CAPÍTULO 3

NÚMERO REAL

§ 3.1. NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

3.1.1. Desarrollos decimales de números racionales. Sea dado un número racional positivo p/q $(p > 0,\ q > 0)$. Es necesario convertirlo en una fracción decimal.

Empezaremos por el caso más sencillo, cuando q no tiene otros divisores simples a excepción de 2 y 5.

Ejemplos:

$$\frac{7}{2^2\cdot 5^4}=\frac{7\cdot 2^2}{2^4\cdot 5^4}=\frac{28}{10^4}=0{,}0028,$$

$$\frac{3}{2^5\cdot 5^2}=\frac{3\cdot 125}{2^5\cdot 5^5}=\frac{375}{10^5}=0{,}00375.$$

Vemos que un número racional positivo arbitrario p/q, en que q no posee otros divisores excepto 2 y 5, se desarrolla en una fracción decimal finita:

$$\frac{p}{q}=\alpha_0,\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_m. \tag{1}$$

Aquí α_0 es un número entero no negativo, mientras que α_1, α_2, . . . son cifras, cada una de las cuales puede tomar uno de los valores: 0, 1, 2, . . ., 9.

Mas también la afirmación contraria es válida: una fracción finita arbitraria $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ es un número racional:

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \frac{\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_m}{10^m}.$$

Aquí $\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_m$ es un número entero compuesto de α_m unidades, α_{m-1} decenas, α_{m-2} centenas, ...

Hemos demostrado que *a fin de que un número racional positivo, expresado por una fracción irreducible p/q, se desarrolle en una fracción decimal finita, es necesario y suficiente que su denominador q no tenga otros divisores simples a excepción de 2 y 5.*

Las demás fracciones p/q pueden tener solamente desarrollos decimales infinitos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, es decir, tales que para cualquier k natural existe un $l > k$ natural tal que $\alpha_l > 0$.

Una fracción decimal finita arbitraria $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \ldots \alpha_m$ $(\alpha_m > 0)$ la anotaremos también en forma de

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m 000 \ldots$$

o bien en forma de una fracción decimal infinita (como fue definida más arriba):

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} (\alpha_m - 1)\, 999 \ldots \qquad (2)$$

Por ejemplo, escribiremos

$$0{,}2365 = 0{,}2365000\ldots = 0{,}2364999\ldots.$$

Pasemos de nuevo a ejemplos. El lector, por sí mismo, puede comprobar los siguientes desarrollos decimales infinitos:

$$\frac{5}{9} = 0{,}555\ldots = 0,(5),$$

$$\frac{7}{9} = 0{,}777\ldots = 0,(7),$$

$$\frac{23}{99} = 0{,}2323\ldots = 0,(23),$$

$$\frac{71}{99} = 0{,}7171\ldots = 0,(71),$$

$$\frac{7}{999} = 0{,}007007\ldots = 0,\ (007).$$

Todos estos ejemplos son desarrollos periódicos. Verbigracia, 5/9 es, como se dice, nulo de enteros y 5 en el período, y 71/99 es nulo de enteros y 71 en el período.

En general, tiene lugar la igualdad

$$\frac{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{\underbrace{9 \ldots 9}_{m \text{ veces}}} = 0,\ (\alpha_1 \ldots \alpha_m).$$

Aclaremos su justeza en el ejemplo de la fracción 17/99. Dividiremos 17 entre 99 según la regla conocida. Para esto primero añadimos al número 17 dos ceros. Tenemos

$$1700 = 17\,(99 + 1) = 17 \cdot 99 + 17.$$

Por consiguiente, después de la segunda etapa de división de 17 por 99 obtendremos

$$\begin{array}{r|l} 17 & 99 \\ \underline{1700} & \overline{0{,}17} \\ 17 & \end{array}$$

o sea, resulta en el cociente 17 y en el resto 17. Ahora, de nuevo, añadimos al resto dos ceros y después de la división de nuevo obtendremos en el cociente 17 y en el resto 17. De esta manera nuestro proceso continuará periódicamente sin fin:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 99 \\ & \overline{0{,}1717\ldots} \end{array}.$$

Por lo tanto

$$\frac{17}{99} = 0{,}1717\ldots$$

A continuación se citan ejemplos de fracciones decimales periódicas de forma más compleja:

$$1{,}21353535\ldots = 1{,}21\,(35) = \frac{121}{100} + 0{,}00\,(35) = \frac{121}{100} + \frac{35}{99}\,\frac{1}{100},$$

$$0{,}2\,(371) = \frac{2,\,(371)}{10} = \frac{2}{10} + \frac{371}{9990},$$

$$3{,}13\,(4) = \frac{313,\,(4)}{100} = \frac{313}{100} + \frac{4}{900}.$$

Vemos que *una fracción decimal periódica* $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \ldots \alpha_m\,(\beta_1 \ldots \beta_n)$ *se puede examinar como un desarrollo decimal de cierto número racional*:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m\,(\beta_1 \ldots \beta_n). \qquad (3)$$

A la inversa, *un desarrollo decimal de un número racional positivo arbitrario p/q es necesariamente periódico.*

En realidad, dividiremos p por q recurriendo al procedimiento común:

$$\begin{array}{l|l} \underline{p} & \quad q \\ \beta_1 & \overline{\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_s \alpha_{s+1}} \\ \ldots & \\ \overline{\quad\beta_s} & \\ \overline{\quad\beta_{s+1}} & \\ \quad\ldots & \end{array} \qquad (4)$$

Sea que en la s-ésima etapa de este procedimiento obtuvimos un resto β_s y todas las cifras del número p resultan agotadas.

Examinemos los restos

$$\beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+q-1}.$$

Su cantidad es q y cada uno de ellos es menor que q. Pero en este caso aunque sea dos de ellos deberán ser obligatoriamente iguales. Supongamos que son iguales β_m y β_n ($\beta_m = \beta_n$; $m < n$). Esto muestra que a partir de la m-ésima etapa el procedimiento (4) se vuelve periódico ($\alpha_{m+1} = \alpha_{n+1}$, $\alpha_{m+2} = \alpha_{n+2}$, ...).

Así pues, *a cada número racional positivo p/q le corresponde su infinito desarrollo decimal periódico de la forma* (3). Dicho desarrollo se obtiene con ayuda del procedimiento (4) completado en el caso (1) con el proceso (2).

Por otro lado, *un desarrollo infinito periódico arbitrario (de la forma* (3)*) corresponde, del modo indicado, a un número racional positivo único.*

A un número racional negativo $-p/q$ le ponen en correspondencia un desarrollo infinito decimal del número p/q, tomado con el signo «—».

Al número cero (que también es racional), *resulta natural, ponerle en correspondencia el desarrollo* $0 = +0{,}000\ldots = -0{,}00\ldots = 0{,}00\ldots$.

3.1.2. Desarrollos decimales de números irracionales. Además de las fracciones decimales periódicas existen las aperiódicas, por ejemplo: 0,1010010001...; 0,121122111222...

Un ejemplo más: si se extrae la raíz cuadrada de 2 según la regla conocida, obtendremos una fracción decimal aperiódica infinita: $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$. Esta fracción está definida en el sentido de que a todo número natural k le corresponde una cifra determinada α_k del k-ésimo orden del número $\sqrt{2}$, la cual se calcula unívocamente de acuerdo con la regla de extracción de la raíz cuadrada.

Si nuestro lector no conoce dicha regla, él puede, para obtener el desarrollo decimal del número $\sqrt{2}$, razonar del siguiente modo. Al principio, hallamos el mayor número entero, cuyo cuadrado es menor de 2. Evidentemente que es el número 1. Luego encontramos el mayor número del tipo $1,\alpha_1$, cuyo cuadrado es menor de 2. Este es el número 1,4. A continuación hallamos el mayor número del tipo $1,4\,\alpha_2$, cuyo cuadrado es menor que 2. Este número es 1,41. Siguiendo razonando así, se puede obtener unívocamente cualquier número de cifras después de la coma del desarrollo decimal del número $\sqrt{2}$.

El análisis matemático ofrece muchos caminos para calcular el número π con toda precisión prefijada de antemano, lo que conduce a un desarrollo decimal infinito determinado de π, que resulta ser aperiódico.

Daremos la definición del número irracional por ahora de modo puramente formal. *Se llama número irracional la fracción aperiódica infinita arbitraria*[1])

$$a = \pm\alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ \ldots, \tag{5}$$

donde α_0 *es un número no negativo entero, y* α_k $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ *son cifras, entretanto el signo de igualdad expresa que hemos designado el segundo miembro de* (5) *con* a. Por cierto, resulta cómodo decir que el segundo miembro de (5) es el desarrollo decimal del número a.

Los números racionales e irracionales se llaman números reales.

De lo dicho se deduce que todo número real no nulo puede ser escrito en forma de una fracción decimal infinita (5). Si dicho número es racional, su desarrollo decimal será una fracción decimal periódica. En caso contrario, de acuerdo con nuestra definición, la propia expresión (5) determina el número irracional.

Una fracción decimal no nula puede ser finita, sin embargo, ella no define un nuevo número racional: en virtud del acuerdo, expresado por la igualdad (2), esta fracción puede ser sustituida por una fracción periódica infinita equivalente.

---

[1]) Claro está que al signo «+» le corresponde un número (positivo), mientras que al signo «—» otro (negativo).

El número a, en el cual no todos α_k son iguales a cero, se denomina *positivo* o *negativo* en función del signo «+» o «—» que figura en (5); además, como de costumbre, omitiremos el signo «+».

Por ahora, los números reales fueron definidos formalmente, queda aún por determinar las operaciones aritméticas a las que se someten dichos números, introducir para los últimos el concepto de «>» y comprobar que estas operaciones y el concepto «>» concuerdan con las respectivas operaciones y el concepto «>» que se tienen para los números racionales, y también satisfacen las propiedades que planteamos ante los números.

§ 3.2. COMPARACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

Según la definición dos números

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots, \tag{1}$$

$$b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots,$$

ambos desarrollados en fracciones decimales infinitas o ambos desarrollados en fracciones decimales finitas no iguales a cero, resultan iguales entre sí cuando y sólo cuando tienen un mismo signo y además

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Para los números que pueden escribirse en forma de una fracción decimal infinita y también en forma de una finita, ambas definiciones no se contradicen una a la otra, puesto que si

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_m, \ \alpha_m > 0,$$

entonces $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ y

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} (\alpha_m - 1)\, 99 \ldots = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_{m-1} (\beta_m - 1)\, 99 \ldots,$$

lo que corresponde al criterio (3) para las fracciones decimales continuas (infinitas).

Para los números positivos a y b según la definición $a < b$, cuando $\alpha_0 < \beta_0$ o bien se encuentre un índice (un número entero no negativo) l tal que

$$\alpha_k = \beta_k \ (k = 0, 1, \ldots, l) \text{ y } \alpha_{l+1} < \beta_{l+1}. \tag{4}$$

Esta definición puede servir para dos desarrollos tanto finitos como infinitos.

Ejecicio 1. Entre dos números reales a y b ($a < b$) se tiene un número racional r ($a < r < b$) que se desarrolla en una fracción decimal finita. Se puede considerar que $r = 0$, si $a < 0$, $b > 0$.

Supongamos que $0 < a < b$ y

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots, \quad b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$$

son fracciones decimales infinitas. Si $\alpha_0 < \beta_0$, entonces

$$a \leqslant \alpha_0, 99 \ldots = \alpha_0 + 1 \leqslant \beta_0 < \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_k < \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots = b,$$

donde k es tal que $\beta_k > 0$. Esto muestra que en el caso dado se puede poner que $r = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_k$.

En el caso en que $\alpha_0 = \beta_0$, tendremos para cierto número l

$$\alpha_s = \beta_s \quad (s = 0, 1, \ldots, l-1), \ \alpha_l < \beta_l; \tag{5}$$

por lo tanto

$$a \leqslant \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_l 99 \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{l-1} (\alpha_l + 1) \leqslant$$
$$\leqslant \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_{l-1} \beta_l < \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_l\beta_{l+1} \ldots \beta_k < \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots = b$$
$$(\beta_k > 0),$$

y por consiguiente, se puede considerar que $r = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_k$.

El caso cuando $a < b < 0$ se reduce al anterior.

Problema 1. Entre los números

$$0{,}(78) \text{ y } 0{,}935050050005 \ldots$$

es necesario encontrar: 1) un número racional, 2) un número irracional, 3) un número racional e irracional, 4) dos números racionales, 5) dos números irracionales.

§ 3.3. APROXIMACIÓN DECIMAL DEL NÚMERO REAL

Prefijemos un número positivo arbitrario

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \tag{1}$$

en forma de una fracción decimal. El número

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

lo denominaremos *n-ésima aproximación decimal del número a por defecto.*

Son válidas las desigualdades

$$a^{(n)} \leqslant a \leqslant a^{(n)} + 10^{-n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

En realidad,

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \leqslant \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \leqslant \alpha_0, \alpha_1 \ldots$$
$$\ldots \alpha_n 99 \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + 10^{-n} = a^{(n)} + 10^{-n}.$$

El número $a^{(n)} + 10^{-n}$ se denomina *n-ésima aproximación del número a por exceso.*

Son válidas las desigualdades

$$a^{(1)} \leqslant a^{(2)} \leqslant a^{(3)} \leqslant \ldots,$$

o sea

$$a^{(n)} \leqslant a^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

En realidad,

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \leqslant \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1} = a^{(n+1)}).$$

Se cumplen también las desigualdades

$$a^{(1)} + 10^{-1} \geqslant a^{(2)} + 10^{-2} \geqslant a^{(3)} + 10^{-3} \geqslant \ldots,$$

es decir

$$a^{(n)} + 10^{-n} \leqslant a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

En efecto,

$$a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}999 \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n 99 \ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + 10^{-n} =$$
$$= a^{(n)} + 10^{-n}.$$

Vemos que los números $a^{(n)}$ no decrecen al incrementar n, quedando todo el tiempo no mayores que el número a. Mientras que los números $a^{(n)} + 10^{-n}$ no aumentan, quedando no menores que el número a. Además, la diferencia

$$(a^{(n)} + 10^{-n}) - a^{(n)} = 10^{-n} \to 0, \quad n \to \infty$$

o sea, tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Los números $a^{(n)}$ y $a^{(n)} + 10^{-n}$ son racionales y además se desarrollan en fracciones decimales finitas. Las computadoras contemporáneas están ajustadas para realizar cálculos con fracciones decimales[1]).

---

[1]) Por otra parte, de hecho, se aplica mucho el cálculo que se denomina binario.

En los cálculos prácticos los valores exactos de los números se sustituyen por los aproximados, en particular, por las aproximaciones $a^{(n)}$ y $a^{(n)} + 10^{-n}$.

§ 3.4. RECTA NUMÉRICA

Prefijemos un segmento que lo consideraremos como unidad, es decir, cuya longitud es 1. Queremos definir el concepto de la longitud de un segmento arbitrario AB respecto de la unidad elegida (segmento unitario).

El segmento AB se llama *conmensurable* con la unidad (con el segmento unidad), si existen ciertos números naturales p y q tales que si desde A trazamos p veces la q-ésima

Fig. 60.

parte del segmento unidad en dirección a B, llegaremos exactamente al punto B. Acerca de dicho *segmento se dice que él tiene el largo p/q*.

Como ejemplo de un segmento inconmensurable con la unidad se puede mencionar la hipotenusa de un triángulo rectángulo con los catetos iguales a la unidad. La longitud de este segmento es igual a $\sqrt{2}$.

Existe un conjunto infinito de segmentos inconmensurables con la unidad. Demos el método general para medirlos, o sea, para determinar su longitud.

Nos interesa el aspecto únicamente teórico de esta cuestión. Nos damos cuenta de que la longitud de un segmento (conmensurable o inconmensurable con la unidad) en la práctica se puede obtener sólo en forma aproximada, pero deseamos imaginarnos cómo esto se puede hacer teóricamente exacto.

Prefijemos una recta L, para la cual elegimos la dirección positiva (la indicada con la flecha en la fig. 60), un segmento unidad y el punto inicial O. Dicha recta se denomina *recta numérica* puesto que sus puntos se pueden examinar en calidad de ilustración de los números reales. A cada número racional positivo p/q le ponemos en correspondencia un punto de la recta L, denominado punto p/q, que se encuentra a la derecha de O y dista p/q desde O. Asimismo a cada número racional negativo $-p/q$ le ponemos en correspondencia sobre L otro punto (punto $-p/q$) simétrico al punto p/q respecto a O. Sea que al número 0 le hacemos coincidir con el punto O.

Diremos que el punto A sobre L es racional o irracional en función de que, el segmento OA que une dicho punto con O, sea conmensurable o inconmensurable con la unidad.

Hemos mostrado el procedimiento, en virtud del cual se establece la correspondencia biunívoca entre los números racionales y los puntos racionales de la recta.

Aplicaremos esta correspondencia para resolver un problema más complejo consistente en medir el segmento OA, donde A es cualquier punto de la recta L.

Prefijemos sobre la semirrecta positiva L_+ de la recta L un punto arbitrario A (racional o irracional).

Para determinar el largo $|OA|$ del segmento OA vamos a razonar del siguiente modo.

Elegimos un número entero no negativo α_0 que aproxima por defecto (inferiormente) el largo $|OA|$ con una exactitud hasta de la unidad. Esto significa que el punto α_0 de la semirrecta L_+ o coincide con A o se encuentra a la izquierda de A, sin embargo el punto $\alpha_0 + 1$ se situará sobre L_+ a la derecha de A.

El segmento $[\alpha_0, \alpha_0 + 1]$, que une los puntos α_0 y $\alpha_0 + 1$, lo denotamos mediante $\sigma_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$. Dicho segmento tiene las propiedades siguientes:

a) el punto A pertenece a σ_0 ($A \in \sigma_0$), no obstante, no es el extremo derecho de σ_0;

b) la longitud de σ_0 es igual a la unidad: $|\sigma_0| = 1$.

Aproximemos ahora la longitud de $|OA|$ por abajo con exactitud hasta de una décima. Esta circunstancia significa que elegimos la cifra α_1 (es decir, uno de los números $0, 1, \ldots, 9$) de manera que el punto α_0, α_1 de la semirrecta L_+ coincida con A, o se encuentre a la izquierda de A, pero al mismo tiempo que el punto $\alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}$ se encuentre a la derecha de A. Introduzcamos el segmento

$$\sigma_1 = [\alpha_0, \alpha_1;\ \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}],$$

el cual, evidentemente, posee las propiedades siguientes:

a) el punto A pertenece a σ_1, sin embargo, no es el extremo derecho de σ_1;

b) la longitud de σ_1 es igual a $|\sigma_1| = 10^{-1}$.

A continuación aproximamos la longitud $|OA|$ por abajo con una exactitud de hasta una centésima, o sea, hallamos la cifra α_2 tal que el segmento $\sigma_2 = [\alpha_0, \alpha_1\alpha_2; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + 10^{-2}]$ contenga en sí A y su extremo derecho no coincida con A. La longitud $|\sigma_2| = 10^{-2}$.

Este proceso lo continuaremos indefinidamente. En resumen obtendremos una sucesión de números

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots, \tag{1}$$

donde α_0 es un número entero no negativo y α_k $(k = 1, 2, \ldots)$ son cifras. En este caso para todo k natural el segmento

$$\sigma_k = [\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k; \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k + 10^{-k}]$$

de la semirrecta L_+ contiene en sí el punto A, su extremo derecho no coincide con A, y su longitud $|\sigma_k| = 10^{-k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Así pues, el punto A pertenece a todos los segmentos de σ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ y sus longitudes al crecer indefinidamente k, por lo visto, tienden a cero: $|\sigma_k| \to 0$, $k \to \infty$.

Ahora determinemos el número a, aplicando la descomposición decimal

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots, \tag{2}$$

donde α_0 es un número no negativo, α_k $(k = 1, 2, \ldots)$ son cifras.

El número a satisface las desigualdades

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k \leqslant a < \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k + 10^{-k} \tag{3}$$

para cualquier $k = 0, 1, 2, \ldots$, mientras que el punto A para todo k indicado se encuentra sobre L_+ entre los puntos $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k$ y $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k + 10^{-k}$. Esto muestra que precisamente el número a es la longitud $|OA|$ del segmento OA: $a = |OA|$.

Así, con ayuda del proceso (1) *a cada punto A de la semirrecta L_+ se puede poner en correspondencia un número positivo $a = |OA|$. En este caso, si cualquier otro punto B de la semirrecta L_+ se encuentra a la derecha de A, a dicho punto le corresponde un número mayor* ($b > a$). *El número a se denomina coordenada del punto A en la recta L.*

Es necesario tomar en consideración que, si el punto A se encuentra sobre L_+, o sea, yace en L a la derecha del punto O, entonces debido al proceso (1), siendo bastante grande n, resulta ser que $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n > 0$, de donde $a > 0$.

Luego, si el punto B se halla en L_+ a la derecha de A, resulta que, siendo n suficientemente grande, $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + 10^{-n} < \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n$, de donde $a < b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots$.

Planteemos el problema recíproco. Está prefijado un número positivo[1])

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots . \qquad (4)$$

Se necesita determinar: ¿existirá o no en L_+ un punto A tal que $a = |OA|$? A base de lo dicho esta pregunta puede expresarse de otra manera más: ¿existirá sobre L_+ un punto A perteneciente simultáneamente a todos los segmentos

$$\sigma_k = [\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k;\ \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k + 10^{-k}]$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)? \qquad (5)$$

La resolución de dicho problema se refiere a la geometría. La geometría lo resuelve de manera positiva, es decir, afirma que *sobre L_+ existe un punto único A que pertenece a todos los σ_k* $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Esta afirmación, en general, se ofrece en forma de una de los axiomas de la geometría (principio de segmentos encajados, véase el § 3.5), o la misma es corolario de otros axiomas iniciales.

Notemos que si

$$a = \frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$$

es un número positivo racional, entonces le corresponde en L_+ el punto racional p/q. Este punto pertenece a todos los segmentos σ_k de la semirrecta L_+ (véase (5)). Precisamente es el punto que hemos obtenido, aplicando el proceso examinado más arriba. Existe sólo el punto único, el cual pertenece a todos σ_k.

Para el punto O como su coordenada elegimos el número 0, mientras que al punto arbitrario A' de la semirrecta negativa L_- le corresponderá el número $-a$, donde a es la coordenada del punto A, simétrico al A' con respecto a O.

A base de lo dicho, *entre los números y puntos reales de la recta L tiene lugar una correspondencia biunívoca. Además, los números racionales $\pm p/q$ se convierten en puntos racionales $\pm p/q$ y viceversa. Siguiendo, si el punto B se encuentra sobre L a la derecha del punto A, entonces los números b y a que les corresponden se hallan en la siguiente relación $a < b$ y viceversa.*

---

[1]) Consideramos que la descomposición decimal (4) no está constituida por entero de nueves, sino comenzando desde algún orden.

§ 3.5. PRINCIPIO DE SEGMENTOS ENCAJADOS

Supongamos que según cierta ley viene dada una sucesión de segmentos $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, *que se hallan sobre una recta* L *y que tienen las siguientes propiedades*:

a) *los segmentos* σ_k *están encajados; esto significa que para todo* n *el segmento* σ_{n+1} *pertenece a* σ_n $(\sigma_{n+1} \subset \sigma_n,\ n = 1, 2, \ldots)$;

b) *con el crecimiento ilimitado de* n *la longitud de* $|\sigma_n|$ *tiende a cero* $(|\sigma_n| \to 0,\ n \to \infty)$.

En este caso sobre L *existe un punto* A, *además el único, que pertenece a todos los segmentos* σ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Los segmentos σ_n, sobre los cuales hablamos en el § 3.4, están, justamente, encajados, y para ellos $|\sigma_n| = 10^{-n} \to 0$, $n \to \infty$.

El principio de segmentos encajados establece *la existencia* del punto A, perteneciente a todos los σ_n y *su unicidad.*

§ 3.6. OPERACIONES ARITMÉTICAS. CÁLCULOS APROXIMADOS

Prefijemos dos números positivos

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots, \quad b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots,$$

que vienen definidos por fracciones decimales finitas o infinitas.

El lector conoce bien de qué modo se suman las fracciones decimales finitas. Con facilidad adivinará como efectuar dicha operación para sumar una fracción decimal finita con otra infinita. Mas si ambos sumandos tienen descomposiciones decimales infinitas, se presentan dificultades. Estas dificultades pueden superarse: se puede indicar la regla de adición de las fracciones con restos infinitos. Por otra parte, dicha regla tiene un carácter del todo teórico, es decir, prácticamente es irrealizable hasta el fin, puesto que representa en sí cierto proceso infinito.

En cálculos prácticos nos vemos obligados a sustituir los números a y b por sus aproximaciones:

$$\bar{a} \approx a, \quad b \approx \bar{b},$$

que, por lo común, son fracciones decimales finitas $\bar{a}$, $\bar{b}$. La suma $\bar{a} + \bar{b}$ se considera como la aproximación de la suma teórica $a + b$:

$$\bar{a} + \bar{b} \approx a + b.$$

Pero en este caso surge el problema sobre cómo estimar el error de aproximación. Sin embargo, es importante tanto para la teoría, como para la práctica, darse cuenta de que la suma de los números reales arbitrarios a y b puede determinarse aunque sólo sea teóricamente, pero de forma exacta. Tiene sentido hablar sobre la aproximación de cualquier número, para nuestro caso, del número $a + b$, únicamente cuando estemos seguros de que dicha aproximación existe.

Lo dicho se puede difundir también para la diferencia, el producto y el cociente de los números.

A continuación ofrecemos la representación de cómo se pueden determinar de modo teórico las operaciones aritméticas sobre los números. No obstante, estas consideraciones son útiles también para los cálculos prácticos, puesto que muestran cómo se deben efectuar en forma aproximada las correspondientes operaciones y qué estimaciones de errores surgen en estos casos.

Supongamos que

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n, \qquad (1)$$
$$b^{(n)} = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Al crecer indefinidamente n, los números $a^{(n)}$ tienden hacia a, sin decrecer:

$$a^{(0)} \leqslant a^{(1)} \leqslant a^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant a. \qquad (2)$$

mientras que los números $a^{(n)} + 10^{-n}$, sin crecer:

$$a^{(1)} + 10^{-1} > a^{(2)} + 10^{(2)} > \ldots > a. \qquad (3)$$

La suma $a + b$ se define como el número para el cual se satisfacen las desigualdades

$$a^{(n)} + b^{(n)} \leqslant a + b < (a^{(n)} + 10^{-n}) + (b^{(n)} + 10^{-n})$$

para todos $n = 1, 2, \ldots$, o en términos geométricos, $a + b$ es el número, al cual sobre la recta numérica le corresponde el punto que pertenece a todos los segmentos

$$\sigma_n = [a^{(n)} + b^{(n)}, a^{(n)} + b^{(n)} + 2 \cdot 10^{-n}].$$

Semejante punto existe, y además es el único, ya que los extremos izquierdos de σ_n no decrecen, mientras que los derechos no crecen y, por lo tanto, los segmentos σ_n están encajados ($\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$). Además, $|\sigma_n| = 2 \cdot 10^{-n} \to 0$ $(n \to \infty)$.

En realidad, si quisiéramos sumar a y b en cálculos prácticos, tendríamos que sumar $a^{(n)}$ y $b^{(n)}$, para n suficientemente grandes, y consideraríamos que el número $a^{(n)} + b^{(n)}$ es la aproximación al número $a + b$. El error μ_n que cometeríamos en este caso, no superaría $2 \cdot 10^{-n}$:

$$\mu_n \leqslant 2 \cdot 10^{-n}.$$

De modo semejante la diferencia $a - b$ $(a > b)$ se determina como el número que satisface las desigualdades

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) < a - b < (a^{(n)} + 10^{-n}) - b^{(n)}.$$

Sobre la recta numérica a este número corresponde un punto que pertenece a todos los segmentos

$$\sigma_n = [a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}), \quad a^{(n)} + 10^{-n} - b^{(n)}]$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Este punto existe y además es el único, puesto que $|\sigma_n| = 2 \cdot 10^{-n} \to 0$, $n \to \infty$, y los segmentos σ_n se encajan. Es necesario tomar en consideración que $a^{(n)}$ no decrece, y $b^{(n)} + 10^{-n}$ no crece, por consiguiente $a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})$ no decrece. Asimismo, $a^{(n)} + 10^{-n}$ no crece, y $b^{(n)}$ no decrece, de donde $a^{(n)} + 10^{-n} - b^{(n)}$ no crece.

Si en calidad de la aproximación de $a - b$ se toma el número $a^{(n)} - b^{(n)}$, el error no supera $2 \cdot 10^{-n}$, puesto que el punto $a^{(n)} - b^{(n)}$ pertenece a σ_n.

Es natural, luego, determinar el producto ab como el número que satisface las desigualdades

$$a^{(n)}b^{(n)} \leqslant ab < (a^{(n)} + 10^{-n})(b^{(n)} + 10^{-n})$$

para todos $n = 1, 2, 3, \ldots$, o bien como el número al cual en la recta numérica corresponde un punto que pertenece a todos los segmentos

$$\sigma_n = [a^{(n)}b^{(n)}, (a^{(n)} + 10^{-n})(b^{(n)} + 10^{-n})]$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Dicha definición es correcta, ya que los segmentos σ_n están encajados y

$$|\sigma_n| = a^{(n)}10^{-n} + b^{(n)}10^{-n} + 10^{-2n} <$$
$$< (\alpha_0 + 1)\, 10^{-n} + (\beta_0 + 1)\, 10^{-n} + 10^{-2n} \to 0,$$
$$n \to \infty.$$

En el caso dado la estimación de la aproximación depende no sólo de n, sino también de α_0 y β_0.

Por último, el cociente a/b ($a > 0$, $b > 0$) se determina como el número que satisface las desigualdades

$$\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}} < \frac{a}{b} < \frac{a^{(n)}+10^{-n}}{b^{(n)}} \quad (n \geqslant l).$$

Esta definición también es correcta, puesto que los segmentos

$$\sigma_n = \left[\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}}, \frac{a^{(n)}+10^{-n}}{b^{(n)}}\right] \quad (n \geqslant l)$$

están encajados y

$$|\sigma_n| = \frac{a^{(n)}+10^{-n}}{b^{(n)}} - \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}} = \frac{a^{(n)}10^{-n}+b^{(n)}10^{-n}+10^{-2n}}{b^{(n)}(b^{(n)}+10^{-n})} <$$

$$< \frac{(\alpha_0+1)\,10^{-n}+(\beta_0+1)\,10^{-n}+10^{-2n}}{(\beta_l)^2\,10^{-2l}} \to 0,$$

$$n \to \infty \quad (n \geqslant l). \tag{4}$$

Aquí es necesario explicar qué es l. El hecho consiste en que el desarrollo decimal del número b puede empezar por ceros y en este caso para los n pequeños resultará $b^{(n)} = 0$. El número l es el número mínimo entero no negativo, para el cual $\beta_k > 0$. De esta manera, o $\beta_0 > 0$, o bien $\beta_k = 0$ ($k = 0, 1, \ldots, l-1$) y $\beta_l > 0$.

Vemos, que en calidad de la aproximación a/b se puede tomar el número $a^{(n)}/b^{(n)}$ que pertenece, evidentemente, a σ_n, con estimación de la aproximación que se da en (4).

Intencionadamente no nos detendremos en las operaciones aritméticas con números de todo signo. Como el lector sabe, se reducen a las operaciones correspondientes sobre los números positivos. Por ejemplo, para adicionar dos números a y b de distintos signos, siendo $|a| \geqslant |b|$, hace falta poner que $a + b = \pm(|a| - |b|)$, donde el signo se elige el mismo que tiene a.

§ 3.7. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Enumeremos las propiedades de los números reales que pueden ser argumentadas por medio de los métodos utilizados anteriormente. Dichas propiedades se dividen en 5 grupos (I—V).

A los grupos I, II, III pertenecen las propiedades elementales ordinarias, con las cuales chocamos al calcular y comparar números.

El grupo IV está constituido por una propiedad (la de Arquímedes).

El grupo V consta también de una propiedad (la continuidad de un conjunto de números reales).

Estamos acostumbrados a que los números racionales satisfacen las propiedades I, II, III, IV. Ahora se afirma que a las propiedades I—IV satisfacen no sólo los números racionales, sino en general, todos los números reales.

En lo que se refiere a la propiedad V, el conjunto de sólo los números racionales no la satisface, pues no es lo suficiente completo.

I. PROPIEDADES DE ORDEN

I_1. Para cada par de números reales a y b tiene lugar una y sólo una relación.

$$a = b, \ a > b, \ a < b.$$

I_2. De $a < b$ y $b < c$ se desprende que $a < c$.

I_3. Si $a < b$, se puede encontrar un número racional c tal que $a < c < b$.

II. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y RESTA

II_1. $a + b = b + a$.

II_2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

II_3. $a + 0 = a$.

II_4. $a + (b - a) = b$.

II_5. De $a < b$ se deduce que $a + c < b + c$ para todo c.

III. PROPIEDAD DE LAS OPERACIONES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.

III_1. $ab = ba$.

III_2. $(ab)\, c = a\, (bc)$.

III_3. $a \cdot 1 = a$.

III_4. $a \cdot \dfrac{b}{a} = b, \ \ a \neq 0$.

III_5. $(a + b)c = ac + bc$.

III_6. De $a < b$, $c > 0$ sigue $ac < bc$.

IV. PROPIEDAD DE ARQUÍMEDES

Cualquiera que sea el número $c > 0$, existe un número natural $n > c$.

V. PROPIEDAD DE CONTINUIDAD DEL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

Supongamos que está prefijada una sucesión de segmentos encajados (conjuntos de números x, para los cuales $a_n \leqslant x \leqslant b_n$

$$\sigma_n = [a_n, \ b_n] \quad (n = 1, \ 2, \ \ldots),$$

es decir, tales que $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, cuyas longitudes tienden a cero:

$$d_n = b_n - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

En este caso existe un número, y además el único, que pertenece a todos los σ_n.

En el § 3.5 conocimos el análogo geométrico de la propiedad V. Allí se dijo que esta propiedad para los segmentos naturales σ_n sobre una recta, en la geometría se debe postular. Aquí, como segmentos se toman los respectivos conjuntos de números y en este caso la propiedad se verifica (demuestra) mediante desarrollos decimales de números, al igual que todas las demás propiedades I—IV.

3.8.1. Propiedades de la función a^x. La función exponencial a^x, para un número positivo a, no igual a 1 ($a > 0$, $a \neq 1$), en distintas etapas de la enseñanza media se determinaba para los valores de x naturales, racionales, enteros y por fin, arbitrarios reales.

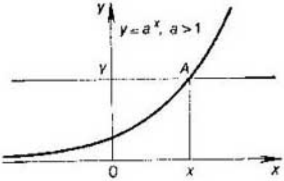

Fig. 61.

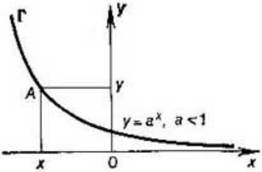

Fig. 62.

Tienen lugar las siguientes propiedades fundamentales de dicha función:

$$a^0 = 1, \tag{1}$$

$$a^x > 0 \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad (-\infty < x,\ y < \infty), \tag{3}$$

y si $a > 1$ (fig. 61), entonces

$$a^x < a^y \quad (-\infty < x < y < \infty), \tag{4}$$

$$a^x \to +\infty \text{ para } x \to +\infty, \tag{5}$$

$$a^x \to 0 \text{ para } x \to -\infty. \tag{6}$$

Pero cuando $a < 1$ (fig. 62), en virtud de la igualdad

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x},$$

y también de (4), (5), (6) se sigue que

$$a^x > a^y \quad (-\infty < x < y < \infty), \tag{4'}$$

$$a^x \to 0, \text{ si } x \to +\infty, \tag{5'}$$

$$a^x \to +\infty, \text{ si } x \to -\infty. \tag{6'}$$

Además, es válida la propiedad: *la función exponencial a^x es continua sobre todo el eje real, o sea, su gráfica es continua.*

En la fig. 3 vienen expuestas las gráficas de a^x para $a = 2$, $a = 10$, $a = 0{,}1$, $a = 1/2$.

A continuación reunimos en un lugar las definiciones de a^x, correspondientes a los casos de x entero, racional y real arbitrario.

3.8.2. a^x para los números x enteros y racionales. Si n es un número natural, el número a^n se determina como el producto $a^n = a \ldots a$ de n factores, cada uno de los cuales es igual a a, mientras que el número a^{-n}, mediante la igualdad

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

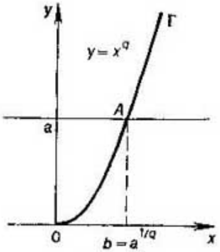

Fig. 63.

Por definición se supone también que

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

De esta manera la función a^x queda definida para todos n enteros ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Las propiedades (1)—(6) para los x enteros se verifican con facilidad. Si q es un número natural, entonces el número $a^{1/q}$ se define como el valor aritmético de la raíz del q-ésimo grado de a, es decir, $a^{1/q}$ es tal número no negativo, cuyo q-ésimo grado es igual a a:

$$(a^{1/q})^q = a.$$

En realidad dicho número es positivo, puesto que el q-ésimo grado de cero es cero, mientras que en el caso dado $a > 0$.

Surge la pregunta sobre la existencia del número $a^{1/q}$, o sea, ¿existe, en realidad, tal número positivo, cuyo q-ésimo grado es igual a a? Sí, existe. Asegurémonos de esto. La función

$$y = x^q,$$

donde q es un número natural, para los valores de $x \geqslant 0$ tiene la gráfica del tipo mostrado en la fig. 63. La ordenada y del punto variable de la gráfica Γ crece continuamente desde 0 hasta $+\infty$, cuando su abscisa crece sin cesar desde 0 hasta $+\infty$. Tracemos por encima del eje x una recta paralela al eje x que diste a. Esta recta corta la gráfica Γ en el único punto A, cuya abscisa la designamos con b:

$$b^q = a.$$

Por consiguiente

$$b = a^{1/q}.$$

Hemos demostrado la existencia del número $b = a^{1/q}$ empleando el método gráfico. Esto mismo se puede demostrar también de modo formal sin recurrir a la gráfica. El número b es el único: otro cualquier número elevado a la potencia q, nos dará un número mayor o menor que a.

De la unicidad se desprende el siguiente hecho: si A y B son números positivos y

$$A^q = B^q,$$

entonces

$$A = B.$$

En efecto, A y B son valores aritméticos de la raíz del q-ésimo grado de un mismo número. Pero en este caso $A = B$, ya que el valor aritmético de la raíz del q-ésimo grado de un número positivo es único.

Ahora supongamos que p/q es un número racional positivo arbitrario (p y q son enteros, $p > 0$, $q > 0$).

Por definición

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}. \tag{7}$$

Aquí la primera igualdad de la definición de $a^{p/q}$, mientras que la segunda puede ser demostrada. Realmente, si elevamos el tercer término de (7) a la q-ésima potencia, también obtenemos a^p:

$$(a^{1/q})^{pq} = \underbrace{\overbrace{(a^{1/q} \ldots a^{1/q})}^{q \text{ veces}} \ldots \overbrace{(a^{1/q} \ldots a^{1/q})}^{q \text{ veces}}}_{p \text{ veces}} = \underbrace{a \ldots a}_{p \text{ veces}} = a^p.$$

De acuerdo con la definición también

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}. \tag{8}$$

De este modo la función a^x queda definida para todos x racionales.

A base de dichas definiciones se demuestran las propiedades (2)—(6) para los x racionales.

3.8.3. a^x cuando los números x son irracionales. Demos la definición formal de a^α, cuando α es un número irracional. La argumentación de la naturalidad de dicha definición se ofrece más adelante en los p.p. 3.8.4 y 3.8.5.

Supongamos que $a > 1$. Prefijemos un número irracional, por el momento positivo,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$$

e introduzcamos para el n natural arbitrario los números

$$\alpha^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \text{ y } \alpha^{(n)} + 10^{-n},$$

que aproximan α por defecto y exceso. Para estos números se cumplen las relaciones

$$\alpha^{(n)} \leqslant \alpha < \alpha^{(n)} + 10^{-n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Se puede determinar el número α como el único número que satisface dichas relaciones. Por otro lado, los números $\alpha^{(n)}$ y $\alpha^{(n)} + 10^{-n}$ son racionales y para ellos, en caso de $a > 1$, a base de la propiedad (4), la cual en la etapa dada se considera demostrada para los números racionales, se cumplen las desigualdades

$$a^{\alpha^{(n)}} < a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Por definición a^α designa un número que satisface las desigualdades

$$a^{\alpha^{(n)}} \leqslant a^\alpha < a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

sea cual fuese el n natural.

Tal número existe y además el único (véase más adelante el p. 3.8.5).

Si α es un número irracional negativo, entonces por definición

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}.$$

NOTA 1. La diferencia

$$a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} - a^{\alpha^{(n)}} = a^{\alpha^{(n)}}[a^{10^{-n}} - 1] < a^{\alpha_0+1}[a^{10^{-n}} - 1]$$

tiende hacia cero siendo ilimitado el crecimiento de n, puesto que la magnitud

$$a^{10^{-n}} - 1 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(véase la demostración en el p. 3.8.6). Esto muestra que el número $a^{\alpha^{(n)}}$ tiende al número a^α cuando $n \to \infty$:

$$a^{\alpha^{(n)}} \to a^\alpha \quad (n \to \infty),$$

o, como se dice, *la magnitud* $a^{\alpha^{(n)}}$ *cuando* $n \to \infty$ *tiende hacia el límite*, y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha^{(n)}} = a^\alpha.$$

De esta manera, podemos dar otra definición del número a^α, equivalente a la definición ya formulada.

Si $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$, *entonces el número* a^α *es un límite:*

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha^{(n)}}.$$

3.8.4. La función a^x sobre el eje real. En el p. 3.8.2 la función a^x quedó definida para los x racionales, y en el p. 3.8.3, para los x irracionales. Por consiguiente, la función a^x resulta definida sobre todo el eje real $(-\infty, \infty)$.

Se puede demostrar que ella satisface las propiedades (1)—(6), es decir, dichas propiedades se cumplen no sólo para los x, y racionales, sino también para todos los reales. Además, se puede demostrar que la función a^x en el eje $(-\infty, \infty)$ es continua, o sea, tiene una gráfica continua. No alegamos la demostración formal de estas afirmaciones. Las explicaciones que se dan más adelante en el p. 3.8.5 nos ayudarán en cerciorarnos de que dichas afirmaciones son válidas. También podemos citar otra definición equivalente:

a^x *es una función continua que está determinada en el eje real, la cual se calcula para los valores racionales de* $x = \pm p/q$ $(p > 0,\ q > 0)$ *por las fórmulas* (7), (8), *y cuando* $x = 0$ *resulta igual a la unidad.*

NOTA 1. Así pues, si cierta función es continua en el eje real y para los valores racionales de $x = \pm p/q$ se calcula mediante las fórmulas $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$, $a^{-p/q} = 1/a^{p/q}$, su valor, en un punto irracional arbitrario $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ es un número β que satisface las desigualdades

$$a^{\alpha^{(n)}} \leqslant \beta < a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} \quad (a > 1).$$

NOTA 2. También existe otra definición de a^x para $a > 0$ y α irracional, en la cual dicha función se considera como un número, que satisface las desigualdades $a^{r_1} < a^{\alpha} < a^{r_2}$ para todos r_1 y r_2 racionales, donde $r_1 < r_2$. Esta definición es equivalente a la citada más arriba.

3.8.5. Argumentación de la definición de a^x para x irracional. Supongamos que

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$$

es un número irracional positivo y

$$\alpha^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Introduzcamos los segmentos

$$\sigma_n = [\alpha^{(n)}_1, \alpha^{(n)} + 10^{-(n)}] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Sus longitudes tienden a cero:

$$|\sigma_n| = 10^{-(n)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Cuando n crece indefinidamente, el número $\alpha^{(n)}$ tiende hacia α, sin decrecer, mientras que $a^{(n)} + 10^{-(n)}$ tiende hacia α, sin crecer, lo que se puede anotar en forma de las relaciones siguientes:

$$\alpha^{(1)} \leqslant \alpha^{(2)} \leqslant \alpha^{(3)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha < \ldots < \alpha^{(3)} + 10^{-3} < \\ < \alpha^{(2)} + 10^{-2} < \alpha^{(1)} + 10^{-1}, \quad (10)$$

de las cuales se desprende que el número α pertenece simultáneamente a todos los segmentos σ_n o, lo que es lo mismo, satisface las desigualdades

$$\alpha^{(n)} \leqslant \alpha < \alpha^{(n)} + 10^{-n}$$

para cualquier n natural.

Por otra parte, en virtud de la propiedad (4) de la función exponencial, la cual en esta etapa de razonamientos la consideramos correcta para los números racionales, se cumplen las relaciones análogas, siendo $a > 1$:

$$a^{\alpha^{(1)}} \leqslant a^{\alpha^{(2)}} \leqslant a^{\alpha^{(3)}} \leqslant \ldots < a^{\alpha^{(3)}+10^{-3}} < a^{\alpha^{(2)}+10^{-2}} < a^{\alpha^{(1)}+10^{-1}}. \quad (11)$$

Dentro de estas desigualdades no hemos incluido el número a^{α}. Hasta el momento dicho número no está determinado, ya que α es irracional. Sólo ahora nos proponemos a definirlo.

La magnitud $a^{10^{-n}}$ tiende hacia 1 cuando $n \to +\infty$:

$$a^{10^{-n}} \to 1 \quad (n \to +\infty),$$

o, como se dice, $a^{10^{-n}}$ tiene un límite igual a 1, cuando $n \to +\infty$. (Esto se demuestra en el p. 3.8.6).

Pero entonces la longitud de $\sigma_n' = [a^{\alpha^{(n)}}, a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}}]$, cuando n crece indefinidamente, tiende a cero:

$$|\sigma_n'| = a^{\alpha^{(n)}+10^{-n}} - a^{\alpha^{(n)}} = a^{\alpha^{(n)}}[a^{10^{-n}} - 1] <$$
$$< a^{\alpha_0+1}[a^{10^{-n}} - 1] \to 0, \quad (n \to \infty). \qquad (12)$$

Además, los segmentos σ_n', en virtud de (11), están encajados unos en otros:

$$\sigma_1' \supset \sigma_2' \supset \sigma_3' \supset \ldots .$$

Pero, conocemos que si viene dada una sucesión de segmentos encajados unos en otros, cuyas longitudes tienden a cero, existe un punto (número) β, y además único, que pertenece de manera simultánea a todos estos segmentos. Es natural designar este número con el símbolo a^α: $\beta = a^\alpha$.

Ahora podemos incluir este número en las desigualdades (11):

$$a^{\alpha^{(1)}} \leqslant a^{\alpha^{(2)}} \leqslant a^{\alpha^{(3)}} \leqslant \ldots \leqslant a^\alpha < \ldots < a^{\alpha^{(3)}+10^{-3}} <$$
$$< a^{\alpha^{(2)}+10^{-2}} < a^{\alpha^{(1)}+10^{-1}}. \qquad (13)$$

Como ha sido indicado en el punto 3.8.3, para el número irracional negativo $-\alpha$ se supone que $a^{-\alpha} = 1/a^\alpha$.

Todo lo dicho puede ayudarnos a representar el siguiente cuadro. Para el número dado $a > 1$, en el sistema de coordenadas rectangulares xOy marquemos en el plano todos los puntos del tipo (r, a^r), donde r son los números racionales. Hemos obtenido una línea de trazos. Prácticamente es imposible trazarla, sin embargo, se puede imaginarse teóricamente. Mediante los cálculos a base de los números a^r $(r = \pm p/q)$ se puede llegar a la conclusión de que los espacios blancos en nuestra curva de trazos pueden llenarse con puntos, cuyas abscisas son irracionales, de tal modo que se obtenga una curva continua. Este llenado, para cada número irracional $x = \alpha$, puede efectuarse sólo de la única manera, precisamente, como ha sido mostrado anteriormente, de lo contrario se obtendrá una curva discontinua.

Señalemos que de las relaciones (12) y (13) se infiere que el número a^α, donde $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$, puede definirse como el límite:

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha^{(n)}}.$$

3.8.6. Comportamiento de a^x en las inmediaciones del punto $x = 0$. Mostremos que

$$\lim_{N\to\infty} a^{1/N} = 1,$$

donde N recorre los números naturales. Puesto que $a > 1$,

$$a^{1/N} - 1 = \mu_N > 0.$$

Luego,

$$a^{1/N} = 1 + \mu_N \tag{14}$$

y

$$a = (1 + \mu_N)^N = 1 + N\mu_N + \ldots > 1 + N\mu_N. \tag{15}$$

Hemos aplicado la fórmula del binomio de Newton. escribiendo explícitamente sólo sus dos primeros términos. Si despreciamos los demás términos (que son positivos), se obtiene un número menor. De (15) se deduce que

$$\mu_N < \frac{a-1}{N} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Pero entonces

$$\lim_{N\to\infty} a^{1/N} = 1 + \lim_{N\to\infty} \mu_N = 1.$$

Lo que se requería demostrar.

3.8.7. $a^{xy} = (a^x)^y$. Para todos x e y reales es válida la fórmula

$$a^{xy} = (a^x)^y. \tag{16}$$

Demostrémosla. Siendo naturales m, p, q:

$$a^{mx} = a^{x+\ldots+x} = (a^x)^m \quad \text{ó} \quad a^x = (a^{mx})^{1/m},$$

$$a^{(p/q)x} = a^{p(x/q)} = (a^{(x/q)})^p = [(a^x)^{1/q}]^p = (a^x)^{p/q}.$$

Para $y > 0$ arbitrario e y_n racionales donde $y_n \to y$:

$$a^{xy} = \lim_{y_n\to y} a^{xy_n} = \lim_{y_n\to y} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y.$$

Para $y < 0$

$$a^{xy} = \frac{1}{a^{x(-y)}} = \frac{1}{(a^x)^{-y}} = (a^x)^y.$$

§ 3.9. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Supongamos que a es un número positivo, no igual a la unidad $(0 < a,\ a \neq 1)$ e y es un número arbitrario positivo $(0 < y < \infty)$. Sabemos que *el logaritmo* de y en la base a se llama un número $x = \log_a y$ tal que si a se eleva a la potencia x, se obtiene y. De esta manera

$$a^x = y. \tag{1}$$

Por eso se puede escribir además

$$a^{\log_a y} = y, \quad 0 < y < \infty, \tag{2}$$

o también

$$\log_a a^x = x, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

Surge la pregunta ¿siempre la ecuación (1) se resuelve respecto a x, o, lo que es lo mismo, existe para un número positivo y su logaritmo de base a? Sí, existe y además el único. Nos convenceremos de esto basándonos en las propiedades de la función a^x, que enumeramos a continuación. Consideraremos que $a > 1$.

1) a^x es continua en $(-\infty, \infty)$, o sea, posee una gráfica continua;

2) a^x es una función creciente, es decir, $a^x < a^y$, si $x < y$;

3) $a^x \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$

4) $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$.

En la fig. 61 viene representada la gráfica de la función a^x $(a > 1)$. En virtud de 1) ésta es una curva continua situada por encima del eje x.

Debido a las propiedades 2), 3) y 4), cuando la abscisa x de un punto de la gráfica crece desde $-\infty$ hasta $+\infty$, su ordenada y crece de 0 hasta $+\infty$.

El valor de x que satisface la ecuación (1) para el $y > 0$ dado, se puede hallar del modo siguiente. En el eje de ordenadas marcamos hacia arriba, a una distancia igual a y respecto al origen de coordenadas, un punto y a través del último trazamos una recta paralela al eje de abscisas. Dicha recta cortará de modo obligatorio la gráfica y además en el único punto A. Es evidente que la abscisa x del punto A resuelve la ecuación (1) para el y dado (véase la fig. 61).

Empleando el método gráfico, hemos demostrado la existencia del logaritmo de y en la base a. Además, hemos obtenido una nueva función de x que depende de y, la cual se denomina *logaritmo de y respecto a la base a* y se designa así: $x = \log_a y$.

Así pues,

$$x = \log_a y \quad (0 < y < \infty)$$

es la función que pone en correspondencia a cada número positivo y tal x que $y = a^x$, es decir, se cumple la igualdad (2).

Gracias a las propiedades 2) y 3) la función $\log_a y$ se llama inversa respecto a la función a^x, mientras que la función a^x se denomina inversa respecto a $\log_a y$.

La función logarítmica $x = \log_a y$ tiene las siguientes propiedades que se desprenden directamente de los razonamientos citados:

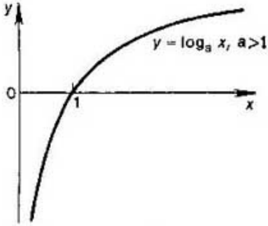

Fig. 64.

1) $\log_a y$ es continua en $(0, \infty)$;

2) $\log_a y$ es una función creciente, o sea,

$$\log_a y_1 < \log_a y_2, \quad (0 < y_1 < y_2 < \infty)$$

para todos y_1, y_2;

3) $\log_a y \to \infty$ si $y \to +\infty$;

4) $\log_a y \to -\infty$ si $y \to 0$.

Al girar el sistema xOy en 90° en sentido antihorario, obtenemos el sistema de coordenadas yOx, donde, por lo demás, el eje y está dirigido a la izquierda, pero esto no tiene importancia esencial. En este caso, la curva Γ será la gráfica de la función $x = \log_a y$. Girando este nuevo sistema en 180° alrededor del eje x, obtenemos la gráfica de $x = \log_a y$ en el sistema acostumbrado, en el cual el eje y de la variable independiente resulta dirigido a la derecha. Nada nos impide de cambiar además de lugares x e y, y entonces obtenemos la fig. 64, en la cual se representa la gráfica de la función

$$y = \log_a x \quad (0 < x < \infty); \tag{4}$$

en este caso, la función $\log_a x$ queda prefijada en el semieje $(0, \infty)$, es decir, para los valores positivos. Dicha función es continua y crece, al incrementar x, desde 0 hasta $+\infty$, respectivamente y crece desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Se puede decir también que la función $\log_a x$ aplica el intervalo $(0, \infty)$ de los valores de x sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ de los valores de y.

Ahora supongamos que a satisface las desigualdades $0 < a < 1$. Anotemos las propiedades que necesitamos de la función $y = a^x$:

1) a^x es continua sobre $(-\infty, \infty)$;
2) a^x es una función decreciente, o sea, $a^x > a^y$ $(x < y)$;
3) $a^x \to 0$ si $x \to +\infty$;
4) $a^x \to +\infty$ para $x \to -\infty$.

La gráfica de a^x cuando $0 < a < 1$ se da en la fig. 62. Vemos que la función $y = a^x$, en el caso de $0 < a < 1$, también aplica el intervalo $(-\infty, \infty)$ de los valores de x sobre el intervalo $(0, \infty)$ de los valores de y.

Lo mismo que antes, podemos prefijar un valor arbitrario positivo (es decir, perteneciente al intervalo $(0, \infty)$) de y, y ponerle en correspondencia un x tal que se cumpla la igualdad

$$x = \log_a y.$$

Para obtener x a partir del y dado, debemos elegir sobre el eje de ordenadas (véase la fig. 61) el punto que tiene como ordenada y y trazar a través de dicho punto una recta paralela al eje x. La última cortará la gráfica Γ en el único punto A, cuya abscisa no es más que el valor de x, o sea, tal x para el cual $y = a^x$.

Las propiedades de la función $\log_a y$ para $0 < a < 1$ son las mismas que en el caso de $a > 1$; sin embargo, hay una exclusión. Ahora, cuando y crece de 0 a $+\infty$, respectivamente, x decrece desde $+\infty$ hasta $-\infty$:

$$\log_a y_1 > \log_a y_2 \quad (0 < y_1 < y_2 < \infty).$$

Anotemos las fórmulas (2) y (3):

$$x = a^{\log_a x} \quad (0 < x < \infty), \tag{5}$$

$$\log_a a^x = x \quad (-\infty < x < \infty). \tag{6}$$

Hemos sustituido en (2) y por x, pero esto no tiene importancia.

Aquí el número a puede ser cualquier número positivo, distinto de 1 $(a \neq 1)$. Las igualdades (5) y (6) se denominan identidades sobre los intervalos allí indicados, puesto que son válidas para todos x pertenecientes a dichos intervalos.

Partiendo de las propiedades de la función exponencial, de la igualdad (5) se deduce que para cualesquier valores de $x,\ y > 0$:

$$a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}. \qquad (7)$$

Pero entonces

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad (0 < x,\ y < \infty,\ a > 0,\ a \neq 1). \qquad (8)$$

De (7) se deduce (8), puesto que si $a^{u_1} = a^{u_2}$, entonces $u_1 = u_2$. En caso de que $u_1 \neq u_2$, los números a^{u_1} y a^{u_2} serían distintos. No obstante, se puede de modo formal obtener (8), tomando el logaritmo de base a respecto a los primero y segundo miembros de (7), es decir, utilizando la fórmula (6).

Al sustituir en (8) x por x/y, obtenemos

$$\log_a x = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y,$$

o

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (0 < x,\ y < \infty,\ a > 0,\ a \neq 1). \qquad (9)$$

Después (véase el p. 3.8.7)

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x},$$

por lo tanto

$$\log_a x^y = y \log_a x \quad (0 < x,\ y < \infty,\ a > 0,\ a \neq 1). \qquad (10)$$

Por último, señalemos que para los números a y b, positivos, no iguales a 1, tiene lugar

$$a^{\log_a b \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a,$$

por eso

$$\log_a b \log_b a = 1. \qquad (11)$$

La fórmula (11) ofrece la posibilidad de calcular $\log_a b$ a partir de $\log_b a$, o sea, es la fórmula de conversión de los logaritmos de base a a los de base b.

El logaritmo del número a de base e se llama *logaritmo natural* del número a y se designa así: $\log_e a = \ln a$.

Las fórmulas (5)—(11) son las fundamentales para calcular empleando logaritmos. Conviene asimilarlas y retenerlas en la memoria.

§ 3.10. FUNCIÓN POTENCIAL

La función de la forma

$$y = x^a \quad (0 < x < \infty), \tag{1}$$

donde $a \neq 0$ se denomina *función potencial*. Para cualquier a la función potencial, en todo caso, queda definida para los x positivos.

La función potencial es continua, es decir, su gráfica se representa en forma de una curva continua.

Si a es positivo, la función $y = x^a$ está determinada también para $x = 0$, precisamente, ella es igual a cero cuando $x = 0$, ya que según los fundamentos matemáticos se considera que $0^a = 0$ $(a > 0)$.

Indiquemos de paso que 0^0 no es un número, lo mismo que no lo es 0^a, siendo $a < 0$.

Así pues, para $a > 0$ la función

$$y = x^a \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

viene determinada no sólo para los x positivos, sino también para $x = 0$. En la fig. 2 izquierda se dan las gráficas de las funciones:

$$y = x^4, \quad y = x^2, \quad y = x, \quad y = x^{1/2}, \quad y = x^{1/4}, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Todas ellas son iguales a cero para $x = 0$, por lo que sus gráficas parten del origen de coordenadas. Al crecer x desde 0 hasta ∞, las respectivas ordenadas y de todas las gráficas crecen también de 0 a ∞. Sin embargo, el carácter de crecimiento es distinto. Es evidente también que

$$x^4 < x^2 < x < x^{1/2} < x^{1/4}, \quad 0 < x < 1,$$

$$x^4 > x^2 > x > x^{1/2} > x^{1/4}, \quad 1 < x < \infty.$$

Si $x = 1$, entonces $y = 1$ para todas las gráficas.

Las funciones x y $x^{1/3}$ pueden examinarse también para los x negativos.

En lo que se refiere a las funciones $x^{1/2}$ y $x^{1/4}$, éstas siendo $x < 0$ no tienen para nosotros sentido, puesto que no existe número real alguno, cuyo cuadrado o cuarta potencia resultase igual a un número negativo de x. Entre los números complejos figuran semejantes números, pero ahora no hablaremos de ellos.

Destaquemos en un grupo especial las funciones potenciales que corresponden a los a naturales ($a = 1, 2, 3, \ldots$).

Dichas funciones quedan determinadas y son continuas en todo el eje x real. En la fig. 65 se exponen las gráficas de las funciones x^2, x^4 de una variable real, y en la fig. 66 se muestran las gráficas de x, x^3, x^5.

La función potencial puede ser escrita en forma de

$$y = x^a = b^{\log_b x^a} = b^{a \log_b x} \quad (2)$$

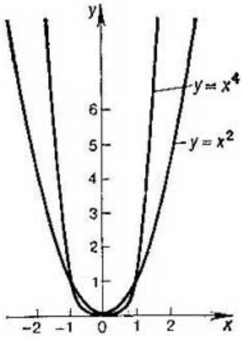

Fig. 65.

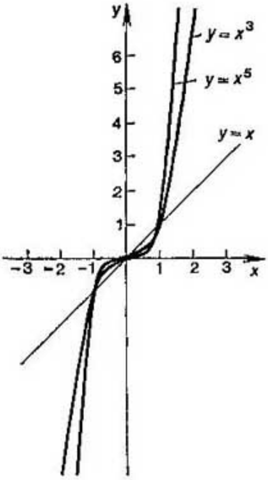

Fig. 66.

para todo b positivo ($b > 0$). A menudo en calidad de b se elige el número neperiano e. Entonces la expresión (2) adquiere la forma

$$y = x^a = e^{a \ln x}. \qquad (2')$$

La función potencial x^a tiene la siguiente propiedad característica:

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad 0 < x, \; y < \infty. \qquad (3)$$

En realidad

$$(xy)^a = e^{a \ln (xy)} = e^{a \ln x + a \ln y} = e^{a \ln x} e^{a \ln y} = e^{\ln x^a} e^{\ln y^a} = x^a y^a.$$

Cabe señalar que la función potencial x^a siendo irracional a lo mismo que la función de una variable real para x negativos no tiene sentido. El análisis más profundo muestra que la función x^a para a irracional debe ser compleja cuando x son negativos. Sin embargo, aquí no nos detendremos en este problema que se refiere a la teoría de las funciones de variable compleja.

CAPÍTULO 4

FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON. ANÁLISIS COMBINATORIO

§ 4.1. FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON

4.1.1. Los números C_n^k. El producto de los números naturales desde 1 hasta n se llama *n-factorial* y se designa así:

$$1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ n = n!.$$

En particular

$$1! = 1.$$

Por definición se considera que

$$0! = 1,$$

aunque por sí mismo el símbolo 0! no tiene sentido alguno.

Prefijemos un número natural n, y supongamos que k es uno de los números $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Por definición

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\quad (k = 0, 1, \ldots, n). \quad (1)$$

En particular

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1,\quad C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1 \quad (2)$$

(cuando $k = 0$, la segunda igualdad de (1) no se emplea).

De la primera igualdad de (1) se deduce directamente la fórmula

$$C_n^k = C_n^{n-k}\quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

También es válida la fórmula

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (4)$$

En efecto

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k+1}\right] =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\,\frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

He aquí ejemplos de los números C_n^k:

$$\begin{aligned} n &= 2: \quad 1,\ 2,\ 1; \\ n &= 3: \quad 1,\ 3,\ 3,\ 1; \\ n &= 4: \quad 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1; \\ n &= 5: \quad 1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (5)$$

Podemos observar cierta regularidad. En cada línea de las expresiones (5) los números C_n^k están dispuestos simétricamente respecto del centro, lo que se desprende de la fórmula (3), mientras que en los extremos de las líneas se encuentran las unidades, lo que se deduce de (2). En cada línea los números C_n^k crecen hasta alcanzar el centro, luego decrecen (véanse al final del párrafo los problemas 2, 4).

Problema 1. Ecríbanse los números C_n^k para $n = 6, 7, 8$.

4.1.2. Deducción de la fórmula del binomio de Newton. La expresión de ésta tiene la siguiente forma

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (6)$$

Los sumandos del segundo miembro se denominan *términos del desarrollo del binomio de Newton*. El término a^n se llama *término nulo del desarrollo de la fórmula de Newton*, a continuación siguen los términos primero, segundo, etc. hasta el n-ésimo incluido (igual a x^n); el k-ésimo término del binomio de Newton tiene la siguiente forma

$$C_n^k a^{n-k} x^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{7}$$

En virtud de la propiedad (2), la fórmula (7) puede ser útil tanto para $k = 0$, como cuando $k = n$. La fórmula (6) se puede escribir también así:

$$(a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k. \tag{6'}$$

El segundo miembro de (6') se expresa de la siguiente manera: *la suma de los sumandos $C_n^k a^{n-k} x^k$ se difunde para los k enteros desde 0 hasta n.*

Los números C_n^k se llaman *coeficientes binomiales.*

Demostremos la fórmula (6). Para $n = 1$ ésta es correcta: $a + x = a + x$. Cuando $n = 2$ ella también es válida:

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$

Si $n = 3$ dicha fórmula es asimismo válida

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

(véase la tabla (5)).

Al demostrar la fórmula (6) en forma general (para todo n natural), se utilizará el hecho de que ella es válida cuando $n = 2$. Razonaremos así. Supongamos que la fórmula (6) es justa para cierto n natural; demostremos que la misma entonces de modo necesario será válida también para $n + 1$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
(a + x)^{n+1} &= (a + x)(a + x)^n = \\
&= a^{n+1} + C_n^1 a^n x + C_n^2 a^{n-1} x^2 + \ldots + C_n^n a x^n + \\
&\qquad + C_n^0 a^n x + C_n^1 a^{n-1} x^2 + \ldots + C_n^{n-1} a x^n + x^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n x + C_{n+1}^2 a^{n-1} x^2 + \ldots + C_{n+1}^n a x^n + \\
&\qquad + x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Intencionadamente, en la segunda igualdad, hemos desplazado la segunda fila de la derecha de tal manera que en las columnas se encuentren los términos semejantes con iguales productos $a^{n-k} x^{k+1}$. La suma de los coeficientes de dichos términos se calcula por la fórmula (4).

Observación. Hemos aplicado, para deducir la fórmula (6), *el método de la inducción matemática completa.* Dicho método consiste en lo siguiente. Supongamos que es necesario demostrar cierta afirmación para todo número natural n. Por ejemplo, se requiere demostrar la fórmula del binomio de Newton para un número n natural arbitrario. Supongamos que nos hemos cerciorado de que dicha afirmación es justa para $n = 1$, y, además, nos hemos convencido de que la misma es válida para el valor $n + 1$ natural, si suponemos que es correcta para n. Entonces es necesario considerar que nuestra afirmación está demostrada para cualquier n natural.

Problema 2. Escríbase el desarrollo según la fórmula del binomio de Newton para las expresiones

$$(a + x)^5, \quad (a + x)^6, \quad (a + x)^7.$$

Problema 3. Demuéstrese que

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Problema 4. Comparando la fracción (8) con 1, demuéstrese que siendo par n

$$1 = C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{n/2} > C_n^{(n+2)/2} > \ldots > C_n^n = 1$$

y siendo impar n

$$1 = C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^{(n-1)/2} = C_n^{(n+1)/2} > \ldots > C_n^n = 1.$$

Tarea. Repasen la deducción de las fórmulas (3), (4), (6). Retengan en la memoria las fórmulas (1) y (6) y sepan aplicarlas para valores particulares de n y k. Repasen el método de la inducción.

§ 4.2. ANÁLISIS COMBINATORIO

4.2.1. Permutación (reordenación). Dos elementos (dos cosas) x_1 y x_2 pueden estar colocados (anotados) de dos modos:

$$x_1, x_2, \tag{1}$$

$$x_2, x_1. \tag{2}$$

Diremos que las posiciones (1) y (2) son diferentes *permutaciones* de dos elementos (x_1 y x_2). Así pues, de dos elementos se pueden formar dos (distintas) permutaciones.

De tres elementos x_1, x_2, x_3 resulta posible formar seis permutaciones:

$$x_1, x_2, x_3,$$
$$x_1, x_3, x_2,$$
$$x_2, x_1, x_3,$$
$$x_2, x_3, x_1,$$
$$x_3, x_1, x_2,$$
$$x_3, x_2, x_1.$$

Para ellos no existen otras permutaciones.

Examinemos ahora n elementos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Ellos están colocados siguiendo el orden de crecimiento de números, debido a lo cual forman una determinada permutación. Para otra disposición, por ejemplo, cuando los números decrecen:

$$x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1 \quad (n \geqslant 2),$$

éstos forman otra permutación.

La permutación de n elementos es una disposición determinada de éstos (en una línea). De este modo, *distintas permutaciones de n elementos corresponden a diferentes disposiciones (en una línea) de n elementos.*

La cantidad de las permutaciones posibles de n elementos se designa con el símbolo P_n (proviene del francés *permutation*).

Mostremos que

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n! \tag{3}$$

En efecto, siendo $n = 1$ la fórmula (3) resulta evidente: de un elemento se puede formar solamente una permutación. Ahora razonando por inducción, admitamos que la fórmula (3) es válida para P_n; demostremos su exactitud para P_{n+1}. Con el fin de obtener todas las permutaciones posibles de los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, pongamos en el primer lugar el elemento x_j y después de él los demás n elementos, ordenados de cualquier modo. La cantidad de estas disposiciones (permutaciones de n elementos) será igual a $P_n = n!$. Ya que el número de elementos x_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, n+1$) es igual a $n + 1$, la cantidad de todas las permutaciones de

$n+1$ elementos será igual, con evidencia, a

$$P_{n+1} = (n+1)\, n! = (n+1)!.$$

De esta manera la fórmula (3) queda demostrada para todo n natural.

Problema 1. Anótense todas las permutaciones de los elementos a_1, a_2, a_3, a_4.

Problema 2. ¿Cuántas distintas maneras existen para sentar 10 hombres en 10 sillas?

4.2.2. Variaciones. Supongamos que n y k son números naturales, además $k \leqslant n$. *La variación de los n elementos dados, tomados k a k se denomina cualquier grupo de k elementos, elegidos de los n elementos dados, y ordenados según cierto modo (en una línea).*

Por ejemplo, supongamos que se dan tres elementos ($n = 3$) x_1, x_2, x_3.

A continuación vienen escritas las posibles variaciones de estos tres elementos dados, tomados a dos:

$$x_1, x_2,$$
$$x_2, x_1,$$
$$x_1, x_3,$$
$$x_3, x_1$$
$$x_2, x_3,$$
$$x_3, x_2.$$

Para ellos no existen otras variaciones. Vemos que dos variaciones difieren ya sea en un elemento, o bien en la disposición de los elementos que las integran.

La cantidad de variaciones posibles de los n elementos dados, tomados k a k ($k \leqslant n$) se designa con el símbolo A_n^k (proviene del francés *arrangement*).

Es válida la fórmula

$$A_n^k = n\,(n-1)\,.\,.\,.\,(n-k+1). \qquad (4)$$

En realidad, para $k = 1$ dicha fórmula es evidente:

$$A_n^1 = n.$$

Razonando de acuerdo con la inducción, vamos a considerar que la fórmula (4) es correcta siendo $k = 1$. Demostremos que ella es válida también y para $k+1$.

La variación arbitraria de los n elementos dados, tomados $k+1$ a $k+1$, puede ser obtenida de la siguiente forma. Disponemos en el primer lugar de la variación el elemento x_j y a continuación ponemos todas las posibles variaciones de los demás $n-1$ elementos $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ tomados k a k; su cantidad total es igual a A_{n-1}^k.

Así pues, el número de las posibles variaciones de los n elementos dados, tomados $k+1$ a $k+1$, que tienen como primer término el elemento x_j, es igual a A_{n-1}^k. Pero, puesto que j puede tomar los valores: $j = 1, 2, \ldots, n$, la cantidad de todas las variaciones de los n elementos dados, tomados $k+1$ a $k+1$ resulta

$$A_n^{k+1} = nA_{n-1}^k = n(n-1)(n-2)\ldots((n-1)-k+1) =$$
$$= n(n-1)\ldots(n-(k+1)+1).$$

De esta manera la fórmula (4) queda demostrada para todo $k \geqslant 1$.

Problema 3. Anótense todas las variaciones de los elementos x_1, x_2, x_3, x_4 tomados 2 a 2.

Problema 4. ¿Cuántos procedimientos posibles se pueden emplear para adjudicar a siete personas tres distintos premios (primero, segundo, tercero)?

Problema 5. ¿Cuántos posibles procedimientos pueden aplicarse para distribuir entre seis personas dos plazas en un sanatorio?

4.2.3. Combinaciones. *Se llama combinación de los n elementos dados, tomados k a k, cualquier grupo que consta de k de dichos elementos ($k \leqslant n$).*

Por ejemplo, de tres elementos x_1, x_2, x_3 se pueden formar las siguientes combinaciones binarias (tomados dos a dos):

$$x_1, x_2,$$
$$x_1, x_3,$$
$$x_2, x_3.$$

No existen otras combinaciones de los tres elementos examinados tomados dos a dos. He aquí, una combinación más de cuatro elementos x_1, x_2, x_3, x_4, tomados tres a tres elementos:

$$x_2, x_3, x_4,$$

$$x_1,\ x_3,\ x_4,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_4,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3.$$

Cabe subrayar que la noción de la combinación no está ligada con la disposición (el orden) de los elementos. Si en la combinación dada se permutan de algún modo sus elementos, ésta (como combinación) no varía.

La cantidad de combinaciones de n elementos tomados k a k ($k \leqslant n$) se designa con símbolo C_n^k (proviene del francés *combinaison*).

La fórmula siguiente es válida

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (5)$$

Realmente, en cada combinación de n elementos tomados k a k se pueden efectuar todas las posibles permutaciones. Su cantidad es igual a $P_k = k!$, y el número de todas las combinaciones es C_n^k. Está claro que

$$A_n^k = C_n^k P_k,$$

puesto que, reagrupando todas las combinaciones y efectuando en cada una de ellas P_k permutaciones, obtenemos todas las posibles variaciones de n elementos tomados k a k. Debido a esto la fórmula queda demostrada.

Problema 6. Escríbanse todas las combinaciones binarias de los elementos $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$.

Problema 7. ¿Cuántos procedimientos posibles se pueden usar para adjudicar a siete personas tres premios iguales?

Problema 8. ¿Cuántos métodos posibles pueden aplicarse para distribuir entre seis personas dos plazas iguales en un sanatorio?

4.2.4. Relación con los coeficientes binomiales. Otra deducción de la fórmula del binomio de Newton. Los números C_n^k, en el p. 4.1.2, los hemos denominado coeficientes binomiales, puesto que éstos figuran en el desarrollo del binomio de Newton

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k \qquad (6)$$

como coeficientes de $a^{n-k}x^k$.

Sin duda, la fórmula (6) se puede deducir recurriendo al método combinatorio. Con este fin representemos su primer miembro en la siguiente forma:

$$(a + x_1)(a + x_2)\ldots(a + x_n), \tag{7}$$

donde cada x, que entra en el producto, tiene su número, a pesar de que son iguales: $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = x$.

Suprimamos en (7) los paréntesis:

$$\begin{aligned}(a + x)^n = (a + x_1)\ldots(a + x_n) = a^n +\\ + a^{n-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) +\\ + a^{n-2}(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) +\\ + a^{n-3}(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) + \ldots\\ \ldots + x_1\ldots x_n.\end{aligned} \tag{8}$$

Sustituyendo todos x_m por x, obtenemos

$$(a + x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$

es decir, la fórmula (6).

En efecto, la cantidad de sumandos entre el primer paréntesis (en el segundo miembro de (8)) es igual a n (cada sumando es igual a x). Los sumandos entre el segundo paréntesis son, en esencia, todas las posibles combinaciones binarias de los n elementos $x_1, \ldots, x_n$, su cantidad es igual a C_n^2 (cada uno de ellos es igual a x^2). Los sumandos entre el tercer paréntesis son, en realidad, todas las posibles combinaciones de los n elementos indicados, tomados tres a tres (cada uno de ellos es igual x^3), etc.

4.2.5. Probabilidad de un suceso. Citemos varios ejemplos para explicar la noción de la probabilidad.

Ejemplo 1. De una caja donde se encontraban dos bolas negras y cinco blancas se ha sacado al azar una bola. A continuación introducimos un número que se llama probabilidad de que resulte sacada una bola negra.

Para comodidad de razonamientos imaginémonos que las bolas en la caja están numeradas. Son posibles siete distintos casos: hemos podido sacar la primera bola, o la segunda, o la tercera, etc., o por último, la septima. Todos estos casos tienen la misma posibilidad y uno de ellos debe tener lugar. Por lo tanto se dice, que ellos tienen la misma y única posibilidad.

Por otro lado, sólo 2 de los 7 casos mencionados (con la misma y única posibilidad) favorecen al suceso que consiste en sacar la bola negra. La relación de 2 a 7 se llama *probabilidad del suceso indicado.*

Por lo tanto, la probabilidad de que se saque una bola negra, en las condiciones señaladas, es igual a $P = 2/7$.

Ejemplo 2. De una caja en que se encontraban 3 bolas negras y 5 blancas fueron sacadas al azar dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean negras?

Resolución. De nuevo, para comodidad vamos a considerar que todas las bolas que se hallaban en la caja están numeradas. La cantidad de todos los posibles procedimientos de sacar dos bolas es igual al número de combinaciones de 8 elementos tomados dos a dos:

$$n = C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28.$$

Los procedimientos indicados tienen la misma y única posibilidad.

Sólo

$$m = C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$$

procedimientos de los indicados favorecen al suceso consistente en sacar en realidad dos bolas negras. Por ejemplo, si consideramos que las bolas negras tienen los números 1, 2, 3, entonces nuestros procedimientos corresponden a las combinaciones (1, 2), (1, 3), (2, 3).

El número

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3}{28}$$

es precisamente la llamada probabilidad de que, en las condiciones indicadas, resulten sacadas dos bolas negras.

Ejemplo 3. En la primera fila de un teatro están sentados 3 mujeres y 27 hombres. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres mujeres resulten sentadas juntas?

Resolución. Existen $n = 30!$ diferentes permutaciones en la disposición de dichas personas en la fila. Vamos a considerar que estas permutaciones tienen la misma posibilidad. Por otro lado, las tres mujeres pueden ocupar las butacas con los números 1, 2, 3, ó con los números 2, 3, 4, etc., o por último, con los números 28, 29, 30. En total, obtendremos 28 casos. Sin embargo, en cada uno de estos casos son posibles 3! permutaciones que caracterizan la posición de las mujeres una respecto a las otras. A cada una de estas permutaciones le corresponde 27! permutaciones de los hombres en las butacas que ocupan. Por consiguiente, la cantidad de permutaciones (de 30 personas) *que favorecen al suceso*, consistente en que las tres mujeres estén sentadas juntas, es igual a

$$m = 28 \cdot 3!27! = 3!28!.$$

De aquí se deduce que la probabilidad de dicho suceso

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3!\,28!}{30!} = \frac{6}{29 \cdot 30} = \frac{1}{145}.$$

Observación. Desde el punto de vista de la teoría de las probabilidades, en el ejemplo dado, fue examinado *un suceso aleatorio A*, consistente en que en la primera fila de un teatro las tres mujeres resultaron sentadas juntas. Este suceso puede tener lugar y no tenerlo *en diferentes casos posibles que, por supuesto, poseen la misma y única posibilidad*. En el ejemplo dado, un caso posible aislado es la permutación de 30 personas. La cantidad de tales casos con la misma posibilidad es n. Algunos de dichos casos, como se dice, son *favorables al suceso A*: si ocurre uno de ellos, tendrá lugar el suceso A. Supongamos que m es la cantidad de dichos casos.

En el ejemplo dado, los casos que favorecen al suceso A, son las permutaciones (posiciones) de las 30 personas mencionadas, bajo las cuales las tres mujeres resultan sentadas juntas.

Por definición, *la probabilidad P del suceso A* se llama el número

$$P = \frac{m}{n}.$$

Ejemplo 4. De una urna, en la cual se encuentran diez bolas blancas y diez negras, se sacan al azar tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean a) tres blancas; b) una blanca y dos negras?

Aquí los casos de una misma posibilidad serán las combinaciones de 20 bolas, tomadas tres a tres. Su cantidad es igual a

$$n = C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}.$$

Entre estas combinaciones las que son favorables a suceso a) serán

$$m = C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!},$$

de donde

$$P=\frac{m}{n}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{2}{19}.$$

La cantidad de combinaciones que son favorables al suceso b) será

$$m=10\cdot C_{10}^{2}=10\cdot\frac{10\cdot 9}{2}=450,$$

de donde

$$P=\frac{m}{n}=\frac{450\cdot 6}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{15}{38}.$$

Problema 9. ¿A qué es igual la probabilidad de que la permutación aleatoria de las cifras 0, 1, 2, 3 forme un número de cuatro cifras (es decir, no comience por el 0?).

Problema 10. Un grupo consta de 32 alumnos. Dos de ellos fueron elegidos aleatoriamente y sentados en el primer banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dichos dos alumnos figuren en la lista del grupo entre los primeros diez alumnos?

Problema 11. La posició de un plano en el espacio queda determinada por tres puntos que no se encuentran en una recta. ¿Cuántos distintos planos pueden ser trazados a través de cada tres puntos, pertenecientes al sistema prefijado de 1) 4 puntos, 2) 7 puntos, 3) 10 puntos, si ningunos tres puntos yacen en una recta y ningunos cuatro puntos se encuentran en un plano?

Tarea. Familiarícense con la definición de las permutaciones, variaciones y combinaciones, así como con las fórmulas de sus cantidades.

Conviene asimilar la noción de la probabilidad de un suceso a base de los ejemplos citados.

CAPÍTULO 5

NÚMEROS COMPLEJOS

§ 5.1. NOCIÓN DEL NÚMERO COMPLEJO

Examinemos la ecuación

$$x^2 - 2x + 4 = 0. \tag{1}$$

Aplicando para ella la regla conocida de encontrar las raíces de una ecuación cuadrática, obtendremos formalmente las expresiones

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3}, \tag{2}$$

que además se escriben de otra forma:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}\, i \quad (i = \sqrt{-1}) \tag{2'}$$

Pero no hemos obtenido la solución real, ya que $\sqrt{-3}$ no es un número real. No existe un número real, cuyo cuadrado sea igual a -3. No obstante, las expresiones de la forma (2) resultaron útiles en las matemáticas, aunque no son números reales, y se denominan *números complejos*.

Por definición *el número complejo se llama la siguiente expresión*

$$a + bi, \tag{3}$$

donde a y b son números reales, mientras que i, un signo especial, además se deben tomar en consideración los siguientes convenios:

$$1)\qquad i^2 = -1, \tag{4}$$
$$2)\quad a + 0i = a, \tag{5}$$
$$3)\quad 0 + bi = bi, \tag{6}$$

4) la igualdad $a + bi = c + di$, donde a, b, c, d son números reales, tiene lugar cuando y sólo cuando

$$a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

El número $0 + bi = bi$ se llama *imaginario* o *imaginario puro*.

De lo dicho se deduce que cualquier número real a es un caso particular del número complejo. Puesto que a base de la expresión 2) dicho número real a se puede anotar de la siguiente forma: $a = a + 0i$. En particular, $0 = 0 + 0i$, pero entonces, si $a + bi = 0$, $a + bi = 0 + 0i$, por consiguiente,

$$a = b = 0.$$

De esa manera, *el número complejo $a + bi$ es igual a cero cuando y sólo cuando $a = 0$ y $b = 0$.*

5) Con las expresiones (3) se pueden efectuar las operaciones aritméticas según las reglas adoptadas para las expresiones algebraicas.

De lo expuesto se sigue que al cumplir las operaciones aritméticas sobre los números complejos es correcto realizar las siguientes transformaciones:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i,$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\,i,$$
$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (bc + ad)\,i,$$
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{cb-ad}{c^2+d^2}\,i, \quad c + di \neq 0.$$

Vemos que la suma, el resto, el producto y el cociente (donde el divisor no es igual a cero) de los números complejos dan a su vez números complejos.

Ejemplo.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{(1-1)+2i}{2} = i.$$

Advirtamos además que de (4) se desprende:

$$i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^2 i^2 = 1,$$
$$i^5 = i^4 i = i, \qquad i^6 = i^4 i^2 = -1, \ \dots$$

Problemas. Redúzcanse a la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, los siguientes números complejos:

$$1)\ \frac{1}{i}, \quad 2)\ \frac{1}{-i}, \quad 3)\ \frac{1}{1+i}, \quad 4)\ \frac{1}{1-i}, \quad 5)\ i^3 - 2i^2 + i - 1,$$
$$6)\ \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}, \quad 7)\ i^7 + i^{22} + i^2 + i^1 + i^5 + i^{80}.$$

Los números complejos se designan, a menudo, con una letra. Se escribe

$$z = a + bi$$

y dicen: está prefijado un número complejo z.

El número a se llama *parte real* de z y se designa así:

$$\operatorname{Re} z = a,$$

mientras que b se llama *parte imaginaria* de z y se designa de forma:

$$\operatorname{Im} z = b;$$

provienen del francés *réel* (real); *imaginaire*, (imaginaria).

Como vemos, es necesario distinguir los términos: parte imaginaria de un número complejo y número imaginario. La parte imaginaria del número complejo $a + bi$ es un número real b.

Por definición, si $z = a + bi$ es un número complejo (a, b, son reales), entonces $a - bi$ se denomina *número conjugado al primero* y se anota así $\bar{z} = a - bi$.

Claro está que si $b = 0$, o sea, si, en realidad, z es un número real, entonces $z = \bar{z}$.

Los números z y $\bar{z}$ están conjugados entre sí.

Problemas.

1) Cerciórense de que:

a) los números $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ satisfacen la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$; b) los números $1 \pm i$ satisfacen la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$.

2) Calcúlense las expresiones:

$$(x+i)(x-i), \quad (1-i)^4.$$

3) Demuéstrese que $\overline{u+v}=\bar{u}+\bar{v}$, $\overline{u-v}=\bar{u}-\bar{v}$, donde u y v son números complejos arbitrarios.

§ 5.2. ECUACIÓN $x^2=c$

Planteemos un problema. Viene dada la ecuación

$$x^2=c, \tag{1}$$

donde c es un número real. Se requiere resolverla en números complejos, es decir, encontrar todos éstos $x=\alpha+\beta i$ que satisfacen la ecuación (1).

Razonaremos de manera habitual. Supongamos que existe un número complejo $x=\alpha+\beta i$ (α y β son reales) que satisface la ecuación (1). Después de realizar su sustitución en (1) vamos a efectuar las transformaciones correctas para los números complejos:

$$(\alpha+\beta i)^2=c,$$
$$\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i=c.$$

Ya que c es un número real,

$$\alpha^2-\beta^2=c, \quad 2\alpha\beta=0. \tag{2}$$

De la segunda igualdad en la expresión (2) se deduce que, por lo menos, uno de los números α, β es igual a cero.

Supongamos que $c=0$, entonces $\alpha^2-\beta^2=0$ y $\alpha^2=$ $=\beta^2=0$, o sea, $\alpha=\beta=0$.

Sea que $c>0$. Puesto que de la segunda ecuación (2) se desprende que uno de los números α, β es igual a cero, entonces de la primera se sigue que $\beta=0$ y, por lo tanto, obtenemos la ecuación $\alpha^2=c$, donde es necesario hallar los números reales α. Esta ecuación tiene dos soluciones (raíces):

$$\alpha=\pm\sqrt{c},$$

donde $\sqrt{c}$ es el valor aritmético de la raíz cuadrada de c. Hemos obtenido $x=\pm\sqrt{c}$.

Si ahora $c<0$, tendremos que llegar a la conclusión de que $\alpha=0$ y $\beta\neq 0$, y en este caso $-\beta^2=c$ o $\beta^2=-c>0$, de donde

$$\beta = \pm\sqrt{-c}$$

y, por consiguiente, $x = \pm\sqrt{-c}\,i$

Hemos resuelto el problema planteado: si $c > 0$, la ecuación (1) tiene dos soluciones reales $\pm\sqrt{c}$ y no tiene soluciones complejas; mas si $c < 0$, la ecuación (1) tiene dos soluciones imaginarias puras $\pm\sqrt{-c}\,i$, y no tiene soluciones reales; para $c = 0$, hay sólo una solución: $x = 0$.

Observación. Todo número complejo x, que satisface la ecuación (1), se llama raíz cuadrada del número c y se designa por el símbolo $\sqrt{c}$. Hemos demostrado que

$$\sqrt{c} = \begin{cases} 0 & \text{para } c = 0, \\ \pm\sqrt{c} & \text{para } c > 0, \\ \pm\sqrt{c}\,i & \text{para } c < 0, \end{cases}$$

donde en el segundo miembro el signo $\sqrt{\ }$ se entiende en el sentido del valor aritmético.

Problemas. Resuélvanse en números complejos las siguientes ecuaciones:

$$1)\ x^2 = 1,\quad 2)\ x^2 = -1,\ 3)\ x^2 = 9,\ 4)\ x^2 = -9,$$
$$5)\ x^2 = 10,\quad 6)\ x^2 = -10.$$

§ 5.3. EMPLEO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

Vamos a examinar una ecuación cuadrática en forma general

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

donde p y q son números reales prefijados.

Buscaremos las soluciones complejas de esta ecuación. Supongamos que el número complejo $x = a + bi$ es la solución (o raíz) de la ecuación (1).

Tenemos

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

donde el segundo miembro es cualquier número complejo, cuyo cuadrado es igual a $\frac{p^2}{4} - q$.

De aquí (véase la observación del § 4.2)

$$\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{cuando} \quad \frac{p^2}{4} - q \geqslant 0, \\ x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, i \quad \text{cuando} \quad \frac{p^2}{4} - q < 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Hemos obtenido las fórmulas de solución de la ecuación cuadrática

Así pues, la ecuación cuadrática (1) para el caso cuando $\frac{p^2}{4} - q > 0$ tiene dos soluciones reales, mientras que cuando $\frac{p^2}{4} - q < 0$, dos soluciones complejas. En el caso cuando $\frac{p^2}{4} - q = 0$ dicha ecuación tiene una solución, igual a $-p/2$, pero se considera que también en este caso existen dos soluciones, pero las últimas coinciden y por eso la solución (raíz) de la ecuación (1) se llama *múltiple*.

Supongamos que x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática (1). Mostremos que para todo x real

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q. \qquad (3)$$

Es una identidad, es decir, una igualdad, válida para todos x en el caso, en que x_1 y x_2 son raíces reales, que es de suponer que nuestro lector conoce. Se denomina *igualdad* (o *teorema*) *de Viète*. Vamos a repetir su demostración:

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= \\ &= \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \\ &\qquad - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = x^2 + px + q. \end{aligned}$$

Ahora demostremos la expresión (3) para x_1 y x_2 complejos. En este caso

$$x_1,\ x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, i \quad \left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right).$$

Por lo tanto

$$(x-x_1)(x-x_2)=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,i\right)\left(x+\frac{p}{2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,i\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=x^2+px+q.$$

Hemos demostrado la identidad (3) en que p y q son números reales arbitrarios, mientras que x_1 y x_2, las raíces de la ecuación (1).

Problemas. Resuélvanse en números complejos las ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2+x+1=0$, 2) $x^2+3x+\frac{25}{4}=0$,

3) $x^2-5x+6=0$, 4) $x^2-2x+5=0$.

Es interesante que la igualdad (3) puede generalizarse para los polinomios de todo grado: cualquier polinomio

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

de grado n puede ser representado en forma de un producto

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números, en general complejos, que corresponden a las raíces del polinomio ($P_n(x_j)=0$; $j=1, \ldots, n$). Si los coeficientes a_j son reales, las raíces complejas x_j han de estar conjugadas de dos en dos.

§ 5.4. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Prefijemos en un plano el sistema rectángulo de coordenadas (x, y). El número complejo $z=x+yi$ resulta cómodo representarlo en el plano mediante un punto con coordenadas (x, y). Este punto se llama punto z.

Vemos que tiene lugar una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los números complejos, o sea, a cada número complejo le corresponde (de la manera indicada) un punto del plano; a dos distintos números complejos les corresponden diferentes puntos y cada punto corresponde (de dicho modo) a cierto número complejo.

En virtud de esta correspondencia el plano de coordenadas se denomina también *plano complejo*.

En la fig. 67 se muestra el punto A que corresponde al número complejo $z=x+iy$. Introducimos un vector, cuyo origen se encuentra en el punto cero O y su extremo, en el punto A. Su longitud

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

se llama *módulo del número complejo z*. El ángulo φ formado por el vector $\overrightarrow{OA}$ con el semieje positivo x (medido en el sentido contrario a las agujas del reloj) se llama *argumento del número z*.

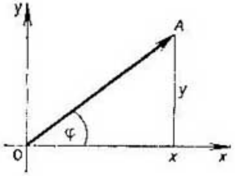

Fig. 67.

Por lo tanto, cada número complejo z tiene su módulo que se anota así:

$$\rho = |z|,$$

y el argumento φ se escribe de la siguiente manera:

$$\varphi = \mathrm{Arg}\, z.$$

Sin embargo, el argumento queda determinado no unívocamente. Si φ es el argumento de z, entonces $\varphi + 2k\pi$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ es también el argumento de z. Para dar claridad a esta cuestión es necesario hallar el argumento de z que satisface la desigualdad $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Se designa así: arg z y se denomina *valor principal del argumento z o argumento de z en forma reducida*; arg z se define unívocamente por el número z.

Todo valor del argumento se designa con Arg z. Se determina por la fórmula: $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, donde k es uno de los números $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Es evidente, que

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi,$$

y

$$z = x + iy = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi). \tag{2}$$

En relación con la igualdad (2) se dice que *el número complejo viene anotado en forma trigonométrica.*

§ 5.5. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

La expresión entre paréntesis en la fórmula (2) del § 5.4 se designa de la manera siguiente:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi,$$

y en este caso dicha expresión puede anotarse en forma más compacta

$$z = \rho e^{i\varphi}, \qquad (1)$$

que se denomina *forma exponencial de un número complejo.*

Destaquemos las propiedades importantes de la magnitud $e^{i\varphi}$.

$$|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi} = 1$$

para cualquier φ.

Lo que muestra que el punto $z = e^{i\varphi}$ del plano complejo se encuentra en la circunferencia de radio 1 con el centro en el punto nulo.

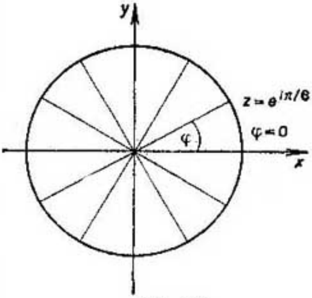

Fig. 68.

En la fig. 68 la circunferencia unidad está dividida en 12 partes. Además, el punto correspondiente a $\varphi = 0$ forma parte del número de los puntos de división. La tabla de los números complejos correspondientes a estos puntos será:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	...
$e^{i\varphi}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	i	...

Si φ crece continuamente de 0 a 2π, el punto complejo $e^{i\varphi}$ circunscribe sin cesar nuestra circunferencia, al seguir incrementando φ el punto continuará el movimiento por la circunferencia. Tenemos para todo φ,

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2) = \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2) + \\ &+ i(\cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1\cos\varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}$$

Hemos demostrado la fórmula

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2},$$

que es correcta para cualesquiera φ_1 y φ_2. Pero entonces

$$e^{i\varphi_1} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_2)} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}e^{i\varphi_2}.$$

Por lo tanto para todos φ_1 y φ_2

$$e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}.$$

Ahora tomemos dos **números complejos, en la forma**

$$z_1=\rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2=\rho_2 e^{i\varphi_2} \quad (\rho,\ \rho_2\geqslant 0).$$

Su producto es igual a $z_1z_2=\rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Puesto que $\rho_1\rho_2\geqslant 0$, hemos obtenido la forma trigonométrica del número z_1z_2; al mismo tiempo

$$|z_1z_2|=\rho_1\rho_2=|z_1|\,|z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\varphi_1+\varphi_2=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2+2k\pi,$$

donde k es uno de los números $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

Se afirma que la suma $\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2$ difiere de $\operatorname{Arg}(z_1+z_2)$ en la magnitud de $2k\pi$, k es un número entero.

De manera semejante: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ $(\rho_2>0)$.

Por esta razón $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}$,

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\varphi_1-\varphi_2=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2+2k\pi,$$

donde k es uno de los números $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

Hemos demostrado que *el módulo del producto de los números complejos es igual al producto de los módulos de sus factores, y el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores más, puede ser, el número igual a $2k\pi$, donde k es uno de los números $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.*

Hemos demostrado también que *el módulo del cociente de los números complejos z_1 y z_2 es igual al cociente de los módulos de dichos números, y el argumento del cociente es igual a la*

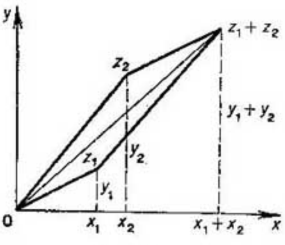

Fig. 69.

diferencia de los argumentos z_1 y z_2 ($z_2 \neq 0$) con una exactitud de hasta $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

La suma de los números complejos

$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{y} \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$

es igual a $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$.

En la fig. 69 se ve que el radio vector $z_1 + z_2$ representa la diagonal del paralelogramo construido a base de los radios vectores z_1 y z_2. La longitud de la diagonal es igual a $|z_1 + z_2|$, mientras que las longitudes de sus lados son iguales a $|z_1|$ y $|z_2|$, pero entonces

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

es decir, el módulo de la suma de los números complejos no supera la suma de sus módulos.

De donde, como un corolario, se deduce que el módulo de la diferencia de z_1 y z_2 no es menor que la diferencia de sus módulos: $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$.

Ejemplo 1. Es necesario reducir el número complejo

$$z = \sqrt{3} + i$$

a la forma trigonométrica. Hallamos

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Por consiguiente, $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)$.

En este caso, entre los ángulos α, que satisfacen las desigualdades $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, existe un ángulo y el único tal que

$$\sqrt{3}/2 = \cos\alpha, \quad 1/2 = \operatorname{sen}\alpha.$$

Es evidente, $\alpha = \pi/6$ y

$$z = 2\,(\cos(\pi/6) + i\operatorname{sen}(\pi/6)) = 2e^{i\pi/6}.$$

Ejemplo 2. Es necesario reducir el número

$$z = 3 + 4i$$

a la forma trigonométrica

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

y

$$z = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\,i\right) = 5\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = 5e^{i\alpha},$$

donde α es el ángulo para el cual

$$\cos \alpha = 3/5, \quad \text{sen } \alpha = 4/5. \qquad (2)$$

Comencemos por buscar el ángulo α entre los que satisfacen las desigualdades $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. En el caso dado, $\cos \alpha > 0$, $\text{sen } \alpha > 0$ y α se encuentra en el primer cuadrante. De (2) se desprende: $\text{tg } \alpha = 4/3$, o sea, $\alpha = \text{arctg } (4/3)$.

Ejemplo 3. Reducir a la forma trigonométrica el número

$$z = -3 (\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha).$$

Si ante el paréntesis estuviera un número positivo, la expresión dada tendría la forma trigonométrica del número complejo.

Tenemos

$$-\cos \alpha = \cos (\pi + \alpha), \quad -\text{sen } \alpha = \text{sen } (\pi + \alpha),$$

por lo tanto

$$-3 (\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha) = 3 (\cos (\pi + \alpha) + i \text{ sen } (\pi + \alpha)) = 3e^{i(\pi+\alpha)},$$

y hemos obtenido la forma trigonométrica.

Problemas. 1) Represéntense en la forma trigonométrica:

a) $5 - 4i$, b) $1 + 2i$, c) 4, d) $6i$.

2) Resuélvanse en números complejos las ecuaciones

a) $x^3 - 1 = 0$, b) $x^3 + 1 = 0$.

PROBLEMAS Y PREGUNTAS COMPLEMENTARIOS

Para el p. 1.2.4. Anótese, recurriendo a cadenas de funciones, la función compuesta correspondiente y, empleando las designaciones presentadas en el p. 1.2.2, indíquese el campo de representación de esta función:

1) $y = \cos u$, $u = 2x$. 2) $y = e^x$, $u = 3x$. 3) $y = e^u$, $u = x^2$. 4) $y = e^u$, $u = -x$. 5) $y = \text{sen } u$, $u = 3x + 1$. 6) $y = u^3$, $u = 2v^2 + 1$, $v = x - 1$. 7) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 + u$, $u = x^2$. 8) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 - u$, $u = x^2$. 9) $y = \ln u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - t$, $t = x^2$.

Para el p. 1.2.5. a) Lo mismo que en los ejemplos para el p. 1.2.4, represéntense en forma de cadenas de funciones elementales las siguientes funciones:

$$1)\ y = e^{2x}. \quad 2)\ y = \operatorname{sen} 4x.$$

$$3)\ y = \operatorname{sen}(2x+1). \quad 4)\ y = (x^2+1)^3. \quad 5)\ y = \ln\sqrt{1-x^2}$$

$$6)\ y = \ln^3(1+x). \quad 7)\ y = \operatorname{sen}^3 x^2. \quad 8)\ y = e^{2x+3}.$$

$$9)\ y = \cos^2 2x. \quad 10)\ y = \operatorname{sen}^3 x^2. \quad 11)\ y = e^{2x+3}$$

$$12)\ y = \cos^2 2x. \quad 13)\ y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 14)\ y = \frac{1}{1+x^2}.$$

b) Cerciórense de que las funciones aducidas más arriba son en esencia elementales y, utilizando las designaciones dadas en el p. 1.2.2, indíquense los conjuntos para los cuales estas funciones resultan definidas.

c) ¿Qué es un polinomio, una función lineal, una función racional, una función compuesta, una función elemental?

Para el p. 1.3.1. ¿Cuáles de las variables expuestas a continuación son infinitésimas, o tienden hacia un límite (en este caso ¿hacia cuál?), o en absoluto no tienen límite?

$$1)\ \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

$$2)\ \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}.$$

$$3)\ \{1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001,\ \ldots\} = \{1+10^{-n}\}.$$

$$4)\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}.$$

$$5)\ \{-1, +1, -1, +1, \ldots\} = \{(-1)^n\}.$$

$$6)\ \{0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111;\ \ldots\} = \{0{,}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n \text{ veces}}\}.$$

Al p. 1.3.2. ¿Cuáles de las variables expuestas a continuación son infinitas (tienden al infinito)? ¿A qué infinito tienden al $+\infty$ o al $-\infty$?

$$1)\ \{1, 2, 3, \ldots\} = \{n\}.$$

$$2)\ \{1, -2, 3, -4, \ldots\} = \{(-1)^{n-1}n\}.$$

$$3)\ \{-1, -2, -3, \ldots\} = \{-n\}.$$

$$4)\ \{1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, \ldots\}.$$

Para el p. 1.3.5. a) El incremento de la función $y = x^2$ en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, se calcula por la fórmula

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2.$$

Además, aquí x y Δx son cualesquiera, o sea, $-\infty < x$, $x + \Delta x < \infty$.

Calcúlese el incremento Δy en el punto x, correspondiente al incremento Δx, para las siguientes funciones:

1) $y = x^4$, 2) $y = \ln x$, 3) $y = \operatorname{sen} 2x$.

4) $y = x^3$, 5) $y = \operatorname{arcsen} x$. 6) $y = \operatorname{tg} x$.

7) $y = (2x + 3)$. 8) $y = e^x$. 9) $y = \frac{1}{x}$.

Señálense los intervalos, a los cuales pueden pertenecer x y Δx.

b) Si la función $y = f(x)$ tiene una gráfica continua en cierto segmento (intervalo), se llama continua en este segmento (intervalo). ¿Cómo lo dicho se expresa 1) en el lenguaje de Δx y Δy, y 2) en el lenguaje del límite de una función?

Para el p. 1.4.2. Utilizando las fórmulas 1) — 10) aducidas en el **p. 1.4.2**, escríbase a qué son iguales los límites:

1) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$. 2) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x$. 3) $\lim\limits_{x\to 1/2} \operatorname{arcsen} x$.

4) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\operatorname{sen} x + \cos x)$. 5) $\lim\limits_{x\to e^3} \ln x$. 6) $\lim\limits_{x\to 0} (1+e^2+x)$.

7) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \operatorname{tg} x$. 8) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{1-x^2}$. 9) $\lim\limits_{x\to \pi} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$.

Para el p. 1.5.3. Dibújese la gráfica de la función $y = \cos x$ sobre el segmento $(0, 2\pi)$, trácense en sus puntos $x = -2\pi/3, -\pi/3, 0, \pi/3, 2\pi/3$ tangentes y calcúlense sus coeficientes angulares.

Para el p. 1.5.8. Calcúlense las derivadas de las funciones:

1) $y = x^3 (2x + 1)$. 2) $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

3) $x = \frac{x+1}{x-1}$. 4) $y = x \ln x$.

5) $y = xe^x$. 6) $y = (x^2 - 1) \ln x$.