V. Ilín. E. Pozniak

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

3

EDITORIAL - MIR - MOSCÚ

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

В. А. Ильин, Э. Г. Позняк

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В 3 томах

Том 3

Москва
«Наука»

V. Ilín, E. Pozniak

FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

En 3 tomos

3

EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero K. P. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-002211-2
ISBN 5-03-002060-8

© Москва, «Наука», 1980
© traducción al español, revisada y ampliada, K.P. Medkov, 1991

ÍNDICE

PREFACIO

En el fundamento de este libro se han puesto las conferencias dictadas por los autores en la Universidad Estatal de Moscú M. V. Lomonósov durante toda una serie de años.

Al igual que en los tomos 1, 2, los autores aspiraban a hacer la exposición más sistemática y subrayar los teoremas y conceptos más importantes.

Además del material previsto por el programa, el libro contiene una serie de cuestiones adicionales que juegan un papel de importancia en diferentes apartados de las matemáticas modernas y de la física (teoría de la medida y la integral de Lebesgue, teoría de los espacios de Hilbert y de operadores autoconjugados lineales, teoría de las formas diferenciales en los espacios euclídeos u otros). Algunos apartados están tratados con mayor generalidad y para las restricciones más débiles que las usuales. Entre ellas pueden mencionarse, por ejemplo, las condiciones de la diferenciación término a término y de integración término a término de las sucesiones funcionales y de las series, el teorema sobre el cambio de las variables en una integral múltiple, fórmulas de Green y de Stokes, las condiciones necesarias de integrabilidad de una función acotada según Riemann y según Lebesgue.

Lo mismo que en los tomos 1, 2, aquí se examinan una serie de problemas relacionados con las matemáticas de cálculo. Esto se refiere en primer lugar al complemento al capítulo 2 sobre el cálculo aproximado de las integrales múltiples y un Anexo especial sobre el cálculo de los valores de las funciones según los coeficientes de Fourier aproximadamente definidos (método de regularización de A. N. Tíjonov).

El material de este libro abarca, junto con los tomos 1, 2, todo el curso universitario del análisis matemático.

Acentuemos también que al leer este libro, los capítulos 8 «Medida e integral de Lebesgue», capítulo 11 «Espacio de Hilbert» y todos los complementos pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del texto restante de la obra.

Los autores de este libro expresan su profunda gratitud a A. N. Tíjonov y A. G. Svéshnikov por muchos consejos valiosos y observaciones, a Sh. A. Alímov, cuyo trabajo con el libro sale de los márgenes de su preparación para la impresión, a L. D. Kudriávtsev y S. A. Lómov, por un gran número de observaciones críticas de valor, a P. S. Modénov y Ya. M. Zhilcikin quien han prestado los materiales concernientes a la teoría del campo y a los métodos aproximados de cálculos de las integrales múltiples.

V. Ilin, E. Pozniak

Capítulo 1

SUCESIONES Y SERIES FUNCIONALES

En el presente capítulo se estudiarán sucesiones y series cuyos términos no son números, sino funciones definidas sobre un conjunto fijo. Las sucesiones y series de esta índole son de amplio uso en la práctica de representar las funciones y calcularlas de un modo aproximado.

§ 1. Convergencia uniforme

1. Concepto de sucesión funcional y de serie funcional. *Siendo dado un conjunto fijo* $\{x\}$ [1]*, si a todo número n de una serie natural de números* 1, 2, . . ., n, . . . *se le pone en correspondencia, de acuerdo con una ley determinada, cierta función* $f_n(x)$ *definida sobre el conjunto* $\{x\}$*, entonces el conjunto de funciones enumeradas* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, . . . *se denominará sucesión funcional.*

Llamemos las funciones separadas $f_n(x)$ *términos* o *elementos* de la sucesión en consideración, y el conjunto $\{x\}$, *dominio* (o campo) *de definición* de la citada sucesión.

Para la designación de una sucesión funcional se empleará el símbolo $\{f_n(x)\}$.

Se denominará *serie funcional* la suma formalmente escrita

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1.1}$$

de un número infinito de términos de la sucesión funcional $\{u_n(x)\}$.

Los términos $u_n(x)$ de esta serie representan funciones definidas en cierto conjunto $\{x\}$.

El conjunto mencionado $\{x\}$ se llamará en este caso *dominio de definición* de la serie funcional (1.1)

La suma de los primeros n términos de la serie (1.1) se denomina, al igual que para el caso de una serie numérica, *n-ésima suma parcial* de dicha serie.

Subrayemos que *el estudio de las series funcionales es sumamente equivalente al estudio de las sucesiones funcionales*, pues a toda serie

---

[1]) Por $\{x\}$ puede entenderse, en particular, tanto un conjunto de puntos de una recta, como también un conjunto de puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ del espacio euclídeo E^m.

funcional (1.1) le corresponde unívocamente la sucesión funcional

$$S_1(x),\ S_2(x),\ \ldots,\ S_n(x),\ \ldots \tag{1.2}$$

de sus sumas parciales, y viceversa, a cada sucesión funcional (1.2) le corresponde unívocamente la serie funcional (1.1) con los términos

$$u_1(x) = S_1(x),\ u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$$
$$\text{para } n \geqslant 2,$$

para la cual la sucesión (1.2) es sucesión de sumas parciales.

Demos a conocer algunos ejemplos de sucesiones funcionales y de series funcionales.

EJEMPLO 1. Veamos una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, cada una de las cuales está definida en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ y tiene

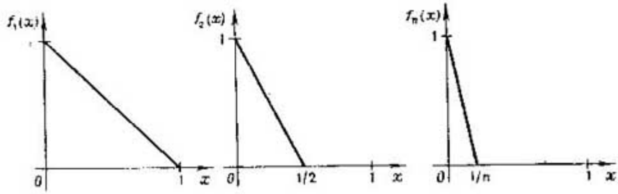

Fig. 1.1.

la forma

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-nx) & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1/n, \\ 0 & \text{para } 1/n < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

En la fig. 1.1 se exponen las gráficas de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_n(x)$.

EJEMPLO 2. A título de ejemplo de una serie funcional examinemos la siguiente serie en potencias de x:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{1.4}$$

Notemos que la $(n+1)$-ésima suma parcial de la serie (1.4) difiere del desarrollo de e^x por la fórmula de Maclaurin sólo en la magnitud del término residual $R_{n+1}(x)$.

2. Convergencia de una sucesión funcional en un punto y sobre un conjunto. Supongamos que una sucesión funcional (o una serie) está definida sobre el conjunto $\{x\}$. Fijemos un punto arbitrario x_0, perteneciente al conjunto $\{x\}$, y examinemos todos los términos de la sucesión (o de la serie) en el punto x_0. Obtendremos en este caso una sucesión numérica (o una serie).

Si la citada sucesión numérica (o la serie) converge, suele decirse que la sucesión funcional (o la serie) *converge en el punto* x_0.

El conjunto de todos los puntos x_0, donde converge la sucesión funcional dada (o la serie) se denomina *dominio de convergencia* de dicha sucesión (o de la serie).

En diversos casos concretos el dominio de convergencia puede o bien coincidir con el dominio de definición, o bien constituir una parte del dominio de definición, o bien ser, en general, conjunto vacío.

Más abajo el lector encontrará ejemplos correspondientes.

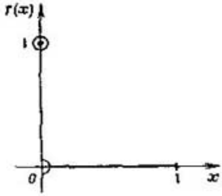

Fig. 1.2.

Supongamos que una sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ tiene a título de su dominio de convergencia el conjunto $\{x\}$. Una totalidad de los límites, tomados para todos los valores de x del conjunto $\{x\}$ forma una función bien determinada $f(x)$ que también está definida sobre el conjunto $\{x\}$.

Esta función se denomina *función límite* de la sucesión $\{f_n(x)\}$.

De una manera sumamente análoga, si la serie funcional (1.1) converge sobre cierto conjunto $\{x\}$, sobre dicho conjunto queda definida una función $S(x)$ que será función límite de la sucesión de sus sumas parciales y se llamará suma de la citada serie.

La sucesión (1.3) del ejemplo 1 examinado más arriba *converge en todo el segmento* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

En efecto, $f_n(0) = 1$ para todos los números n, es decir, en el punto $x = 0$ la sucesión (1.3) converge hacia la unidad.

En cambio, si fijamos cualquier x del semisegmento obtenido $0 < x \leqslant 1$, todas las funciones $f_n(x)$, a partir desde cierto número (dependiente, por supuesto, de x) serán iguales a cero. Por consiguiente, en cualquier punto x del semisegmento $0 < x \leqslant 1$ la sucesión (1.3) converge hacia cero.

Así pues, la sucesión (1.3) converge en todo el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ hacia la función límite $f(x)$ que tiene por expresión

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = 0 \\ 0 & \text{para } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

La gráfica de esta función límite va expresada en la fig. 1.2.

Destaquemos que esta función no es continua sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ (sufre discontinuidad en el punto $x = 0$).

Analicemos ahora la serie funcional (1.4) del ejemplo 2.

Esta serie converge en cualquier punto x de la recta infinita y la suma de la serie es igual a e^x. La demostración puede encontrarse en el cap. 4, v. II (véase ejemplo 3 del p. 1, § 1 del cap. 4) [1]).

3. Concepto de convergencia uniforme sobre un conjunto. Supongamos que una sucesión

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1.5}$$

converge sobre el conjunto $\{x\}$ hacia una función límite $f(x)$.

***Definición* 1.** *Diremos que la sucesión* (1.5) *converge hacia la función $f(x)$ uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal número $N(\varepsilon)$ que con $n \geqslant N(\varepsilon)$ para todo x del conjunto $\{x\}$ se verifica la desigualdad* [2])

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

OBSERVACIÓN 1. En esta definición resulta muy esencial el hecho de que el número N depende sólo de ε y no depende de x. De este modo, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número universal $N(\varepsilon)$, a partir del cual la desigualdad (1.6) queda válida simultáneamente para todos los x del conjunto $\{x\}$.

OBSERVACIÓN 2. *La convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ sobre el conjunto $\{x\}$ no predetermina en absoluto su convergencia uniforme sobre el conjunto aducido.* Así, por ejemplo, la sucesión (1.3) del ejemplo 1 analizado más arriba converge en todo el segmento $[0, 1]$ (lo que se ha establecido anteriormente).

Demostremos que dicha sucesión *no converge uniformemente en el segmento* $[0, 1]$. Veamos una sucesión de puntos $x_n = \frac{1}{2n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) perteneciente al segmento $[0, 1]$. En cada uno de estos puntos (es decir, para cada número n) se verifican las correlaciones $f_n(x_n) = 1/2$, $f(x_n) = 0$. De este modo, para cualquier número n tenemos

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1/2,$$

es decir, cuando $\varepsilon \leqslant 1/2$, la desigualdad (1.6) no puede ser satisfecha simultáneamente para todos los puntos x del segmento $[0, 1]$, cualquiera que sea el número n.

OBSERVACIÓN 3. Indiquemos que la convergencia, uniforme sobre el conjunto $\{x\}$, de una sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ hacia la función $f(x)$ es equivalente a la convergencia de una sucesión numérica

---

[1]) Además, esta demostración se deduce directamente de la fórmula de Maclaurin para e^x, y de que el término residual en dicha fórmula tiende hacia cero para todo x.

[2]) Si entendemos por $\{x\}$ un conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_m)$ del espacio E^m, obtendremos definición de la convergencia uniforme para la sucesión $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de funciones de m variables.

$\{\varepsilon_n\}$, cuyos términos ε_n representan cotas superiores exactas de la función $|f_n(x) - f(x)|$ sobre el conjunto $\{x\}$.

OBSERVACIÓN 4. De la Definición 1 se deduce inmediatamente que si una sucesión $\{f_n(x)\}$ es uniformemente convergente hacia $f(x)$ sobre todo el conjunto $\{x\}$, entonces $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente hacia $f(x)$ también en cualquier parte del conjunto $\{x\}$.

Aduzcamos ahora un ejemplo de sucesión funcional que converge uniformemente sobre cierto conjunto $\{x\}$. Examinemos la misma sucesión (1.3), pero, no sobre todo el segmento $[0, 1]$, sino en el $[\delta, 1]$, donde δ es un número fijo del intervalo $0 < \delta < 1$. Para cualquier δ de este género existe un número, a partir del cual todos los elementos $f_n(x)$ serán nulos en el segmento $[\delta, 1]$. Por cuanto la función límite $f(x)$ es también nula en el segmento $[\delta, 1]$, la desigualdad (1.6) en todo el segmento citado será lícita para cualquier $\varepsilon > 0$, a partir del número indicado. Esto demuestra precisamente la convergencia uniforme de la sucesión (1.3) sobre el segmento $[\delta, 1]$.

***Definición* 2.** *Una serie funcional se llama uniformemente convergente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia su suma $S(x)$, si la sucesión $\{S_n(x)\}$ de sus sumas parciales converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia la función límite $S(x)$.*

Queda a cargo del lector demostrar que la serie funcional (1.4) del ejemplo 2, examinado más arriba, converge hacia su suma e^x uniformemente en cada segmento $-r \leqslant x \leqslant r$, donde r es un número positivo fijo cualquiera [1]).

4. Criterio de Cauchy. Son válidos los siguientes dos teoremas fundamentales.

***Teorema* 1.1.** *Para que una sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ converja uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia cierta función límite, es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentre un número $K(\varepsilon)$ tal que se verifique la desigualdad*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \tag{1.7}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$, p naturales ($p = 1, 2, \ldots$) y x del conjunto $\{x\}$.

***Teorema* 1.2.** *Para que una serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.8}$$

[1]) Para demostrar, basta estimar el término residual $R_{n+1}(x)$ en la fórmula de Maclaurin para la función e^x. El citado término residual, representando la diferencia entre e^x y la $(n+1)$-ésima suma parcial de la serie (1.4), satisface simultáneamente para todo x del segmento $-r \leqslant x \leqslant r$ la desigualdad

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r$$

(véase v. I, fórmula (8.62)).

converja uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ *hacia cierta suma, es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *se encuentre un número* $N(\varepsilon)$ *tal que se verifique la desigualdad*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon, \tag{1.9}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$, p *naturales y* x *del conjunto* $\{x\}$.

El teorema 1.2 es un corolario del teorema 1.1: basta indicar que en el primer miembro de la desigualdad (1.9) figura, bajo el signo de módulo, la diferencia $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ de las sumas parciales de la serie (1.8).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.1. 1) NECESIDAD. Supongamos que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia cierta función límite $f(x)$. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Para el número positivo $\varepsilon/2$ existe un número N tal que para todos los $n \geqslant N$ y simultáneamente para todos los x del conjunto $\{x\}$ tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{1.10}$$

Si p es un número natural cualquiera, entonces para $n \geqslant N$ y para todo x del conjunto $\{x\}$ queda válida con mayor razón una desigualdad

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{1.11}$$

Por cuanto el módulo de una suma no sobrepasa la suma de módulos, en virtud de (1.10) y (1.11), obtendremos

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \equiv |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leqslant$$
$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N$, p naturales y x del conjunto $\{x\}$. La necesidad está demostrada.

2) SUFICIENCIA. De la desigualdad (1.7) y del criterio de Cauchy para una sucesión numérica se desprende la convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ para x cualquiera del conjunto $\{x\}$ y la existencia de una función límite $f(x)$.

Por cuanto la desigualdad (1.7) se verifica *para cualquier* p *natural*, entonces, al realizar en dicha desigualdad el paso límite con $p \to \infty$ (véase v. I, teorema 3.13), llegamos a que para todo $n \geqslant N$ y todo x del conjunto $\{x\}$ resulta válida la desigualdad

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Debido a que $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente elegido, la suficiencia queda demostrada.

5. Criterios suficientes de convergencia uniforme. Enunciemos los criterios de convergencia uniforme o bien en los términos de las sucesiones, o bien en los términos de las series, según sea la comodidad de razonar [1]).

Introduzcamos, con el fin de enunciar dos criterios de convergencia uniforme de las series funcionales, algunos conceptos nuevos.

Definición 1. *Una sucesión $\{f_n(x)\}$ se llama uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$, si existe tal número real $M > 0$ que para cualesquiera números n y para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ se verifica la desigualdad*

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

Definición 2. Una sucesión funcional $\{v_n(x)\}$ *se llama sucesión dotada de variación uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$, si la serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \qquad (*)$$

converge uniformemente sobre el conjunto citado $\{x\}$.

Indiquemos aquí que *toda sucesión dotada de variación uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$ es convergente en el mismo hacia cierta función límite.*

En efecto, la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de la serie (*) y el criterio de Cauchy predeterminan la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)],$$

cuya n-ésima suma $S_n(x)$ tiene por expresión $S_n(x) = v_{n+1}(x) - v_1(x)$. De la última igualdad se deduce la convergencia uniforme de la sucesión $\{v_n(x)\}$ hacia la función límite $v(x)$ que es igual a $S(x) + v_1(x)$, donde $S(x)$ es la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)].$$

Podemos formular ahora y demostrar los siguientes dos criterios.

Teorema 1.3.I (Primer criterio de Abel). *Si una serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

posee una sucesión de sumas parciales uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$, mientras que la sucesión funcional $\{v_k(x)\}$ está dotada de variación uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$ y tiene función límite que es idénticamente igual a cero, entonces la serie

[1]) En virtud de lo dicho en el p. 1, ambas enunciaciones son equivalentes.

funcional

$$\sum_{k=1}^{\infty} [u_k(x)\cdot v_k(x)] \tag{1.12}$$

converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, existe un número $M > 0$ tal que la sucesión $\{S_n(x)\}$ de sumas parciales de la serie (1.1) para cualesquiera números n y para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ satisface la desigualdad $|S_n(x)| \leqslant M$.

Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$, y, a base de éste, el número N tal que para todos los n superiores a N, para todos los p naturales y para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ se verifiquen las desigualdades

$$\left\{\begin{array}{l} |v_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3M} \\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3M} \end{array}\right. \tag{**}$$

(hemos aprovechado aquí la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de la sucesión $\{v_n(x)\}$ hacia el cero idéntico, y, además, la convergencia uniforme sobre $\{x\}$ de la serie (*); cuando $p = 1$, la suma en (**) ha de considerarse igual a cero).

En virtud de la identidad de Abel (4.77) del capítulo 4 v. I) y debido a que el módulo de la suma de tres magnitudes no sobrepasa la suma de sus módulos, obtenemos

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)]\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)[v_k(x) - v_{k+1}(x)]\right| + \\ + |S_{n+p}(x)|\cdot|v_{n+p}(x)| + |S_n(x)|\cdot|v_{n+1}(x)|.$$

Teniendo presente que para cualesquiera números n y para todo x de $\{x\}$ se verifica la desigualdad $|S_n(x)| \leqslant M$, tenemos

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)]\right| \leqslant M\cdot\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| + \\ + M|v_{n+p}(x)| + M|v_{n+1}(x)|.$$

Al cotejar la última desigualdad con las desigualdades (**), llegamos a que para cualesquiera números n superiores a N, para todo p natural y todos los puntos x del conjunto $\{x\}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)]\right| < \varepsilon,$$

lo que es testimonio de que la serie (1.12) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ (en virtud del teorema 1.2).

El teorema está demostrado.

***Teorema 1.3.II* (Segundo criterio de Abel).** *Si la serie funcional (1.1) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia la suma $S(x)$, acotada en el citado conjunto, mientras que una sucesión funcional $\{v_k(x)\}$ está dotada de variación uniformemente acotada en el conjunto $\{x\}$ y tiene función límite $v(x)$, acotada sobre dicho conjunto, la serie funcional (1.21) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Partiremos de la identidad de Abel (13.77) mencionada en el capítulo 4, v. I. Esta identidad puede ser escrita en la forma

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)] \equiv \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)[v_k(x)-v_{k+1}(x)] +$$

$$+[S_{n+p}(x)-S_n(x)]\,v_{n+p}(x)+S_n(x)\,[v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)]$$

(mediante el símbolo $S_n(x)$ está designada aquí la n-ésima suma parcial de la serie (1.1); cuando $p=1$, la suma en el segundo miembro ha de considerarse igual a cero).

De la última identidad se deduce la desigualdad

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)\cdot v_k(x)]\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)|\cdot|v_{k+1}(x)-v_k(x)| +$$

$$+|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\cdot|v_{n+p}(x)|+|S_n(x)|\cdot|v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)| \quad \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

(cuando $p=1$ la suma en el segundo miembro ha de considerarse igual a cero).

Puesto que la suma $S(x)$ de la serie (1.1) y la función límite $v(x)$ de la sucesión $\{v_n(x)\}$ son, por hipótesis, acotadas sobre el conjunto $\{x\}$, se encontrarán unas constantes $M_1>0$ y $M_2>0$ de tal índole que para todo x del conjunto $\{x\}$ se verifiquen las desigualdades

$$|S(x)| \leqslant M_1, \quad |v(x)| \leqslant M_2.$$

De estas desigualdades y de la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de las sucesiones $\{S(x)\}$ y $\{v(x)\}$ hacia las funciones límites $S(x)$ y $v(x)$, respectivamente, proviene la existencia de tal número N_1, que para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ y para todo número n que satisface la condición $n \geqslant N_1$ queden válidas las desigualdades

$$|S_n(x)| \leqslant M_1 + 1, \quad |v_n(x)| \leqslant M_2 + 1. \tag{a}$$

Ahora, de la convergencia uniforme sobre el conjunto $\{x\}$ de las series funcionales (1.1) y (*) y del criterio de Cauchy de convergencia uniforme proviene que para $\varepsilon > 0$ arbitrario existen los números $N_2(\varepsilon)$ y $N_3(\varepsilon)$ tales que la desigualdad

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_2+1)} \tag{b}$$

quede válida para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$, todos los p naturales y todos los n que satisfacen la condición $n \geqslant N_2(\varepsilon)$, y la desigualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{c}$$

quede válida para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$, todos los p naturales y todos los n que satisfacen la condición $n \geqslant N_3(\varepsilon)$.

Por fin, de la identidad

$$v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x) \equiv \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [v_{k+1}(x) - v_k(x)],$$

y de las desigualdades

$$|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|$$

que proviene de la identidad y (c) se deduce que

$$|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{d}$$

para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$, todos los p naturales y todos los n que satisfacen la condición $n \geqslant N_3(\varepsilon)$.

Denotemos con $N(\varepsilon)$ el número máximo de los tres: N_1, N_2 y N_3. Entonces, cuando $n \geqslant N(\varepsilon)$, para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$ y para todo p natural se verificará cada una de las cuatro desigualdades (a), (b), (c) y (d).

De estas desigualdades y de $\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$ se deduce que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [u_k(x) \cdot v_k(x)] \right| < \varepsilon$$

para cualquier $n \geqslant N(\varepsilon)$, todo p natural y para todos los puntos x del conjunto $\{x\}$.

En virtud del criterio de Cauchy, la serie (1.12) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$. El teorema está demostrado.

***Corolario del teorema 1.3.I.* (*Criterio de Dirichlet—Abel*).** Si la serie funcional (1.1) posee una sucesión de sumas parciales uniformemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$, y si la sucesión funcional $\{v_k(x)\}$ no crece en todo punto del conjunto $\{x\}$, siendo uniformemente convergente en dicho conjunto hacia cero, la serie funcional (1.12) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$.

Basta notar que la sucesión $\{v_k(x)\}$ que no crece en todo punto del conjunto $\{x\}$ y que converge en el mismo hacia cero posee a ciencia cierta sobre el conjunto $\{x\}$ una variación uniformemente acotada, pues para dicha sucesión la n-ésima suma $S_n(x)$ de la serie (*) es igual a $v_1(x) - v_{n+1}(x)$, y resulta que existe el siguiente límite uniforme sobre el conjunto $\{x\}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [v_1(x) - v_{n+1}(x)] = v_1(x).$$

Estudiemos, a título de ejemplo, la cuestión de convergencia uniforme de una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k+(1+|x|)^k}. \qquad (1.13)$$

Por cuanto la sucesión

$$v_k(x) = \frac{1}{k+(1+|x|)^k}$$

no crece en todo punto de la recta infinita $-\infty < x < +\infty$ y es uniformemente convergente en la misma hacia cero, la serie (1.13) será convergente, en virtud del criterio de Dirichlet — Abel, en cualquier conjunto, donde la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}(kx) \qquad (1.13')$$

posee una sucesión uniformemente acotada de sumas parciales. Calculemos y estimemos la n-ésima suma parcial $S_n(x)$ de la serie (1.13').

Sumando la identidad

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sen} kx = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) x$$

según todos los k de 1 a n, obtendremos

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot S_n(x) = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x.$$

De aquí,

$$S_n(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

Por consiguiente, para todos los números n se verifica la desigualdad

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right|}. \qquad (1.14)$$

De la desigualdad (1.14) se deduce obviamente que la sucesión $\{S_r(x)\}$ de sumas parciales de la serie (1.13′) está uniformemente acotada en cualquier segmento fijo privado de los puntos $x_m = 2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), pues en cualquier segmento de esta índole $\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right|$ cuenta con una cota inferior exacta *positiva*.

De este modo se ha demostrado que la serie (1.13) converge uniformemente en cualquier segmento que no contiene puntos $x_m = 2\pi m$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

***Teorema 1.4* (criterio de Weierstrass).** *Si una serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \qquad (1.15)$$

está definida sobre el conjunto $\{x\}$ y si existe una serie numérica convergente $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ tal que para todo x del conjunto $\{x\}$ y para cualquier número k se verifica una desigualdad

$$|u_k(x)| \leqslant c_k, \qquad (1.16)$$

entonces la serie funcional (1.15) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$.

FORMULACIÓN BREVE: *una serie funcional converge uniformemente sobre un conjunto dado, si se la puede mayorar sobre dicho conjunto mediante una serie numérica.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el criterio de Cauchy, cuando se trata de una serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que con todo $n \geqslant N(\varepsilon)$ y con cualquier p natural se verifica una desigualdad

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \qquad (1.17)$$

De las desigualdades (1.16) y (1.17) y de lo que el módulo de una suma no es superior a la suma de módulos, obtenemos

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$, p naturales y x del conjunto $\{x\}$.

Según el criterio de Cauchy, la serie funcional (1.15) es uniformemente convergente sobre el conjunto $\{x\}$. El teorema está demostrado.

EJEMPLO 2. Una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k^{1+\delta}}, \text{ donde } \delta > 0,$$

converge uniformemente en toda la recta infinita, pues en toda la recta

$$\left|\frac{\operatorname{sen} kx}{k^{1+\delta}}\right| \leqslant \frac{1}{k^{1+\delta}},$$

mientras que la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}$ converge cuando $\delta > 0$ (véase v. II, cap. 4).

OBSERVACIÓN 1. *El criterio de Weierstrass no es necesario.*

Efectivamente, se ha establecido anteriormente que la serie (1.12) converge uniformemente sobre cualquier segmento privado de los puntos $x_m = 2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). En particular, la serie (1.12) es uniformemente convergente en el segmento $[\pi/2, 3\pi/2]$. No obstante, sobre el segmento mencionado el módulo $\frac{|\operatorname{sen} kx|}{k}$ del k-ésimo término de la serie (1.12) cuenta con la cota superior exacta que es igual a $1/k$, es decir, la serie numérica mayorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ representa una serie armónica que es a ciencia cierta divergente.

Teorema 1.5 (**criterio de Dini**) [1]. *Admitamos que una sucesión $\{f_n(x)\}$ no decrece (o no crece) en cada punto del segmento $[a, b]$ y converge en dicho segmento hacia una función límite $f(x)$. En este caso, si todos los elementos de la sucesión $f_n(x)$ y la función límite $f(x)$ son continuos sobre el segmento $[a, b]$, la convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ será en $[a, b]$ uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, para concretar, que la sucesión $\{f_n(x)\}$ no decrece en el segmento $[a, b]$ (el caso de una sucesión no creciente puede ser reducido al caso dado multiplicando todos los elementos de la sucesión por -1).

[1] Dini U., matemático italiano (1845—1918).

Pongamos

$$r_n(x) = f(x) - f_n(x).$$

La sucesión $\{f_n(x)\}$ posee las siguientes propiedades:

1) todos los $r_n(x)$ son no negativos y continuos en el segmento $[a, b]$;

2) $\{r_n(x)\}$ es no creciente sobre el segmento $[a, b]$;

3) en cada punto x del segmento $[a, b]$ existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Se pide demostrar que la sucesión $\{r_n(x)\}$ converge hacia cero uniformemente sobre el segmento $[a, b]$. Es suficiente probar que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe *al menos* un número n tal que $r_n(x) < \varepsilon$ *simultáneamente para todos los x de* $[a, b]$ (en este caso, siendo $\{r_n(x)\}$ no creciente, la desigualdad $r_n(x) < \varepsilon$ será válida también para todos los números ulteriores).

Supongamos que para cierto $\varepsilon > 0$ no existe ninguno de los números n de tal género que inmediatamente para todos los x de $[a, b]$ se verifique la desigualdad $r_n(x) < \varepsilon$. Entonces, para cualquier número n se encontrará un punto x_n de $[a, b]$ tal que

$$r_n(x_n) \geqslant \varepsilon. \tag{1.18}$$

En virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass, podemos elegir en la sucesión $\{x_n\}$ una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que sea convergente hacia cierto punto x_0 del segmento $[a, b]$ (véase v. I, cap. 3, § 4).

Todas las funciones $r_m(x)$ (cualquiera que sea el número m) son continuas en el punto x_0. Por consiguiente, para cualquier número m tenemos

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \tag{1.19}$$

Por otra parte, al seleccionar, para todo número fijo m, un número n_k que sea superior a m, obtendremos (teniendo presente que la sucesión no es creciente)

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Al cotejar la última desigualdad con (1.18), tendremos

$$r_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon \tag{1.20}$$

(para cualquier m fijo y para todo número n_k que lo supera).

Por fin, comparando (1.19) y (1.20), obtenemos

$$r_m(x_0) \geqslant \varepsilon$$

(para cualquier número m).

La última desigualdad está en contradicción con el hecho de que la sucesión $\{r_n(x)\}$ es convergente hacia cero en el punto x_0.

Esta contradicción obtenida demuestra el teorema.

OBSERVACIÓN 2. En el teorema de Dini es esencial la condición de *monotonía* de la sucesión $\{f_n(x)\}$ en el segmento $[a, b]$, puesto que una sucesión no monótona en $[a, b]$ de funciones continuas en dicho segmento puede converger en cada punto del mismo hacia una función $f(x)$ continua sobre el segmento en consideración, sin converger hacia ella en $[a, b]$ de un modo uniforme.

Puede servir de ejemplo una sucesión de funciones $f_n(x)$ que son iguales a sen nx para $0 \leqslant x \leqslant \pi/n$, e iguales a cero cuando $\frac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Esta sucesión converge hacia $f(x) \equiv 0$ en cada punto del segmento $[0, \pi]$, pero no converge uniformemente en $[0, \pi]$, pues $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1$ para $x_n = \pi/2n$, *cualquiera que sea* el número n.

OBSERVACIÓN 3. Enunciemos el teorema de Dini en términos de las series: *si todos los términos de una serie son continuos y no negativos sobre el segmento $[a, b]$ y si la suma de dicha serie es también continua en $[a, b]$, entonces la serie citada converge hacia su suma uniformemente en el segmento $[a, b]$.*

OBSERVACIÓN 4. El teorema de Dini y su demostración quedan vigentes si en lugar del segmento $[a, b]$ en este teorema tomamos cualquier conjunto $\{x\}$ cerrado y acotado. Tal conjunto suele llamarse *compacto*.

EJEMPLO 3. Una sucesión $\{x^n\}$ converge hacia cero uniformemente sobre el segmento $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

En efecto, 1) para cualquier x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ la citada sucesión converge hacia cero; 2) todas las funciones x^n y la función límite cero son continuas sobre $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; 3) la sucesión $\{x^n\}$ no va creciendo en el segmento $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Todas las condiciones del teorema de Dini quedan cumplidas.

6. Paso al límite término a término. Continuidad de la suma de una serie y de la función límite de una sucesión.

Examinemos un punto arbitrario a de una recta infinita y supongamos que $\{x\}$ es un conjunto arbitrario que no contiene, quizás, el punto a, pero posee una propiedad de que en cualquier ε-entorno del punto a están contenidos los puntos de dicho conjunto [1]).

Resulta válida la siguiente afirmación.

Teorema 1.6. *Supongamos que una serie funcional*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{1.15}$$

[1]) En otras palabras el punto a es punto límite de $\{x\}$.

converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ *hacia la suma* $S(x)$ *Admitamos, además, que todos los términos de esta serie cuentan en el punto* a *con el valor límite*

$$\lim_{x\to a} u_k(x) = b_k.$$

Entonces, la función $S\{x\}$ *también tiene en el punto* a *el valor límite con la particularidad de que*

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{1.21}$$

es decir, el símbolo lím *de límite y el símbolo* $\sum$ *de sumación pueden ser permutados o, como suele decirse, se puede pasar a un límite término a término.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos, ante todo, que la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente. En virtud del criterio de Cauchy aplicado a la serie funcional (1.15), existe, para cualquier $\varepsilon > 0$, tal número $N(\varepsilon)$ que

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon, \tag{1.22}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$, p naturales y x del conjunto $\{x\}$.

Pasando en la desigualdad (1.22) al límite de $x \to a$ [1], obtendremos

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

(para todos los $n \geqslant N(\varepsilon)$ y todos los p naturales).

Por consiguiente, para la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ queda cumplido el criterio de Cauchy y esta serie es convergente.

Estimemos ahora la diferencia $S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ para los valores de x de un entorno pequeño del punto a. Por cuanto $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ para todos los puntos del conjunto $\{x\}$, entonces para cualquier número n se verifica la identidad

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

A partir de esta identidad obtenemos la siguiente desigualdad, para todo x de $\{x\}$:

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|. \tag{1.23}$$

[1] Tal paso límite puede realizarse según alguna sucesión de puntos $\{x_n\}$ que sea convergente hacia a.

Fijamos al azar $\varepsilon > 0$. Por cuanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente y la serie (1.15) converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$, existe, para ε fijo, un número n tal que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (1.24)$$

cualesquiera que sean los puntos x del conjunto $\{x\}$. Como el límite de una suma finita equivale a la suma de límites de los sumandos, para $\varepsilon > 0$ fijo y para el número seleccionado n puede indicarse un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (1.25)$$

cualesquiera que sean los puntos x del conjunto $\{x\}$ que satisfagan la condición $0 < |x - a| < \delta$.

Al introducir (1.24) y (1.25) en el segundo miembro de (1.23), obtenemos en definitiva que

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon$$

para los puntos x del conjunto $\{x\}$ que satisfacen la condición $0 < |x - a| < \delta$. Con esto queda demostrado que la función $S(x)$ tiene valor límite en el punto $x = a$ y que es válida la igualdad (1.21). El teorema está demostrado.

Enunciemos el teorema 1.6 en términos de las sucesiones funcionales.

Si una sucesión funcional $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $\{x\}$ hacia una función límite $f(x)$, y si todos los elementos de la sucesión mencionada tienen valor límite en el punto a, la función límite $f(x)$ también tiene en el punto a el valor límite, con la particularidad de que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to a} f(x) \right],$$

es decir, el símbolo $\lim\limits_{n \to \infty}$ del límite de la sucesión y el símbolo $\lim\limits_{x \to a}$ del valor límite de la función pueden ser permutados (o, como suele decirse, al límite para $x \to a$ se puede pasar término a término).

OBSERVACIÓN AL TEOREMA 1.6. Si exigimos complementariamente, en las condiciones del teorema 1.6, que el punto a pertenezca al conjunto $\{x\}$ y que todos los términos $u_k(x)$ de la serie (1.15) sean continuos en el punto a (o, respectivamente, continuos en este punto por la derecha y por la izquierda), la suma $S(x)$ de la serie (1.15) será también continua en el punto a (o, respectivamente, continua en el punto a por la derecha y por la izquierda).

En efecto, para el caso dado, $b_k = u_k(a)$, y la igualdad (1.21) adquiere la forma

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = S(a),$$

lo que significa precisamente la continuidad de la función $S(x)$ en el punto a (o, en el caso de que x tienda hacia a unilateralmente, la continuidad de $S(x)$ en este punto a la derecha o a la izquierda, respectivamente).

Aplicando la Observación citada a todo punto de cierto segmento $[a, b]$, llegaremos al siguiente teorema fundamental.

Teorema 1.7. *Si todos los términos de una serie funcional (de una sucesión funcional) son continuos sobre el segmento $[a, b]$, y si la serie mencionada (sucesión mencionada) converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$, entonces la suma de esta serie (función límite de esta sucesión) es también continua sobre el segmento $[a, b]$.*

OBSERVACIONES AL TEOREMA 1.7. 1) En el teorema 1.7 podemos tomar, en lugar del segmento $[a, b]$, un intervalo, un semisegmento, una semirrecta, una recta infinita y, en general, cualquier conjunto denso en sí $\{x\}$. 2) En el teorema 1.7 resulta ser esencial la exigencia de convergencia *uniforme*, pues una sucesión de funciones continuas, convergente de una manera no uniforme, puede converger hacia una función discontinua (véase el ejemplo (1.3) de los pp. 1 y 2 del párrafo presente).

OBSERVACIÓN FINAL. Todos los teoremas de este párrafo son válidos para las sucesiones de funciones definidas sobre el conjunto $\{x\}$ del espacio E^m.

§ 2. Integración y diferenciación término a término de las sucesiones y series funcionales

1. Integración término a término. Tiene lugar el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 1.8. *Si una sucesión fundamental $\{f_n(x)\}$ converge hacia la función límite $f(x)$ uniformemente sobre el segmento $[a, b]$, y si cada función $f_n(x)$ es integrable en el mismo segmento, la función límite $f(x)$ será también integrable sobre el segmento $[a, b]$, con la particularidad de que la sucesión mencionada puede integrarse sobre el segmento $[a, b]$ término a término, es decir, el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

existe y es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$.

DEMOSTRACIÓN. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Ya que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es uniformemente convergente hacia $f(x)$, se encontrará, para $\varepsilon > 0$ fijo, un número $N(\varepsilon)$ tal que, cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$ y x del segmento $[a, b]$, se verifique la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{1.26}$$

Si demostramos que la función límite $f(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, entonces, recurriendo a las estimaciones conocidas de las integrales [1]) y a la desigualdad (1.26), obtendremos

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(para todo $n \geqslant N(\varepsilon)$).

Con ello será demostrado que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ existe y equivale a $\int_a^b f(x)\,dx$; nos queda sólo probar la integrabilidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$.

Al dividir el segmento $[a, b]$, mediante puntos *arbitrarios* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, en m segmentos parciales $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, convengamos en denotar por el símbolo $\omega_k(f)$ $(\omega_k(f_n)$, respectivamente) la oscilación de la función $f(x)$ $(f_n(x)$, respectivamente) [2]) en el k-ésimo segmento parcial $[x_{k-1}, x_k]$.

Cerciorémonos de que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $k = 1, 2, \ldots, m$ existe un número suficientemente grande n, para

---

[1]) Se tienen en cuenta las siguientes estimaciones de las integrales establecidas en el § 6, cap. 1, v. II: 1) si una función $F(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, será también integrable en $[a, b]$ la función $|F(x)|$, con la particularidad de que $\left| \int_a^b F(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |F(x)|\,dx$; 2) si $f(x)$ y $g(x)$ son ambas integrables sobre $[a, b]$, y si en cada punto de este segmento $f(x) \leqslant g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

[2]) Recordemos que se denomina *oscilación* de la función sobre un segmento dado la diferencia entre las cotas superior exacta e inferior exacta de dicha función en el segmento dado.

el cual se verifique una desigualdad

$$\omega_k(f) \leqslant \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{b-a}. \qquad (1.27)$$

Efectivamente, cualesquiera que sean x' y x'' del segmento $[x_{k-1}, x_k]$, se verifica la desigualdad

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f_n(x')| + $$
$$+ |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|. \quad (1.28)$$

Debido a la convergencia uniforme de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ se encontrará, para todo $\varepsilon > 0$, un número n tal que con cualquier x de $[a, b]$ será válida la desigualdad (1.26). De este modo, para dicho número n tenemos

$$|f(x') - f_n(x')| + |f_n(x'') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

y, por tanto, en virtud de (1.28),

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f_n(x) - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

De la última desigualdad y de la arbitrariedad de los puntos x' y x'' se deduce inmediatamente que para el número elegido n la desigualdad (1.27) es válida.

Para la partición, asumida por nosotros, del segmento $[a, b]$, designemos mediante los símbolos S y s las sumas superior e inferior de la función $f(x)$, y mediante los símbolos S_n y s_n, las sumas superior e inferior de la función $f_n(x)$.

Multiplicando la desigualdad (1.27) por la longitud del k-ésimo segmento parcial Δx_k, y sumándola después según todos los $k = 1, 2, \ldots, m$, obtenemos una desigualdad

$$S - s \leqslant S_n - s_n + \varepsilon. \qquad (1.29)$$

Hemos establecido (1.29) para la partición arbitraria del segmento $[a, b]$. Como la función $f_n(x)$ es integrable sobre el segmento $[a, b]$, existe otra partición de dicho segmento, para la cual $S_n - s_n < \varepsilon$ [1]), y, por consiguiente, en virtud de (1.29), $S - s < 2\varepsilon$.

Puesto que ε es un número positivo arbitrario, la última desigualdad demuestra integrabilidad de $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ [2])

El teorema está demostrado.

---

[1]) En virtud del teorema 1.1 del cap. 1, v. II.

[2]) En virtud del teorema 1.1, v. II, la existencia, para $\varepsilon > 0$ arbitrario de una partición del segmento, para la cual $S - s < 2\varepsilon$, es condición necesaria y suficiente de integrabilidad de toda función *acotada* en el segmento dado. El carácter acotado de $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ se deduce en seguida de la desigualdad (1.26) y de lo que la función $f_n(x)$, integrable en el segmento $[a, b]$, está acotada.

Enunciemos el teorema 1.8 en términos de las series funcionales: *Si la serie funcional (1.15) converge hacia su suma $S(x)$ uniformemente sobre el segmento $[a, b]$, y si cada término de esta serie $u_k(x)$ representa una función integrable en el segmento $[a, b]$, la suma $S(x)$ también será integrable sobre el segmento citado, con la particularidad de que la serie en consideración puede integrarse sobre el segmento $[a, b]$ término a término, es decir, la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$$

es convergente y tiene como su suma la integral $\int_a^b S(x)\,dx$.

OBSERVACIÓN. En los libros de texto del análisis matemático el teorema 1.8 se demuestra, como regla, bajo un supuesto más rígido de que cada función $f_n(x)$ no es sólo integrable, sino también continua sobre el segmento $[a, b]$. Admitida esta suposición adicional, se simplifica la demostración aducida más arriba, pues para demostrar la integrabilidad de la función límite $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ basta referirse al teorema 1.7.

2. Diferenciación término a término. Demostremos el siguiente teorema *fundamental.*

Teorema 1.9. *Supongamos que cada función $f_n(x)$ tiene sobre el segmento $[a, b]$ una derivada $f_n'(x)$* [1]*, y, además, la sucesión de derivadas $\{f_n'(x)\}$ converge en dicho segmento uniformemente, mientras que la propia sucesión $\{f_n(x)\}$ converge por lo menos en un punto x_0 del segmento $[a, b]$. Entonces, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia cierta función límite $f(x)$ uniformemente en todo el segmento $[a, b]$, con la particularidad de que esta sucesión puede diferenciarse en dicho segmento término a término, es decir, en cada punto del segmento $[a, b]$ la función límite $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ que sirve de función límite para la sucesión $\{f_n'(x)\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos al principio que *la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$.* De lo que la sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}$ es convergente y $\{f_n'(x)\}$, convergente uniformemente en $[a, b]$ concluimos que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un número $N(\varepsilon)$ de tal género que se verifiquen las desigualdades

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \tag{1.30}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N(\varepsilon)$ de todos p naturales y (esto se refiere a la segunda desigualdad de (1.30)) todos x de $[a, b]$.

[1] Por el término «la función $f(x)$ tiene derivada sobre el segmento $[a, b]$» se sobreentiende aquí y en adelante que existen: la derivada $f'(x)$ en cualquier punto interior de $[a, b]$, la derivada a la derecha $f'(a+0)$ en el punto a, y derivada a la izquierda $f'(b-0)$ en el punto b.

Sea x un punto *arbitrario* del segmento $[a, b]$. Para la función $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ se cumplen, con cualesquiera n y p fijos, todas las condiciones de Lagrange sobre el segmento $[x_0, x]$ (véase el teorema 8.12 del v. I). De conformidad con este teorema, existe entre x y x_0 un punto ξ tal que

$$[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)](x - x_0).$$

Teniendo presente que $|x - x_0| \leqslant b - a$, de la última igualdad y de las desigualdades (1.30) obtenemos:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

(para todo x de $[a, b]$, cualquier $n \geqslant N(\varepsilon)$ y todo número natural p).

Esto es precisamente un indicio de que sobre el segmento $[a, b]$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente hacia cierta función límite $f(x)$ [1].

Resta por demostrar que en *cualquier punto x_0 del segmento $[a, b]$ la función límite $f(x)$ tiene derivada y que esta derivada constituye la función límite de la sucesión $\{f'_n(x)\}$.*

Fijamos sobre el segmento $[a, b]$ un punto *arbitrario* x_0, y a base del mismo, un número positivo δ tal que el δ-entorno del punto x_0 esté contenido íntegramente dentro de $[a, b]$ (en el caso de que x_0 sea un punto de frontera del segmento $[a, b]$, por δ-entorno del punto x_0 se sobreentenderá el semientorno derecho $[a, a + \delta]$ del punto a, respectivamente, el semientorno izquierdo $(b - \delta, b]$ del punto b).

Designemos con $\{\Delta x\}$ el conjunto de todos los números Δx que satisfacen la condición $0 < |\Delta x| < \delta$ para $a < x_0 < b$, la condición $0 < \Delta x < \delta$ para $x_0 = a$, y la condición $-\delta < \Delta x < 0$, para $x_0 = b$, y demostremos que la sucesión de funciones del argumento Δx

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)}{\Delta x}$$

es uniformemente convergente sobre el conjunto citado $\{\Delta x\}$.

Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario, siendo uniformemente convergente la sucesión $\{f'_n(x)\}$, se encontrará un número $N(\varepsilon)$ tal que

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon, \tag{1.31}$$

cualesquiera que sean x de $[a, b]$, $n \geqslant N(\varepsilon)$ y p naturales.

Teniéndolo en cuenta, fijemos arbitrariamente Δx del conjunto $\{\Delta x\}$ y apliquemos el teorema de Lagrange a la función $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ (para cualesquiera n y p fijos) sobre el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Según este teorema, existe dentro del intervalo $0 < \theta < 1$

---

[1]) En virtud del criterio de Cauchy, es decir, del teorema 1.1.

un número θ tal que se verifique la igualdad

$$\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)=\frac{[f_{n+p}(x_0+\Delta x)-f_n(x_0+\Delta x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]}{\Delta x}=$$

$$=f'_{n+p}(x_0+\theta\Delta x)-f'_n(x_0+\theta\Delta x).$$

De la última igualdad y de la desigualdad (1.31), válida para *todos* los puntos x del segmento $[a, b]$, se deduce que

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)|<\varepsilon$$

para todo Δx de $\{\Delta x\}$, cualquier $n\geqslant N(\varepsilon)$ y todo p natural. De este modo, la sucesión $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ converge uniformemente sobre el conjunto $\{\Delta x\}$ (en virtud del criterio de Cauchy). Mas, esto nos permite aplicar a la sucesión mencionada en el punto $\Delta x=0$ el teorema **1.6** sobre el paso límite término a término. De acuerdo con dicho teorema [1]), una función

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

que es función límite de la sucesión $\{\varphi_n(\Delta x)\}$, tiene, cuando $\Delta x\to 0$, un valor límite, con la particularidad de que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\Delta x)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\varphi_n(\Delta x)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty}f'_n(x_0).$$

Esto prueba precisamente que la derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 existe y es igual a $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x_0)$. El teorema está demostrado.

Demos a conocer la formulación del teorema **1.9** en términos de las series funcionales.

Si cada función $u_k(x)$ tiene derivada sobre el segmento $[a, b]$, y si la serie de las derivadas $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u'_k(x)$ es uniformemente convergente sobre el segmento $[a, b]$, mientras que la propia serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ converge por lo menos en un solo punto del segmento $[a, b]$, entonces la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ converge uniformemente sobre todo el segmento $[a, b]$ hacia cierta suma $S(x)$, con la particularidad de que dicha serie puede diferenciarse en el segmento $[a, b]$ término a término, es decir, su suma $S(x)$ tiene en el segmento $[a, b]$ una derivada que representa la suma de la serie de derivadas $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u'_k(x)$.

[1]) Se emplea la formulación del teorema 1.6 en términos de las sucesiones funcionales.

OBSERVACIÓN 1. Subrayemos que en el teorema 1.9 sólo se supone que cada función $f_n(x)$ tiene derivada sobre el segmento $[a, b]$. No se requiere que esta derivada sea acotada, ni, menos aún, integrable o continua. En los cursos del análisis matemático el teorema 1.9 se demuestra, de ordinario, bajo el supuesto adicional de continuidad de cada derivada $f'_n(x)$ sobre el segmento $[a, b]$.

OBSERVACIÓN 2. Si en el teorema 1.9 exigimos complementariamente la continuidad sobre el segmento $[a, b]$ de cada derivada $f'_n(x)$, entonces, en virtud del teorema 1.7, la derivada de la función límite $f(x)$ será también continua sobre dicho segmento.

OBSERVACIÓN 3. Si se examina el caso de las funciones de m variables, el teorema 1.9 se enuncia del modo siguiente: si cada función $f_n(x) = f_n(x_1, \ldots, x_m)$ tiene sobre un conjunto acotado de puntos $\{x\}$ del espacio E^m una derivada parcial $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$, y si la sucesión $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ es uniformemente convergente sobre $\{x\}$, mientras que la propia sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en cada punto del conjunto $\{x\}$, entonces la sucesión $\{f_n(x)\}$ puede diferenciarse en el conjunto $\{x\}$ respecto a la variable x_k *término a término*.

Del teorema 1.9 se deduce la siguiente afirmación.

Teorema 1.10. *Si cada función $f_n(x)$ tiene primitiva sobre el segmento $[a, b]$, y si la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente sobre el segmento $[a, b]$ hacia la función límite $f(x)$, esta última también tendrá en $[a, b]$ su función primitiva. Más aún, si x_0 es un punto cualquiera de $[a, b]$, la sucesión de primitivas $\Phi_n(x)$ de las funciones $f_n(x)$, que satisfacen la condición $\Phi_n(x_0) = 0$, converge uniformemente sobre $[a, b]$ hacia la primitiva $\Phi(x)$ de la función límite $f(x)$ que satisface la condición $\Phi(x_0) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que para la sucesión de primitivas $\Phi_n(x)$, que satisfacen la condición $\Phi_n(x_0) = 0$, se cumplen todas las condiciones del teorema 1.9. Esto asegura la convergencia uniforme en $[a, b]$ de la sucesión $\{\Phi_n(x)\}$ hacia la función límite $\Phi(x)$, la cual tiene en cada punto de $[a, b]$ la derivada igual en valor a la función límite $f(x)$ de la sucesión $\{f_n(x)\}$.

OBSERVACIÓN 4. Subrayemos que en el teorema 1.10 no se requiere que la función $f_n(x)$ sea acotada, ni menos aún, integrable sobre el segmento $[a, b]$.

El material de los últimos 3 puntos permite obtener la siguiente deducción importante: *la convergencia uniforme deja sin cambios la clase de funciones que tienen valor límite* (teorema 1.6), *la clase de funciones continuas* (teorema 1.7), *la clase de funciones integrables* (teorema 1.8), *la clase de funciones que tienen primitiva* (teorema 1.10) *y (en el caso cuando las derivadas son uniformemente convergentes) la clase de funciones diferenciables* (teorema 1.9).

Para concluir, aduzcamos el ejemplo de función $f(x)$ (basado en el teorema 1.9) cuya derivada $f'(x)$ existe en cada punto del segmento $[0, 1]$, pero es discontinua en cada punto racional del segmento citado.

Sea

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & \text{para } x\neq 0,\\ 0 & \text{para } x=0,\end{cases}$$

de modo que la función

$$\varphi'(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}+2x\cdot\cos\dfrac{1}{x} & \text{para } x\neq 0,\\ 0 & \text{para } x=0\end{cases}$$

resulta ser discontinua para $x = 0$, y continua en todos los puntos restantes. Numeremos todos los puntos racionales del segmento $[0, 1]$ en la sucesión x_1, $x_2, \ldots, x_k$ (la posibilidad de hacerlo está demostrada en el p. 2, § 4, cap. 3, v. I) y pongamos $u_k(x)=\frac{1}{k^2}\cdot\varphi(x-x_k)$. Entonces cada derivada $u_k'(x) = \frac{1}{k^2}\varphi'(x-x_k)$ es discontinua en un solo punto x_k, y continua en todos los demás puntos. Por cuanto para todos los x del segmento $[0, 1]$

$$|u_k(x)|\leqslant\frac{|x-x_k|^2}{k^2}\leqslant\frac{1}{k^2},\quad |u_k'(x)|\leqslant\frac{1+2|x-x_k|}{k^2}\leqslant\frac{3}{k^2},$$

ambas series $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$ pueden mayorarse mediante la serie numérica $3\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, y, por esta razón, son convergentes uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$. De acuerdo con el teorema 1.9, la suma $f(x)$ de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ tiene sobre el segmento $[0, 1]$ una derivada $f'(x)$, que es igual a la suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$, y que tiene discontinuidad en cada punto x_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

3. Convergencia en media. Supongamos que toda función $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, y también la función $f(x)$, son integrables sobre el segmento $[a, b]$. Entonces (según se sabe del cap. 1, v. II), la función

$$[f_n(x)-f(x)]^2=f_n^2(x)+f^2(x)-2f_n(x)\cdot f(x)$$

será también integrable sobre el segmento $[a, b]$.

Introduzcamos el concepto fundamental de convergencia en media.

Definición 1. *Se dice que una sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en media hacia la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, si*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f_n(x)-f(x)]^2\,dx=0.$$

Definición 2. *Se dice que una serie funcional converge en media hacia la función $S(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, si la sucesión de sumas parciales de esta serie converge en media hacia $S(x)$ en el mismo segmento.*

OBSERVACIÓN. De estas definiciones se deduce que si una sucesión (o una serie) converge en media hacia $f(x)$ en todo el segmento $[a, b]$, dicha sucesión (o la serie) converge en media hacia $f(x)$ en cualquier segmento $[c, d]$ contenido dentro de $[a, b]$.

Aclaremos la cuestión acerca de la relación existente entre la convergencia en media y convergencia uniforme de una sucesión.

Demostremos primero que *si una sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia la función $f(x)$ de manera uniforme en el segmento $[a, b]$, entonces $\{f_n(x)\}$ también convergerá en media sobre el segmento $[a, b]$.*

Fijemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Para un número positivo $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ existe, debido a la convergencia uniforme, un número N tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{1.32}$$

para cualquier x de $[a, b]$ y todo $n \geqslant N$.

En virtud de (1.32), para todo $n \geqslant N$ tenemos

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

es decir, sobre el segmento $[a, b]$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en media hacia $f(x)$.

Cerciorémonos, ahora, de que *la convergencia en media de una sucesión sobre cierto segmento no trae consigo convergencia uniforme sobre el mismo segmento, ni mucho menos la convergencia al menos en un solo punto del segmento mencionado.*

Veamos una sucesión de segmentos $I_1, I_2, \ldots$ que pertenecen a $[0, 1]$ y que se expresan en la siguiente forma:

$$I_1 = [0, 1],$$
$$I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$
$$I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$I_{2^n} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right], \quad I_{2^n+1} = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right], \quad \ldots, \quad I_{2^{n+1}-1} = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Definamos el n-ésimo término de la sucesión del modo siguiente:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ sobre el segmento } I_n, \\ 0 \text{ en los puntos restantes de } [0, 1]. \end{cases}$$

La sucesión construida *converge en media hacia la función* $f(x) \equiv 0$ *sobre el segmento* $[0, 1]$.

En efecto,

$$\int_0^1 [f_n(x) - 0]^2\, dx = \int_{I_n} f_n^2(x)\, dx = \int_{I_n} dx =$$

$$= \text{longitud del segmento } I_n \to 0 \text{ (cuando } n \to \infty).$$

Además, la sucesión construida *no converge en ningún punto del segmento* $[0, 1]$.

Efectivamente cualquiera que sea el punto fijo x_0 del segmento $[0, 1]$, entre todos los números n, *tan grandes como se quiera*, existen tanto aquellos, para los cuales el segmento I_n contiene el punto x_0 (para estos números $f_n(x_0) = 1$), como también aquellos, para los cuales el segmento I_n no contiene el punto x_0 (para estos últimos números $f_n(x_0) = 0$). De este modo, la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ contiene un número infinito de términos, tanto iguales a la unidad, como nulos, es decir, dicha sucesión diverge.

Resulta que la convergencia en media de la sucesión $\{f_n(x)\}$ hacia la función límite $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ asegura la posibilidad de integrar término a término dicha sucesión en el segmento citado.

Teorema 1.11. *Si una sucesión* $\{f_n(x)\}$ *converge en media sobre el segmento* $[a, b]$ *hacia una función* $f(x)$, *dicha sucesión puede integrarse término a término sobre* $[a, b]$, *es decir, el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

existe y es igual a la integral $\int_a^b f(x)\, dx$.

Demostremos, ante todo, el siguiente lema.

Lema 1. *Para cualesquiera funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$, *integrables sobre el segmento* $[a, b]$, *se verifica la siguiente desigualdad*

$$\left| \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx}, \qquad (1.33)$$

llamada desigualdad de Cauchy—Buniakovski.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Veamos el siguiente trinomio cuadrado respecto de λ:

$$\int_a^b [f(x)-\lambda g(x)]^2\,dx=$$

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx-2\lambda\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\,dx\geqslant 0.$$

Como que este trinomio es *no negativo*, *no tiene*, pues, *raíces reales diferentes*. Pero, en tal caso su discriminante no es positivo, es decir,

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2-\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx\leqslant 0.$$

El lema está demostrado.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.11. Haciendo uso de la desigualdad (1.33) para $g(x)\equiv 1$, tendremos

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx\int_a^b dx}=$$

$$=\sqrt{(b-a)\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx}\to 0$$

(cuando $n\to\infty$). El teorema queda demostrado.

§ 3. Equicontinuidad de una sucesión de funciones. Teorema de Arzelà

Supongamos que cada una de las funciones $f_n(x)$ está definida en cierto segmento $[a, b]$.

Definición. *Una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ se llama equicontinua sobre el segmento $[a, b]$, si para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que la desigualdad*

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon$$

es válida con todo n y todos los puntos x', x'' del segmento $[a, b]$ ligados entre sí mediante una desigualdad

$$|x'-x''|<\delta.$$

OBSERVACIÓN 1. Directamente de esta definición se deduce que si la sucesión $\{f_n(x)\}$ es equicontinua sobre $[a, b]$, cualquiera de sus subsucesiones será también equicontinua sobre el mismo segmento.

Demostremos la siguiente afirmación notable.

***Teorema 1.12* (*teorema de Arzelà*).** *Si una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ es equicontinua y uniformemente acotada sobre el segmento $[a, b]$, en la sucesión mencionada puede elegirse una subsucesión que sea uniformemente convergente en el segmento $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Examinemos en el segmento $[a, b]$ la siguiente sucesión de puntos $\{x_n\}$: a título de x_1 tomemos aquel punto que divide el segmento $[a, b]$ en dos partes iguales; a título de x_2 y x_3,

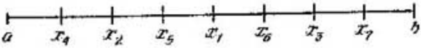

Fig. 1.3.

aquellos dos puntos que, junto con x_1, dividen el segmento $[a, b]$ en cuatro partes iguales (fig. 1.3); a título de x_4, x_5, x_6 y x_7 tomamos cuatro puntos los cuales dividen el segmento $[a, b]$, junto con x_1, x_2 y x_3 en ocho partes iguales (fig. 1.3), etc.

La sucesión construida $\{x_n\}$ posee la siguiente *propiedad*: cualquiera que sea un $\delta > 0$ elegido, existe para él un número n_0 de tal índole que en todo segmento de longitud δ, perteneciente a $[a, b]$, se ubique al menos uno de los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ [1]).

Procedamos ahora con la elección de una subsucesión uniformemente convergente sobre el segmento $[a, b]$ a partir de la sucesión $\{f_n(x)\}$.

Analicemos al principio la sucesión $\{f_n(x)\}$ en el punto x_1. Obtendremos una sucesión numérica *acotada* $\{f_n(x_1)\}$, de la cual puede ser separada, en virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass (véase v. I, cap. 3, § 4) una subsucesión convergente que se denotará del modo siguiente:

$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1),\ \ldots,\ f_{1n}(x_1),\ \ldots$$

Examinemos luego una sucesión funcional

$$f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots$$

en el punto x_2. De acuerdo con el teorema de Bolzano—Weierstrass, podemos elegir en ella una subsucesión convergente que se denotará del modo siguiente:

$$f_{21}(x_2),\ f_{22}(x_2),\ \ldots,\ f_{2n}(x_2),\ \ldots$$

[1]) Sobre una sucesión que posee tal propiedad suele decirse que es *densa en todo punto* del segmento $[a, b]$.

De este modo, la sucesión funcional

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \tag{1.34}$$

resulta ser convergente tanto en el punto x_1, como en el x_2.

Ahora examinamos la sucesión funcional (1.34) en el punto x_3 y elegimos en ella una subsucesión convergente

$$f_{31}(x_3),\ f_{32}(x_3),\ \ldots,\ f_{3n}(x_3),\ \ldots$$

Al continuar los razonamientos análogos, obtendremos una infinidad de subsucesiones

$$\begin{array}{l} f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ f_{13}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots \\ f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ f_{23}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \\ f_{31}(x),\ f_{32}(x),\ f_{33}(x),\ \ldots,\ f_{3n}(x),\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ f_{n3}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

con la particularidad de que la subsucesión que figura en la n-ésima fila es convergente en cada uno de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Veamos ahora la así llamada sucesión «diagonal»

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots$$

Demostremos que *esta sucesión es uniformemente convergente en el segmento* $[a, b]$.

Con el fin de reducir la notación, esta sucesión diagonal se denotará en adelante (al igual que también la sucesión de partida) con el símbolo

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

(es decir, escribiremos un solo índice en vez del índice doble). Fijemos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$.

Por cuanto la sucesión diagonal es equicontinua sobre el segmento $[a, b]$, existe, para $\varepsilon > 0$ fijo, un $\delta > 0$ tal que, cualesquiera que sean dos puntos x y x_m del segmento $[a, b]$ relacionados entre sí por la desigualdad $|x - x_m| < \delta$, se verifica para todo número n la desigualdad

$$|f_n(x) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.35}$$

Teniéndolo presente, dividamos el segmento $[a, b]$ en un número *finito* de segmentos de longitud inferior a δ. Elijamos en la sucesión $\{x_n\}$ un número finito n_0 de primeros términos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ tan grande que *en cada uno de los segmentos mencionados esté contenido por lo menos uno de los puntos* $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Es obvio que la sucesión diagonal es convergente en cada uno de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Por eso, para $\varepsilon > 0$, fijado más arriba, existe tal número N que

$$|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{1.36}$$

cualesquiera que sean $n \geqslant N$, p naturales y $m = 1, 2, \ldots, n_0$.

Sea, ahora, x un punto *arbitrario* del segmento $[a, b]$. Este punto se dispone forzosamente en uno de los segmentos mencionados más arriba cuya longitud es inferior a δ, razón por la cual existe para dicho punto al menos un solo punto x_m (m es uno de los números iguales a $1, 2, \ldots, n_0$) que satisfaga la condición $|x - x_m| < \delta$.

Debido a que el módulo de una suma do tres magnitudes no sobrepasa la suma de módulos, podemos escribir

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_m)| + \\ + |f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f_n(x)|. \tag{1.37}$$

Estimemos el segundo término en el miembro derecho de (1.37) con ayuda de la desigualdad (1.36), y para estimar los términos primero y tercero en el segundo miembro de (1.37) tendremos en cuenta que $|x - x_m| < \delta$, y emplearemos la desigualdad (1.35) que se verifica para cualquier número n (y, por tanto, para cualquier $n + p$).

Obtendremos en definitiva que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario existe tal número N que

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

para todo $n \geqslant N$, todos los p naturales y cualquier punto x de $[a, b]$. La convergencia uniforme de la sucesión diagonal queda demostrada. El teorema 1 12 está también demostrado.

OBSERVACIÓN 2. Al tratar el teorema de Arzelà, en lugar de exigir que la sucesión $\{f_n(x)\}$ sea uniformemente acotada sobre el segmento $[a, b]$ es suficiente exigir que esta sucesión sea acotada *al menos en un solo punto* del segmento en consideración. Efectivamente, resulta legítima la siguiente afirmación: *si la sucesión $\{f_n(x)\}$ es equicontinua sobre el segmento $[a, b]$ y está acotada por lo menos en un solo punto x_0 de dicho segmento, la sucesión citada es uniformemente acotada en el segmento $[a, b]$*. Con miras de probar esta afirmación indiquemos que, según la definición de equicontinuidad, existe, para $\varepsilon = 1$, un $\delta > 0$ tal que *la oscilación* de cualquier función $f_n(x)$ en cada segmento, cuya longitud no es superior a δ, no sobrepasa el número $\varepsilon = 1$. Por cuanto todo el segmento $[a, b]$ puede ser cubierto con un número finito n_0 de segmentos, cuya longitud no sea superior a δ, la oscilación de cualquier función $f_n(x)$ en todo el segmento $[a, b]$ no sobrepasa el número n_0. Mas, en este caso, de la desigualdad $|f_n(x_0)| \leqslant A$, que expresa carácter acotado de la sucesión $\{f_n(x)\}$ en el punto x_0, se desprende la desigualdad $|f_n(x)| \leqslant A + n_0$, que es válida para todo punto x del segmento $[a, b]$ y que es indicio del carácter uniformemente acotado de la sucesión citada sobre este segmento.

OBSERVACIÓN 3. Demos a conocer *el criterio de equicontinuidad: si la sucesión* $\{f_n(x)\}$ *se compone de las funciones diferenciables sobre el segmento* $[a, b]$, *y si la sucesión de derivadas* $\{f'_n(x)\}$ *está uniformemente acotada sobre dicho segmento, entonces la sucesión* $\{f_n(x)\}$ *es equicontinua en el segmento* $[a, b]$.

Para demostrar, tomemos sobre el segmento $[a, b]$ dos puntos arbitrarios, x' y x'', y escribamos para la función $f_n(x)$ en el segmento $[x', x'']$ la fórmula de Lagrange (véase v. I, cap. 8, § 9).

De conformidad con el teorema de Lagrange, existe sobre el segmento $[x', x'']$ un punto ξ_n tal que

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |f'_n(\xi_n)| \cdot |x' - x''|. \tag{1.38}$$

Por cuanto la sucesión de derivadas $\{f'_n(x)\}$ es uniformemente acotada sobre el segmento $[a, b]$, existe una constante A tal que para todos los números n se verifique la desigualdad

$$|f'_n(\xi_n)| \leqslant A. \tag{1.39}$$

Introduciendo (1.39) en (1.38), obtenemos

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant A\,|x' - x''|. \tag{1.40}$$

Fijamos cualquier $\varepsilon > 0$. Entonces, si tomamos $\delta = \varepsilon/A$, y si recurrimos a (1.40), llegamos a que para todos los números n, y para cualesquiera x' y x'' de $[a, b]$, ligados entre sí mediante la condición $|x' - x''| < \delta$, se verificará la desigualdad

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

La equicontinuidad de la sucesión $\{f_n(x)\}$ queda demostrada.

Examinemos, a título de ejemplo, una sucesión $\left\{\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right\}$. Esta sucesión es equicontinua en cualquier segmento $[a, b]$, pues en cualquier segmento $[a, b]$ la sucesión de derivadas $\{\cos nx\}$ está uniformemente acotada.

OBSERVACIÓN 4. El concepto de equicontinuidad puede formularse no sólo con relación al segmento $[a, b]$, sino también respecto de un intervalo, un semisegmento, una semirrecta, una recta infinita y, en general, respecto de todo conjunto denso en sí [1]). Además, este concepto puede introducirse no con relación a una sucesión de funciones, sino respecto de cualquier conjunto infinito de funciones.

[1]) En este caso el teorema de Arzelà queda en vigor, si en su formulación sustituimos el segmento $[a, b]$ por cualquier conjunto cerrado acotado.

§ 4. Series de potencias

1. Serie de potencias y dominio de su convergencia. Se denomina *serie de potencias* a una serie funcional de la forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (1.41)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ son unos números reales constantes llamados *coeficientes* de la serie (1.41). Trataremos de aclarar cómo está construido *el dominio de convergencia* de una serie de potencias.

Notemos que *toda serie de potencias converge en el punto $x = 0$*, con la particularidad de que existen series de potencias que son convergentes solamente en este punto (por ejemplo, una serie $\sum_{k=1}^{\infty} k! \cdot x^k$).

Formemos la siguiente sucesión numérica con ayuda de los coeficientes a_n de la serie (1.41):

$$\{\sqrt[n]{|a_n|}\} \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (1.42)$$

Pueden examinarse dos casos: 1) la sucesión (1.42) es *no acotada;* 2) la sucesión (1.42) es *acotada.*

En el caso (2) la sucesión (1.42) *tiene límite superior finito* (véase v. I, cap. 3, § 4, p 3) que se denotará con L. Subrayemos que el citado límite superior L es a ciencia cierta no *negativo* (puesto que todos los elementos de la sucesión (1.42) son no negativos y, por tanto, cualquier punto límite de esta sucesión es no negativo).

Al resumir, llegamos a una conclusión de que pueden tener lugar los siguientes tres casos: I) la sucesión (1.42) es no acotada; II) la sucesión (1.42) es acotada y tiene límite superior finito $L > 0$; III) la sucesión (1.42) es acotada y tiene límite superior $L = 0$.

Demostremos ahora la siguiente afirmación notable.

***Teorema 1.13* (*teorema de Cauchy—Hadamard*).**

I. *Si la sucesión* (1.42) *no es acotada, la serie de potencias* (1.41) *converge sólo cuando $x = 0$.*

II. *Si la sucesión* (1.42) *es acotada y tiene límite superior $L > 0$, la serie* (1.41) *es absolutamente convergente para los valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| < 1/L$, y divergente, para aquellos valores de x que satisfacen la desigualdad $|x| > 1/L$.*

III. *Si la sucesión* (1.42) *es acotada y su límite superior L es igual a cero* ($L = 0$), *la serie* (1.41) *es absolutamente convergente para todos los valores de x.*

DEMOSTRACIÓN.

I. Supongamos que la sucesión (1.42) no es acotada. Entonces, para $x \neq 0$ la sucesión

$$|x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|}$$

tampoco es acotada, es decir, dicha sucesión contiene *términos con los números n tan grandes como se quiera* y los términos mencionados satisfacen la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} > 1, \text{ o bien } |a_n \cdot x^n| > 1.$$

Mas, esto significa que para la serie (1.41) (cuando $x \neq 0$) está perturbada la condición necesaria de convergencia (véase v. II, cap. 4, § 1, p. 2), es decir, la serie (1.41) es divergente para $x \neq 0$.

II. Supongamos que la sucesión (1.42) es acotada y su límite superior L es mayor que cero ($L > 0$). Demostremos que la serie (1.41) converge absolutamente cuando $|x| < 1/L$, y diverge, cuando $|x| > 1/L$.

a) Al principio fijamos cualquier x que satisfaco la desigualdad $|x| < 1/L$. Existe, entonces, un $\varepsilon > 0$ tal que $|x| < 1/(L + \varepsilon)$. En virtud de las propiedades que posee el límite superior, todos los elementos $\sqrt[n]{|a_n|}$, a partir de cierto número n, satisfacen la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De este modo, a partir del número indicado n, queda válida la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \frac{\varepsilon}{2}}{L + \varepsilon} < 1,$$

es decir, la serie (1.41) es absolutamente convergente según el criterio de Cauchy (véase v. II, cap. 4, § 2, p. 3).

b) Fijamos ahora cualquier x que satisfaga una desigualdad $|x| > 1/L$.

Existe, entonces, tal $\varepsilon > 0$ que $|x| > 1/(L - \varepsilon)$. Por definición del límite superior, en la sucesión (1.42) puede ser elegida una subsucesión $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ que sea convergente hacia L.

Mas, esto quiere decir que, a partir de cierto número k, queda válida la desigualdad

$$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon.$$

Así pues, a partir del número indicado k, se verifica la desigualdad

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} \cdot x^{n_k}|} = |x| \cdot \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1,$$

o bien

$$|a_{n_k} \cdot x^{n_k}| > 1,$$

es decir, está perturbada la condición necesaria de convergencia de la serie (1.41) y dicha serie diverge.

III. Supongamos que la sucesión (1.42) es acotada y su límite superior es nulo ($L = 0$). Demostremos que la serie (1.41) es absolutamente convergente para cualquier x.

Fijamos arbitrariamente $x \neq 0$ (con $x = 0$ la serie (1.41) es absolutamente convergente a ciencia cierta). Por cuanto el límite superior L es igual a cero ($L = 0$) y la sucesión (1.42) no puede tener puntos límites negativos, el número $L = 0$ será el *único* punto límite, y, por consiguiente, sirve de límite para dicha sucesión, es decir, la sucesión (1.42) es infinitamente pequeña.

Pero, en este caso, para un número positivo $1/2\,|x|$ existe un número, a partir del cual se verifica la desigualdad

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2\,|x|}.$$

Por consiguiente, a partir del número mencionado,

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

es decir, la serie (1.41) es absolutamente convergente según el criterio de Cauchy (véase v. II, cap. 4, § 2, p. 3). El teorema está completamente demostrado.

El teorema demostrado nos lleva directamente a la siguiente afirmación fundamental.

Teorema 1.14. *Para cualquier serie de potencias* (1.41), *siempre que ella no representa una serie que converge sólo en el punto $x = 0$, existe un número positivo R (igual, quizás, al infinito) tal que la citada serie sea absolutamente convergente cuando $|x| < R$, y divergente, cuando $|x| > R$.*

Este número R se denomina *radio de convergencia* de la serie de potencias en consideración, y el intervalo $(-R, R)$, *intervalo de convergencia* de esta serie. Para el cálculo del radio de convergencia vale una fórmula

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.43}$$

(en el caso en que $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, $R = \infty$).

OBSERVACIÓN 1. En los extremos del intervalo de convergencia, es decir, en los puntos $x = -R$, y $x = R$, la serie de potencias puede ser tanto convergente, como divergente [1].

---

[1]) Indiquemos el siguiente *teorema de Abel: si la serie de potencias* (1.41) *converge para $x = R$, la suma de ella $S(x)$ es continua en el punto R a la izquierda.* Sin perder la generalidad de razonamientos podemos considerar que $R = 1$ mas en esta forma el teorema de Abel (que confirma, de hecho, la regularidad del método de Poisson—Abel) fue demostrado en el anexo 3 al cap. 4, v. II

Como que para la serie $1+\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ el radio de convergencia es igual a uno, el intervalo de convergencia será $(-1, 1)$, y esta serie diverge en los extremos del intervalo mencionado.

Para la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ el intervalo de convergencia es el mismo, es decir, $(-1, 1)$, pero esta última serie converge en ambos extremos del citado intervalo.

OBSERVACIÓN 2. Todos los resultados obtenidos en este punto son legítimos para la serie (1.41), en la cual la variable real x está sustituida por una variable compleja z.

Para la serie de este tipo se establece la existencia de un número positivo R tal que la serie converge absolutamente cuando $|z| < R$, y diverge, cuando $|z| > R$.

Para el cálculo de R vale la fórmula (1.43). El número R recibe el nombre de *radio de convergencia*, y el campo $|z| < R$, *círculo de convergencia* de la citada serie de potencias.

2. Continuidad de la suma de una serie de potencias. Supongamos que la serie de potencias (1.41) tiene el radio de convergencia $R > 0$.

Lema 2. *Cualquiera que sea un número positivo r que satisfaga la condición $r < R$, la serie* (1.41) *es uniformemente convergente sobre el segmento $[-r, r]$, es decir, para $|x| \leqslant r$.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 1.14, la serie (1.41) es absolutamente convergente cuando $x = r$, es decir, converge la serie

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot r^k.$$

Pero, la última serie numérica es mayorante para la serie (1.41) para todo x del segmento $[-r, r]$. Debido al criterio de Weierstrass, la serie (1.41) converge uniformemente sobre el segmento $[-r, r]$. El lema está demostrado.

Corolario. *En las condiciones del lema 2 la suma de la serie* (1.41) *es una función continua sobre el segmento* $[-r, r]$ (en virtud del teorema 1.7).

Teorema 1.15. *La suma de una serie de potencias en el interior de su intervalo de convergencia es una función continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S(x)$ la suma de la serie de potencias (1.41), y sea R, su radio de convergencia. Fijamos cualquier x en el interior del intervalo de convergencia, es decir, tal que sea $|x| < R$. Existe siempre un número r tal que $|x| < r < R$. La función $S(x)$ es continua sobre el segmento $[-r, r]$, en virtud del corolario del lema 2. Por consiguiente, $S(x)$ también es continua en el punto x. El teorema está demostrado.

3. Integración y diferenciación término a término de una serie de potencias.

Teorema 1.16. *Si $R > 0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias* (1.41), *y si x satisface la condición $|x| < R$, entonces la serie* (1.41) *puede integrarse término a término sobre el segmento* $[0, x]$. *La serie obtenida como resultado de la integración término a término tendrá el mismo radio de convergencia que la serie de partida.*

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier x que satisface una condición $|x| < R$, se encontrará un r tal que $|x| < r < R$. De acuerdo con el lema 2, la serie (1.41) converge uniformemente sobre el segmento $[-r, r]$, y, por lo tanto, también sobre el segmento $[0, x]$. Mas, en este caso dicha serie puede integrarse, debido al teorema 1.8, término a término sobre el segmento $[0, x]$.

Como resultado de la integración término a término se obtendrá la siguiente serie de potencias

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots,$$

cuyo radio de convergencia constituirá, de conformidad con el teorema 1.14, una magnitud inversa del límite superior de la sucesión

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \tag{1.44}$$

El límite superior de la sucesión (1.44) es el mismo que en (1.42) [1]), por lo cual el teorema queda demostrado.

Teorema 1.17. *La serie de potencias* (1.41) *puede diferenciarse término a término en el interior de su radio de convergencia. Una serie que se obtendrá por diferenciación término a término tendrá el mismo radio de convergencia R que la serie de partida.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 1.9 y lema 2, resulta suficiente demostrar solamente la segunda afirmación del teorema.

Como resultado de la diferenciación término a término de (1.41), obtendremos la serie

$$\begin{gathered} a_1 + 2\cdot a_2\cdot x + \ldots + n\cdot a_n\cdot x^{n-1} + \\ + (n+1)\cdot a_{n+1}\cdot x^n + \ldots, \end{gathered}$$

cuyo radio de convergencia R (de acuerdo con el teorema 1.14) es inverso al límite superior de la sucesión

$$\{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}\}. \tag{1.45}$$

---

[1]) Pues, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]^{\frac{n}{n+1}} =$
$= \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|a_n|}]$.

Por cuanto la sucesión (1.45) y la (1.42) tienen un mismo límite superior [1]), el teorema queda demostrado.

Corolario. *Una serie de potencias puede diferenciarse término a término, en el interior de su intervalo de convergencia, cualquier número de veces.*

Una serie, obtenida por n-ésima diferenciación término a término de la serie de potencias inicial tiene el mismo radio de convergencia que la serie inicial.

§ 5. Desarrollo de las funciones en series de potencias

1. Desarrollo de una función en serie de potencias.

Definición 1. *Diremos que una función $f(x)$ puede desarrollarse sobre el intervalo $(-R, R)$, (sobre el conjunto $\{x\}$) en serie de potencias, si existe una serie de potencias que converge hacia $f(x)$ en el segmento citado (conjunto citado).*

Son válidas las siguientes afirmaciones.

1°. *Para que una función $f(x)$ pueda desarrollarse en serie de potencias sobre el intervalo $(-R, R)$, es necesario que dicha función tenga en el intervalo citado derivadas continuas de cualquier orden* [2]).

En efecto, una serie de potencias puede diferenciarse término a término, en el interior de su intervalo de convergencia que en todo caso contiene el intervalo $(-R, R)$, cualquier número de veces, con la particularidad de que todas las series obtenidas en este caso son convergentes en el interior del mismo intervalo de convergencia (teorema 1.17).

Pero, las sumas de las series obtenidas por diferenciación cualquier número de veces representan (en virtud del teorema 1.15) funciones continuas en el interior del intervalo citado de convergencia y, por lo tanto, son continuas sobre el intervalo $(-R, R)$.

2°. *Si una función $f(x)$ se desarrolla sobre el intervalo $(-R, R)$ en serie de potencias, se lo puede hacer sólo de un único modo.*

Efectivamente, supongamos que la función $f(x)$ puede ser desarrollada sobre el intervalo $(-R, R)$ en la serie de potencias (1.41).

---

[1]) Pues, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [\sqrt[n]{|{}_na|}]^{\frac{n}{n-1}}=$ $=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

[2]) Observemos que existen funciones que tienen en el intervalo $(-R, R)$ derivadas continuas de cualquier orden, pero no son desarrollables en dicho intervalo en serie de potencias. Como ejemplo de tal función puede servir

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{para } x\neq 0, \\ 0 & \text{para } x=0. \end{cases}$$

Al diferenciar la serie indicada término a término n veces (lo que puede realizarse a ciencia cierta en el interior del intervalo $(-R, R)$), obtendremos

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot n! + a_{n+1} \cdot (n+1)!\, x + \ldots$$

De aquí, para $x = 0$ encontramos

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

o bien

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{1.46}$$

Así pues, los coeficientes de la serie de potencias (1.41), en la que puede desarrollarse la función $f(x)$, *se definen unívocamente por la fórmula* (1.46).

Supongamos ahora que la función $f(x)$ tiene sobre el intervalo $(-R, R)$ derivadas continuas de cualquier orden.

Definición 2. *La serie de potencias* (1.41), *cuyos coeficientes se definen mediante la fórmula* (1.46), *se llama serie de Taylor de la función* $f(x)$.

La afirmación 2° nos conduce a lo siguiente:

3°. *Si una función $f(x)$ puede ser desarrollada sobre el intervalo $(-R, R)$ en serie de potencias, dicha serie es serie de Taylor de la función $f(x)$.*

Enunciemos, para concluir, la siguiente afirmación que se deduce directamente del § 14, cap. 8, v. I.

4°. *Para que una función $f(x)$ pueda ser desarrollada en serie de Taylor sobre el intervalo $(-R, R)$ (sobre el conjunto $\{x\}$), es necesario y suficiente que el término residual en la fórmula de Maclaurin para esta función tienda a cero sobre el intervalo mencionado (conjunto mencionado).*

2. Desarrollo de algunas funciones elementales en serie de Taylor. En el v. I (véase p. 2, § 15, cap. 8) se ha demostrado que los términos residuales en la fórmula de Maclaurin para las funciones e^x, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ tienden a cero en toda la recta infinita, mientras que el término residual en la fórmula de Maclaurin para la función $\ln(1 + x)$ tiende a cero sólo sobre el semisegmento $-1 < x \leqslant +1$.

En vista de la afirmación 4° del punto anterior, estos razonamientos nos llevan a los siguientes desarrollos:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Los primeros tres de los desarrollos citados convergen para todos los valores de x, y el último, para los valores de x pertenecientes al semisegmento $-1 < x \leqslant 1$.

Detengámonos ahora en un desarrollo en serie de potencias de la función $(1+x)^\alpha$, o en la llamada *serie binomial*.

Si $f(x) = (1+x)^\alpha$, tenemos

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots$$
$$\ldots(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n}.$$

Por eso, la fórmula de Maclaurin con el término residual en forma de Cauchy tiene por expresión (véase v. I, cap. 8, § 14)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_{n+1}(x), \quad (1.47)$$

donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1} \cdot f^{n+1}(\theta x) =$$
$$= \frac{(1-\theta)^n}{n!} \cdot x^{(n+1)} \cdot \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1} =$$
$$= \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!} \cdot \alpha(1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot x^{n+1} \quad (1.48)$$

(θ es un número del intervalo $0 < \theta < 1$).

Cerciorémonos al principio de lo que para $\alpha > 0$ el término residual $R_{n+1}(x)$ tiende hacia cero (con $n \to \infty$) en cada punto del intervalo $-1 < x < 1$.

En efecto, todos los términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right\}$ nunca sobrepasan la unidad en el intervalo citado; la sucesión $\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right\}$ es acotada para cualquier $\alpha > 0$ fijo [1]; el número $\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}$ está definido para cualquier $\alpha > 0$ y para todo x del intervalo $-1 < x < +1$; por fin, la sucesión $\{x^{n+1}\}$ es infinitamente pequeña para cualquier x del intervalo $-1 < x < 1$.

[1] Todos los elementos de esta sucesión están acotados en módulo por el número $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-[\alpha])}{[\alpha]!}$, donde $[\alpha]$ es la parte entera de α.

Así pues, el término residual $R_{n+1}(x)$ tiende, en virtud de (1.48), a cero, cualesquiera que sean $\alpha > 0$ fijo y x del intervalo $-1 < x < 1$.

Por consiguiente, debido a (1.47), *cuando* $\alpha > 0$, *en cualquier punto del intervalo* $-1 < x < 1$ *es válido el desarrollo*

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k. \qquad (1.49)$$

Demostremos, ahora, que *cuando* $\alpha > 0$, *la serie en el segundo miembro de* (1.49) *converge uniformemente hacia la función* $(1+x)^{\alpha}$ *sobre el segmento cerrado* $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

En cualquier punto del segmento mencionado esta serie puede mayorarse por la siguiente serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha|\cdot|1-\alpha|\ldots|k-1-\alpha|}{k!}. \qquad (1.50)$$

De acuerdo con el criterio de Weierstrass, para establecer convergencia uniforme sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$ de la serie que figura en el segundo miembro de (1.49), basta demostrar convergencia de la serie mayorante (1.50).

Denotemos con p_k el k-ésimo término de la serie (1.50). Obtendremos para todos los k suficientemente grandes

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k-\alpha}{k+1} = 1 - \frac{1+\alpha}{k+1}. \qquad (1.51)$$

De la fórmula (1.51) se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) = (1+\alpha)\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = 1+\alpha > 1,$$

es decir, la serie (1.50) es convergente, en virtud del *criterio* de Raabe (véase v. II, cap. 4, § 2, p. 5).

Con ello queda demostrado que, cuando $\alpha > 0$, la serie que figura en el segundo miembro de (1.49) converge uniformemente sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Resta por demostrar que la serie mencionada converge sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$ hacia la función $(1+x)^{\alpha}$.

En virtud de lo demostrado más arriba, la suma de la serie mencionada $S(x)$ y la función $(1+x)^{\alpha}$ *coinciden en todo punto sobre el intervalo* $-1 < x < 1$. Además, ambas funciones, $S(x)$ y $(1+x)^{\alpha}$, *son continuas en el segmento* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (la función $S(x)$ es continua, pues representa la suma de la serie convergente compuesta por las funciones continuas; la continuidad de la función $(1+x)^{\alpha}$ para $\alpha > 0$ es obvia).

Pero, en tal caso, los valores de las funciones $S(x)$ y $(1+x)^{\alpha}$ en los puntos $x = -1$, y $x = 1$ han de coincidir, es decir, la serie en el segundo miembro de (1.49) es uniformemente convergente hacia $(1+x)^{\alpha}$ sobre el segmento cerrado $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Nociones elementales sobre las funciones de una variable compleja. Se ha notado más arriba que al caso de la serie de potencias respecto de la variable compleja z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

se extienden los teoremas 1.13 y 1.14 (sobre la existencia y valores del radio de convergencia). Las series de esta índole se utilizan para definir funciones de variable compleja z.

Las funciones e^z, $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ de la variable compleja z se definen como sumas de las siguientes series:

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.52}$$

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{(2n)!}, \tag{1.53}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{1.54}$$

Es fácil comprobar que las tres series mencionadas convergen absolutamente para todos los valores de z (su radio de convergencia es $R = \infty$).

Establezcamos ahora la relación existente entre las funciones e^z, $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$.

Al sustituir en la fórmula (1.52) z por iz, obtendremos

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots = \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right). \end{aligned} \tag{1.55}$$

Al cotejar el segundo miembro de la igualdad (1.55) con los desarrollos (1.53) y (1.54), llegamos a la siguiente fórmula notable:

$$e^{iz} = \cos z + i \cdot \operatorname{sen} z. \tag{1.56}$$

La fórmula (1.56) desempeña un papel fundamental en la teoría de funciones de la variable compleja y se denomina *fórmula de Euler*.

Atribuyendo a la variable z en la fórmula de Euler el valor de un número real x, y luego, el del número real $-x$, obtenemos las siguientes dos fórmulas:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x,$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x.$$

Al sumar y restar estas dos fórmulas, obtendremos fórmulas que expresan $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en términos de la función exponencial:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{cases} \tag{1.57}$$

Detengámonos en conclusión en la definición de función logarítmica $w = \ln z$ de la variable compleja z. Dicha función se define naturalmente como función inversa de la función exponencial, es decir, a base de la relación $z = e^w$. Al asumir $w = u + iv$, $z = x + iy$, propongámonos el objetivo de expresar u y v en términos de $z = x + iy$.

De la correlación

$$z = x + iy = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v)$$

obtendremos, haciendo uso del concepto de módulo y argumento de un número complejo (véase fórmula (7.6) del v. I),

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = e^u, \quad \arg z = v - 2\pi k,$$

donde

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

De las últimas igualdades encontramos que

$$u = \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$v = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

o bien, en definitiva

$$\ln z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k), \quad \text{donde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.58}$$

La fórmula (1.58) enseña que la función logarítmica en un campo complejo *no es unívoca*; su parte imaginaria tiene, para el mismo valor de z, una infinidad de valores correspondientes a diferentes $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Es fácil comprender que la situación análoga tendrá lugar también al definir en un campo complejo funciones trigonométricas inversas.

4. Aproximación uniforme de una función continua mediante los polinomios (teorema de Weierstrass). En este punto demostremos un teorema fundamental que se debe a Weierstrass y que fue enunciado por él en 1895.

Teorema 1.18 (teorema de Weierstrass). *Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, existe una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}$ que converge uniformemente sobre $[a, b]$ hacia la función $f(x)$, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un polinomio $P_n(x)$ con el número n (dependiente sólo de ε) tal que*

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

simultáneamente para todos los x del segmento $[a, b]$.

Dicho de otro modo, *una función $f(x)$, continua sobre el segmento $[a, b]$, puede ser uniformemente aproximada sobre dicho segmento mediante un polinomio con la exactitud ε prefijada con anticipación.*

DEMOSTRACIÓN. Sin limitar la generalidad de nuestros razonamientos, podemos examinar el segmento $[0, 1]$ [1]) en lugar del segmento $[a, b]$. Además, es suficiente demostrar el teorema para una función continua $f(x)$ que se anula en los extremos del segmento $[0, 1]$, es decir, que satisface las condiciones $f(0) = 0$, y $f(1) = 0$. Efectivamente, si la función $f(x)$ fallase a satisfacer estas condiciones,

[1]) Puesto que uno de estos segmentos se transforma en otro mediante una sustitución lineal $x = (b - a) t + a$.

entonces, al poner

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)],$$

obtendríamos una función $g(x)$ continua sobre el segmento $[0, 1]$ que satisfaga las condiciones $g(0) = 0$ y $g(1) = 0$, mientras que la posibilidad de representar $g(x)$ en forma del límite para una sucesión uniformemente convergente de polinomios nos permitiría llegar a una deducción de que $f(x)$ es también representable en forma del límite de una sucesión uniformemente convergente de polinomios (ya que la diferencia $f(x) - g(x)$ es un polinomio de primer grado).

Así pues, admitamos que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[0, 1]$ y satisface las condiciones $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Tal función $f(x)$ podemos prolongarla a toda la recta infinita, haciéndola igual a cero fuera de los márgenes del segmento $[0, 1]$ y afirmar que la función prolongada de la manera aducida *es uniformemente continua en toda la recta infinita.*

Veamos la siguiente sucesión concreta de polinomios no negativos de grado $2n$:

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.59}$$

en cada uno de los cuales la constante c_n está elegida de un modo tal que se cumpla la igualdad

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.60}$$

Sin calcular el valor exacto de la constante c_n, estimémosla superiormente.

Con este fin notemos que para cualquier número $n = 1, 2, \ldots$ y para todo x del segmento $[0, 1]$ se verifica la desigualdad [1])

$$(1 - x^2)^n \geqslant 1 - nx^2. \tag{1.61}$$

Aplicando la desigualdad (1.61) y teniendo presente que $1/\sqrt{n} \leqslant 1$, tendremos para todo $n \geqslant 1$:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,dx = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)^n\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n\,dx \geqslant 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\,dx = \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{1.62}$$

De las fórmulas (1.59), (1.60) y (1.62) concluimos que para todos los números $n = 1, 2, \ldots$ es válida la siguiente estimación supe-

[1]) Esta desigualdad se deduce de lo que para cualquier $n \geqslant 1$ una función $\varphi(x) = (1 - x^2)^n - (1 - nx^2)$ *es no negativa en todo punto del segmento* $0 \leqslant x \leqslant 1$, pues dicha función se anula cuando $x = 0$ y tiene en cualquier punto del segmento citado derivada no negativa $\varphi'(x) = 2nx[1 - (1 - x^2)^{n-1}]$.

rio) para la constante c_n:

$$c_n < \sqrt{n}. \qquad (1.63)$$

De (1.63) y (1.59) se deduce que, cualquiera que sea $\delta > 0$, para todo x del segmento $\delta \leqslant x \leqslant 1$ se verifica la desigualdad

$$0 \leqslant Q_n(x) \leqslant \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n. \qquad (1.64)$$

De (1.64) se desprende que, *cualquiera que sea $\delta > 0$ fijo, la sucesión de polinomios no negativos $\{Q_n(x)\}$ es uniformemente convergente hacia cero sobre el segmento $\delta \leqslant x \leqslant 1$* [1].

Pongamos ahora para todo x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t)\, dt \qquad (1.65)$$

y cerciorémonos de que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ la función $P_n(x)$ es un polinomio de $2n$-ésimo grado, con la particularidad de que $\{P_n(x)\}$ es precisamente la sucesión buscada de polinomios uniformemente convergente sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ hacia la función $f(x)$.

Ya que la función analizada $f(x)$ es igual a cero fuera de los márgenes del segmento [0, 1], para cualquier x del segmento [0, 1] la integral (1.65) puede escribirse en la forma

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\, Q_n(t)\, dt.$$

Sustituyendo en la última integral la variable t por la $t - x$, comuniquémosle una forma

$$P_n(x) = \int_{0}^{1} f(t)\, Q_n(t-x)\, dt. \qquad (1.66)$$

De (1.66) y (1.59) se pone claro que la función $P_n(x)$ representa un polinomio de $2n$-ésimo grado.

Resta por demostrar que la sucesión $\{P_n(x)\}$ es uniformemente convergente sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ hacia la función $f(x)$.

---

[1] Efectivamente, es suficiente demostrar que la sucesión $a_n = (1-\delta^2)^n \cdot \sqrt{n}$ converge hacia cero, lo que se deduce, por ejemplo, de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge según el criterio de Cauchy (véase teorema 4.6 del v. II) por cuanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = (1-\delta^2) \lim_{n\to\infty} n^{1/2n} = (1-\delta^2) < 1.$$

Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Para ε fijo existe, por ser $f(x)$ uniformemente continua en toda la recta infinita, un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para} \quad |x-y| < \delta. \tag{1.67}$$

Además, puesto que $f(x)$ es continua sobre el segmento $[0, 1]$, será en adición acotada en el mismo, y, por consiguiente, en todo punto de la recta infinita. Esto quiere decir que existe una constante A tal que para cualquier x se verifica

$$|f(x)| \leqslant A. \tag{1.68}$$

Haciendo uso de (1.60), (1.64), (1.67), (1.68), y teniendo presente que $Q(x)$ es no negativa, estimemos la diferencia $P_n(x) - f(x)$.

Para todo x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ tendremos

$$|P_n(x)-f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t)-f(x)]\, Q_n(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+t)-f(x)|\, Q_n(t)\, dt \leqslant 2A \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2A \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \leqslant 4A\sqrt{n}\cdot(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con el fin de finalizar la demostración del teorema, basta observar que para todos los números n suficientemente grandes se verifica la siguiente desigualdad

$$4A\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Corolario. *Si no sólo la propia función $f(x)$, sino también las derivadas suyas hasta cierto orden k inclusive son continuas sobre el segmento $[0, 1]$* [1]*, existe, entonces, una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}$ tal que cada una de las sucesiones $\{P_n(x)\}$, $\{P'_n(x)\}$, . . ., $\{P_n^{(k)}(x)\}$ converge uniformemente sobre el segmento $[0, 1]$ hacia $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$, respectivamente.*

En efecto, sin perder la generalidad de los razonamientos, podemos considerar que cada una de las funciones $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(k)}(x)$ se anula cuando $x = 0$, y $x = 1$ [2], mas, en estas con-

[1] En lugar de $[0, 1]$ podemos tomar, por supuesto, $[a, b]$.

[2] Si la función $f(x)$ fallara a satisfacer estas condiciones, encontraríamos un polinomio $\overline{P}_k(x)$ de $2n$-ésimo grado de tal género que para la función $g(x) = f(x) - \overline{P}_k(x)$ estas condiciones se cumplan.

diciones la función $f(x)$ puede ser prolongada a toda la recta infinita, suponiéndola igual a cero fuera de $[0, 1]$, de modo que la función prolongada y todas las derivadas suyas de orden hasta el k-ésimo inclusive resultarán ser *uniformemente continuas en toda la recta infinita*.

Pero, en este caso, al denotar con $P_n(x)$ el mismo polinomio (1.65) que se trató más arriba, y al repetir los razonamientos aducidos en la demostración del teorema 1.18, demostremos que cada una de las diferencias

$$P_n(x) - f(x),\ P'_n(x) - f'(x),\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)$$

es una infinitésima, uniforme con relación a x sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$.

OBSERVACIÓN 1. La demostración expuesta se generaliza con facilidad al caso de una función de m variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ continua en el cubo m-dimensional $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Por analogía completa con el teorema 1.18 se demuestra que para tal función $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ existe una sucesión de polinomios de m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ que es uniformemente convergente hacia dicha función en el cubo m-dimensional.

OBSERVACIÓN 2. Observemos que los polinomios que figuran en el teorema 1.18 pueden ser sustituidos por las funciones de un tipo más general, conservando intacta la afirmación sobre la posibilidad de aproximación uniforme mediante tales funciones de cualquier función continua f.

Convengamos en denominar *álgebra* una totalidad arbitraria A de funciones, definidas sobre cierto conjunto E, si[1]) 1) $f + g \in A$; 2) $f \cdot g \in A$; 3) $\alpha \cdot f \in A$ para $f \in A$ y $g \in A$ arbitrarias y para cualquier α real.

Dicho de otro modo, álgebra es totalidad de funciones cerrada con relación a la sumación y multiplicación de funciones y a la multiplicación de las funciones por los números reales.

Si para cada punto x del conjunto E existe cierta función $g \in A$ tal que $g(x) \neq 0$, suele decirse que el álgebra A *no desaparece en ningún punto x del conjunto E*.

Se dice que una totalidad A de funciones definidas sobre el conjunto E *separa los puntos del conjunto E*, si para cualesquiera puntos diferentes x_1 y x_2 del conjunto mencionado se encuentra una función de A tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Tiene lugar la siguiente afirmación notable llamada *teorema de Weierstrass—Stone*[2]).

Sea A un álgebra de funciones, continuas sobre el conjunto compacto E[3]), *la que separa los puntos del conjunto E y no desaparece en ningún punto de este conjunto. Entonces, toda función $f(x)$, continua sobre el conjunto E, puede ser representada en forma del límite de una sucesión de funciones del álgebra A uniformemente convergente.*

---

[1]) Recordemos que el símbolo $f \in A$ denota la pertenencia de f a A.

[2]) *M. Stone* es matemático contemporáneo norteamericano.

[3]) Recordemos que compacto se llama un conjunto acotado cerrado.

Capítulo 2

INTEGRALES DOBLES E INTEGRALES N-MÚLTIPLES

En el v. 1 se han analizado problemas físicos y geométricos que conducían al concepto de integral definida simple.

Como problemas tipo de este género intervienen el problema de cálculo de la masa de un vástago no homogéneo a base de la densidad lineal conocida del vástago citado y el de cálculo del área de un trapecio curvilíneo (es decir, del área que se dispone por debajo de la gráfica de la función no negativa $y = f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$).

No es difícil indicar problemas «multidimensionales» análogos que conducen al concepto de integral doble o integral triple.

Por ejemplo, el problema de cálculo de la masa de un cuerpo no homogéneo T según la densidad volumétrica conocida $\rho(M)$ de este cuerpo nos lleva, naturalmente, al concepto de la integral triple.

Al objeto de calcular la masa del cuerpo mencionado T, dividámoslo en secciones suficientemente pequeñas $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Podemos considerar aproximadamente que la densidad volumétrica $\rho(M)$ de cada sección T_k es constante e igual a $\rho(M_k)$, donde M_k es cierto punto de la sección T_k. En este caso la masa de cada sección T_k será aproximadamente igual a $\rho(M_k)\cdot v_k$, donde v_k es el volumen de la sección T_k.

El valor aproximado de la masa de todo el cuerpo T será igual a la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(M_k)\cdot v_k.$$

Resulta natural que el valor exacto de la masa esté definido como límite de la citada suma cuando cada sección T_k disminuye indefinidamente [1]). Precisamente este límite puede tomarse por la definición de integral triple, extendida al campo tridimensional T, de la función $\rho(M)$.

De un modo sumamente análogo puede examinarse el problema geométrico sobre el cálculo del volumen del llamado cilindro con fondo encorvado (es decir, volumen del cuerpo que está expuesto en la fig. 2.1 por debajo de la gráfica de una función no negativa $z = f(x, y)$ en cierto dominio bidimensional D). Este problema

[1]) Por supuesto, conviene precisar el término «disminución indefinida».

conduce al concepto de integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al dominio bidimensional D.

En el presente capítulo se expone la teoría de las integrales dobles, triples y, en general, de integrales n-múltiples.

Para el empleo más efectivo de la analogía con la integral simple, introduzcamos primero el concepto de integral doble para un rectán-

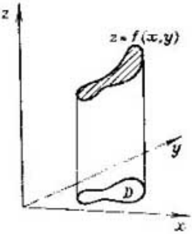

Fig. 2.1.

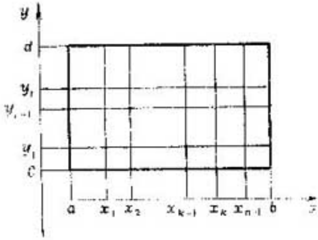

Fig. 2.2.

gulo y sólo luego, de la integral doble extendida a un dominio arbitrario tanto con ayuda de la partición rectangular, como mediante partición arbitraria del campo mencionado.

§ 1. Definición y existencia de la integral doble

1. Definición de la integral doble para rectángulos. Admitamos que una función arbitraria $f(x, y)$ está definida en todo punto sobre el rectángulo $R = [a \leqslant x \leqslant b]\cdot[c \leqslant y \leqslant d]$ (fig. 2.2).

Dividamos el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ en n segmentos parciales con ayuda de los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, y el segmento $c \leqslant y \leqslant d$, en p segmentos parciales con ayuda de los puntos $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$.

A la partición citada mediante unas rectas paralelas a los ejes Ox y Oy (véase fig. 2.2) le corresponde la partición del rectángulo R en $n \cdot p$ rectángulos parciales

$$R_{kl} = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k]\cdot[y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l] \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, p).$$

La partición mencionada del rectángulo R se designará con el símbolo T.

En este capítulo por término «rectángulo» se entenderá siempre un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados.

Elijamos en cada rectángulo parcial R_{kl} un punto arbitrario (ξ_k, η_l). Al poner $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, denotemos con ΔR_{kl} el área del rectángulo R_{kl}. Es evidente que $\Delta R_{kl} = \Delta x_k \times \Delta y_l$.

Definición 1. *Un número*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l) \cdot \Delta R_{kl} \tag{2.1}$$

se llama suma integral de la función $f(x, y)$, correspondiente a la partición dada T del rectángulo R y a la elección dada de los puntos intermedios (ξ_k, η_l) en los rectángulos parciales de la partición T.

La diagonal $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$ se denominará *diámetro* del rectángulo R_{kl}. Con el símbolo Δ se designará el mayor de los diámetros de todos los rectángulos parciales R_{kl}.

Definición 2. *El número I se llama límite de las sumas integrales (2.1) con $\Delta \to 0$, si para cualquier número positivo ε puede indicarse tal número positivo δ que para $\Delta < \delta$ se verifica la desigualdad*

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

cualquiera que sea la elección de los puntos (ξ_k, η_l) sobre los rectángulos parciales R_{kl}.

Definición 3. *Una función $f(x, y)$ se llama integrable (según Riemann) sobre el rectángulo R, si existe un límite finito I de las sumas integrales de dicha función para $\Delta \to 0$.*

El límite mencionado I se denomina integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al rectángulo R y se denota por uno de los siguientes símbolos:

$$I = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(M)\, d\sigma.$$

OBSERVACIÓN. Al igual que en el caso de una integral definida simple, (véase v. II, cap 1, § 1), se establece que *cualquier función $f(x, y)$, integrable sobre el rectángulo R, es acotada en dicho rectángulo.*

Esto nos presta los fundamentos para analizar en adelante solamente funciones acotadas $f(x, y)$.

2. Existencia de la integral doble para un rectángulo. La teoría de Darboux, desarrollada en el cap. 1, v. II para la integral definida simple, es completamente aplicable para el caso de la integral doble en un rectángulo R. En vista de la citada analogía, limitémonos a esbozar un esquema general de razonamientos.

Sean M_{kl} y m_{kl} la cota superior exacta y la cota inferior exacta, respectivamente, de una función $f(x, y)$ sobre el rectángulo parcial R_{kl}. Compongamos dos sumas para la partición dada T del rectángulo R:

una **superior**

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta R_{kl}$$

y otra inferior

$$s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta R_{kl}.$$

Resultan válidas las siguientes afirmaciones (cuya demostración es completamente análoga a las demostraciones aducidas en el p. 2, § 2, cap. 1, v. II).

1°. *Para cualquier partición fija T y todo $\varepsilon > 0$, las puntos intermedios (ξ_k, η_l) en los rectángulos parciales R_{kl} pueden elegirse de un modo tal que la suma integral σ satisfaga las desigualdades $0 \leqslant S - \sigma < \varepsilon$.*

Los puntos (ξ_k, η_l) pueden también elegirse de tal modo que la suma integral satisfaga las desigualdades $0 \leqslant \sigma - S < \varepsilon$.

2°. *Si una partición T' del rectángulo R se ha obtenido por adición de unas rectas nuevas a las que forman la partición T, entonces la suma superior S' de la partición T' no sobrepasa la suma superior S de la partición T, mientras que la suma inferior s' de la partición T' no es menor que la suma inferior s de la partición T, es decir,*

$$s \leqslant s', \quad S' \leqslant S.$$

3°. *Sean T' y T'' cualesquiera dos particiones del rectángulo R. Entonces, la suma inferior de una de estas particiones no sobrepasa la suma superior de la otra. A saber, si s', S' y s'', S'' son sumas inferiores y superiores, respectivamente, de las particiones T' y T'', entonces*

$$s' \leqslant S'', \quad s'' \leqslant S'.$$

4°. *Un conjunto $\{S\}$ de sumas superiores de una función dada $f(x, y)$ para toda clase de particiones del rectángulo R está acotado inferiormente. El conjunto $\{s\}$ de sumas inferiores está acotado superiormente. De este modo, existen unos números*

$$\overline{I} = \inf\{S\}, \quad \underline{I} = \sup\{s\},$$

llamados integrales de Darboux, superior e inferior, respectivamente, (de la función $f(x, y)$) extendida al rectángulo R.

Es fácil convencerse de que $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

5°. *Supongamos que la partición T' del rectángulo R se ha obtenido a base de la partición T por adición a la última de p rectas nuevas, y sea s', S' y s, S las sumas inferiores y superiores, respectivamente, de las particiones T' y T.*

Entonces, para las diferencias $S - S'$ y $s' - s$ puede obtenerse una estimación cuyo valor depende del diámetro máximo Δ del rectángulo parcial de la partición T, del número p de rectas añadidas, de las cotas exactas M y m de la función $f(x, y)$ en el rectángulo R y del diámetro d del rectángulo R.

A saber, $S - S' \leqslant (M - m) \cdot p \cdot \Delta \cdot d,$

$$s' - s \leqslant (M - m) \cdot p \cdot \Delta \cdot d.$$

6°. *Las integrales de Darboux superior e inferior, $\overline{I}$ e $\underline{I}$, de la función $f(x, y)$ extendidas al rectángulo R son límites de las sumas superiores e inferiores, respectivamente, para $\Delta \to 0$* [1].

De las propiedades 1°—6° se deduce el siguiente teorema fundamental.

Teorema 2.1. *Para que una función $f(x, y)$ acotada sobre el rectángulo R sea integrable en dicho rectángulo, es necesario y suficiente que con todo $\varepsilon > 0$ se encuentre tal partición T del rectángulo R, para la cual $S - s < \varepsilon$.*

Al igual que en el cap. 1, v. II, el teorema 2.1 permite, siendo analizado en conjunto con el teorema de continuidad uniforme de la función, indicar las clases más importantes de funciones integrables.

Teorema 2.2. *Cualquier función $f(x, y)$ continua en el rectángulo R está integrable en dicho rectángulo.*

Definición 1. *Llamemos figura elemental a un conjunto de puntos que representan una suma del número finito de rectángulos (cuyos lados son paralelos a los ejes Ox y Oy)* [2].

Definición 2. *Diremos que una función $f(x, y)$ posee en el rectángulo R (en un dominio cerrado arbitrario D) la I-propiedad, si: 1) $f(x, y)$ está acotada en el rectángulo R (en el dominio D); 2) para todo $\varepsilon > 0$ existe una figura elemental que contiene todos los puntos y líneas de discontinuidad de la función $f(x, y)$ y que tiene área inferior a ε.*

Teorema 2.3. *Si una función $f(x, y)$ posee en el rectángulo R la I-propiedad, será integrable en dicho rectángulo.*

La demostración de los teoremas 2.2 y 2.3 es completamente análoga a la que se usaba al demostrar los teoremas 1.3 y 1.4 del v. II.

3. Definición y existencia de la integral doble para un dominio arbitrario. En el p. 1, § 2, cap. 2, v. II se han introducido los conceptos *de cuadrabilidad* y *de área* de una figura plana Q. Estos conceptos se extienden sin cambios algunos al caso del conjunto acotado arbitrario Q de puntos del plano.

En todas las definiciones y afirmaciones del punto mencionado en lugar de la figura Q puede estudiarse el conjunto acotado arbitrario Q.

En el mismo punto se ha dado la definición de una curva (o de frontera de la figura) *del área cero*. Llamamos Γ *curva del área cero*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polígono que contenga todos los puntos de Γ y que tenga área menor que ε.

---

[1] El concepto de sumas superiores e inferiores se define sumamente igual que el de sumas integrales. A saber, el número $\overline{I}$ se llama *límite de las sumas superiores* S para $\Delta \to 0$, si con todo $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal $\delta > 0$ que $|S - \overline{I}| < \varepsilon$, cuando $\Delta < \delta$.

[2] Observemos que la suma de un número finito de rectángulos (completamente arbitrarios y con lados paralelos a los ejes Ox y Oy) es representable en forma de la suma, también de un número finito de rectángulos (cuyos lados son paralelos a los ejes mencionados) *privados de los puntos interiores comunes*. Por eso, en la Definición 1 pueden tomarse los rectángulos, tanto aquellos que tienen puntos interiores comunes, como también aquellos que no los tienen.

Notemos que en esta definición el término «polígono» se lo puede sustituir por el término «figura elemental». Esto se deduce de lo que toda figura elemental es un polígono, y cualquier polígono de área menor que el número ε está contenido dentro de la figura elemental cuya área es menor que el número 8ε [1].

Es fácil demostrar la siguiente *afirmación*.

Si Γ es una curva del área cero y si el plano está cubierto con una red cuadrada de paso h, entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $h > 0$ tal que la suma de áreas de todos los cuadrados que tienen con Γ puntos comunes es inferior a ε.

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede fijar una figura elemental D que contiene Γ dentro de sí y que tiene área menor que $\varepsilon/4$. Nos resta señalar que si el paso h de la red cuadrada es suficientemente pequeño, todos los cuadrados que tienen con Γ puntos comunes están contenidos dentro de una figura elemental que se obtiene como resultado de sustituir cada rectángulo de Q por un rectángulo dos veces mayor con el mismo centro.

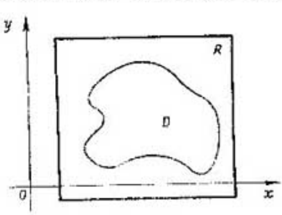

Fig. 2.3.

Subrayemos que la clase de curvas del área cero es bastante amplia. A esta clase pertenece, por ejemplo, cualquier curva rectificable (véase el teorema 2.3, v. II).

Pasemos, ahora, a la definición de integral doble para un dominio bidimensional arbitrario D.

Sea D un dominio acotado cerrado cuya frontera Γ es del área cero, y sea $f(x, y)$ una función arbitraria definida y acotada en el campo D.

Designemos con R cualquier rectángulo (con lados paralelos a los ejes coordenadas) que contenga el dominio D (fig. 2.3).

En el rectángulo R definamos la siguiente función:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{en los puntos del dominio } D, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } R \end{cases} \tag{2.2}$$

[1] En efecto: 1) un polígono es igual a la suma finita de triángulos; 2) cada triángulo es igual a la suma (o diferencia) de dos triángulos rectangulares; 3) un triángulo rectangular está contenido en un rectángulo cuya área es dos veces mayor. 4) cualquier rectángulo es igual a la suma de un número finito de cuadrados y un rectángulo, en el que la relación de sus lados está encerrada entre 1 y 2. 5) cualquier cuadrado está contenido dentro de otro cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes Ox y Oy, y cuya área es dos veces mayor en comparar con la del cuadrado primero; 6) todo rectángulo con relación de los lados encerrada entre 1 y 2 puede ser completado hasta que se obtenga un cuadrado, razón por la cual está contenido dentro del cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes Ox y Oy, y cuya área es cuatro veces mayor que el área del rectángulo.

Definición. *Una función $f(x, y)$ se llamará integrable en el dominio D, si la función $F(x, y)$ es integrable dentro del rectángulo R.*

Llamemos en este caso el número $I = \iint\limits_R F(x, y)\,dx\,dy$ integral doble de la función $f(x, y)$, extendida al campo D, y designémosla con el símbolo

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(M)\,d\sigma.$$

OBSERVACIÓN 1. De esta definición se deduce inmediatamente que la integral $\iint\limits_D 1 \cdot dx\,dy$ *es igual al área del dominio D*. Efectivamente, al someter el rectángulo correspondiente R a las particiones cada vez más menudas, llegaremos a que las sumas superiores de dichas particiones serán iguales a las áreas de las figuras elementales que contienen D, mientras que las sumas inferiores, a las áreas de las figuras elementales contenidas en el interior de D.

OBSERVACIÓN 2. *Supongamos que una función $f(x, y)$ es integrable en el campo cuadrable acotado D; el plano está cubierto con una red cuadrada de paso h; $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ son cuadrados de la red citada íntegramente contenidos en el campo D; (ξ_k, η_k) es un punto arbitrario del cuadrado C_k; $m_k = \inf\limits_{C_k} f(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n(h))$.*

Entonces, cada una de las sumas

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k, \eta_k) \cdot h^2, \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k \cdot h^2$$

tiene límite para $h \to 0$, el cual is igual a $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$.

Para demostrarlo, basta constatar que las sumas mencionadas se diferencian de la suma integral ordinaria (de la suma inferior, respectivamente) de la función $f(x, y)$ en el dominio D sólo por la ausencia de los sumandos referentes a los cuadrados que tienen puntos comunes con la frontera Γ del campo D, con la particularidad de que la suma de todos los sumandos ausentes es inferior en módulo al producto de la cota superior exacta M de la función $|f(x, y)|$ en el dominio D por el área S de la figura elemental compuesta por los cuadrados que tienen con Γ puntos comunes. De acuerdo con la afirmación demostrada más arriba, $S \to 0$ cuando $h \to 0$.

Con relación a la definición dada por nosotros surge, naturalmente, una pregunta de si depende el hecho de existencia de la integral doble y su valor I: 1) de la elección en el plano de los ejes coordenados Ox y Oy; 2) de la elección del rectángulo R, en el cual se define la función $F(x, y)$.

En el punto siguiente se dará otra definición de la función integrable $f(x, y)$ y de la integral doble la cual no depende del modo de elegir los ejes coordenadas, ni tampoco de la elección del rectángulo R y se demostrará la equivalencia de esta definición con la aducida más arriba.

Por ahora enunciemos, entre tanto, el siguiente teorema *fundamental* que se desprende del teorema 2.3 y de la definición dada anteriormente.

Teorema 2.4. *Si una función $f(x, y)$ posee en el dominio D la I-propiedad, será integrable en D.*

DEMOSTRACION. La función $F(x, y)$, definida por la fórmula (2.2), poseerá, para tal función $f(x, y)$, la I-propiedad en el rectángulo R.

En efecto, la función $F(x, y)$ está acotada en el rectángulo R y todos los puntos y las líneas de discontinuidad de esta función o bien coinciden con las discontinuidades correspondientes de $f(x, y)$, o bien se disponen en la frontera Γ del dominio D. Por cuanto Γ tiene el área cero, el teorema queda demostrado.

Corolario 1. *Si una función $f(x, y)$ está acotada en el dominio D y tiene en dicho dominio discontinuidades sólo en un punto finito de líneas rectificables, entonces $f(x, y)$ es integrable en el dominio D*

Corolario 2. *Si $f(x, y)$ es integrable en el dominio D, y $g(x, y)$ es acotada y coincide con $f(x, y)$ en todo punto de D, a excepción del conjunto de puntos del área cero, entonces $g(x, y)$ también es integrable en el campo D.*

4. Definición de integral doble con ayuda de las particiones arbitrarias de un dominio. Más arriba hemos definido la integral doble, partiendo de las particiones de un dominio mediante líneas rectas en un número finito de rectángulos parciales. En este punto se enunciará otra definición de la integral doble que se fundamente en la partición del dominio D mediante cualesquiera curvas del área cero en un número finito de dominios parciales y se demostrará que esta definición es equivalente a la aducida anteriormente.

Sea D un dominio acotado cerrado con la frontera Γ del área cero. Dividamos el dominio D, mediante un número finito de curvas arbitrarias del área cero, en un número finito r de dominios parciales cerrados $D_1, D_2, \ldots, D_r$ (¡no forzosamente conexos!).

Indiquemos que cada dominio D_i es cuadrable, pues su frontera tiene el área cero (véase v. II, cap. 2, § 2) y denotemos con el símbolo ΔD_i el área del dominio D_i.

En cada campo parcial D_i elijamos arbitrariamente un punto $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Definición 1. *Un número*

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(P_i) \cdot \Delta D_i \tag{2.3}$$

se denomina suma integral de la función $f(x, y)$ correspondiente a la partición dada del dominio D en dominios parciales D_i y a la elección dada de los puntos intermedios P_i en los dominios parciales.

Llamemos *diámetro del dominio* D_i a la cota superior exacta de las distancias entre cualesquiera dos puntos de este dominio. Con el símbolo $\tilde{\Delta}$ se denotará el mayor de los diámetros de los dominios parciales $D_1, D_2, \ldots, D_r$.

Definición 2. *Un número I se llama límite de las sumas integrales (2.3) con $\tilde{\Delta} \to 0$, si para cualquier número positivo ε puede indicarse tal número positivo δ que con $\tilde{\Delta} < \delta$ en los dominios parciales D_i se verifique la desigualdad*

$$|\tilde{\sigma} - I| < \varepsilon,$$

independientemente de cómo se eligen los puntos P_i.

Definición 3 (definición general de integrabilidad). *Una función $f(x, y)$ se llama integrable (según Riemann) en el dominio D, si existe un límite finito I de las sumas integrales σ de esta función para $\tilde{\Delta} \to 0$. El límite citado I recibe el nombre de integral doble de la función $f(x, y)$ extendida al dominio D.*

Demostremos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 2.5. *La enunciada definición general de integrabilidad es equivalente a la definición dada en el p. 3.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que si una función $f(x, y)$ es integrable según la definición general de integrabilidad y su integral doble, de acuerdo con dicha definición, es igual a I, esta función será integrable también según la definición del p. 3, y tiene, según ésta última, la misma integral doble I.

Resta por demostrar que si la función $f(x, y)$ es integrable en el dominio D, según la definición del p. 3, e I es la integral doble de $f(x, y)$, extendida al dominio D, según la misma definición, para la función $f(x, y)$ existe un límite de las sumas integrales $\tilde{\sigma}$, cuando $\tilde{\Delta} \to 0$, el cual es igual a I.

Designemos con $\tilde{M}_i$ y $\tilde{m}_i$ las cotas exactas superior e inferior de la función $f(x, y)$ en un dominio parcial D_i e introduzcamos en el análisis las sumas superior e inferior

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{M}_i \cdot \Delta D_i \quad \text{y} \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{m}_i \cdot \Delta D_i.$$

Por cuanto para cualquier partición

$$\tilde{s} \leqslant \tilde{\sigma} \leqslant \tilde{S},$$

resulta suficiente demostrar que ambas sumas $\tilde{S}$ y $\tilde{s}$ tienden hacia I, cuando $\tilde{\Delta} \to 0$.

Se requiere demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cada una de las sumas $\tilde{S}$ y $\tilde{s}$ quede desviada de I en una magnitud inferior a ε cada vez que $\tilde{\Delta} < \delta$.

Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para tal ε se encontrará una *partición* T del rectángulo R que contiene el dominio D en rectángulos parciales R_k de tal género que para ella

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Designemos con M_0 la cota superior exacta $|f(x, y)|$ en el dominio D, y hagamos encerrar todos los segmentos de las curvas, que realizan la partición T, y la frontera Γ del dominio D *en el interior* de una figura elemental cuya área sea inferior al número $\varepsilon/4M_0$.

Entonces, existe a ciencia cierta una cota inferior exacta *positiva* δ de la distancia entre dos puntos, uno de los cuales pertenece a la frontera la citada figura elemental, y el otro, a los segmentos de las rectas que realizan la partición T, o bien a la frontera Γ del dominio D [1]).

Demostremos que para las sumas $\tilde{S}$ y $\tilde{s}$ de cualquier partición del dominio D que satisfaga la condición $\Delta < \delta$ se verifican las desigualdades

$$\tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.5}$$

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{s}. \tag{2.6}$$

Limitémonos a la demostración de la desigualdad (2.5), pues la desigualdad (2.6) se demuestra del modo análogo.

Eliminemos en la suma $\tilde{S}$ todos los sumandos $M_i \cdot \Delta D_i$, correspondientes a los dominios D_i, cada uno de los cuales *no se dispone íntegramente dentro de un solo rectángulo parcial de la partición T*. Todos los dominios D_i de esta índole pertenecen a la figura elemental mencionada más arriba, por lo cual la suma de áreas de tales campos es inferior al número $\varepsilon/4M_0$.

[1]) En efecto, examinemos dos conjuntos: 1) un conjunto $\{P\}$ de todos los puntos de la frontera de la figura elemental en consideración y 2) un conjunto $\{Q\}$ de todos los puntos en los segmentos de partición T y de la frontera Γ del dominio D. Ambos conjuntos, $\{P\}$ y $\{Q\}$ son acotados y *cerrados*. Supongamos que la cota inferior exacta δ de la distancia $\rho(P, Q)$ es igual a cero. Entonces, existen dos sucesiones de puntos $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ tales que $\rho(P_n, Q_n) \to 0$. En las sucesiones mencionadas pueden elegirse, en virtud del teorema de Bolzano — Weierstrass, las subsucesiones convergentes $\{P_{k_n}\}$ y $\{Q_{k_n}\}$, cuyos límites P y Q pertenecen (por ser cerrados) a $\{P\}$ y $\{Q\}$, respectivamente. Mas, en este caso $\rho(P, Q) = 0$, es decir, los puntos P y Q coinciden, lo que no es posible, puesto que el conjunto $\{Q\}$ se dispone extrictamente dentro de la figura elemental y no tiene puntos comunes con $\{P\}$. La contradicción obtenida demuestra precisamente que δ es positivo.

Por consiguiente, la suma de todos los sumandos eliminados $\widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i$ es inferior al número $\varepsilon/4$.

Así pues, con un error no superior a $\varepsilon/4$ se verifica la igualdad

$$\widetilde{S} = \sum{}' \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i, \tag{2.7}$$

donde la virgulilla es indicio de que la suma queda extendida sólo en los dominios D_i *dispuestos íntegramente en los rectángulos correspondientes de la partición* T.

Ahora, en el segundo miembro de (2.7) sustituyamos las cotas exactas $\widetilde{M}_i$ en los dominios D_i, contenidos en el rectángulo parcial R_k, por la cota superior exacta M_k del rectángulo R_k. En este caso obtendremos

$$\sum{}' \widetilde{M}_i \cdot \Delta D_i \leqslant \sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k, \tag{2.8}$$

donde $\Delta \widetilde{R}_k$ denota el área del dominio $\widetilde{R}_k$ que es igual a la suma de todos los dominios D_i íntegramente contenidos dentro del rectángulo R_k.

Todos los dominios $R_k - \widetilde{R}_k$ pertenecen a la figura elemental elegida más arriba. Por eso

$$\sum_k (\Delta R_k - \Delta \widetilde{R}_k) < \frac{\varepsilon}{4M_0},$$

y, por lo tanto,

$$\left| S - \sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k \right| = \left| \sum_k M_k (\Delta R_k - \Delta \widetilde{R}_k) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De este modo, con un error no superior a $\varepsilon/4$ queda válida la igualdad

$$\sum_k M_k \cdot \Delta \widetilde{R}_k = S. \tag{2.9}$$

Al comparar las igualdades (2.7) y (2.9), válidas con un error no superior a $\varepsilon/4$, con la desigualdad (2.8), obtendremos la desigualdad (2.5).

Del modo análogo se demuestra la desigualdad (2.6).

De (2.5) y (2.6) obtenemos

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \widetilde{s} \leqslant \widetilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Por cuanto, en virtud de (2.4), cada una de las sumas s y S se desvía de I en una magnitud menor que $\varepsilon/2$, cada una de las sumas $\widetilde{s}$ y $\widetilde{S}$ se desvía, en virtud de (2.10), de I a una magnitud no superior a ε. El teorema está demostrado.

§ 2. Propiedades principales de la integral doble

Las propiedades de la integral doble (como también las deducciones de ellas) son bien análogas a las propiedades correspondientes de una integral definida simple. Por eso, limitémonos a la enunciación de estas propiedades.

1°. ADITIVIDAD. Si una función $f(x, y)$ es integrable en el dominio D y si el dominio D se parte, mediante la curva de área cero Γ, en dos dominios D_1 y D_2 que sean conexos y no tengan puntos interiores comunes, entonces, la función $f(x, y)$ será integrable en cada uno de los dominios D_1 y D_2, con la particularidad de que

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dx\,dy.$$

2°. PROPIEDAD LINEAL. Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son integrables en el dominio D, y si α y β son cualesquiera números reales, entonces $[\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]$ será también integrable en el dominio D, con la particularidad de que

$$\iint_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)]\,dx\,dy =$$

$$= \alpha \iint_D f(x, y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

3°. Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son integrables en el dominio D, el producto de estas funciones será también integrable en D.

4°. Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son ambas integrables en el dominio D, y si en todo punto de este dominio $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, entonces

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

5°. Si $f(x, y)$ es integrable en el dominio D, la función $|f(x, y)|$ será también integrable en el dominio D, con la particularidad de que

$$\left| \iint_D f(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant \iint_D |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

(Por supuesto, de la integrabilidad de $|f(x, y)|$ en D no se deduce integrabilidad en D de $f(x, y$.)

6°. TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son ambas integrables en el dominio D, y si la función $g(x, y)$ es no negativa (no positiva) en cada punto de este dominio, mientras que M y m representan las cotas exactas superior e inferior, respectivamente, de la función $f(x, y)$ en el dominio D, se encontrará un número μ que satisface la desigualdad $m \leqslant \mu \leqslant M$, y que es de tal índole que queda válida la fórmula siguiente

$$\iint_D f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = \mu \iint_D g(x, y)\, dx\, dy. \qquad (2.11)$$

En particular, si la función $f(x, y)$ es continua en D, siendo D *conexo*, existe [1]) en este dominio un punto (ξ, η) tal que $\mu = f(\xi, \eta)$ y la fórmula (2.11) adquiere la forma

$$\iint_D f(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y)\, dx\, dy.$$

7°. PROPIEDAD GEOMETRICA DE IMPORTANCIA $\iint_D 1 \cdot dx\, dy$ es igual al área del dominio D. (Según lo observado más arriba, esta propiedad se deduce inmediatamente de la definición de integrabilidad enunciada en el p. 3 § 1.)

§ 3. Reducción de la integral doble a la integral reiterada

La reducción de la integral doble a una integral simple reiterada que se expone en este párrafo representa uno de los métodos más efectivos para el cálculo de la integral doble.

1. Caso de un rectángulo.

Teorema 2.6. *Supongamos que para una función* $f(x, y)$ *existe en el rectángulo* $R = [a \leqslant x \leqslant b] \times [c \leqslant y \leqslant d]$ *una integral doble* $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$.

Admitamos también que para todo x *del segmento* $a \leqslant x \leqslant b$ *existe la integral simple*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy. \qquad (2.12)$$

Existe, entonces, una integral reiterada

$$\int_a^b I(x)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

y se verifica la igualdad

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \qquad (2.13)$$

[1]) En virtud del teorema 5.5 del v. II.

DEMOSTRACIÓN. Dividamos el rectángulo R, al igual que en el § 1, mediante unos puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$ en $n \cdot p$ rectángulos parciales

$$R_{kl} = [x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k] \times [y_{l-1} \leqslant y \leqslant y_l]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n; \quad l = 1, 2, \ldots, p).$$

Pongamos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$, y designemos con M_{kl} y m_{kl} las cotas exactas de la función $f(x, y)$ en el rectángulo parcial R_{kl}. Entonces, en cada punto del citado rectángulo tendremos

$$m_{kl} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{kl}. \tag{2.14}$$

Al poner en esta desigualdad $x = \xi_k$, donde ξ_k es un punto arbitrario del segmento $[x_{k-1}, x_k]$, e integremos, a continuación, (2.14) respecto de y dentro de los límites desde y_{l-1} hasta y_l. Obtendremos

$$m_{kl} \cdot \Delta y_l \leqslant \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)\, dy \leqslant M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{2.15}$$

Sumando (2.15) por todos los l de 1 a p, y haciendo uso de la designación (2.12), tendremos

$$\sum_{l=1}^{p} m_{kl} \cdot \Delta y_l \leqslant I(\xi_k) \leqslant \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{2.16}$$

Multipliquemos ahora (2.16) por Δx_k y sumemos por todos los k de 1 a n. Obtendremos

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl}\, \Delta x_k\, \Delta y_l \leqslant \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k) \cdot \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl} \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_l. \tag{2.17}$$

Hagamos tender hacia cero el diámetro mayor Δ de los rectángulos parciales. Entonces tenderá a cero también la máxima de las longitudes Δx_k. Los términos extremos en (2.17) que representan las sumas inferior y superior tienden en este caso a la integral doble $\iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy$.

Por consiguiente, existe también un límite para el término medio de (2.17), que es igual a la misma integral doble. Mas, este límite equivale, según la definición de integral simple, a

$$\int\limits_a^b I(x)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy.$$

Con ello quedan demostradas la existencia de la integral reiterada y la igualdad (2.13). El teorema está demostrado.

OBSERVACION. En el teorema 2.6 se pueden cambiar de papeles x e y, es decir, se puede suponer la existencia de la integral doble y la existencia de una integral reiterada para cualquier y del segmento $c \leqslant y \leqslant d$.

$$K(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

En este caso el teorema confirmará la existencia de la integral reiterada

$$\int_c^d K(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$$

y de la igualdad

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \qquad (2.18)$$

2. Caso de un dominio arbitrario.

Teorema 2.7. *Supongamos cumplidas las siguientes condiciones: 1) el dominio D es acotado, cerrado y de tal índole que cualquier recta*

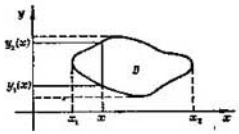

Fig. 2.4.

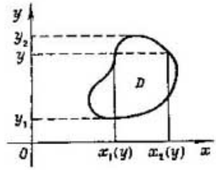

Fig. 2.5.

paralela al eje Oy corta la frontera de este dominio a lo sumo en dos puntos cuyas coordenadas son $y_1(x)$ e $y_2(x)$, donde $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ (fig. 2.4); 2) *la función $f(x, y)$ admite la existencia de una integral doble*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

y la existencia, para x cualquiera, de una integral simple

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

En estas condiciones existe una integral reiterada

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

(x_1 y x_2 representan las abscisas mínima y máxima de los puntos del dominio D) y se verifica la igualdad

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{2.19}$$

DEMOSTRACIÓN. Designemos con R un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados que contienen el dominio D, y con $F(x, y)$, una función que coincida con $f(x,y)$ en los puntos del dominio D y que sea igual a cero en los puntos restantes de R. Para la función $F(x, y)$ se cumplen en el rectángulo R todas las condiciones del teorema 2.7, y, por consiguiente, es válida la fórmula (2.13) la cual (habida cuenta de que $F(x, y)$ es igual a cero fuera de D y coincide con $f(x, y)$ en D) se transforma en la fórmula (2.19). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. En el teorema 2.7 se pueden cambiar de papeles x e y, es decir, podemos suponer que se cumplen las siguientes dos condiciones: 1) el dominio D es tal que cualquier recta paralela al

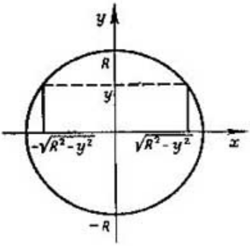

Fig. 2.6.

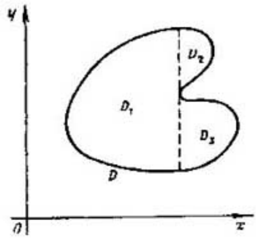

Fig. 2.7.

eje Ox corta la frontera de este dominio a lo sumo en dos puntos cuyas abscisas son $x_1(y)$ y $x_2(y)$, donde $x_1(y) \leqslant x_2(y)$ (fig. 2.5); 2) la función $f(x, y)$ admite la existencia de una integral doble extendida al dominio D y la existencia, para y cualquiera, de una integral simple

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

Si se cumplen estas condiciones, existe la integral reiterada

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

(y_1 e y_2 son las ordenadas mínima y máxima de los puntos del campo D) y se verifica la igualdad

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx. \qquad (2.19')$$

EJEMPLO. Sea D un círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ (fig. 2.6), y sea $f(x, y) = x^2 (R^2 - y^2)^{3/2}$. Cualquier recta paralela al eje Ox corta la frontera de D a lo sumo en dos puntos cuyas abscisas son $x_1 = -\sqrt{R^2 - y^2}$ y $x_2 = \sqrt{R^2 - y^2}$ (véase fig. 2.6). Por eso, aplicando la fórmula (2.19′), obtendremos

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2 (R^2 - y^2)^{3/2}\, dx =$$

$$= \int_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^{3/2} \left[\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^2\, dx \right] dy =$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^3\, dy = \frac{64}{105} R^7.$$

OBSERVACIÓN 2. Cuando el dominio D no satisface los requisitos del teorema 2.7 o de la Observación 1 al teorema citado, se logra frecuentemente dividir este dominio en la suma de un número finito de dominios de este tipo que no tienen puntos interiores comunes. Entonces, la integral extendida al campo D es igual, en virtud de la propiedad de aditividad (véase la propiedad 1 del § 2) a la suma de integrales extendidas a los dominios correspondientes. Así por ejemplo, el dominio D, expuesto en la fig. 2.7, se logra partirlo en una suma de tres dominios D_1, D_2 y D_3, a cada uno de los cuales puede aplicarse o bien el teorema 2.7, o bien la Observación 1.

§ 4. Integrales triples e integrales n-múltiples

La teoría expuesta de la integral doble se extiende sin complicaciones algunas o ideas nuevas al caso de la integral *triple* y, en general, de la integral *n-múltiple*. Detengámonos en las nociones principales de la teoría de integral n-múltiple.

Convengamos en considerar ante todo, que el volumen de un paralelepípedo rectangular n-dimensional es igual, por definición, al producto de las longitudes de todas las aristas suyas que tienen por origen un mismo vértice.

Llamemos, además, *cuerpo elemental* a un conjunto de puntos de un espacio n-dimensional que representa la suma de un número finito de paralelepípedos rectangulares n-dimensionales que no tienen puntos interiores comunes, pero sí tienen aristas paralelas a los ejes coordenados.

El volumen de cualquier cuerpo elemental es conocido, siendo igual a la suma de volúmenes de los paralelepípedos que lo constituyen.

Ahora, sea D un dominio acotado arbitrario en el espacio euclídeo n-dimensional. Denominemos *volumen inferior* del dominio D a la cota superior exacta V de los volúmenes de todos los cuerpos elementales contenidos en $\bar{D}$, y *volumen superior* del dominio D, la cota inferior exacta $\underline{V}$ de los volúmenes de todos los cuerpos elementales que contienen un dominio T.

Es fácil convencerse de que $V \leqslant \overline{V}$ [1]).

Un dominio D se llama *cubicable*, si $\underline{V} = \overline{V}$. En este caso el número $V = \underline{V} = \overline{V}$ lleva el nombre de *volumen n-dimensional* del dominio $\overline{D}$.

Por analogía completa con el caso de un dominio plano se demuestra la siguiente afirmación.

Para que un dominio n-dimensional D sea cubicable, es necesario y suficiente que con cualquier número positivo ε existan dos cuerpos elementales, uno de los cuales contenga D, y el otro, esté contenido en D, y que la diferencia entre los volúmenes de dichos cuerpos elementales en módulo sea menor que el número ε.

Se llama *superficie* (o *variedad*) *del volumen cero n-dimensional* a un conjunto cerrado, todos los puntos del cual pertenecen a un cuerpo elemental de volumen n-dimensional tan pequeño como se quiera.

Es evidente que un dominio n-dimensional D es cubicable, cuando y sólo cuando, la frontera de este campo representa una variedad del volumen cero n-dimensional.

Al principio la integral n-múltiple de una función de n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se define en el paralelepípedo rectangular n-dimensional R cuyas aristas son paralelas a los ejes coordenados.

Con este fin realizamos la partición de cada una de n aristas del paralelepípedo R en un número finito de segmentos parciales y de este modo obtenemos la partición T del paralelepípedo R en un número finito de paralelepípedos parciales n-dimensionales [2]).

[1]) La desigualdad $V \leqslant \overline{V}$ se demuestra sumamente igual que la desigualdad $P \leqslant \overline{P}$ en el p. 1, § 2, cap. 2, v. II.

[2]) Podemos decir que la partición T se realiza con ayuda de un número finito de hiperplanos $(n-1)$-dimensionales paralelos a los ejes coordenados.

Por analogía completa con el caso de $n = 2$, se definen, para la partición T, las sumas integrales superior e inferior de toda función acotada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

La integral n-múltiple de la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, extendida al paralelepípedo R, se define como límite de las sumas integrales, cuando tiende a cero la longitud de la mayor de las diagonales de los paralelepípedos parciales n-dimensionales.

Igual que en el caso de $n = 2$, la teoría de Darboux establece en la siguiente forma la condición necesaria y suficiente de integrabididad: *para que una función f sea integrable en el paralelepípedo R, es necesario y suficiente que con cualquier $\varepsilon > 0$ exista una partición T del paralelepípedo R, para la cual la diferencia entre las sumas superior e inferior sea inferior a ε.*

Ahora se hace fácil definir la integral n-múltiple de una función f extendida a un dominio n-dimensional D, acotado, cerrado y arbitrariamente elegido, cuya frontera tiene volumen cero n-dimensional.

Esta integral se define como integral extendida al paralelepípedo rectangular n-dimensional R (con los lados paralelos a los ejes coordenados), que contiene el dominio D, de una función F la cual coincide con f dentro del dominio D y es igual a cero fuera de D.

Para designar la integral n-múltiple de una función $f(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ extendida al dominio D, resulta natural emplear el símbolo

$$\int\int \underset{D}{\cdots} \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{2.20}$$

No obstante, con el fin de reducir la notación denotaremos la integral (2.20), siempre que ello no causa incomprensiones algunas, con un símbolo breve

$$\int\limits_D f(x)\, dx \tag{2.20'}$$

Si se emplea la notación (2.20'), por símbolo x conviene entender el punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de un espacio E^n; por el símbolo dx, el producto $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ [1]), y por el símbolo $\int\limits_D$, la integral n-múltiple extendida al dominio D.

Sumamente igual al caso de $n = 2$ se demuestra la integrabilidad en el dominio n-dimensional D de cualquier función f que posee en el dominio D la *I-propiedad* (es decir, de una función acotada en el dominio D cuyos puntos de discontinuidad pertenecen a un cuerpo elemental de volumen n-dimensional tan pequeño como se quiera).

[1]) Este producto se llama, de ordinario, elemento del volumen en el espacio E^n.

En general, la variación de la función integrable f sobre el conjunto de puntos de un volumen cero n-dimensional no cambia el valor de la integral de dicha función.

Para el cálculo de una integral n-múltiple puede emplearse la partición del dominio D, mediante un número finito de variedades arbitrarias del volumen cero en un número finito de dominios parciales con forma arbitraria. Por analogía completa con el teorema 2.5 se demuestra que esta definición general de la integral n-múltiple es equivalente a la definición enunciada anteriormente.

Sumamente igual que en los teoremas 2.6 y 2.7, se deduce la *fórmula de integración reiterada* para la integral (2.20).

Supongamos que un dominio n-dimensional D_n posee la propiedad de que cualquier recta paralela al eje Ox_1 corta la frontera del dominio a lo sumo en dos puntos cuyas proyecciones sobre el eje Ox_1 son

$$a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \quad \text{y} \quad b(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

donde $a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leqslant b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Supongamos, además, que la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ admite la existencia de una integral n-múltiple

$$\iint\limits_{D_n}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

y la existencia, para cualesquiera $x_2, x_3, \ldots, x_n$, de una integral simple

$$\int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1.$$

Entonces, existe una integral (n-1)-múltiple

$$\iint\limits_{D_{n-1}}\cdots\int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1,$$

extendida al dominio $(n-1)$-dimensional D_{n-1}, que es proyección de D_n sobre el hiperplano coordenado $Ox_2x_3 \ldots x_n$, y queda válida la fórmula de integración reiterada

$$\iint\limits_{D_n}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{D_{n-1}}\cdots\int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \int\limits_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1. \tag{2.21}$$

Por supuesto, en la afirmación enunciada el papel de x_1 puede desempeñar cualquiera de las variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Convengamos en llamar *simple* un dominio D, si cada recta paralela a cualquier eje coordenado o bien corta la frontera de D a lo sumo en dos puntos o bien tiene en la frontera citada un segmento entero.

La fórmula de integración reiterada puede aplicarse en el caso de un dominio simple respecto de cualquiera de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Como ejemplo de un dominio simple puede servir un paralelepípedo rectangular n-dimensional (cuyas aristas no son forzosamente paralelas a los ejes coordenados).

Notemos, como conclusión, que para una integral n-múltiple quedan válidas propiedades 1°—7° enunciadas en el § 2 para el caso de la integral doble.

En particular, $\iint\limits_D \ldots \int 1\cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ es igual al volumen n-dimensional $V(D)$ del dominio D.

Además, lo mismo que en el caso de $n = 2$, resulta válida la siguiente *afirmación*.

Supongamos que una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es integrable en un dominio acotado cubicable D. Supongamos, además, que el espacio E^n está cubierto con una red de cubos n-dimensionales de arista h; $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ son los cubos de la citada red que están contenidos íntegramente en D; $(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ es un punto arbitrario del cubo C_k; m_k es la cota inferior exacta de la función f en el cubo C_k $(k = 1, 2, \ldots, n(h))$. Entonces, las sumas

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})\cdot h^n \quad y \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k\cdot h^n$$

cuentan, para $h \to 0$, con un límite igual a $\iint\limits_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

§ 5. Cambio de variables en una integral n-múltiple

El objetivo de este párrafo consiste en argumentar la fórmula de cambio de variables en la integral n-múltiple.

La fórmula a deducir será uno de los medios más importantes para el cálculo de la integral n-múltiple.

Supongamos que una función $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ admite la existencia de la integral n-múltiple

$$\int\limits_D f(y)\, dy = \iint\limits_D \ldots \int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_n \quad (2.22)$$

extendida a cierto dominio acotado cerrado y cubicable D en el espacio de las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Supongamos, además, que de las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pasamos a las variables nuevas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir, realizamos una transformación

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Esta breve transformación (2.23) se denotará con el símbolo

$$y = \psi(x),$$

entendiendo por x e y los puntos del espacio n-dimensional $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, y por símbolo ψ, totalidades de n funciones $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Denotemos con D' un dominio del espacio de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que, al realizarse la transformación (2.23), pasa a D, es decir, pongamos que $D = \psi(D')$ [1].

Demostremos que si las funciones (2.23) tienen en el dominio D' derivadas parciales continuas de primer orden y si el jacobiano

$$\frac{\mathscr{D}(y)}{\mathscr{D}(x)} = \frac{\mathscr{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2.24}$$

está distinto de cero en D', para la integral (2.22) se verifica la siguiente *fórmula de cambio de variables*

$$\int\limits_D f(y)\,dy = \int\limits_{D'} f[\psi(x)] \left| \frac{\mathscr{D}(y)}{\mathscr{D}(x)} \right| dx. \tag{2.25}$$

La notación detallada de la fórmula (2.25) tiene por expresión

$$\int\int \underset{D}{\ldots} \int f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_n =$$
$$= \int\int \underset{D'}{\ldots} \int f[\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots$$
$$\ldots, x_n)] \left| \frac{\mathscr{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathscr{D}(x_1, \ldots, x_n)} \right| dx_1 \ldots dx_n. \tag{2.25'}$$

Demostremos de este modo el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 2.8. *Si la transformación* (2.23) *convierte el dominio D' en D, siendo biunívoca, y si las funciones* (2.23) *tienen en el dominio D'*

[1] Suponemos que la transformación (2.23) admite lo inverso y que $D' = \psi^{-1}(D)$.

derivadas parciales continuas de primer orden y el jacobiano (2.24) [1], *distinto de cero, entonces, bajo la condición de existencia de la integral* (2.22) *se verifica la fórmula de cambio de variables* (2.25').

La demostración del teorema 2.8 no es de ninguna manera elemental. La idea principal de la demostración aducida consiste en que al principio se da la argumentación de la fórmula (2.25) para el caso en que la transformación (2.23) es *lineal*, y sólo después se reduce a este caso la transformación general (2.23).

Para la comodidad, dividamos la demostración del teorema 2.8 en unas etapas diferentes.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.8.

1°. ***Lema 1.*** *Si la transformación* $z = \psi(x)$ *es una superposición (o, como suele decirse, producto) de dos transformaciones,* $y = \psi_1(x)$ *y* $z = \psi_2(y)$, *el jacobiano* $\frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(x)}$, *tomado en cualquier punto* $\overset{0}{x} = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$, *será igual al producto de jacobianos* $\frac{\mathscr{D}(y)}{\mathscr{D}(x)}$ *y* $\frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(y)}$, *tomados en los puntos* $\overset{0}{x} = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$ *e* $\overset{0}{y} = (\overset{0}{y}_1, \overset{0}{y}_2, \ldots, \overset{0}{y}_n)$, *donde* $\overset{0}{y} = \psi_1(\overset{0}{x})$, *es decir,*

$$\frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(x)} = \frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(y)} \cdot \frac{\mathscr{D}(y)}{\mathscr{D}(x)}. \tag{2.26}$$

En la inscripción más detallada la fórmula (2.26) tiene por expresión

$$\frac{\mathscr{D}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\mathscr{D}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\mathscr{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \frac{\mathscr{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{2.26'}$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 1. Un elemento que se dispone en la intersección de la k-ésima fila y k-ésima columna del jacobiano $\frac{\mathscr{D}(z)}{\mathscr{D}(x)}$ es igual a $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$, con la particularidad de que la citada derivada parcial se toma en el punto x. Según la regla de diferenciación de una función compuesta (véase § 7, cap. 5, v. II) dicho elemento es

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial y_l}{\partial x_k}, \tag{2.27}$$

[1]) Notemos que si se cumplen las condiciones del teorema 2.8, las ecuaciones (2.23) pueden ser resueltas respecto de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con la particularidad de que la transformación inversa $x = \psi^{-1}(y)$, obtenida en el proceso de resolución, tendrá, en el dominio D, debido al teorema 5.2, v. II, derivadas parciales continuas de primer orden y, además, el jacobiano $\frac{\mathscr{D}(x)}{\mathscr{D}(y)}$ distinto de cero.

con la particularidad de que todas las derivadas parciales en el segundo miembro de (2.27) se toman en el punto $\overset{0}{x}$, y todas las derivadas parciales $\frac{\partial z_i}{\partial y_l}$, en el punto correspondiente $\overset{0}{y} = \psi_1(\overset{0}{x})$.

De las igualdades (2.27) que son válidas para cualesquiera $i = 1, 2, \ldots, n$ y $k = 1, 2, \ldots n$, y del teorema sobre el determinante de un producto de dos matrices (véase la Publicación «Algebra lineal») se deduce directamente la fórmula (2.26).

El lema 1 está demostrado.

2°. Antes de formular el lema siguiente, recordemos la definición de *transformación lineal de las coordenadas.*

Se denomina transformación lineal a una transformación de la forma

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{2.28}$$

en la que a_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$) son unos números constantes.

La transformación lineal (2.28) se denotará brevemente por el símbolo $y = Tx$, entendiendo por x e y los puntos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ del espacio E^n, y por T, la matriz $T = \| a_{ik} \|$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$).

La matriz T se llama, de ordinario, *matriz de la transformación lineal.*

Si el determinante de una matriz de transformación lineal det T es distinto de cero, la transformación lineal $y = Tx$ se llama *regular*. Para tal transformación podemos resolver las ecuaciones (2.28), en virtud del teorema de Cramer [1]), respecto de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y podemos afirmar la existencia de una transformación inversa $x = T^{-1}y$, la cual es también lineal y regular.

Observemos en adición que para la transformación lineal (2.28) el jacobiano $\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)}$ coincide con el determinante de la matriz T de la citada transformación, es decir,

$$\frac{\mathcal{D}(y)}{\mathcal{D}(x)} = \det T. \tag{2.29}$$

El objetivo principal del punto presente y de los dos puntos siguientes consiste en demostrar que para una transformación regular lineal arbitraria (2.28) es válida la fórmula de cambio de variables (2.25). En virtud de la relación (2.29), basta demostrar que para

[1]) Véase el teorema de Cramer en la Publicación «Algebra lineal».

cualquier transformación regular lineal $y = Tx$ se verifica la fórmula

$$\int_D f(y)\,dy = \int_{T^{-1}D} f(Tx)\,|\det T|\,dx \tag{2.30}$$

(a condición de que existe la integral en el primer miembro de esta fórmula).

En este punto se demostrará que la fórmula (2.30) es válida para dos tipos especiales de las transformaciones lineales: 1) transformación lineal T_i^λ, la cual consiste en que la i-ésima coordenada se multiplica por un número real $\lambda \neq 0$, mientras que todas las demás coordenadas no cambian [1]), y 2) transformación lineal T_{ij}, la cual consiste en que a la i-ésima coordenada se le agrega la j-ésima coordenada, mientras que las coordenadas restantes, salvo la i-ésima, no cambian [2]).

Lema 2. *Si una función $f(y)$ es integrable en el dominio D, para cada una de las transformaciones T_i^λ y T_{ij} es válida la fórmula de cambio de variables* (2.30).

DEMOSTRACION DEL LEMA 2. Designemos con R un paralelepípedo rectangular n-dimensional que contenga el dominio D, y con F, una función que es igual a f en D, y a cero, en $R - D$. Es suficiente probar que para cada una de las transformaciones T_i^λ y T_{ij} queda válida una fórmula

$$\int_R F(y)\,dy = \int_{T^{-1}R} F(Tx)\cdot|\det T|\,dx, \tag{2.31}$$

en la cual mediante T está designada una de las transformaciones, T_i^λ ó T_{ij}.

Un cálculo elemental muestra que

$$\det T_i^\lambda = \lambda,\ \det T_{ij} = 1. \tag{2.32}$$

Además, es obvio que si R es un paralelepípedo rectangular $a_k \leqslant y_k \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, entonces $[T_i^\lambda]^{-1} R$ representa el paralelepípedo rectangular

$$\begin{cases} a_k \leqslant x_k \leqslant b_k & \text{para } k \neq i, \\ \dfrac{a_i}{\lambda} \leqslant x_i \leqslant \dfrac{b_i}{\lambda}, \end{cases} \tag{2.33}$$

---

[1]) En la forma simbólica esta transformación puede escribirse así:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

[2]) En la forma simbólica esta transformación puede escribirse así:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

mientras que $[T_{ij}]^{-1}R$ representa un dominio que es a ciencia cierta cubicable

$$\begin{cases} a_k \leqslant x_k \leqslant b_k & \text{para } k \neq i, \\ a_i - x_j \leqslant x_i \leqslant b_i - x_j. \end{cases} \tag{2.34}$$

Rigiéndonos por la fórmula de integración reiterada (2.21), tenemos

$$\int_R F(y)\,dy = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \ldots \int_{a_n}^{b_n} dy_1 \ldots$$

$$\ldots dy_{i-1}\,dy_{i+1} \ldots dy_n \int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i. \tag{2.35}$$

Aplicando a la integral simple respecto de la variable y_i la fórmula de cambio de la variable $y_i = \lambda x_i$ para el caso de la transformación T_i^λ, e $y_i = x_i + x_j$, en el caso de la transformación T_{ij} (véase § 7, cap. 1, v. II), obtendremos:

a) para el caso de la transformación T_i^λ

$$\int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{a_i/\lambda}^{b_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,\lambda\,dx_i, & \text{cuando } \lambda > 0, \\ \displaystyle\int_{b_i/\lambda}^{a_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)(-\lambda)\,dx_i, & \text{cuando } \lambda < 0; \end{cases} \tag{2.36}$$

b) para el caso de la transformación T_{ij}

$$\int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i =$$

$$= \int_{a_i - x_j}^{b_i - x_j} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i + x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,dx_i. \tag{2.37}$$

Introduciendo (2.36) en (2.35), aplicando una vez más la fórmula de integración reiterada (2.21) y teniendo presente la igualdad $y_k = x_k$ para $k \neq i$, la forma (2.33) del dominio $[T_i^\lambda]^{-1}R$ y la primera igualdad de (2.32), obtendremos la fórmula (2.31) para el caso de la transformación T_i^λ.

Análogamente, introduciendo (2.37) en (2.35), aplicando la fórmula de integración reiterada y teniendo presente la igualdad $y_k = x_k$ para $k \neq i$, la forma (2.34) del dominio $[T_{ij}]^{-1}R$ y la segunda igualdad de (2.32), obtendremos la fórmula (2.31) para el caso de la transformación T_{ij}. El lema 2 queda demostrado.

3°. ***Lema 3.*** *Toda transformación regular lineal T puede ser representada en forma de una superposición de un número finito de transformaciones lineales del tipo T_i^λ y T_{ij}.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3. Comprobemos, ante todo, que una transformación lineal T', la cual consiste en permutación de cualesquiera dos coordenadas, puede ser representada en forma de una superposición de seis transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij}. En efecto, supongamos que T' consiste en cambio de lugar de las coordenadas i-ésima y j-ésima (las demás coordenadas no varían en este caso). Entonc . es fácil compobar que [1]

$$T' = T_i^{-1} T_{ij} T_j^{-1} T_{ij} T_i^{-1} T_{ij}. \tag{2.38}$$

Indiquemos ahora que una transformación regular lineal, sumamente arbitraria, T puede ser reducida, mediante un número finito de permutaciones de dos filas y dos columnas, a la transformación lineal (2.28) con matriz $\| a_{ik} \|$, en la que son distintos de cero todos los así llamados *menores principales*, es decir, todos los determinantes

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{2.39}$$

Resta por demostrar que la última transformación lineal es representable en forma de una superposición de un número finito de transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij}.

Demostrémoslo por inducción.

Por cuanto $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$, obtendremos mediante la transformación $T_1^{a_{11}} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \to (a_{11}x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Supongamos ahora que mediante una superposición de un número finito de transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij} hemos logrado de reducir la sucesión inicial de coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a la forma

$$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k, \dots, a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk}x_k,$$
$$x_{k+1}, \dots, x_n). \tag{2.40}$$

[1] En efecto, al conservar en la notación sólo las coordenadas i-ésima y j-ésima, obtendremos, realizando una cadena de transformaciones (2.38): $(x_i, x_j) \to (x_i + x_j, x_j) \to (-x_i - x_j, x_j) \to (-x_i - x_j, -x_i) \to (-x_i - x_j, x_i) \to (-x_j, x_i) \to (x_j, x_i)$.

Para finalizar la inducción, basta demostrar que por medio de la superposición de un número finito de transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij} podemos reducir la sucesión de coordenadas (2.40) a la forma

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{k(k+1)}x_{k+1}, \\ a_{(k+1)1}x_1 + \ldots + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n). \qquad (2.41)$$

Al principio realicemos sucesivamente para cada número i, para el cual es distinto de cero el elemento $a_{i(k+1)}$, un par de transformaciones $T_{i(k+1)}T_{k+1}^{a_{i(k+1)}}$ (no realizamos transformaciones correspondientes para aquellos i, para los cuales $a_{i(k+1)}) = 0$. La superposición de todos los pares mencionados conduce la sucesión (2.40) a la forma

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{k(k+1)}x_{k+1}, \\ x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n). \qquad (2.42)$$

Luego digamos que por cuanto el menor (2.39) es distinto de cero, será distinto de cero también el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2.43)$$

que es igual al menor. Pero, en este caso se encontrarán tales números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ que la combinación lineal de filas del determinante (2.43) con estos números será [1])

$$a_{(k+1)1}, \ldots, a_{(k+1)k}, a_{(k+1)(k+1)}. \qquad (2.44)$$

Esto quiere decir que si realizamos sucesivamente, para cada número $j = 1, 2, \ldots, k+1$, para el cual $\lambda_j \neq 0$, un par de transformaciones $T_{(k+1)j}T_j^{\lambda_j}$ (el par correspondiente de transformaciones, para aquellos j, para los cuales $\lambda_j = 0$, no realizamos), la superposición de todos los pares de transformaciones realizadas hará pasar la sucesión (2.42) en la (2.41). Con ello queda finalizada la inducción y el lema está demostrado.

4°. ***Lema 4.*** *Para una transformación regular lineal arbitraria* (2.28) *se verifica la fórmula de cambio de variables* (2.30), *siempre que existe la integral que figura en el primer miembro de* (2.30).

Para demostrar el lema 4, basta notar que la fórmula (2.30) es válida para cada una de las transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij} (lema 2) y que la transformación regular lineal arbitraria (2.28) puede ser representada en forma de una superposición de un número finito

[1]) Para demostrarlo, basta añadir a la matriz del detreminante (2.43) la fila (2.44) y aplicar el teorema sobre el menor básico (véase «Algebra lineal», v. I)

de transformaciones del tipo T_i^λ y T_{ij} (lema 3), con la particularidad de que al realizarse la superposición de las transformaciones lineales tiene lugar multiplicación de los jacobianos correspondientes (lema 1).

Corolario del lema 4. *Si G es un dominio cubicable arbitrario en el espacio E^n y T, una transformación regular lineal arbitraria, entonces, el volumen n-dimensional $V(G)$ del dominio G y el volumen n-dimensional $V(TG)$ de la imagen TG de dicho dominio están entrelazados mediante una ecuación*

$$V(TG) = |\det T| \cdot V(G). \tag{2.45}$$

Para demostrar el corolario, basta poner en la igualdad (2.30) $f \equiv 1$, $D = TG$, y tomar en consideración que en este caso $T^{-1}D = G$.

5°. Pasemos ahora a la argumentación de la fórmula de cambio de variables (2.25) para una transformación sumamente arbitraria $y = \psi(x)$ que satisfaga las condiciones del teorema 2.8.

Conviene subrayar que si se cumplen las condiciones del teorema 2.8, existen ambas integrales que figuran en los miembros primero y segundo de (2.25), de modo que nos resta demostrar solamente la igualdad de dichas integrales.

Convengamos en designar con el símbolo $J_{ij}(x)$ los elementos de la matriz de Jacobi $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$) tomados en un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

La propia matriz de Jacobi $\| J_{ij}(x) \|$ se denotará con el símbolo $J_\psi(x)$.

Resulta cómodo introducir el concepto de *norma de un punto* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y el de norma *de una matriz* $A = \| a_{ij} \|$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$).

Se llamará norma de un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a un número que se denota con el símbolo $\| x \|$ y que es igual a $\max\limits_{i=1, 2, \ldots, n} |x_i|$

Se llamará norma de una matriz $A = \| a_{ij} \|$ a un número denotado con el símbolo $\| A \|$ que es igual a

$$\max_{i=1, 2, \ldots, n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right].$$

Tendremos en cuenta que con tal definición de norma de un punto y de una matriz, de la igualdad $y = Ax$ se deduce que

$$\| y \| \leq \| A \| \cdot \| x \| \tag{2.46}$$

Además, es fácil comprobar que para la matriz unidad E se verifica la igualdad $\| E \| = 1$.

En este punto demostraremos el siguiente lema.

Lema 5. *Si se cumplen las condiciones del teorema 2.8, y si C es un cubo n-dimensional perteneciente al dominio D', los volúmenes n-dimensionales del cubo C y de su imagen ψ (C) están ligados entre sí mediante la desigualdad*

$$V(\psi(C)) \leqslant \left| \max_{x \in C} \| J_\psi(x) \| \right|^n \cdot V(C) \qquad (2.47)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea C un cubo n-dimensional con centro en el punto $\overset{0}{x} = (\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$ y de arista $2s$. Entonces, el cubo C puede definirse por la desigualdad

$$\| x - \overset{0}{x} \| \leqslant s. \qquad (2.48)$$

En virtud de la fórmula de Taylor, para una función de n variables $\psi_i(x)$ existe (véase p. 3, § 5, cap. 5, v. II) un número θ_i del intervalo $0 < \theta_i < 1$ de tal índole que

$$\psi_i(x) - \psi_i(\overset{0}{x}) = \sum_{j=1}^{n} J_{ij}(\overset{0}{x} + \theta_i(x - \overset{0}{x}))(x_j - \overset{0}{x}_j).$$

De la última igualdad y de la relación (2.46) resulta que

$$\| \psi(x) - \psi(\overset{0}{x}) \| \leqslant \max_{x \in C} \| J_\psi(x) \| \cdot \| x - \overset{0}{x} \|. \qquad (2.49)$$

Poniendo $y = \psi(x)$, $\overset{0}{y} = \psi(\overset{0}{x})$, obtenemos de (2.49) y (2.48)

$$\| y - \overset{0}{y} \| \leqslant s \cdot \max_{x \in C} \| J_\psi(x) \|.$$

Así pues, *cuando el punto x cambia su posición dentro de los límites de un cubo n-dimensional C de arista 2s, la imagen y del punto x no sale de los márgenes del cubo n-dimensional cuya arista es igual a* $2s \cdot \max\limits_{x \in C} \| J_\psi(x) \|$.

De aquí se infiere inmediatamente la cubicabilidad de la imagen $\psi(G)$ de cualquier conjunto cubicable G [1] (en particular, la cubicabilidad de $\psi(C)$) se deduce precisamente de la desigualdad (2.47). El lema 5 está demostrado.

6°. *Lema 6.* *Supongamos cumplidas las condiciones del teorema 2.8, siendo G un subconjunto cubicable arbitrario de D'. Entonces, para un volumen n-dimensional de la imagen ψ (G) del conjunto G se veri-*

[1] En efecto, la frontera de cualquier conjunto cubicable G es un conjunto del volumen cero n-dimensional, y, de acuerdo con lo demostrado anteriormente, tal conjunto se transforma en un conjunto cuyo volumen n-dimensional es también igual a cero.

fica la desigualdad[1].

$$V=(\psi\ (G))\leqslant\int\limits_{G} |\det J_{\psi}(x)|\, dx. \qquad (2.50)$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6. Demostremos ante todo que para cualquier transformación regular lineal T y para todo cubo n-dimensional C contenido en D', se verifica la desigualdad

$$V(\psi(C))\leqslant |\det T|\cdot\left|\max_{x\in C}\|T^{-1}J_{\psi}(x)\|\right|^{n}\cdot V(C). \qquad (2.51)$$

En virtud del corolario del lema 4, para cualquier conjunto cubicable G y para la transformación lineal T^{-1} es válida la igualdad

$$V(T^{-1}G) = |\det T^{-1}|\cdot V(G).$$

De este modo, si $G=\psi(C)$, resulta [2]:

$$V(\psi(C)) = |\det T|\cdot V(T^{-1}\psi(C)). \qquad (2.52)$$

Estimemos el segundo miembro de (2.52) mediante la desigualdad (2.47), tomando (2.47) no para transformar ψ, sino para superponer las transformaciones $T^{-1}\psi$. Obtendremos

$$V(\psi(C))\leqslant |\det T|\cdot\left|\max_{x\in C}\|J_{T^{-1}\psi}(x)\|\right|^{n}\cdot V(C). \qquad (2.53)$$

Teniendo presente que la matriz de Jacobi de una transformación lineal coincide con la matriz de esta transformación, obtendremos, en virtud del lema 1:

$$T_{T^{-1}_{\psi}}(x) = T^{-1}J_{\psi}(x).$$

Mas, esto significa precisamente que la desigualdad (2.53) puede escribirse en la forma (2.51).

Con ello queda demostrada la desigualdad (2.51).

Ahora, para demostrar el lema 6, cubramos el espacio E^n con una red de cubos n-dimensionales de arista h, y supongamos que C_1, C_2, ..., $C_{n(h)}$ son aquellos de los cubos que están contenidos íntegramente en G y que el símbolo G_h denota la suma de todos los cubos mencionados.

Al elegir en cada cubo C_i un punto arbitrario x_i, escribamos para él la desigualdad (2.51), suponiendo que $T=J_{\psi}(x_i)$. Obtendremos

$$V(\psi(C_i))\leqslant |\det J_{\psi}(x_i)|\cdot\{\max_{x\in C_i}\|[J_{\psi}(x_i)]^{-1}J_{\psi}(x)\|\}^{n}\cdot V(C_i).$$

[1] El mismo hecho de cubicabilidad de la imagen $\psi(G)$ se deduce de la afirmación demostrada en el lema antecedente.

[2] Tomamos en consideración que en este caso $T\cdot T^{-1}=E$, de suerte que $\det T\cdot\det T^{-1}=1$.

Sumando la última desigualdad respecto de todos los números de 1 a $n(h)$, obtendremos

$$V(\psi(G_h)) \leqslant \sum_{i=1}^{n(h)} |\det J_\psi(x_i)| \times \{\max_{x\in C_i} \| [J_\psi(x_i)]^{-1}\cdot J_\psi(x) \|\}^n \cdot V(C_i). \quad (2.54)$$

Por cuanto los elementos de la matriz de Jacobi $J_\psi(x)$ son funciones continuas del punto x en todo el dominio D' y, con mayor razón, en G, y teniendo presente que el producto $[J_\psi(x)]^{-1}\cdot J_\psi(x)$ es una matriz unidad cuya norma es igual a uno, entonces

$$\lim_{h\to 0} \max_{x\in C_i} \| [J_\psi(x_i)]^{-1}\cdot J_\psi(x) \| = 1.$$

La afirmación enunciada al final del § 4 de este capítulo deja constancia de que el límite de todo el segundo miembro de (2.54), cuando $h\to 0$, existe y es igual a $\int_G |\det J_\psi(x)|\,dx$.

De la misma afirmación proviene que $\lim_{h\to 0} G_h = G$, de suerte que en el límite para $h\to 0$ obtendremos de (2.54) la desigualdad (2.50). El lema 6 queda demostrado.

7°. **Lema 7.** *Supongamos cumplidas todas las condiciones del teorema 2.8, y, además, se admite complementariamente que la función $f(y)$ es no negativa en el dominio D. Entonces será válida la fórmula de cambio de variables (2.23).*

DEMOSTRACIÓN. Cubramos el espacio E^n con una red de cubos n-dimensionales de arista h, y supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ son aquellos de los cubos que están contenidos íntegramente en el dominio D. Admitamos a continuación que $G_i = \psi^{-1}(C_i)$. Al escribir para cada dominio G_i la igualdad (2.50), tendremos

$$V(C_i) \leqslant \int_{G_i} |\det J_\psi(x)|\,dx. \quad (2.55)$$

Sea, ahora, m_i la cota inferior exacta de la función $f(y)$ sobre el cubo C_i (o bien, que es lo mismo, la cota inferior exacta de la función $f[\psi(x)]$ en G_i). Multiplicando ambos miembros de (2.55) por m_i, y sumando respecto de todo i desde 1 hasta $n(h)$, tendremos

$$\sum_{i=1}^{n(h)} m_i V(C_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n(h)} m_i \int_{G_i} |\det J_\psi(x)|\,dx. \quad (2.56)$$

En vista de la afirmación enunciada al final del § 4 en este capítulo, el primer miembro de (2.56) tiene límite para $h\to 0$ que es igual a $\int\limits_D f(y)\,dy$. Por cuanto la suma de todos los dominios G_i está contenida en D' [1]) y la función f es *no negativa*, el segundo miembro de (2.56) no es superior a la integral

$$\int\limits_{D'} f[\psi(x)]\cdot|\det J_\psi(x)|\,dx,$$

cualquiera que sea $h > 0$.

Así pues, en límite, para $h \to 0$, obtendremos de (2.56) una desigualdad

$$\int\limits_D f(y)\,dy \leqslant \int\limits_{D'} f[\psi(x)]\cdot|\det J_\psi(x)|\,dx. \tag{2.57}$$

En los razonamientos aducidos podemos hacer que los dominios D y D' cambien de papel, y, en lugar de la función $f(y)$ en el dominio D examinar una función $g(x) f[\psi(x)]\cdot|\det J_\psi(x)|$ en el dominio D'. En este caso, haciendo uso del lema 1 y del teorema sobre el determinante del producto de dos matrices, obtendremos una desigualdad opuesta

$$\int\limits_{D'} f[\psi(x)]\cdot\det J_\psi(x)|\,dx \leqslant \int\limits_D f(y)\,dy. \tag{2.58}$$

De (2.57) y (2.58) se deduce la fórmula de cambio de variables (2.25). El lema 7 está demostrado.

8°. Resta por finalizar la demostración del teorema 2.8, es decir, deshacerse de la exigencia adicional, impuesta en el lema 7, de que la función $f(y)$ sea no negativa.

Supongamos que $f(y)$ es una función sumamente arbitraria integrable en el dominio D, y el número M, la cota superior exacta de la función $|f(y)|$ en el campo D [2]).

En virtud del lema 7, para cada una de las funciones no negativas $f_1(y) \equiv M$ y $f_2(y) = M - f(y)$ es válida la fórmula de cambio de variables (2.25).

Mas, en este caso, de la propiedad lineal de la integral proviene que la fórmula (2.25) es también válida para la diferencia $f_1(y) - f_2(y) = f(y)$. El teorema 2.8 está completamente demostrado.

OBSERVACIÓN 1. En las condiciones del teorema 2.8 podemos asumir que el jacobiano (2.24) se reduce a cero sobre cierto conjunto

---

[1]) En virtud de lo que $\sum\limits_{i=1}^{n(h)} C_i$ está contenida en D, $D' = \psi^{-1}(D)$, $G_i = \psi^{-1}(C_i)$.

[2]) Recordemos que de la integrabilidad de $f(y)$ en el dominio D se desprende que $f(y)$ está acotada en D y que las cotas exactas existen.

de puntos S que pertenece a D' y que tiene volumen cero n-dimensional. Efectivamente, el conjunto de puntos S se dispone en el interior de una figura elemental C de área tan pequeña como se quiera, con la particularidad de que, de conformidad con lo demostrado más arriba, es válida la fórmula

$$\int\limits_{\psi(D'-C)} f(y)\,dy = \int\limits_{D'-C} f[\psi(x)]\cdot|\det J_\psi(x)|\,dx. \qquad (2.59)$$

Al realizar en la fórmula (2.59) el paso límite respecto de la sucesión de figuras elementales $\{C_k\}$, cuyo volumen n-dimensional $V(C_k)$ tiende hacia cero, vemos que la fórmula (2.25) es válida también para el caso en consideración.

OBSERVACIÓN 2 Por cuanto la integral

$$I = \iint\limits_D \ldots \int 1\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_n \qquad (2.60)$$

es igual al volumen n-dimensional $V(D)$ del dominio D, resulta natural llamar la magnitud $dy_1 dy_2 \ldots dy_n$ *elemento de volumen* en el sistema de coordenadas cartesiano $Oy_1y_2 \ldots y_n$ que se considera.

Con ayuda de la transformación (2.23) pasamos de las coordenadas cartesianas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a las coordenadas nuevas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que son, en general, curvilíneas. De acuerdo con la fórmula de cambio de variables (2.25), en el proceso de tal paso la integral (2.60) se transforma en la

$$I = \iint\limits_D \ldots \int \left|\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

razón por la cual la magnitud

$$\left|\frac{\mathcal{D}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\mathcal{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right| dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

se denominará, naturalmente, *elemento de volumen* en el sistema curvilíneo de coordenadas $x_1x_2 \ldots x_n$.

Por consiguiente, el módulo del jacobiano caracteriza «extensión» (o «compresión») de un volumen, al pasar de las coordenadas cartesianas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a las curvilíneas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Calculemos el elemento de volumen en las coordenadas esféricas y en las cilíndricas.

1°. Para las coordenadas esféricas (en el espacio tridimensional)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

El jacobiano tiene por expresión

$$\frac{\mathscr{D}(x, y, z)}{\mathscr{D}(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \operatorname{sen}\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = r^2\operatorname{sen}\theta.$$

Por consiguiente, el elemento de volumen es igual a $r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta d\varphi$.

2°. Para las coordenadas cilíndricas (en el espacio tridimensional)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\operatorname{sen}\varphi, \quad (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi). \\ z = z \end{cases}$$

El jacobiano tiene por expresión

$$\frac{\mathscr{D}(x, y, z)}{\mathscr{D}(r, \varphi, z)} \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Por consiguiente, el elemento de volumen es igual a $r\,dr \times d\varphi\, dz$.

En particular, para las coordenadas polares en un plano el elemento de área es igual a $r\,dr\,d\varphi$.

3°. En un espacio n-dimensional las coordenadas polares se definen por las igualdades [1])

$$\begin{cases} x_1 = r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-1}, \\ x_m = r\cos\theta_{m-1}\prod\limits_{h=m}^{n-1}\operatorname{sen}\theta_h \quad \text{para } m = 2, 3, \ldots, n-1, \\ x_n = r\cos\theta_{n-1}, \end{cases}$$

en las cuales el radio esférico r y los ángulos esféricos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ varían dentro de los límites $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_m \leqslant \pi$ para $m = 2, 3, \ldots, n-1$.

Podemos convencernos de que en este caso el jacobiano tiene por expresión

$$\frac{\mathscr{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathscr{D}(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})} = r^{n-1}\prod_{h=1}^{n-1}\operatorname{sen}^{h-1}\theta_h.$$

---

[1]) Las fórmulas inversas que expresan coordenadas esféricas n-dimensionales en términos de las cartesianas tienen por expresión

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \ \operatorname{sen}\theta_m = \frac{r_m}{r_{m+1}}, \quad \cos\theta_m = \frac{x_{m+1}}{r_{m+1}},$$

donde $r_m = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$.

Así pues, el elemento de volumen en las coordenadas esféricas n-dimensionales es igual a $r^{n-1}\,dr \prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen}^{k-1}\theta_k\, d\theta_k$.

EJEMPLOS 1. Calcúlese el volumen de un cuerpo limitado por una superficie

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z, \tag{2.61}$$

donde $a>0$.

El cuerpo es simétrico respecto de los planos coordenados Oyz y Oxz y está dispuesto por encima del plano Oxy. Por consiguiente, es suficiente calcular el volumen de la cuarta parte del cuerpo dispuesta en el primer octante.

Al pasar a las coordenadas esféricas, reduzcamos la ecuación (2.61) a una forma

$$r=a\sqrt[3]{\cos\theta}.$$

Por cuanto el primer octante se caracteriza mediante las desigualdades

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

entonces, tomando en consideración la expresión para un elemento de volumen en las coordenadas esféricas, llegamos a que el volumen buscado V es igual a

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}}r^2\operatorname{sen}\theta\,dr.$$

De este modo

$$V=\frac{2\pi}{3}a^3\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{\pi a^3}{3}.$$

2. Calcúlese el área de una figura limitada por la curva

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}, \tag{2.62}$$

donde $h>0$, $k>0$, $a>0$, $b>0$.

Con el fin de calcular esta área resulta cómodo pasar a las así llamadas *coordenadas polares generalizadas*

$$\begin{cases} x=ar\cos\varphi,\\ y=br\operatorname{sen}\varphi\end{cases}\quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$

La ecuación (2.62) toma la forma

$$r=\frac{a}{h}\cos\varphi+\frac{b}{k}\operatorname{sen}\varphi. \tag{2.63}$$

con la particularidad de que, por cuanto el primer miembro de (2.63) es no negativo, conviene tomar sólo aquellos valores de φ, para los cuales el segundo miembro de (2.63) es no negativo.

Al multiplicar y dividir el segundo miembro de (2.63) por $\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}$, y al determinar φ_0 de las correlaciones

$$\operatorname{sen}\varphi_0=\frac{a/h}{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}},\quad \cos\varphi_0=\frac{b/k}{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}},$$

reducimos (2.63) a la forma

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_0). \qquad (2.63')$$

Por ser no negativo el segundo miembro de (2.63'), hallamos que $0\leqslant\varphi+\varphi_0\leqslant\pi$, es decir, $-\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\pi-\varphi_0$. Teniendo en cuenta que el jacobiano $\frac{\mathscr{D}(x,\,y)}{\mathscr{D}(r,\,\varphi)}$ es igual a abr, obtenemos para el área buscada S la siguiente expresión:

$$S=\int\limits_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}\operatorname{sen}(\varphi+\varphi_0)}abr\,dr=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\int\limits_{-\varphi_0}^{\pi-\varphi_0}\operatorname{sen}^2(\varphi+\varphi_0)\,d\varphi=\frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

Observemos en conclusión que para el cálculo de toda una serie de áreas resulta ser cómoda la forma un tanto más general de las coordenadas polares generalizadas

$$\begin{cases} x=ar\cos^{\alpha}\varphi,\\ y=br\operatorname{sen}^{\alpha}\varphi. \end{cases}$$

Es fácil convencerse de que para estas coordenadas

$$\frac{\mathscr{D}(x,\,y)}{\mathscr{D}(r,\,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\operatorname{sen}^{\alpha-1}\varphi.$$

SOBRE EL CÁLCULO APROXIMADO DE LAS INTEGRALES n-MÚLTIPLES

Ocupémonos de la cuestión sobre el cálculo aproximado de una integral n-múltiple

$$\int\int_{G_n} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n \tag{2.64}$$

extendida a cierto dominio G_n en el espacio E^n, y convengamos en considerar al principio que dicho dominio representa un cubo n-dimensional.

Suponiendo que la integral (2.64) existe, analicemos la cuestión sobre los medios óptimos de la integración numérica.

La cuestión tiene dos aspectos: 1) construcción de las fórmulas de integración numérica que sean óptimas sobre *las clases dadas de funciones*; 2) construcción de las fórmulas de integración numérica que sean óptimas *para cada función concreta de la clase dada*.

Veamos cada uno de los citados aspectos.

1. Fórmulas de integración numérica óptimas para las clases de funciones. Sea G_n un cubo unidad n-dimensional $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Diremos que una función $f(x_1, \dots, x_n)$ pertenece en el cubo G_n a *la clase* $D_n^{\alpha}(M)$ (a la clase $H_n^{\alpha}(M)$, respectivamente), siempre que bajo la condición de que existen todas las derivadas que vienen abajo quedan válidas las desigualdades

$$\left| \frac{\partial^{\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leqslant M,$$

donde

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant \alpha n, \quad \alpha_k \leqslant \alpha n$$

($\alpha_k \leqslant \alpha$, respectivamente).

Llamemos *fórmula de cubatura* una expresión de la forma

$$\int\int_{G_n} \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = l_N(f) + R_N(f, l_N) \tag{2.65}$$

en la cual

$$l_N(f) = \sum_{k=1}^{N} C_k f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}).$$

Los puntos $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ se denominan *nudos*; los números C_k, *pesos* de la fórmula de cubatura dada, y la magnitud $R_N(f, l_N)$, *error* de la fórmula de cubatura.

Nuestro objetivo es construir fórmulas de cubatura cuya estimación del error sea exacta en orden con relación a una magnitud pequeña $1/N$, donde N es el número de nudos de la fórmula de cubatura.

N.S. Bajválov [1] señaló que tanto sobre las clases $D_n^\alpha(M)$, como también sobre las clases $H_n^\alpha(M)$ no puede construirse la fórmula de cubatura (2.65) cuya estimación del error $R_N(f, l_N)$ fuera mejor que $C(\alpha, n)\cdot M\cdot N^{-\alpha}$, donde $C(\alpha, n)$ es una constante dependiente de α y n.

Sobre las clases $H_n^\alpha(M)$ la estimación mencionada se consigue (en orden con relación a $1/N$), si tomamos a título de l_N un producto de las fórmulas de cuadratura unidimensionales, exactas para los polinomios algebraicos de grado α_{n-1}.

Suponiendo que el número de nudos N es igual a $N = m^n$, donde m es entero, podemos poner

$$l_N = \sum_{k_1=1}^{m} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} C_{k_1} \ldots C_{k_n} f(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}), \tag{2.66}$$

donde $\{x_{k_\nu}, C_{k_\nu}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ son los nudos y pesos de la fórmula de cuadratura unidimensional que es exacta en los polinomios algebraicos [2].

Para el error de la fórmula de cubatura con l_N, definido por la igualdad (2.66) vale una estimación asintótica (es decir, válida para los valores de N suficientemente grandes)

$$R_N(f, l_N) \approx \frac{C_1(\alpha, n) M}{N^\alpha}, \tag{2.67}$$

en la cual $C_1(\alpha, n)$ es una constante dependiente de α y n.

Sobre las clases $H_n^\alpha(M)$ también existe una fórmula de cubatura, próxima en orden de la magnitud del error a la óptima. A título de tal fórmula interviene fórmula teórico-numérica de N. M. Kórobov [3].

$$l_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left[\tau_\alpha\left(\frac{ka_1}{N}\right), \ldots, \tau_\alpha\left(\frac{ka_n}{N}\right)\right] \tau'_\alpha\left(\frac{ka_1}{N}\right) \ldots \tau'_\alpha\left(\frac{ka_n}{N}\right), \tag{2.68}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son unos números enteros, los así llamados *coeficientes óptimos en módulo de N*, y $\tau_\alpha(x)$ son ciertos polinomios especiales de grado $\alpha + 1$. Para el error de la fórmula de cubatura con l_N, definido por la igualdad (2.68), es válida la estimación

$$|R_N(f, l_N)| \leqslant \frac{C_2(\alpha, n) M}{N^\alpha} \ln^\beta N \tag{2.69}$$

($C_2(\alpha, n)$ y β son unas constantes dependientes solo de α y n). La estimación (2.69) difiere de la estimación que no se mejora en orden solamente en el factor $\ln^\beta N$.

De este modo, en cada una de las clases $D_n^\alpha(M)$ y $H_n^\alpha(M)$ existen fórmulas de cubatura suficientemente buenas.

Al emplear prácticamente dichas fórmulas, hace falta tomar en consideración, por supuesto, sus méritos y deficiencias que se ponen de manifiesto en las situaciones concretas. Por ejemplo, conviene recordar que en el cálculo de las

---

[1] *N. S. Bajválov*. Sobre el cálculo aproximado de las integrales multiples. Véstnik MGU, serie de matemática, física, astronomía, No 4 (1959), pp. 3—18.

[2] Como ejemplo de tales fórmulas pueden servir, la así llamada fórmula de Gauss o la de Newton — Cotes (véase, por ejemplo, "Métodos de cálculo" que se deben a I. S. Berezin y N. P. Zhidkov).

[3] *N. M. Kórobov*. Métodos teórico-numéricos en el análisis aproximado. Fizmatgiz. Moscú, 1963.

integrales con ayuda da la fórmula (2.66) el número de nudos N no es arbitrario, sino igual a m^n. Cuando $n = 10$ y la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ se porta más o menos «igual» en todas las direcciones, el número mínimo razonable de nudos será $N = 2^{10} = 1024$. Si hay deseo aumentar la exactitud, el número de nudos puede ser igual a $N_1 = 3^{10} = 59\,049$, pero esto conduce al aumento del trabajo de cálculo casi en 60 veces.

Se debe también tener en cuenta que para un número de nudos N «pequeño» o «medio» el error de la fórmula de cubatura obtenida con ayuda de (2.66) puede fuertemente diferir del segundo miembro en (2.67) [1]).

Por otra parte, el empleo de la fórmula (2.66) es más ventajoso cuando se calculan grandes series de integrales, como también en el cálculo de las integrales de las funciones que contienen expresiones dependientes de un número menor de variables que n.

Las fórmulas de cubatura obtenidas con ayuda de (2.68) están libres de las deficiencias relacionadas con la elección del número de nudos N. Resulta más conveniente recurrir a dichas fórmulas para las funciones f que no son suficientemente suaves y para el gran valor del número de variables n (a partir de $n = 10$). Sin embargo, se debe tener en cuenta que para el error de la fórmula de cubatura obtenida con ayuda de (2.68) no es posible distinguir un término principal que sea semejante al término que figura en el segundo miembro de (2.67). Esta circunstancia dificulta tanto la posibilidad de estimar el error de cálculo, como también la pronosticación del número de nudos N que se requiere para asegurar la exactitud dada

2. Sobre las fórmulas de integración numérica, óptimas para cada función concreta. Indiquemos, ante todo, que la cuestión acerca de tales fórmulas es compleja y poco elaborada.

Empecemos por precisar el planteamiento del problema en consideración. Supongamos que una función dada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertenece a cierta clase A_n y que viene dado un conjunto de métodos de integración numérica $\{p_N\}$ de dicha función f.

Buscaremos en este conjunto tal método de integración numérica p_N^*, cuyo error $R_N(f, p_N^*)$ represente la cota inferior exacta de los errores $R_N(f, p_N)$ sobre el conjunto $\{p_N\}$ de todos los medios de integración numérica de la función dada f.

Dicho de otro modo, buscamos la mejor fórmula de cubatura para la función dada concreta f, y no para toda la clase A_n, a la cual pertenece la función mencionada [2]).

Tomemos, a título de la clase A_n, un conjunto de funciones infinitamente diferenciables en cada punto del cubo básico G_n, salvo, quizás, cierta superficie S de dimensión $k < n$, donde dichas funciones pueden reducirse al infinito, como, por ejemplo $1/r_{xy}^{\gamma}$, donde r_{xy} es la distancia entre el punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y un punto en la superficie $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\gamma < n - k - 1$.

El conjunto de métodos de integración numérica $\{p_N\}$ lo definamos del modo siguiente.

Para cada fórmula de cubatura σ_m, exacta en los polinomios algebraicos de grado $m-1$, definamos un elemento p_N del conjunto $\{p_N\}$ como una fórmula

---

[1]) Así, por ejemplo, al emplear para (2.66) la fórmula de cuadratura de Newton — Cotes, el segundo miembro en (2.67) es próximo al primer miembro a partir de $N = (\alpha n)^n$ (por ejemplo, cuando $\alpha = 1$ y $n = 10$, a partir de $N = 10^{10}$), y al emplear para (2.66) la fórmula de Gauss, el segundo miembro en (2.67) es próximo al primero a partir de $N = (\alpha n/2)^n$ (es decir, cuando $\alpha = 1$ y $n = 10$, a partir de $N \approx 10^7$). De este modo, al construir las fórmulas de cubatura con l_N, definidas mediante la igualdad (2.66), la fórmula de Gauss es más preferible que la de Newton — Cotes.

[2]) Una fórmula que es mejor para la clase de funciones es, hablando en términos generales, mejor para la «peor» función de esta clase.

de cubatura que se obtiene partiendo el cubo básico G_n en los paralelepípedos rectangulares y empleando en cada uno de tales paralelepípedos la fórmula σ_m bajo la condición de que el número total de nudos en todo el cubo G_n sea igual a N.

Es natural esperar que los nudos de la fórmula de cubatura obtenida de esta manera sean distribuidos de un modo óptimo, a condición de que el error en cada paralelepípedo sea constante.

En el centro de cómputo de la Universidad estatal de Moscú M. Lomonosov están elaborados programas estándar para calcular integrales dobles y triples que realizan la partición automática de los dominios de integración. En la base de estos programas se ha puesto un par de fórmulas de cubatura σ_m y σ_{m_1} para $m_1 > m$.

Como estimación del error para la fórmula σ_m se ha elegido una magnitud $\rho = |\sigma_m - \sigma_{m_1}|$.

Si ε es la exactitud prefijada de los cálculos, entonces, cuando $\rho \leqslant \varepsilon$ (para todo el cubo básico), a título del valor aproximado de la integral se toma aquel que se determina mediante la fórmula σ_{m_1}, y cuando $\rho > \varepsilon$, el cubo se divide en 2^n partes, y para cada una de estas partes el proceso se repite desde el principio.

El método descrito proporciona buenos resultados para el cálculo de las integrales dobles y triples. No obstante, al aumentar el número de mediciones n, la aplicación de este método se enfrenta con dificultades esenciales relacionadas con lo que al crecer n, para m y m_1 fijos, σ_m y σ_{m_1} se hacen mucho más complejas, mientras que cuando disminuyen m y m_1, con el aumento de n crece fuertemente el número de particiones.

Diremos, para concluir, que al calcular una integral n-múltiple, extendida no al cubo n-dimensional G_n, sino a un dominio arbitrario en el espacio E^n, se debe realizar al principio una transformación que convierta dicho campo en un cubo n-dimensional. Además, existen fórmulas de cubatura para ciertos dominios de la forma especial (bola, esfera, etc.) [1].

3. Ejemplo de cálculo aproximado de una integral múltiple. Examinemos un problema de cálculo de una integral cuadrimúltiple

$$F(R, L, H) = \int_0^R r\,dr \int_0^L \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} [H^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\varphi - \psi)]^{-3/2}\,d\varphi$$

con cierta exactitud ε para los siguientes valores de parámetros

$$R = 1;\ 1,25;\ 1,5;\ 1,75;\ 2;\ 2,25;\ 2,5;\ 2,75;\ 3;\ L = 0,8,\ H = 1.$$

Al realizar el cambio de variables que aplica el campo de integración en un cubo unidad, reduzcamos esta integral a la forma

$$F(R, L, H) = (2\pi)^2 \cdot R^2 \cdot L^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [H^2 + L^2\rho^2 + R^2 r^2 -$$
$$- 2RL\rho r \cos 2\pi(\varphi - \psi)]^{-3/2} r\rho\,d\rho\,dr\,d\psi\,d\varphi.$$

La función subintegral es suave. Por eso, para el cálculo de esta integral se emplea, naturalmente, la fórmula de cubatura que se basa en (2.66). Es natural también elegir la fórmula de Gauss (fórmula unidimensional que es exacta sobre los polinomios algebraicos) respecto de cada una de las variables r y ρ,

[1]) Por ejemplo, las fórmulas de cubatura sobre una esfera se estudiaban en las obras del matemático soviético S. L. Sóbolev y de sus discípulos.

mientras que respecto de las variables φ y ψ resulta mejor emplear la fórmula de los trapecios (véase v. II, cap. 3), pues la función subintegral es periódica con relación a cada una de estas variables, y para las funciones periódicas la fórmula de los trapecios ofrece los resultados mejores.

De este modo, obtendremos

$$F(R, L, H) = \left(\frac{2\pi RL}{m}\right)^2 \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} \sum_{k_3=1}^{m_3} \sum_{k_4=1}^{m_4} C_{k_1} C_{k_2} x_{k_1} x_{k_2}$$

$$\times \left[H^2 + L^2 x_{k_2}^2 + R^2 x_{k_1}^2 - 2LR x_{k_1} x_{k_2} \cos 2\pi \frac{k_3 - k_4}{m} \right]^{-3/2}$$

(aquí, (x_{k_ν}, C_{k_ν}) son nudos y pesos de la correspondiente fórmula de cuadratura unidimensional.

Con el fin de elegir los valores de m, m_1 y m_2 que aseguren la exactitud requerida, se realizan cálculos de arreglo, aumentando sucesivamente el número de nudos y comparando los resultados obtenidos.

Capítulo 3

INTEGRALES IMPROPIAS

Los conceptos de integral definida (simple y múltiple) introducidos más arriba no son aptos para un campo infinito de integración o cuando la función subintegral no es acotada.

En este capítulo señalemos de qué modo podemos generalizar el concepto de integral y extenderlo a los dos casos mencionados.

§ 1. Integrales impropias de primera especie (caso unidimensional)

En este párrafo se generalizará el concepto de integral definida para un dominio de integración conexo *ilimitado* y unidimensional.

1. Concepto de integral impropia de primera especie. Los dominios ilimitados conexos y unidimensionales se representan por unas semirrectas $a \leqslant x < +\infty$, $-\infty < x \leqslant b$, y por la recta infinita $-\infty < x < +\infty$. Para concretar, veamos una semirrecta $a \leqslant x < +\infty$.

Siempre en este capítulo supondremos, si no se especifica lo contrario, que una función $f(x)$ está definida sobre la semirrecta $a \leqslant x < +\infty$, y para cualquier $R \geqslant a$ existe una integral definida $\int\limits_a^R f(x)\,dx$, la cual se denotará con $F(R)$:

$$F(R) = \int\limits_a^R f(x)\,dx. \tag{3.1}$$

Así pues, bajo nuestras suposiciones, sobre la recta $a \leqslant R < +\infty$ está dada la función $F(R)$ definida por la relación (3.1). Analicemos una cuestión sobre el valor límite de la función $F(R)$ cuando $R \to +\infty$, es decir, la cuestión de existencia de un límite

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Para la expresión (3.2) se usará la siguiente denotación:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx. \tag{3.3}$$

El símbolo (3.3) se llamará en lo ulterior *integral impropia* de primera especie de la función $f(x)$ extendida a la semirrecta $a \leqslant x < +\infty$.

Si existe el límite (3.2), la integral impropia (3.3) se denomina *convergente*. En cambio, si dicho límite no existe, la integral impropia (3.3) se denomina *divergente*.

OBSERVACIÓN 1. Veamos una integral impropia (3.3). Si $b > a$ entonces, a la par con esta integral puede estudiarse también una integral $\int\limits_b^\infty f(x)\,dx$. Evidentemente, la convergencia de una de las integrales citadas predetermina la convergencia de la otra. En este caso tiene lugar la siguiente igualdad:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^\infty f(x)\,dx.$$

Notemos que la divergencia de una de las integrales impropias mencionadas lleva consigo la divergencia de la otra.

OBSERVACIÓN 2. Si una integral impropia (3.3) es convergente, el valor del límite (3.2) se denota mediante el mismo símbolo (3.3). De este modo, si la integral (3.3) es convergente, se emplea la igualdad

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx.$$

OBSERVACIÓN 3. Por analogía con la integral impropia (3.3) se definen integrales impropias $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. La primera de ellas simboliza la operación del paso límite $\lim\limits_{R\to-\infty} \int\limits_R^b f(x)\,dx$, y la segunda, $\lim\limits_{\substack{R'\to-\infty\\ R''\to+\infty}} \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx$.

EJEMPLO. Examinemos sobre una semirrecta $a \leqslant x < \infty$ $(a > 0)$ la función $f(x) = 1/x^p$, $p = \text{const}$. Esta función es integrable en cualquier segmento $a \leqslant x \leqslant R$, con la particularidad de que

$$\int\limits_a^R \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^R = \dfrac{R^{1-p}-a^{1-p}}{1-p} & \text{para } p \neq 1, \\ \ln x\,\Big|_a^R = \ln \dfrac{R}{a} & \text{para } p = 1. \end{cases}$$

Es evidente que cuando $p > 1$, el límite $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R \frac{dx}{x^p}$ existe y es igual a $\frac{a^{1-p}}{p-1}$, y, cuando $p \leqslant 1$, dicho límite no existe. Por consiguiente, la integral impropia $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ es convergente para $p > 1$, y divergente, para $p \leqslant 1$. Notemos que, cuando $p > 1$,

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}.$$

2. Criterio de Cauchy para la convergencia de una integral impropia de primera especie. Síntomas suficientes de convergencia. La cuestión de convergencia de una integral impropia de primera especie es equivalente a la de existencia del valor límite de la función $F(R) = \int\limits_a^R f(x)\,dx$ para $R \to +\infty$. Según se sabe [1]), para que exista el valor límite de la función $F(R)$, cuando $R \to \infty$, es necesario y suficiente que ella satisfaga la siguiente *condición de Cauchy*: para cualquier $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal $A > 0$, que con cualesquiera R' y R'' superiores a A se verifica la desigualdad

$$|F(R'') - F(R')| = \left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Por consiguiente, será válida la siguiente *afirmación*.

***Teorema 3.1* (*criterio de Cauchy para la convergencia de una integral impropia*).** *Para que converja la integral impropia* (3.3), *es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *pueda indicarse un* $A > 0$ *tal que con cualesquiera* R' *y* R'' *superiores a* A *se verifique una desigualdad*

$$\left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

OBSERVACION. Notemos que de la convergencia de una integral impropia no se desprende de ninguna manera que la función subintegral sea acotada. Por ejemplo, una integral $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$, donde la función

1) Véase, v. I, cap. 8, § 1.

es nula para x no enteros y es igual a n, cuando $x = n$ (número entero), es, evidentemente, convergente, aunque la función subintegral no es acotada.

Por cuanto el criterio de Cauchy es poco aceptable para las aplicaciones prácticas, conviene indicar diferentes síntomas suficientes de convergencia para las integrales impropias.

En adelante consideraremos que la función $f(x)$ está definida en una semirrecta $a \leqslant x < \infty$, y para todo $R \geqslant a$ existe la integral ordinaria $\int\limits_a^R f(x)\,dx$.

Demostremos el siguiente teorema.

***Teorema 3.2** (**síntoma general de comparación**). Sea en una semirrecta $a \leqslant x < \infty$*

$$|f(x)| \leqslant g(x). \tag{3.4}$$

Entonces, de la convergencia de la integral $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ se desprende de la convergencia de la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

DEMOSTRACIÓN. Admitamos que la integral $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ converge. Entonces, de acuerdo con el criterio de Cauchy (véase teorema 3.1), existe para todo $\varepsilon > 0$ tal $A > 0$ que con cualesquiera $R' > A$ y $R'' > A$ se cumple la desigualdad

$$\left| \int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

De conformidad con las desigualdades conocidas para las integrales y con la desigualdad (3.4), tenemos

$$\left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} g(x)\,dx.$$

De aquí y de la desigualdad (3.5) se deduce que para cualesquiera R' y R'' superiores a A, se verifica la desigualdad

$$\left| \int\limits_{R'}^{R''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, la integral $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ es convergente.

Teorema 3.3 (síntoma particular de comparación). *Supongamos que en una semirrecta $0 < a \leqslant x < \infty$ la función $f(x)$ satisface la relación*

$$|f(x)| \leqslant \frac{c}{x^p},$$

donde c y p son constantes, $p > 1$. Entonces, la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ converge. Si, en cambio, existe tal constante $c > 0$ que en la semirrecta $0 < a \leqslant x < \infty$ se verifica la correlación $f(x) \geqslant \frac{c}{x^p}$, donde $p \leqslant 1$, la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ será divergente.

La afirmación de este teorema se deduce del teorema 3.2 y del ejemplo examinado en el punto antecedente (basta hacer $g(x) = c/x^p$).

Corolario (síntoma particular de comparación en la forma límite). *Si para $p > 1$ existe un valor límite finito $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|\,x^p = c$, la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ será convergente. Si, en cambio, existe, para $p \leqslant 1$, un valor límite positivo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,x^p = c > 0$, la integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ será divergente.*

Cerciorémonos de que la primera parte del corolario es legítima. Con este fin constatamos que de la existencia del límite para $x \to +\infty$ se deduce el carácter acotado de la función $x^p\,|f(x)|$, es decir, con cierta constante $c_0 > 0$ se verifica la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant c_0/x^p.$$

Después se aplica la primera parte del teorema 3.3. La validez de la segunda parte del corolario se deduce de los siguientes razonamientos. Por cuanto $c > 0$, se puede indicar un $\varepsilon > 0$ tan pequeño que $c - \varepsilon > 0$. A dicho ε le corresponde tal $A > 0$ que, cuando $x \geqslant A$, se cumple la desigualdad $c - \varepsilon < f(x)\,x^p$ (esta desigualdad proviene de la definición de límite). Por eso, $f(x) > \frac{c-\varepsilon}{x^p}$, y en este caso actúa la segunda parte del teorema 3.3.

3. Convergencia absoluta y convergencia condicional de las integrales impropias. Introduzcamos el concepto de convergencia *absoluta* y convergencia *condicional* de las integrales impropias. Supongamos que $f(x)$ es integrable sobre cualquier segmento $[a, R]$ [1]).

Definición 2. *Una integral impropia* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *se llama condicionalmente convergente, si converge, en tanto que la integral* $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ *diverge.*

OBSERVACIÓN. Al poner en el teorema 3.2 $g(x) = |f(x)|$, llegamos a que la convergencia absoluta de la integral impropia predetermina su convergencia.

Notemos que los teoremas 3.2 y 3.3 permiten establecer sólo la convergencia absoluta de las integrales impropias que se analizan.

Demos a conocer un síntoma más de convergencia de las integrales impropias que es también apto para el caso de convergencia condicional.

Teorema 3.4 (síntoma de Dirichlet — Abel). *Supongamos que las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *están definidas sobre una semirrecta* $a \leqslant x < \infty$. *Admitamos, además, que la función* $f(x)$ *es continua en la semirrecta* $a \leqslant x < \infty$ *y tiene en ésta una primitiva acotada* $F(x)$ [2]).

Supongamos también que la función $g(x)$ *tiende a cero para* $x \to +\infty$, *sin crecer de un modo monótono en la semirrecta* $a \leqslant x < \infty$, *y tiene la derivada* $g'(x)$ *continua en la semirrecta* $a \leqslant x < \infty$. *En estas condiciones resulta ser convergente la integral impropia*

$$\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx. \tag{3.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Hagamos uso del criterio de Cauchy para la convergencia de las integrales impropias. Preliminarmente integremos por partes la integral $\int_{R'}^{R''} f(x)\,g(x)\,dx$ sobre un segmento arbitrario $[R', R'']$, $R'' > R'$, de la semirrecta $a \leqslant x < \infty$. Obtendremos

$$\int_{R'}^{R''} f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_{R'}^{R''} - \int_{R'}^{R''} F(x)\,g'(x)\,dx. \tag{3.7}$$

---

[1]) En este caso la función $|f(x)|$ es también integrable en cualquier segmento $[a, R]$.

[2]) Esto es indicio de que la primitiva $F(x)$, que puede definirse como $\int_a^x f(t)\,dt$, satisface para todo $x \geqslant a$ la desigualdad $|F(x)| \leqslant K$, donde K es una constante.

Por hipótesis del teorema, $F(x)$ es acotada: $|F(x)| \leqslant K$. Por cuanto $g(x)$ no es creciente y tiende a cero cuando $x \to +\infty$, entonces $g(x) \geqslant 0$, y $g'(x) \leqslant 0$. De este modo, estimando la relación (3.7), obtendremos la siguiente desigualdad

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x) g(x)\, dx \right| \leqslant K \{g(R') + g(R'')\} + K \int_{R'}^{R''} (-g'(x))\, dx$$

La integral en el segundo miembro de esta desigualdad es igual a $g(R') - g(R'')$, y, por eso, evidentemente,

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x) g(x)\, dx \right| \leqslant 2Kg(R'). \tag{3.8}$$

Con ayuda de esta desigualdad no es difícil dar por terminado la demostración del teorema. Sea ε un número positivo arbitrario. Ya que $g(x) \to 0$ para $x \to +\infty$, podemos elegir, según ε dado, tal A que para $R' \geqslant A$ se cumpla la desigualdad $g(R') < \varepsilon/2K$. De aquí y de la desigualdad (3.8) se deduce que para cualesquiera R' y R'' mayores que A se cumple la desigualdad

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x) g(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

la cual, de acuerdo con el criterio de Cauchy, asegura la convergencia de la integral (3.6). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. La exigencia en el teorema 3.4 que la función $g(x)$ sea diferenciable es superflua. El teorema 3.4 puede ser demostrado bajo un solo supuesto de que $g(x)$ es monótona y tiende hacia cero cuando $x \to +\infty$, para lo cual se debe utilizar la segunda fórmula del valor medio (fórmula de Bonnet).

EJEMPLO 1. Veamos una integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{\alpha}}\, dx, \quad \alpha > 0. \tag{3.9}$$

Suponiendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 1/x^{\alpha}$, resulta fácil convencerse de que para dicha integral se cumplen todas las condiciones del teorema 3.4. Por esta razón la integral (3.9) es convergente.

EJEMPLO 2. Veamos la integral de Fresnel [1] $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2\, dx$. Conforme a la Observación 1, p. 1 de este párrafo, la convergencia de una

[1] O. Fresnel (1788—1827), destacado físico francés.

de las integrales, $\int\limits_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$ y $\int\limits_1^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$, predetermina la convergencia de la otra. Por eso, recurrimos a la segunda de estas integrales. Tenemos

$$\int\limits_1^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \int\limits_1^\infty x \operatorname{sen} x^2 \frac{1}{x}\,dx.$$

Suponiendo $f(x) = x \operatorname{sen} x^2$ y $g(x) = 1/x$, nos convencemos de que todas las condiciones del teorema 3.4 están cumplidas y, por esta razón, la integral de Fresnel es convergente.

4. Cambio de variables bajo el signo de una integral impropia y fórmula de integración por partes. En este punto enunciemos las condiciones, bajo las cuales actúan las fórmulas de cambio de variables y de integración por partes para las integrales impropias de primera especie. Examinemos, al principio, la cuestión de cambio de variables bajo el signo de integral impropia.

Supongamos cumplidas las siguientes condiciones:

1) *la función $f(x)$ es continua sobre el semieje $a \leqslant x < \infty$;*

2) *el semieje $a \leqslant x < \infty$ es un conjunto de valores de cierta función estrictamente monótona $x = g(t)$ que está definida en el semieje $\alpha \leqslant t < \infty$ (o bien en $-\infty < t \leqslant \alpha$) y que tiene en este semieje derivada continua;*

3) $g(\alpha) = a$.

En las condiciones citadas de la convergencia de una de las siguientes integrales impropias

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx \ \ y \ \int\limits_\alpha^\infty f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(o \ \ bien \ \ -\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(g(t))\,g'(t)\,dt\right) \quad (3.10)$$

proviene la convergencia de la otra y la igualdad entre las dos.

La afirmación formulada se establece con ayuda de los siguientes razonamientos.

Examinemos un segmento arbitrario $[a, R]$. A este segmento le corresponde, en virtud de la monotonía estricta de la función $g(t)$, el segmento $[\alpha, \rho]$ (o $[\rho, \alpha]$) del eje t tal que, al variar t sobre el segmento $[\alpha, \rho]$, los valores de la función $x = g(t)$ llenan el segmento $[a, R]$, con la particularidad de que $g(\rho) = R$. De este modo, para los segmentos mencionados quedan cumplidas todas las condiciones del p. 3, § 7, cap. 1, v. II de este curso, para las cuales es vigente la fórmula de cambio de variables bajo el signo de la integral definida. Por eso, tiene lugar la igualdad

$$\int\limits_a^R f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\rho f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(o \ \ bien = -\int\limits_\rho^\alpha f(g(t))\,g'(t)\,dt\right). \quad (3.11)$$

Por ser la función $x = g(t)$ estrictamente monótona, $R \to \infty$ cuando $\rho \to \infty$, y, viceversa, $\rho \to \infty$ cuando $R \to \infty$ (o bien $R \to \infty$ cuando $\rho \to -\infty$, y $\rho \to -\infty$ cuando $R \to \infty$). Por eso, de la fórmula (3.11) se deduce la validez de la afirmación enunciada más arriba.

Pasemos, ahora, a la cuestión de integración por partes de las integrales impropias de primera especie.

Demostremos la siguiente afirmación

Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ tienen derivadas continuas en una semirrecta $a \leqslant x < \infty$, y, además, existe un valor límite

$$\lim_{x \to \infty} u(x)\, v(x) = A.$$

En las condiciones citadas, de la convergencia de una de las integrales

$$\int_a^\infty u(x)\, v'(x)\, dx \quad y \quad \int_a^\infty v(x)\, u'(x)\, dx \tag{3.12}$$

proviene la convergencia de la otra. Es válida también la fórmula

$$\int_a^\infty u(x)\, v'(x)\, dx = A - u(a)\, v(a) - \int_a^\infty v(x)\, u'(x)\, dx. \tag{3.13}$$

Con miras a demostrar la afirmación enunciada, analicemos un segmento arbitrario $[a, R]$. En dicho segmento es válida la fórmula corriente de integración por partes. Por eso,

$$\int_a^R u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_a^R - \int_a^R v(x)\, u'(x)\, dx.$$

La expresión $[u(x)\, v(x)]_a^R$ tiende hacia $A - u(a)\, v(a)$, cuando $R \to \infty$, razón por la cual de la última igualdad proviene la convergencia simultánea o divergencia simultánea de las integrales (3.12), como también la validez de la fórmula (3.13) en el caso en que una de las integrales (3.12) converja.

§ 2. Integrales impropias de segunda especie (caso unidimensional)

En este párrafo se generaliza el concepto de integral definida para el caso de las funciones ilimitadas.

1. Concepto de integral impropia de segunda especie. Criterio de Cauchy. Supongamos que en un semisegmento $[a, b)$ viene dada una función $f(x)$. Un punto b se llama *singular*, si la función no es acotada sobre el semisegmento $[a, b)$, pero sí acotada en cualquier segmento $[a, b-\alpha]$ encerrado dentro del semisegmento $[a, b)$. Supongamos también que en cualquier segmento de este tipo la función $f(x)$ es integrable.

Siendo vigentes nuestras suposiciones, sobre el semisegmento $(0, b-a)$ está dada una función del argumento α, definida por la correlación

$$F(\alpha)=\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Estudiemos la cuestión sobre el valor límite derecho de la función $F(\alpha)$ en un punto $\alpha=0$, es decir, la cuestión de existencia de límite

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx. \tag{3.14}$$

Emplearemos para la expresión (3.14) la designación

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3.15}$$

En adelante el símbolo (3.15) se denominará *integral impropia de segunda especie* de la función $f(x)$ extendida al semisegmento $[a, b)$. Si existe el límite (3.14), la integral impropia (3.15) se llama *convergente*. Si, en cambio, dicho límite no existe, la integral impropia se llama *divergente*. Si la integral impropia (3.15) converge, la magnitud del límite (3.14) se denota con el mismo símbolo (3.15). De este modo, si converge la integral (3.15), se emplea la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

OBSERVACIÓN. El concepto de integral impropia de segunda especie se extiende con facilidad al caso en que la función $f(x)$ tiene un número finito de puntos singulares.

EJEMPLO. Veamos sobre el segmento $[a, b)$ una función $1/(b-x)^p$, $p>0$. Está claro que el punto b es singular para dicha función. Además, obviamente, esta función es integrable en cualquier segmento $[a, b-\alpha]$, con la particularidad de que

$$\int_a^{b-\alpha}\frac{dx}{(b-x)^p}=\begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{b-\alpha}=\dfrac{(b-a)^{1-p}-\alpha^{1-p}}{1-p} & \text{para } p\neq 1,\\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha}=\ln\dfrac{b-a}{\alpha} & \text{para } p=1.\end{cases}$$

Es evidente que el límite $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha}\frac{dx}{(b-x)^p}$ existe y es igual a $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ cuando $p<1$, y no existe, cuando $p\geqslant 1$. Por consiguiente, la integral impropia en consideración converge cuando $p<1$, y diverge, cuando $p\geqslant 1$.

Formulemos el criterio de Cauchy para la convergencia de una integral impropia de segunda especie. Supondremos en este caso que la función $f(x)$ está definida sobre un semisegmento $[a, b)$, y que b es un punto singular.

Teorema 3.5 (criterio de Cauchy). *Para que converja la integral impropia de segunda especie* (3.15), *es necesario y suficiente que, para todo* $\varepsilon>0$, *pueda indicarse un* $\delta>0$ *tal que para cualesquiera* α' *y* α'' *que satisfagan la condición* $0<\alpha''<\alpha'<\delta$ *se cumpla una desigualdad*

$$\left|\int\limits_{b-\alpha'}^{b-\alpha''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

La validez de este teorema se deduce de lo que el concepto de convergencia de una integral es equivalente por su definición al concepto de existencia del valor límite de la función $F(\alpha)$ introducido al comienzo de este punto.

2. Observaciones finales. No somos propensos a desarrollar detalladamente la teoría de integrales impropias de segunda especie. Ello se debe a que los teoremas y deducciones principales del párrafo antecedente se extienden sin dificultades algunas al caso de las integrales de segunda especie. Por eso, limitémonos a ciertas observaciones.

1°. Impuestas ciertas restricciones en las funciones subintegrales, las integrales de segunda especie se reducen a las de primera especie. A saber, supongamos que una función $f(x)$ es continua sobre el semisegmento $[a, b)$ y que b es un punto singular de esta función. Bajo estas condiciones en la integral $\int\limits_a^{b-\alpha}f(x)\,dx$ podemos realizar el siguiente cambio de variables:

$$x=b-\frac{1}{t},\quad dx=\frac{dt}{t^2},\quad \frac{1}{b-a}\leqslant t\leqslant\frac{1}{\alpha}.$$

Como resultado de este cambio de variables, obtendremos la igualdad

$$\int\limits_a^{b-\alpha}f(x)\,dx=\int\limits_{1/(b-a)}^{1/\alpha}f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt. \tag{3.16}$$

Sea convergente la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Esto quiere decir que existe el límite $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits^{1/\alpha} f(x)\,dx$. Volviendo a la igualdad (3.16), vemos que existe también un límite, para $1/\alpha\to+\infty$, de la expresión que figura en el segundo miembro de (3.16). Quedan pues demostrados la convergencia de la integral impropia de segunda especie

$$\int\limits_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt,$$

como también el hecho de que esta integral es igual a la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Evidentemente, la convergencia de la integral impropia de segunda especie que acabamos de citar predetermina la convergencia de la integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, y, además, la igualdad entre ellas. Así pues, *de la convergencia de una de las integrales*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad y \quad \int\limits_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

se deduce la convergencia de la otra, y, además, la igualdad entre ellas.

2°. Para las integrales impropias de segunda especie se demuestran con facilidad las afirmaciones análogas a las del p. 2 en el párrafo antecedente que pueden reunirse bajo el nombre general de «síntomas de comparación». Notemos que en todas las formulaciones la función $f(x)$ se estudia sobre un semisegmento $[a, b)$, donde b es un punto singular de la función.

El síntoma particular de comparación tendrá la siguiente forma. Si $|f(x)|\leqslant c\,(b-x)^{-p}$, donde $p<1$, la integral impropia (3.15) será convergente. En cambio, si $f(x)\geqslant c\,(b-x)^{-p}$, donde $c>0$, $p\geqslant 1$, entonces la integral impropia (3.15) es divergente. La demostración proviene del síntoma general de comparación y del ejemplo analizado en el punto anterior.

Por analogía completa con el p. 3 del párrafo antecedente, para las integrales impropias de segunda especie se enuncian reglas de integración mediante el cambio de variables y de integración por partes.

§ 3. Valor principal de la integral impropia

Definición. *Supongamos que una función $f(x)$ está definida sobre una recta $-\infty < x < \infty$, y es integrable en cada segmento perteneciente a la recta citada. Diremos que la función $f(x)$ es integrable según Cauchy, si existe el límite*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Este límite se denomina valor principal de la integral impropia de la función $f(x)$ en el sentido de Cauchy y se denota con el símbolo [1]

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 1. Hallemos el valor principal de la integral de sen x. Por cuanto, en virtud de que sen x es impar,

$$\int_{-R}^{R} \operatorname{sen} x\,dx = 0, \text{ entonces } \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\,dx = 0.$$

Resulta válida la siguiente *afirmación*.

Si una función $f(x)$ es impar, será integrable según Cauchy y el valor principal de la integral de esta función será nulo.

Si una función $f(x)$ es par, será integrable según Cauchy cuando, y sólo cuando, es convergente la integral impropia

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{3.17}$$

La primera parte de esta afirmación es evidente. Para demostrar la segunda parte, basta aprovechar la igualdad

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{R} f(x)\,dx,$$

que se verifica para cualquier función par, y la definición de convergencia de la integral impropia (3.17).

El concepto de integración según Cauchy puede introducirse para las integrales impropias de segunda especie también en el caso en que el punto singular sea punto interior del segmento por el cual se realiza la integración.

---

[1] V. p. son letras iniciales de las palabras francesas «Valeur principal».

Definición. *Supongamos que una función $f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, salvo, quizás, en el punto c, $a < c < b$, y es integrable en cualquier segmento que no contenga c. Diremos que la función $f(x)$ es integrable según Cauchy, si existe el límite*

$$\lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx+\int_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx\right)=\mathrm{V.p.}\int_a^b f(x)\,dx,$$

llamado valor principal de la integral en el sentido de Cauchy.

EJEMPLO 2. La función $\frac{1}{x-c}$ no es integrable sobre el segmento $[a, b]$, $a < c < b$ en el sentido impropio, sin embargo es integrable según Cauchy. En este caso

$$\mathrm{V.p.}\int_a^b \frac{dx}{x-c}=\lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\alpha}^{b}\frac{dx}{x-c}\right)=\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

§ 4. Integrales impropias múltiples

Este párrafo está dedicado a la generalización del concepto de integral múltiple al caso en que el dominio de integración no es acotado y no es acotada la función subintegral. Recordemos que precisamente estos casos se han excluido por nosotros del análisis al construir la teoría de integrales múltiples.

Notemos que el concepto de integral impropia múltiple se formulará de una manera tal que sean abarcados tanto el caso de un campo no acotado de integración, como también el caso de una función no acotada.

1. Concepto de integrales impropias múltiples. Sea D un conjunto abierto [1]) del espacio euclídeo m-dimensional E^m. Con el símbolo $\overline{D}$ designemos la clausura D que se obtiene reuniendo D con su frontera. Nos hará falta el concepto de sucesión $\{D_n\}$ de conjuntos abiertos que agotan monótonamente el conjunto D.

Diremos que la sucesión $\{D_n\}$ de conjuntos abiertos agota monótonamente el conjunto D, si: 1) para n cualquiera, el conjunto $\overline{D}_n$ está contenido en D_{n+1}; 2) la unión de todos los conjuntos D_n coincide con el conjunto D [2]).

Notemos que cada conjunto D_n de la sucesión $\{D_n\}$ está contenido en D.

---

[1]) Un conjunto se llama abierto, si está compuesto sólo por los puntos interiores. Un conjunto abierto se llama también dominio.

[2]) Se denomina unión de todos los conjuntos D_n al conjunto $\widetilde{D}$ que contiene todos los puntos de cada uno de los conjuntos D_n y que es de tal índole que cada punto de $\widetilde{D}$ pertenece por lo menos a uno de los conjuntos D_n.

Supongamos que sobre un conjunto abierto D viene dada una función $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, integrable según Riemann en cualquier subconjunto cerrado cubicable del conjunto D. Analizaremos toda clase de sucesiones $\{D_n\}$ de conjuntos abiertos que agotan monótonamente D y que poseen la propiedad de que la clausura $\overline{D}_n$ de cada conjunto D_n es cubicable (de aquí se deduce, en particular, que cada uno de los conjuntos D_n está acotado).

Si para toda sucesión de este tipo $\{D_n\}$ existe un límite de la sucesión numérica $\left\{\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx\right\}$, *y si este límite no depende de cómo se elige la sucesión $\{D_n\}$, dicho límite se denomina integral impropia de la función $f(x)$ extendida al conjunto D y se denota con uno de los siguientes símbolos:*

$$\int\limits_D f(x)\,dx, \quad \int\int\limits_D \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_m. \qquad (3.18)$$

En este caso la integral impropia (3.18) *se llama convergente.*

Notemos que el símbolo (3.18) se emplea también en el caso cuando los límites de las sucesiones mencionadas más arriba no existen. En tal caso la integral (3.18) se llama *divergente*.

2. Integrales impropias de las funciones no negativas. Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Para que converja la integral impropia* (3.18) *de una función $f(x)$, no negativa en el dominio D es necesario y suficiente que al menos para una sola sucesión de dominios cubicables $\{D_n\}$ que agotan monótonamente el dominio D sea acotada la sucesión numérica*

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx \qquad (3.19)$$

DEMOSTRACIÓN. La necesidad de hipótesis del teorema es obvia: la sucesión (3.19) es no decreciente ($\overline{D}_n$ está contenida en $\overline{D}_{n+1}$, y $f(x) \geqslant 0$), por lo cual como condición necesaria de convergencia de la sucesión interviene su carácter acotado. Pasemos a la demostración de la suficiencia de las condiciones del teorema. Por cuanto la sucesión (3.19) está acotada y no decrece, es convergente hacia cierto número I. Resta por demostrar que hacia este mismo número I converge la sucesión

$$a'_n = \int\limits_{\overline{D}'_n} f(x)\,dx,$$

donde $\{D'_n\}$ es otra sucesión arbitraria de dominios que agotan monótonamente el dominio D. Fijamos un número cualquiera n y examinemos el dominio D'_n. Existe un número n_1 tal que $\overline{D}'_n$ esté contenida en D_{n_1} [1]). Por eso,

$$a'_n \leqslant a_{n_1} \leqslant I.$$

De aquí se desprende que la sucesión $\{a'_n\}$ converge hacia cierto número $I' \leqslant I$. Cambiando en nuestros razonamientos las sucesiones a'_n y a_n, llegaremos a la desigualdad $I \leqslant I'$. Por consiguiente, $I' = I$. El teorema está demostrado.

EJEMPLO Examinemos una integral

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy, \tag{3.20}$$

tomada por todo el plano. A título de sistema de dominios $\{D_n\}$ que agotan monótonamente el dominio D elijamos el siguiente sistema de círculos concéntricos D_n:

$$x^2 + y^2 < n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

En cada círculo D_n pasemos al sistema polar de coordenadas r, φ. Obtendremos

$$a_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^n e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \pi\,(1 - e^{-n^2}).$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pi$. De acuerdo con el teorema que acabamos de demostrar, la integral (3.20) converge y es igual a π. Notemos que la integral (3.20) puede ser representada en la siguiente forma[2])

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

---

[1]) Admitamos que esto no es así. Entonces, para todo k entero puede indicarse tal punto M_k del dominio $\overline{D}'_n$ que no pertenezca al dominio D_k. En la sucesión $\{M_k\}$ podemos elegir (por ser $\overline{D}'_n$ cerrada y acotada) una subsucesión que converja hacia cierto punto $M \in \overline{D}'_n$. El punto M pertenece, junto con cierto entorno, a uno de los conjuntos D_{k_1}. Mas, al mismo conjunto D_{k_1} y a todos los conjuntos D_k con números mayores pertenecen los puntos M_k con los números tan grandes como se quiera. Esto contradice la elección de los puntos M_k.

[2]) Podemos convencernos fácilmente de la posibilidad de esta representación, si a título de sistema agotable de campos tomamos un sistema de cuadrados cada vez crecientes con centros en el origen de coordenadas y lados paralelos a los ejes, y aplicamos, después, la fórmula de integración reiterada por cada uno de estos cuadrados.

A partir de esta representación obtenemos el valor de la integral llamada integral de Poisson[1]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 3.7 (síntoma general de comparación). *Supongamos que las funciones no negativas $f(x)$ y $g(x)$ en cada punto del conjunto abierto D satisfacen la condición*

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Entonces, la convergencia de la integral impropia $\int\limits_D g(x)\,dx$ predetermina la convergencia de la integral impropia $\int\limits_D f(x)\,dx$.

DEMOSTRACIÓN Sea $\{D_n\}$ una sucesión de campos que agotan monótonamente el campo D. A partir de las desigualdades obvias

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\overline{D}_n} g(x)\,dx = b_n$$

se deduce que la convergencia de la sucesión b_n predetermina la convergencia de la sucesión a_n. De aquí y del teorema 3.6 proviene la validez del teorema enunciado.

Al analizar la convergencia de las integrales impropias se emplean, de ordinario, funciones estándar (tipo) de comparación, la más usada de las cuales es $g(x) = |x|^{-p}$, $p > 0$[2]).

EJEMPLO 1 Sean $a > 0$; D, una bola de radio a con centro en el origen de coordenadas; $g(x) = |x|^{-p}$. A título de la sucesión $\{D_n\}$ de dominios que agotan monótonamente D tomemos un sistema de capas concéntricas D_n que se forman por eliminación en la bola D de las bolas de radio $1/n$ con centro en el origen de coordenadas. Al introducir el sistema esférico de coordenadas (véase p. 3° § 5 del capítulo 2), obtendremos

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} g(x)\,dx = \int\limits_{1/n}^{a} r^{-p+m-1}\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} d\theta_2 \,\ldots$$

$$\ldots \int\limits_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{sen}^{k-1}\theta_k\right) d\theta_{m-1}.$$

---

[1]) S. Poisson (1781—1840), matemático y físico francés.

[2]) Se considera en este caso $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$.

Denotando con el símbolo ω_m una magnitud positiva

$$\omega_m = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \ \ldots \ \int_0^{\pi} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{sen}^{k-1} \theta_k \right) d\theta_{m-1},$$

podemos escribir

$$a_n = \omega_m \int_{1/n}^{a} r^{-p+m-1}\, dr.$$

De aquí se deduce que la sucesión a_n está acotada y, por lo tanto, es convergente cuando, y sólo cuando, $p < m$. En virtud del teorema 3.6, una integral impropia de la función $|x|^{-p}$ en el dominio D converge cuando $p < m$, y diverge, cuando $p \geqslant m$.

EJEMPLO 2. Sean: $a > 0$; D, la exterioridad de una bola de radio a con centro en el origen de coordenadas; $g(x) = |x|^{-p}$. A título de la sucesión $\{D_n\}$ de dominios que agotan monótonamente D tomemos un sistema de capas concéntricas D_n que se componen de todos los puntos $x \in E^m$ que satisfacen la condición

$$a < |x| < n.$$

Al introducir el sistema esférico de coordenadas, obtendremos

$$a_n = \int_{D_n} g(x)\, dx = \omega_m \int_a^n r^{-p+m-1}\, dr.$$

De esta igualdad y del teorema 3.6 se deduce que una integral impropia de la función $|x|^{-p}$ en el citado dominio D converge para $p > m$, y diverge, para $p \leqslant m$.

3. Integrales impropias de las funciones de signo variable. En este punto aclararemos la relación existente entre convergencia ordinaria y convergencia absoluta de las integrales impropias múltiples. Al igual que en el caso unidimensional, una integral impropia $\int_D f(x)\, dx$ se llamará absolutamente convergente, siempre que converge la integral $\int_D |f(x)|\, dx$. Demostraremos que la convergencia absoluta predetermina la convergencia ordinaria. La más sorprendente es otra propiedad de las integrales impropias múltiples que no tiene análogo en el caso unidimensional y que consiste en que la convergencia de una integral impropia múltiple predetermina su convergencia absoluta. Dicho de otro modo, demostraremos que *para las integrales impropias múltiples los conceptos de convergencia y de convergencia absoluta son equivalentes.*

Antes de pasar a la demostración de estas propiedades, demos a conocer unas observaciones previas.

De la definición de integral impropia proviene que si converge una integral impropia, extendida al dominio D, de cada una de las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$, también serán convergentes las integrales de la suma o de la diferencia de estas funciones.

Examinemos las siguientes dos funciones no negativas:

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}, \quad f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}. \tag{3.21}$$

Es evidente que las funciones citadas pueden ser definidas mediante las correlaciones

$$\left.\begin{array}{l} f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{si } f(x)\geqslant 0, \\ 0 & \text{si } f(x)<0, \end{cases} \\ f_-(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{si } f(x)\leqslant 0, \\ 0 & \text{si } f(x)>0. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{3.22}$$

Señalemos también las siguientes correlaciones evidentes que provienen de la definición de las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$:

$$0\leqslant f_+(x)\leqslant |f(x)|, \quad 0\leqslant f_-(x)\leqslant |f(x)|, \tag{3.23}$$

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x). \tag{3.24}$$

Demostraremos, ahora, las afirmaciones mencionadas al comienzo de este punto.

Teorema 3.8. *De la convergencia absoluta de una integral impropia múltiple* $\int\limits_D f(x)\,dx$ *se deduce su convergencia ordinaria.*

DEMOSTRACIÓN. Recurramos a las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$ que acabamos de introducir. De la integrabilidad en el sentido propio de la función $f(x)$ en cualquier subdominio cubicable del dominio D se desprende la integrabilidad en D de la función $|f(x)|$, y de aquí, como también de las fórmulas (3.21), proviene que las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$ son asimismo integrables en cualquier subdominio de esta índole. Teniendo presentes la convergencia de la integral $\int\limits_D |f(x)|\,dx$, la propiedad recién citada de las funciones $f_+(x)$ y $f_-(x)$, las desigualdades (3.23) y el teorema 3.7, es fácil convencerse de que las integrales impropias $\int\limits_D f_+(x)\,dx$ y $\int\limits_D f_-(x)\,dx$ son convergentes. De aquí y de la relación (3.24) se deduce la convergencia de la integral $\int\limits_D f(x)\,dx$. El teorema está demostrado.

Demostremos, ahora, el teorema recíproco.

Teorema 3.9. *Si una integral impropia múltiple* $\int\limits_D f(x)\,dx$ *es convergente, convergerá también absolutamente.*

DEMOSTRACIÓN. Admitamos que la afirmación del teorema es errónea. En tal caso, del teorema 3.6 se deduce que la sucesión de integrales de $|f(x)|$ en cualquier sucesión de dominios $\{D_n\}$ que agotan monótonamente D será una sucesión infinita monótonamente creciente. De aquí proviene que la sucesión $\{D_n\}$ puede elegirse de una manera tal que para cualquier $n = 1, 2, \ldots$ se cumpla una desigualdad

$$\int_{\overline{D}_{n+1}} |f(x)|\, dx > 3 \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + 2n. \qquad (3.25)$$

Denotemos con P_n el conjunto $D_{n+1} - D_n$. Entonces, de (3.25) obtenemos para cualquier n

$$\int_{\overline{P}_n} |f(x)|\, dx > 2 \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + 2n. \qquad (3.26)$$

Por cuanto $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, resulta

$$\int_{\overline{P}_n} |f(x)|\, dx = \int_{\overline{P}_n} f_+(x)\, dx + \int_{\overline{P}_n} f_-(x)\, dx. \qquad (3.27)$$

Supongamos que de las dos integrales que figuran en el segundo miembro de (3.27) la mayor será la primera. Entonces, de las correlaciones (3.26) y (3.27) obtendremos para cualquier n

$$\int_{\overline{P}_n} f_+(x)\, dx > \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + n. \qquad (3.28)$$

Dividamos el dominio P_n en un número finito de dominios P_{n_i} de un modo tal que la suma inferior $\sum_i m_i \Delta\sigma_i$ de funciones $f_+(x)$ para dicha partición sea tan poco diferente de la integral de esta función extendida a $\overline{P}_n$ que, al sustituir la integral en el primer miembro de (3.28) por la suma inferior mencionada, se obtenga la siguiente desigualdad

$$\sum_i m_i \Delta\sigma_i > \int_{\overline{D}_n} |f(x)|\, dx + n. \qquad (3.29)$$

Dado que $m_i \geqslant 0$, en la suma $\sum_i m_i \Delta\sigma_i$ podemos dejar sólo aquellos sumandos, para los cuales $m_i > 0$. La unión de los dominios correspondientes P_{n_i} la designemos por $\widetilde{P}_n$.

En el dominio $\widetilde{P}_n$ la función $f(x)$ es positiva, por lo cual en dicho dominio $f(x) = f_+(x)$. Por consiguiente, de acuerdo con (3.29), obtenemos la igualdad

$$\int\limits_{\widetilde{P}_n} f(x)\,dx > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx + n. \tag{3.30}$$

Denotemos con D_n^* la unión de D_n y $\widetilde{P}_n$. Entonces, sumando las desigualdades (3.30) con una desigualdad evidente

$$\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)\,dx > -\int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|\,dx,$$

obtendremos

$$\int\limits_{\overline{D}_n^*} f(x)\,dx > n. \tag{3.31}$$

Obviamente, la sucesión de dominios $\{D_n^*\}$ agota monótonamente el dominio D. Mas, en tal caso, de acuerdo con la desigualdad (3.31), la integral $\int\limits_D f(x)\,dx$ es divergente. Como, por hipótesis, esta integral converge, la suposición de que no es cierta la afirmación del teorema no tiene lugar. El teorema queda demostrado.

4. Valor principal de las integrales impropias múltiples.

Definición. *Supongamos que una función $f(x)$ está definida para todo $x \in E^m$ y es integrable en cada bola K_R de radio R con centro en el origen de coordenadas. Suele decirse que la función $f(x)$ es integrable según Cauchy en E^m, si existe el límite*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{K_R} f(x)\,dx.$$

Este límite se llama valor principal de la integral impropia de la función $f(x)$ en el sentido de Cauchy y se denota

$$\text{V.p.} \int\limits_{E^m} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{K_R} f(x)\,dx.$$

EJEMPLO. Supongamos que $f(x)$ tiene en las coordenadas esféricas una forma $f(x) = h(r)\,g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1})$, donde las funciones h y g son continuas, con la particularidad de que

$$\int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \int\limits_0^{\pi} d\theta_2 \ldots \int\limits_0^{\pi} g(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}) \left(\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{sen}^{k-1}\theta_k\right) d\theta_{m-1} = 0.$$

Entonces, evidentemente, $f(x)$ es integrable según Cauchy y

$$\text{V.p.} \int\limits_{E_m} f(x)\,dx = 0.$$

En particular, cuando $m = 2$, la función de dos variables $f(x, y) = h(r) \cos \varphi$ es integrable según Cauchy, y la integral de ella en el sentido del valor principal es nula.

En el caso de que la función $f(x)$ tenga singularidad en cierto punto x_0 del dominio D, la integral en el sentido de Cauchy se introduce como límite

$$\text{V.p.} \int\limits_{D} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{D_R} f(x)\,dx,$$

donde D_R es un conjunto que se obtiene por eliminación en el dominio D de la bola de radio R con centro en el punto x_0.