Capítulo VI

Formas bilineales y cuadráticas

Se supone que todos los espacios que aparecen en este capítulo son espacios sobre un cuerpo conmutativo (pero no sobre un cuerpo cualquiera).

§ 21. Formas bilineales

21.1. Transformación de formas. Un polinomio $F(\xi)$ en las variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ con coeficientes de un cuerpo conmutativo K se llama *forma de grado p-ésimo sobre K en* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, si todos los términos de F son de un mismo grado p respecto al conjunto de las variables. Se llaman *lineales* las formas de primer grado, *cuadráticas* las de segundo grado, *cúbicas* las de tercer grado, etc.

Los problemas principales de la teoría de las formas son el problema del estudio de las leyes de variación de los coeficientes de las formas en las transformaciones lineales de las variables y el problema de la búsqueda de los tipos elementales a los que pueden ser reducidas las formas mediante estas transformaciones.

A veces, en lugar de una forma se considera un par de formas en las mismas variables y se plantea el problema de determinar una transformacion de las variables en la que ambas formas tomen la forma más sencilla posible. Este es el problema de un par de formas. Se pueden plantear problemas sobre ternas de formas, etc.

Al final de este capítulo daremos la interpretación geométrica del problema de transformación de formas, mientras que primero consideraremos el problema desde el punto de vista algebraico y daremos su solución para el caso de formas cuadráticas.

Escribiremos las fórmulas que relacionan las variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ con las variables nuevas $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$ en la forma

$$\xi_j = \xi'_1\tau_{1j} + \xi'_2\tau_{2j} + \ldots + \xi'_n\tau_{nj} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

de acuerdo con el punto 5.1.

Supondremos siempre que *la matriz* $T=\|\tau_{ij}\|$ *es invertible* así que las relaciones (1) permiten siempre expresar las variables nuevas en términos de las antiguas. La matriz T se llama *matriz de transformación* de las variables ξ_i en las variables ξ'_j.

En general, las formas dadas suelen transformarse paulatinamente: primero se introducen unas variables nuevas mediante las fórmulas (1), después mediante fórmulas análogas se introducen en lugar de ξ'_j unas variables ξ''_j, etc. Sea $T=T_1$ la matriz de la transformación de las variables ξ en las variables ξ', sea T_2 la matriz de la transformación de ξ' en ξ'', etc. Introduciendo en las fórmulas (1) en lugar de ξ'_j sus expresiones en términos de ξ''_j, expresaremos las variables ξ_j linealmente en términos de ξ''_j. Los cálculos directos muestran que la matriz de la transformación de ξ en ξ'' es T_2T_1 (compárese con el p. 5.1). Aplicando este resultado varias veces, llegamos a la conclusión siguiente: *si a la transformación de las variables* ξ *en las variables* ξ' *le corresponde la matriz* T_1, *si a la transformación de* ξ' *en* ξ'' *le corresponde la matriz* T_2, etc., *entonces a la transformación resultante de las variables* ξ *en las variables* $\xi^{(m)}$ *le corresponde la matriz igual al producto* $T_mT_{m-1}\ldots T_2T_1$ *de las matrices de las transformaciones intermedias.*

Supongamos, por ejemplo, que debemos reducir a la forma elemental la forma cuadrática

$$F=\xi_1^2+\xi_3^2-2\xi_1\xi_2-2\xi_1\xi_3+10\xi_2\xi_3.$$

Tenemos

$$F=(\xi_1-\xi_2-\xi_3)^2-\xi_3^2+8\xi_2\xi_3.$$

Introduciendo las variables nuevas

$$\xi'_1=\xi_1-\xi_2-\xi_3,\ \xi'_2=\xi_2\quad \text{y}\quad \xi'_3=\xi_3,$$

obtenemos

$$F'=\xi_1'^2-\xi_2'^2+8\xi'_2\xi'_3=\xi_1'^2-(\xi'_2-4\xi'_3)^2+16\xi_3'^2.$$

La transformación

$$\xi''_1=\xi'_1,\ \xi''_2=\xi'_2-4\xi'_3\quad \text{y}\quad \xi''_3=4\xi'_3$$

reduce la forma F a la forma elemental

$$F''=\xi_1''^2-\xi_2''^2+\xi_3''^2.$$

Según la regla expuesta, la matriz de la transformación de ξ'' en ξ es

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&-4&4\end{bmatrix}.$$

Como segundo ejemplo consideremos el problema general de transformación de un sistema arbitrario de m formas lineales

$$\left.\begin{array}{l} f_1=\xi_1\alpha_{11}+\xi_2\alpha_{21}+\ldots+\xi_n\alpha_{n1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m=\xi_1\alpha_{1m}+\xi_2\alpha_{2m}+\ldots+\xi_n\alpha_{nm} \end{array}\right\} \quad (2)$$

en n variables. La matriz $A=\|\alpha_{ij}\|$, que para $m\neq n$ resulta rectangular, se llama matriz de este sistema. Introduciendo en las formas dadas en lugar de las variables ξ_j sus expresiones en términos de ξ_j' definidas por (1), obtenemos un sistema de m formas lineales en las variables nuevas ξ_j'. El cálculo directo muestra que la matriz A_1 del sistema nuevo está ligada a la matriz A del sistema antiguo mediante la relación

$$A_1=TA,$$

es decir, *al pasar a las variables nuevas la matriz de un sistema de formas lineales se multiplica a la izquierda por la matriz de la transformación.*

Para reducir el sistema (2) a la forma elemental escojamos entre las formas $f_1, \ldots, f_m, \xi_1, \ldots, \xi_n$ las n primeras linealmente independientes. Sean éstas las formas $f_{i_1}, \ldots, f_{i_r}, \xi_{i_{r+1}}, \ldots, \xi_{i_n}$. Es evidente que el número r es igual al rango de la matriz A. Podemos introducir en lugar de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ unas variables ξ_j' tomando

$$\xi_1'=f_{i_1}(\xi), \ \ldots, \ \xi_r'=f_{i_r}(\xi), \ \xi_{i_{r+1}}'=\xi_{r+1}, \ \ldots, \ \xi_n'=\xi_{i_n}$$

y después de ello el sistema dado (2) tomará la forma elemental requerida

$$\xi_1', \ \ldots, \ \xi_r', \ f_{r+1}', \ \ldots, \ f_m',$$

donde $f_{r+1}', \ldots, f_m'$ son unas formas lineales en $\xi_1', \ldots, \xi_n'$. En particular, si todas las formas iniciales eran linealmente independientes, la transformación de variables señalada las reducirá a la forma canónica $f_1'=\xi_1', \ldots, f_m'=\xi_m'$.

21.2. Equivalencia de formas bilineales. Frecuentemente en lugar de los polinomios en un sistema de variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ se consideran los polinomios en dos sistemas de variables, por ejemplo, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y $\eta_1, \ldots, \eta_s$, así como los polinomios en varios sistemas de variables. Un polinomio en varios sistemas de variables se llama *forma* si es homogéneo respecto a cada uno de los sistemas de variables por separado. Son de un interés especial las formas lineales respecto a cada uno de los sistemas de variables. Estas formas se llaman *bilineales*, si hay dos sistemas de variables, *trilineales*, si hay tres sistemas, y *polineales* en el caso general.

El número de variables de cada uno de los sistemas puede ser distinto. El problema de transformación de formas de varios sistemas de variables puede plantearse en diferentes aspectos, ya que se puede someter a una transformación lineal cada uno de los sistemas de variables independientemente de las transformaciones de los restantes sistemas y se puede también realizar con cada uno de estos sistemas transformaciones que estén ligadas entre sí de algún modo.

Se llaman *equivalentes* las formas que pueden ser reducidas una a otra mediante una selección independiente de transformaciones lineales de las variables. En cambio, se dice que las formas son *congruentes*, si todos los sistemas de variables contienen un mismo número de variables y las formas de estos sistemas pueden ser reducidas una a otra mediante transformaciones lineales—de una misma matriz—de cada uno de los sistemas. Está claro que las formas congruentes son siempre equivalentes. La recíproca, por supuesto, no tiene lugar en el caso general. Es fácil dar ejemplos de formas equivalentes que no son congruentes limitándose incluso al caso de formas bilineales. En este punto consideraremos el problema elemental de equivalencia de formas bilineales y en el punto siguiente examinaremos el problema sobre la congruencia de formas bilineales simétricas.

Una forma bilineal en dos sistemas de variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y $\eta_1, \ldots, \eta_n$ es de la forma

$$F=\sum \alpha_{ij}\xi_i\eta_j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

La matriz $A=\|\alpha_{ij}\|$ formada por los coeficientes de la forma se llama *matriz de la forma* y el rango de la matriz A se llama *rango de la forma.*

Introduciendo las matrices de una fila

$$X=[\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n] \quad \text{e} \quad Y=[\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n],$$

podemos representar la forma F de modo siguiente

$$F=XAY'. \tag{3}$$

Supongamos ahora que debemos pasar de las variables ξ y η a unas variables nuevas ξ' y η' ligadas a las antiguas mediante las fórmulas

$$\xi_j=\sum \xi'_k\tau_{kj} \quad \text{y} \quad \eta_j=\sum \eta'_k\sigma_{kj}$$

o empleando la notación matricial

$$X=X_1T \quad \text{e} \quad Y=Y_1S, \tag{4}$$

donde $T=\|\tau_{ij}\|$, $S=\|\sigma_{ij}\|$ y

$$X_1=[\xi'_1,\ \ldots,\ \xi'_n] \quad \text{e} \quad Y_1=[\eta'_1,\ \ldots,\ \eta'_n].$$

Introduciendo en (3) las expresiones (4) para X e Y, obtenemos

$$F=X_1TAS'Y'_1=X_1A_1Y'_1,$$

donde A_1 es la matriz de la forma transformada.

Por consiguiente, si en una forma bilineal de matriz A se realiza una transformación de matriz T del primer sistema de variables y una transformación de matriz S del segundo sistema de variables, se obtiene una forma bilineal de matriz

$$A_1 = TAS'. \tag{5}$$

Hemos explicado ya que las formas bilineales que se obtienen una de otra mediante transformaciones lineales de las variables se llaman equivalentes. Por otra parte, según el p.13.4 unas matrices A y A_1 se llaman equivalentes sobre un cuerpo conmutativo K, si existen unas matrices regulares P y Q formadas por elementos de K tales que $A_1 = PAQ$. Comparando con la fórmula (5), vemos que *para la equivalencia de unas formas bilineales sobre un cuerpo conmutativo arbitrario K es necesario y suficiente que sus matrices sean equivalentes.*

Según el p. 13.4, todas las matrices cuadradas de un orden dado n y de un rango dado r son equivalentes entre sí sobre el cuerpo conmutativo K y son equivalentes a una matriz de tipo $E_r \dot{+} O_{n-r}$, donde E_r es la matriz unidad de orden r y O_{n-r} es la matriz nula de orden $n-r$. Aplicando esto a las formas bilineales obtenemos el siguiente resultado que resuelve totalmente el problema de equivalencia de las formas bilineales:

Para la equivalencia de unas formas bilineales sobre un cuerpo conmutativo arbitrario es necesario y suficiente que coincidan los órdenes y los rangos respectivos de las matrices de estas formas.

Las formas de determinante diferente de cero se llaman *regulares* y las demás se llaman *singulares*. El resultado obtenido acerca de la equivalencia de formas significa que todas las formas bilineales regulares en sistemas de n variables son equivalentes a la forma

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n,$$

mientras que todas las formas singulares son equivalentes a formas de tipo

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_r\eta_r \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

donde r es el rango de la forma.

Si el campo principal es el cuerpo de los números complejos, suelen considerarse, además de las formas bilineales corrientes, *las formas de Hermite*, es decir, las formas de tipo

$$F = \sum \alpha_{ij}\xi_i\overline{\eta}_j,$$

donde la raya superior significa que se pasa a los valores conjugados. La notación matricial de una forma bilineal hermitiana de matriz $A = \|\alpha_{ij}\|$ es

$$F = XA\overline{Y}',$$

y la matriz A_1 de la forma hermitiana nueva que resulta de F al realizar la transformación (4) de las variables es igual a

$$A_1 = TA\bar{S}'. \tag{6}$$

De aquí obtenemos, al igual que antes, que *todas las formas bilineales hermitianas en sistemas de n variables son equivalentes a la forma*

$$\xi_1\bar{\eta}_1 + \xi_2\bar{\eta}_2 + \ldots + \xi_r\bar{\eta}_r,$$

donde r es el rango de la forma dada.

21.3. Congruencia de formas bilineales simétricas. Hemos señalado anteriormente que las formas bilineales en dos sistemas compuestos por un mismo número de variables se llaman congruentes si se obtienen una de otra mediante transformaciones lineales de matrices idénticas de ambos sistemas.

Tomando $S = T$ en la fórmula (5), llegamos a la conclusión de que *al someter ambos sistemas de variables de una forma bilineal de matriz A a una transformación lineal de matriz T, la matriz de la forma nueva será*

$$A_1 = TAT'. \tag{7}$$

Unas matrices A y A_1 se llaman *congruentes*, si están ligadas por una relación de tipo (7), donde T es una matriz regular adecuada. Por consiguiente, las formas bilineales son congruentes si, y sólo si, son congruentes sus matrices.

Una forma bilineal cuya matriz es simétrica o antisimétrica también se llama simétrica o antisimétrica, respectivamente.

Si una forma bilineal dada es simétrica o antisimétrica, la misma propiedad tendrán todas las formas congruentes.

Efectivamente si $A' = \pm A$, de (7) resulta

$$A_1' = \pm TA'T' = \pm A_1.$$

Considerando análogamente las formas bilineales hermitianes, obtenemos de (6) que la matriz A_1 de la forma hermitiana nueva que resulta al aplicar a la forma de matriz A una transformación lineal de matriz T de ambos sistemas de variables es igual a

$$A_1 = TA\bar{T}'. \tag{8}$$

Unas matrices A y A_1 se llaman *hermitianas congruentes*, si están ligadas por la relación (8) mediante una matriz regular T. Por lo tanto, la congruencia de las formas hermitianas equivale a la congruencia de hermitiana sus matrices.

Una forma hermitiana se llama *simétrica* si su matriz es hermitiana simétrica, es decir, si $\bar{A}' = A$. De (8) se desprende directamente que si una forma hermitiana dada es simétrica, todas las formas congruentes de la misma son también simétricas.

Puesto que la congruencia de matrices implica la equivalencia de las mismas, para la congruencia de unas formas es necesario que coincidan sus rangos. Sin embargo, esta condición no es suficiente. Las condiciones suficientes en el caso más general serán examinadas en el p. 23.3; ahora daremos estas condiciones para los casos más importantes solamente.

Sea, ante todo, K el cuerpo de los números reales y sea A una matriz simétrica. Existe entonces, de acuerdo con el p. 19.4, una matriz unitaria real U tal que la matriz $A_1 = UAU^{-1}$ tendrá la forma diagonal. Pero si U es unitaria, tenemos $U\overline{U}' = E$, de donde, debido a que las matrices son reales, se deduce que $U^{-1} = U'$, es decir, $A_1 = UAU'$. Por consiguiente, A es *congruente* de una matriz diagonal A_1. Luego, hemos demostrado el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *Toda forma bilineal simétrica real puede ser reducida, mediante una adecuada transformación unitaria real de las variables, a la forma*

$$\alpha_1\xi_1\eta_1 + \alpha_2\xi_2\eta_2 + \ldots + \alpha_r\xi_r\eta_r, \tag{9}$$

donde r es el rango de la forma y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son los números característicos diferentes de cero de la matriz de la forma. En particular, para la equivalencia unitaria de unas formas bilineales simétricas reales es necesario y suficiente que coincidan los polinomios característicos de las matrices de las formas.

Este teorema de más de lo que pretendíamos obtener. Significa que la reducción a la forma diagonal se puede alcanzar mediante una transformación *unitaria* real de las variables. Si no es necesario que la transformación de las variables sea unitaria, podemos continuar la reducción a la forma elemental. Es decir, supongamos que hemos reducido ya la forma al tipo diagonal (9). Cambiemos ahora la numeración de las variables de manera que primero aparezcan los términos de coeficientes positivos y después los de coeficientes negativos. Supongamos, por ejemplo, que $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ son positivos y que $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_r$ son negativos. Tomando entonces

$$\begin{aligned} \xi_j' &= \sqrt{\alpha_j}\,\xi_j, & \eta_j' &= \sqrt{\alpha_j}\,\eta_j & &(j = 1, \ldots, s), \\ \xi_k' &= \sqrt{-\alpha_k}\,\xi_k, & \eta_k' &= \sqrt{-\alpha_k}\,\eta_k & &(k = s+1, \ldots, r), \end{aligned}$$

podemos reducir la forma dada a la forma

$$\xi_1'\eta_1' + \ldots + \xi_s'\eta_s' - \xi_{s+1}'\eta_{s+1}' - \ldots - \xi_r'\eta_r'. \tag{10}$$

La diferencia

$$\sigma = s - (r - s) = 2s - r$$

se llama *signatura* de la forma (10). Es evidente que la forma (10) se determina totalmente por su rango y su signatura, ya que $s = \frac{1}{2}(\sigma + r)$. El hecho de que la signatura no depende de cómo se reduce la forma dada a la forma (10) y, por consiguiente, se determina unívocamente por la forma inicial, constituye el contenido de la así llamada *ley de inercia* que será examinada detalladamente en el p. 22.3.

Para las formas simétricas hermitianas la situación es totalmente análoga. Sea F una forma hermitiana de matriz hermitiana simétrica A. De acuerdo con el teorema 4a (p.19.4), existe una matriz unitaria U tal que la matriz $A_1 = UAU^{-1}$ será diagonal real. Como U es unitaria, tenemos $U^{-1} = \overline{U}'$, de donde $A_1 = UA\overline{U}'$. Hemos demostrado, pues, el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Toda forma bilineal hermitiana simétrica puede ser reducida, mediante una transformación unitaria de las variables, a la forma diagonal*

$$\alpha_1\xi_1\overline{\eta}_1 + \alpha_2\xi_2\overline{\eta}_2 + \ldots + \alpha_r\xi_r\overline{\eta}_r$$

con coeficientes reales. Los valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son las raíces diferentes de cero del polinomio característico de la matriz de la forma y por ello para la congruencia unitaria de las formas hermitianas simétricas es necesario y suficiente que coincidan los polinomios característicos de estas formas.

Si en lugar de la congruencia unitaria se considera la congruencia respecto a transformaciones lineales arbitrarias, el proceso de reducción de una forma puede ser continuado como ha sido señalado anteriormente y así obtendremos una forma de tipo

$$\xi_1\overline{\eta}_1 + \ldots + \xi_s\overline{\eta}_s - \xi_{s+1}\overline{\eta}_{s+1} - \ldots - \xi_r\overline{\eta}_r. \tag{11}$$

Toda forma hermitiana simétrica puede ser reducida, por consiguiente, a una de estas $n+1$ formas ($r = 0, 1, \ldots, n$). Otra vez la no congruencia de las formas (11) para diferentes valores de s se desprende de la ley de inercia mencionada anteriormente.

Ejemplos y problemas

1. Demuéstrese que el sistema de formas lineales en ξ_1, ξ_2, ξ_3 y ξ_4

$$\xi_1 + \xi_2,\ \xi_2 + \xi_3,\ \xi_3 + \xi_4 \quad \text{y} \quad \xi_1 + \xi_4$$

es equivalente al sistema

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3,\ \xi_2 + \xi_3 + \xi_4,\ \xi_1 + \xi_3 + \xi_4 \quad \text{y} \quad 2\xi_1 + \xi_3$$

y no es equivalente al sistema

$$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3,\ \ \xi_2 + \xi_3 - \xi_4,\ \ \xi_1 + \xi_3 \quad \text{y} \quad 2\xi_1 + 3\xi_3 - \xi_4.$$

2. Demuéstrese que un sistema de formas lineales

$$f_i = \xi_1\alpha_{1i} + \xi_2\alpha_{2i} + \ldots + \xi_n\alpha_{ni} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

es equivalente a otro sistema

$$g_i = \xi_1\beta_{1i} + \xi_2\beta_{2i} + \ldots + \xi_n\beta_{ni} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

cuando, y sólo cuando, el sistema de vectores

$$a_i=[\alpha_{1i},\ \alpha_{2i},\ \ldots,\ \alpha_{ni}] \qquad (i=1,\ \ldots,\ m) \tag{14}$$

del espacio lineal de los vectores filas puede ser convertido, mediante una adecuada transformación lineal regular de este espacio, en el sistema de vectores

$$b_i=[\beta_{1i},\ \beta_{2i},\ \ldots,\ \beta_{ni}] \qquad (i=1,\ \ldots,\ m). \tag{15}$$

3. Demuéstrese que el sistema de formas lineales (12) puede ser reducido, mediante una transformación *unitaria* de las variables, en el sistema (13) cuando, y sólo cuando, el sistema de vectores (14) del *espacio unitario de filas* puede ser convertido, mediante una adecuada aplicación unitaria de este espacio, en el sistema de vectores (15).

4. Demuéstrese que para la equivalencia de formas bilineales en sistemas que contienen diferente número de variables es necesario y suficiente que coincidan las dimensiones (es decir, el número de filas y el número de columnas) y los rangos de las matrices de las formas. En particular, las formas bilineales en dos sistemas de variables $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ y $\eta_1,\ \ldots,\ \eta_m$ $(n > m)$ de rango r son equivalentes a la forma $\xi_1\eta_1+\ldots+\xi_r\eta_r$.

§ 22. Formas cuadráticas

22.1. Congruencia. Según la definición general, una forma cuadrática en las variables $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ es un polinomio homogéneo de segundo grado en estas variables. Toda forma cuadrática en las variables indicadas puede ser representada unívocamente en la siguiente forma simétrica

$$F(\xi)=\sum \alpha_{ij}\xi_i\xi_j \quad (\alpha_{ij}=\alpha_{ji}). \tag{1}$$

La matriz $A=\|\alpha_{ij}\|$ se llama matriz de la forma cuadrática y la forma bilineal simétrica

$$F(\xi,\ \eta)=\sum \alpha_{ij}\xi_i\eta_j$$

en dos sistemas de variables, que tiene la misma matriz que la forma cuadrática, se llama forma *polar* de esta última. Identificando en la forma polar el primero y el segundo sistemas de variables obtenemos la forma cuadrática inicial. Así se establece una correspondencia biyectiva entre las formas cuadráticas y las formas bilineales simétricas. Por ejemplo, si

$$F(\xi)=\xi_1^2-\xi_3^2+3\xi_1\xi_2-6\xi_2\xi_3,$$

la notación simétrica de $F(\xi)$ es

$$F(\xi)=\xi_1^2-\xi_3^2+\frac{3}{2}\xi_1\xi_2+\frac{3}{2}\xi_2\xi_1-3\xi_2\xi_3-3\xi_3\xi_2$$

y la forma polar correspondiente es

$$F(\xi,\ \eta)=\xi_1\eta_1-\xi_3\eta_3+\frac{3}{2}\xi_1\eta_2+\frac{3}{2}\xi_2\eta_1-3\xi_2\eta_3-3\xi_3\eta_2.$$

Se dice que una forma cuadrática es diagonal si su matriz es diagonal, es decir, si la forma contiene sólo términos con los cuadrados de las variables.

Realizando en la forma (1) una transformación lineal de las variables de matriz T, obtendremos una forma nueva (p. 21.1)

$$F(\xi) = XAX' = X_1TAT'X_1'$$
$$(X = [\xi_1, \ldots, \xi_n] \quad \text{y} \quad X_1 = [\xi_1', \ldots, \xi_n'])$$

de matriz

$$A_1 = TAT'.$$

Por consiguiente, la ley de variación de la matriz de una forma cuadrática es la misma que para la correspondiente forma bilineal polar. De aquí se deduce que unas formas cuadráticas son congruentes cuando, y sólo cuando, son congruentes las correspondientes formas polares y del teorema 1 del parágrafo anterior obtenemos directamente el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *Todo forma cuadrática real puede ser reducida mediante una adecuada transformación ortogonal real de las variables, a la forma diagonal*

$$\alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \ldots + \alpha_r\xi_r^2, \tag{2}$$

donde r es el rango de la forma inicial y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son los números característicos diferentes de cero de la matriz de la forma. En particular, para la congruencia ortogonal de unas formas cuadráticas reales es necesario y suficiente que coincidan los polinomios característicos de las formas.

Si se aceptan también transformaciones no ortogonales de las variables, es posible continuar la reducción: si $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ son positivos y $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_r$ son negativos, la forma (2) se reduce mediante la sustitución

$$\xi_i' = \sqrt{\alpha_i}\,\xi_i, \; \xi_j' = \sqrt{-\alpha_j}\,\xi_j \; (i = 1, \ldots, s; \; j = s+1, \ldots, r) \tag{3}$$

a la forma

$$\xi_1'^2 + \ldots + \xi_s'^2 - \xi_{s+1}'^2 - \ldots - \xi_r'^2.$$

Por consiguiente, a esta forma puede ser reducida, sobre el cuerpo de los números reales, cualquier forma cuadrática. El caso de otros cuerpos conmutativos será considerado en el punto siguiente.

Una expresión de tipo

$$F(\xi) = \sum \alpha_{ij}\xi_i\overline{\xi}_j = XA\overline{X}' \quad (X = [\xi_1, \ldots, \xi_n]),$$

donde $\alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, se llama *forma cuadrática hermitiana* en las variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de matriz $A = \|\alpha_{ij}\|$. La forma bilineal simétrica hermitiana $F(\xi, \eta) = \sum \alpha_{ij}\xi_i\overline{\eta}_j$ se llama *forma polar* de $F(\xi)$. Las leyes de variación de las matrices de una forma cuadrática hermitiana y de su forma polar coinciden. Por esto la congruencia de las formas cuadráticas hermitianas equivale a la congruencia de sus formas polares y del teorema sobre la reducción de formas bilineales simétricas hermitianas (p. 21.3) se deduce el teorema siguiente:

TEOREMA 2. *Toda forma cuadrática hermitiana puede ser reducida, mediante una transformación unitaria de las variables, a la forma*

$$\alpha_1\xi_1\bar{\xi}_1+\alpha_2\xi_2\bar{\xi}_2+\ldots+\alpha_r\xi_r\bar{\xi}_r, \tag{4}$$

donde r es el rango y $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son los números característicos no nulos de la matriz de la forma dada. Para la congruencia unitaria de unas formas cuadráticas hermitianas es necesario y suficiente que coincidan los polinomios característicos de las matrices de las formas.

Mediante una transformación ulterior de las variables de tipo (3), que ya no será unitaria, la forma (4) puede ser reducida a la forma

$$\xi_1\bar{\xi}_1+\ldots+\xi_s\bar{\xi}_s-\xi_{s+1}\bar{\xi}_{s+1}-\ldots-\xi_r\bar{\xi}_r$$

que es en este caso la elemental.

22.2. Algoritmo de Lagrange. Uno de los métodos más simples de reducción de una forma cuadrática a la forma diagonal es el así llamado método de Lagrange que será considerado aquí. Se puede aceptar que el campo principal es un cuerpo conmutativo cualquiera de característica diferente de 2.

Supongamos que la forma (1) debe ser reducida a la forma diagonal. Pueden darse dos casos: a) la forma contiene el cuadrado de al menos una variable y b) la forma no contiene los cuadrados de las variables.

a) Supongamos, por ejemplo, que $\alpha_{11}\neq 0$. Representando la forma del modo siguiente

$$\begin{aligned}F&=\alpha_{11}\xi_1^2+2\alpha_{12}\xi_1\xi_2+\ldots+2\alpha_{1n}\xi_1\xi_n+\sum_{\lambda>1,\ \mu>1}\alpha_{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi_\mu=\\&=\alpha_{11}^{-1}(\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n)^2-\alpha_{11}^{-1}(\alpha_{12}^2\xi_2^2+2\alpha_{12}\alpha_{13}\xi_2\xi_3+\ldots\\&\qquad\ldots+\alpha_{1n}^2\xi_n^2)+\sum_{\lambda>1,\ \mu>1}\alpha_{\lambda\mu}\xi_\lambda\xi_\mu=\alpha_{11}^{-1}(\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots\\&\qquad\ldots+\alpha_{1n}\xi_n)^2+F_1(\xi_2,\ \ldots,\ \xi_n),\end{aligned}$$

donde F_1 es una forma cuadrática en $\xi_2, \ldots, \xi_n$, y realizando la sustitución

$$\begin{aligned}&\xi_1'=\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n,\\&\xi_i'=\xi_i\quad(i=2,\ 3,\ \ldots,\ n),\end{aligned}$$

podemos reducir F a la forma

$$F=\alpha_{11}^{-1}\xi_1'^2+F_1,$$

donde F_1 no depende de ξ_1'.

b) Supongamos que $\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{nn} = 0$ y que, por ejemplo, $\alpha_{12} \neq 0$. Representando la forma F del modo siguiente

$$F = 2\xi_1(\alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n) + F_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)$$

y realizando la transformación

$$\xi_2' = \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n - \xi_1$$
$$\xi_i' = \xi_i \quad (i = 1, 3, 4, \ldots, n),$$

obtenemos la forma

$$F = 2\xi_1'(\xi_1' + \xi_2') + F_1 = 2\xi_1'^2 + 2\xi_1'\xi_2' + 2\alpha_{12}^{-1}\alpha_{23}\xi_1'\xi_3' + \ldots$$

que contiene el cuadrado de la variable ξ_1'.

Por consiguiente, aplicando el proceso a) y complementándolo, en los casos necesarios, con el proceso b) podemos reducir la forma dada a la forma diagonal.

Ejemplo. Es necesario reducir a la forma diagonal la forma

$$F = \xi_1^2 + 4\xi_2^2 + 8\xi_3^2 - \xi_4^2 - 4\xi_1\xi_2 + 6\xi_1\xi_3 - 12\xi_2\xi_3 + 2\xi_3\xi_4 + \xi_2\xi_5 - \xi_4\xi_5.$$

Tenemos

$$F = (\xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3)^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 + 2\xi_3\xi_4 + \xi_2\xi_5 - \xi_4\xi_5.$$

Realizando la transformación

$$\xi_1' = \xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3, \quad \xi_i' = \xi_i \quad (i > 1),$$

obtenemos la forma

$$F_1 = \xi_1'^2 - \xi_3'^2 + 2\xi_3'\xi_4' - \xi_4'^2 + \xi_2'\xi_5' - \xi_4'\xi_5' = \xi_1'^2 - (\xi_3' - \xi_4')^2 + \xi_2'\xi_5' - \xi_4'\xi_5',$$

que mediante la transformación

$$\eta_3 = \xi_3' - \xi_4', \quad \eta_i = \xi_i' \quad (i \neq 3)$$

se reduce a la forma

$$F_2 = \eta_1^2 - \eta_3^2 + \eta_2\eta_5 - \eta_4\eta_5.$$

Ahora, de acuerdo con b), realizamos la transformación

$$\eta_4' = \eta_2 - \eta_4 - \eta_5, \quad \eta_i' = \eta_i \quad (i \neq 4),$$

obteniendo así la forma

$$F_3 = \eta_1'^2 - \eta_3'^2 + (\eta_4' + \eta_5')\eta_5' = \eta_1'^2 - \eta_3'^2 + \left(\eta_5' + \frac{1}{2}\eta_4'\right)^2 - \frac{1}{4}\eta_4'.$$

Esta forma mediante la transformación

$$\zeta_2 = \eta_5' + \frac{1}{2}\eta_4', \quad \zeta_i = \eta_i' \quad (i = 1, 3, 4), \quad \zeta_5 = \eta_2'$$

se reduce a la forma diagonal

$$F_4 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - \zeta_3^2 - \frac{1}{4}\zeta_4^2.$$

Para hallar la matriz T de la transformación de las variables ζ_i en las variables iniciales ξ_i es suficiente, por lo visto en el p. 21.1, multiplicar las matrices de las transformaciones intermedias.

Si en vez de una forma cudrática es necesario reducir a la forma diagonal una forma *bilineal* simétrica, sustituimos la forma bilineal por la cuadrática correspondiente, reducimos esta última a la forma diagonal y determinamos la matriz de la transformación. Debido a la relación que existe entre las formas cuadráticas y bilineales, esta transformación también reducirá a la forma diagonal la forma bilineal dada.

Para concluir, consideremos el problema sobre la reducción a la forma elemental de una forma bilineal antisimétrica

$$F=\sum \alpha_{ij}\xi_i\eta_j \quad (\alpha_{ij}=-\alpha_{ji})$$

cuyos coeficientes pertenecen a un cuerpo conmutativo cualquiera.

Si todos los coeficientes son iguales a cero, la forma está ya reducida. En el caso contrario aceptaremos, por ejemplo, que $\alpha_{12}\neq 0$. Escribiendo la forma del modo siguiente

$$F=\xi_1(\alpha_{12}\eta_2+\ldots+\alpha_{1n}\eta_n)-\eta_1(\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n)+ \\ +R(\xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

y realizando la sustitución

$$\xi_2'=\alpha_{12}\xi_2+\ldots+\alpha_{1n}\xi_n, \quad \eta_2'=\alpha_{12}\eta_2+\ldots+\alpha_{1n}\eta_n, \\ \xi_i'=\xi_i, \quad \eta_i'=\eta_i \quad (i=1,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

obtenemos la forma

$$F_1=\xi_1'\eta_2'-\xi_2'\eta_1'+R_1(\xi_2', \ldots, \xi_n', \eta_2', \ldots, \eta_n').$$

Ahora pueden darse dos casos: a) el resto R_1 no contiene ξ_2' y, por consiguiente, tampoco contiene η_2' y b) el resto contiene ξ_2'. En el caso a) aplicamos el proceso solamente al resto, ya que éste no depende del término que hemos despejado $\xi_1'\eta_2'-\xi_2'\eta_1'$. En el caso b) representamos la forma del modo siguiente

$$\begin{gathered} F_1=\xi_1'\eta_2'-\xi_2'\eta_1'+\xi_2'(\alpha_{23}'\eta_3'+\ldots+\alpha_{2n}'\eta_n')- \\ -\eta_2'(\alpha_{23}'\xi_3'+\ldots+\alpha_{2n}'\xi_n')+R_2(\xi_3', \ldots)= \\ =(\xi_1'-\alpha_{23}'\xi_3'-\ldots-\alpha_{2n}'\xi_n')\,\eta_2'- \\ -(\eta_1'-\alpha_{23}'\eta_3'-\ldots-\alpha_{2n}'\eta_n')\,\xi_2'+R_2(\xi_3', \ldots) \end{gathered}$$

y realizamos la sustitución

$$\xi_1''=\xi_1'-\alpha_{23}'\xi_3'-\ldots-\alpha_{2n}'\xi_n', \\ \eta_1''=\eta_1'-\alpha_{23}'\eta_3'-\ldots-\alpha_{2n}'\eta_n', \\ \xi_i''=\xi_i', \quad \eta_i''=\eta_i' \quad (i=2, \ldots, n),$$

obteniendo como resultado la forma descompuesta

$$\xi_1''\eta_2''-\xi_2''\eta_1''+R_2(\xi_3'',\ \ldots,\ \eta_3'',\ \ldots).$$

Aplicando el proceso expuesto al resto, después al resto nuevo, etc., reduciremos la forma a

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1+\xi_3\eta_4-\xi_4\eta_3+\ldots+\xi_{2r-1}\eta_{2r}-\xi_{2r}\eta_{2r-1},$$

donde $2r$ es el rango de la forma reducida y, por consiguiente, también de la inicial. En particular, obtenemos de nuevo que *el rango de una matriz antisimétrica es siempre un número par.*

Ejemplo. Redúzcase a la forma elemental la forma

$$F=\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1+\xi_1\eta_3-\xi_3\eta_1-2\xi_1\eta_4+2\xi_4\eta_1+3\xi_2\eta_3-3\xi_3\eta_2+\\+\xi_2\eta_4-\xi_4\eta_2-4\xi_3\eta_4+4\xi_4\eta_3.$$

De acuerdo con la regla, realizamos la primera transformación

$$\xi_2'=\xi_2+\xi_3-2\xi_4,\ \eta_2'=\eta_2+\eta_3-2\eta_4,\\ \xi_i'=\xi_i,\quad \eta_i'=\eta_i\quad (i=1,\ 3,\ 4),$$

después de la cual la forma se convierte en

$$F_1=\xi_1'\eta_2'-\xi_2'\eta_1'+3\xi_2'\eta_3'-3\xi_3'\eta_2'+\xi_2'\eta_4'-\xi_4'\eta_2'-4\xi_3'\eta_4'+4\xi_4'\eta_3'.$$

Realizando ahora la transformación

$$\xi_1''=\xi_1'-3\xi_3'-\xi_4',\ \eta_1''=\eta_1'-3\eta_3'-\eta_4',\\ \xi_i''=\xi_i',\quad \eta_i''=\eta_i'\quad (i=2,\ 3,\ 4),$$

obtenemos la forma elemental

$$F_2=\xi_1''\eta_2''-\xi_2''\eta_1''-4\xi_3''\eta_4''+4\xi_4''\eta_3''.$$

Desde el punto de vista práctico el problema sobre la reducción de las formas cuadráticas a la forma elemental se descompone en dos momentos: la determinación de la forma elemental definitiva y la determinación de la matriz de la transformación de las variables necesaria para reducir la forma a la forma elemental. Si la reducción se realiza mediante transformaciones lineales arbitrarias, ambos problemas quedan resueltos al aplicar el algoritmo de Lagrange.

La situación es más compleja si las formas se reducen mediante transformaciones *unitarias* de las variables. Sea dada una forma hermitiana de matriz A. En el espacio unitario auxiliar de vectores filas la multiplicación de las filas por la matriz A representa una aplicación lineal simétrica $\mathcal{A}$ de matriz A en la base elemental (p. 4.1). Debemos determinar una base ortonormal en la que la matriz A de la aplicación sea de forma diagonal. Para ello hallamos los números característicos $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ de la matriz A que se obtienen resolviendo la ecuación característica de A. Después, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$[\xi_1, \ldots, \xi_n] A = \alpha_i [\xi_1, \ldots, \xi_n]$$

respecto a las incógnitas $\xi_1, \ldots, \xi_n$, encontramos n vectores propios linealmente independientes

$$x_i = [\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}] \quad (i = 1, \ldots, n)$$

de la aplicación $\mathcal{A}$. Normalizando estos vectores, obtenemos una base ortonormal en la que la matriz A y, por consiguiente, la forma hermitiana inicial adquieren la forma diagonal con los elementos diagonales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Si los vectores x_i son ya normalizados, la matriz requerida de la transformación será $T = \| \xi_j^{(i)} \|$.

22.3. Ley de inercia de formas cuadráticas. En los resultados del p. 22.1. acerca de la reducción de formas cuadráticas reales, así como de formas hermitianas complejas, a la forma diagonal hemos dejado una laguna: no hemos aclarado si pueden ser congruentes formas de diferente signatura. El teorema que sigue llena esta laguna.

TEOREMA 3 (ley de inercia). *Toda forma cuadrática real puede ser reducida a la forma diagonal* $\alpha_1\xi_1^2 + \ldots + \alpha_r\xi_r^2$ *mediante un número infinito de transformaciones de las variables. Sin embargo, aun cuando los propios coeficientes* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *pueden depender de la transformación que se emplee, el número de los coeficientes positivos y el número de los coeficientes negativos que aquí figuran no dependen de las transformaciones señaladas y, por consiguiente, se determinan unívocamente por la propia forma inicial.*

Supongamos, al contrario, que una forma cuadrática real

$$\alpha_1\xi_1^2 + \ldots + \alpha_s\xi_s^2 - \alpha_{s+1}\xi_{s+1}^2 - \ldots - \alpha_r\xi_r^2 \quad (\alpha_i > 0)$$

se convierte, mediante la transformación de las variables $\xi_i = \sum \xi'_\lambda \tau_{\lambda i}$, de nuevo en la forma diagonal

$$\beta_1\xi_1'^2 + \ldots + \beta_t\xi_t'^2 - \beta_{t+1}\xi_{t+1}'^2 - \ldots - \beta_r\xi_r'^2 \quad (\beta_i > 0),$$

pero siendo $s < t$. Esto significa que la igualdad

$$\begin{aligned} &\alpha_1\xi_1^2 + \ldots + \alpha_s\xi_s^2 - \alpha_{s+1}\xi_{s+1}^2 - \ldots - \alpha_r\xi_r^2 = \\ &= \beta_1\xi_1'^2 + \ldots + \beta_t\xi_t'^2 - \beta_{t+1}\xi_{t+1}'^2 - \ldots - \beta_r\xi_r'^2 \end{aligned}$$

se convierte en una identidad al sustituir las variables ξ_i por sus expresiones en términos de las variables ξ'_i. Representemos esta identidad en la forma

$$\begin{aligned} &\alpha_1\xi_1^2 + \ldots + \alpha_s\xi_s^2 + \beta_{t+1}\xi_{t+1}'^2 + \ldots + \beta_r\xi_r'^2 = \\ &= \beta_1\xi_1'^2 + \ldots + \beta_t\xi_t'^2 + \alpha_{s+1}\xi_{s+1}^2 + \ldots + \alpha_r\xi_r^2 \end{aligned} \tag{5}$$

y consideremos el sistema de ecuaciones

$$\xi_1 = 0, \ \ldots, \ \xi_s = 0, \ \xi'_{t+1} = 0, \ \ldots, \ \xi'_n = 0, \tag{6}$$

donde por $\xi_1, \ldots, \xi_s$ se comprenden sus expresiones en términos de $\xi_1', \ldots, \xi_n'$. El sistema (6) es un sistema de ecuaciones lineales homogéneas respecto a las incógnitas $\xi_1', \ldots, \xi_n'$, siendo el número de ecuaciones $s+(n-t)=n-(t-s)$ indudablemente menor que el número de incógnitas, ya que $t>s$. Pero en estas condiciones el sistema (6) debe tener al menos una solución no nula

$$\xi_1'=\gamma_1, \ \ldots, \ \xi_t'=\gamma_t, \ \xi_{t+1}'=0, \ \ldots, \ \xi_n'=0. \tag{7}$$

Introduciéndola en la identidad (5), obtenemos

$$\beta_1\gamma_1^2+\ldots+\beta_t\gamma_t^2+\alpha_{s+1}\xi_{s+1}^2+\ldots+\alpha_r\xi_r^2=0. \tag{8}$$

Los números β_i y α_j son positivos y los números γ_i^2 y ξ_j^2 son no negativos y por ello de (8) resulta que $\gamma_1=\ldots=\gamma_t=0$ lo que contradice a que la solución (7) es no trivial.

La ley de inercia tiene lugar también, con el mismo enunciado, en el caso de formas cuadráticas hermitianas. La demostración no difiere de la que acabamos de realizar.

22.4. Formas de signo constante. Una forma cuadrática real $F(\xi)=\sum\alpha_{ij}\xi_i\xi_j$ se llama *no negativa* si su valor es no negativo cualesquiera que sean los valores reales de las variables ξ_i. La forma se llama *definida positiva* si su valor es estrictamente positivo para cualquier sistema no nulo de valores de las variables. Análogamente se introducen los conceptos de formas *no positivas* y de formas *definidas negativas*. Las formas no negativas y no positivas se llaman a veces formas de *signo constante*.

Si una forma en n variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ es de forma diagonal

$$\alpha_1\xi_1^2+\ldots+\alpha_s\xi_s^2-\alpha_{s+1}\xi_{s+1}^2-\ldots-\alpha_r\xi_r^2 \quad (\alpha_i>0),$$

es fácil ver que será definida positiva cuando $s=n$, no negativa cuando $s=r\leqslant n$, no positiva cuando $s=0$ y definida negativa cuando $s=0$ y $r=n$. Siendo $0<s<r$ la forma puede tomar valores positivos para unos valores de las variables y valores negativos para otros valores de las variables. Puesto que la constancia de signo de una forma se conserva al realizar una transformación de las variables, se puede decir que son definidas positivas aquellas formas que se reducen a la suma de n cuadrados positivos y que son no negativas aquellas formas que se reducen a la suma de cuadrados positivos solamente, aunque sea en un número menor que el número de las variables; afirmaciones correspondientes tienen lugar para las formas no positivas y definidas negativas. En particular, una forma no negativa es definida positiva sólo cuando es regular.

Si en las formas cuadráticas corrientes se permite que las variables tomen valores tanto reales como complejos, los conceptos introducidos pierden el sentido, ya que en este caso cualquier forma no nula puede tomar valores no reales. La situación es distinta si se consideran formas hermitianas. La razón de esto estriba en que tanto para los valores reales como complejos de las variables las formas hermitianas toman siempre valores reales. Efectivamente, de las condiciones $\alpha_{ij}=\overline{\alpha}_{ji}$ se deduce que

$$\overline{F}=\sum \overline{\alpha_{ij}\xi_i\overline{\xi}_j}=\sum \overline{\alpha}_{ij}\overline{\xi}_i\xi_j=\sum \alpha_{ji}\xi_j\overline{\xi}_i=F,$$

es decir, se deduce que F es real. Por esto, los conceptos de forma no negativa, definida positiva, etc. se pueden extender directamente al caso de formas cuadráticas hermitianas.

Es fácil establecer si una forma es definida positiva, así como determinar su signatura, reduciéndola a la forma diagonal por el método de Lagrange. Sin embargo, en determinados casos tienen gran interés los criterios directos de definición positiva. Entre estos nos limitaremos a exponer el así llamado criterio de Jacobi.

CRITERIO DE JACOBI. *Una forma cuadrática o cuadrática hermitiana en n variables de matriz A es no negativa cuando, y sólo cuando, los coeficientes del polinomio característico de A son de signos alternados. Además, si uno de estos coeficientes se anula, también resultan nulos todos los coeficientes de los términos de grado interior.*

Efectivamente, por lo visto en el p. 22.1, la forma dada puede ser reducida, mediante una transformación de las variables de matriz unitaria U, a la forma diagonal de matriz diagonal real $A_1=UA\overline{U}'=UAU^{-1}$. Puesto que la matriz A, además de ser congruente, es también semejante de A_1, el polinomio característico de A coincide con el polinomio característico de A_1 y basta demostrar el criterio sólo en el caso de formas diagonales de tipo $\alpha_1\xi_1\overline{\xi}_1+\ldots+\alpha_r\xi_r\overline{\xi}_r$. El polinomio característico de esta última matriz es

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)\ldots(\lambda-\alpha_r)\lambda^{n-r}=\lambda^n-\sigma_1\lambda^{n-1}+\sigma_2\lambda^{n-2}-\ldots$$

Si todos los α_1 son positivos, las fórmulas de Vieta

$$\sigma_i=\sum \alpha_{n_1}\alpha_{n_2}\ldots\alpha_{n_i}\quad (n_1<n_2<\ldots<n_i)$$

muestran que los coeficientes de $\varphi(\lambda)$ poseen la propiedad requerida. Recíprocamente, supongamos que los coeficientes de un polinomio son diferentes de cero y tienen signos alternados y supongamos que las raíces del polinomio son reales. Debemos demostrar que todas sus raíces son positivas. Supongamos, por inducción, que esto ha quedado ya demostrado para todos los polinomios de grado inferior. Entonces $\varphi'(\lambda)$ tendrá $n-1$ raíces positivas (ya que si todas las condiciones indicadas se cumplen para $\varphi(\lambda)$, también se cumplen indudablemente para $\varphi'(\lambda)$). Pero en este caso $\varphi(\lambda)$ tiene, según el teorema de Rolle, no menos de $n-1$ raíces positivas y la última raíz n-ésima de $\varphi(\lambda)$ será positiva debido a que el producto de todas las raíces de $\varphi(\lambda)$ es, por hipótesis, positivo

Ejemplos y problemas

1. Hállese la matriz de la transformación lineal de las variables que reduce la forma bilineal

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1+\xi_3\eta_2-\xi_2\eta_3+2\xi_4\eta_1-2\xi_1\eta_4$$

a la forma elemental.

2. Demuéstrese que sobre un espasio unitario real toda forma bilineal antisimétrica real en n variables puede ser reducida, mediante una transformación unitaria real de las variables, a

$$\alpha_1(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)+\ldots+\alpha_r(\xi_{2r-1}\eta_{2r}-\xi_{2r}\eta_{2r-1})$$

(compárese con el p. 19.5).

3. Hállense las matrices de las transformaciones ortogonales reales de las variables que reducen a la forma diagonal las formas

a) $\xi_1^2+\xi_1\xi_2+\xi_2^2$;

b) $99\xi_1^2-12\xi_1\xi_2+48\xi_1\xi_3+130\xi_2^2-60\xi_2\xi_3+71\xi_3^2$;

c) $10\xi_1\eta_1+4\xi_1\eta_2+4\xi_2\eta_1+12\xi_1\eta_3+12\xi_3\eta_1-2\xi_2\eta_2-14\xi_2\eta_3-14\xi_3\eta_2+\xi_3\eta_3$

y determínense estas formas elementales.

4. Hállese la matriz de la transformación unitaria que reduce la forma

$$6\xi_1\eta_2-6\xi_2\eta_1+2\xi_1\eta_4-2\xi_4\eta_1+2\xi_2\eta_3-2\xi_3\eta_2-6\xi_3\eta_4+6\xi_4\eta_3$$

a la forma elemental.

5. Hállese la transformación de las variables que reduce la forma

$$\xi_1\xi_n+\xi_2\xi_{n-1}+\ldots+\xi_s\xi_{n-s+1} \qquad \left(s=\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

a la suma de cuadrados.

§ 23. Pares de formas

23.1. Equivalencia de pares de formas. En los puntos anteriores hemos examinado el problema sobre la reducción a la forma elemental de una forma cuadrática. En este parrágrafo será considerado el problema importante acerca de la reducción simultánea de dos formas cuadráticas.

Recordemos que una sucesión de formas bilineales $F_1, \ldots, F_k$ en los mismos sistemas de variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y $\eta_1, \ldots, \eta_n$ se llama *equivalente* a una sucesión de formas bilineales $G_1, \ldots, G_k$ en las variables $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$ y $\eta'_1, \ldots, \eta'_n$ si mediante unas transformaciones lineales invertibles de las variables

$$[\xi]=[\xi']T, \quad [\eta]=[\eta']S \quad ([\xi]\doteq[\xi_1, \ldots, \xi_n])$$

las formas de la primera sucesión pueden ser reducidas a las formas correspondientes de la segunda sucesión.

De los resultados del p. 21.2 se deduce que una sucesión de formas bilineales de matrices $A_1, \ldots, A_k$ es equivalente a una sucesión de formas bilineales de matrices $B_1, \ldots, B_k$ cuando, y sólo cuando, existen unas matrices regulares P y Q con elementos del campo principal tales que

$$PA_jQ = B_j \quad (j=1, \ldots, k). \tag{1}$$

Dos sucesiones de matrices $A_1, \ldots, A_k$ y $B_1, \ldots, B_k$ se llaman *equivalentes* si están ligadas por las relaciones (1), donde P y Q son unas matrices regulares. Por consiguiente, la equivalencia de unas sucesiones de formas y la equivalencia de las sucesiones de sus matrices son conceptos que tienen el mismo sentido.

Sea λ una variable independiente y sea F y G un par de matrices cuadradas de un mismo orden n. Los factores invariantes de la λ-matriz $\lambda F-G$ (véase el p. 13.2) se llaman *factores invariantes del par* F y G. Si el par F y G es equivalente al par F_1 y G_1, de (1) resulta

$$\lambda F_1 - G_1 = U(\lambda F - G)V'.$$

Por lo visto en el p. 13.3 esto significa que los factores invariantes de las λ-matrices $\lambda F_1 - G_1$ y $\lambda F - G$ coinciden. Es decir, *para la equivalencia de dos pares de matrices es necesario que coincidan los factores invariantes de estos pares.* En el caso general esta condición no es suficiente[1]. Sin embargo, si las primeras matrices de ambos pares son regulares, la coincidencia de los factores invariantes es suficiente para que estos pares sean equivalentes.

TEOREMA 1. *Sean dados dos pares de matrices cuadradas F, G y F_1, G_1 de un mismo orden y sean F y F_1 regulares. Para la equivalencia de los pares F, G y F_1, G_1 es necesario y suficiente que los factores invariantes de la matriz $\lambda F - G$ coincidan con los factores invariantes de la matriz $\lambda F_1 - G_1$.*

La necesidad ha sido ya demostrada y, por ello, estableceremos solamente la suficiencia. Supongamos que los factores invariantes de las matrices $\lambda F - G$ y $\lambda F_1 - G_1$ coinciden. De las relaciones

$$F^{-1}(\lambda F - G) = \lambda E - F^{-1}G,$$
$$F_1^{-1}(\lambda F_1 - G_1) = \lambda E - F_1^{-1}G_1$$

se desprende que también coinciden los factores invariantes de las matrices $\lambda E - F^{-1}G$ y $\lambda E - F_1^{-1}G_1$. Puesto que éstas son las matrices características de $F^{-1}G$ y $F_1^{-1}G_1$, de aquí se deduce (p. 15.3) que $F^{-1}G$ y $F_1^{-1}G_1$ son semejantes, es decir, que existe una matriz regular T que satisface la relación

$$F_1^{-1}G_1 = T^{-1}F^{-1}GT.$$

Tenemos ahora

$$\lambda E - F_1^{-1}G_1 = T^{-1}(\lambda E - F^{-1}G)T = T^{-1}F^{-1}(\lambda F - G)T,$$
$$\lambda F_1 - G_1 = F_1T^{-1}F^{-1}(\lambda F - G)T,$$

[1] En el caso general, además de los factores invariantes, es preciso considerar también los así llamados índices minimales.

de donde

$$F_1 = UFV' \quad \text{y} \quad G_1 = UGV',$$

donde $U = F_1T^{-1}F^{-1}$ y $V = T'$. Por consiguiente, los pares F, G y F_1, G_1 son equivalentes.

23.2. Congruencia de pares de formas. Una sucesión de formas bilineales en las variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y $\eta_1, \ldots, \eta_n$ de matrices $A_1, \ldots, A_k$ se llama *congruente* de una sucesión de formas bilineales de matrices $B_1, \ldots, B_k$ si mediante una misma transformación de ambos sistemas de variables las formas de la primera sucesión pueden ser reducidas a las formas correspondientes de la segunda sucesión.

Indicando por T la matriz de la transformación de las variables, tendremos

$$B_j = TA_jT' \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{2}$$

Dos sucesiones $A_1, \ldots, A_k$ y $B_1, \ldots, B_k$ de matrices arbitrarias se llaman *congruentes* si existe una matriz regular T que cumple las condiciones (2).

Análogamente se dice que una sucesión de formas cuadráticas o de formas cuadráticas hermitianas es congruente de otra sucesión de formas, si mediante una transformación adecuada invertible de las variables las formas de la primera sucesión pueden ser reducidas simultáneamente a las formas correspondientes de la segunda sucesión.

Es obvio que la condición (2) es necesaria y suficiente para la congruencia de las formas cuadráticas de matrices $A_1, \ldots, A_k$ y $B_1, \ldots, B_k$. Para las formas hermitianas esta condición debe ser sustituida por la siguiente

$$B_j = TA_j\bar{T}' \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

El problema general que hemos planteado acerca de la congruencia de sucesiones de formas bilineales es muy complejo ya para un par de formas. En la segunda mitad del siglo pasado Weierstrass obtuvo las condiciones necesarias y suficientes de congruencia en el caso en que ambas formas del par son simétricas y, en particular, si las formas son cuadráticas y una forma del par es regular. Estas condiciones serán expuestas al concluir este punto. El caso general de congruencia de pares de formas cuadráticas fue examinado por Kronecker. Debido a que las condiciones de Kronecker son un tanto voluminosas, suelen exponerse en tratados más especiales. Tanto las primeras condiciones como las segundas se refieren a formas sobre el cuerpo de los números complejos. El caso de cuerpos conmutativos de otros tipos fue analizado por Dixon y otros autores.

Consideraremos primero el caso más importante de un par de formas cuadráticas reales cuando una de ellas es definida positiva.

TEOREMA 2. *Todo par de formas cuadráticas reales en n variables tal que una de ellas es definida positiva puede ser reducido, mediante una adecuada transformación real de las variables, al par de formas de tipo*

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2 \quad \text{y} \quad \alpha_1\xi_1^2+\alpha_2\xi_2^2+\ldots+\alpha_n\xi_n^2. \tag{3}$$

Los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se determinan univocamente, salvo el orden en que siguen, por las formas iniciales y no dependen del método de reducción.

En efecto, sean $F(\xi)$ y $G(\xi)$ las formas cuadráticas dadas. Puesto que la primera es definida positiva, es posible reducirla, mediante una adecuada transformación lineal de las variables, a la suma de los cuadrados de las variables. Así obtenemos el par de formas de tipo

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2 \quad \text{y} \quad \sum \alpha_{ij}\xi_i\xi_j.$$

Ahora buscamos una transformación de las variables de matriz *ortogonal* real U que reduzca a la forma diagonal la segunda forma. Como en este caso la matriz de la primera forma en las variables nuevas será igual a

$$UEU'=UU'=E,$$

es decir, la primera forma conserva su forma unitaria, resulta que después de la transformación señalada las formas dadas serán del tipo requerido (3).

Supongamos, finalmente, que mediante una transformación de las variables las formas F y G se reducen al tipo (3) y mediante otra transformación se reducen a

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2 \text{ y } \beta_1\xi_1^2+\beta_2\xi_2^2+\ldots+\beta_n\xi_n^2. \tag{4}$$

Existe entonces una transformación de las variables de matriz T que reduce el par (3) en el par de formas (4) y, por consiguiente, las matrices de estas formas estarán ligadas por las relaciones

$$E=TET' \quad \text{y} \quad B=TAT', \tag{5}$$

donde A es la matriz diagonal de elementos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y B es la matriz diagonal de elementos $\beta_1, \ldots, \beta_n$ a lo largo de la diagonal principal. De la primera de las relaciones (5) resulta $TT'=E$, de donde $B=TAT^{-1}$, es decir, las matrices A y B son semejantes y los números característicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de la primera deben coincidir con los números característicos $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de la segunda.

Para las formas cuadráticas hermitianas tiene lugar un teorema totalmente análogo.

TEOREMA 2a. *Todo par de formas cuadráticas hermitianas tal que la primera es definida positiva se puede reducir, mediante una adecuada transformación lineal compleja de las variables, en el par de* *formas de tipo*

$$\xi_1\overline{\xi}_1+\xi_2\overline{\xi}_2+\ldots+\xi_n\overline{\xi}_n \quad \text{y} \quad \alpha_1\xi_1\overline{\xi}_1+\alpha_2\xi_2\overline{\xi}_2+\ldots+\alpha_n\xi_n\overline{\xi}_n,$$

donde los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *se determinan unívocamente por las formas iniciales y no dependen del método de reducción.*

La demostración es análoga a la anterior.

Pasando a considerar el caso general observemos, ante todo, que la congruencia de un par de matrices implica indudablemente la equivalencia de las mismas. Inesperadamente resulta que bajo ciertas condiciones es válida también la afirmación recíproca.

TEOREMA 3. *Supongamos que en dos pares de matrices cuadradas* F, G y F_1, G_1 *las primeras matrices* F *y* F_1 *son ambas o bien simétricas o bien antisimétricas y que las segundas matrices* G *y* G_1 *son ambas también o bien simétricas o bien antisimétricas. Entonces, sobre el cuerpo de los números complejos, de la equivalencia de los pares señalados se deduce la congruencia de los mismos.*

Existen, por hipótesis, unas matrices regulares U y V tales que

$$F_1=UFV' \quad \text{y} \quad G_1=UGV'. \tag{6}$$

Pasando a las matrices transpuestas, obtenemos de aquí que $F_1'=VF'U'$ y $G_1'=VG'U'$. Puesto que las matrices F y F_1 son simétricas o antisimétricas de aquí resulta

$$F_1=VFU'; \tag{7}$$

una igualdad análoga tenemos para G_1. Comparando (7) y (6) encontramos

$$UFV'=VFU' \text{ y } V^{-1}U\cdot F=F\cdot(V^{-1}U)'. \tag{8}$$

Tomemos $V^{-1}U=T$. La segunda de las igualdades (8) da

$$\begin{aligned} TF&=FT',\\ T^2F&=FT'^2,\\ &\cdots\cdots\\ T^kF&=FT'^k, \end{aligned}$$

de donde

$$(\alpha_0E+\alpha_1T+\ldots+\alpha_kT^k)\,F=F\,(\alpha_0E+\alpha_1T'+\ldots+\alpha_kT'^k),$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son unos números arbitrarios. En el capítulo IV (p. 16.3) hemos demostrado que los números $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ se pueden escoger de manera que el polinomio

$$\varphi(T)=\alpha_0E+\alpha_1T+\ldots+\alpha_kT^k$$

sea raíz cuadrada de T, es decir, que $\varphi(T)\,\varphi(T)=T$. Tomemos $P=V\varphi(T)$; entonces

$$PFP'=V\varphi(T)\,F\varphi(T')\,V'=V\varphi(T)\,\varphi(T)\,FV'=VTFV'=UFV',$$

es decir,

$$PFP' = F_1.$$

Repitiendo estos mismos razonamientos para la matriz G, encontramos

$$PGP' = G_1.$$

Por consiguiente, los pares F, G y F_1, G_1 son congruentes que es lo que se quería demostrar.

Los teoremas 1 y 3 permiten enunciar la siguiente condición de congruencia de un par de matrices:

Sean dados dos pares de matrices F, G y F_1, G_1. Si F y F_1 son regulares y son ambas o bien simétricas o bien antisimétricas y si G y G_1 también son ambas o bien simétricas o bien antisimétricas, la condición necesaria y suficiente de congruencia de los pares F, G y F_1, G_1 sobre el cuerpo de los números complejos es la coincidencia de los factores invariantes de las matrices $\lambda F - G$ y $\lambda F_1 - G_1$.

Efectivamente, si los factores invariantes de las matrices $\lambda F - G$ y $\lambda F_1 - G_1$ coinciden, los pares F, G y F_1, G_1 son equivalentes en virtud del teorema 1. Pero estos pares serán entonces, debido al teorema 3, también congruentes. Recíprocamente, si F, G y F_1, G_1 son congruentes, son desde luego equivalentes y, por consiguiente, los factores invariantes de la matriz $\lambda F - G$ coinciden con los factores invariantes de la matriz $\lambda F_1 - G_1$.

Las aplicaciones del teorema 3 a la determinación directa de las formas elementales de pares de formas complejas serán consideradas más tarde, en el cap. VII. Aplicando este teorema obtendremos en el punto siguiente la solución del problema de congruencia de las formas bilineales no simétricas.

Observemos también que si hasta el teorema 3 las formas cuadráticas reales y las formas hermitianas se comportaban igualmente, el teorema 3 deja ya de ser válido para las formas hermitianas. El ejemplo correspondiente será expuesto al principio del § 28.

23.3. Congruencia de formas bilineales no simétricas. Como ya hemos señalado anteriormente, los resultados del punto precedente permiten enunciar las condiciones necesarias y suficientes para la congruencia de cualesquiera formas bilineales complejas regulares complementando con ello esencialmente los resultados del p. 21.3.

TEOREMA 4. *Para que unas formas bilineales complejas regulares de matrices G y G_1 sean congruentes es necesario y suficiente que coincidan los divisores elementales de las λ-matrices $\lambda G - G'$ y $\lambda G_1 - G_1'$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las formas son congruentes. Las matrices G y G_1 están ligadas entonces por las relaciones

$$G_1 = UGU'.$$

De aquí

$$G_1' = UG'U'.$$

Por consiguiente, el par de matrices G, G' es congruente del par de matrices G_1, G_1' y los divisores elementales de la matriz $\lambda G - G'$ coinciden con los divisores elementales de la matriz $\lambda G_1 - G_1'$.

Supongamos, recíprocamente, que los divisores elementales de las matrices $\lambda G - G'$ y $\lambda G_1 - G_1'$ coinciden. Entonces el par G, G' es equivalente al par G_1, G_1', en virtud del teorema 1, por lo tanto

$$G_1 = UGV' \quad \text{y} \quad G_1' = UG'V'. \tag{9}$$

Tomemos

$$G + G' = S, \quad G - G' = T, \quad G_1 + G_1' = S_1 \quad \text{y} \quad G_1 - G_1' = T_1.$$

De (9) resulta que

$$S_1 = USV' \quad \text{y} \quad T_1 = UTV'$$

es decir, el par S, T es equivalente al par S_1, T_1. Puesto que las matrices S y S_1 son simétricas y las matrices T y T_1 son antisimétricas, los pares S, T y S_1, T_1 son, en virtud del teorema 3, congruentes, es decir,

$$S_1 = PSP' \quad \text{y} \quad T_1 = PTP'. \tag{10}$$

Pero $G = \frac{S+T}{2}$ y $G_1 = \frac{S_1 + T_1}{2}$ y, por esto, de (10) se desprende que

$$G_1 = PGP'.$$

Por consiguiente, las matrices G y G_1 son congruentes.

El teorema 4 muestra que las formas bilineales regulares sobre el cuerpo de los números complejos se determinan, salvo un isomorfismo, por los divisores elementales de la matriz $\lambda G - G'$. Luego, para resolver el problema de la clasificación de estas formas es suficiente indicar los sistemas de expresiones de tipo $(\lambda - \alpha)^m$ que pueden servir como divisores elementales de las matrices de tipo $\lambda G - G'$. Es fácil ver que estos sistemas no pueden ser arbitrarios. En efecto, supongamos que $(\lambda - \alpha)^m$ figura k veces en el sistema de divisores elementales de una matriz $\lambda G - G'$. Entonces $(\lambda - \alpha)^m$ figurará también k veces en el sistema de divisores elementales de la matriz transpuesta $\lambda G' - G$. Pero la matriz $\lambda G' - G$ es equivalente a la matriz $G'^{-1}(\lambda G' - G) = \lambda E - G'^{-1}G$; por consiguiente, $(\lambda - \alpha)^m$ figura k veces en el sistema de divisores elementales de la matriz $\lambda E - G'^{-1}G$. El teorema sobre los divisores elementales de una función (p. 16.4) afirma que todo divisor elemental $(\lambda - \alpha)^m$ de la matriz $\lambda E - G'^{-1}G$ se transforma en el divisor elemental $(\lambda - \alpha^{-1})^m$ de la matriz $\lambda E - (G'^{-1}G)^{-1}$. Puesto que la última matriz es equivalente a $\lambda G - G'$, la expresión $(\lambda - \alpha^{-1})^m$ figura k veces en el sistema de divisores elementales de la matriz $\lambda G - G'$. Por consiguiente, *si* $(\lambda-\alpha)^m$ *es un divisor elemental de mutiplicidad* k *de la matriz* $\lambda G-G'$, *resulta que* $(\lambda-\alpha^{-1})^m$ *también será un divisor elemental de multiplicidad* k *de la misma*. Siendo $\alpha=\pm 1$, esta condición es trivial. Con razonamientos adicionales se puede demostrar que las matrices $\lambda G-G'$ contienen todo divisor de tipo $(\lambda+1)^{2m+1}$ necesariamente un número par de veces, mientras que los divisores elementales de tipo $(\lambda-1)^{2m+1}$ y $(\lambda\pm 1)^{2m}$ puden figurar en estas matrices en combinaciones arbitrarias. Las condiciones expuestas, para α, tanto iguales como diferentes de ± 1, además de ser necesarias, son también suficientes para que un sistema de expresiones de tipo $(\lambda-\alpha)^m$ sea el sistema de divisores elementales de una matriz $\lambda G-G'$.

Ejemplos y problemas

1. Redúzcanse a la forma elemental, mediante una transformación real de las variables, los pares de formas

a) $x^2+2xy+2y^2$ y $2x^2-xy$;

b) $2x^2+2xy+2xz+2y^2+2yz+2z^2$ y $-9x^2+36xy+18xz+15y^2+18yz+18z^2$.

2. Todo par compuesto por formas bilineales reales, una de las cuales es simétrica definida positiva y la otra es antisimétrica, puede ser reducido, mediante una transformación real de las variables, a la forma

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n \text{ y } \alpha_1(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)+\ldots+\alpha_r(\xi_{2r-1}\eta_{2r}-\xi_{2r}\eta_{2r-1}).$$

3. Demuéstrese que el par de formas de matrices

$$\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 1 & 3\end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix}-6 & 6\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

es equivalente al par de formas de matrices

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ -2 & 3\end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix}-10 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Para la demostración generalícese el teorema 1 del p. 23.1 al caso de pares A, B tales que $|\lambda A+\mu B|\neq 0$, considerando para ello los factores invariantes que son polinomios homogéneos en λ y μ.

4. Demuéstrense las últimas afirmaciones del p. 23.3.

§ 24. Funciones bilineales

La teoría de formas bilineales puede ser interpretada geométricamente como la teoría de funciones bilineales en espacios lineales. Esta interpretación permite al mismo tiempo comprender con más profundidad los resultados principales de la teoría de formas; el parágrafo presente está dedicado a la exposición de la misma.

24.1. Definiciones principales. Se dice que sobre un espacio lineal $\mathfrak{L}$ se ha definido una función $\varphi(x, y)$ de dos vectores variables x e y, si a todo par de vectores del espacio $\mathfrak{L}$ se pone en correspondencia un determinado elemento $\varphi(x, y)$ del campo principal K del espacio considerado. La función $\varphi(x, y)$ se llama *bilineal* si es lineal respecto a cada una de las variables por separado, es decir, si satisface las identidades

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \ y) = \alpha_1 \varphi(x_1, \ y) + \alpha_2 \varphi(x_2, \ y), \tag{1}$$
$$\varphi(x, \ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 \varphi(x, \ y_1) + \beta_2 \varphi(x, \ y_2). \tag{2}$$

Una función bilineal sobre un espacio complejo lineal se llama *bilineal hermitiana*, si es lineal respecto a la primera variable y antilineal respecto a la segunda, es decir, si satisface la relación (1) y la relación

$$\varphi(x, \ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \overline{\beta}_1 \varphi(x, \ y_1) + \overline{\beta}_2 \varphi(x, \ y_2). \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) se deduce directamente la regla general distributiva

$$\varphi(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \ y_1 + y_2 + \ldots + y_s) = \sum \varphi(x_i, \ y_j) \tag{4}$$

que es válida tanto para las formas bilineales como para las bilineales hermitianas.

Tomemos en $\mathfrak{L}$ una base arbitraria $a_1, \ \ldots, \ a_n$ y sea

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n,$$
$$y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \ldots + \eta_n a_n.$$

De las fórmulas (2) y (4) resulta

$$\varphi(x, \ y) = \sum \varphi(a_i, \ a_j) \xi_i \eta_j = \sum \alpha_{ij} \xi_i \xi_j \quad (\alpha_{ij} = \varphi(a_i, \ a_j)). \tag{5}$$

La matriz $A = \|\alpha_{ij}\|$ se llama *matriz de la función* $\varphi(x, y)$ en la base señalada. Es obvio que conociendo la matriz A conocemos también la función $\varphi(x, y)$, ya que la fórmula (5) permite calcular los valores de $\varphi(x, y)$ cualquiera que sea el par de vectores x, y.

La correspondencia entre las matrices y las formas bilineales es biyectiva, ya que cualquiera que sea la matriz A la función $\varphi(x, y)$ calculada por la fórmula (5) será bilineal de matriz A.

Indicando por $[x]$ e $[y]$ las filas coordenadas de los vectores x e y, podemos representar la fórmula (5) en la forma matricial

$$\varphi(x, \ y) = [x] \ A \ [y]', \tag{6}$$

que permite deducir directamente la siguiente *regla de transformación* de las matrices de funciones bilineales: *si en una base la matriz de una función bilineal es A, la matriz de la función en una base nueva será*

$$A_1 = TAT', \tag{7}$$

donde T es la matriz del cambio de la base antigua por la nueva.

Efectivamente, aplicando la fórmula (6) en las bases antigua y nueva, tenemos

$$\varphi(x,\ y)=[x]\,A\ \ [y]'=[x]_1\,TAT'\,[y]_1'=[x]_1\,A_1\,[y]_1',$$

donde A_1, $[x]_1$ e $[y]_1$ son, respectivamente, la matriz de la función $\varphi(x,\ y)$ y las filas coordenadas de los vectores x e y en la base nueva. Por esto, $A_1=TAT'$.

Considerando en la fórmula (5) las coordenadas de los vectores x e y como variables independientes, vemos que *el valor de una función bilineal en toda base se expresa mediante una forma bilineal cuya matriz coincide con la matriz de la función en esta base.*

Según (7), el paso a una base nueva implica la sustitución de la forma bilineal por la correspondiente forma congruente, debido a lo cual *las formas bilineales congruentes pueden ser consideradas como formas bilineales de una misma función bilineal, pero calculadas en diferentes bases.*

Una función bilineal $\varphi(x,\ y)$ se llama *simétrica* si

$$\varphi(x,\ y)=\varphi(y,\ x)$$

y *antisimétrica* si

$$\varphi(x,\ y)=-\varphi(x,\ y).$$

Es evidente que *las funciones bilineales simétricas y antisimétricas son aquellas funciones cuyas formas bilineales son, respectivamente, simétricas y antisimétricas.*

Si $\varphi(x,\ y)$ es una función bilineal arbitraria, las funciones

$$\varphi_1(x,\ y)=\frac{1}{2}[\varphi(x,\ y)+\varphi(y,\ x)] \text{ y }$$

$$\varphi_2(x,\ y)=\frac{1}{2}[\varphi(x,\ y)-\varphi(y,\ x)] \qquad (8)$$

serán bilineales y, respectivamente, simétrica y antisimétrica. Como de (8) se deduce que

$$\varphi(x,\ y)=\varphi_1(x,\ y)+\varphi_2(x,\ y)$$

resulta que toda función bilineal puede ser representada como la suma de funciones simétrica y antisimétrica, con la particularidad de que, como es fácil de ver, está representación es unívoca.

Las funciones de tipo $\psi(x)=\varphi(x,\ x)$, donde $\varphi(x,\ y)$ es una función bilineal, se llaman *cuadráticas*. Por consiguiente, las funciones cuadráticas son aquellas funciones de un vector variable que aparecen al identificar los vectores variables en las funciones bilineales. Pero si una función cuadrática $\psi(x)$ aparece de la forma explicada de una función bilineal $\varphi(x,\ y)$, la función $\psi(x)$ aparece también al identificar las variables en la función bilineal simétrica $\varphi_1(x,\ y)$:

$$\varphi_1(x,\ x)=\frac{1}{2}[\varphi(x,\ x)+\varphi(x,\ x)]=\varphi(x,\ x).$$

Por esto al considerar las funciones cuadráticas se puede aceptar que son generadas por funciones simétricas solamente.

Por otra parte, si $\varphi(x, y)$ es simétrica y $\psi(x)=\varphi(x, x)$, se tiene

$$\psi(x+y)=\varphi(x+y, x+y)=\varphi(x, x)+2\varphi(x, y)+\varphi(y, y)$$

o

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{2}[\psi(x+y)-\psi(x)-\psi(y)],$$

es decir, *toda función cuadrática aparece de una función simétrico bilineal y sólo una, que se llama polar de la función cuadrática correspondiente.*

Sea $a_1, \ldots, a_n$ una base del espacio y sea $\psi(x)=\varphi(x, x)$, donde $\varphi(x, y)$ es una función bilineal simétrica. Entonces para $x=\xi_1 a_1+\ldots$ $\ldots+\xi_n a_n$ tenemos

$$\psi(x)=\varphi(x, x)=\sum\varphi(a_i, a_j)\xi_i\xi_j,$$

es decir, *el valor de una función cuadrática se expresa mediante una forma cuadrática en las coordenadas de un vector variable, cuya matriz coincide con la matriz de la correspondiente forma bilineal polar.*

Razonando análogamente, obtenemos para los valores de una función bilineal *hermitiana* $\varphi(x, y)$ en lugar de la fórmula (5) la fórmula

$$\varphi(x, y)=\sum\varphi(a_i, a_j)\xi_i\bar{\eta}_j,$$

es decir, una forma bilineal hermitiana. Al pasar a una base nueva la matriz de una función hermitiana varía según la ley

$$A_1=T A\bar{T}'.$$

Una función hermitiana $\varphi(x, y)$ se llama simétrica si

$$\varphi(x, y)=\overline{\varphi(y, x)}.$$

Los valores de las funciones hermitianas simétricas se expresan mediante formas bilineales hermitianas simétricas.

Las funciones de un vector variable que surgen al identificar los vectores variables en las funciones bilineales hermitianas *simétricas* se llaman *funciones cuadráticas hermitianas.* La relación entre las funciones cuadráticas hermitianas y las coorrespondientes funciones bilineales simétricas hermitianas viene dada por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned}
&\psi(x+iy)=\varphi(x+iy, x+iy)=\\
&=\varphi(x, x)+i[\overline{\varphi(x, y)}-\varphi(x, y)]+\varphi(y, y),\\
&\psi(x+y)=\varphi(x, x)+\overline{\varphi(x, y)}+\varphi(x, y)+\varphi(y, y),\\
&2\varphi(x, y)=\psi(x+y)+i\psi(x+iy)-\\
&\qquad\qquad -(1+i)[\psi(x)+\psi(y)].
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Calculando el valor de una función $\psi(x)$ cuadrática hermitiana para el vector $x = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$, donde $a_1, \ldots, a_n$ es una base del espacio, obtenemos

$$\psi(x) = \sum \varphi(a_i, a_j) \xi_i \overline{\xi_j},$$

es decir, *el valor de una función cuadrática hermitiana se expresa mediante una forma cuadrática hermitiana en las coordenadas del vector variable, cuya matriz coincide con la matriz de la correspondiente función bilineal simétrica hermitiana calculada mediante la fórmula* (9).

Indiquemos también que las formas cuadráticas de signo constante, consideradas en el p. 22.4, corresponden a aquellas funciones cuadráticas en el caso de un espacio real y a aquellas funciones cuadráticas hermitianas en el caso de un espacio complejo cuyos valores no cambian de signo.

24.2. Espacios de métrica bilineal. Como hemos señalado en el p. 17.1, un espacio lineal complejo o real se llama unitario si en él está definida una función de dos vectores variables, llamándose producto escalar de estos vectores los valores de la misma. Los axiomas que hemos indicado en esa ocasión significan simplemente que el producto escalar es una función bilineal hermitiana definida positiva. Por esto, el estudio de las propiedades de los espacios unitarios no es otra cosa que el estudio, desde un punto de vista especial, de las propiedades de las funciones bilineales definidas positivas.

Por analogía con esto diremos que un espacio lineal $\mathfrak{L}$ es *bilineal métrico*, si en él está definida una función bilineal, cuyos valores se llamarán productos escalares de los vectores y se indicarán por (a, b). En el caso en el que el producto escalar sea una función bilineal hermitiana simétrica diremos que el espacio está provisto de una métrica bilineal hermitiana.

Si la matriz del producto escalar es regular, el espacio se llama *no degenerado*. En el caso contrario se dice que el espacio es *degenerado*.

La matriz

$$G = \begin{bmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) & \ldots & (a_2, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m, a_1) & \ldots & (a_m, a_m) \end{bmatrix},$$

formada por los productos escalares de los vectores $a_1, \ldots, a_m$ de un espacio bilineal métrico $\mathfrak{L}$, se llama *matriz de Gram* del sistema $a_1, \ldots, a_m$. La matriz de Gram correspondiente a unos vectores $a_1, \ldots, a_n$ que constituyen una *base* del espacio $\mathfrak{L}$, se llama simplemente matriz de la función bilineal principal $\varphi(x, y) = (x, y)$

calculada en esta base. De aquí se deduce que las matrices de Gram correspondientes a diferentes bases del espacio son congruentes y, por consiguiente, son del mismo rango.

En la teoría de los espacios unitarios desempeña un papel importante el concepto de ortogonalidad de vectores. Este concepto se extiende directamente al caso de espacios bilineales métricos.

Sea $\mathfrak{L}$ un espacio bilineal métrico corriente o hermitiano. Se dice que un vector a de $\mathfrak{L}$ es ortogonal a un vector b, si $(a, b)=0$. Si a es ortogonal a b, ello no significa todavía que b sea ortogonal a a, ya que en el caso general $(a, b) \neq (b, a)$. Por esto a veces se dice, para una mayor claridad que *a es ortogonal a b a la izquierda y que b es ortogonal a la derecha a a.* De las leyes distributivas (1) y (2) se deduce que siendo a ortogonal a varios vectores $a_1, \ldots, a_m$, el vector a será ortogonal a cualquier combinación lineal de los mismos. De aquí resulta, a su vez, que *el conjunto de los vectores de un espacio $\mathfrak{L}$ ortogonales todos ellos a la derecha a los vectores de un sistema $\mathfrak{M}$ constituye un subespacio lineal del espacio $\mathfrak{L}$.* Indicaremos este subespacio por $\mathfrak{M}^{\perp}$. El conjunto de los vectores de $\mathfrak{L}$ ortogonales a la izquierda a $\mathfrak{M}$ también es un subespacio lineal que indicaremos $^{\perp}\mathfrak{M}$.

Diremos que un vector x es *isótropo a la izquierda* en el espacio $\mathfrak{L}$, si es ortogonal a la izquierda a todos los vectores de $\mathfrak{L}$. El subespacio $^{\perp}\mathfrak{L}$, formado por todos los vectores isótropos a la izquierda de $\mathfrak{L}$, se llama *subespacio isótropo a la izquierda* de $\mathfrak{L}$. Análogamente se definen los *vectores isótropos a la derecha y el subespacio isótropo a la derecha* $\mathfrak{L}^{\perp}$.

TEOREMA 1. *Las dimensiones de los subespacios isótropos a la izquierda y a la derecha son iguales y coinciden con el defecto de la matriz de la forma métrica (x, y) calculada en una base cualquiera. Por consiguiente, la diferencia entre la dimensión del espacio y la dimensión de los subespacios isótropos el igual al rango de la forma bilineal métrica; un espacio bilineal métrico es no degenerado cuando, y sólo cuando, no contiene vectores isótropos no nulos.*

Tomemos para la demostración una base de $\mathfrak{L}$. Entonces los vectores x isótropos a la izquierda deben verificar para cualquier y de $\mathfrak{L}$ la relación

$$(x, y)=[x] A [y]'=0, \tag{10}$$

donde A es la matriz de Gram de la base tomada. Pero de (10) se deduce que

$$[x] A=O$$

(aquí O es la fila nula), es decir los vectores isótropos a la izquierda forman el núcleo de la aplicación lineal de matriz A (p. 10.1) y la dimensión del núcleo de una aplicación lineal es igual al defecto de la matriz de la aplicación. Análogamente comprobamos que la dimensión del subespacio isótropo a la derecha es igual a la dimensión del núcleo de la aplicación lineal de matriz transpuesta A' y, por consiguiente, coincide con el defecto de la matriz A que es lo que se quería demostrar.

Todo subespacio lineal $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{L}$ puede ser considerado por sí sólo como un espacio bilineal métrico hermitiano o corriente, respectivamente, respecto al mismo producto escalar que opera en $\mathfrak{L}$. En el caso general, si $\mathfrak{L}$ es no degenerado, ello no implica todavía que sus subespacios sean no degenerados y recíprocamente, si un subespacio $\mathfrak{A}$ es no degenerado, esto no implica que todo el espacio $\mathfrak{L}$ sea no degenerado.

TEOREMA 2. *Si $\mathfrak{A}$ es un subespacio no degenerado del espacio $\mathfrak{L}$, para $\mathfrak{L}$ tienen lugar las descomposiciones directas*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{A}^{\perp} = {}^{\perp}\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{A}. \tag{11}$$

Recíprocamente, si al menos una de las descomposiciones (11) *es válida, el subespacio $\mathfrak{A}$ es no degenerado.*

Efectivamente, la intersección $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^{\perp}$ es el subespacio isótropo a la derecha de $\mathfrak{A}$. Como $\mathfrak{A}$ es no degenerado, tenemos $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^{\perp} = o$ y, por consiguiente, la suma $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^{\perp}$ es directa.

Sea ahora c un vector cualquiera de $\mathfrak{L}$. Tomemos

$$(a_j, c) = \gamma_j \quad (j = 1, \ldots, m),$$

donde $a_1, \ldots, a_m$ es una base de $\mathfrak{A}$. El sistema auxiliar de ecuaciones

$$(a_j, a_1)\xi_1 + (a_j, a_2)\xi_2 + \ldots + (a_j, a_m)\xi_m = \gamma_j$$
$$(j = 1, \ldots, m)$$

puede ser resuelto respecto a $\xi_1, \ldots, \xi_m$, ya que su determinante es el determinante de la matriz de Gram del sistema $a_1, \ldots, a_m$ y es diferente de cero debido a que $\mathfrak{A}$ es no degenerado. El vector $a = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_m a_m$ pertenece a $\mathfrak{A}$ y, además,

$$(a_j, c - a) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m),$$

es decir, $c - a \in \mathfrak{A}^{\perp}$. Puesto que para todo c es válida la descomposición

$$c = a + (c - a) \quad (a \in \mathfrak{A} \text{ y } c - a \in \mathfrak{A}^{\perp}),$$

resulta que $\mathfrak{L}$ es la suma de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}^{\perp}$ que es lo que se quería demostrar.

Unos espacios bilineales métricos sobre un mismo cuerpo conmutativo de coeficientes se llaman *isomorfos*, cuando entre sus elementos se puede establecer una correspondencia biyectiva que transforma una suma de vectores en la suma correspondiente, el producto de un número por un vector en el producto del mismo número por el vector correspondiente y el producto escalar de un par de vectores en el producto escalar del par de vectores correspondientes.

De la última condición se ve, en particular, que en una correspondencia isomorfa las matrices de Gram de los sistemas correspondientes de vectores coinciden. Viceversa, si en dos espacios bilineales métricos sobre un mismo cuerpo conmutativo existen bases con las mismas matrices, los espacios son isomorfos.

Para los espacios lineales corrientes y unitarios hemos demostrado antes que existe un espacio único, salvo un isomorfismo, de dimensión n. Para los espacios bilineales métricos la situación es más compleja.

Demostremos, ante todo, la siguiente afirmación casi evidente:

TEOREMA 3. *Unos espacios bilineales métricos sobre un mismo cuerpo conmutativo son isomorfos cuando, y sólo cuando, las matrices de Gram unas bases arbitrarias, escogidas en estos espacios, son congruentes.*

La necesidad es clara, ya que las matrices de Gram de todas las bases de un espacio dado son congruentes y las matrices de Gram de las bases correspondientes de espacios isomorfos coinciden. Por otro lado, si A y B son las matrices de Gram de unas bases de unos espacios $\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{L}_1$ y A y B son congruentes, en $\mathfrak{L}$ existe también una base de matriz B, de acuerdo con los resultados del punto anterior.

El teorema 3 significa que el problema de la clasificación de espacios bilineales métricos no isomorfos es idéntico al problema de la clasificación, salvo una congruencia, de las formas bilineales; este problema ha sido ya examinado en el p. 23.3. Nos limitaremos aquí a enunciar, en términos de la teoría de espacios bilineales métricos, algunos corolarios de los resultados del punto mencionado.

Los espacios bilineales métricos reales no degenerados de métrica simétrica $(x, y)=(y, x)$ se llaman *seudoeuclídeos*.

La matriz de Gram A de una base arbitraria de un espacio seudoeuclídeo es simétrica real. Según el teorema 1 del p. 21.3, la matriz A es congruente a una matriz diagonal con los números $+1$ o -1 en la diagonal principal. En otras palabras, en todo espacio seudoeuclídeo de dimensión n existe una base en la que el producto escalar de los vectores de coordenadas $\xi_1, \ldots, \xi_n$ y $\eta_1, \ldots, \eta_n$ se expresa mediante la forma

$$(x, y)=\xi_1\eta_1+\ldots+\xi_s\eta_s-\xi_{s+1}\eta_{s+1}-\ldots-\xi_n\eta_n.$$

El número $\sigma=s-(n-s)$ se llama *signatura* del espacio.

Por consiguiente, *los espacios seudoeuclídeos se determinan, salvo un isomorfismo, por su dimensión y su signatura*. Además, para cualquier $n>0$ y cualquier s $(0\leqslant s\leqslant n)$ existe un espacio seudoeuclídeo de dimensión n y de signatura $s-(n-s)$.

Los espacios bilineales métricos no degenerados de métrica antisimétrica $(x, y)=-(y, x)$ se llaman *simpliciales*.

La matriz de Gram de una base de un espacio simplicial es antisimétrica y por esto, debido al p. 15.5, es congruente a una matriz celular diagonal con células de tipo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ a lo largo de la diagonal principal. Por consiguiente, *la dimensión de un espacio simplicial es siempre un número par y para todo n existe, salvo un isomorfismo, un espacio simplicial único de dimensión 2n. En todo espacio simplicial de dimensión 2n existe una base en la que el producto escalar es de la forma*

$$(x, y) = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \ldots + \xi_{2n-1}\eta_{2n} - \xi_{2n}\eta_{2n-1},$$

donde $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ *y* $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ *son las coordenadas de los vectores x e y.*

Un espacio bilineal métrico complejo no degenerado de métrica simétrica se llama *euclídeo complejo*. Puesto que toda forma bilineal simétrica regular se puede reducir sobre el cuerpo de los números complejos a la forma de matriz unidad, para toda dimensión n existe, salvo un isomorfismo, un espacio euclídeo complejo único. *En todo espacio euclídeo de dimensión n existe una base en la que el producto escalar es de la forma*

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n.$$

Finalmente, los espacios complejos no degenerados de métrica simétrica hermitiana $(x, y) = \overline{(y, x)}$ se llaman *seudounitarios*. Del teorema 2 del p. 21.3 se deduce que *en todo espacio seudounitario de dimensión n existe una base en la que el producto escalar es de la forma*

$$(x, y) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_s\bar{\eta}_s - \xi_{s+1}\bar{\eta}_{s+1} - \ldots - \xi_n\bar{\eta}_n.$$

El número $\sigma = s - (n - s)$ se llama *signatura* del espacio seudounitario. Con la dimensión n determina, obviamente, el espacio seudounitario, salvo un isomorfismo.

En cuanto a la clasificación de espacios bilineales métricos complejos no degenerados cualesquiera, ésta se obtiene en base al teorema 4 del p. 23.3. Para caracterizar el espacio es necesario en este caso escribir el conjunto de divisores elementales sujeto a las condiciones indicadas al final del p. 23.3.

24.3. Funciones bilineales en espacios bilineales métricos. En el punto anterior hemos logrado geometrizar la teoría de una función bilineal, definida sobre un espacio lineal $\mathfrak{L}$, gracias a que hemos considerado los valores de la función bilineal como los productos escalares de los vectores, definiendo así una métrica especial en $\mathfrak{L}$. Análogamente, para geometrizar la teoría de pares de funciones bilineales, definidas sobre un espacio lineal $\mathfrak{L}$, una de ellas se toma como la función métrica y la otra se considera como una función bilineal definida sobre un espacio bilineal métrico. Está claro que el par $\varphi(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ y el par $\varphi(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ serán ahora semejantes respecto a los automorfismos de un espacio *lineal* $\mathfrak{L}$ cuando, y sólo cuando, la función $\varphi_1(x, y)$ puede ser reducida a la función $\varphi_2(x, y)$ mediante un automorfismo del espacio *bilineal métrico* $\mathfrak{L}$ de función métrica principal $\varphi(x, y)$.

Es más, en los espacios bilineales métricos no degenerados es posible relacionar biyectivamente con toda función bilineal una aplicación lineal del espacio. Puesto que esta relación no depende de cómo se escoja la base, resulta así que el estudio de las funciones bilineales equivale al estudio de las aplicaciones lineales de espacios bilineales métricos. Desde el punto de vista de la teoría de espacios lineales, esto significa que el estudio de pares de funciones bilineales, de las cuales una es no degenerada, equivale al estudio de pares formados por una función bilineal no degenerada y por una aplicación lineal.

Sea, pues, $\mathfrak{L}$ un espacio bilineal métrico no degenerado hermitiano o corriente.

TEOREMA 4. *Toda función lineal $f(x)$ definida sobre $\mathfrak{L}$ puede ser representada unívocamente en la forma (x, a).*

Efectivamente, la condición $f(x) = (x, a)$ equivale al sistema de relaciones

$$(a_j, a) = f(a_j) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ es una base de $\mathfrak{L}$. Tomando $a = \xi_1 a_1 + \ldots + \xi_n a_n$ y considerando (12) como un sistema de ecuaciones respecto a $\xi_1, \ldots, \xi_n$, vemos que éste es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas de determinante diferente de cero, ya que el último es el determinante de la matriz de la forma principal en la base escogida. Por consiguiente, las ecuaciones (12) tienen una solución única.

Igual que esto ha sido hecho en el p. 18.2 para los espacios unitarios, el teorema 4 puede ser empleado para introducir en $\mathfrak{L}$ el concepto de la aplicación conjugada.

Consideremos una aplicación lineal cualquiera $\mathcal{A}$ de este espacio. La expresión $(x\mathcal{A}, a)$ representa para todo vector dado a una función lineal de x. Según el teorema 4, en el espacio $\mathfrak{L}$ existe un vector determinado b tal que

$$(x\mathcal{A}, a) = (x, b) \tag{13}$$

para todo x. Indiquemos por $\mathcal{A}^*$ la aplicación que transforma a en b. Entonces $b = a\mathcal{A}^*$ y la igualdad (13) puede ser representada en la forma

$$(x\mathcal{A}, a) = (x, a\mathcal{A}^*). \tag{14}$$

La aplicación $\mathcal{A}^*$ se llama *conjugada a la derecha* de $\mathcal{A}$. La propiedad (14) caracteriza plenamente la aplicación conjugada a la derecha. Efectivamente, si para una aplicación $\mathcal{B}$ tenemos $(x\mathcal{A}, a) = (x, a\mathcal{B})$ cualesquiera que sean a y x, comparando esta igualdad con (14) encontramos la relación $(x, a\mathcal{A}^* - a\mathcal{B}) = 0$ de la cual resulta que $a\mathcal{A}^* - a\mathcal{B}$ es un vector isótropo del espacio $\mathfrak{L}$. Puesto que $\mathfrak{L}$ no contiene vectores isótropos no nulos, tenemos $a\mathcal{A}^* - a\mathcal{B} = o$ y $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}$.

Repitiendo los razonamientos del p. 18.2 es fácil demostrar que $\mathcal{A}^*$ es lineal y que son válidas las fórmulas corrientes

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \tag{15}$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*, \tag{16}$$

$$(\alpha\mathcal{A}^*) = \alpha\mathcal{A}^* \tag{17}$$

para los espacios bilineales métricos corrientes y las fórmulas (15), (16) y

$$(\alpha\mathcal{A})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^* \tag{18}$$

para los espacios bilineales métricos hermitianos.

Resolvamos ahora el problema sobre la relación que existe entre las matrices de la aplicación $\mathcal{A}$ y de su conjugada a la derecha $\mathcal{A}^*$. Tomemos para ello una base en $\mathfrak{L}$ e indiquemos las matrices de las aplicaciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ por A y B, respectivamente. Sea $\mathfrak{L}$ un espacio corriente. Basándonos en las fórmulas (6) del p. 24.1, obtenemos

$$(x\mathcal{A}, a) = [x\mathcal{A}]\, G\, [a]' = [x]\, AG\, [a]',$$
$$(x, a\mathcal{A}^*) = [x]\, G\, [a\mathcal{A}^*]' = [x]\, GB'\, [a]',$$

donde G es la matriz de Gram del espacio $\mathfrak{L}$ en la base escogida. De aquí

$$AG = GB' \quad \text{y} \quad B' = G^{-1} AG. \tag{19}$$

En el caso de espacios bilineales métricos hermitianos las fórmulas (19) se sustituyen por las relaciones

$$AG = G\overline{B}' \quad \text{y} \quad \overline{B}' = G^{-1} AG. \tag{20}$$

Hemos visto que en los espacios unitarios existen sistemas ortonormales de coordenadas. En estos sistemas la matriz de Gram se convierte en la matriz unidad y las relaciones (20) nos ofrecen el resultado conocido (p. 18.2): $\overline{B}' = A$.

Hemos definido hasta el momento sólo la aplicación conjugada a la derecha. Es obvio que de la misma forma se puede introducir también la aplicación conjugada a la izquierda. Es decir, sea $\mathcal{A}$ una aplicación lineal de $\mathfrak{L}$. Repitiendo los razonamientos realizados anteriormente, veremos que en $\mathfrak{L}$ existe una aplicación única $\mathcal{C}$ que cumple la igualdad

$$(x, a\mathcal{A}) = (x\mathcal{C}, a)$$

cualesquiera que sean x y a.

La aplicación $\mathcal{C}$ es lineal. Convedremos en llamarla *conjugada a la izquierda* de $\mathcal{A}$ y en indicarla por ${}^*\mathcal{A}$.

Si la métrica de $\mathfrak{L}$ es simétrica o antisimétrica, las aplicaciones conjugadas a la derecha y a la izquierda de cualquier aplicación lineal coinciden, ya que

$$(x\mathcal{A}^*, y) = \pm (y, x\mathcal{A}^*) = \pm (y\mathcal{A}, x) = (x, y\mathcal{A}) = (x^*\mathcal{A}, y).$$

Pasando a la consideración de las funciones bilineales sobre $\mathfrak{L}$, observemos ante todo que el valor de la expresión $(x\mathcal{A}, y)$, donde $\mathcal{A}$ es una aplicación lineal, representa una función bilineal y, respectivamente, una función bilineal hermitiana en $\mathfrak{L}$.

Si las aplicaciones lineales $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son diferentes, las funciones bilineales correspondientes $(x\mathcal{A}, y)$ y $(x\mathcal{B}, y)$ también son diferentes.

En efecto, lo contrario significaría que $(x\mathcal{A}, y) = (x\mathcal{B}, y)$ para todos los x e y de $\mathfrak{L}$. De aquí resultaría $(x\mathcal{A} - x\mathcal{B}, y) = 0$ para todos los valores de y, es decir, $x\mathcal{A} - x\mathcal{B}$ sería un vector isótropo a la izquierda. Puesto que $\mathfrak{L}$ no contiene vectores isótropos no nulos, tendríamos $x\mathcal{A} = x\mathcal{B}$, es decir, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Probemos ahora que *toda función bilineal $f(x, y)$ definida sobre $\mathfrak{L}$ puede ser representada en la forma $(x\mathcal{A}, y)$, donde $\mathcal{A}$ es una aplicación lineal del espacio $\mathfrak{L}$*. En esta proposición debe comprenderse por $f(x, y)$ una función corriente, si $\mathfrak{L}$ es un espacio bilineal métrico corriente, y una función hermitiana, si $\mathfrak{L}$ es un espacio bilineal métrico hermitiano.

Efectivamente, para todo valor dado de y, $f(x, y)$ es una función lineal de x. En virtud del teorema 4, esto significa que para todo y existe un vector z, determinado unívocamente, tal que la relación $f(x, y) = (x, z)$ es válida para cualesquiera valores de x. Indiquemos por $\mathcal{B}$ la aplicación que transforma y en z; entonces

$$f(x, y) = (x, y\mathcal{B}). \tag{21}$$

En el caso de un espacio bilineal métrico hermitiano tenemos

$$f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} f(x, y_1) + \bar{\beta} f(x, y_2) = \bar{\alpha}(x, y_1\mathcal{B}) + \bar{\beta}(x, y_2\mathcal{B}) = \\ = (x, \alpha(y_1\mathcal{B}) + \beta(y_2\mathcal{B})).$$

Por otro lado, debido a (21),

$$f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = (x, (\alpha y_1 + \beta y_2)\mathcal{B}).$$

De aquí tenemos

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)\mathcal{B} = \alpha(y_1\mathcal{B}) + \beta(y_2\mathcal{B}),$$

es decir, $\mathcal{B}$ es una aplicación lineal. Lo mismo tiene lugar en el caso de los espacios bilineales métricos corrientes. Indicando por $\mathcal{A}$ la aplicación conjugada a la izquierda de $\mathcal{B}$, podemos representar (21) en la forma $f(x, y) = (x\mathcal{A}, y)$. Hemos obtenido, pues, el teorema siguiente:

TEOREMA 5. *Si $\mathfrak{L}$ es un espacio bilineal métrico no degenerado corriente o hermitiano, la expresión $(x\mathcal{A}, y)$, donde $\mathcal{A}$ es una aplicación* *lineal del espacio $\mathfrak{L}$, representa una función bilineal corriente o hermitiana, respectivamente, sobre $\mathfrak{L}$. Viceversa, para toda función bilineal $f(x, y)$ corriente o, respectivamente, hermitiana definida sobre $\mathfrak{L}$ existe una aplicación lineal $\mathcal{A}$ de este espacio, determinada univocamente, tal que $f(x, y)=(x\mathcal{A}, y)$ para cualesquiera x e y de $\mathfrak{L}$.*

El teorema 5 establece una correspondencia biyectiva entre las funciones bilineales y las aplicaciones lineales de los espacios bilineales métricos no degenerados que permite reducir el estudio de las funciones bilineales al estudio de las aplicaciones lineales de estos espacios. Desde el punto de vista de la teoría de pares, el teorema 5 significa que el estudio de los pares de funciones bilineales, al menos una de las cuales es regular, puede ser reducido al estudio de los pares mixtos compuestos de una función bilineal regular y de una aplicación lineal.

Veamos cómo están relacionadas las matrices de una función bilineal $f(x, y)$ y de su correspondiente aplicación lineal $\mathcal{A}$. Tomemos en $\mathfrak{L}$ una base cualquiera y sean F y A las matrices de la función $f(x, y)$ y de la aplicación $\mathcal{A}$, respectivamente. Tenemos, según la fórmula (6) del p. 24.1,

$$f(x, y)=[x]F[y]' \quad \text{y} \quad (x\mathcal{A}, y)=[x\mathcal{A}]G[y]'=[x]AG[y]',$$

de donde

$$F=AG, \tag{22}$$

donde G es la matriz de Gram del espacio $\mathfrak{L}$ en la base escogida. Es fácil comprobar que esta fórmula tiene lugar también en el caso de los espacios bilineales métricos hermitianos.

Una aplicación lineal $\mathcal{A}$ de un espacio bilineal métrico $\mathfrak{L}$ se llama *simétrica* si

$$(x\mathcal{A}, y)=(x, y\mathcal{A}) \tag{23}$$

cualesquiera que sean x e y de $\mathfrak{L}$. Una aplicación $\mathcal{A}$ se llama *antisimétrica* si

$$(x\mathcal{A}, y)=-(x, y\mathcal{A}). \tag{24}$$

Comparando (23) y (24) con las fórmulas que definen las aplicaciones conjugadas a la derecha y a la izquierda, obtenemos en lugar de (23) y (24) las relaciones equivalentes

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}^*={}^*\mathcal{A}, \tag{25}$$

$$\mathcal{A}=-\mathcal{A}^*=-{}^*\mathcal{A}. \tag{26}$$

Sea $\mathfrak{L}$ un espacio de métrica *simétrica* y sea $\mathcal{A}$ una aplicación lineal *simétrica* del espacio $\mathfrak{L}$. La función bilineal correspondiente a la aplicación $\mathcal{A}$ es de la forma

$$f(x, y)=(x\mathcal{A}, y).$$

Si el espacio $\mathfrak{L}$ es corriente se tiene

$$f(x, y) = (x\mathcal{A}, y) = (y, x\mathcal{A}) = (y\mathcal{A}, x) = f(y, x).$$

Si el espacio $\mathfrak{L}$ es hermitiano, tenemos respectivamente

$$f(x, y) = (x\mathcal{A}, y) = \overline{(y, x\mathcal{A})} = \overline{(y\mathcal{A}, x)} = \overline{f(y, x)}.$$

Por consiguiente, $f(x, y)$ es en ambos casos una función simétrica. Los mismos razonamientos muestran que la simetría de $f(x, y)$ implica la simetría de la correspondiente aplicación lineal $\mathcal{A}$. Análogamente, la antisimetría de la aplicación $\mathcal{A}$ equivale a la antisimetría de la correspondiente función $f(x, y)$.

Si la métrica del espacio $\mathfrak{L}$ es antisimétrica, la relación entre la simetría y la antisimetría de las aplicaciones lineales y de las funciones bilineales es la inversa: a las aplicaciones simétricas les corresponden funciones antisimétricas y a las aplicaciones antisimétricas les corresponden las funciones simétricas. Efectivamente, si $\mathcal{A}$ es una aplicación simétrica de un espacio bilineal métrico corriente $\mathfrak{L}$ provisto de una métrica antisimétrica, tenemos

$$f(x, y) = (x\mathcal{A}, y) = -(y, x\mathcal{A}) = -(y\mathcal{A}, x) = -f(y, x).$$

Análogamente se demuestran las demás afirmaciones. Hemos llegado así al teorema siguiente:

TEOREMA 6. *Si $\mathfrak{L}$ es un espacio no degenerado corriente o hermitiano provisto de una métrica simétrica, a las funciones bilineales simétricas les corresponden aplicaciones lineales simétricas del espacio $\mathfrak{L}$ y a las funciones antisimétricas les corresponden aplicaciones antisimétricas. Si la métrica del espacio $\mathfrak{L}$ es antisimétrica, al contrario, a las funciones antisimétricas les corresponden aplicaciones simétricas y a las funciones simétricas les corresponden aplicaciones antisimétricas.*

Volviendo a la teoría de pares, vemos del teorema 6 que el estudio de los pares de funciones bilineales simétricas o antisimétricas equivale al estudio de las aplicaciones lineales simétricas o antisimétricas en los espacios de métrica simétrica o antisimétrica.

Ejemplos y problemas

1. La matriz de Gram de un espacio métrico bilineal $\mathfrak{L}$ en una base a_1, a_2, a_3 y a_4 es igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Demuéstrese que el subespacio isótropo a la izquierda de $\mathfrak{L}$ tiene la base $a_1 + a_2 - a_3$ y $5a_2 + 6a_3 - 7a_4$ y que el subespacio isótropo a la derecha tiene la base $2a_1 + 3a_2 - a_3$ y $a_1 + a_2 - a_4$.

2. Para que un espacio bilineal métrico se descomponga en una suma directa de subespacios ortogonales a ambos lados es necesario y suficiente que su matriz de Gram se descomponga en una base.

3. Si la matriz de Gram de un espacio bilineal métrico no degenerado $\mathfrak{L}$ es G, la aplicación lineal de matriz $G'G^{-1}$ del espacio $\mathfrak{L}$ es un automorfismo del mismo.

4. Demuéstrese que cualquiera que sea un subespacio no degenerado $\mathfrak{A}$ de un espacio bilineal métrico $\mathfrak{L}$, las dimensiones de $\mathfrak{A}^{\perp}$ y de ${}^{\perp}\mathfrak{A}$ son iguales a la diferencia de las dimensiones de $\mathfrak{L}$ y de $\mathfrak{A}$. Demuéstrese, en particular, que ${}^{\perp}(\mathfrak{A}^{\perp})=({}^{\perp}\mathfrak{A})^{\perp}=\mathfrak{A}$.

5. Todo espacio provisto de una métrica simétrica o antisimétrica es una suma directa de unos subespacios isótropo y no degenerado.

6. Si en un espacio bilineal métrico $\mathfrak{L}$ son equivalentes los conceptos de ortogonalidad a la derecha y a la izquierda, $\mathfrak{L}$ es o bien un espacio de métrica simétrica o bien un espacio de métrica antisimétrica.

7. Las funciones ψ que cumplen la identidad

$$\beta\psi(\alpha x+y)+\alpha\psi(x-\beta y)=(1+\alpha\beta)(\alpha\psi(x)+\beta\psi(y)),$$

y sólo estas funciones, son cuadráticas sobre un espacio lineal.

8. Sea I una matriz cuadrada fija. Una matriz A se llama *I-ortogonal*, si $AIA'=I$, se llama *I-simétrica*, si $AI=IA'$, y se llama *I-antisimétrica*, si $AI=-IA'$. Demuéstrese que si en una base de un espacio bilineal métrico la matriz de Gram coincide con I, en esta base las aplicaciones isométricas tienen matrices I-ortogonales y las aplicaciones simétricas y antisimétricas tienen matrices I-simétricas e I-antisimétricas, respectivamente.

Capítulo VII

Aplicaciones lineales de espacios bilineales métricos

En el capítulo presente será considerada la clasificación de los principales tipos de aplicaciones lineales (simétricas, antisimétricas e isométricas) de espacios provistos de métrica bilineal. La relación que existe entre esta clasificación y la clasificación de los pares de formas bilineales ha sido explicada en el § 24 del cap. VI y se supone que el lector que pase al estudio de este capítulo está familiarizado con los resultados de aquel parágrafo.

En este capítulo, al igual que en el anterior, se supone que todos los espacios que aquí aparecen son espacios sobre un cuerpo conmutativo (pero no sobre un cuerpo cualquiera).

§ 25. Tipos principales de aplicaciones lineales

25.1. Automorfismos. Según el p. 24.2, una aplicación lineal regular $\mathcal{U}$ de un espacio bilineal métrico $\mathfrak{L}$ se llama *automorfismo* del espacio $\mathfrak{L}$, si $\mathcal{U}$ no altera la magnitud del producto escalar, es decir, si

$$(x\mathcal{U},\ y\mathcal{U})=(x,\ y) \tag{1}$$

para todos los x e y de $\mathfrak{L}$. Los automorfismos del espacio $\mathfrak{L}$ también se llaman a veces aplicaciones *isométricas* del mismo. Empleando los conceptos de las aplicaciones conjugadas a la derecha y a la izquierda, podemos representar la relación (1) en la forma

$$(x,\ y)=(x\mathcal{U},\ y\mathcal{U})=(x,\ y\mathcal{U}\mathcal{U}^*)=(x\mathcal{U}^*\mathcal{U},\ y),$$

de donde se tiene

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^*=\mathcal{U}^*\mathcal{U}=\mathcal{E}. \tag{2}$$

Está claro que, recíprocamente, la relación (2) implica la relación (1). Por consiguiente, *para que una aplicación lineal $\mathcal{U}$ de un espacio bilineal métrico no degenerado sea un automorfismo es necesario y* *suficiente que ambas aplicaciones conjugadas de $\mathcal{U}$ coincidan con la inversa de $\mathcal{U}$.*

Tomemos en $\mathfrak{L}$ una base e indiquemos por U la matriz de la aplicación $\mathcal{U}$. Si el espacio $\mathfrak{L}$ es corriente, la relación (1) se convierte en

$$[x]\,UGU'\,[y]' = [x]\,G\,[y]',$$

donde G es la matriz de Gram. De aquí resulta

$$UGU' = G. \tag{3}$$

Si el espacio $\mathfrak{L}$ es hermitiano, de (1) se tiene

$$[x]\,UG\overline{U}'\,[\overline{y}]' = [x]\,G\,[\overline{y}]',$$

es decir,

$$UG\overline{U}' = G. \tag{4}$$

Las igualdades (3) y (4) representan las condiciones que deben cumplir *las matrices de las aplicaciones isométricas* de los espacios bilineales métricos no degenerados corrientes y hermitianos, respectivamente.

Dos aplicaciones lineales $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de un espacio bilineal métrico $\mathfrak{L}$ se llaman *isomorfas*, si existe una aplicación isomorfa $\mathcal{U}$ del espacio $\mathfrak{L}$ sobre sí mismo que transforma $\mathcal{A}_1$ en $\mathcal{A}_2$. Tenemos, de acuerdo con el p. 10.2,

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{U}. \tag{5}$$

La aplicación $\mathcal{U}$ es un automorfismo del espacio $\mathfrak{L}$ y, por ello, la relación (5) significa que *el isomorfismo de las aplicaciones lineales de espacios bilineales métricos equivale a la semejanza de las mismas respecto a las aplicaciones isométricas.* De aquí se deduce, en virtud de los resultados del p. 15.3, que las aplicaciones lineales isomorfas tienen factores invariantes iguales. En el caso general, este criterio no es suficiente para el isomorfismo de unas aplicaciones. Sin embargo, la situación es diferente, si se consideran aplicaciones simétricas, antisimétricas o isométricas.

TEOREMA 1. *Sea $\mathfrak{L}$ un espacio no degenerado corriente sobre el cuerpo de todos los números complejos provisto de una métrica simétrica o antisimétrica. Entonces para el isomorfismo de unas aplicaciones simétricas, antisimétricas o isométricas del espacio $\mathfrak{L}$ es necesario y suficiente que los factores invariantes de estas aplicaciones coincidan.*

La necesidad ha sido demostrada anteriormente y, por esto, consideraremos sólo la suficiencia. Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ las aplicaciones lineales dadas. Por hipótesis, los factores invariantes de $\mathcal{A}_1$ y de $\mathcal{A}_2$ coinciden y, por consiguiente,

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{T}, \tag{6}$$

donde $\mathcal{T}$ es una aplicación lineal regular del espacio $\mathfrak{L}$. Pasando en ambos miembros a las aplicaciones conjugadas, obtenemos[1]

$$\mathcal{A}_2^* = \mathcal{T}^* \mathcal{A}_1^* \mathcal{T}^{*-1}. \tag{7}$$

Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son simétricas o antisimétricas, se tiene $\mathcal{A}_1^* = \pm \mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2^* = \pm \mathcal{A}_2$ y (7) se convierte en

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{T}^* \mathcal{A}_1 \mathcal{T}^{*-1} \tag{8}$$

En cambio, si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son isométricas, tenemos $\mathcal{A}_1^* = \mathcal{A}_1^{-1}$ y $\mathcal{A}_2^* = \mathcal{A}_2^{-1}$. Introduciendo estos valores en (7) y elevando el resultado a la potencia -1, obtenemos de nuevo (8). Debido a (6) y (8) tenemos $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{T} = \mathcal{T}^*\mathcal{A}_1\mathcal{T}^{*-1}$, de donde

$$\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{T}\mathcal{T}^* \cdot \mathcal{A}_1. \tag{9}$$

De (9) se desprende directamente que

$$\mathcal{A}_1 \cdot (\mathcal{T}\mathcal{T}^*)^k = (\mathcal{T}\mathcal{T}^*)^k \cdot \mathcal{A}_1 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

y, en general,

$$\mathcal{A}_1 \cdot f(\mathcal{T}\mathcal{T}^*) = f(\mathcal{T}\mathcal{T}^*) \cdot \mathcal{A}_1,$$

donde $f(\lambda)$ es un polinomio arbitrario (compárese con el p. 23.2). Según el teorema sobre la extracción de la raíz cuadrada (p. 16.3), el polinomio $f(\lambda)$ se puede escoger de modo que

$$f(\mathcal{T}\mathcal{T}^*) \cdot f(\mathcal{T}\mathcal{T}^*) = \mathcal{T}\mathcal{T}^*.$$

Tomando

$$\mathcal{D} = f(\mathcal{T}\mathcal{T}^*) \text{ y } \mathcal{U} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{T},$$

obtenemos

$$\mathcal{D}^* = [f(\mathcal{T}\mathcal{T}^*)]^* = f(\mathcal{T}\mathcal{T}^*) = \mathcal{D},$$
$$\mathcal{U}^* = \mathcal{T}^*\mathcal{D}^{*-1} = \mathcal{T}^*\mathcal{D}^{-1},$$
$$\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^{-1}f(\mathcal{T}\mathcal{T}^*)^2\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{D}^2\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{E}.$$

Por consiguiente, $\mathcal{U}$ es una aplicación isométrica. Al mismo tiempo de $\mathcal{A}_1\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{A}_1$ se deduce que

$$\mathcal{U}^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{U} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{A}_1\mathcal{D}^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{D}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}_1\mathcal{T} = \mathcal{A}_2$$

que es lo que se quería demostrar.

El teorema 1 muestra que en los espacios euclídeos complejos, así como en los espacios complejos simpliciales, para clasificar, salvo un isomorfismo, las aplicaciones simétricas, antisimétricas e isométricas es suficiente saber qué divisores elementales pueden contener estas aplicaciones.

[1] Como la métrica de $\mathfrak{L}$ es simétrica o antisimétrica, las aplicaciones conjugadas a la derecha y a la izquierda coinciden.

TEOREMA 2. *Si una aplicación isométrica $\mathfrak{U}$ de un espacio bilineal métrico no degenerado corriente $\mathfrak{L}$ contiene k veces el divisor elemental $(\lambda-\alpha)^m$, la aplicación $\mathfrak{U}$ contiene también k veces el divisor elemental $(\lambda-\alpha^{-1})^m$.*

La afirmación del teorema no tiene contenido para $\alpha=\pm 1$. Por esto aceptaremos que $\alpha\neq\pm 1$. Tomemos en $\mathfrak{L}$ una base e indiquemos por U la matriz de la aplicación $\mathfrak{U}$. En virtud de (3), tenemos $UGU'=G$, donde G es la matriz de Gram. De aquí resulta

$$U'=G^{-1}U^{-1}G. \tag{10}$$

Los divisores elementales de la matriz U' coinciden con los divisores elementales de la matriz U. La fórmula (10) muestra que, a su vez, los divisores elementales de la matriz U' coinciden con los divisores elementales de la matriz U^{-1} (compárese con el p. 15.3). Es decir, los divisores elementales de la matriz U deben ser los mismos que los de la matriz U^{-1}. Pero, según el teorema sobre los divisores elementales de las funciones (p. 16.4), los divisores elementales de la matriz U^{-1} se obtienen de los divisores elementales $(\lambda-\alpha)^m$ de la matriz U sustituyendo α por α^{-1}. Por consiguiente, si en todo divisor elemental de tipo $(\lambda-\alpha)^m$ de la matriz U sustituimos α por α^{-1}, obtendremos de nuevo un divisor elemental de la matriz U que es lo que se quería demostrar.

En el caso de espacios bilineales métricos hermitianos la relación (10) se convierte en

$$\overline{U}'=G^{-1}U^{-1}G.$$

Con arreglo a esto también cambia la afirmación sobre los divisores elementales: *si $(\lambda-\alpha)^m$ es un divisor elemental de multiplicidad k de una aplicación isométrica de un espacio bilineal métrico no degenerado hermitiano, la expresión $(\lambda-\bar{\alpha}^{-1})^m$ también será un divisor elemental de multiplicidad k de esta aplicación.* La demostración es la misma.

TEOREMA 3. *Sean a y b dos vectores radicales de una aplicación isométrica $\mathfrak{U}$ de un espacio bilineal métrico corriente $\mathfrak{L}$. Si los valores propios α y β, a los que corresponden estos vectores, no son recíprocamente inversos, es decir, si $\alpha\beta\neq 1$, los vectores a y b son ortogonales. Análogamente, si $\mathfrak{L}$ es un espacio bilineal métrico hermitiano y $\alpha\bar{\beta}\neq 1$, los vectores a y b son también ortogonales.*

La demostración es la misma tanto para los espacios corrientes como para los hermitianos. Por esto consideraremos sólo los espacios corrientes. Por hipótesis,

$$a(\alpha\mathscr{E}-\mathfrak{U})^s=o \text{ y } b(\beta\mathscr{E}-\mathfrak{U})^t=o \quad (\alpha\beta\neq 1), \tag{11}$$

donde s y t son unos números enteros no negativos. Debemos demostrar que de las relaciones (11) se desprende la igualdad $(a, b)=0$. Realizaremos la demostración por inducción según los valores de la suma $s+t$. Si $s+t=0$, se tiene $s=t=0$ y de las relaciones (11) resulta $a=b=o$, de donde $(a, b)=0$.

Supongamos ahora que tenemos dado un valor de la suma $s+t$ y que para todos los valores menores que esta suma la afirmación ha sido ya demostrada. Tomemos

$$a(\alpha\mathcal{E}-\mathcal{U})=a_1 \text{ y } b(\beta\mathcal{E}-\mathcal{U})=b_1.$$

Puesto que

$$a_1(\alpha\mathcal{E}-\mathcal{U})^{s-1}=a(\alpha\mathcal{E}-\mathcal{U})^s=o,$$
$$b_1(\beta\mathcal{E}-\mathcal{U})^{t-1}=b(\beta\mathcal{E}-\mathcal{U})^t=o,$$

tenemos por inducción

$$(a, b_1)=(a_1, b)=(a_1, b_1)=0.$$

Pero la igualdad $(a, b_1)=0$ implica que $(a, b(\beta\mathcal{E}-\mathcal{U}))=0$, es decir,

$$(a, b\mathcal{U})=\beta(a, b). \tag{12}$$

Análogamente, de la igualdad $(a_1, b)=0$ se deduce:

$$(a\mathcal{U}, b)=\alpha(a, b). \tag{13}$$

Finalmente, de la igualdad $(a_1, b_1)=0$ resulta:

$$0=(a(\alpha\mathcal{E}-\mathcal{U}),\ b(\beta\mathcal{E}-\mathcal{U}))=$$
$$=\alpha\beta(a, b)-\alpha(a, b\mathcal{U})-\beta(a\mathcal{U}, b)+(a\mathcal{U}, b\mathcal{U}),$$

de donde, debido a (12) y (13), obtenemos

$$0=-\alpha\beta(a, b)+(a, b). \tag{14}$$

Puesto que $\alpha\beta\neq 1$, la igualdad (14) ofrece la relación requerida $(a, b)=0$.

TEOREMA 4 *Si $\mathcal{A}$ es una aplicación isométrica, simétrica o antisimétrica del espacio $\mathfrak{L}$ y el subespacio $\mathfrak{A}$ es invariante respecto a $\mathcal{A}$, los subespacios ortogonales a $\mathfrak{A}$ a la derecha y a la izquierda son también invariantes respecto a $\mathcal{A}$.*

Sea $\mathcal{A}$ una aplicación isométrica del espacio $\mathfrak{L}$. El subespacio ortogonal a la derecha $\mathfrak{A}^{\perp}$ está formado por los vectores b que cumplen la relación $(a, b)=0$ cualquiera que sea a de $\mathfrak{A}$. Puesto que $\mathcal{A}$ es una aplicación regular, el subespacio $\mathfrak{A}$ es invariante también respecto a $\mathcal{A}^{-1}$. Por consiguiente, el vector $a\mathcal{A}^{-1}$ pertenece a $\mathfrak{A}$, de donde tenemos $(a\mathcal{A}^{-1}, b)=0$. Pero

$$(a\mathcal{A}^{-1}, b)=(a\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}, b\mathcal{A})=(a, b\mathcal{A});$$

es decir, $(a, b\mathcal{A})=0$ para todo a de $\mathfrak{A}$. Por consiguiente, el vector $b\mathcal{A}$ figura en $\mathfrak{A}^{\perp}$ y el subespacio $\mathfrak{A}^{\perp}$ es invariante respecto a $\mathcal{A}$. También sencillas son las demostraciones de las demás afirmaciones.

TEOREMA 5. *Supongamos que un espacio bilineal métrico corriente o hermitiano $\mathfrak{L}$ se descompone en una suma directa de sus subespacios*

$\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_s$ ortogonales a ambos lados. Si todos estos subespacios son invariantes respecto a una aplicación lineal $\mathcal{A}$ del espacio $\mathfrak{L}$ y si la aplicación $\mathcal{A}$ es isométrica o, respectivamente, simétrica o antisimétrica sobre cada uno de los subespacios $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_s$, la aplicación $\mathcal{A}$ será del mismo tipo sobre el espacio $\mathfrak{L}$.

Este teorema explica cómo pueden emplearse las descomposiciones directas para el estudio de las propiedades de las aplicaciones lineales de los tipos señalados. Su demostración es evidente y queda a cargo del lector.

25.2. Aplicaciones simétricas y antisimétricas. Recordemos que una aplicación $\mathcal{A}$ de un espacio bilineal métrico corriente o hermitiano se llama *simétrica* si

$$(x\mathcal{A},\ y) = (x,\ y\mathcal{A})$$

para cualesquiera x e y de $\mathfrak{L}$.

TEOREMA 6. *Los vectores radicales a y b correspondientes a diferentes valores propios ρ y σ de una aplicación simétrica $\mathcal{A}$ de un espacio bilineal métrico corriente o hermitiano son ortogonales.*

Efectivamente, tenemos, por hipótesis,

$$a(\rho\mathcal{E} - \mathcal{A})^s = o \quad \text{y} \quad b(\sigma\mathcal{E} - \mathcal{A})^t = o, \tag{15}$$

donde s y t son unos números enteros no negativos. Debemos demostrar que de (15) se desprende la ortogonalidad de los vectores a y b. Realizaremos la demostración por inducción según los valores de la suma $s+t$. Para $s+t=1$ o bien s o bien t es igual a cero y, por consiguiente, o bien $a=o$ o bien $b=o$, de donde $(a,\ b)=0$.

Supongamos ahora que tenemos dado un valor de la suma $s+t$ y que para todos los valores menores que esta suma la afirmación ha sido ya demostrada. Sea

$$a_1 = a(\rho\mathcal{E} - \mathcal{A}) \quad \text{y} \quad b_1 = b(\sigma\mathcal{E} - \mathcal{A}).$$

Tenemos

$$a_1(\rho\mathcal{E} - \mathcal{A})^{s-1} = a(\rho\mathcal{E} - \mathcal{A})^s = o,$$
$$b_1(\sigma\mathcal{E} - \mathcal{A})^{t-1} = b(\sigma\mathcal{E} - \mathcal{A})^t = o.$$

Por esto, de acuerdo con la hipótesis de inducción, resulta

$$(a,\ b_1) = (a_1,\ b) = 0,$$

es decir,

$$\sigma(a,\ b) = (a,\ b\mathcal{A}) \quad \text{y} \quad \rho(a,\ b) = (a\mathcal{A},\ b).$$

Puesto que la aplicación $\mathcal{A}$ es simétrica, los segundos miembros de estas igualdades coinciden y, por consiguiente, $(\sigma-\rho)(a,\ b)=0$, de donde se tiene $(a,\ b)=0$ que es lo que se quería demostrar.

Una aplicación $\mathcal{A}$ de un espacio bilineal métrico corriente que cumple la relación

$$(x\mathcal{A},\ y) = -(x,\ y\mathcal{A})$$

para todos los x e y de $\mathfrak{L}$ se llama, de acuerdo con el p. 24.3, *antisimétrica*.

TEOREMA 7. *Sean a y b unos vectores radicales de una aplicación antisimétrica de un espacio bilineal métrico corriente correspondientes a los valores propios ρ y σ. Si $\rho+\sigma\neq 0$, se tiene $(a, b)=0$.*

La demostración coincide casi textualmente con las demostraciones análogas de los teoremas 3 y 6 y puede ser aquí omitida.

Las aplicaciones isométricas de un espacio bilineal métrico no degenerado cualquiera $\mathfrak{L}$ están estrechamente ligadas a las aplicaciones antisimétricas del mismo. Tiene lugar concretamente el siguiente teorema que, por la forma en la que se enuncia, coincide plenamente con el teorema del p. 20.3 sobre la aplicación de Cayley.

TEOREMA 8. *Sea $\mathfrak{L}$ un espacio bilineal métrico corriente o hermitiano. Si $\mathcal{A}$ es una aplicación antisimétrica del espacio $\mathfrak{L}$ que no tiene valores propios iguales a -1, la aplicación*

$$\mathcal{U}=(\mathcal{E}-\mathcal{A})(\mathcal{E}+\mathcal{A})^{-1} \tag{16}$$

es una aplicación isométrica del espacio $\mathfrak{L}$ que tampoco tiene valores propios iguales a -1 y, además, $\mathcal{A}$ se expresa mediante $\mathcal{U}$ por la fórmula

$$\mathcal{A}=(\mathcal{E}-\mathcal{U})(\mathcal{E}+\mathcal{U})^{-1}. \tag{17}$$

Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ es una aplicación isométrica del espacio $\mathfrak{L}$ que no tiene valores propios iguales a -1, la aplicación $\mathcal{A}$ calculada mediante la fórmula (17) *es antisimétrica y tampoco tiene valores propios iguales a -1 y $\mathcal{U}$ se expresa en términos de $\mathcal{A}$ mediante la fórmula* (16).

Igual que en el caso de espacios unitarios, las fórmulas (16) y (17) llevan el nombre de *aplicaciones de Cayley*. La demostración de las mismas coincide textualmente con la demostración de estas fórmulas realizada en el p. 20.3 para los espacios unitarios. Por esto omitimos aquí la demostración. Observemos que unas fórmulas análogas

$$\mathcal{U}=-(\mathcal{E}-\mathcal{A})(\mathcal{E}+\mathcal{A})^{-1}, \tag{18}$$

$$\mathcal{A}=(\mathcal{E}+\mathcal{U})(\mathcal{E}-\mathcal{U})^{-1} \tag{19}$$

ofrecen una correspondencia entre las aplicaciones antisimétricas del espacio $\mathfrak{L}$ que no tienen valores propios iguales a -1 y las aplicaciones isométricas del espacio $\mathfrak{L}$ que no tienen valores propios iguales a $+1$.

Las aplicaciones de Cayley podrían reducir totalmente el estudio de las aplicaciones isométricas al estudio de las antisimétricas, si no figurasen los valores propios excepcionales ± 1. La existencia de estos valores hace necesario el estudio independiente más detallado de las propiedades de las aplicaciones isométricas.

Para terminar demostremos que tiene lugar el teorema siguiente:

TEOREMA 9. *Si $(\lambda-\alpha)^m$ figura k veces en el sistema de divisores elementales de una aplicación antisimétrica $\mathcal{A}$ de un espacio bilineal métrico no degenerado corriente $\mathfrak{L}$, la expresión $(\lambda+\alpha)^m$ también figura k veces en el sistema de los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}$.*

Efectivamente, la matriz B de la aplicación conjugada $\mathcal{A}^*$ satisface la relación (19) del p. 24.3:

$$B' = G^{-1}AG,$$

donde G es la matriz de Gram y A es la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$. De aquí se ve que los divisores elementales de la matriz B coinciden con los divisores elementales de la matriz A. Sin embargo, de la condición de antisimetría se deduce que $B=-A$; por consiguiente, cambiando el signo de α en cada uno de los divisores elementales $(\lambda-\alpha)^m$ de la aplicación $\mathcal{A}$, obtendremos de nuevo unos divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}$ que es lo que se quería demostrar.

Ejemplos y problemas

1. Sea $\mathcal{U}$ una aplicación de un espacio bilineal métrico no degenerado $\mathfrak{L}$ sobre sí mismo que conserva el producto escalar $(a\mathcal{U}, b\mathcal{U})=(a, b)$. Demuéstrese que $\mathcal{U}$ es una aplicación lineal y, por consiguiente, isométrica del espacio $\mathfrak{L}$.
2. Los determinantes de las aplicaciones isométricas de los espacios bilineales métricos no degenerados corrientes son iguales a ± 1 y los determinantes de las aplicaciones isométricas de los espacios bilineales métricos no degenerados hermitianos son de módulo igual a la unidad.
3. En todo espacio bilineal métrico no degenerado $\mathfrak{L}$ existe una aplicación lineal $\mathcal{S}$ que satisface la condición $(x, y)=(y\mathcal{S}, x)$ si $\mathfrak{L}$ es un espacio corriente, y la condición $(x, y)=\overline{(y\mathcal{S}, x)}$, si $\mathfrak{L}$ es un espacio hermitiano. Demuéstrese que la aplicación $\mathcal{S}$ es isométrica y que su matriz es igual a $G'G^{-1}$ o $\overline{G}'G^{-1}$ según sea $\mathfrak{L}$ un espacio corriente o hermitiano (G es una matriz de Gram del espacio $\mathfrak{L}$).
4. Si en un espacio bilineal métrico no degenerado corriente $\mathfrak{L}$ coinciden las aplicaciones conjugadas a la derecha y a la izquierda de cualquier aplicación lineal, la métrica del espacio $\mathfrak{L}$ es simétrica o antisimétrica.

§ 26. Espacios euclídeos complejos

En el parágrafo presente y en los dos que le siguen examinaremos más detalladamente las formas elementales a las que pueden ser reducidas las matrices de las aplicaciones simétricas, antisimétricas e isométricas de los espacios euclídeos, simpliciales y seudounitarios sobre el cuerpo de los números complejos; estos últimos han sido clasificados de un modo completo al final del p. 24.2. Notemos que se tratará de determinar las formas elementales de las matrices de las aplicaciones en unos sistemas especiales de coordenadas con la matriz de Gram bien definida, ya que sólo en esta condición se conocen, salvo un isomorfismo, las aplicaciones. En el caso de los espacios euclídeos unitarios y reales este problema ha sido resuelto en el cap. V. Para el sistema especial de coordenadas ha sido escogido en aquella ocasión un sistema ortonormal de coordenadas en el que la matriz de Gram es la matriz unidad. En el caso de espacios de tipo más complejo es preferible tomar para los sistemas principales o normales de coordenadas sistemas de coordenadas con una matriz de Gram de estructura más compleja. Comenzaremos por el estudio de un espacio euclídeo complejo.

26.1. Aplicaciones simétricas. Como ya hemos señalado, se llama espacio euclídeo complejo un espacio no degenerado sobre el cuerpo de los números complejos provisto de una métrica simétrica corriente. La matriz de Gram de un espacio euclídeo complejo es regular y simétrica. Recíprocamente, todo espacio bilineal métrico complejo con la matriz de Gram regular simétrica es un espacio euclídeo complejo. Pero todos los espacios euclídeos complejos de una dimensión n dada son isomorfos y por esto en todo espacio de esta índole existe un sistema de coordenadas con una matriz de Gram simétrica regular cualquiera dada de antemano. En particular, en todo espacio euclídeo complejo $\mathfrak{L}$ existe un sistema de coordenadas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en el que la matriz de Gram es de la forma

$$G=\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Convendremos en llamar *normal* todo sistema de coordenadas que tenga esta matriz. Los vectores de un sistema normal de coordenadas satisfacen las relaciones

$$\begin{gathered}(a_j, a_{n+1-j})=1, \quad (a_j, a_k)=0 \\ (j+k\neq n+1; \quad j, k=1, \ldots, n),\end{gathered} \tag{2}$$

que también son suficientes para que un sistema sea normal.

La conveniencia de las bases normales se determina por la siguiente propiedad de las mismas: *toda aplicación lineal, cuya matriz en una base normal es una célula de Jordan, es simétrica.*

Efectivamente, por lo visto en el p. 24.3, una aplicación $\mathcal{A}$ es simétrica si es simétrica la matriz AG, donde G es la matriz de Gram de la base y A es la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$ en esta base. Pero realizando directamente los cálculos se puede ver que al multiplicar una célula de Jordan de orden n por la matriz G se obtiene una matriz simétrica.

Esta observación permite demostrar inmediatamente el siguiente teorema principal:

TEOREMA 1. *Sea dado un sistema arbitrario de expresiones de tipo $(\lambda-\rho_1)^{m_1}, \ldots, (\lambda-\rho_s)^{m_s}$. En todo espacio euclídeo complejo de dimensión $n=m_1+\ldots+m_s$ existe entonces necesariamente una aplicación simétrica $\mathcal{A}$ para la cual las expresiones señaladas constituyen el sistema completo de sus divisores elementales.*

En efecto, pongamos

$$G_j=\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_j=\begin{bmatrix} \rho_j & 1 & 0 & \ldots & \\ & \rho_j & 1 & \ldots & \\ & & \ldots & \ldots & \\ & & & \rho_j & 1 \\ & & & & \rho_j \end{bmatrix}, \tag{3}$$

donde los órdenes de las matrices G_j y A_j son iguales a m_j $(j=1, \ldots, s)$. Sea

$$G=G_1\dot{+}\ldots\dot{+}G_s \quad \text{y} \quad A=A_1\dot{+}\ldots\dot{+}A_s. \tag{4}$$

En un espacio euclídeo complejo $\mathfrak{L}$ de dimensión n existe una base de matriz de Gram igual a G. Indiquemos por $\mathcal{A}$ la aplicación lineal de matriz A en la base señalada. Debido a la observación hecha anteriormente, la matriz AG es simétrica y con ella es simétrica también la aplicación $\mathcal{A}$. Al mismo tiempo de (3) y de (4) se ve que $\mathcal{A}$ tiene el conjunto requerido de divisores elementales.

En virtud del teorema 1 del p.25.1, el teorema demostrado resuelve completamente el problema sobre la clasificación, salvo un isomorfismo, de todas las aplicaciones simétricas de un espacio euclídeo complejo. En particular, de él se desprende el teorema siguiente:

TEOREMA 2. *Sea $\mathcal{A}$ una aplicación simétrica de un espacio euclídeo complejo $\mathfrak{L}$. Entonces, $\mathfrak{L}$ se puede descomponer en una suma directa de subespacios recíprocamente ortogonales invariantes respecto de $\mathcal{A}$ y tales que en cada uno de ellos existe una base normal en la que la matriz de la aplicación inducida por la aplicación $\mathcal{A}$ será una célula de Jordan.*

Para la demostración indiquemos por $(\lambda-\rho_1)^{m_1}, \ldots, (\lambda-\rho_s)^{m_s}$ el conjunto de los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}$. Tomemos en $\mathfrak{L}$ una base $a_1, \ldots, a_n$ tal que su matriz de Gram sea igual a la matriz G de (4), y sea $\mathcal{B}$ la aplicación lineal de matriz A de (4) en la base $a_1, \ldots, a_n$. Las aplicaciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son simétricas y semejantes. En virtud del mencionado teorema 1 del p. 25.1, de aquí se deduce que existe una aplicación isométrica $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{A}=\mathcal{U}\mathcal{B}\mathcal{U}^{-1}$. Entonces, la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$ en la base $a_1\mathcal{U}, \ldots, a_n\mathcal{U}$ coincidirá con la matriz de la aplicación $\mathcal{B}$ en la base $a_1, \ldots, a_n$, es decir, coincidirá con la matriz A. Al mismo tiempo, la matriz de Gram de la base $a_1\mathcal{U}, \ldots, a_n\mathcal{U}$ es G y para la aplicación $\mathcal{B}$ las afirmaciones del teorema 2 son evidentes.

En una base ortonormal la matriz de una aplicación simétrica es simétrica. Por ello, del teorema 1 se deduce que existen matrices complejas simétricas de cualquier conjunto de divisores elementales.

26.2 Aplicaciones antisimétricas. Sea $\mathcal{A}$ una aplicación antisimétrica de un espacio euclídeo complejo $\mathfrak{L}$. Descompongamos $\mathfrak{L}$ en la suma directa de los subespacios radicales

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\rho_1} \dot{+} \mathfrak{L}_{\rho_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{L}_{\rho_s}.$$

Agrupando los sumandos que corresponden a pares opuestos de valores propios, obtenemos una nueva descomposición de $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_0 \dot{+} \mathfrak{M}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{M}_t,$$

donde $\mathfrak{M}_0$ es el subespacio radical correspondiente a la raíz cero y $\mathfrak{M}_j (i = 1, \ldots, t)$ son sumas de tipo $\mathfrak{L}_\rho \dot{+} \mathfrak{L}_{-\rho}$. El teorema 7 del p.25.2 muestra que los subespacios $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_t$ son recíprocamente ortogonales y, además, son invariantes respecto de $\mathcal{A}$. Por esto el estudio del comportamiento de $\mathcal{A}$ sobre $\mathfrak{L}$ se reduce al estudio del comportamiento de esta aplicación sobre los espacios $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$ por separado. Consideremos más detalladamente el subespacio $\mathfrak{M}_0$. Supongamos que $\mathfrak{M}_0$ es diferente de cero e indiquemos por $\mathcal{A}_0$ la aplicación inducida en $\mathfrak{M}_0$ por la aplicación $\mathcal{A}$. Puesto que todos los valores propios de la aplicación $\mathcal{A}_0$ son iguales a cero, se tiene $\mathcal{A}_0^p = \mathcal{O}$, donde p es la dimensión de $\mathfrak{M}_0$. Indiquemos por m la menor potencia de la aplicación $\mathcal{A}_0$ que se convierte en cero: $\mathcal{A}_0^m = \mathcal{O}$ y $\mathcal{A}_0^{m-1} \neq \mathcal{O}$. Consideremos dos casos: el de m par y el de m impar. Sea m par; entonces $m-1$ es impar y la aplicación $\mathcal{A}_0^{m-1}$ es antisimétrica. La función bilineal $(x\mathcal{A}_0^{m-1}, y)$ es también antisimétrica. Puesto que esta función es diferente de cero, en $\mathfrak{M}_0$ existe un par de vectores a y b para el cual

$$(a\mathcal{A}_0^{m-1}, b) = 1.$$

De la antisimetría de la aplicación $\mathcal{A}_0$ se desprende que

$$(a\mathcal{A}_0^k, b\mathcal{A}_0^l) = -(a\mathcal{A}_0^{k-1}, b\mathcal{A}_0^{l+1}) = \ldots (-1)^k (a, b\mathcal{A}_0^{l+k}).$$

En particular, se tiene $(a, b\mathcal{A}_0^{m-1}) = (-1)^{m-1} (a\mathcal{A}_0^{m-1}, b) = -1$, es decir $b\mathcal{A}_0^{m-1} \neq o$. Pongamos

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \quad a_2 = a_1\mathcal{A}_0, \quad \ldots, \quad a_m = a_{m-1}\mathcal{A}_0, \\ b_1 &= b, \quad b_2 = b_1\mathcal{A}_0, \quad \ldots, \quad b_m = b_{m-1}\mathcal{A}_0. \end{aligned}$$

Las relaciones

$$\begin{gathered} (a_k, a_{m+1-k}) = (-1)^{k-1} (a_1, a_1\mathcal{A}_0^{m-1}) = 0, \quad (b_k, b_{m+1-k}) = 0, \\ (a_k, b_{m+1-k}) = (-1)^{m-k}, \quad (a_k, b_j) = 0 \\ (k + j > m + 1; \quad k, j = 1, \ldots, m) \end{gathered}$$

muestran que la matriz de Gram de esta base es de la forma

$$\begin{bmatrix} * & \ldots & 0 & * & \ldots & -1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ * & \ldots & -1 & * & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

donde en cada una de las cuatro células todos los elementos que figuran debajo de la diagonal secundaria son iguales a cero. El determinante de tal matriz es igual a ± 1 y, por consiguiente, el subespacio $\mathfrak{N}_1$ tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ es no degenerado. Debido al teorema 2 del p. 24.2, se tiene

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_1 \dot{+} \mathfrak{N}_1^{\perp},$$

siendo $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ de nuevo un subespacio invariante respecto de $\mathcal{A}_0$.

Consideremos el caso en que m es impar. La aplicación $\mathcal{A}_0^{m-1}$ es ahora simétrica y, por consiguiente, es simétrica su correspondiente función bilineal $(x\mathcal{A}_0^{m-1}, y)$. Puesto que esta función no es igual idénticamente a cero, existe un vector a tal que $(a\mathcal{A}_0^{m-1}, a) \neq 0$. Pongamos

$$a_1 = a, \quad a_2 = a_1\mathcal{A}_0, \ \ldots, \ a_m = a_{m-1}\mathcal{A}_0.$$

El subespacio $\mathfrak{N}_1$ tendido sobre los vectores $a_1, \ldots, a_m$ es invariante respecto de $\mathcal{A}_0$. Su matriz de Gram en el sistema de coordenadas $a_1, \ldots, a_m$ es de la forma

$$G = \begin{bmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_{m-1}) & (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) & \ldots & (a_2, a_{m-1}) & 0 \\ . & . & . & . \\ (a_m, a_1) & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efectivamente,

$$(a_j, a_k) = (a\mathcal{A}_0^{j-1}, a\mathcal{A}_0^{k-1}) = (-1)^{k-1}(a\mathcal{A}_0^{j+k-2}, a) = 0$$

para $j+k > m+1$. Además

$$(a_1, a_m) = -(a_2, a_{m-1}) = \ldots = (a_m, a_1) = \alpha \neq 0.$$

De aquí se ve que la matriz G es regular; por consiguiente, el subespacio $\mathfrak{N}_1$ es no degenerado y tenemos de nuevo

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{N}_1 \dot{+} \mathfrak{N}_1^{\perp},$$

donde $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ es invariante respecto de $\mathcal{A}_0$.

Es decir, hemos despejado de $\mathfrak{M}_0$ un subespacio $\mathfrak{N}_1$ que en el primer caso representa una suma de dos subespacios de dimensión par y en el segundo caso es un subespacio de dimensión impar.

Aplicando este mismo procedimiento al subespacio complementario $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ podremos descomponerlo de nuevo en una suma directa de subespacios invariantes, etc. El espacio $\mathfrak{M}_0$ resultará descompuesto de esta forma en una suma directa de subespacios invariantes, cada uno de los cuales será o bien una suma directa de dos subespacios de dimensión par o bien un subespacio de dimensión impar. En esta descomposición a todo subespacio corresponde un divisor elemental de la aplicación $\mathcal{A}_0$ de forma λ^p, donde p es la dimensión del subespacio. Por consiguiente, *toda aplicación antisimétrica de un espacio euclídeo complejo contiene un número par de veces a todo divisor elemental de tipo* λ^{2s}. Este resultado, así como el teorema 7 del p. 25.2, imponen ciertas condiciones al sistema de divisores elementales de una aplicación antisimétrica. Demostremos que estas condiciones son suficientes para la existencia de una aplicación antisimétrica.

TEOREMA 3. *Las aplicaciones antisimétricas de los espacios euclídeos complejos contienen los divisores elementales correspondientes a los valores propios no nulos en forma de pares* $(\lambda-\alpha)^m$, $(\lambda+\alpha)^m$, *los divisores elementales de tipo* λ^p *también en forma de pares* λ^p, λ^p *para* p *par y los divisores elementales de tipo* λ^p *para* p *impar en combinaciones arbitrarias. Recíprocamente, todo conjunto formado por un número finito de expresiones de tipo* $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ *que cumple estas condiciones, es un sistema de divisores elementales de una aplicación antisimétrica de un espacio euclídeo complejo de dimensión adecuada.*

La primera parte de esta proposición ha sido ya demostrada. Por ello, para obtener la demostración completa del teorema debemos construir para cualquier sistema de expresiones, que cumple las condiciones del teorema, la correspondiente aplicación antisimétrica. Por analogía con el punto anterior esto se puede lograr del modo siguiente. A todo par de expresiones $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$, $(\lambda+\alpha_i)^{m_i}$ y entre ellos a los pares con $\alpha_i=0$ ponemos en correspondencia las matrices

$$G_i=\begin{bmatrix} O & D_i \\ D_i & O \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_i=\begin{bmatrix} B_i & O \\ O & -B_i \end{bmatrix},$$

donde D_i es una matriz simétrica *normal* de tipo (1) del p. 26.1 y B_i es la célula de Jordan de orden m_i y con el valor propio a_i. Si entre las expresiones dadas figuran expresiones λ^{2s_i-1} que no forman pares, les ponemos en correspondencia las matrices

$$G_i=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & & \\ & 0 & -1 & 0 & \dots & & \\ & & 0 & 1 & \dots & & \\ \dots & & & & & & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

de orden $2s_i - 1$. Sea

$$G = G_1 \dotplus \ldots \dotplus G_s \quad \text{y} \quad A = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_s. \tag{5}$$

Indiquemos por $\mathfrak{L}$ un espacio complejo de matriz de Gram igual a G.

Puesto que G es una matriz simétrica regular, el espacio $\mathfrak{L}$ es un espacio complejo euclídeo. Consideremos la aplicación lineal $\mathcal{A}$ del espacio $\mathfrak{L}$, cuya matriz es A. La función bilineal correspondiente a la aplicación $\mathcal{A}$ tiene la matriz AG con la particularidad de que

$$AG = A_1G_1 \dotplus \ldots \dotplus A_sG_s.$$

Los cálculos directos muestran que las células A_iG_i, y por ello también la matriz AG, son antisimétricas. Por esto la función bilineal y la aplicación $\mathcal{A}$ son también antisimétricas. Se ve, de la forma de la matriz A, que los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}$ tienen los valores requeridos.

Según el teorema 1 del p. 25.1, todas las aplicaciones antisimétricas de un espacio euclídeo complejo que tengan sistemas iguales de divisores elementales son isomorfas. Luego, del teorema 3 se deduce que para toda aplicación antisimétrica $\mathcal{A}$ de un espacio euclídeo complejo $\mathfrak{L}$ existe un sistema de coordenadas en el que la matriz de Gram G y la matriz A de la aplicación son de la forma (5).

26.3. Aplicaciones ortogonales complejas. Las aplicaciones isométricas de un espacio euclídeo complejo $\mathfrak{L}$ suelen llamarse aplicaciones *ortogonales complejas*. Si en $\mathfrak{L}$ se ha tomado un sistema de coordenadas de matriz de Gram G, las matrices U de las aplicaciones ortogonales, y sólo estas matrices, satisfacen la relación

$$UGU' = G. \tag{6}$$

En particular, si el sistema de coordenadas es ortonormal, se tiene $G = E$ y (6) se convierte en

$$UU' = E.$$

En otras palabras, *en un sistema ortonormal de coordenadas las matrices de las aplicaciones ortogonales son ortogonales.*

Las aplicaciones ortogonales con los divisores elementales iguales son, según el teorema 1 del p. 25.1, isomorfas. Por esto para la clasificación de las aplicaciones ortogonales es suficiente indicar qué sistemas de expresiones de tipo $(\lambda - \alpha_i)^{m_i}$ pueden servir como sistemas de divisores elementales de las aplicaciones ortogonales. El esquema de la solución de este problema es el siguiente: conocemos los divisores elementales de las aplicaciones antisimétricas; las aplicaciones ortogonales se pueden expresar en términos de las antisimétricas mediante las fórmulas de Cayley (p. 25.2); por consiguiente, empleando el teorema sobre los divisores elementales de las funciones matriciales (p. 16.4), podemos encontrar también los divisores elementales de las aplicaciones ortogonales. Sin embargo, al realizar este esquema debe tenerse en cuenta la existencia de los valores excepcionales en las fórmulas de Cayley, debido a lo cual la solución adquiere la forma siguiente, algo más voluminosa.

Sea $\mathcal{U}$ una aplicación ortogonal de un espacio euclídeo complejo $\mathfrak{L}$. Representando $\mathfrak{L}$ en la forma de la suma directa de los subespacios radicales de la aplicación $\mathcal{U}$ y agrupando los subespacios correspondientes a valores propios recíprocamente inversos, obtendremos la descomposición

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_{-1} \dot{+} \mathfrak{M}_1 \dot{+} \mathfrak{M}_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \mathfrak{M}_t,$$

donde todos los $\mathfrak{M}_j$ son recíprocamente ortogonales y, además, $\mathfrak{M}_{-1}$ y $\mathfrak{M}_1$ son los subespacios radicales de la aplicación $\mathcal{U}$ correspondientes a los valores propios -1 y $+1$. La aplicación $\mathcal{U}$ induce en cada uno de los subespacios $\mathfrak{M}_j$ una aplicación ortogonal $\mathcal{U}_j$ y los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{U}$ se descomponen en los sistemas de divisores elementales de estas aplicaciones inducidas. Consideremos la aplicación $\mathcal{U}_1$. Todos sus valores propios son iguales a $+1$. La fórmula de Cayley

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{E} - \mathcal{U}_1)(\mathcal{E} + \mathcal{U}_1)^{-1}$$

transforma $\mathcal{U}_1$ en una aplicación antisimétrica $\mathcal{A}_1$. Representemos esta fórmula en la forma $\mathcal{A}_1 = f(\mathcal{U}_1)$, donde $f(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}$. Puesto que la derivada de $f(\lambda)$ no se anula para $\lambda = 1$, resulta (p. 16.4) que introduciendo en todo divisor elemental $(\lambda - \alpha)^m$ de la aplicación $\mathcal{U}_1$ en lugar de α el número $(1-\alpha)(1+\alpha)^{-1}$, obtendremos los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}_1$. Pero los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{U}_1$ son de la forma $(\lambda - 1)^s$; por consiguiente, los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}_1$ son de tipo λ^s. Si s es un número par, las aplicaciones antisimétricas contienen todo divisor elemental de tipo λ^s un número par de veces y por esto la aplicación $\mathcal{U}_1$ contiene todo divisor elemental de tipo $(\lambda - 1)^s$ también un número par de veces, si s es par.

Aplicando la fórmula de Cayley

$$\mathcal{A} = (\mathcal{E} + \mathcal{U})(\mathcal{E} - \mathcal{U})^{-1}$$

a la aplicación $\mathcal{U}_{-1}$, obtendremos, de forma análoga, que la aplicación $\mathcal{U}$ contiene todo divisor elemental de tipo $(\lambda + 1)^s$ también un número par de veces, si s es par.

TEOREMA 4. *Los divisores elementales de las aplicaciones ortogonales complejas correspondientes a los valores propios diferentes de* ± 1 *aparecen en pares de tipo* $(\lambda - \alpha)^m$, $(\lambda - \alpha^{-1})^m$; *los divisores elementales de tipo* $(\lambda \pm 1)^{2s}$ *aparecen un número par de veces y los divisores elementales de tipo* $(\lambda \pm 1)^{2s+1}$ *aparecen en combinaciones arbi-*

trarias. Recíprocamente, todo sistema de expresiones de tipo $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ $(\alpha_i \neq 0)$ que cumple estas condiciones es un sistema de divisores elementales de una aplicación ortogonal compleja.

La primera parte del teorema ha sido ya demostrada. Supongamos, por ello, que tenemos un sistema de divisores elementales de tipo $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}(\alpha_i \neq 0)$ que satisface las condiciones del teorema. Separamos en este sistema los divisores elementales de tipo $(\lambda+1)^p$ y para cada uno de los divisores elementales $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ que quedan construimos la expresión $(\lambda-\beta_i)^{m_i}$, donde $\beta_i=(1-\alpha_i)(1+\alpha_i)^{-1}$. El sistema de las expresiones $(\lambda-\beta_i)^{m_i}$ cumplirá las condiciones del teorema 3 y, por consiguiente, será un sistema de divisores elementales de una aplicación antisimétrica $\mathcal{A}_0$ de un espacio euclídeo complejo $\mathfrak{L}_0$. Puesto que hemos tomado solamente valores de α_i diferentes de -1, todos los β_i serán también diferentes de -1. Empleando para $\mathcal{A}_0$ la aplicación de Cayley, obtenemos una aplicación ortogonal $\mathcal{U}_0$ con los divisores elementales $(\lambda-\alpha_i)^{m_i}(\alpha_i \neq -1)$. Análogamente, para todo divisor elemental de tipo $(\lambda+1)^{m_i}$ tomamos la expresión λ^{m_i} y buscamos una aplicación antisimétrica $\mathcal{A}_1$ de un espacio $\mathfrak{L}_1$, cuyos divisores elementales sean λ^{m_i}. Entonces la aplicación

$$\mathcal{U}_1=-(\mathcal{E}-\mathcal{A}_1)(\mathcal{E}+\mathcal{A}_1)^{-1}$$

será una aplicación ortogonal del espacio $\mathfrak{L}_1$, cuyos divisores elementales son $(\lambda+1)^{m_i}$. Tomemos en $\mathfrak{L}_0$ y en $\mathfrak{L}_1$ unos sistemas ortonormales de coordenadas e indiquemos por U_0 y U_1 las matrices de las aplicaciones $\mathcal{U}_0$ y $\mathcal{U}_1$. Estas matrices serán ortogonales y por ello la suma directa $U_0 \dot{+} U_1=U$ de las mismas también será una matriz ortogonal.

Los divisores elementales de la matriz U tendrán, con arreglo a la construcción, los valores requeridos y el teorema queda demostrado.

Ejemplos y problemas

1. Constrúyase una matriz ortogonal de divisores elementales $(\lambda-1)^2$, $(\lambda-1)^2$, $\lambda-\frac{1}{2}$ y $\lambda-2$.

2. Demuéstrese que las matrices de tipo $\lambda A+B$, donde A es una matriz simétrica regular y B es una matriz antisimétrica, contienen un número par de veces todo divisor elemental de tipo λ^{2m}.

3. Empleando el teorema 2, redúzcase a la forma elemental el siguiente par de formas cuadráticas

$$2\xi_1^2+2\xi_2^2+2\xi_1\xi_3+2\xi_2\xi_4-2\xi_2\xi_3-2\xi_3\xi_4,$$
$$\xi_1^2+3\xi_2^2+2\xi_3^2+2\xi_1\xi_3-4\xi_2\xi_3+2\xi_2\xi_4-2\xi_3\xi_4.$$

Respuesta: $2(\xi_1\xi_2+\xi_3\xi_4)$ y $\xi_2^2+2\xi_3\xi_4+\xi_4^2$.

4. Constrúyase una matriz compleja antisimétrica de divisores elementales $(\lambda-3)^2$, $(\lambda+3)^2$, λ^2, λ^2 y λ^3.
5. Constrúyase una matriz compleja simétrica de divisores elementales $(\lambda-2)^3$, λ^3 y λ^3.

§ 27. Espacios simpliciales

27.1. Aplicaciones simétricas. Se llaman espacios simpliciales, según el p. 24.2, los espacios bilineales métricos provistos de una métrica antisimétrica no degenerada. La dimensión de un espacio simplicial es un número par. Puesto que todos los espacios simpliciales de una dimensión dada son recíprocamente isomorfos, en todo espacio simplicial de dimensión $n=2m$ existe una base, cuya matriz de Gram es igual a cualquier matriz antisimétrica regular de orden n dada de antemano. En particular, en todo espacio simplicial existen sistemas de coordenadas, en los cuales la matriz de Gram es de la forma

$$S=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+\dots+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Estos sistemas se llamarán *simpliciales*. Análogamente, en $\mathfrak{L}$ existen sistemas de coordenadas, en los cuales la matriz de Gram es de la forma

$$J=\begin{bmatrix} O & E \\ -E & O \end{bmatrix},$$

donde E es una matriz unidad y O es una matriz nula. Convendremos en llamar estos sistemas *normales*. En lo que sigue consideraremos solamente espacios simpliciales *complejos*.

Sea ahora $\mathcal{A}$ una aplicación simétrica de $\mathfrak{L}$. Descompongamos $\mathfrak{L}$ en la suma directa

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_{\rho_1}\dot{+}\mathfrak{L}_{\rho_2}\dot{+}\dots\dot{+}\mathfrak{L}_{\rho_s},$$

donde $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ son los diferentes valores propios de la aplicación $\mathcal{A}$ y $\mathfrak{L}_{\rho_1}, \dots, \mathfrak{L}_{\rho_s}$ son los correspondientes subespacios radicales. Los subespacios $\mathfrak{L}_{\rho_i}$ son, según el p. 25.2, recíprocamente ortogonales. Debido a que el espacio $\mathfrak{L}$ es no degenerado, los subespacios $\mathfrak{L}_{\rho_1}, \dots, \mathfrak{L}_{\rho_s}$ también son no degenerados y, por consiguiente, simpliciales. Tomemos uno de ellos, digamos $\mathfrak{L}_{\rho_i}$, e indiquémoslo por $\mathfrak{M}$. Sea $\mathcal{A}_0$ la aplicación inducida en $\mathfrak{M}$ por la aplicación $\mathcal{A}$. Pongamos, además, $\mathcal{A}_0-\rho_i\mathcal{E}=\mathcal{B}$. Puesto que $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{E}$ son aplicaciones simétricas, $\mathcal{B}$ es también una aplicación simétrica. Todos los valores propios de la aplicación $\mathcal{A}_0$ son iguales a ρ_i; luego, indicando por p la dimensión del espacio $\mathfrak{M}$,obtenemos

$$(\mathcal{A}_0-\rho_i\mathcal{E})^p=\mathcal{B}^p=\mathcal{O}.$$

Sea m el exponente menor para el cual $\mathcal{B}^m=\mathcal{O}$. La expresión $(x\mathcal{B}^{m-1}, y)$ es una función bilineal antisimétrica en x e y correspondiente a la aplicación $\mathcal{B}^{m-1}$. Puesto que $\mathcal{B}^{m-1}\neq\mathcal{O}$, la función $(x\mathcal{B}^{m-1}, y)$ no puede ser igual idénticamente a cero y, por consiguiente, en $\mathfrak{M}$ existe un par de vectores a y b tal que $(a\mathcal{B}^{m-1}, b)=1$. Pongamos

$$a\mathcal{B}^j=a_{j+1} \text{ y } b\mathcal{B}^j=b_{j+1} \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1).$$

Debido a la simetría de $\mathcal{B}$, tenemos

$$(a_j,\ a_k)=(a\mathcal{B}^{j-1},\ a\mathcal{B}^{k-1})=(a\mathcal{B}^{j+k-2},\ a)=(a,\ a\mathcal{B}^{j+k-2}).$$

Sin embargo, el espacio $\mathfrak{L}$ es antisimétrico y por esto

$$(a\mathcal{B}^{j+k-2},\ a)=-(a,\ a\mathcal{B}^{j+k-2}).$$

Comparando esta fórmula con la anterior, vemos que

$$(a_j,\ a_k)=0 \quad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Análogamente se obtienen también las relaciones

$$(b_j,\ b_k)=0 \quad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{3}$$

Además, de las condiciones $(a\mathcal{B}^{m-1},\ b)=1$ y $\mathcal{B}^m=\mathcal{O}$ se deduce:

$$(a_{m-s},\ b_{s+1})=(a\mathcal{B}^{m-s-1},\ b\mathcal{B}^s)=(a\mathcal{B}^{m-1},\ b)=(a_m,\ b_1)=1 \tag{4}$$

y

$$(a_j,\ b_k)=(a\mathcal{B}^{j-1},\ b\mathcal{B}^{k-1})=(a\mathcal{B}^{j+k-2},\ b)=0 \quad (j+k>m+1). \tag{5}$$

Formando ahora la matriz de Gram de los vectores $a_1,\ \ldots,\ a_m$, $b_1,\ \ldots,\ b_m$, veremos, en virtud de las relaciones de (2) a (5), que tiene la forma triangular con ceros sobre la segunda diagonal. Puesto que los elementos que se hallan en la propia segunda diagonal son iguales a ± 1, el determinante de esta matriz es diferente de cero. Por consiguiente, el subespacio $\mathfrak{M}_1$ tendido sobre los vectores $a_1,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ \ldots,\ b_m$ es no degenerado. Indiquemos por $\mathfrak{M}_{11}$ y $\mathfrak{M}_{12}$ los subespacios tendidos sobre los vectores $a_1,\ \ldots,\ a_m$ y $b_1,\ \ldots,\ b_m$, respectivamente. Debido a las relaciones (5), los subespacios $\mathfrak{M}_{11}$ y $\mathfrak{M}_{12}$ son de una misma dimensión y $\mathfrak{M}_1$ es la suma directa de los mismos. Puesto que $\mathfrak{M}_1$ es no degenerado, tenemos, en virtud del punto 24.2,

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\dotplus\mathfrak{M}_1^{\perp}.$$

El subespacio $\mathfrak{M}_1$ es invariante respecto a $\mathcal{B}$ y por esto $\mathfrak{M}_1^{\perp}$ también es invariante respecto a $\mathcal{B}$. Procediendo ahora con $\mathfrak{M}_1^{\perp}$ igual que con $\mathfrak{M}$, podemos despejar en $\mathfrak{M}_1^{\perp}$ un subespacio $\mathfrak{M}_2$ que es una suma directa de dos subespacios $\mathfrak{M}_{21}$ y $\mathfrak{M}_{22}$, etc. Después de un número finito de pasos obtendremos la descomposición directa

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\dotplus\mathfrak{M}_2\dotplus\ldots\dotplus\mathfrak{M}_t,$$

donde cada uno de los subespacios $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$ será, a su vez, una suma directa de dos subespacios de una misma dimensión. A todo subespacio de dimensión m que figura en esta descomposición le corresponde un divisor elemental $(\lambda-\rho_i)^m$ de la aplicación $\mathcal{A}$. Por consiguiente, llegamos a la conclusión de que en un espacio simplicial los divisores elementales de las aplicaciones simétricas aparecen en pares $(\lambda-\rho_i)^m$, $(\lambda-\rho_i)^m$.

Demostremos ahora que, recíprocamente, para todo sistema de expresiones $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$, $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$ existe una aplicación simétrica de un espacio simplicial $\mathfrak{L}$, cuyos divisores elementales son estas expresiones.

A todo par $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$, $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$ ponemos en correspondencia el par de matrices

$$G_i=\begin{bmatrix} O & E_i \\ -E_i & O \end{bmatrix} \text{ y } A_i=\begin{bmatrix} B_i & O \\ O & B_i \end{bmatrix},$$

donde E_i es la matriz unidad de orden m_i y B_i es la célula de Jordan de orden m_i con el valor propio ρ_i y sea

$$G=G_1\dot{+}\ldots\dot{+}G_s \quad \text{y} \quad A=A_1\dot{+}\ldots\dot{+}A_s. \tag{6}$$

Consideremos un espacio bilineal métrico complejo $\mathfrak{L}$ de matriz de Gram G. Puesto que G es una matriz antisimétrica regular, el espacio $\mathfrak{L}$ es un espacio simplicial. Los cálculos directos muestran que

$$AG=A_1G_1\dot{+}A_2G_2\dot{+}\ldots\dot{+}A_sG_s$$

es una matriz antisimétrica. Por esto la aplicación lineal $\mathcal{A}$ del espacio $\mathfrak{L}$, cuya matriz es A, es simétrica. Al mismo tiempo, los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}$ tienen los valores requeridos. Es decir, hemos obtenido el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *Todo divisor elemental de una aplicación simétrica de un espacio simplicial aparece un número par de veces. Recíprocamente, todo sistema de expresiones de tipo* $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$ *que cumple esta condición es un sistema de divisores elementales de una aplicación simétrica de un espacio simplicial.*

Sabemos ya (p. 25.1) que las aplicaciones simétricas de los espacios simpliciales que tienen divisores elementales iguales son isomorfas. Por ello, el teorema 1 resuelve plenamente el problema de clasificación de las aplicaciones simétricas. En particular, muestra que para toda aplicación simétrica $\mathcal{A}$ de un espacio simplicial $\mathfrak{L}$ se puede escoger una base tal que la matriz de Gram G y la matriz A de la aplicación sean de la forma (6).

27.2. Aplicaciones antisimétricas. Una aplicación lineal $\mathcal{A}$ de un espacio bilineal métrico $\mathfrak{L}$ es antisimétrica, si $(x\mathcal{A}, y)=-(x, y\mathcal{A})$ para todos los x e y de $\mathfrak{L}$.

En virtud del teorema 3 del p. 26.2, los divisores elementales de una aplicación antisimétrica $\mathcal{A}$ de un espacio simplicial $\mathfrak{L}$, correspondientes a los valores propios no nulos, aparecen en forma de pares de tipo $(\lambda-\rho)^m$, $(\lambda+\rho)^m$. Probemos que los divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}$ correspondientes al valor propio nulo, es decir, los que son de forma λ^m, también aparecen en forma de pares, λ^m, λ^m, si m es impar. La demostración es completamente análoga a la demostración de la afirmación respectiva del p. 26.2 y sólo indicaremos el esquema de la misma.

Nos basamos en la representación de $\mathfrak{L}$ en la forma de la suma directa de los subespacios radicales de la aplicación $\mathcal{A}$. Agrupando en esta representación los subespacios correspondientes a los valores propios opuestos, obtendremos la descomposición

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_0\dot{+}\mathfrak{M}_1\dot{+}\ldots\dot{+}\mathfrak{M}_s,$$

donde todos los subespacios $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_s$ son invariantes y recíprocamente ortogonales, siendo $\mathfrak{M}_0$ el subespacio radical correspondiente a la raíz nula. Sea $\mathcal{A}_0$ la aplicación del subespacio $\mathfrak{M}_0$ inducida en éste por la aplicación $\mathcal{A}$. Todos los valores propios de la aplicación $\mathcal{A}_0$ son iguales a cero y, por ello, $\mathcal{A}_0^p=\mathcal{O}$, donde p es la dimensión de $\mathfrak{M}_0$. Indiquemos por m el menor exponente para el cual $\mathcal{A}_0^m=\mathcal{O}$. La aplicación $\mathcal{A}_0$ es antisimétrica y, por consiguiente, la aplicación $\mathcal{A}_0^{m-1}$ será, igual que en el p. 26.2, simétrica para m impar y antisimétrica para m par. Sin embargo, la correspondiente función bilineal $(x\mathcal{A}_0^{m-1}, y)$ será ahora simétrica para m par y antisimétrica para m impar, ya que la métrica de los espacios simpliciales es antisimétrica. Los razonamientos ulteriores del p. 26.2 se conservan con la única diferencia que se obtendrá ahora un par de espacios en el caso de m impar.

TEOREMA 2. *Los divisores elementales de las aplicaciones antisimétricas de los espacios simpliciales correspondientes a los valores propios no nulos aparecen en forma de pares* $(\lambda-\rho)^m$, $(\lambda+\rho)^m$; *los divisores elementales de tipo* λ^m *con m impar también aparecen en forma de pares* λ^m, λ^m *y los divisores elementales* λ^m *con m par pueden aparecer en combinaciones arbitrarias. Recíprocamente, todo sistema de expresiones de tipo* $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$ *que posee estas propiedades es un sistema de divisores elementales de una aplicación antisimétrica de un espacio simplicial.*

Es preciso demostrar sólo la segunda parte de este teorema. Con este fin, a todo par de expresiones de tipo $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$, $(\lambda+\rho_i)^{m_i}$, y en particular al par con $\rho_i=0$, ponemos en correspondencia el par de matrices

$$G_i=\begin{bmatrix} O & E_i \\ -E_i & O \end{bmatrix} \text{ y } A_i=\begin{bmatrix} B_i & O \\ O & -B_i \end{bmatrix},$$

donde E_i es la matriz unidad de orden m_i y B_i es la célula de

Jordan de orden m_l y de valor propio ρ_l. A las expresiones que quedan de tipo λ^{m_l} con m_l par ponemos en correspondencia el par de matrices

$$G_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea

$$G = G_1 \dotplus \dots \dotplus G_s \quad \text{y} \quad A = A_1 \dotplus \dots \dotplus A_s.$$

Consideremos un espacio bilineal métrico complejo $\mathfrak{L}$ de matriz de Gram igual a G. La matriz G es antisimétrica y regular y por esto el espacio $\mathfrak{L}$ es simplicial. La aplicación lineal $\mathcal{A}$ de matriz A tiene los divisores elementales dados. Al mismo tiempo, la aplicación $\mathcal{A}$ es antisimétrica, ya que los cálculos directos muestran que la matriz

$$AG = A_1G_1 \dotplus A_2G_2 \dotplus \dots \dotplus A_sG_s$$

es simétrica. Hemos demostrado el teorema.

27.3. Aplicaciones simpliciales. Las aplicaciones isométricas de un espacio simplicial $\mathfrak{L}$ suelen llamarse aplicaciones *simpliciales* de este espacio. Por consiguiente, si $\mathcal{U}$ es una aplicación simplicial del espacio $\mathfrak{L}$, se tiene $(x\mathcal{U}, y\mathcal{U}) = (x, y)$ para todos los x e y de $\mathfrak{L}$. En términos de matrices esta igualdad da

$$[x]\, UGU'\, [y]' = [x]\, G\, [y]',$$

de donde resulta

$$UGU' = G, \tag{7}$$

donde G es la matriz de Gram y U es la matriz de la aplicación $\mathcal{U}$. Tomando en $\mathfrak{L}$ un sistema simplicial de coordenadas, convertiremos la relación (7) en

$$USU' = S, \tag{8}$$

donde S es una matriz simplicial de tipo (1). Las matrices U que satisfacen la condición (8) serán llamadas matrices *simpliciales*. Por consiguiente, para que una aplicación lineal de un espacio simplicial sea simplicial es necesario y suficiente que su matriz sea simplicial en un sistema simplicial de coordenadas. De (8) también se desprende directamente que una suma directa de matrices simpliciales es una matriz simplicial.

Sea $\mathcal{U}$ una aplicación simplicial arbitraria de un espacio simplicial $\mathfrak{L}$. Representando $\mathfrak{L}$ en la forma de la suma directa de los subespacios radicales de la aplicación $\mathcal{U}$ y agrupando después los sumandos correspondientes a los valores propios recíprocamente inversos de la aplicación $\mathcal{U}$, obtenemos la descomposición

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_{-1} \dotplus \mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_s,$$

donde $\mathfrak{M}_{-1}$ y $\mathfrak{M}_1$ son los subespacios radicales correspondientes a los valores propios -1 y $+1$. Los subespacios $\mathfrak{M}_{-1}, \ldots, \mathfrak{M}_s$ son, en virtud del teorema 7 del p. 25.2, recíprocamente ortogonales.

El estudio del comportamiento de $\mathcal{U}$ sobre $\mathfrak{L}$ se reduce ahora al estudio del comportamiento de $\mathcal{U}$ sobre cada uno de los subespacios $\mathfrak{M}_i$ por separado. Repitiendo los razonamientos del p. 26.3 y empleando, en lugar del teorema sobre los divisores elementales de las aplicaciones antisimétricas de los espacios euclídeos complejos, el respectivo teorema para los espacios simpliciales, obtenemos la siguiente proposición:

TEOREMA 3. *Los divisores elementales de las aplicaciones simpliciales correspondientes a los valores propios diferentes de* ± 1 *aparecen en forma de pares* $(\lambda-\rho)^m$, $(\lambda-\rho^{-1})^m$; *los divisores elementales de tipo* $(\lambda \pm 1)^{2m+1}$ *también aparecen en forma de pares* $(\lambda+1)^{2m+1}$, $(\lambda+1)^{2m+1}$ *o* $(\lambda-1)^{2m+1}$, $(\lambda-1)^{2m+1}$ *y los divisores elementales de tipo* $(\lambda \pm 1)^{2m}$ *pueden aparecer un número arbitrario de veces. Recíprocamente, todo sistema de expresiones de tipo* $(\lambda-\rho_i)^{m_i}$, $\rho_i \neq 0$, *que posee estas propiedades es un sistema de divisores elementales de una aplicación simplicial.*

Las aplicaciones simpliciales que tienen divisores elementales iguales son, en virtud del teorema 1 del p. 25.1, isomorfas. Por esto el teorema 3 ofrece una clasificación completa, salvo un isomorfismo, de las aplicaciones simpliciales. Este teorema muestra, en particular, que si -1 es un valor propio de una aplicación simplicial, la multiplicidad de este valor propio es necesariamente par. Como todos los demás valores propios o bien son iguales a $+1$ o bien figuran en forma de pares recíprocamente inversos y de la misma multiplicidad, el producto de todos los valores propios de una aplicación simplicial es igual a $+1$ [1]. Este producto es igual al determinante de la matriz de la aplicación y llegamos así a la conclusión de que *los determinantes de las matrices de las aplicaciones simpliciales son iguales a la unidad.*

Ejemplos y problemas

1. Constrúyase una matriz simplicial de divisores elementales $\lambda+1$, $\lambda+1$ y $(\lambda-1)^2$.

2. Demuéstrese que las matrices de tipo $\begin{bmatrix} A & B \\ C & A' \end{bmatrix}$, donde B y C son matrices cuadradas antisimétricas de un mismo orden, contienen todo divisor elemental un número par de veces.

3. Enúnciese el teorema 1 como el teorema de pares de formas bilineales antisimétricas.

[1] Todo valor propio se cuenta tantas veces como indique su multiplicidad.

§ 28. Espacios seudounitarios

En el p. 24.2 hemos llamado espacios seudounitarios los espacios bilineales métricos hermitianos sobre el cuerpo de los números complejos provistos de una métrica no degenerada y simétrica: $(x, y) = \overline{(y, x)}$. También hemos demostrado en esa ocasión que todos estos espacios se determinan, salvo un isomorfismo, por su dimensión n y su signatura s y que, para un valor dado de n, s puede tomar los valores $n, n-2, \ldots, -n$. Al igual que antes, nos interesarán las propiedades de las aplicaciones simétricas, antisimétricas e isométricas. La clasificación de estas aplicaciones en el caso de espacios euclídeos complejos y de espacios simpliciales se basa en el teorema 1 del p. 25.1. En los espacios seudounitarios este teorema no tiene, en general, lugar. Consideremos, por ejemplo, un espacio bilineal métrico hermitiano de dos dimensiones $\mathfrak{L}$ de base e_1, y e_2 y de matriz de Gram $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Las aplicaciones lineales $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ definidas por las igualdades

$$e_1\mathcal{U}_1 = 2e_1, \quad e_1\mathcal{U}_2 = \frac{1}{2}e_1,$$
$$e_2\mathcal{U}_1 = \frac{1}{2}e_2, \quad e_2\mathcal{U}_2 = 2e_2$$

serán, obviamente, aplicaciones isométricas de este espacio. Los divisores elementales de las aplicaciones $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son los mismos, a saber, $\lambda - 2$ y $\lambda - \frac{1}{2}$. Sin embargo, $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ no son isomorfas. En efecto, si las aplicaciones $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ fuesen isomorfas, los subespacios radicales correspondientes al valor propio 2 podrían ser transformados uno en el otro mediante un automorfismo del espacio $\mathfrak{L}$. El subespacio radical correspondiente al valor propio 2 de la aplicación $\mathcal{U}_1$ es la recta αe_1 y el subespacio análogo de la aplicación $\mathcal{U}_2$ es la recta αe_2. Al mismo tiempo, todos los vectores no nulos de la primera recta tienen un cuadrado positivo y todos los vectores no nulos de la segunda recta tienen un cuadrado negativo. Por consiguiente, ningún automorfismo del espacio $\mathfrak{L}$ puede transformar la primera recta en la segunda que es lo que se quería demostrar.

Este ejemplo muestra que la vía puramente geométrica para el estudio de las aplicaciones de los espacios seudounitarios resulta, en cierta medida, necesaria.

28.1. Aplicaciones simétricas. Sea $\mathfrak{L}$ un espacio seudounitario de dimensión n y de signatura s. Consideremos un subespacio lineal arbitrario $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{L}$. Convendremos en decir que un sistema de coordenadas de $\mathfrak{N}$ es *normal positivo* si su matriz de Gram es de la forma

$$N=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 1 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{1}$$

y que es *normal negativo* si su matriz de Gram es de la forma

$$N=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & -1\\ 0 & \dots & -1 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -1 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Es obvio que no todo subespacio admite un sistema normal de coordenadas. Esto depende de la signatura del subespacio y de su dimensión. Los subespacios de dimensión par que admiten un sistema normal de coordenadas, positivo o negativo, son de signatura cero; los subespacios de dimensión impar con un sistema normal positivo de coordenadas son de signatura $+1$ y los que poseen un sistema normal negativo de coordenadas son de signatura -1. La demostración se deduce fácilmente de la definición de la signatura (p. 24.2).

Estudiemos los divisores elementales de una aplicación simétrica $\mathcal{A}$ de un espacio seudounitario $\mathfrak{L}$. Descompongamos $\mathfrak{L}$ en la suma directa de los subespacios radicales de la aplicación $\mathcal{A}$ y agrupemos los sumandos que corresponden a los valores propios conjugados. Así obtendremos la descomposición de $\mathfrak{L}$ en la suma directa de subespacios invariantes

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2 \dotplus \dots \dotplus \mathfrak{M}_t. \tag{3}$$

Estos subespacios son, según el p. 25.2, recíprocamente ortogonales y por ello el estudio de la aplicación $\mathcal{A}$ se reduce al estudio de la aplicación $\mathcal{A}$ en cada uno de los $\mathfrak{M}_i$. El espacio $\mathfrak{L}$ es no degenerado y por esto todos los $\mathfrak{M}_i$ son también no degenerados. Observemos ahora que los subespacios $\mathfrak{M}_i$ pueden ser de dos tipos: 1) $\mathfrak{M}_i$ es la suma directa de dos subespacios radicales correspondientes a valores propios conjugados no reales[1] y 2) $\mathfrak{M}_i$ es el subespacio radical correspondiente a un valor propio real. Consideremos el primer caso: sea

$$\mathfrak{M}_i=\mathfrak{M}_i' \dotplus \mathfrak{M}_i'',$$

[1] Si α es un valor propio y $\overline{\alpha}$ no es un valor propio, aceptaremos formalmente que $\mathfrak{L}_{\overline{\alpha}}$ es el subespacio nulo. De los razonamientos ulteriores se deduce, sin embargo, que este caso no puede darse.

donde $\mathfrak{M}_i'$ y $\mathfrak{M}_i''$ son los subespacios radicales correspondientes a los valores propios α y $\bar{\alpha}$, donde $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Razonando igual que en el p. 25.1, obtenemos

$$(a_1', a_2') = 0 \quad \text{y} \quad (a_1'', a_2'') = 0, \tag{4}$$

donde a_1' y a_2' son vectores cualesquiera de $\mathfrak{M}_i'$ y a_1'' y a_2'' son vectores cualesquiera de $\mathfrak{M}_i''$. Si existe un vector a' de $\mathfrak{M}_i'$ ortogonal a todos los vectores de $\mathfrak{M}_i''$, el vector a' es isótropo en $\mathfrak{M}_i$. Como el subespacio $\mathfrak{M}_i$ es no degenerado, esto da $a' = o$. Luego, para todo vector no nulo del subespacio $\mathfrak{M}_i'$ existe un vector no ortogonal del subespacio $\mathfrak{M}_i''$.

Hemos supuesto que $\mathfrak{M}_i'$ es el subespacio radical de la aplicación $\mathcal{A}$ correspondiente a la raíz α. Por consiguiente, tenemos para un valor natural de m

$$\mathfrak{M}_i'(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^m = o \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}_i'(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1} \neq o. \tag{5}$$

Tomemos en $\mathfrak{M}_i'$ un vector a tal que $a(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1} \neq o$. Puesto que $a(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1}$ es diferente de cero, en $\mathfrak{M}_i''$ existe un vector b no ortogonal a $a(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1}$. Normalicemos b de modo que

$$(a(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1}, b) = 1.$$

Pongamos ahora

$$a(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^j = a_{j+1} \quad \text{y} \quad b(\mathcal{A} - \bar{\alpha}\mathcal{E})^j = b_{j+1}$$
$$(j = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Como la aplicación $\mathcal{A}$ es simétrica, resulta

$$(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^* = \mathcal{A} - \bar{\alpha}\mathcal{E} \ \text{y} \ (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{*t} = (\mathcal{A} - \bar{\alpha}\mathcal{E})^t.$$

Por consiguiente, para $j + k = m + 1$ se tiene

$$\begin{aligned}(a_j, b_k) &= (a(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{j-1}, b(\mathcal{A} - \bar{\alpha}\mathcal{E})^{k-1}) = \\ &= (a(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{j+k-2}, b) = 1\end{aligned} \tag{6}$$

y para $j + k > m + 1$ se tiene

$$(a_j, b_k) = (a(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{j+k-2}, b) = 0. \tag{7}$$

En particular, de (6) se deduce que $b(\mathcal{A} - \bar{\alpha}\mathcal{E})^{m-1} \neq o$. Además, si a' pertenece a $\mathfrak{M}_i'$, tenemos

$$(a', b(\mathcal{A} - \bar{\alpha}\mathcal{E})^m) = (a'(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^m, b) = 0.$$

En otras palabras el vector $b(\mathcal{A} - \bar{\alpha}\mathcal{E})^m$ del subespacio $\mathfrak{M}_i''$ es ortogonal a todos los vectores de $\mathfrak{M}_i'$. En virtud de la observación hecha, esto da $b(\mathcal{A} - \bar{\alpha}\mathcal{E})^m = o$. Indiquemos por $\mathfrak{N}_1'$ y $\mathfrak{N}_1''$ los subespacios tendidos sobre los vectores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$, respectivamente.

Sea

$$c_1 = a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m,$$
$$c_{j+1} = c_j(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}) \quad (j = 1, \ldots, m-1).$$

De las fórmulas (6) y (7) se deduce que para cualesquiera valores de $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ se tiene $(c_1(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1}, b_1) = 1$, de donde obtenemos de nuevo

$$(c_j, b_{m+1-j}) = 1 \quad \text{y} \quad (c_j, b_k) = 0$$
$$(j + k > m + 1; \ j, k = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Es fácil ver que los coeficientes $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ se pueden escoger de manera que se cumplan las condiciones complementarias

$$(c_1, b_{m-1}) = (c_1, b_{m-2}) = \ldots = (c_1, b_1) = 0.$$

Entonces para $j + k < m + 1$ tendremos

$$(c_j, b_k) = (c_1, b_1(\mathcal{A} - \overline{\alpha}\mathcal{E})^{j+k-2}) = (c_1, b_{j+k-1}) = 0. \tag{9}$$

Sea $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1' + \mathfrak{N}_1''$. Las relaciones (4) (8) y (9) muestran que el sistema $c_1, \ldots, c_m, b_1, \ldots, b_m$ es un sistema *normal positivo* de coordenadas en $\mathfrak{N}_1$. Al mismo tiempo, la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$ en este sistema de coordenadas se descompone en un par de células de Jordan de divisores elementales $(\lambda - \alpha)^m$ y $(\lambda - \overline{\alpha})^m$.

El subespacio $\mathfrak{N}_1$ es no degenerado; por consiguiente,

$$\mathfrak{M}_l = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_1^{\perp},$$

donde $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ es de nuevo un subespacio invariante respecto a $\mathcal{A}$. Si $\mathfrak{N}_1^{\perp} \neq o$, podemos, aplicando a $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ el proceso expuesto, despejar en él un subespacio invariante $\mathfrak{N}_2$, etc. Así obtendremos para $\mathfrak{M}_l$ una representación de la forma

$$\mathfrak{M}_l = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{N}_{s_l},$$

donde $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{s_l}$ son subespacios invariantes recíprocamente ortogonales y en cada uno de ellos existe un sistema normal positivo de coordenadas en el que la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$ se descompone en dos células de Jordan de divisores elementales $(\lambda - \alpha)^m$ y $(\lambda - \overline{\alpha})^m$.

Consideremos el segundo caso. Sea $\mathfrak{M}_l$ el subespacio radical correspondiente a un valor propio real α. Buscamos de nuevo un número natural m tal que

$$\mathfrak{M}_l(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^m = o \ \text{y} \ \mathfrak{M}_l(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1} \neq o.$$

Puesto que $(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^* = \mathcal{A} - \overline{\alpha}\mathcal{E} = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$, la aplicación $\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$ y, con ella, también la aplicación $(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1}$ son simétricas. La correspondiente función bilineal hermitiana $(x(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})^{m-1}, y)$ es también simétrica y no se anula idénticamente sobre $\mathfrak{M}_l$. Por esto en $\mathfrak{M}_l$ existe un vector a tal que

$$(a(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m-1},\ a)=\beta\neq 0. \tag{10}$$

De la simetría de la función se deduce que β es real. Tomando $a_1=\sqrt{|\beta|^{-1}}\,a$, obtendremos en lugar de (10) la relación

$$(a_1(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m-1},\ a_1)=\varepsilon,\quad \varepsilon=\pm 1. \tag{11}$$

En esta relación el signo de la unidad depende de las propiedades de la misma aplicación $\mathcal{A}$ y, en todo caso, no lo podemos cambiar mediante la normalización. Pongamos

$$a_{j+1}=a_j(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})\quad (j=1,\ \ldots,\ m-1).$$

De (11) resulta:

$$(a_j,\ a_{m+1-j})=(a_1(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m-1},\ a_1)=\varepsilon. \tag{12}$$

Análogamente, de la condición $\mathfrak{M}_l(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^m=o$ obtenemos

$$(a_j,\ a_k)=(a_1(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{j+k-2},\ a_1)=0\quad (j+k>m+1). \tag{13}$$

Sea

$$b_1=a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_ma_m,$$

donde $\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ son, por ahora, unos números arbitrarios. Pongamos

$$b_{j+1}=b_j(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})\quad (j=1,\ \ldots,\ m-1). \tag{14}$$

De las igualdades (12) y (13) resulta:

$$\begin{gathered}(b_j,\ b_{m+1-j})=\varepsilon\quad \text{y}\quad (b_j,\ b_k)=0\\ (j+k>m+1;\quad j,\ k=1,\ \ldots,\ m).\end{gathered} \tag{15}$$

Es fácil ver que los números $\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ se pueden escoger de modo que se cumplan las relaciones

$$(b_1,\ b_{m-1})=(b_1,\ b_{m-2})=\ldots=(b_1,\ b_1)=0.$$

Entonces para $j+k<m+1$ tendremos

$$(b_j,\ b_k)=(b_1,\ b_1(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{j+k-2})=(b_1,\ b_{j+k-1})=0. \tag{16}$$

Consideremos el subespacio $\mathfrak{N}_1$ tendido sobre $b_1,\ \ldots,\ b_m$. De (14) se deduce que $\mathfrak{N}_1$ es invariante respecto a $\mathcal{A}$ y que la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$ en este sistema de coordenadas es igual a una célula de Jordan de divisor elemental $(\lambda-\alpha)^m$. Por otra parte, de (15) y (16) se ve que $b_1,\ \ldots,\ b_m$ es un sistema *normal* de coordenadas en $\mathfrak{N}_1$ y, además, *positivo*, si $\varepsilon=+1$, y *negativo*, si $\varepsilon=-1$. El espacio $\mathfrak{N}_1$ es no degenerado y, por ello, siendo $\mathfrak{N}_1\neq o$, se tiene

$$\mathfrak{M}_1=\mathfrak{N}_1\dot{+}\mathfrak{N}_1^{\perp},$$

donde $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ es un subespacio invariante de menor dimensión. Aplicando a $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ el mismo proceso, despejaremos de $\mathfrak{N}_1^{\perp}$ un subespacio invariante $\mathfrak{N}_2$, etc., hasta obtener la descomposición de $\mathfrak{M}_l$ en una suma directa de espacios recíprocamente ortogonales.

Aplicando ahora nuestros resultados a cada uno de los subespacios $\mathfrak{M}_i$, representaremos el espacio $\mathfrak{L}$ en la forma

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{P}_1 \dotplus \mathfrak{P}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{P}_t, \tag{17}$$

donde $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_t$ son subespacios recíprocamente ortogonales, cada uno de los cuales corresponde o bien a un divisor elemental real $(\lambda-\alpha)^m$ de la aplicación $\mathcal{A}$ o bien es la suma directa de dos subespacios correspondientes a divisores elementales conjugados $(\lambda-\alpha)^m$ y $(\lambda-\overline{\alpha})^m$; además, en los subespacios del primer tipo existen sistemas normales, *positivos* o *negativos*, de coordenadas en los que la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$ será una célula de Jordan, mientras que en los subespacios del segundo tipo existen sistemas normales *positivos* de coordenadas en los que la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$ será la suma directa de dos células conjugadas de Jordan.

A todo subespacio $\mathfrak{P}_j$, correspondiente a una raíz real α, le corresponde un divisor elemental $(\lambda-\alpha)^m$ de la aplicación $\mathcal{A}$. Convengamos en poner en correspondencia al subespacio $\mathfrak{P}_j$ el divisor elemental $+(\lambda-\alpha)^m$, si en $\mathfrak{P}_j$ existe un sistema *normal positivo* de coordenadas, en el que la matriz de la aplicación $\mathcal{A}$ tiene la forma de una célula de Jordan, y el divisor elemental $-(\lambda-\alpha)^m$, si en $\mathfrak{P}_j$ existe un sistema *normal negativo* de coordenadas con la propiedad señalada. Mediante esta regla podemos, basándonos en la descomposición (17), obtener un sistema de divisores elementales de la aplicación $\mathcal{A}$ en el que todo divisor elemental real tendrá un signo determinado. Un sistema de divisores elementales de este tipo convendremos en denominarlo de *signo definido*. Repitiendo los razonamientos, realizados al final del p. 26.1, obtenemos que son isomorfas las aplicaciones simétricas del espacio $\mathfrak{L}$ que tienen unos sistemas de divisores elementales de signo definido iguales.

Supongamos ahora que tenemos dado un sistema arbitrario de expresiones de tipo $\pm(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$, en el que todas las expresiones no reales aparecen en forma de pares conjugados y llevan el signo «más». ¿Existen un espacio seudounitario $\mathfrak{L}$ y una aplicación simétrica $\mathcal{A}$ del mismo tales que el sistema dado $\pm(\lambda-\alpha_i)^{m_i}$ sea un sistema de divisores elementales de signo definido de la aplicación $\mathcal{A}$? La respuesta es, obviamente, afirmativa. La construcción del espacio $\mathfrak{L}$ y de la aplicación $\mathcal{A}$ se puede realizar siguiendo el mismo método que ha sido empleado en el p. 26.1. Puesto que para esta construcción no se necesita nada nuevo, la dejamos a cargo del lector.

Queda por demostrar un resultado más sútil de que el sistema de divisores elementales de signo definido de una aplicación $\mathcal{A}$ no depende de cómo se escoja la descomposición (17) y se determina totalmente por la propia aplicación.

La descomposición (17) ha sido obtenida como resultado de la división de los subespacios $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ en subespacios cíclicos $\mathfrak{P}_i$. Puesto que los propios subespacios $\mathfrak{M}_j$ son o bien radicales o bien una suma de subespacios radicales, y, por consiguiente, se determinan unívocamente, la no unicidad puede surgir solamente al descomponer cada uno de los subespacios $\mathfrak{M}_j$. Los subespacios $\mathfrak{M}_j$ que son unas sumas de dos subespacios radicales no tienen interés para nosotros, ya que al descomponerlos se obtienen pares de subespacios cíclicos con pares de divisores elementales conjugados de tipo $(\lambda-\alpha)^m$ y $(\lambda-\overline{\alpha})^m$. Luego, resta demostrar solamente que como quiera que se descomponga un subespacio radical $\mathfrak{M}_j$ con raíz real α en una suma de subespacios no descomponibles y recíprocamente ortogonales, el sistema de divisores elementales de signo definido $\pm(\lambda-\alpha)^m$ será el mismo.

Sean

$$\mathfrak{M}_j=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2+\ldots+\mathfrak{N}_t, \tag{18}$$

$$\mathfrak{M}_j=\mathfrak{P}_1+\mathfrak{P}_2+\ldots+\mathfrak{P}_t \tag{19}$$

dos descomposiciones de $\mathfrak{M}_j$ en sumas ortogonales de subespacios no descomponibles. Indiquemos por $\delta_i(\lambda-\alpha)^{m_i}$ y $\varepsilon_i(\lambda-\alpha)^{m_i}$ los divisores elementales de signo definido correspondientes a los subespacios $\mathfrak{N}_i$ y $\mathfrak{P}_i$, respectivamente ($i=1, \ldots, t$; δ_i, $\varepsilon_i=\pm 1$). Coloquemos los sumandos de las sumas (18) y (19) de modo que $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_t$. Supongamos que tenemos varios sumandos de dimensión mayor: $m_1=\ldots=m_k>m_{k+1}$. Demostremos entonces que los sistemas de divisores elementales mayores $\varepsilon_1(\lambda-\alpha)^{m_1}, \ldots, \varepsilon_k(\lambda-\alpha)^{m_k}$ y $\delta_1(\lambda-\alpha)^{m_1}, \ldots, \delta_k(\lambda-\alpha)^{m_k}$ están compuestos de los mismos términos. Consideremos la función bilineal $f_1(x, y)=(x(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m_1-1}, y)$. La aplicación $\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}$ es simétrica y por esto la función $f_1(x, y)$ es también simétrica. Determinemos su signatura empleando la descomposición (18) y empleando la descomposición (19). Todos los subespacios de la descomposición (18) son ortogonales respecto a la función $f_1(x, y)$. Por ello la signatura de la función $f_1(x, y)$ sobre $\mathfrak{M}_j$ es igual a la suma de sus signaturas calculadas por separado sobre cada uno de los sumandos. Sin embargo, para $p>k$ tenemos

$$\mathfrak{N}_p(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m_1-1}=o$$

y, por consiguiente, $f_1(x, y)$ se anula sobre $\mathfrak{N}_p$. Consideremos ahora los subespacios $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$. Sea $a_1, \ldots, a_m$ una base de $\mathfrak{N}_1$ tal que

$$a_{j+1}=a_j(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}) \qquad (j=1, \ldots, m_1-1).$$

Puesto que $a_1(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m_1}=o$, se tiene para $j+k>2$

$$f_1(a_j, a_k)=(a_j(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m_1-1}, a_k)=0.$$

Por otra parte, según la definición del signo de un divisor elemental, tenemos

$$f_1(a_1, a_1)=(a_1(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m_1-1}, a_1)=\delta_1.$$

Por consiguiente, la matriz de la función $f_1(x, y)$ en la base $a_1, \ldots, a_m$ contendrá sólo un elemento no nulo que será igual a δ_1 y se hallará al principio de la diagonal principal. De aquí se ve que la signatura de la función $f_1(x, y)$ sobre $\mathfrak{N}_1$ también será igual a δ_1. Razonamientos análogos se pueden realizar también en el caso de los subespacios $\mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_k$. Así obtenemos que la signatura de la función $f_1(x, y)$ sobre $\mathfrak{M}_j$ es igual a $\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k$. Tomando en vez de la descomposición (18) la descomposición (19), llegaremos a la conclusión de que la signatura de la función $f_1(x, y)$ sobre $\mathfrak{M}_j$ es igual a $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_k$. Por consiguiente, se tiene

$$\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_k. \tag{20}$$

Puesto que $\delta_i, \varepsilon_i=\pm 1$, de (20) resulta que los sistemas de números $\delta_1, \ldots, \delta_k$ y $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ pueden diferir sólo en el orden de secuencia de los números y que, por consiguiente, ambos sistemas de divisores elementales mayores $\delta_1(\lambda-\alpha)^{m_1}, \ldots, \delta_k(\lambda-\alpha)^{m_k}$ y $\varepsilon_1(\lambda-$ $-\alpha)^{m_1}, \ldots, \varepsilon_k(\lambda-\alpha)^{m_k}$ coinciden.

Consideremos ahora la función bilineal

$$f_2(x, y)=(x(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^{m_{k+1}-1}, y).$$

Esta función se anula sobre todos los subespacios de dimensión menor que m_{k+1}. Por ello, para la signatura de $f_2(x, y)$ sobre $\mathfrak{M}_j$ tenemos las expresiones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sign.}\mathfrak{M}_j&=\operatorname{sign.}\mathfrak{N}_1+\ldots+\operatorname{sign.}\mathfrak{N}_k+\operatorname{sign.}\mathfrak{N}_{k+1}+\ldots+\operatorname{sign.}\mathfrak{N}_p,\\ \operatorname{sign.}\mathfrak{M}_j&=\operatorname{sign.}\mathfrak{P}_1+\ldots+\operatorname{sign.}\mathfrak{P}_k+\operatorname{sign.}\mathfrak{P}_{k+1}+\ldots+\operatorname{sign.}\mathfrak{P}_p,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

donde aceptamos que $m_{k+1}=\ldots=m_p>m_{p+1}$. Puesto que hemos demostrado ya que las signaturas de la función f_2 sobre los subespacios correspondientes de mayor dimensión coinciden, de (21) resulta que

$$\operatorname{sign.}\mathfrak{N}_{k+1}+\ldots+\operatorname{sign.}\mathfrak{N}_p=\operatorname{sign.}\mathfrak{P}_{k+1}+\ldots+\operatorname{sign.}\mathfrak{P}_p,$$

es decir,

$$\delta_{k+1}+\ldots+\delta_p=\varepsilon_{k+1}+\ldots+\varepsilon_p. \tag{22}$$

De (22) se ve que los divisores elementales de potencia m_{k+1} de la aplicación $\mathcal{A}$ también coinciden. Continuando este proceso, obtenemos que los sistemas de divisores elementales de signo definido de la aplicación $\mathcal{A}$, calculados mediante las descomposiciones (18) y (19), coinciden.

Veamos ahora qué puede decirse sobre la signatura del espacio principal $\mathfrak{L}$, si se conoce un sistema de divisores elementales de signo definido de una aplicación simétrica $\mathcal{A}$ de este espacio. La descomposición (17) muestra que la signatura del espacio $\mathfrak{L}$ es igual a la suma de las signaturas de los subespacios $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_l$. En aquellos subespacios $\mathfrak{P}_j$ que corresponden a pares conjugados de valores propios existe un sistema normal positivo de coordenadas. Sin embargo la dimensión de éstos es par y, por consiguiente, la signatura es igual a cero.

También es igual a cero la signatura de los subespacios que corresponden a divisores elementales reales de potencia par. Por ello quedan sólo los subespacios que corresponden a los divisores elementales reales de potencia impar. La signatura de éstos es igual a ± 1, según sea positivo o negativo el correspondiente divisor elemental. Por consiguiente,

$$s = s_1 - s_2, \tag{23}$$

donde s es la signatura del espacio $\mathfrak{L}$, s_1 es el número de divisores elementales positivos y s_2 el número de divisores elementales negativos reales de potencia impar de la aplicación $\mathcal{A}$.

De las fórmulas (23) se desprende, en particular, que *toda aplicación simétrica de un espacio seudounitario de signatura s tiene por lo menos $|s|$ divisores elementales reales de potencia impar.*

El estudio de las aplicaciones antisimétricas de los espacios seudounitarios se reduce directamente al estudio de las aplicaciones simétricas, ya que siendo $\mathcal{A}$ una aplicación simétrica, la aplicación $i\mathcal{A}$ será antisimétrica y viceversa.

28.2. Aplicaciones seudounitarias. Las aplicaciones isométricas de los espacios seudounitarios se llaman aplicaciones *seudounitarias.* Sea $\mathcal{U}$ una aplicación seudounitaria de un espacio $\mathfrak{L}$. Representando $\mathfrak{L}$ en la forma de la suma directa de los subespacios radicales de la aplicación $\mathcal{U}$ y agrupando los sumandos correspondientes a las raíces α y β, que cumplen la relación $\alpha\bar{\beta} = 1$, obtenemos una nueva descomposición de $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_{-1} \dotplus \mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2 \dotplus \dots \dotplus \mathfrak{M}_s,$$

donde los subespacios $\mathfrak{M}_j$ son invariantes respecto a $\mathcal{U}$ y son, en virtud del teorema 3 del p. 25.1, recíprocamente ortogonales. A cada uno de estos subespacios se puede aplicar una de las fórmulas de Cayley (p. 25.2):

$$\mathcal{A} = i\,(\mathcal{E} - \mathcal{U})\,(\mathcal{E} + \mathcal{U})^{-1} \tag{24}$$

o

$$\mathcal{A} = i\,(\mathcal{E} + \mathcal{U})\,(\mathcal{E} - \mathcal{U})^{-1}. \tag{25}$$

Como resultado obtenemos unas aplicaciones simétricas de los subespacios $\mathfrak{M}_j$. De (24) y (25) tenemos

$$\mathcal{U} = (\mathcal{E} + i\mathcal{A})\,(\mathcal{E} - i\mathcal{A})^{-1}$$

y, respectivamente

$$\mathcal{U} = -(\mathcal{E} + i\mathcal{A})\,(\mathcal{E} - i\mathcal{A})^{-1}.$$

En el primer caso todo divisor elemental de la aplicación $\mathcal{A}$ de tipo $(\lambda-\alpha)^m$ se transforma en el divisor elemental $(\lambda-\gamma)^m$, donde $\gamma=(1+i\alpha)(1-i\alpha)^{-1}$, y en el segundo caso en el divisor elemental $(\lambda-\gamma)^m$, donde $\gamma=-(1+i\alpha)(1-i\alpha)^{-1}$. Puesto que $\mathcal{A}$ es una aplicación simétrica, sus divisores elementales no reales de tipo $(\lambda-\alpha)^m$ aparecen en forma de pares $(\lambda-\alpha)^m$, $(\lambda-\bar{\alpha})^m$. Sin embargo, $(1+i\bar{\alpha})(1-i\bar{\alpha})^{-1}=\overline{(1-i\alpha)(1+i\alpha)^{-1}}$ y, por ello, los correspondientes divisores elementales de la aplicación $\mathcal{U}$ también aparecerán en forma de pares, pero éstos serán ya de tipo $(\lambda-\gamma)^m$, $(\lambda-\bar{\gamma}^{-1})^m$. En cambio, si α es real, para $\gamma=(1+i\alpha)(1-i\alpha)^{-1}$ obtenemos la relación $\gamma\bar{\gamma}=1$. Recíprocamente, de $\gamma\bar{\gamma}=1$ se desprende que α es real. Por consiguiente, las fórmulas (24) y (25) establecen una correspondencia entre los divisores elementales de una aplicación seudounitaria $\mathcal{U}$ y los divisores elementales de una aplicación simétrica $\mathcal{A}$. Hemos visto que las aplicaciones simétricas se determinan, salvo un isomorfismo, por sus sistemas de divisores elementales de signo definido. Por esto las aplicaciones seudounitarias se determinan, salvo un isomorfismo, por sus sistemas de divisores elementales de signo definido. Pero en estos sistemas los signos «más» y «menos» deben ser colocados ahora ante los divisores elementales que corresponden a los valores propios de módulo igual a la unidad.

Ejemplos y problemas

1. Realícese la demostración completa de todas las afirmaciones de los p. p. 28.1 y 28.2.

2. Sea $\mathfrak{L}$ un espacio seudounitario de cuatro dimensiones de signatura 2 (espacio complejo de Lorentz). Tomemos como sistema principal de coordenadas de $\mathfrak{L}$ el sistema e_1, e_2, e_3 y e_4 en el que el cuadrado escalar de un vector $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\xi_3e_3+\xi_4e_4$ es de la forma $(x, x)=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-\xi_4^2$. Demuéstrese que la matriz de toda aplicación simétrica del espacio $\mathfrak{L}$ puede ser reducida, en un adecuado sistema *principal* de coordenadas, a una de las formas siguientes:

$$\begin{bmatrix}\alpha&&&\\&\beta&&\\&&\gamma&\\&&&\delta\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\alpha&&&\\&\beta&&\\&&\gamma&\delta\\&&-\delta&\gamma\end{bmatrix}\quad \text{y}\quad \begin{bmatrix}\alpha&&&\\&\beta&0&1\\&0&\beta&1\\&-1&-1&\beta\end{bmatrix},$$

donde α, β, γ y δ son números reales. Resuélvase el problema análogo para las matrices de las aplicaciones seudounitarias del espacio $\mathfrak{L}$.

3. Si n es la dimensión de un espacio y s es la signatura de una función bilineal hermitiana f, se llama *característica* de f la expresión $\chi=\frac{n-|s|}{2}$. Demuéstrese que la característica de un espacio seudounitario $\mathfrak{L}$, en el que actúa una aplicación simétrica $\mathcal{A}$, satisface la desigualdad

$$\chi\geqslant h+\sum\left[\frac{k}{2}\right],$$

donde h es igual a la mitad de la suma de los exponentes de los divisores elementales complejos de la aplicación $\mathcal{A}$ y k recorre todos los valores de los exponentes de sus divisores elementales reales. El símbolo $\left[\frac{k}{2}\right]$ representa el mayor número entero que no pasa de $\frac{k}{2}$.

4. Sea, en las condiciones del problema anterior, $f(x, y) = (x\mathcal{A}, y)$. Demuéstrese que la característica de la función f cumple la desigualdad

$$\chi \geqslant h + \sum \left[\frac{k'}{2}\right] + \sum \left[\frac{k''-1}{2}\right],$$

donde h es la mitad de la suma de los exponentes de los divisores elementales complejos de la aplicación $\mathcal{A}$, k' recorre todos los valores de los exponentes de los divisores elementales correspondientes a las raíces reales no nulas y k'' recorre todos los valores de los exponentes de los divisores elementales correspondientes al valor propio nulo.