1, a_2. Después de hallar los números

a_0, a_1, a_2 y al sustituirlos en la fórmula (4), obtendremos el polinomio buscado $P_2(x)$. Si efectuásemos dichos cálculos, nos cercioraríamos de que los números a_0, a_1, a_2, para cualesquier x_1, x_2, x_3 indicados, distintos entre sí, siempre se podrán encontrar y además del modo único[1]).

Sin embargo, no vamos a realizar dichos cálculos, sino que de inmediato anotaremos la fórmula buscada, dándole una forma apta para los cálculos

$$P_2(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2+$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3. \qquad (6)$$

Mostremos que la función $P_2(x)$ resuelve el problema planteado.

En efecto, es evidente que el segundo miembro de la igualdad (6) es un polinomio de segundo grado. Además, si sustituimos en (6) $x=x_1$, entonces obtendremos

$$P_2(x_1)=1\cdot y_1+0\cdot y_2+0\cdot y_3=y_1.$$

De semejante manera, sustituyendo en (6) $x=x_2$ y $x=$ $=x_3$, obtendremos, respectivamente,

$$P_2(x_2)=0\cdot y_1+1\cdot y_2+0\cdot y_3=y_2,$$
$$P_3(x_3)=0\cdot y_1+0\cdot y_2+1\cdot y_3=y_3.$$

Con esto queda demostrado que la función $P_2(x)$ es un polinomio de segundo grado, resolutorio del problema planteado.

Desde el punto de vista geométrico, dicho problema puede interpretarse del modo siguiente.

La fig. 57 expone la gráfica de la función $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. En ella vienen marcados los puntos A, B, C que tienen las abscisas dadas x_1, x_2, x_3, $a\leqslant x_1<x_2<$ $<x_3\leqslant b$. Las ordenadas de estos puntos se designan, respectivamente, por medio de y_1, y_2, y_3.

La ecuación

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2$$

determina en el sistema rectangular de coordenadas una parábola arbitraria, cuyo eje es paralelo al eje y, por eso el

[1]) El lector que conoce los determinantes, dirá que cuando los números x_1, x_2, x_3 son diferentes, el determinante del sistema (5) no es igual a cero, lo que conduce a la existencia y unicidad de la solución de a_0, a_1, a_2 del sistema para todos y_1, y_2, y_3.

problema planteado desde el punto de vista geométrico se reduce al encuentro de tal parábola (con el eje paralelo al eje y), que pase a través de los puntos A, B, C.

De lo dicho se deduce que semejante parábola para todos valores prefijados de x_1, x_2, x_3 $(a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b)$ existe y además la única.

El polinomio $P_2(x)$ definido por la fórmula (6), se denomina *el polinomio interpolador de Lagrange de segundo*

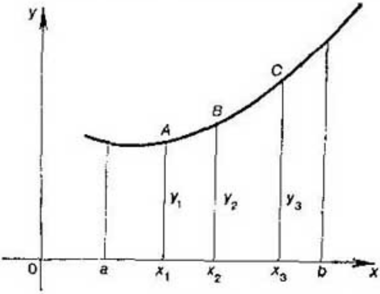


Fig. 57

grado que interpola la función f en los puntos (nodos de interpolación) $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$ $(a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b)$.

2.5.3. Polinomio de Lagrange de n-ésimo grado. Por analogía se deduce la fórmula para *el polinomio interpolador de Lagrange de n-ésimo grado para $n+1$ nodos* x_1, x_2, ..., x_{n+1} $(a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b)$. Dicho polinomio se define como el siguiente polinomio de n-ésimo grado

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

que coincide en los puntos indicados con f $(f(x_1) = P_n(x_1), \ldots, f(x_{n+1}) = P_n(x_{n+1}))$. Su expresión tiene la forma siguiente:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n+1})}\, y_k$$

Observación. Surge un problema importante acerca de qué error cometemos en la igualdad aproximada

$$f(x) \approx P_n(x) \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_{n+1}). \tag{7}$$

Se puede demostrar que si la función $f(x)$ tiene en el segmento $[x_1, x_{n+1}]$ la derivada $f^{(n+1)}(x)$ del orden $n+1$ que satisface en dicho segmento la desigualdad

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1},$$

entonces el error de aproximación (7) satisface la desigualdad

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|A(x)| \quad (x_1 \leqslant x \leqslant x_{n+1}), \tag{8}$$

donde

$$A(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ \dots\ (x-x_{n+1}).$$

En particular,

$$|f(x)-P_1(x)| \leqslant \frac{M_2}{2}|(x-x_1)(x-x_2)| =$$

$$= \frac{M_2}{2}(x-x_1)(x_2-x) \leqslant \frac{M_2}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 (x_1 \leqslant x \leqslant x_2). \tag{9}$$

El lector puede demostrar por sí mismo de que la función $(x-x_1)(x_2-x)$ alcanza en el segmento $[x_1, x_2]$ un máximo que es igual a $\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2$.

También tenemos

$$|f(x)-P_2(x)| \leqslant \frac{M_3}{6}|(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|.$$

Además vamos a considerar que los nodos x_1, x_2, x_3, son equidistantes, o sea

$$x_2 = x_1 + h, \quad x_3 = x_1 + 2h,$$
$$A(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Entonces obtendremos

$$|A(x)| \leqslant \begin{cases} \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 \cdot 2h = \frac{h^3}{2}, & (x_1 \leqslant x \leqslant x_2) \\ 2h\left(\frac{x_3-x_2}{2}\right)^2 = \frac{h^3}{2} & (x_2 \leqslant x \leqslant x_3). \end{cases}$$

De ese modo,

$$|A(x)| \leqslant \frac{h^3}{2} (x_1 \leqslant x \leqslant x_3),$$

y, por consiguiente,

$$|f(x)-P_2(x)| \leqslant \frac{M_3}{12} h^3. \tag{10}$$

2.5.4. Ejemplos de polinomios interpoladores. En la fig. 58 está representada la gráfica de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$. El punto A de dicha sinusoide corresponde al valor $x = \pi/2$. Por los puntos 0 y A viene trazada la recta L que tiene la ecuación

$$y = \frac{2}{\pi} x.$$

Es evidente que el polinomio interpolador de primer grado de la función $\operatorname{sen} x$ con los nodos de interpolación $x = 0$, $x = \pi/2$ no es otra cosa que la función $P_1(x) = \frac{2}{\pi} x$. Se puede examinar la igualdad aproximada

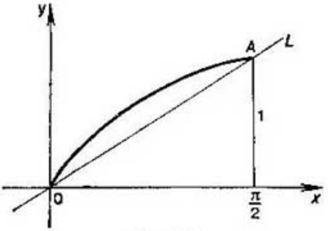


Fig. 58.

$$\operatorname{sen} x \approx \frac{2}{\pi} x$$

$$\left[0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$$

Para hallar el error de esta aproximación, utilicemos la estimación 2.5.3 (9). Tomando en consideración que $|f''(x)| = |\operatorname{sen} x| \leqslant 1 = M_2$, obtenemos

$$\left|\operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi} x\right| \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 < 0{,}31.$$

Esta aproximación resulta bastante burda. Mientras que la interpolación de esa misma función $y = \operatorname{sen} x$, pero en un segmento menor $[0, \pi/6]$, siendo $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/6$ proporciona la función

$$P_1(x) = \frac{6}{\pi} x.$$

Ahora el error de aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx \frac{6}{\pi} x$$

valora considerablemente mejor

$$\left|\operatorname{sen} x - \frac{6}{\pi} x\right| \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 < 0{,}012.$$

Representemos ahora tres nodos de interpolación

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}$$

y por medio de ellos construyamos un polinomio $P_2(x)$ de segundo grado que interpola sen x. Según la fórmula (6), donde es necesario considerar que

$$h = \frac{\pi}{4}, \quad y_1 = \operatorname{sen} 0 = 0, \quad y_2 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y_3 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1,$$

obtendremos

$$P_2(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left[-x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} x \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

El error de aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx P_2(x) \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

en todo el segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ lo estimaremos, empleando la fórmula 2.5.3. (10).

Teniendo en cuenta la desigualdad

$$|(\operatorname{sen} x)'''| = |\cos x| \leqslant 1 = M_3,$$

obtendremos la siguiente estimación

$$|f(x) - P_2(x)| \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 < 0{,}04.$$

Ejercicios.

1. Hallar el polinomio de primer grado $P_1(x)$ de Lagrange que interpola la función $\cos x$ en los nodos a) $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$; b) $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/4$; c) $x_1 = \pi/3$, $x_2 = 2\pi/3$.

Estimar el error de aproximación

$$\cos x \approx P_1(x)$$

en los segmentos a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, b) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

2. Hallar el polinomio de segundo grado de Lagrange $P_2(x)$ que interpola la función $\cos x$ en los nodos a) $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/4$, $x_3 = \pi/2$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/6$, $x_3 = {}^2/_3\pi$.

Estimar el error de aproximación

$$\cos x \approx P_2(x)$$

sobre los segmentos a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, b) $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

2.6.1. Ecuación diferencial simple de primer orden. Por el eje de coordenadas s se mueve un punto con una velocidad constante, igual al número a. Dicho punto se desplaza en el sentido positivo o negativo del eje s en función de que $a > 0$ ó $a < 0$.

Vamos a considerar que este punto en el instante $t = t_0$ tiene la coordenada $s = s_0$, $s(t_0) = s_0$. Se necesita hallar la ley $s = s(t)$ de movimiento del punto.

Puesto que la velocidad del punto es igual a la derivada de $s(t)$, se cumple la igualdad

$$s' = a, \tag{1}$$

de la cual precisamente deberá hallarse la función buscada.

La igualdad (1) se llama ecuación diferencial de primer grado, ya que la función incógnita $s(t)$ entra en la última bajo el signo de derivada y, además, de primer orden.

Resolvamos la ecuación (1). De ella se desprende que la función buscada $s(t)$ es cierta función primitiva de a, es decir, una función cuya derivada es igual a a (véase el punto 1.8.1). Encontremos, al principio, todas las primitivas $s(t)$ para a, y luego, entre las últimas, elijamos una para la cual se cumpla una condición adicional $s(t_0) = s_0$ que se denomina *condición inicial*.

Es evidente que la función at es la primitiva para a puesto que

$$(at)' = a.$$

Pero en este caso, la fórmula

$$s = at + C, \tag{2}$$

donde C, que es una constante arbitraria, determina toda función primitiva para a.

Así pues, la ley buscada del movimiento queda definida por la fórmula (2) donde aún es necesario hallar C. Ésta se determina a partir de la condición inicial

$$s_0 = at_0 + C.$$

Es evidente que

$$C = -at_0 + s_0.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (2) obtenemos la ley buscada del movimiento

$$s = a(t - t_0) + s_0.$$

Indiquemos que la función $s(t)$ que satisface la ecuación (1) se denomina *solución de la ecuación* (1). La fórmula (2) para distintos valores de la constante C contiene en sí todas las soluciones de la ecuación (1), debido a lo que se llama *solución general de la ecuación*. Sustituyendo en la fórmula (2) en vez de C un valor numérico determinado, obtedremos la solución de la ecuación (1) que se llama *su solución particular*.

El problema examinado se generaliza sin dificultades.

Supongamos que la velocidad de un punto que se mueve a lo largo del eje s se determina por medio de la ley

$$v = f(t),$$

donde $f(t)$ es la función continua dada de t. Se requiere definir la ley de movimiento del punto $s = s(t)$, cuando es conocida la condición inicial: $s(t_0) = s_0$, o sea, que dicho punto en el instante t_0 tiene la coordenada s_0. La función buscada $s(t)$ satisface, evidentemente, una ecuación diferencial de primer orden

$$s' = f(t). \tag{5}$$

Sin embargo, entonces $s(t)$ es una primitiva para la función $f(t)$. Todas las posibles funciones primitivas para la función $f(t)$ se expresan mediante la fórmula (véase el punto 1.8.1)

$$\int f(t)\,dt + C,$$

donde la integral es cierta (no importa cuál, pero definida) función primitiva de $f(t)$, y C es una constante arbitraria.

Mas en este caso la ley buscada del movimiento se define por la fórmula

$$s = \int f(t)\,dt + C, \tag{6}$$

donde se debe elegir de tal manera la constante que el miembro segundo de (6) se convierta para $t = t_0$ en $s = s_0$.

La fórmula (6) que contiene la constante arbitraria C es *la solución general de la ecuación diferencial* (5). Esta misma fórmula para un valor numérico C separado se convierte en la solución particular de la ecuación (1).

Ejercicios.

1. Un punto se mueve por el eje s de manera que su velocidad se expresa por medio de la fórmula a) at, b) $at + b$, c) t^2, d) $\cos t$, e) e^t. Encontrar la ley del movimiento, suponiendo que el punto tiene una coordenada a) $s = s_0$ cuando $t = t_0$, b) $s = 0$ cuando $t = 0$; c) $s = 1$ cuando $t = 1$, d) $s = 0$ para $t = 0$.

2.6.2. Ecuación diferencial simple de segundo orden. Dicha ecuación tiene la siguiente forma

$$y'' = f(x) \quad (a < x < b), \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función continua dada, mientras que la función $y = y(x)$ debe ser hallada. La última se encuentra bajo el signo de la segunda derivada. Por lo tanto la ecuación (1) se llama *ecuación diferencial de segundo orden.*

Toda función que satisface la ecuación (1) se llama *su solución* o *solución particular.*

Resolver la ecuación (1) significa encontrar todas sus soluciones.

Resolvémosla.

Introduzcamos en vez de y otra función $u = u(x)$ con ayuda de la igualdad

$$y' = u.$$

En este caso la ecuación (1) se describe así

$$u' = f(x) \quad (a < x < b).$$

Del punto 2.6.1 se deduce que

$$u = \int f(x)\,dx + b,$$

donde b es una constante arbitraria. Por eso

$$y' = \int f(x)\,dx + b$$

y, por consiguiente,

$$y = \int \left[\int f(x)\,dx + b \right] dx + C = \int \left(\int f(x)\,dx \right) dx + bx + C, \tag{2}$$

donde C es otra constante arbitraria.

Así pues, cualquier solución de la ecuación diferencial (1) se determina por la fórmula (2), en la cual figuran dos constantes arbitrarias b y C. La fórmula (2) se denomina la solución general de la ecuación diferencial (1), puesto que dicha fórmula contiene en sí todas las soluciones particulares de esta ecuación.

Los números b y C los hallamos de las condiciones complementarias. Por lo común, éstas son las llamadas condiciones iniciales, las cuales consisten en que de la solución $y = y(x)$ de una ecuación diferencial de segundo orden se exige que para dicha solución se satisfagan las igualdades $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, donde y_0 e y'_0 son números prefijados.

Elempjo 1. Hay que hallar todas las soluciones $y = y(x)$ de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = x^2$$

y destacar, entre dichas soluciones, una que satisfaga las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Según la fórmula (2) la solución general de la ecuación (2)

$$y = \int \left(\int x^2 \, dx \right) dx + bx + C = \int \frac{x^3}{3} \, dx + bx + C =$$

$$= \frac{x^4}{12} + bx + C, \qquad (3)$$

donde b y C son números constantes arbitrarios. Todas las soluciones particulares posibles de la ecuación (3) corresponden a todos los valores numéricos posibles de b y C.

Encontremos la solución particular que cumpla las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Tenemos

$$C = 1, \; y'(x) = \frac{x^3}{3} + b, \; 1 = b,$$

por consiguiente, la solución particular buscada se determina por la ecuación

$$y = \frac{x^4}{12} + 1. \qquad (4)$$

Ejemplo 2. Desde la superficie de la tierra hizo fuego verticalmente hacia arriba un fusil.

Vamos a considerar que la velocidad de la bala en el instante de su salida es de 800 m/s, mientras que la aceleración de la gravedad es igual a 10 m/s^2, además supondremos que sobre la tierra no hay aire. Determinar: 1) ¿Hasta qué altura H llegará la bala? 2) ¿Cuántos segundos la bala volará hasta alcanzar la altura H y luego hasta su retorno a la tierra? 3) ¿Qué velocidad tendrá la bala cuando alcance la máxima altura H y en el instante de su caída a la tierra?

Resolución. Dirigimos el eje s hacia arriba, colocando el origen de coordenadas sobre la tierra y como unidad de distancia consideraremos 1 metro (véase la fig. 59).

Supongamos que la función $s = s(t)$ expresa la ley del movimiento. Vamos a considerar que la salida de la bala tuvo lugar en el momento de tiempo $t = 0$. ¡Entonces la función buscada $s(t)$ satisface las condiciones iniciales:

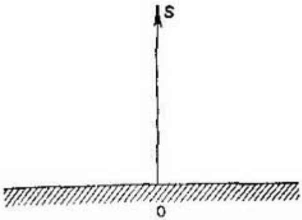


Fig. 59.

$$s(0) = 0,$$
$$s'(0) = 800. \qquad (5)$$

La aceleración de la bala es igual a -10. El signo menos ante el 10 lo hemos puesto porque, para el eje s elegido, la aceleración de la bala está dirigida en el sentido negativo. La función s satisface, sin duda, la ecuación

$$s'' = -10. \qquad (6)$$

De donde

$$s' = -10t + a,$$
$$s = -5t^2 + at + b, \qquad (7)$$

y la fórmula (7) expresa la solución general de la ecuación diferencial (6). Si se toman en consideración las condiciones iniciales (5), obtenemos

$$0 = b, \quad -10t + a = 800, \quad a = 800.$$

Por consiguiente, la ley de movimiento de la bala se expresa por la fórmula

$$s = -5t^2 + 800\ t.$$

Para determinar el valor máximo de la función $s(t)$, igualamos a cero la derivada de s:

$$-10t + 800 = 0.$$

De donde $t = 80$,

1) $H = s(80) = 32\,000$ (metros).

2) El tiempo de subida de bala a la altura H es igual a 80 segundos, el tiempo necesario para la subida y la caída lo obtendremos después de resolver la ecuación de $s = 0$, es decir,

$$t(-5t + 800) = 0.$$

La raíz $t = 0$ no sirve, mientras que la otra raíz $t = 160$ nos da el tiempo buscado.

3) La velocidad de la bala en el instante cuando alcanza la altura H resulta $s'(80) = 0$, y el momento de la caída $s'(160) = -800$.

Pues bien, la bala al salir del cañón del fusil con la velocidad de 800 m/s elevándose disminuye su velocidad. En el instante $t = 80$ la bala alcanza la altura máxima $H = 32\,000$ m, y luego cae, aumentando su velocidad. El tiempo de subida es igual al de retorno, o sea, 80 s. La velocidad de la bala en el instante de caída es exactamente igual a su velocidad en el momento de salida, es decir, 800 m/s. No obstante, la velocidad de caída está dirigida hacia abajo, o sea, en el sentido contrario a la de salida.

Ejercicios.

1. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

a) $y'' = x + 1$, b) $y'' = \operatorname{sen} x$, c) $y'' = e^x$.

2. Encontrar la solución particular de las ecuaciones del ejemplo anterior que satisfagan las condiciones iniciales:

a) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; b) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
c) $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

3. Supongamos que sobre la superficie terrestre no hay aire y la aceleración de la gravedad es igual a 10 m/s^2. Sea que de un punto dispuesto a una altura de 500 m hizo fuego hacia arriba un fusil. La velocidad de bala al salir es de 800 m/s. Determinar ¿hasta qué altura llegará la bala y durante cuánto tiempo? ¿Cuánto tiempo caerá la bala hasta llegar a la tierra y cuál será su velocidad en el instante de su caída al suelo?

2.6.3. Ecuación diferencial de una reacción química. Durante una reacción química cierta sustancia se descompone. Su masa θ es una función decreciente respecto al tiempo t ($\theta = \theta(t)$).

Se requiere hallar la función $\theta(t)$, si se sabe que la velocidad de su variación, o sea, su derivada $\theta'(t)$ es proporcional a la primera. De esta manera, $\theta(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\theta'(t) = -k\theta(t) \tag{1}$$

o brevemente

$$\theta' = -k\theta. \tag{1}$$

El número k es el coeficiente de proporcionalidad que para esta reacción se considera conocido. El número k es negativo, debido a que la función $\theta(t)$ decrece y su derivada $\theta'(t)$ es negativa.

La ecuación (1) es una ecuación diferencial de primer orden respecto a la función incógnita $\theta(t)$.

Se ve de modo directo que la función idénticamente nula $(\theta(t) \equiv 0))$, es una solución de la ecuación diferencial (1).

Supongamos ahora que $\theta(t)$ es una solución no nula de la ecuación (1). Dividamos dicha ecuación por $\theta(t)$:

$$\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = -k. \tag{2}$$

La igualdad (2) obtenida la integramos respecto de t:

$$\int \frac{\theta'(t)}{\theta(t)}\,dt = -\int k\,dt + C_1. \tag{3}$$

Aquí las integrales no son más que ciertas funciones primitivas determinadas de los miembros primero y segundo de la igualdad (2). Su elección depende de nosotros.

Recurriendo en la integral izquierda de (3) a la sustitución de la variable t por la variable θ, mediante el cambio $\theta = \theta(t)$ (véase 1.8.3), obtenemos

$$\int \frac{\theta'(t)}{\theta t}\,dt = \int \frac{d\theta}{\theta} = \ln|\theta|. \tag{4}$$

Poseemos también que

$$\int k\,dt = kt. \tag{5}$$

De esta manera, las primitivas indicadas resultan elegidas.

Así pues, la solución $\theta = \theta(t)$ satisface la igualdad

$$\ln|\theta| = -kt + C_1,$$

donde C_1 es la constante (dependiente de la solución). Pero en este caso

$$|\theta| = e^{-kt+C_1} = C_2 e^{-kt},$$

donde $C_2 = e^{C_1} > 0$ es una constante positiva. Por lo tanto

$$\theta = \pm C_2 e^{-kt}.$$

Para la solución dada $\theta(t)$ en la última igualdad se tiene un signo por completo determinado: menos o más.

Pongamos por último $C = \pm C_2$.

Obtenemos

$$\theta = Ce^{-kt}, \tag{6}$$

donde C es una constante no igual a cero (no obligatoriamente positiva).

Así pues, hemos demostrado que cuando $\theta(t)$ es una solución de la ecuación (1) distinta de cero, entonces de modo indispensable dicha solución se expresa por la fórmula (6) para cierta constante C (que depende de θ).

Al contrario, si la función $\theta(t)$ queda definida mediante la igualdad (6) para cierta constante C, la primera es una solución de la ecuación (1), ya que

$$\theta' = (Ce^{-kt})' = -kCe^{-kt} = -k\theta.$$

Notemos que la fórmula (6) para $C = 0$ da también una solución de la ecuación (1).

Así, *la fórmula* (6), *donde C es una constante arbitraria, expresa la solución general de la ecuación diferencial* (1). Entre las soluciones de la ecuación (1) elegimos aquella que describe la reacción química concreta dada.

Sea conocido que en el instante $t = 0$ la cantidad de sustancia que toma parte en la reacción era M (gramos). Deberá cumplirse de ese modo la condición

$$\theta(0) = M, \tag{7}$$

que se denomina *condición inicial.*

En este caso de (7) obtenemos

$$M = C.$$

Por lo tanto, la reacción examinada se describe por la función

$$\theta = Me^{-kt} \quad (0 \leqslant t). \tag{8}$$

Como la función e^u se llama exponencial, se dice que el decrecimiento de la sustancia, en la reacción química, tiene lugar según la ley exponencial (Me^{-kt}, $k > 0$).

El decrecimiento de acuerdo con la ley exponencial transcurre con rapidez.

Ejercicio 1. Una sustancia de masa M, en el instante $t = 0$, entró en una reacción química. Es conocido que en el momento de tiempo $t = 1$ la masa de dicha sustancia resultó ser m. Mostrar que el coeficiente $k = \ln\frac{M}{m}$.

2. Escribir la ecuación de la ley de cómo varía la masa de una sustancia después del momento de tiempo $t = t_0$, si en este momento la sustancia tenía la masa M. Determinar el instante en que la masa de la sustancia disminuirá en dos veces.

2.6.4. Ecuación diferencial de primer orden con variables separables. Examinemos la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = -ky, \tag{1}$$

donde k es un número dado, $y = y(x)$ es una función incógnita de x.

Ya hemos examinado dicha ecuación en el punto anterior, pero allí operamos con las variables t, θ, mientras que aquí, respectivamente, con las variables x, y.

En el punto 2.6.3 resolvimos la ecuación (1). Ahora la resolveremos de nuevo, pero obraremos de la manera adoptada para cálculos semejantes, omitiendo las explicaciones evidentes.

Anotemos la ecuación (1) en forma de

$$\frac{dy}{dx} = -ky.$$

Dado que y es su solución no igual a cero, obtenemos

$$\frac{dy}{y} = -k\,dx$$

y

$$\int \frac{dy}{y} = -\int k\,dx + C_1,$$

(donde C_1 es una constante que depende de y).

Por consiguiente,

$$\ln |y| = -kx + C_1,$$

y

$$|y| = C_2 e^{-kx} \quad (C_2 = e^{C_1} > 0),$$

donde C_2 es, de esta manera, una constante positiva. De aquí

$$y = \pm C_2 e^{-kx}$$

y por fin, suponiendo $C = \pm C_2$, obtendremos

$$y = Ce^{-kx}, \tag{2}$$

donde C es una constante distinta de cero.

Así pues, cuando y es una solución de la ecuación (1), diferente de cero, aquélla queda definida por la igualdad (2) para cierta constante C, no igual a cero.

A la inversa, la función (2) para cualquier C, inclusive para C igual a cero, satisface la ecuación (1):

$$y' = (Ce^{-kx})' = -kCe^{-kx} = -ky.$$

De ese modo, la fórmula (2), donde C es una constante arbitraria, expresa la solución general de la ecuación diferencial (1).

Cabe advertir que razonando como antes, se puede resolver la ecuación diferencial de la siguiente forma

$$y' = \frac{\psi(y)}{\varphi(x)} \quad (0 < x < b, \quad C < y < d), \tag{2}$$

donde las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ son continuas sobre los intervalos indicados. Mostremos lo dicho mediante ejemplos.

La expresión del tipo (2) se denomina *ecuación diferencial con variables separables*.

Señalemos que la función $y = y(x)$ se llama *solución de la ecuación diferencial* (2), si tiene en cierto intervalo una derivada que satisface en él la ecuación (2).

Ejemplo 1. Sea dada la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0, \ -\infty < y < \infty). \tag{3}$$

Es una ecuación diferencial de primer orden del tipo (2).

Comencemos a resolverla. Escribimos dicha ecuación de nuevo en otra forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Vamos a buscar la solución de $y = y(x)$, distinta de cero (para todas $x \neq 0$). Tenemos

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

De donde

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C_1,$$

donde C_1 es una constante. Por consiguiente,

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2,$$

en que nosotros consideremos $C_2 = e^{C_1}$ ($> 0!$).

Por lo tanto

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln C_2,$$

$$\left|\frac{y}{x}\right| = C_2$$

y

$$\frac{y}{x} = \pm C_2.$$

Suponiendo que $C = \pm C_2$, obtenemos

$$y = Cx \quad (x \neq 0) \tag{4}$$

por ahora para $C \neq 0$.

Ahora verifiquemos que la función (4) obtenida satisface la ecuación (3) y además no sólo para $C \neq 0$, sino también para $C = 0$:

$$y' = (Cx)' = C = \frac{Cx}{x} = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

De este modo, la fórmula (3), donde C es una constante arbitraria, determina la solución general de la ecuación (2).

Ejemplo 2. Se da la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0, \ -\infty < x < \infty). \tag{5}$$

Es una ecuación diferencial de primer orden del tipo (2).

Resolvamos esta ecuación. Supongamos que

$$y = y(x) \quad (a < x < b)$$

es la solución de la ecuación (5) que está definida sobre el intervalo (a, b). Dicha solución no es igual a cero para toda x de este intervalo, puesto que la ecuación (5) para $y=0$ no tiene sentido.

Anotemos la ecuación (5) de la siguiente manera

$$y\,dy = x\,dx,$$

de donde

$$\int y\,dy = \int x\,dx + C_1,$$

donde C_1 es una constante (que depende de y). Por lo tanto

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

o

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}\ (C = 2C_1).$$

Hemos obtenido

$$y^2 = x^2 + C. \tag{6}$$

Así pues, si la función $y = y\,(x) \neq 0$ es la solución de la ecuación (5) sobre el intervalo (a, b), entonces existe tal constante C que $y\,(x)$ satisface en dicho intervalo la ecuación algebraica (6).

Pero tiene lugar la afirmación inversa: si la función $y = y\,(x) \neq 0$, que tiene cierta derivada, satisface para cierto valor de C, sobre cierto intervalo (a, b), la ecuación algebraica (6), entonces ella es la solución de la ecuación diferencial (5) en este mismo intervalo.

En efecto, vamos a considerar que esta función se pone en vez de y en la ecuación (6). Al diferenciar (6) respecto a x, obtenemos

$$2yy' = 2x \quad \text{ó} \quad y' = \frac{x}{y},$$

es decir, la función y satisface la ecuación diferencial (5).