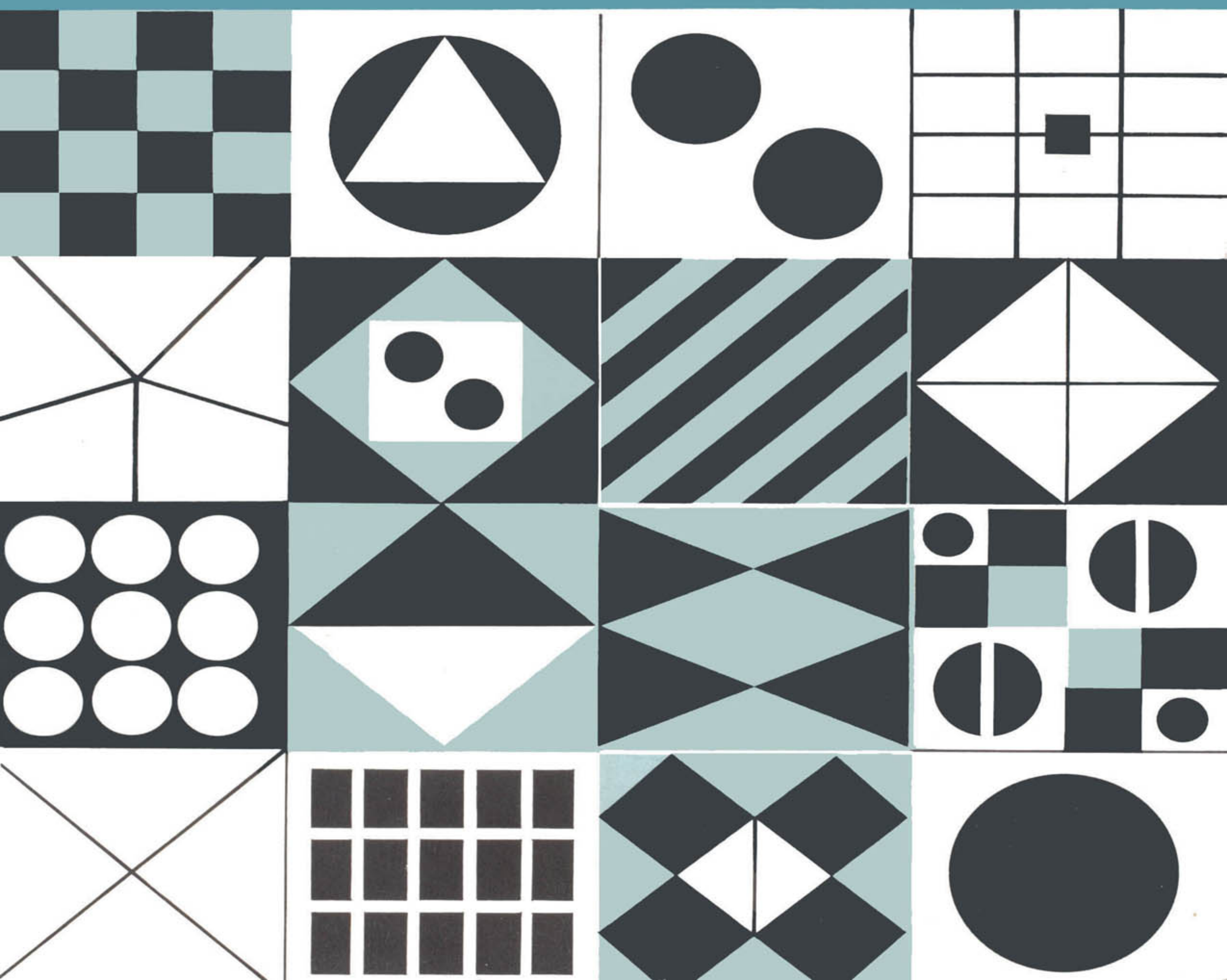
serie de matemática

monografía no. 2

ESPACIOS VECTORIALES Y GEOMETRIA ANALITICA

Departamento de Asuntos Científicos
Unión Panamericana - Secretaría General
Organización de los Estados Americanos



ESPACIOS VECTORIALES Y GEOMETRIA ANALITICA

por

LUIS A. SANTALO

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

Departamento de Asuntos Científicos
Unión Panamericana
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos

Esta monografía ha sido preparada para su publicación
en el Departamento de Asuntos Científicos de la
Unión Panamericana

Editora: Eva V. Chesneau

PROLOGO

La colección de monografías científicas forma parte de los programas generales de información y publicaciones del Departamento de Asuntos Científicos y tiene como finalidad principal difundir y presentar de manera sencilla los nuevos temas y métodos que surgen del rápido desarrollo de las ciencias y de la tecnología.

En la actualidad la colección consta de cuatro series: física, química, biología y matemática, pero se contempla la posibilidad de incluir otros ramos de las ciencias.

Desde su comienzo se dedicó estas monografías a los profesores y estudiantes de ciencias de nivel secundario y universitario básico; no obstante se aspira a que encuentren también acogida entre los hombres de ciencias dedicados a la investigación especializada y por el público en general que se interese en adquirir información o conocimientos sobre la materia.

En la redacción y preparación de cada monografía participan científicos de reconocida autoridad. Siempre que en su redacción se haya empleado uno de los idiomas oficiales de la Organización de los Estados Americanos el texto será publicado en su forma original.

Jesse D. Perkinson
Director

Primera edición, 1965.
Segunda edición, 1968.

INDICE

CAPITULO SEXTO: EL PRODUCTO VECTORIAL Y APLICACIONES A LA TRIGONOMETRIA

1

TRATAMIENTO INTUITIVO DE LOS VECTORES

A. INTRODUCCION

Como todos los conceptos geométricos, los vectores han sido en un principio tomados de manera intuitiva de la naturaleza. Se desarrolló con ellos un cálculo útil a la física y también a la geometría. Después, en una etapa posterior, tuvo lugar su axiomatización, que les dio el carácter abstracto que caracteriza a todo elemento matemático.

Nuestro objeto es exponer este tratamiento axiomático de los vectores como método para fundamentar y estudiar la geometría analítica. Aun manteniéndonos en un nivel elemental, ello tiene la ventaja de acostumbrar al lector en los métodos de la matemática moderna. Sin embargo, creemos que la comprensión de una teoría axiomática exige poseer un modelo que sirva de orientación y guía en los sucesivos razonamientos abstractos. Por esto, para conveniencia del lector que no esté familiarizado con los vectores y sus operaciones en el sentido clásico, vamos a resumir en este primer capítulo y a manera de introducción los conocimientos esenciales de dicha teoría. Quien ya los posea, o guste del razonamiento abstracto sin su inherente respaldo intuitivo, puede prescindir de este capítulo primero.

En este capítulo los conceptos básicos de recta, plano, segmento, ángulo, etc. se entienden tal como aparecen en la geometría elemental, dejando de lado las dificultades que se presentan si se desean definiciones rigurosas. Estas dificultades desaparecen, como veremos, al construir la geometría sobre la base del concepto de espacio vectorial.

B. VECTORES

Definición. Se llama vector a todo segmento orientado, es decir, a todo segmento como el OU de la figura 1 en el que se distinguen el origen O y el extremo U.

Representaremos los vectores por letras negritas **U** o bien por las dos letras que representan el origen y el extremo. Por ejemplo, el vector de la figura 1 se indicará indistintamente por **U** o por OU. Son muy usuales también las notaciones $\vec{U}$ u $\overrightarrow{OU}$, pero la flecha superior es a veces engorrosa y puede suprimirse sin dar lugar a confusión.

Figura 1

En todo vector se distinguen: a) la dirección, que está dada por la recta que lo contiene o por una paralela cualquiera a la misma; b) el sentido, que está dado por la orientación de la flecha; cada orientación tiene dos sentidos opuestos, por ejemplo los vectores OU y O'U' de la figura 2 tienen la misma dirección pero sentidos opuestos, y c) el módulo, que es igual a la longitud del segmento orientado que define el vector. El módulo lo representaremos por $|OU|$, o por $|\mathbf{U}|$, y a veces también por u, o sea por la misma letra representativa del vector pero en minúscula. Así, el módulo del vector OU se indicará indistintamente por

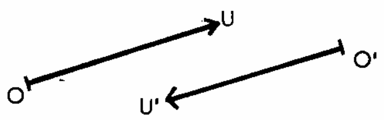


Figura 2

$$|OU| = |\mathbf{U}| = u. \qquad [1]$$

El módulo es siempre un número positivo. Si el módulo es cero, quiere decir que el origen coincide con el extremo; es decir, el vector se reduce a un punto y por tanto no puede hablarse propiamente de vector. Sin embargo, aunque la dirección y el sentido en este caso no están determinados, para facilitar muchas operaciones que veremos más adelante, se dice que se trata del vector nulo o vector cero, y lo representaremos por **O**. No hay que confundirlo con el número cero, que no es un vector.

A excepción del vector nulo, todos los demás tienen dirección, sentido y módulo bien determinados.

Definición. Se dice que dos vectores son iguales cuando tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo.

Por ejemplo, los vectores OU y O'U' de la figura 3 son iguales. Obsérvese que esta definición goza de las propiedades siguientes: reflexiva (todo vector es igual a sí mismo), simétrica (si un vector es igual a otro, este último es igual al primero) y transitiva (si un vector es igual a un segundo vector y éste es igual a un tercero, el primero y el tercero son iguales entre sí).

Según la definición de igualdad siempre se puede tomar a partir de un punto O un vector igual a cualquier vector dado; o sea, al definir las operaciones con vectores, como veremos a continuación, siempre se puede suponer que se trata de vectores con el mismo origen. Obsérvese además que si OU = O'U', también es OO' = UU'.

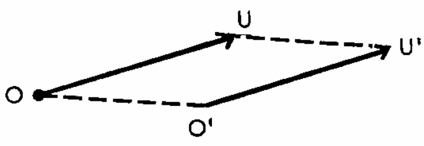


Figura 3

Ejemplos: 1. Los primeros ejemplos de vectores aparecieron en la física. Efectivamente, toda velocidad puede representarse por un vector que indique su dirección y sentido y cuyo módulo sea igual a la intensidad de la velocidad, tomada a una cierta escala. Lo mismo ocurre para las fuerzas.

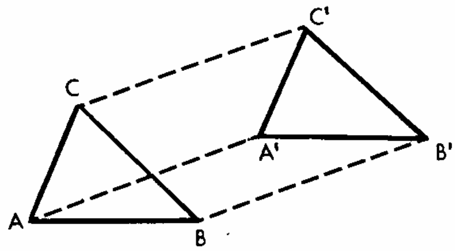


Figura 4

2. En geometría los vectores aparecen, por ejemplo, al querer representar las traslaciones. Si hacemos una traslación de todo el plano (o de todo el espacio), todos los puntos describen segmentos iguales, paralelos y del mismo sentido. Por ejemplo, si el triángulo ABC se traslada a la posición A'B'C' (Fig. 4), cada punto describe un segmento igual a los AA' = BB' = CC'. La traslación queda determinada por el vector AA' (o cualquiera de sus iguales BB', CC', ...).

C. OPERACIONES CON VECTORES

a) Producto de un vector por un escalar

En todo lo que sigue llamaremos escalar a todo número real; se trata, por consiguiente, de definir el producto de un vector por un número real.

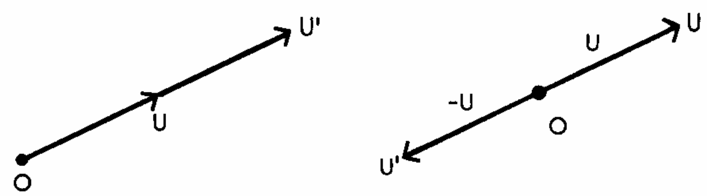


Figura 5

Si **U** = OU es un vector y se toma con la misma dirección y sentido el vector OU' de módulo igual a dos veces el de OU, se dice que el vector **U'** = OU' es el producto de **U** por el número 2 y se escribe **U'** = 2 **U** (Fig. 5).

De la misma manera se definen los vectores 3 **U**, 4 **U**, ... como los vectores de igual dirección y sentido que **U** pero de módulo tres, cuatro, ... veces mayor.

El vector -**U** se define como el vector de igual dirección y módulo que **U**, pero de sentido opuesto (Fig. 5). Tomando en el sentido de -**U** vectores de módulo doble, triple, cuádruple, etc., se tienen los vectores -2**U**, -3**U**, -4**U**, ... productos de **U** por los números -2, -3, -4,.... Este producto de un vector por un número entero se puede generalizar a cualquier número real o escalar, cuya definición es la siguiente.

Definición. Se llama producto de un vector **U** por un escalar a al vector que tiene la misma dirección que **U**, el módulo igual al producto de a por el módulo de **U**, y el sentido igual al de **U** si a es positivo y opuesto al de **U** si a es negativo.

Conviene señalar que según esta definición al multiplicar un vector por el número uno queda el mismo vector, o sea,

$$1\ \mathbf{U} = \mathbf{U} \qquad [2]$$

cualquiera que sea el vector **U**. También es consecuencia inmediata de la definición la relación

$$a\ (b\ \mathbf{U}) = (a\ b)\ \mathbf{U} \qquad [3]$$

cualquiera que sea el vector **U** y cualesquiera que sean los números reales a, b.

b) Suma de vectores

En el caso de las velocidades o de las fuerzas, la experiencia indica como deben sumarse.

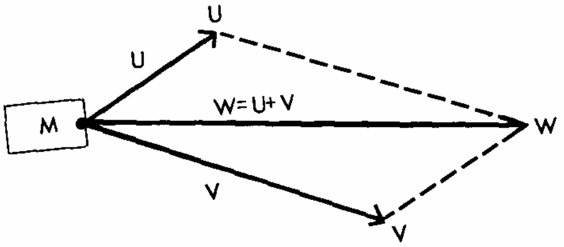


Figura 6

Si sobre un cuerpo M actúa la fuerza **U** y al mismo tiempo la fuerza **V**, la experiencia prueba que el efecto es el mismo que si actuara la fuerza **W** obtenida como diagonal del paralelogramo

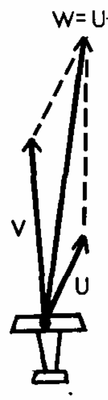


Figura 7

construido sobre los vectores **U** y **V** (Fig. 6). Se dice que **W** es el vector suma **U** + **V**.

Análogamente, si un avión tiene una velocidad propia **V** y al mismo tiempo hay un viento de velocidad **U**, el efecto es el mismo que si el avión volara con una velocidad **W** construida también como diagonal del paralelogramo de lados **U** y **V** (Fig. 7). El mismo caso ocurre para una embarcación que se mueve con velocidad propia **V** en un río cuyas aguas tienen una velocidad **U**; el resultado es que la embarcación se mueve con la velocidad resultante **W** = **U** + **V** (Fig. 8). En ambos casos se dice que el vector **W** es la suma **U** + **V**.

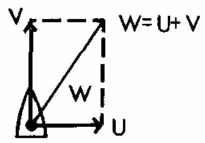


Figura 8

Lo mismo ocurre para el caso de las traslaciones. Si primero se hace una traslación AA' y a continuación otra A'A'', el resultado equivale a la traslación única AA'' (Fig. 9). Se dice también que la traslación AA'' es la suma de las AA' y A'A''. Obsérvese que en este caso también AA'' es la diagonal del paralelogramo construido sobre AA' y AA''_1, siendo AA''_1 = A'A'', o sea igual al vector A'A'' llevado a partir de A. Sin embargo, aun siendo equivalentes, la manera de sumar traslaciones, llevando el vector que representa la segunda a continuación del que representa la primera, es más cómoda que la de la diagonal del paralelogramo, pues tiene la ventaja de extenderse inmediatamente a sumas de varios sumandos. Vale también para fuerzas y velocidades, pues, por ejemplo en el caso de la figura 6, es lo mismo decir que la suma es la diagonal del paralelogramo construido sobre MU y MV que decir que ella es el vector que resulta al unir M con el punto W que se obtiene al llevar **U** = VW a partir del extremo V del vector **V**.

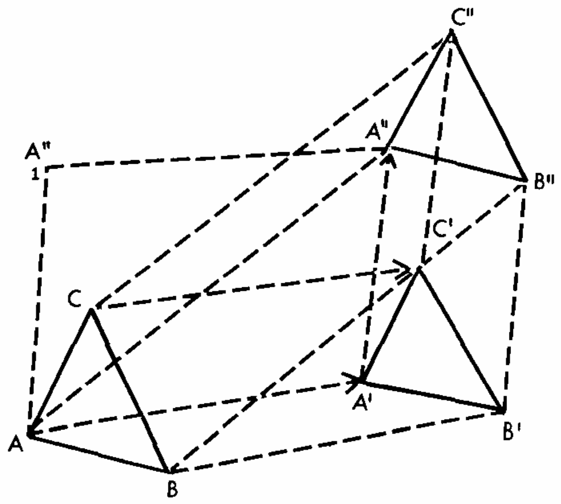


Figura 9

Estos ejemplos conducen a definir la suma de vectores por la siguiente regla:

Definición. Para sumar dos vectores se lleva uno de ellos a continuación del otro y el vector suma es el que tiene por origen el origen del primero y por extremo el extremo del segundo.

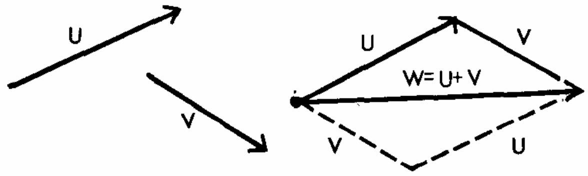


Figura 10

Por ejemplo, para sumar los vectores **U** y **V** de la figura 10, se toma **V** a continuación de **U** y la suma es **W** = **U** + **V**. Obsérvese que si se lleva **U** a continuación de **V** (línea de puntos de la Fig. 10) el resultado es el mismo, pues la figura total es un paralelogramo cuya diagonal es **W**. Resulta así la propiedad conmutativa de la suma

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U} \qquad [4]$$

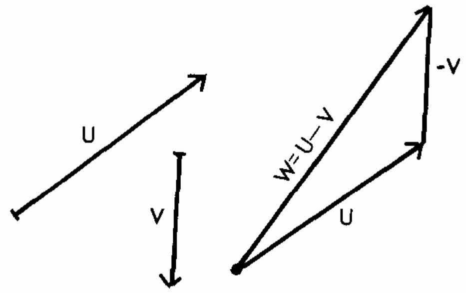


Figura 11

La diferencia **U** - **V** de vectores, se define como la suma **U** + (-**V**), donde -**V** ya sabemos que es el vector opuesto al **V**. Por ejemplo, en la figura 11 está representada la diferencia **U**-**V**.

La regla de adición se extiende a cualquier número de sumandos, llevando sucesivamente cada uno a continuación del precedente y uniendo, al final, el origen del primero con el extremo del último. Si hay sumandos negativos, para ellos se toma el opuesto. Por ejemplo, en la figura 12 se tiene representada la suma **U** - **V** + **W** - **S** = **X**.

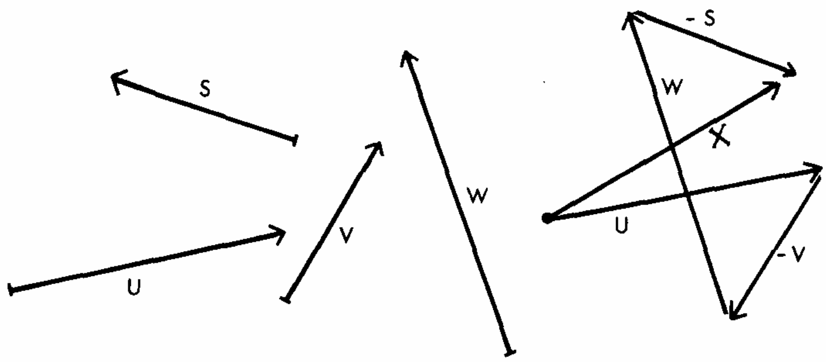


Figura 12

Obsérvese que con esta definición resulta evidente la <u>propiedad asociativa</u> de la suma

$$(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \mathbf{Z} = \mathbf{X} + (\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) \qquad [5]$$

cualesquiera que sean los vectores **X**, **Y**, **Z**.

También resultan evidentes las relaciones

$$\mathbf{X} + \mathbf{O} = \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} + (-\mathbf{X}) = \mathbf{O} \qquad [6]$$

siendo **X** un vector cualquiera y **O** el vector nulo.

De la definición de suma de vectores y de la definición de producto de un escalar por un vector resulta inmediatamente la relación

$$(a + b)\,\mathbf{X} = a\,\mathbf{X} + b\,\mathbf{X} \qquad [7]$$

cualesquiera que sean el vector **X** y los escalares a, b.

También se cumple

$$a\,\mathbf{X} + a\,\mathbf{Y} = a\,(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \qquad [8]$$

como resulta de la figura 13 por semejanza de los triángulos de lados **X**, **Y**, **X** + **Y** y a**X**, a**Y**, a(**X** + **Y**). Las relaciones [7] y [8] expresan las <u>propiedades distributivas</u> del producto de vectores por un escalar respecto a la suma.

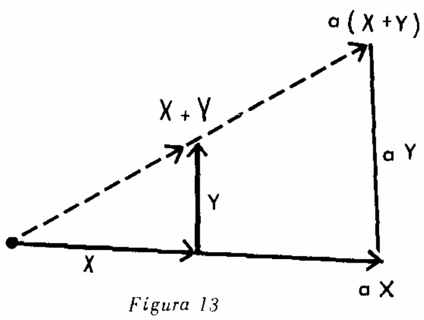


Figura 13

Ejercicios: 1. Sean O, A y B tres puntos. Probar que el punto medio M del segmento AB es el extremo del vector OM = ½ (OA + OB).

Solución: Tomando M_1 y M_2, puntos medios de OA y OB, es $OM_1 = \frac{1}{2}\,OA$ y $OM_2 = \frac{1}{2}\,OB$; además, $M_1M = OM_2$ y $M_2M = OM_1$ por propiedad de la base media de los triángulos, de lo cual resulta $OM = OM_1 + OM_2 = \frac{1}{2}\,(OA + OB)$.

2. Probar la desigualdad $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$, donde la igualdad se cumple solamente si los vectores **A** y **B** son de igual dirección y sentido.

Solución: Llevando los vectores **A** y **B** a partir de un punto O y determinando su suma, la propiedad resulta evidente por ser la longitud de un lado de un triángulo menor que la suma de las longitudes de los otros dos; la igualdad solo vale en el caso de que los dos vectores tengan igual dirección y sentido.

3. Dados tres puntos A, B y C y otro punto cualquiera O de su plano, probar que el baricentro del triángulo ABC es el extremo G del vector $OG = \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$. (Sugerencia: probar primero que la suma del segundo miembro es independiente del punto O y luego elegir por O uno de los puntos A, B, C.)

Solución: Demostraremos primero que el punto G tal que $OG = \frac{1}{3}(OA + OB + OC)$ es independiente de O. En efecto, tomando otro punto O' se tiene: $O'M = O'O + OM$, y resulta:

$O'G' = \frac{1}{3}(O'A + O'B + O'C) = O'O + \frac{1}{3}(OA + OB + OC) = O'O + OG$ y como $O'G = O'O + OG$ resulta $G = G'$.

Si tomamos $O = A$ resulta $OG = AG = \frac{1}{3}(AB + AC)$ y, con un razonamiento similar al del problema 1, se obtiene que el punto G es el punto de la mediana BM situado a $\frac{1}{3}$ de su longitud desde el lado AC y a $\frac{2}{3}$ desde su vértice, es decir, es el baricentro del triángulo.

D. DESCOMPOSICION CANONICA DE UN VECTOR

Hasta aquí todo lo dicho es independiente de si los vectores están o no contenidos en un mismo plano. Conviene ahora distinguir los dos casos siguientes:

a) Vectores contenidos en un mismo plano

Consideremos únicamente los vectores de un plano dado. Sean $\mathbf{I} = OI$ y $\mathbf{J} = OJ$ dos vectores fijos del mismo que no tengan igual dirección (Fig. 14). Todo vector **U** del plano puede llevarse a partir de O; sea OU el vector obtenido. Por el extremo U se trazan las paralelas a **J** y a **I**, respectivamente, hasta cortar a las rectas que contienen a estos vectores; sean U_1 y U_2 los puntos obtenidos. Como el vector OU_1 tiene la dirección de **I** será de la forma $OU_1 = u_1 \mathbf{I}$, siendo

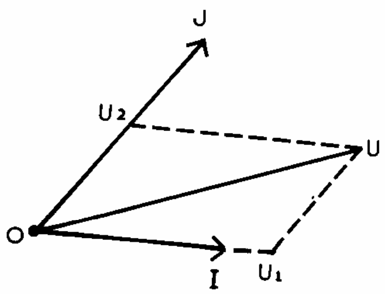


Figura 14

$$u_1 = \frac{|OU_1|}{|OI|}. \qquad [9]$$

Si OU_1 resulta de sentido opuesto a **I**, será $OU_1 = -u_1\mathbf{I}$, con el mismo valor [9] para u_1.

Análogamente es $OU_2 = u_2\mathbf{J}$, siendo u_2 el escalar $|OU_2| / |OJ|$ con el signo positivo o negativo según tenga OU_2 el mismo sentido que OJ o el opuesto.

De acuerdo con la regla para sumar vectores es $OU = OU_1 + OU_2$. Por lo tanto se puede escribir

$$\mathbf{U} = u_1\,\mathbf{I} + u_2\,\mathbf{J}. \qquad [10]$$

Esta descomposición del vector **U** como suma de vectores que tienen las direcciones de los dos vectores fijos **I** y **J** se llama la descomposición canónica de **U** respecto a la base formada por **I**, **J**. Los escalares (números reales) u_1 y u_2 se llaman las componentes de **U** respecto a la base **I**, **J**.

b) Vectores del espacio

En el caso de considerar todos los vectores del espacio, en lugar de dos vectores **I** y **J**, hay que tomar tres **I**, **J** y **K** no paralelos a un mismo plano. Suponiendo que se llevan a partir de un mismo origen, se tienen los vectores OI, OJ y OK. Proyectando entonces cualquier vector **U** = OU sobre las rectas que los contienen paralelamente a los planos determinados por los otros dos se obtiene de manera análoga una descomposición de la forma

$$\mathbf{U} = u_1\,\mathbf{I} + u_2\,\mathbf{J} + u_3\,\mathbf{K} \qquad [11]$$

que es la descomposición canónica para el caso de vectores del espacio, respecto a la base **I**, **J**, **K**. Los escalares u_1, u_2 y u_3 se llaman las componentes del vector **U** respecto a la base **I**, **J**, **K**.

E. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Consideremos dos vectores **U** y **V** de módulos u y v, respectivamente; sea α el ángulo que forman entre sí (medido entre 0° y 180°).

Definición. Se llama producto escalar de los vectores **U** y **V** al número real que es igual al producto de los módulos de los dos vectores por el coseno del ángulo que forman.

El producto escalar se representa por un punto, de manera que escribiremos

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u\,v\,\cos\alpha. \qquad [12]$$

El producto escalar es positivo si $\alpha < 90°$ y negativo si $90° < \alpha < 180°$. Si $\alpha = 90°$ el producto escalar es nulo; recíprocamente, suponiendo que se trata de vectores no nulos, el producto escalar solamente puede anularse si los vectores son perpendiculares entre sí. O sea: la condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean perpendiculares es que su producto escalar sea nulo.

En particular, puesto que $\cos 0° = 1$, resulta que el producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo, o sea,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 = u^2, \text{ de donde } u = \sqrt{\mathbf{U}^2} \qquad [13]$$

y por tanto

$$\mathbf{U}^2 \geq 0 \qquad [14]$$

donde el signo igual vale únicamente si **U** es el vector nulo.

Obsérvese que en la segunda fórmula de [13] no se puede simplificar la raíz con el exponente, pues u es un escalar y **U** un vector, no teniendo sentido escribir su igualdad.

Como consecuencia inmediata de la definición se tiene la propiedad conmutativa del producto escalar, a saber,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U} \qquad [15]$$

cualesquiera que sean los vectores **U** y **V**.

Consideremos ahora otro vector **W** del plano determinado por **U** y **V**. Sea γ el ángulo de los vectores **W** y **V** y w el módulo de **W**. Sea $OW_1 = OU + OW$ (Fig. 15). Como la proyección ortogonal de la poligonal OUW_1 sobre la recta que contiene a **V** es igual a la proyección ortogonal de OW_1, se tiene

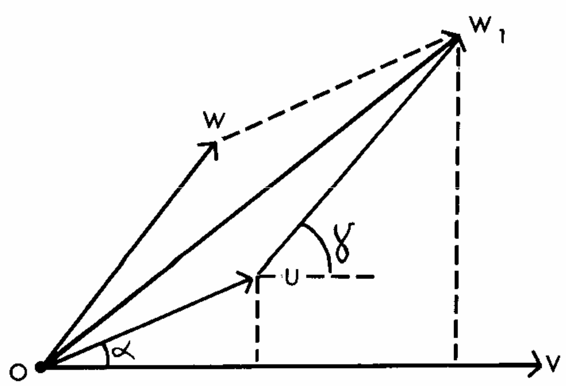


Figura 15

$$u \cos \alpha + w \cos \gamma = |OW_1| \cos \gamma_1 \qquad [16]$$

siendo γ_1 el ángulo de $\mathbf{W}_1$ con $\mathbf{V}$. Multiplicando ambos miembros de [16] por v resulta

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{U} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{V} \qquad [17]$$

que es la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma.

2

ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSION DOS

A. DEFINICION

Vamos ahora a definir los vectores y sus operaciones de manera abstracta. Para seguir los razonamientos conviene tener siempre presente el modelo de los vectores como segmentos orientados, con los cuales se opera tal como hemos visto en el capítulo anterior. Sin embargo, este modelo es solamente uno, posiblemente el más importante pero no el único, de los muchos que pueden darse de los vectores considerados como entes abstractos, tal como los vamos a definir en este capítulo.

De ahora en adelante un vector va a ser un elemento de cualquier conjunto que satisfaga ciertos axiomas que mencionaremos a continuación. Para fijar las ideas nos referiremos al caso de los vectores de un mismo plano. La generalización al espacio de un mayor número de dimensiones, no ofrece dificultad conceptual.

Definición. Un espacio vectorial E de dimensión dos es un conjunto de elementos llamados vectores entre los cuales y el conjunto de los números reales (que se llaman escalares) están definidas dos operaciones, a saber:

a) Suma de dos vectores. Esta se representa por el signo + y es tal que si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son dos vectores, la suma $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ es otro vector;

b) Producto de un vector por un escalar. Si $\mathbf{X}$ es un vector y a un escalar, el producto $a\mathbf{X}$ es un vector; operaciones que están sujetas a los siguientes axiomas, cualesquiera que sean los vectores $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ y los escalares a, b, c que en ellos figuran:

I_1. $\mathbf{X} + (\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \mathbf{Z}$ (propiedad asociativa de la suma);

I_2. existe un único vector $\mathbf{O}$, llamado el vector nulo o vector cero, tal que $\mathbf{X} + \mathbf{O} = \mathbf{X}$, cualquiera que sea $\mathbf{X}$;

I_3. todo vector **X** tiene un opuesto, representado por -**X**, tal que $\mathbf{X} + (-\mathbf{X}) = (-\mathbf{X}) + \mathbf{X} = \mathbf{O}$;

I_4. $a(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = a\mathbf{X} + a\mathbf{Y}$, $(a + b)\mathbf{X} = a\mathbf{X} + b\mathbf{X}$ (propiedades distributivas del producto por un escalar);

I_5. $a(b\mathbf{X}) = (ab)\mathbf{X}$;

I_6. $1 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$;

I_7. existen dos vectores **I** y **J** no nulos y $\mathbf{J} \neq a\mathbf{I}$ (a = escalar) tales que todo vector **X** es de la forma

$$\mathbf{X} = x_1 \mathbf{I} + x_2 \mathbf{J}$$

siendo x_1 y x_2 escalares.

Obsérvese el carácter abstracto de esta definición. Los vectores, elementos del conjunto E, pueden ser cualquier cosa mientras estén definidas las operaciones de suma entre ellos y producto por un escalar y se cumplan los axiomas $I_1, I_2, \ldots I_7$. Si solamente se supone que se cumplen los axiomas $I_1, I_2, \ldots I_6$ se tiene la definición general de "espacio vectorial". El axioma I_7 es el que motiva el agregado de "espacio vectorial de dimensión dos". Más exactamente, aquí hemos definido el espacio vectorial "sobre los números reales" por haber supuesto que los escalares a, b, c, ... eran números reales. Si en la definición se dijera que deben ser números racionales, se tendría la definición de espacio vectorial sobre los números racionales; si debieran ser números complejos, sería un espacio vectorial sobre los números complejos. En adelante nos referiremos siempre al caso de los números reales.

Considerando equivalentes a los vectores que difieren en el producto por un escalar (distinto de cero), se tiene definida en el espacio vectorial una relación de equivalencia. Los vectores de una misma clase, según esta relación, se dice que son <u>proporcionales</u> o bien, en lenguaje más geométrico, que tienen la <u>misma dirección.</u>

Ejemplos: 1. Los vectores clásicos del plano definidos en el capítulo 1 forman un espacio vectorial de dimensión dos, que es el espacio vectorial que sirve siempre de modelo. Obsérvese que los axiomas anteriores corresponden a las propiedades [2], [3], [5], [6], [7], [8], [10] del capítulo 1, las cuales son ahí consecuencia de las definiciones de suma y producto por un escalar, una vez definidos los vectores como segmentos orientados del plano. Al considerar los vectores como elementos abstractos se ha visto que estas propiedades eran precisamente las fundamentales para poder edificar sobre ellas toda la teoría; lo que allí eran consecuencias de las definiciones, aquí hay que tomarlo como axiomas.

2. Para ver un ejemplo de espacio vectorial que no sea el de los vectores usuales, consideremos todos los polinomios de primer grado ax + b, con una indeterminada x y coeficientes a, b números reales. Definamos la suma y el producto por un escalar u por las relaciones

$$(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2) = (a_1 + a_2)\,x + (b_1 + b_2),$$

$$u\,(ax + b) = (ua)\,x + ub.$$

Es fácil comprobar que estos polinomios, con estas dos operaciones, forman un espacio vectorial de dimensión 2.

Los vectores base $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$ pueden ser $\mathbf{I} = x$, $\mathbf{J} = 1$.

B. ALGUNAS CONSECUENCIAS

Vamos a señalar algunas consecuencias que se deducen de los axiomas que definen un espacio vectorial.

a) Si en la primera ley distributiva se hace $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$, queda

$$a(\mathbf{X} + \mathbf{O}) = a\mathbf{X} + a\mathbf{O}.$$

Por el axioma I_2 es $a(\mathbf{X} + \mathbf{O}) = a\mathbf{X}$ y por tanto $a\mathbf{X} = a\mathbf{X} + a\mathbf{O}$; como esto vale para cualquier vector, el axioma I_2 nos dice que debe ser

$$a\,\mathbf{O} = \mathbf{O} \qquad [1]$$

cualquiera que sea el escalar a.

b) Si en la segunda ley distributiva se hace b = 0, queda

$$a\,\mathbf{X} = (a + 0)\,\mathbf{X} = a\,\mathbf{X} + 0\,\mathbf{X}$$

y sumando a ambos miembros $-a\mathbf{X}$ queda

$$0\,\mathbf{X} = \mathbf{O} \qquad [2]$$

para todo vector $\mathbf{X}$. Recíprocamente, si $a\mathbf{X} = \mathbf{O}$ y $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$, es $a = 0$. En efecto, si fuera $a \neq 0$, multiplicando ambos miembros de $a\mathbf{X} = \mathbf{O}$ por $1/a$, resultaría $\mathbf{X} = \mathbf{O}$, contra la hipótesis.

c) El axioma I_3 define el opuesto $-\mathbf{X}$ de un vector $\mathbf{X}$. Por otra parte está definido el producto $(-1)\ \mathbf{X}$ del escalar -1 por el vector $\mathbf{X}$. Querèmos demostrar que

$$-\mathbf{X} = (-1)\ \mathbf{X}. \qquad [3]$$

Bastará para ello establecer que $\mathbf{X} + (-1)\ \mathbf{X} = \mathbf{O}$; en efecto

$$\mathbf{X} + (-1)\ \mathbf{X} = 1\ \mathbf{X} + (-1)\ \mathbf{X} = (1 + (-1))\ \mathbf{X} = 0\ \mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

d) La suma de vectores es conmutativa. En efecto, el producto $(1 + 1)\ (\mathbf{X} + \mathbf{Y})$ por la segunda propiedad distributiva se puede escribir

$$(1 + 1)\ (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = 1\ (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + 1\ (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{X} + \mathbf{Y}$$

y también, por la primera propiedad distributiva

$$(1 + 1)\ (\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = (1 + 1)\ \mathbf{X} + (1 + 1)\ \mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Y}.$$

Igualando los últimos miembros de las dos igualdades precedentes y sumando a la izquierda $-\mathbf{X}$ y a la derecha $-\mathbf{Y}$ de ambos miembros, teniendo en cuenta el axioma I_3, resulta

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{X} \qquad [4]$$

que demuestra la propiedad conmutativa de la suma de vectores.

e) Si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son dos vectores no nulos, tales que no existe ningún escalar a tal que $\mathbf{V} = a\ \mathbf{U}$ (diremos entonces que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ no son proporcionales), entonces todo vector $\mathbf{X}$ puede expresarse en la forma

$$\mathbf{X} = u\ \mathbf{U} + v\ \mathbf{V} \qquad [5]$$

siendo u y v escalares bien determinados. Es decir, los vectores $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$ del axioma I_7 no juegan ningún papel excepcional.

En efecto, por el axioma I_7 es

$$\mathbf{U} = u_1\mathbf{I} + u_2\mathbf{J}, \quad \mathbf{V} = v_1\mathbf{I} + v_2\mathbf{J}. \qquad [6]$$

Eliminando $\mathbf{I}$ resulta

$$(u_2v_1 - u_1v_2)\ \mathbf{J} = v_1\ \mathbf{U} - u_1\ \mathbf{V} \qquad [7]$$

y eliminando $\mathbf{J}$,

$$(u_1v_2 - u_2v_1)\,\mathbf{I} = v_2\,\mathbf{U} - u_2\,\mathbf{V}. \qquad [8]$$

Si fuera $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$, poniendo $v_1/u_1 = v_2/u_2 = a$, sería $\mathbf{V}=a\mathbf{U}$, contra lo supuesto. Por tanto debe ser $u_1v_2 - u_2v_1 = h \neq 0$ y de [7] y [8] se deduce

$$\mathbf{I} = \frac{1}{h}(v_2\,\mathbf{U} - u_2\,\mathbf{V}), \quad \mathbf{J} = -\frac{1}{h}(v_1\,\mathbf{U} - u_1\,\mathbf{V}).$$

Por consiguiente, todo vector $\mathbf{X}$, que por el axioma I_7 es de la forma $\mathbf{X} = x_1\,\mathbf{I} + x_2\,\mathbf{J}$, resulta también de la forma [5] con

$$u = \frac{x_1v_2 - x_2v_1}{h}, \qquad v = \frac{x_2u_1 - x_1u_2}{h}. \qquad [9]$$

Todo par de vectores como los $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$ o los $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$, tales que cualquier otro vector del espacio pueda expresarse como combinación lineal de ellos, se dice que constituye una base del espacio vectorial. Las fórmulas [6] son las de un cambio de base y las [9] son las que expresan cómo cambian las componentes de un vector por un cambio de base.

f) Si $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$ son una base del espacio, la relación $x_1\mathbf{I} + x_2\mathbf{J} = \mathbf{O}$ solamente puede cumplirse si $x_1 = x_2 = 0$. En efecto, si es $x_2 = 0$, la igualdad $x_1\mathbf{I} = \mathbf{O}$ obliga a $x_1 = 0$. Si es $x_2 \neq 0$, la relación $x_1\mathbf{I} + x_2\mathbf{J} = \mathbf{O}$ se puede escribir $\mathbf{J} = -(x_1/x_2)\mathbf{I}$, lo cual es contrario a lo estipulado en el axioma I_7.

De aquí se deduce que la descomposición $\mathbf{X} = x_1\mathbf{I} + x_2\mathbf{J}$ que asegura el axioma I_7 es única. En efecto, si fuera también $\mathbf{X} = x_1'\mathbf{I} + x_2'\mathbf{J}$, sería $(x_1 - x_1')\mathbf{I} + (x_2 - x_2')\mathbf{J} = \mathbf{O}$, lo cual exige que sea $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$.

C. EL PLANO AFIN

Sea E un espacio vectorial de dimensión dos.

Definición. Se llama plano afín P_a, asociado al espacio vectorial E, a un conjunto de elementos A, B, C, ... llamados puntos, entre los cuales está definida una operación, llamada diferencia, tal que a cada par ordenado de puntos (A, B) corresponde la diferencia A - B que es un vector de E, teniendo lugar los siguientes axiomas

II_1. B - A = -(A - B);

II_2. (C - B) + (B - A) = C - A;

II_3. Si O es un punto de P_a, a cada vector $\mathbf{X}$ de E corresponde un único punto X tal que $X - O = \mathbf{X}$.

La última relación la escribiremos también en la forma

$$X = O + \mathbf{X} \qquad [10]$$

es decir, la suma de un punto O más un vector $\mathbf{X}$ está definida por ser igual al punto X tal que $X - O = \mathbf{X}$.

Obsérvese que la suma de puntos no está definida. Asimismo obsérvese también que lo que llamamos "puntos" son entes abstractos definidos por los axiomas anteriores. Sin embargo, como veremos en lo sucesivo, el principal modelo concreto para estos nuevos entes son los puntos ordinarios de la geometría elemental.

D. ESPACIOS VECTORIALES EUCLIDIANOS

Definición. Un espacio vectorial E se dice que es euclidiano si entre sus vectores está definida una nueva operación, llamada producto escalar, que se indica por un punto y es tal que el resultado es un número real que cumple los siguientes axiomas:

III_1. $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\cdot\mathbf{X}$ (propiedad conmutativa);

III_2. $\mathbf{X}\cdot(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} + \mathbf{X}\cdot\mathbf{Z}$ (propiedad distributiva);

III_3. $a(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = a\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$;

III_4. $\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} > 0$ siempre que sea $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$.

El producto escalar de un vector por sí mismo se representa también como el cuadrado del vector, o sea

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}^2.$$

Consecuencia inmediata de la definición anterior es que

$$\mathbf{X}\cdot(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}) = \mathbf{X}\cdot[\mathbf{Y} + (-\mathbf{Z})] = \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} + \mathbf{X}\cdot(-1)\mathbf{Z} = \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} - \mathbf{X}\cdot\mathbf{Z}$$

y si $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}$ resulta

$$\mathbf{O}\cdot\mathbf{X} = 0 \qquad [11]$$

para todo vector $\mathbf{X}$.

A partir de los axiomas anteriores conviene introducir las siguientes definiciones:

Definición. Dos vectores se dice que son ortogonales si su producto escalar es igual a cero, o sea,

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = 0.$$

Definición. Se llama módulo de un vector $\mathbf{X}$ al número real

$$x = |\mathbf{X}| = \sqrt{\mathbf{X}^2}$$

que es real y positivo por el axioma III_4 y únicamente es cero para el vector nulo. Los vectores de módulo unidad se llaman versores.

Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ no son proporcionales, cualquiera que sea el número real z, por el axioma III_4 es $(\mathbf{X} + z\,\mathbf{Y})^2 > 0$, o sea, por la propiedad distributiva

$$(\mathbf{X} + z\,\mathbf{Y})^2 = \mathbf{X}^2 + 2\,z\,\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} + z^2 \mathbf{Y}^2 > 0$$

para todo valor de z. Esto nos dice que el polinomio de segundo grado en z que figura en el segundo miembro de la igualdad no puede tener raíces reales y por tanto su discriminante debe ser positivo, o sea,

$$\mathbf{X}^2\,\mathbf{Y}^2 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 > 0.$$

Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son proporcionales, o sea es $\mathbf{Y} = a\mathbf{X}$, entonces es $\mathbf{X}^2\mathbf{Y}^2 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 = 0$. Por tanto en todos los casos es

$$\mathbf{X}^2\,\mathbf{Y}^2 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 \geq 0$$

que se puede escribir

$$-1 \leq \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}}{|\mathbf{X}|\,|\mathbf{Y}|} \leq 1. \qquad [12]$$

Esta desigualdad hace que sea admisible la siguiente definición.

Definición. Se llama ángulo de dos vectores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ al ángulo, comprendido entre 0° y 180°, cuyo coseno está dado por la fórmula

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}}{|\mathbf{X}|\,|\mathbf{Y}|} \qquad [13]$$

Observación. El espacio vectorial euclidiano que sirve de modelo para esta construcción axiomática es nuevamente el de los vectores clásicos mencionados en el capítulo 1 con el producto escalar tal como allí se define. Obsérvese que las fórmulas son las mismas. La diferencia está en que ahora, siendo los vectores entes abstractos, el producto escalar debe definirse mediante axiomas, mientras que en el caso clásico, siendo los vectores elementos bien determinados y concretos, y conociendo la geometría euclidiana, los axiomas III_1, III_2, III_3 y III_4 son consecuencia de la definición de producto escalar.

E. BASES ORTONORMALES

Consideremos un espacio vectorial euclidiano de dimensión 2. Según el axioma I_7 todo vector es de la forma $\mathbf{X} = x_1 \mathbf{I} + x_2 \mathbf{J}$, siendo **I** y **J** una base del espacio. Ya hemos visto, sección B (e), que los vectores **I** y **J** no juegan ningún papel excepcional dentro del espacio, pues se pueden encontrar otros infinitos pares (basta tomar dos vectores cualesquiera que no sean proporcionales) que gocen de la misma propiedad; es decir, todo espacio vectorial admite infinitas bases.

Vamos a ver ahora que se puede elegir, también de infinitas maneras, una base **U**, **V** tal que se cumplan las condiciones

$$\mathbf{U}^2 = 1, \quad \mathbf{V}^2 = 1, \quad \mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = 0 \qquad [14]$$

Las bases que cumplen estas condiciones se llaman <u>ortonormales</u>.

En efecto, elijamos un vector cualquiera $\mathbf{U}_1$ no nulo. Según ya vimos en la sección B (e) tomando otro vector también cualquiera $\mathbf{V}_1$ no proporcional a $\mathbf{U}_1$, el par $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$ forma una base. Si el módulo de $\mathbf{U}_1$ es u_1, el vector $\mathbf{U} = (1/u_1)\mathbf{U}_1$ será de módulo unidad, es decir, se cumple la primera condición [14]. Pongamos $\mathbf{V}' = x\mathbf{U} + \mathbf{V}_1$ y determinemos x por la condición $\mathbf{V}'\cdot\mathbf{U} = x + \mathbf{V}_1\cdot\mathbf{U} = 0$. Se tiene así el vector $\mathbf{V}' = (-\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{U})\,\mathbf{U} + \mathbf{V}_1$; sea v' su módulo. Tomando el vector $\mathbf{V} = (1/v')\,\mathbf{V}'$, el par **U**, **V** cumple las condiciones [14], o sea, forma una base ortonormal.

Sea **U**, **V** una base ortonormal. Todo vector **A** es de la forma

$$\mathbf{A} = a_1\,\mathbf{U} + a_2\,\mathbf{V}. \qquad [15]$$

De aquí, elevando al cuadrado y teniendo en cuenta las condiciones [14] resulta que el módulo del vector **A** está dado por

$$a^2 = \mathbf{A}^2 = a_1^2 + a_2^2. \qquad [16]$$

3

EL PLANO EUCLIDIANO

A. EL PLANO EUCLIDIANO

Definición. Se llama plano euclidiano P a todo espacio afín asociado a un espacio vectorial euclidiano de dimensión dos.

En todo plano euclidiano tenemos, por tanto, puntos y vectores. Entre dos puntos está definida la diferencia, cuyo resultado es un vector, pero no la suma. Entre dos vectores está definida la suma, la diferencia y el producto escalar; también está definido el producto de un escalar por un vector.

Definición. Se llama distancia entre dos puntos A y B de un plano euclidiano al módulo del vector diferencia A - B. La representaremos por d(A, B) o por $\overline{AB}$, es decir,

$$d(A, B) = \overline{AB} = |A - B|. \qquad [1]$$

La distancia entre dos puntos cumple las tres propiedades fundamentales siguientes:

i. $\overline{AB} = \overline{BA}$;

ii. $\overline{AB} = 0$ si y solamente si A es el mismo punto B;

iii. $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{CB}$, cualesquiera que sean los tres puntos A, B, C.

Las dos primeras propiedades se deducen inmediatamente de la definición. Para demostrar la tercera (llamada desigualdad triangular) observemos que poniendo $\mathbf{X} = B-A$, $\mathbf{Y} = A-C$, $\mathbf{Z} = B-C$ es $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, de donde

$$\mathbf{Z}^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + 2\, \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$$

y como $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \leq |\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}|$ (según [12] del Cap. 2) se tiene

$$\mathbf{Z}^2 \leq \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 + 2\, |\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}| = (|\mathbf{X}| + |\mathbf{Y}|)^2$$

de donde $|\mathbf{Z}| \leq |\mathbf{X}| + |\mathbf{Y}|$ que es la tercera propiedad que se quería demostrar.

Todo conjunto entre cuyos elementos esté definida una distancia que cumpla las tres condiciones anteriores se dice que es un espacio métrico. Por tanto, el plano euclidiano, con la definición de distancia entre sus puntos dada anteriormente, es un espacio métrico.

B. COORDENADAS CARTESIANAS

Sea el plano euclidiano P. Fijado en el mismo un punto O y una base **I**, **J** del espacio vectorial asociado, a todo punto X corresponde un vector X - O, el cual podrá expresarse en la forma $X - O = x\mathbf{I} + y\mathbf{J}$. Por tanto se puede escribir

$$X = O + x\mathbf{I} + y\mathbf{J}. \qquad [2]$$

Es decir, fijados un punto O y dos vectores **I**, **J** no proporcionales, a todo punto X corresponden dos números reales x e y; recíprocamente, a todo par de números reales x e y corresponde el punto X del plano euclidiano definido por [2].

Definición. El conjunto (O; **I**, **J**) del punto O más los vectores **I** y **J** se dice que constituyen un sistema de coordenadas cartesianas del plano euclidiano. Los números x e y determinados por la descomposición [2] se llaman las coordenadas cartesianas del punto X respecto al sistema (O; **I**, **J**).

Si **I** y **J** forman una base ortonormal, el sistema de coordenadas se llama ortogonal. El punto O se llama el origen del sistema de coordenadas; sus coordenadas, según [2], son $x = 0$, $y = 0$.

Para indicar que las coordenadas del punto X son x e y, una vez sobrentendido un determinado sistema de coordenadas, escribiremos abreviadamente X(x, y).

Dados dos puntos $X_1(x_1, y_1)$, $X_2(x_2, y_2)$ la distancia entre ellos, según [1], es

$$d(X_1, X_2) = |(O + x_1\mathbf{I} + y_1\mathbf{J}) - (O + x_2\mathbf{I} + y_2\mathbf{J})|$$

$$= |(x_1 - x_2)\mathbf{I} + (y_1 - y_2)\mathbf{J}|.$$

Si el sistema de coordenadas es ortogonal, resulta

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \qquad [3]$$

C. LA RECTA: PROPIEDADES AFINES

Vamos a definir y a estudiar las primeras propiedades de la recta en el plano afín. Supondremos después el plano métrico o euclidiano. La definición de recta es la misma en los dos casos, pero el caso del plano euclidiano es más rico en propiedades, puesto que en él existe un producto escalar y por tanto se puede hablar de ángulos y distancias.

Definición. Se llama recta determinada por dos puntos A y B al conjunto de puntos de la forma

$$X = A + u(B - A) \qquad [4]$$

para todos los valores del parámetro real u.

Teorema. Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta.

Demostración. Sean los puntos

$$X_1 = A + u_1(B - A)\,, \quad X_2 = A + u_2(B - A)$$

de la recta [4]; por suponer que se trata de puntos diferentes debe ser $u_1 \neq u_2$. Según la definición, la recta que ellos determinan es la formada por los puntos de la forma

$$X = X_1 + u\,(X_2 - X_1) = A + [u_1 - u(u_2 - u_1)](B - A)$$

y al variar u sobre todos los números reales, este conjunto de puntos es el mismo [4].

Este teorema permite establecer la definición siguiente.

Definición. Se llama recta a todo conjunto de puntos tal que si A y B son dos cualesquiera de ellos, todos los demás están dados por la expresión [4] al recorrer el parámetro u todos los valores reales.

El vector B - A indica la dirección de la recta. Manteniendo fijo el punto A y variando la dirección resulta que la ecuación general de las rectas que pasan por un punto A es de la forma

$$X = A + u\,\mathbf{U} \qquad [5]$$

siendo **U** el vector que determina la dirección de la recta y que se llama vector director de la recta.

Para hallar la intersección de dos rectas

$$X = A + u\,\mathbf{U}, \qquad X = B + v\,\mathbf{V} \qquad [6]$$

hay que hallar los valores de los parámetros u y v tales que las expresiones anteriores den el mismo punto, es decir se tiene la condición $A + u\,\mathbf{U} = B + v\,\mathbf{V}$, o sea,

$$A - B = -u\,\mathbf{U} + v\,\mathbf{V}. \qquad [7]$$

Si los vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ no son proporcionales, ellos forman una base, respecto a la cual sabemos que la descomposición canónica del vector $A - B$ es única (Cap. 2, Sección B (f)). Los componentes $-u$ y v de esta descomposición son los valores que sustituidos, respectivamente, en cualquiera de las expresiones [6] dan el punto de intersección de las dos rectas, el cual, por consiguiente, existe y es único.

Si los vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son proporcionales, o sea es $\mathbf{V} = a\mathbf{U}$, la condición [7] se escribe $A - B = (-u + av)\,\mathbf{U}$, lo cual significa que para que las dos rectas tengan punto común el punto B debe pertenecer a la primera recta [6] y entonces las dos rectas coinciden. Si B no pertenece a la primera recta [6], las dos rectas son diferentes, pero no tienen ningún punto común. Se establece la definición siguiente.

Definición. Se llaman rectas paralelas de un plano afín a las que no tienen ningún punto común.

Según lo que acabamos de ver, para que dos rectas sean paralelas es necesario que, siendo distintas, tengan los vectores directores proporcionales. En consecuencia, la ecuación de la recta paralela a la recta [5] que pasa por un punto B no perteneciente a ella, será

$$X = B + u\,\mathbf{U} \qquad [8]$$

con el mismo vector director $\mathbf{U}$ (sería lo mismo tomar cualquier vector proporcional $a\mathbf{U}$). Esto nos dice, de paso, que por un punto exterior a una recta pasa una y una sola paralela.

Ecuación cartesiana de la recta. Sea $(O; \mathbf{I}, \mathbf{J})$ un sistema de coordenadas cartesianas. Expresando los puntos que figuran en [4] por sus coordenadas, será

$$X = O + x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J}, \qquad A = O + a_1\mathbf{I} + a_2\mathbf{J}, \qquad B = O + b_1\mathbf{I} + b_2\mathbf{J}$$

y la ecuación [4] se escribe

$$x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} = [a_1 + u(b_1 - a_1)]\,\mathbf{I} + [a_2 + u(b_2 - a_2)]\,\mathbf{J}$$

y por consiguiente, siendo única la descomposición canónica de un vector, debe ser

$$x = a_1 + u(b_1 - a_1), \quad y = a_2 + u(b_2 - a_2). \qquad [9]$$

Estas son las ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta determinada por los puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$. Eliminando el parámetro u, resulta

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} \qquad [10]$$

que es la forma cartesiana explícita de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Poniendo

$$b_2 - a_2 = u, \quad -(b_1 - a_1) = v, \quad a_2 b_1 - a_1 b_2 = w \qquad [11]$$

resulta que la ecuación [10] se puede escribir

$$u\,x + v\,y + w = 0 \qquad [12]$$

o sea: la ecuación cartesiana de una recta es siempre una ecuación lineal de las variables x e y.

Recíprocamente, toda ecuación de la forma [12], con alguno de los coeficientes u, v no nulo, representa siempre una recta. En efecto, si es por ejemplo $u \neq 0$, representa a la recta que pasa por los puntos $A(-w/u, 0)$, $B[-(w+v)/u, 1]$; si es $u = 0$ se trata de la recta que pasa por los puntos $A(0, -w/v)$, $B(1, -w/v)$.

Ya vimos que el vector B-A es un vector director de la recta; comparando con [11] resulta que si la recta está dada en la forma [12] su vector director es de la forma $\mathbf{U}(-v, u)$. Si para otra recta es $\mathbf{U}'(-v', u')$, puesto que decir que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}'$ son proporcionales equivale a decir que lo son sus componentes, resulta: la condición para que dos rectas

$$u\,x + v\,y + w = 0, \quad u'x + v'y + w' = 0 \qquad [13]$$

sean paralelas es que sea

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} \neq \frac{w}{w'}. \qquad [14]$$

Si la última desigualdad es también una igualdad, las dos rectas son una misma.

Ejercicios y ejemplos: 1. Ecuación de la recta que pasa por el punto $B(-1, 2)$ y es paralela a la recta $2x - 3y + 1 = 0$.

Solución: El vector director de la recta es $\mathbf{U}(3, 2)$; la recta buscada es $X = B + u\mathbf{U}$, o sea, tiene por ecuaciones paramétricas

$$x = -1 + 3u, \quad y = 2 + 2u$$

y por ecuación cartesiana

$$2x - 3y + 8 = 0.$$

2. Hallar el punto de intersección de las rectas

$$(x = 2 - 3u, \quad y = 1 + 5u), \qquad (x = -1 + v, \quad y = 2 - 3v).$$

Solución: Para el punto común debe ser $2 - 3u = -1 + v$, $1 + 5u = 2 - 3v$. De este sistema se deduce $u = 2$, $v = -3$. Por tanto el punto buscado es $x = 2 - 3 \cdot 2 = -4$, $y = 1 + 5 \cdot 2 = 11$.

3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(2, -3)$ y por el punto medio del segmento determinado por $P(-3, 4)$, $Q(1, 6)$.

Solución: La recta determinada por P y Q es $X = P + u(Q-P)$; para el punto medio M del segmento PQ, por ser un punto de la recta es $M = P + u(Q-P)$ y por ser el punto medio $P-M = M - Q$; sustituyendo en esta última igualdad el valor de M dado por la primera resulta $u(P-Q) = (1-u)(P-Q)$, de donde $u = 1-u$, $u = 1/2$. Luego el punto medio es $M = P + 1/2\,(Q-P)$. Con los datos del problema las coordenadas de este punto son $x = -3 + 1/2\,(1 + 3) = -1$, $y = 4 + 1/2\,(6-4) = 5$. La recta que pasa por A y M, según [10] es

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{8}, \quad \text{o sea} \quad 8x + 3y - 7 = 0.$$

4. Si cuatro puntos no alineados A, B, C y D cumplen la condición

$$B - A = C - D \qquad [15]$$

se dice que son vértices de un paralelogramo. En este caso, las rectas determinadas por A, B y C, D tienen los mismos vectores directores, o sea, son rectas paralelas. De [15] se deduce $C - B = D - A$ y por tanto también las rectas determinadas por A, B y B, C resultan paralelas. Los segmentos de recta cuyos extremos son los puntos A, C y B, D se llaman diagonales. Probar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Solución: Según lo visto en el ejercicio anterior, el punto medio de la diagonal AC es

$$M = A + \tfrac{1}{2}(C - A) \qquad [16]$$

y el punto medio de la diagonal BD es $M' = B + \tfrac{1}{2}(D-B)$ que según [15] se puede escribir

$$\begin{aligned} M' = B + \tfrac{1}{2}(D - B) &= A + (C - D) + \tfrac{1}{2}(D - A + D - C) \\ &= A + (C - A) + (A - D) + \tfrac{1}{2}(D - A + D - C) \\ &= A + \tfrac{1}{2}(C - A + C - A + A - D + A - D) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(D - A + D - C) = A + \tfrac{1}{2}(C - A) = M. \end{aligned}$$

5. Sean A, B, C tres puntos no alineados. Probar que la recta que une los puntos medios de los segmentos AB y AC es paralela a la recta BC.

Solución: Los puntos medios del enunciado son

$$M = A + \tfrac{1}{2}(B - A), \quad M' = A + \tfrac{1}{2}(C - A)$$

y la recta que los une es

$$X = M + u(M' - M) = A + \tfrac{1}{2}(B - A) + u(C - B).$$

El vector director de esta recta es $C - B$, o sea es el mismo que el de la recta BC, lo que demuestra el enunciado.

6. Dados tres puntos A, B y C no alineados, hallar el punto X tal que A, B, C y X sean vértices de un paralelogramo.

Solución: Debe ser $X - A = C - B$, o bien $X - A = B - C$, o bien $X - B = C - A$. El problema tiene tres soluciones:

$$X_1 = A + (C - B), \quad X_2 = A + (B - C), \quad X_3 = B + (C - A).$$

Por ejemplo, si es $A(-1, 2)$, $B(5, 3)$, $C(2, 0)$ es
$(x = -1 + 2 - 5 = -4,\ y = 2 + 0 - 3 = -1)$, o bien
$(x = -1 + 5 - 2 = 2,\ y = 2 + 3 = 5)$, o bien
$(x = 5 + 2 + 1 = 8,\ y = 3 - 2 = 1)$.

D. LA RECTA: PROPIEDADES METRICAS

Supongamos ahora el plano euclidiano. La definición de recta es la misma que para el plano afín así como las propiedades que acabamos de estudiar. Lo que ocurre es que al pasar al plano euclidiano se dispone, además, de un producto escalar y, por tanto, se puede hablar de ángulos y distancias. Resultan así las propiedades llamadas métricas.

Observemos primero, como lema fundamental, que dado un vector $\mathbf{U}$ (no nulo) existe siempre un vector $\mathbf{H}$ ortogonal al mismo, o sea $\mathbf{U}\cdot\mathbf{H} = 0$, y que este vector $\mathbf{H}$ está determinado excepto el producto por un escalar. En efecto, tomemos una base ortonormal $\mathbf{I}, \mathbf{J}$. Sea $\mathbf{U} = u_1\mathbf{I} + u_2\mathbf{J}$, $\mathbf{H} = h_1\mathbf{I} + h_2\mathbf{J}$, de donde $\mathbf{U}\cdot\mathbf{H} = u_1 h_1 + u_2 h_2$ y para que sea $\mathbf{U}\cdot\mathbf{H} = 0$ deberá ser $u_1 h_1 + u_2 h_2 = 0$. Puesto que alguno de los u_1, u_2 es distinto de cero, suponiendo $u_1 \neq 0$, resulta $h_1 = (-u_2/u_1)h_2$ y por tanto todos los vectores de la forma $h_2(-u_2/u_1\,\mathbf{I} + \mathbf{J})$ para cualquier valor no nulo de h_2 son ortogonales a $\mathbf{U}$ y estos vectores son los únicos con esta propiedad. Si se quiere que $\mathbf{H}$ sea un versor (vector de módulo unidad) el escalar h_2 queda determinado salvo el signo. Es decir, dado un vector $\mathbf{U}$ (no nulo) existen dos únicos versores ortogonales a $\mathbf{U}$, los cuales son opuestos.

Sentado este lema, consideremos la recta [4] determinada por los puntos A, B cuya ecuación se puede escribir

$$X - A = u(B - A) \qquad [17]$$

donde ambos miembros son vectores. Sea $\mathbf{H}$ un vector ortogonal a B - A (se dice que es ortogonal a la recta, puesto que B - A es un vector director de la misma). Multiplicando escalarmente ambos miembros de [17] por $\mathbf{H}$ resulta

$$(X - A)\cdot\mathbf{H} = 0 \qquad [18]$$

o sea, todo punto de la recta [17] satisface a esta ecuación [18]. Recíprocamente, si B es un punto que satisface a [18], cualquier otro punto X que también satisfaga a [18] es de la forma [17]. En efecto, puesto que $\mathbf{H}$ y B - A no son proporcionales, según la sección B (e) del capítulo 2 pueden tomarse como base del espacio vectorial asociado al plano y por tanto es $X - A = u(B - A) + v\mathbf{H}$. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{H}$ y ya que por hipótesis X y B satisfacen a [18], resulta $v\mathbf{H}^2 = 0$, de donde $v = 0$, lo que demuestra que $X - A = u(B - A)$.

Esto prueba que las ecuaciones [17] y [18] son equivalentes.

La ecuación [18] es otra forma de la ecuación de la recta. En ella están de manifiesto un punto A de la recta y un vector **H** que tiene la dirección de la normal a la misma.

Poniendo $X - A = (X - O) - (A - O)$ y además $(A - O)\cdot\mathbf{H} = w$, la ecuación [18] puede escribirse

$$(X - O)\cdot\mathbf{H} = w \qquad [19]$$

donde w es un escalar. Esta es otra forma vectorial de la ecuación de una recta. Tomando un sistema ortogonal de coordenadas $(O;\mathbf{I},\mathbf{J})$ y suponiendo que respecto al mismo las coordenadas de X sean x e y y las componentes de **H** sean h_1 y h_2 la ecuación [19] se escribe

$$h_1\,x + h_2\,y = w. \qquad [20]$$

Resulta así nuevamente la forma [12] de la ecuación de la recta, pero ahora tenemos el significado de los coeficientes h_1 y h_2 de las coordenadas del punto variable, a saber: h_1 y h_2 son las componentes de un vector ortogonal a la recta.

La ecuación de la recta que pasa por un punto M y es paralela a la recta [18] será $(X - M)\cdot\mathbf{H} = 0$, puesto que debe tener el mismo **H**, ecuación que poniendo $X - M = X - O - (M - O)$ se puede escribir

$$(X - O)\cdot\mathbf{H} = (M - O)\cdot\mathbf{H}. \qquad [21]$$

De todo esto se deducen las reglas para hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto y es perpendicular a una recta dada, a saber:

a) Si la recta está dada en la forma $X = A + u\mathbf{U}$ [5], la ecuación de la recta perpendicular a ella que pasa por el punto B es $(X - B)\cdot\mathbf{U} = 0$;

b) Si la recta está dada en la forma $(X - A)\cdot\mathbf{H} = 0$ [18], la ecuación de la recta perpendicular a ella que pasa por el punto B se escribe $X = B + u\mathbf{H}$.

<u>Angulo de dos rectas.</u> Sean dos rectas r y r'. Si se conocen sus ecuaciones en forma vectorial, el ángulo entre ellas se determina como el ángulo de dos vectores que tengan las direcciones de las rectas o de dos vectores que sean respectivamente perpendiculares

a cada recta, mediante la fórmula [13] del capítulo 2. Por ejemplo, si las rectas son

$$r: X = A + u\mathbf{U}, \qquad r': X = A' + u\mathbf{U}'$$

el ángulo α que forman entre sí está dado por

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}'}{|\mathbf{U}|\,|\mathbf{U}'|}. \qquad [22]$$

Si las rectas están dadas en la forma [18]

$$r: (X - A)\cdot\mathbf{H} = 0, \quad r': (X - A')\cdot\mathbf{H}' = 0$$

puesto que el ángulo que ellas forman entre sí es igual al ángulo que forman sus normales, será también

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}'}{|\mathbf{H}|\,|\mathbf{H}'|}. \qquad [23]$$

En un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales si las rectas son

$$r: u\,x + v\,y + w = 0, \qquad r': u'x + v'y + w' = 0 \qquad [24]$$

sabemos que las componentes de **H** son u y v y las de **H'** son u' y v'; por tanto la fórmula [23] se escribe

$$\cos \alpha = \frac{u\,u' + v\,v'}{\sqrt{u^2 + v^2}\,\sqrt{u'^2 + v'^2}} \qquad [25]$$

De aquí: la condición necesaria y suficiente para que las rectas [24], dadas en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, sean perpendiculares es

$$u\,u' + v\,v' = 0. \qquad [26]$$

En los ejemplos que siguen supondremos siempre que el sistema de coordenadas es ortogonal.

Ejemplos: 1. Sea la recta $u\,x + v\,y + w = 0$. Hallar la tangente del ángulo α que ella forma con el vector $\mathbf{I}$ (eje de las x).

Solución: Al final de la sección C vimos que el vector director de la recta es $\mathbf{U}(-v, u) = -v\,\mathbf{I} + u\,\mathbf{J}$. Por tanto es $\cos \alpha = \mathbf{U}\cdot\mathbf{I}/|\mathbf{U}| = -v/\sqrt{u^2 + v^2}$. De aquí se deduce $\tan \alpha = -u/v$. Este valor se llama el coeficiente angular o pendiente de la recta.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $B(2, -1)$ y es perpendicular a la recta determinada por $P(2, 0)$, $Q(-1, 4)$.

Solución: El vector director de la recta es $\mathbf{H} = Q - P = -3\ \mathbf{I} + 4\ \mathbf{J}$. Por tanto, según [18], la recta buscada es $(X-B)\cdot\mathbf{H} = 0$, o sea $-3(x-2) + 4(y+1) = 0$, que se puede escribir $3x - 4y - 10 = 0$.

4

ALGUNOS EJEMPLOS Y APLICACIONES

A. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

En el capítulo anterior se han dado los elementos fundamentales para desarrollar la geometría analítica del plano a partir del sistema axiomático que define los espacios vectoriales. Se ha llegado a las formas clásicas de la ecuación de la recta y a las fórmulas principales para la distancia entre puntos y el ángulo entre rectas, con lo cual se puede seguir construyendo toda la geometría analítica del plano tal como aparece en cualquier texto clásico.

A manera de ejemplo vamos a dar en este capítulo algunos problemas particulares para mostrar cómo el método vectorial puede utilizarse con ventaja, aparte del mérito fundamental de haber permitido una construcción axiomática relativamente simple y elemental de la geometría analítica.

Sea la recta

$$(X - O) \cdot \mathbf{H} = w. \qquad [1]$$

Sea X_1 el pie de la perpendicular trazada a la recta desde el origen O. Por ser X_1 un punto de la recta, satisface a la ecuación [1], o sea

$$(X_1 - O) \cdot \mathbf{H} = w \qquad [2]$$

y por tener $X_1 - O$ la misma dirección que $\mathbf{H}$ la definición de producto escalar nos dice que

$$(X_1 - O) \cdot \mathbf{H} = |\mathbf{H}|\, d \qquad [3]$$

siendo d el módulo de $X_1 - O$, o sea (por definición) la distancia del origen O a la recta dada. De [2] y [3] se deduce

$$d = \frac{w}{|\mathbf{H}|} \qquad [4]$$

que es la fórmula que da la distancia de una recta al origen de coordenadas.

Si se quiere obtener la distancia a la recta [1] de un punto cualquiera M, observemos que la recta que pasa por M y es paralela a la [1] es (según [21] del capítulo 3)

$$(X - O)\cdot\mathbf{H} = (M - O)\cdot\mathbf{H}.$$

Su distancia al origen, por la fórmula [4] aplicada a este caso es

$$d_1 = \frac{(M - O)\cdot\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$$

y la distancia de M a la recta [1] resulta como diferencia entre las distancias al origen de ambas rectas paralelas, o sea

$$d_1 - d = \frac{(M - O)\cdot\mathbf{H} - w}{|\mathbf{H}|} \qquad [5]$$

o sea, es el valor que resulta al substituir en la ecuación de la recta, una vez pasados todos los términos al primer miembro, el punto variable X por el punto M, dividido por el módulo de **H.**

B. LAS TRES ALTURAS DE UN TRIANGULO CONCURREN EN UN PUNTO

Sea el triángulo de vértices A B C. Sean A_1, B_1 y C_1 los pies de las alturas trazadas desde los vértices A, B y C, respectivamente. Sea E el punto de encuentro de las alturas AA_1 y BB_1. Por ser A - E perpendicular a B - C y B - E perpendicular a C - A se tiene

$$(A - E)\cdot(B - C) = 0, \quad (B - E)\cdot(C - A) = 0. \qquad [6]$$

Por otra parte se cumple la identidad

$$(A - E)\cdot(B - C) + (B - E)\cdot(C-A) + (C - E)\cdot(A - B) = 0 \quad [7]$$

la cual no puede comprobarse directamente, puesto que el producto escalar de puntos no está definido, pero resulta inmediatamente descomponiendo cada diferencia en la forma $A - E = (A - O) - (E - O)$ (lícito por el axioma II_2) y aplicando la propiedad distributiva del producto escalar de vectores. De [6] y [7] se deduce

$$(C - E)\cdot(A - B) = 0$$

lo cual nos dice que el vector C - E es perpendicular al vector A - B, o sea, que la altura trazada desde C también pasa por E. Queda así probado que las tres alturas de un triángulo concurren en un punto.

C. PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA

Consideremos el segmento cuyos extremos son los puntos A y B. Queremos hallar el punto M del segmento tal que $|BM|/|MA| = r$, siendo r una razón dada.

Todo punto de la recta AB es de la forma ([4], capítulo 3)

$$X = A + u(B - A) \qquad [8]$$

de donde

$$X - A = u(B - A), \quad B - X = (1-u)(B - A)$$

o sea

$$\frac{|BX|}{|XA|} = \frac{|B - X|}{|X - A|} = \frac{1 - u}{u} \;.$$

Para el punto M buscado queremos que esta razón sea igual a r; por tanto $(1-u)/u = r$ de donde $u = 1/(1 + r)$. Por consiguiente, sustituyendo en [8],

$$M = A + \frac{1}{1 + r} (B - A). \qquad [9]$$

Por ejemplo, para el punto medio del segmento AB debe ser $r = 1$ y por tanto

$$M = A + \tfrac{1}{2}(B - A) \qquad [10]$$

como ya se vio en el ejercicio 3 de la Sección C del capítulo 3.

Si O es un punto cualquiera del plano, la relación [10] puede escribirse

$$M - O = A - O + \tfrac{1}{2} \left[(B - O) - (A - O) \right]$$

y como las diferencias de puntos son vectores, poniendo $M - O = \mathbf{M}$, $A - O = \mathbf{A}$, $B - O = \mathbf{B}$, tendremos

$$\mathbf{M} = \tfrac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \qquad [11]$$

que es una expresión muy útil del vector cuyo extremo es el punto medio del segmento determinado por los extremos de los vectores **A** y **B** supuesto todos los vectores llevados a partir de un mismo origen.

D. BARICENTRO DE UN TRIANGULO

Sea un triángulo A B C. Sean ahora A_1, B_1 y C_1 los puntos medios de los lados opuestos a A, B y C, respectivamente. Consideremos en el plano un punto cualquiera O y asignemos a cada punto X el vector X - O = **X**. Sea G el extremo del vector

$$\mathbf{G} = \tfrac{1}{3}\,(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \qquad [12]$$

siendo, según lo convenido, **A** = A - O, **B** = B - O y **C** = C - O. El punto G, así definido, se llama el baricentro del triángulo A B C y queremos demostrar que por él pasan las tres medianas del triángulo.

En efecto, siendo $A_1 = B + \tfrac{1}{2}(C - B)$ (según [10]), la ecuación de la mediana AA_1 es

$$X = A + u\,[B - A + \tfrac{1}{2}\,(C - B)]$$

que se puede escribir

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + u\,[\tfrac{1}{2}\,(\mathbf{B} + \mathbf{C}) - \mathbf{A}].$$

Obsérvese que con esta notación se suponen todos los vectores llevados a partir del origen común O. Para u = 2/3 resulta **X** = **G**, lo cual prueba que el punto G pertenece a la mediana AA_1. Igualmente se prueba que G pertenece a las otras dos medianas. Queda con ello demostrado que las tres medianas pasan por un punto y, además, se tiene la expresión [12] para ese punto llamado baricentro.

E. TEOREMA DE MENELAO

Sea un triángulo A B C y una transversal que corte los lados BC, CA y AB, respectivamente, en los puntos M_1, M_2 y M_3. Sean r_1, r_2 y r_3 las razones en que estos puntos dividen al lado respectivo. Según [9] será

$$M_1 = B + \frac{1}{1+r_1}\,(C - B), \quad M_2 = C + \frac{1}{1+r_2}\,(A - C), \quad M_3 = A + \frac{1}{1+r_3}\,(B - A).$$

Puesto que M_3 está sobre la recta determinada por M_1 y M_2, cuya ecuación $X = M_1 + u\,(M_2 - M_1)$, por lo cual debe existir un valor de u tal que sea

$$A + \frac{1}{1+r_3}(B - A) = B + \frac{1}{1+r_1}(C - B) +$$

$$u\left[C + \frac{1}{1+r_2}(A-C) - B - \frac{1}{1+r_1}(C-B)\right].$$

Poniendo $B - A = (B - C) + (C - A)$ y ordenando, esta expresión se puede escribir

$$\left(\frac{1 + u\,r_1}{1 + r_1} - \frac{r_3}{1 + r_3}\right)(B - C) - \left(\frac{u}{1 + r_2} - \frac{r_3}{1 + r_3}\right)(A - C) = 0.$$

Como los vectores $B - C$ y $A - C$ no son proporcionales, ya que los puntos A, B y C no están alineados, la última igualdad exige que sean nulos los dos coeficientes. Escribiendo estas dos ecuaciones, despejando u en ambas e igualando, tras un pequeño cálculo resulta la condición

$$r_1\, r_2\, r_3 = -1.$$

Esta es la expresión del llamado teorema de Menelao. Substituyendo las razones por sus valores, resulta

$$\frac{BM_1}{M_1C}\cdot\frac{CM_2}{M_2A}\cdot\frac{AM_3}{M_3B} = -1.$$

Obsérvese que cambiando la orientación de los segmentos esta relación se escribe a veces

$$\frac{BM_1}{CM_1}\cdot\frac{CM_2}{AM_2}\cdot\frac{AM_3}{BM_3} = 1$$

ya que se ha cambiado el signo de los tres denominadores.

5

GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

A. EL ESPACIO EUCLIDIANO DE TRES DIMENSIONES

Ya hemos visto como se llega al concepto de plano euclidiano a partir de los de espacio vectorial euclidiano de dimensión dos y de plano afín. Lo hemos hecho para el caso del plano (dimensión dos) para fijar las ideas, pero la generalización con respecto al espacio ordinario o espacio de tres dimensiones y aun a espacios de un mayor número de dimensiones no ofrece mayores dificultades. Vamos a ver, en efecto, como se pasa al espacio ordinario.

Ya observamos al dar la definición de espacio vectorial (Sección A, capítulo 2) que si se prescinde del axioma I_7 se tiene la definición de espacio vectorial general y que el agregado de dicho axioma especializa al espacio a ser de dimensión dos. Si no se exige dicho axioma I_7 pueden existir tres vectores I, J y K, para los cuales la relación $a\,\mathbf{I} + b\,\mathbf{J} + c\,\mathbf{K} = \mathbf{O}$ solamente puede cumplirse si los escalares a, b y c son nulos a la vez. En tal caso se dice que los vectores **I**, **J** y **K** son independientes.

Supongamos que en la definición de espacio vectorial de la Sección A del capítulo 2 se substituye el axioma I_7 por el siguiente: I_7^*. Existen tres vectores independientes I, J y K tales que todo vector del espacio es de la forma

$$\mathbf{X} = x_1\mathbf{I} + x_2\mathbf{J} + x_3\mathbf{K} \qquad [1]$$

siendo x_1, x_2 y x_3 escalares.

Los axiomas I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 y I_7^* definen entonces un espacio vectorial de dimensión tres.

La definición de espacio afín es exactamente la misma que aparece en la Sección C del capítulo 2. Si el espacio vectorial es de dimensión tres, los mismos axiomas II_1, II_2 y II_3 definen el espacio afín asociado al mismo.

La definición de espacio vectorial euclidiano (Sección D, capítulo 2) no depende de la dimensión y, finalmente, el espacio euclidiano de dimensión tres es todo espacio afín asociado a un espacio vectorial euclidiano de dimensión tres. Siguiendo la nomenclatura de la geometría elemental suprimiremos el agregado que dice que la dimensión es tres y hablaremos, brevemente, del espacio euclidiano, sin que pueda haber lugar a confusión, puesto que no vamos a considerar espacios de mayor número de dimensiones.

Un sistema de coordenadas cartesianas está determinado por un punto O (origen de coordenadas) más tres vectores **I**, **J** y **K** en las condiciones del axioma I_7^*. Estos tres vectores se dice que forman una base del espacio vectorial asociado al espacio euclidiano. Todo punto X del espacio euclidiano puede escribirse en la forma

$$X = O + x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K} \qquad [2]$$

siendo x, y, z números reales (escalares) que se llaman las coordenadas del punto X respecto del sistema (O; **I**, **J**, **K**).

Si se cumplen las condiciones

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = 1, \quad \mathbf{I}\cdot\mathbf{J} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{K} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{I} = 0 \qquad [3]$$

el sistema de coordenadas se llama ortogonal. Se dice también que la base **I**, **J**, **K** es ortonormal.

Generalizando lo visto en la Sección E del capítulo 2 para el caso del plano, vamos a demostrar que siempre existen sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales, o sea, que siempre se pueden elegir tres vectores **I**, **J** y **K** que cumplan las condiciones [3] y además la condición [1] del axioma I_7^*.

Sean tres vectores $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{K}_1$ independientes que cumplan las condiciones del axioma I_7^*. Poniendo $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1/|\mathbf{I}_1|$ se tendrá el nuevo vector **I** tal que $\mathbf{I}^2 = 1$. Se pone luego $\mathbf{J}_2 = \alpha\,\mathbf{I} + \mathbf{J}_1$ y se determina α por la condición $\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{I} = \alpha + \mathbf{J}_1\cdot\mathbf{I} = 0$; poniendo $\mathbf{J} = \mathbf{J}_2/|\mathbf{J}_2|$ se tiene ya el segundo versor buscado. Finalmente se toma $\mathbf{K}_2 = \beta\,\mathbf{I} + \gamma\,\mathbf{J} + \mathbf{K}_1$ y se determinan β, γ por las condiciones

$$\mathbf{K}_2\cdot\mathbf{I} = \beta + \mathbf{K}_1\cdot\mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{K}_2\cdot\mathbf{J} = \gamma + \mathbf{K}_1\cdot\mathbf{J} = 0.$$

Poniendo $\mathbf{K} = \mathbf{K}_2/|\mathbf{K}_2|$ se tiene el sistema de los tres vectores **I**, **J** y **K** que cumplen las condiciones [3]. Además, de las relaciones anteriores resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= |\mathbf{I}_1|\cdot\mathbf{I} \\ \mathbf{J}_1 &= |\alpha\,\mathbf{I} + \mathbf{J}_1|\,\mathbf{J} - \alpha\,\mathbf{I} \\ \mathbf{K}_1 &= |\beta\,\mathbf{I} + \gamma\,\mathbf{J} + \mathbf{K}_1|\,\mathbf{K} - \beta\,\mathbf{I} - \gamma\,\mathbf{J} \end{aligned} \qquad [4]$$

siendo

$$\alpha = -\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{I}, \quad \beta = -\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{I}, \quad \gamma = -\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{J}$$

lo cual nos dice que todo vector **X**, que por hipótesis es de la forma [1], puede también expresarse como combinación lineal de **I**, **J** y **K** (con sólo substituir $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{K}_1$ por sus valores [4]), es decir, los vectores **I**, **J** y **K** forman también una base del espacio vectorial asociado.

Observemos finalmente que si **U** y **V** son dos vectores cuya expresión mediante la base ortonormal **I**, **J**, **K** sea

$$\mathbf{U} = u_1 \mathbf{I} + u_2 \mathbf{J} + u_3 \mathbf{K}, \qquad \mathbf{V} = v_1 \mathbf{I} + v_2 \mathbf{J} + v_3 \mathbf{K}$$

su producto escalar resulta

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \qquad [5]$$

B. LA RECTA EN EL ESPACIO

Sin entrar en los detalles del caso del plano, que el lector puede completar como ejercicio, vamos a resumir las principales definiciones y propiedades referentes a rectas y planos del espacio.

Las definiciones de recta determinada por dos puntos y de recta en general son exactamente las mismas que en el caso del plano (Sección C, capítulo 3). La recta determinada por los puntos A, B tiene por ecuación vectorial

$$X = A + u(B - A) \qquad [6]$$

y la recta que pasa por A y tiene la dirección del vector **U** (vector director de la recta) es

$$X = A + u\mathbf{U}. \qquad [7]$$

El ángulo de dos rectas se define como el ángulo de dos vectores que tengan sus direcciones. Por tanto, el ángulo de las rectas

$$X = A + u\,\mathbf{U}, \qquad X = B + u\,\mathbf{V} \qquad [8]$$

está dado por

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|} \qquad [9]$$

En particular: la condición de perpendicularidad de las dos rectas dadas por las ecuaciones [8] es $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$ y la condición de paralelismo que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ tengan la misma dirección, o sea, que $\mathbf{U} = a\mathbf{V}$ para algún número real a.

Fijado un sistema de coordenadas cartesianas, si se indican entre paréntesis las coordenadas de los puntos $X(x, y, z)$, $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, la ecuación [6] equivale a las tres ecuaciones paramétricas

$$x = a_1 + u(b_1 - a_1), \quad y = a_2 + u(b_2 - a_2), \quad z = a_3 + u(b_3 - a_3).$$

De aquí, despejando u en cada ecuación e igualando, resulta que las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por dos puntos son

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} \qquad [10]$$

Análogamente, si se parte de la ecuación [7], las ecuaciones cartesianas resultan

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3} \qquad [11]$$

donde u_1, u_2 y u_3 son las componentes de un vector que tiene la dirección de la recta. Por esto los denominadores de [11] se llaman coeficientes directores de la recta.

Según [9], el ángulo de la recta [11] y la

$$\frac{x - b_1}{v_1} = \frac{y - b_2}{v_2} = \frac{z - b_3}{v_3} \qquad [12]$$

esta dado por

$$\cos \alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Ejemplos: 1. Ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-2, 3, 1)$ y es paralela al vector $\mathbf{U}(2, 5, -1)$.

Solución. Las ecuaciones paramétricas serán, según [7],

$$x = -2 + 2u, \quad y = 3 + 5u, \quad z = 1 - u. \qquad [13]$$

Las ecuaciones cartesianas se obtienen despejando u e igualando; resulta

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-1} .$$

2. Hallar el ángulo de la recta determinada por los puntos A(1, -4, 3) y B(3, 1, -2) con el eje x.

Solución. Un vector director de la recta es B-A de componentes (2, 5, -5). El ángulo que forma con **I** (1, 0, 0) está dado por $\cos \alpha = (B-A) \cdot \mathbf{I} / |B-A| = 2/\sqrt{54}$.

3. Ecuaciones de la recta que pasa por A(3, 0, -1) y es perpendicular a dos rectas cuyos cosenos directores son **U**(1, 2, -1), **V**(3, 0, 2).

Solución. Las componentes u, v, w del vector director de la recta buscada deben cumplir las condiciones

$$u + 2v - w = 0, \qquad 3u + 2w = 0$$

de las cuales resulta

$$u = -\frac{2}{3} w, \qquad v = \frac{5}{6} w$$

y por tanto la recta buscada es

$$\frac{x-3}{-(2/3)v} = \frac{y}{(5/6)w} = \frac{z+1}{w}$$

o sea

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{6} .$$

C. EL PLANO

Definición. Se llama plano determinado por tres puntos A, B y C no pertenecientes a una misma recta al conjunto de puntos de la forma

$$X = A + u(B - A) + v(C - A) \qquad [13]$$

para todos los valores de los parámetros u, v.

Teorema. Tres puntos cualesquiera de un plano que no estén en línea recta determinan el mismo plano.

Demostración. Sean los puntos

$$X_1 = A + u_1(B - A) + v_1(C - A), \quad X_2 = A + u_2(B - A) + v_2(C - A),$$

$$X_3 = A + u_3(B - A) + v_3(C - A) \qquad [14]$$

contenidos en el plano [13]. La condición de que no estén en línea recta se obtiene expresando que los vectores

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 &= (u_2 - u_1)(B - A) + (v_2 - v_1)(C - A) \\ X_3 - X_1 &= (u_3 - u_1)(B - A) + (v_3 - v_1)(C - A) \end{aligned} \qquad [15]$$

no tienen la misma dirección, o sea, no son proporcionales; es decir

$$\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} \neq \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1}$$

que se puede escribir

$$\begin{vmatrix} u_2 - u_1 & v_2 - v_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad [16]$$

El plano determinado por X_1, X_2 y X_3 es

$$\begin{aligned} X &= X_1 + u(X_2 - X_1) + v(X_3 - X_1) \\ &= A + w(B - A) + t(C - A) \end{aligned} \qquad [17]$$

siendo

$$\begin{aligned} w &= u_1 + u(u_2 - u_1) + v(u_3 - u_1), \\ t &= v_1 + u(v_2 - v_1) + v(v_3 - v_1) \end{aligned} \qquad [18]$$

Al variar u y v sobre todos los números reales, también w y t variarán sobre todos los números reales, puesto que a cada par u, v corresponde un par w, t y, recíprocamente, a cada par w, t corresponde un par u, v que se obtiene resolviendo el sistema [18], el cual es compatible por cumplirse la condición [16]. Esto demuestra que el plano [17] es el mismo [13].

Este teorema permite dar la definición siguiente.

Definición. Se llama plano del espacio euclidiano a todo conjunto de puntos tal que si A, B y C son tres cualesquiera de ellos, todos los demás están dados por la expresión [13] al recorrer los parámetros u, v todos los valores reales.

Si X_1 y X_2 son dos puntos del plano determinado por A, B, y C la recta que ellos determinan, según [15], se puede escribir

$$X = X_1 + u(X_2 - X_1) = A + [u_1 + u(u_2 - u_1)] (B - A)$$
$$+ [v_1 + u(v_2 - v_1)] (C - A).$$

Puesto que todos estos puntos son de la forma [13], resulta: la recta determinada por dos puntos de un plano pertenece integramente al plano.

Otra forma de la ecuación del plano. Consideremos el plano [13] determinado por los puntos A, B y C. Sea $\mathbf{H}$ un vector ortogonal a los vectores B - A y C - A, o sea se cumplen las condiciones $(B - A)\cdot\mathbf{H} = 0$, $(C - A)\cdot\mathbf{H} = 0$. Según las expresiones [15] este vector será también ortogonal a cualquier vector obtenido como diferencia de dos puntos del plano, o sea, será ortogonal a todas las rectas del plano. Se dice que es un vector ortogonal o normal o perpendicular al plano. Los vectores normales a un plano tienen todos la misma dirección (es decir, son todos proporcionales entre sí) aunque puede variar el sentido y el módulo. En el capítulo siguiente veremos como se calculan.

Escribiendo la ecuación [13] en la forma $X - A = u(B - A) + v(C - A)$ y multiplicando escalarmente por $\mathbf{H}$ resulta que todos los puntos del plano satisfacen a la ecuación

$$(X - A)\cdot\mathbf{H} = 0. \qquad [19]$$

Escribiendo $X - A = (X - O) - (A - O)$ y poniendo $(A-O)\cdot\mathbf{H} = w$, [19] se escribe

$$(X - O)\cdot\mathbf{H} = w. \qquad [20]$$

Se tienen así las ecuaciones [19] y [20] que son otras formas de la ecuación del plano; en ellas $\mathbf{H}$ es siempre un vector normal al plano.

El plano en coordenadas cartesianas. Dado un sistema de coordenadas ortogonal $(O; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ y llamando (x, y, z) a las coordenadas del punto variable X y (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) y (c_1, c_2, c_3), respectivamente, a las de los puntos A, B y C, la ecuación vectorial

[13] equivale a las siguientes ecuaciones paramétricas del plano

$$x = a_1 + u(b_1 - a_1) + v(c_1 - a_1), \quad y = a_2 + u(b_2 - a_2) + v(c_2 - a_2),$$

$$z = a_3 + u(b_3 - a_3) + v(c_3 - a_3)$$

Eliminando los parámetros u, v se obtiene una ecuación que puede escribirse en la forma simétrica siguiente

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

que es la forma cartesiana de la ecuación del plano que pasa por tres puntos.

Si el vector normal al plano que figura en [19] ó [20] es $\mathbf{H} = h_1\mathbf{I} + h_2\mathbf{J} + h_3\mathbf{K}$, la ecuación [19] se escribe (recordando [5])

$$h_1(x - a_1) + h_2(y - a_2) + h_3(z - a_3) = 0 \qquad [22]$$

que es la ecuación cartesiana de los planos que pasan por el punto A.

Análogamente, la ecuación [20] se escribe

$$h_1 x + h_2 y + h_3 z = w \qquad [23]$$

que es la forma cartesiana general de la ecuación de un plano en el espacio.

Angulo de dos planos. Dados dos planos

$$(X - A)\cdot\mathbf{H} = 0, \quad (X - A')\cdot\mathbf{H}' = 0 \qquad [24]$$

el ángulo que forman entre sí es igual (por definición) al ángulo que forman dos vectores respectivamente perpendiculares a ellos. Por tanto estará dado por la fórmula

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}'}{|\mathbf{H}|\,|\mathbf{H}'|} \qquad [25]$$

De aquí: la condición para que los planos [24] sean perpendiculares es que sea $\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}' = 0$ y la condición para que sean paralelos $\mathbf{H}' = a\mathbf{H}$ para algún número real a.

En coordenadas cartesianas, las ecuaciones de los planos [24] se pueden escribir

$$h_1 x + h_2 y + h_3 z = w, \quad h_1' x + h_2' y + h_3' z = w' \qquad [26]$$

y el ángulo entre ellos estará dado por

$$\cos \alpha = \frac{h_1 h_1' + h_2 h_2' + h_3 h_3'}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}\sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2}} .$$

La condición para que los planos [26] sean perpendiculares será

$$h_1 h_1' + h_2 h_2' + h_3 h_3' = 0 \qquad [27]$$

y la condición para que sean paralelos

$$\frac{h_1}{h_1'} = \frac{h_2}{h_2'} = \frac{h_3}{h_3'} \neq \frac{w}{w'} . \qquad [28]$$

Si la última desigualdad es una igualdad, los planos son coincidentes.

Angulo de recta y plano. Dada una recta en la forma $X = A + u\mathbf{U}$ y un plano en la forma $(X-O)\cdot\mathbf{H} = w$, el ángulo de la recta con la dirección normal al plano será el ángulo de los vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{H}$ y por tanto estará dado por

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{H}}{|\mathbf{U}|\ |\mathbf{H}|} . \qquad [29]$$

De esta fórmula se deducen todas las propiedades angulares entre rectas y planos; por ejemplo, la condición de que la recta y el plano sean perpendiculares ($\alpha = 0°$) es $\mathbf{H} = a\mathbf{U}$ y la condición de paralelismo ($\alpha = 90°$) es $\mathbf{U}\cdot\mathbf{H} = 0$.

No queremos entrar en mayores detalles, pues nuestro objeto era dar los fundamentos de la geometría analítica del espacio a partir del concepto de espacio vectorial. De aquí en adelante todo es igual a la manera usual de cualquier libro clásico de cálculo vectorial o de geometría analítica. Indicaremos solamente algunos ejemplos.

Ejemplos: 1. Sean A, B y C tres puntos no alineados de un plano. Supongamos que la recta AB sea perpendicular a la BC, o sea

$$(B - A)\cdot(C - B) = 0. \qquad [30]$$

Sea P un punto no contenido en el plano, tal que PA sea perpendicular a BC, o sea,

$$(A - P)\cdot(C - B) = 0. \qquad [31]$$

Demostrar que PB es perpendicular a BC (Teorema de las tres perpendiculares).

Solución: Hay que demostrar que $(B - P)\cdot(C - B) = 0$, lo cual sigue inmediatamente de [30] y [31] observando que es

$$(B - P)\cdot(C - B) = [(B - A) + (A - P)] \cdot (C - B) = 0.$$

2. Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(-1, 0, 3)$ y es perpendicular a la recta $(x-1)/2 = (y+4)/5 = z - 3$.

Solución: El vector $\mathbf{H}(2, 5, 1)$ es un vector director de la recta y por tanto debe ser normal al plano buscado. La ecuación de este plano será $(X - A)\cdot\mathbf{H} = 0$, o sea, $2(x+1) + 5y + z - 3 = 0$, o bien, ordenando términos $2x + 5y + z - 1 = 0$.

3. La distancia de un punto a un plano está dada por la misma fórmula [5], capítulo 4, con la misma demostración que allí se dio para la distancia de un punto a una recta. Por ejemplo, la distancia del punto $M(6, 3, -2)$ al plano $2x - 4y + z - 2 = 0$, resulta ser $d = (2\cdot 6 - 4\cdot 3 - 2 - 2)/\sqrt{4 + 16 + 1} = -4/\sqrt{21}$.

4. Plano determinado por un punto M y una recta $X = A + u\mathbf{U}$.

Para hallar su ecuación basta considerar el plano determinado por los puntos M y A y otro cualquiera de la recta, por ejemplo el $A + \mathbf{U}$ (correspondiente a $u = 1$). Por ejemplo, el plano que pasa por $M(2, -6, 1)$ y contiene a la recta $(x-2)/3 = (y-4)/-1 = (z+1)/-5$, cuyo versor director es $\mathbf{U}(3, -1, -5)$, está determinado por los puntos M, $A(2, 4, -1)$ y $A + \mathbf{U}$ de coordenadas $(5, 3, -6)$. Aplicando la fórmula [21] su ecuación resulta

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 6 & z - 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 3 & 9 & -7 \end{vmatrix} = -52x - 6y - 30z + 98 = 0.$$

6

EL PRODUCTO VECTORIAL Y APLICACIONES A LA TRIGONOMETRIA

A. EL CONCEPTO DE ANGULO

Hemos definido el ángulo entre dos vectores de un espacio vectorial euclidiano por su coseno, según la fórmula [13] del capítulo 2. Supuesto el ángulo comprendido entre $0°$ y $180°$, su coseno lo determina sin ambigüedad. Sin embargo, conviene extender el dominio de los valores de los ángulos, por ejemplo, a valores negativos. Para ello es necesario definir una "orientación" en el espacio vectorial .

Consideremos un espacio vectorial de dimensión dos.

En la sección D del capítulo 3 vimos que dado un vector no nulo **U** existen siempre dos únicos versores ortogonales al mismo, los cuales son opuestos (o sea, difieren en el factor -1). Como ahora nos van a interesar únicamente las direcciones, o sea, las clases por la equivalencia "producto por un escalar", podemos suponer que **U** es un versor. Supongamos que se ha dado un criterio para asignar a todo versor **U** un único versor ortogonal, que indicaremos por $\mathbf{U}^\circ$, o sea, un criterio para elegir uno de los dos versores que existen ortogonales a **U**, cualquiera que sea este versor. Diremos que **U** y $\mathbf{U}^\circ$ son asociados.

Puesto que **U** y $\mathbf{U}^\circ$ forman una base, todo otro versor **V** será de la forma

$$\mathbf{V} = u\mathbf{U} + v\mathbf{U}^\circ, \text{ con } u^2 + v^2 = 1. \qquad [1]$$

Si

$$\mathbf{V}^\circ = u^\circ \mathbf{U} + v^\circ \mathbf{U}^\circ, \text{ con } u^{\circ 2} + v^{\circ 2} = 1 \qquad [2]$$

es el versor asociado a **V**, será

$$u\,u^\circ + v\,v^\circ = 0. \qquad [3]$$

De [1], [2], [3] se deduce

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u^\circ & v^\circ \end{vmatrix}^2 = (u v^\circ - v u^\circ)^2 = (u^2+v^2)(u^{\circ 2}+v^{\circ 2}) - (uu^\circ + vv^\circ)^2 = 1$$

y por tanto

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u^\circ & v^\circ \end{vmatrix} = \pm\ 1. \qquad [4]$$

Esto permite establecer la siguiente definición.

Definición. Dado un espacio vectorial de dimensión dos, se dice que el mismo está orientado si a cada versor **U** del espacio le está asignado un único versor asociado $\mathbf{U}^\circ$, ortogonal a **U**, y además si $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^\circ)$ y $(\mathbf{V}, \mathbf{V}^\circ)$ son dos pares de versores asociados ligados por las relaciones [1] y [2], se cumple la igualdad

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u^\circ & v^\circ \end{vmatrix} = 1. \qquad [5]$$

Según [13], capítulo 2, el ángulo α de los versores **U** y **V** (igual al ángulo de dos vectores cualesquiera proporcionales a **U** y **V**) está dado por la fórmula

$$\cos\alpha = \mathbf{U}\cdot\mathbf{V}. \qquad [6]$$

Si el espacio vectorial está orientado, definimos la función sen α por

$$\operatorname{sen}\alpha = \mathbf{U}^\circ\cdot\mathbf{V}. \qquad [7]$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros de [1] primero por **U** y luego por $\mathbf{U}^\circ$, resulta $u = \cos\alpha$, $v = \operatorname{sen}\alpha$, de donde

$$\mathbf{V} = \cos\alpha\ \mathbf{U} + \operatorname{sen}\alpha\ \mathbf{U}^\circ. \qquad [8]$$

De aquí, elevando al cuadrado y teniendo en cuenta que por hipótesis **V** es un versor, resulta la relación fundamental

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1. \qquad [9]$$

Obsérvese que si hubieramos definido sen α a partir del cos α por esta relación [9] hubiera quedado indeterminado el signo, lo que no ocurre con la definición [7].

La condición [5] se escribe

$$v^{\circ} \cos\alpha - u^{\circ} \operatorname{sen}\alpha = 1$$

que junto con [2] obliga a que sea

$$u^{\circ} = -\operatorname{sen}\alpha, \quad v^{\circ} = \cos\alpha$$

y por tanto

$$\mathbf{V}^{\circ} = -\operatorname{sen}\alpha\ \mathbf{U} + \cos\alpha\ \mathbf{U}^{\circ}. \qquad [10]$$

Con todo esto podemos ya pasar a definir los ángulos negativos. Para ello se aceptan como postulados las relaciones de Chasles:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ang}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \operatorname{ang}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) &= 0 \\ \operatorname{ang}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \operatorname{ang}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) + \operatorname{ang}(\mathbf{W}, \mathbf{U}) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [11]$$

donde **U**, **V** y **W** son tres versores cualesquiera del espacio vectorial de dimensión dos que estamos considerando.

De la primera relación [11] se deduce que si α es el ángulo entre **U** y **V**, el ángulo $-\alpha$ será el que forman **V** y **U**. Según [6] y [7] es

$$\cos(-\alpha) = \mathbf{V}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = \cos\alpha, \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = \mathbf{V}^{\circ}\cdot\mathbf{U} = -\operatorname{sen}\alpha$$

donde la última igualdad resulta de [10] al multiplicar escalarmente por **U**.

Pongamos $\alpha = \operatorname{ang}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ y $\beta = \operatorname{ang}(\mathbf{U}, \mathbf{W})$, con lo cual el versor **W** será de la forma [8] aplicada a **W**, o sea

$$\mathbf{W} = \cos\beta\ \mathbf{U} + \operatorname{sen}\beta\ \mathbf{U}^{\circ}.$$

Según las relaciones [11] será $\operatorname{ang}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \beta - \alpha$ y por tanto aplicando las definiciones [6] y [7] y las fórmulas [8], [12] y [10] resulta

$$\cos(\beta - \alpha) = \mathbf{V}\cdot\mathbf{W} = \cos\alpha\ \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \mathbf{V}^{\circ}\cdot\mathbf{W} = \operatorname{sen}\beta\ \cos\alpha - \cos\beta\ \operatorname{sen}\alpha$$

Para las fórmulas de adición basta substituir α por $-\alpha$.

B. TRIGONOMETRIA PLANA

Las fórmulas trigonométricas referentes a los triángulos del plano resultan muy fácilmente como relaciones vectoriales.

Sea el triángulo ABC y llamemos a, b y c a las longitudes de sus lados, o sea, a los módulos de los vectores B-C, C-A y A-B, respectivamente. Sean α, β y γ los ángulos correspondientes a los vértices A, B y C.

Elevando al cuadrado ambos miembros de la identidad

$$B - A = (B - C) - (A - C)$$

y puesto que $(B-C)\cdot(A-C) = a\, b \cos\gamma$, resulta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos\gamma$$

que es la llamada fórmula del coseno.

Supongamos ahora que el espacio vectorial asociado al plano euclidiano está orientado. Sea $\mathbf{C}$ el versor asociado correspon-

diente al vector B - A, o sea, $\mathbf{C}\cdot(B - A) = 0$.

Según [7] y siendo $|C - A| = b$, se tiene

$$b \operatorname{sen}\alpha = \mathbf{C}\cdot(C - A) = \mathbf{C}\cdot(C - B + B - A) = \mathbf{C}\cdot(C - B) = a \operatorname{sen}\beta$$

de donde

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$$

De igual manera se obtiene que estos cocientes son iguales a $c/\operatorname{sen}\gamma$. Por tanto

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

que es la llamada fórmula del seno.

C. EL PRODUCTO VECTORIAL

En el espacio euclidiano de tres dimensiones, además del producto escalar de vectores, es útil considerar el llamado producto vectorial.

Sean

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{I} + a_2 \mathbf{J} + a_3 \mathbf{K}, \quad \mathbf{B} = b_1 \mathbf{I} + b_2 \mathbf{J} + b_3 \mathbf{K}$$

dos vectores del espacio, expresados mediante la base **I, J, K.** Todo vector $\mathbf{C} = c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{J} + c_3 \mathbf{K}$ que sea ortogonal a **A** y **B** debe cumplir las condiciones

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0,$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{B} = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = 0. \qquad [12]$$

De estas ecuaciones se deduce

$$c_1 = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} c_3, \quad c_2 = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1} c_3$$

o sea

$$\frac{c_1}{a_2 b_3 - a_3 b_2} = \frac{c_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} = \frac{c_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Consideremos, además, la identidad

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2. \qquad [13]$$

El vector de componentes

$$a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \qquad [14]$$

según [12] es ortogonal a **A** y **B**, o sea, es ortogonal al plano que ellos determinan (supuestos llevados a partir de un mismo origen) y según [13] tiene por módulo $(a^2b^2 - a^2b^2 \cos^2\alpha)^{1/2} = ab\,|\operatorname{sen}\alpha|$, siendo a y b los módulos de **A**, **B** y α el ángulo que estos vectores forman entre sí. Esto nos dice que el vector [14] a pesar de haber sido definido mediante las componentes **A** y **B** respecto a cierta base **I, J, K** tiene la dirección y el módulo independientes de esta base, o sea, está vinculado intrínsecamente a los vectores dados **A** y **B**. No ocurre lo mismo con el sentido. Cambiando la base **I, J, K** y tomando las mismas expresiones [14] con las componentes de **A** y **B** en la nueva base, puede ocurrir que el vector obtenido tenga el sentido opuesto al anterior, o sea, que difiera en un factor -1. Por esto se dice que las expresiones [14] son componentes de un <u>pseudo vector</u>, el cual se llama <u>el producto vectorial</u> de **A** y **B** y se representa $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$. La regla práctica para acordarse de las componentes [14] es considerarlas como resultado del desarrollo del determinante

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} . \qquad [15]$$

Mientras mantengamos una base **I, J, K** fija, el producto vectorial actúa como un vector bien definido por [15] y por consiguiente se opera con él lo mismo que con los vectores. Es únicamente al cambiar de base que puede ocurrir que cambie el sentido, o sea el signo del producto vectorial, pero como su dirección y su módulo no cambian resulta un producto muy útil desde el punto de vista de las aplicaciones geométricas.

D. PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES Y DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

Se llama producto mixto de tres vectores **A, B** y **C** al escalar

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

De aquí se deduce, recordando la propiedad de los determinantes de cambiar de signo al permutar dos filas entre sí,

$$(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}) = (\mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{A}) = (\mathbf{C}\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}) = -(\mathbf{B}\ \mathbf{A}\ \mathbf{C}) = -(\mathbf{A}\ \mathbf{C}\ \mathbf{B}) = -(\mathbf{C}\ \mathbf{B}\ \mathbf{A}).$$

Pasando a las componentes respecto de una determinada base, se pueden comprobar las siguientes identidades

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\ \mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\ \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})\cdot(\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}) \text{ (identidad de Lagrange)}$$

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{D})\ \mathbf{C} - (\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C})\ \mathbf{D}.$$

Mediante artificios adecuados estas identidades pueden demostrarse de manera más simple, como puede verse en cualquier texto clásico de cálculo vectorial.

E. TRIGONOMETRIA ESFERICA

Vamos a ver como las relaciones anteriores permiten obtener las fórmulas clásicas de la trigonometría esférica.

Fórmula del coseno. Consideremos los versores **A**, **B** y **C**. Supuestos llevados a partir de un mismo origen, sus extremos serán los vértices de un triángulo esférico A B C; llamemos a, b y c a los lados de este triángulo y α, β y γ a sus ángulos, de manera que será

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \cos c, \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \cos b, \quad \mathbf{C}\cdot\mathbf{B} = \cos a. \qquad [16]$$

En la identidad de Lagrange

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})\cdot(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})$$

el primer miembro es el producto de $|\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}| = \operatorname{sen} b$ por $|\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}| = \operatorname{sen} a$, por el coseno del ángulo que forman dos vectores ortogonales a los planos **A, C** y **B, C**, es decir, por $\cos \gamma$. Los factores del segundo miembro están dados por [16]. Sustituyendo, resulta

$$\cos c = \cos a \;\; \cos b + \operatorname{sen} a \;\; \operatorname{sen} b \;\cos \gamma$$

que es la fórmula del coseno de la trigonometría esférica.

Fórmula del seno. Apliquemos ahora la fórmula

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A}\ \mathbf{C}\ \mathbf{C})\ \mathbf{B} - (\mathbf{A}\ \mathbf{C}\ \mathbf{B})\ \mathbf{C}$$

que por ser $(\mathbf{A}\ \mathbf{C}\ \mathbf{C}) = 0$ se reduce a

$$(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C})\ \mathbf{C}.$$

Igualando los módulos de los dos miembros de esta igualdad resulta

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \gamma = |(\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C})|.$$

Por permutación circular de los versores **A**, **B** y **C** puesto que

$$|(\mathbf{ABC})| = |(\mathbf{BCA})| = |(\mathbf{CAB})|, \text{ resulta}$$

$$\operatorname{sen} a \;\; \operatorname{sen} b \;\; \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} b \;\; \operatorname{sen} c \;\; \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} c \;\; \operatorname{sen} a \;\; \operatorname{sen} \beta$$

que puede escribirse

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } \beta} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } \gamma}$$

que es la <u>fórmula del seno</u> de la trigonometría esférica.

* * * * *

REFERENCIAS

(1) BIRKHOFF, G. y MACLANE, S. A survey of modern algebra, Macmillan, Nueva York (1953).

(2) BOURBAKI, N. Elements de mathématiques, Livre II, chap. II (Algebre lineaire). En: Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, París, 2a ed., 1032 (1955).

(3) COXETER, H. S. M. Introduction to geometry, Wiley, Nueva York (1961).

(4) FEHR, H. F. Reforma de la enseñanza de la geometría. Informe, Primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, Bogotá, 1961. Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University (1962).

(5) SANTALO, L. A. Vectores y tensores. Editorial Universitaria, Buenos Aires (1961).

(6) Organisation for Economic Co-operation and Developpement. Synopses for modern secondary school mathematics, chap. IV (1961).

(7) WEXLER, CH. Analytic geometry, a vector approach, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962).