

INTEGRALES CURVILÍNEAS

En este capítulo vamos a extender el concepto de integral definida simple, tomada por un segmento rectilíneo, al caso en que como campo de integración interviene un segmento de cierta curva plana o espacial.

Las integrales de este género se denominan *curvilíneas*. En las aplicaciones prácticas se acostumbra examinar integrales curvilíneas de dos especies (de las expresiones que tienen el sentido escalar y el vectorial). En el presente capítulo las integrales curvilíneas se analizan paralelamente.

§ 1. Definiciones de las integrales curvilíneas y el sentido físico de las mismas

Examinemos en el plano *Oxy* una curva rectificable *L*, privada de puntos múltiples y de trozos en los cuales la curva se coloca sobre sí misma. Supongamos que la curva se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b) \quad (4.1)$$

y en los primeros pasos convengamos en considerarla no cerrada y limitada por los puntos *A* y *B*.

Supongamos, además, que una función $f(x, y)$, dos funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ están definidas y son continuas a lo largo de la curva $L = AB^1$.

Dividamos el segmento $a \leq t \leq b$, mediante los puntos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, en n segmentos parciales $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

¹ Una función $f(x, y)$ se llama *continua a lo largo de la curva L*, si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon$ para cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la curva *L* que satisfacen la condición $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$. Hemos definido, de hecho, no continuidad, sino *continuidad uniforme* de la función $f(x, y)$ a lo largo de la curva *L*, pero, ya que el conjunto de todos los puntos de la curva *L* es acotado y cerrado, estas nociones coinciden.

Por cuanto a todo valor t_h le corresponde en la curva L un punto determinado $M_h(x_h, y_h)$ de coordenadas $x_h = \varphi(t_h)$, $y_h = \psi(t_h)$, para la partición mencionada del segmento $a \leq t \leq b$ toda la curva $L = AB$ se descompone en n arcos parciales $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$ (fig. 4.1).

En cada arco parcial $M_{h-1}M_h$ elijamos un punto arbitrario $N_h(\xi_h, \eta_h)$, cuyas coordenadas ξ_h, η_h corresponden a cierto valor τ_h del parámetro t , de suerte que $\xi_h = \varphi(\tau_h)$, $\eta_h = \psi(\tau_h)$, con la particularidad de que $t_{h-1} \leq \tau_h \leq t_h$. Convengamos en designar con el símbolo Δl_h la longitud del k -ésimo arco parcial $M_{h-1}M_h$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Formemos una suma integral

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta l_k. \quad (4.2)$$

Formemos dos sumas integrales

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) (x_k - x_{k-1}), \quad (4.2')$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) (y_k - y_{k-1}). \quad (4.2'')$$

Un número I se llamará *límite* de la suma integral σ_s ($s = 1, 2, 3$), al tender a cero la máxima de las longitudes Δl_k , siempre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\sigma_s - I| < \varepsilon$, una vez que la máxima de las longitudes Δl_k se hace inferior a δ .

DEFINICIONES

Si existe el límite de la suma integral σ_1 , cuando la máxima de las longitudes Δl_k tiende a cero, dicho límite recibe el nombre de *integral curvilínea de primera especie* de la función $f(x, y)$ a lo largo de la curva L y se denota con el símbolo

$$\int_L f(x, y) dl,$$

Si existe el límite de la suma integral σ_2 [σ_3], cuando la máxima de las longitudes Δl_k tiende a cero, dicho límite recibe el nombre de *integral curvilínea de segunda especie* y se denota con el símbolo

$$\int_{AB} P(x, y) dx \left[\int_{AB} Q(x, y) dy \right].$$

La suma

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy$$

o bien

$$\int_{AB} f(x, y) dl \quad (4.3)$$

se acostumbra llamarla *integral curvilínea general de segunda especie* que se denota con el símbolo

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (4.3')$$

Aclaremos el sentido físico de las integrales curvilíneas introducidas.

Supongamos que a lo largo de la curva L viene distribuida una masa con la densidad lineal $f(x, y)$. Para calcular la masa de toda la curva, resulta natural partir esta curva en trozos pequeños y, considerando que en cada trozo la densidad varía poco, admitir que la masa de cada trozo es aproximadamente igual al producto de cierto valor intermedio de la densidad por la longitud de este trozo.

En este caso la masa de toda la curva será aproximadamente igual a la suma integral (4.2). El valor exacto de la masa será definido, naturalmente, como límite de la suma (4.2), al tender a cero la longitud del trozo mayor.

De este modo, la *integral curvilínea de primera especie* (4.3) proporciona la masa de una curva, a lo largo de la cual la densidad lineal es igual a $f(x, y)$.

Supongamos que un punto material se mueve de A a B a lo largo de la curva L por efecto de una fuerza $\vec{F}(x, y)$ cuyos componentes son $P(x, y)$ y $Q(x, y)$. Para calcular el trabajo realizado en tal movimiento, resulta natural dividir la curva en trozos pequeños y, considerando que en cada trozo la fuerza varía poco, admitir que el trabajo en cada trozo es aproximadamente igual a la suma de productos de los componentes de la fuerza, tomados en ciertos puntos intermedios por los componentes del vector de desplazamiento. En este caso el trabajo total, al realizarse el movimiento desde A hasta B , será aproximadamente igual a la suma (4.2') y (4.2''). El valor exacto de este trabajo se definirá, naturalmente, como límite de la suma citada, al tender hacia cero la longitud del trozo mayor.

De este modo, la *integral curvilínea general de segunda especie* (4.3') representa el trabajo que se gasta para trasladar un punto material desde A hasta B a lo largo de la curva L bajo la acción de una fuerza que tiene componentes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$.

OBSERVACIÓN 1 Las formas de las sumas (4.2), (4.2'), (4.2'') muestran con toda evidencia que la integral curvilínea de primera

especie no depende de la dirección en que se recorre la curva L (de A a B , o de B a A), mientras que para la integral curvilínea de segunda especie el cambio de la dirección en la curva causa el cambio correspondiente del signo, es decir,

$$\int_{AB} P(x, y) dx = - \int_{BA} P(x, y) dx, \quad \int_{AB} Q(x, y) dx = - \int_{BA} Q(x, y) dy.$$

OBSERVACIÓN 2 Para una curva espacial se introduce de una manera sumamente análoga el concepto de integral curvilínea de primera especie $\int_{AB} f(x, y, z) dl$, y tres integrales curvilíneas de segunda especie

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z) dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z) dz.$$

La suma de las tres últimas integrales se acostumbra llamarla *integral curvilínea general de segunda especie* y designarla con el símbolo

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

§ 2. Existencia de las integrales curvilíneas y reducción de las mismas a las integrales definidas

Convengamos en llamar la recta L *suave*, si las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ de las ecuaciones paramétricas (4.1) que la definen, poseen en el segmento $[a, b]$ derivadas continuas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ ¹⁾.

Llamemos la curva L *continua a trozos*, si es continua y se descompone en un número finito de trozos (que no tienen puntos interiores comunes), cada uno de los cuales representa una curva suave.

De acuerdo con el convenio admitido aún en el cap. 6 y 7, v. II, se llamarán *puntos singulares* de la curva L aquellos que corresponden al valor del parámetro t , para el cual las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ se anulan.

Demostremos que si la curva $L = AB$ es suave y no contiene puntos singulares, y si las funciones $f(x, y)$, $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas a lo largo de esta curva, resultan válidas las siguientes fórmulas que

¹⁾ Se sobreentiende que las derivadas $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ son continuas en cualquier punto interior del segmento $[a, b]$ y poseen valores límites finitos en el punto a por la derecha y en el punto b por la izquierda.

reducen las integrales curvilíneas a las integrales definidas ordinarias

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (4.4)$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (4.4')$$

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) dt. \quad (4.4'')$$

Se demostrará a la vez la existencia de las integrales curvilíneas que figuran en dichas fórmulas.

Notemos, ante todo, que las integrales definidas que figuran en los segundos miembros de las fórmulas (4.4), (4.4') y (4.4'') existen a ciencia cierta (pues, bajo los supuestos admitidos, las funciones subintegrales en cada una de las citadas integrales son continuas en el segmento $a \leq t \leq b$).

En cuanto a la integral curvilínea de segunda especie, se deducirá sólo la fórmula (4.4') (pues, la deducción de la fórmula (4.4'') es sumamente análoga).

Al igual que en el § 1, dividamos el segmento $a \leq t \leq b$, mediante los puntos $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ en n segmentos parciales y formemos las sumas integrales (4.2) y (4.2').

Tomemos en consideración que

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

$$x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt.$$

Esto nos permite reescribir del modo siguiente las expresiones para las sumas integrales (4.2) y (4.2'):

$$\sigma_1 = \sum_{h=1}^n \left\{ f[\varphi(\tau_h), \psi(\tau_h)] \times \int_{t_{h-1}}^{t_h} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \right\}.$$

$$\sigma_2 = \sum_{h=1}^n \left\{ P[\varphi(\tau_h), \psi(\tau_h)] \times \int_{t_{h-1}}^{t_h} \varphi'(t) dt \right\}. \quad (4.5')$$

$$(4.5)$$

(Aquí se ha tomado en consideración que $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, donde τ_k es cierto valor del parámetro t que satisface la condición $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$).

Ahora, designemos las integrales definidas en los segundos miembros de las fórmulas (4.4) y (4.4') con K_1 y K_2 , respectivamente. Al dividir el segmento $a \leq t \leq b$ en una suma de n segmentos parciales $[t_{k-1}, t_k]$, podemos escribir las integrales definidas K_1 y K_2 en la siguiente forma

$$K_1 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f[\varphi(t), \psi(t)]}{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}} dt. \quad \left| \quad K_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt. \right.$$

Examinemos y estimemos las diferencias

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - K_1 &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - f[\varphi(t), \psi(t)]\} \times \\ &\times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, \quad (4.6) \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \sigma_2 - K_2 &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] - P[\varphi(t), \psi(t)]\} \varphi'(t) dt. \quad (4.6') \end{aligned} \right.$$

Por cuanto las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ son continuas en el segmento $a \leq t \leq b$, y las funciones $f(x, y)$ y $P(x, y)$, continuas a lo largo de la curva L , de conformidad con el teorema de continuidad de una función compuesta (véase § 3, cap. 5, v. II) las funciones $f[\varphi(t), \psi(t)]$ y $P[\varphi(t), \psi(t)]$ son continuas en el segmento $a \leq t \leq b$.

Observemos ahora que cuando tiende a cero la mayor de las longitudes parciales de los arcos Δl_k , tenderá a cero también la mayor de las diferencias $(t_k - t_{k-1})^1$. Mas, de aquí se deduce que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, puede indicarse tal $\delta > 0$ que a condición de que la mayor de las longitudes Δl_k es menor que δ , cada expresión en los corchetes en las fórmulas (4.6) y (4.6') es inferior a ε . Por con-

¹⁾ Efectivamente, $\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$. Por cuanto las funciones $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ son continuas sobre el segmento $a \leq t \leq b$, y no se anula simultáneamente, la función $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ es continua y estrictamente positiva en el segmento $a \leq t \leq b$. Por eso, también será positivo el valor de la última función sobre el segmento $a \leq t \leq b$. Mas, en tal caso, $\Delta l_k \geq$

$\geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m(t_k - t_{k-1})$, es decir, $t_k - t_{k-1} \leq \frac{1}{m} \Delta l_k$

siguiente, a condición de que la mayor de las longitudes Δl_k sea menor que δ , obtendremos para las diferencias (4.6) y (4.6') las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned}
 |\sigma_1 - K_1| &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \times \\
 &\times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \\
 &= \varepsilon \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \\
 &\quad - \varepsilon l,
 \end{aligned}$$

donde l es la longitud de la curva AB .

$$\begin{aligned}
 |\sigma_2 - K_2| &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq \\
 &\leq \varepsilon M \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon M (b-a),
 \end{aligned}$$

donde M es el valor máximo de $|\varphi'(t)|$ sobre el segmento $a \leq t \leq b$. Subrayemos que, al deducir la fórmula (4.4'), sólo exigimos que $\varphi'(t)$ sea continua, y la curva $L = AB$, rectificable (la continuidad de $\psi'(t)$ no es necesaria en este caso).

Por ser ε arbitrario, podemos afirmar que las sumas integrales σ_1 y σ_2 tienen (cuando tiende a cero la máxima de las longitudes Δl_k) límites iguales a K_1 y K_2 , respectivamente. Con esto queda demostrada simultáneamente la existencia de las integrales curvilíneas que figuran en los primeros miembros de las fórmulas (4.4) y (4.4'), como también la validez de las mismas.

OBSERVACION 1. En el caso de una curva suave a trozos L , las integrales curvilíneas a lo largo de esta curva se definirán, naturalmente, como sumas de las correspondientes integrales curvilíneas a lo largo de todos los trozos suaves que integran la curva dada L . De este modo, las igualdades (4.4), (4.4') y (4.4'') resultan válidas también para la curva continua a trozos L . Dichas igualdades son, además, lícitas en un caso en que las funciones $f(x, y)$, $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ sean no estrictamente continuas, sino sólo continuas a trozos a lo largo de la curva L (es decir, cuando la curva L se descompone en un número finito de trozos, privados de puntos interiores comunes, a lo largo de cada uno de los cuales las funciones mencionadas son continuas).

OBSERVACION 2 Los resultados y las fórmulas sumamente análogos tienen lugar también para las integrales curvilíneas tomadas a lo largo de una curva espacial $L = AB$, definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b).$$

Limitémonos a la inscripción de las fórmulas

$$\int_{AB} f(x, y, z) dt = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \times \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx &= \int_a^b P[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \varphi'(t) dt, \\ \int_{AB} Q(x, y, z) dy &= \int_a^b Q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \psi'(t) dt, \\ \int_{AB} R(x, y, z) dz &= \int_a^b R[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \chi'(t) dt. \end{aligned}$$

OBSERVACION 3. Se ha establecido anteriormente que una integral curvilínea de segunda especie depende de la dirección en que se recorre la curva $L=AB$. Por eso se debe llegar a un convenio especial referente a lo que se entiende por el símbolo

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (4.7)$$

en el caso cuando L sea una curva cerrada (es decir, cuando el punto B coincide con el A).

De las dos direcciones posibles del recorrido de un contorno cerrado L se llamará *positiva* aquella, para la cual el campo dispuesto en el interior del contorno citado queda por el lado izquierdo con relación al punto que realiza el recorrido¹⁾. En la fig. 4.2 la dirección positiva del recorrido está marcada por flechas.

Convengamos en considerar que en la integral (4.7) a lo largo del contorno cerrado L , el mismo se recorre en la posición positiva.

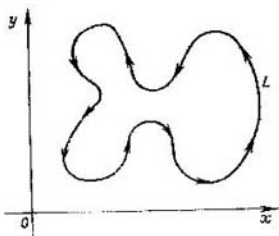


Fig. 4.2.

¹⁾ Tal dirección del movimiento puede denominarse convencionalmente «movimiento en el sentido contrario de las agujas de un reloj».

OBSERVACIÓN 4. Es fácil mostrar que *las integrales curvilíneas poseen las mismas propiedades que las integrales definidas ordinarias* (las demostraciones son análogas a las expuestas en los §§ 5 y 6 del cap. 1, v. II). Además, adoptadas unas suposiciones más rígidas, las propiedades mencionadas se deducen de las fórmulas (4.4), (4.4') (4.4'').

Enunciemos estas propiedades con arreglo a las integrales curvilíneas de primera especie.

1°. PROPIEDAD LINEAL. Si para cada una de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ existe una integral curvilínea a lo largo de la curva AB , y si α y β son constantes cualesquiera, para la función $[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]$ también existe integral curvilínea a lo largo de la curva AB , con la particularidad de que

$$\int_{AB} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dl = \alpha \int_{AB} f(x, y) dl + \beta \int_{AB} g(x, y) dl.$$

2°. ADITIVIDAD. Si el arco AB está compuesto por dos arcos AC y CB , y si para la función $f(x, y)$ existe integral curvilínea a lo largo del arco AB , para dicha función existe integral curvilínea a lo largo de cada uno de los arcos AC y CB , con la particularidad de que

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{AC} f(x, y) dl + \int_{CB} f(x, y) dl.$$

3°. ESTIMACIÓN DEL MÓDULO DE UNA INTEGRAL. Si existe una integral curvilínea de la función $f(x, y)$ a lo largo de la curva AB , existe también integral curvilínea a lo largo de la curva AB de la función $|f(x, y)|$, con la particularidad de que

$$\left| \int_{AB} f(x, y) dl \right| \leq \int_{AB} |f(x, y)| dl.$$

4°. FÓRMULA DEL VALOR MEDIO. Si una función $f(x, y)$ es continua a lo largo de la curva AB , en dicha curva existe un punto M^* tal que

$$\int_{AB} f(x, y) dl = l \cdot f(M^*),$$

donde l es longitud de la curva AB .

EJEMPLO. 1°. Calcúlese la masa de una elipse L definida mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

a condición de que $a > b > 0$, y que la densidad lineal de distribución de la masa es igual a $\rho = |y|$.

El problema se reduce al cálculo de la integral curvilínea de primera especie $\int_L |y| dl$.

Con ayuda de la fórmula (4.4) obtendremos

$$\begin{aligned} \int_L |y| dl &= b \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} t| \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t} dt = \\ &= b \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t} dt - \\ &- b \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} t \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \operatorname{cos}^2 t} dt = \\ &= -b \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{cos}^2 t} d(\operatorname{cos} t) + \\ &+ b \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{cos}^2 t} d(\operatorname{cos} t) = 2b \left(b + a \frac{\operatorname{arcsen} e}{e} \right), \end{aligned}$$

donde $^1) e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

2°. Calcúlese la integral curvilínea de segunda especie

$$I = \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy,$$

en la que L es una parábola $y = x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$. La citada parábola puede considerarse como una curva que se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

Por eso, con ayuda de las fórmulas (4.4') y (4.4''), obtendremos

$$I = \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3) dt + \int_{-1}^1 (t^4 - 2t^3) 2t dt = -\frac{14}{15}.$$

¹⁾ Recordemos que la magnitud e en la geometría analítica lleva el nombre de *excentricidad*.

Capítulo 5

INTEGRALES DE SUPERFICIE

En el presente capítulo se analizará el problema de integración de las funciones definidas sobre las superficies. Con este motivo estudiemos previamente el concepto de superficie y el de área de una superficie.

§ 1. Concepto de superficie

1. Concepto de superficie. La aplicación f de un dominio¹⁾ G sobre el conjunto G^* de un espacio euclídeo tridimensional se llama *homeomorfa*, si dicha aplicación representa una correspondencia biunívoca entre los puntos G y G^* , en la que a cualquier sucesión convergente $\{M_n\}$ de puntos de G le corresponde la sucesión convergente $\{M_n^*\}$ de puntos en G^* , y a cada sucesión convergente de puntos $\{M_n^*\}$ de G^* le corresponde la sucesión convergente de puntos $\{M_n\}$ de G . Dicho de otro modo, la aplicación homeomorfa de un dominio G sobre el conjunto G^* es aplicación biunívoca y recíprocamente continua de los conjuntos mencionados. Diremos que G^* es la *imagen* de G en la aplicación homeomorfa de f .

Estudiemos el siguiente ejemplo. Supongamos que G es un dominio en el plano Oxy ; (u, v) son coordenadas de los puntos M del dominio citado; $z = z(M)$ es una función continua en G ; G^* , la gráfica de esta función. Es evidente que la aplicación f del campo G sobre G^* , definida mediante las relaciones

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v),$$

es aplicación homeomorfa de este campo sobre el conjunto G^* .

Introducamos el concepto de *superficie elemental*.

Un conjunto Φ de puntos del espacio tridimensional se llama superficie elemental, si dicho conjunto es una imagen del círculo abierto G , al realizarse la aplicación homeomorfa de G en el espacio²⁾.

Con ayuda del concepto de superficie elemental se introduce concepto de la así llamada *superficie simple*.

Introducamos, previamente, el concepto de entorno de un punto del conjunto Φ del espacio euclídeo E^3 .

¹⁾ Recordemos que recibe el nombre de *dominio* un conjunto, cada punto del cual es interior.

²⁾ Se examina aquí el espacio euclídeo tridimensional, aunque podemos estudiar un espacio euclídeo de cualquier número de mediciones y hablar de la superficie bidimensional en este espacio.

Se denomina *entorno* del punto M del conjunto Φ la parte común del conjunto Φ y del entorno espacial del punto M .

El conjunto Φ de puntos del espacio recibe el nombre de *superficie simple*, si dicho conjunto es conexo¹⁾ y cualquier punto de éste tiene un entorno que representa una *superficie elemental*.

Observemos que la superficie elemental es superficie simple, pero, la superficie simple no es, en el caso general, elemental. Por ejemplo, una esfera es la superficie simple, pero no elemental.

Formulemos el concepto de *superficie general*.

Una aplicación f de la superficie simple G se llama *localmente homeomorfa*, si todo punto de G cuenta con un entorno el que se aplica del modo homeomorfo sobre su imagen.

El conjunto Φ de puntos de un espacio lleva el nombre de *superficie general*, si es la imagen de una superficie simple, al realizarse su aplicación localmente homeomorfa en el espacio.

OBSERVACION 1. Notemos que los entornos de los puntos en una superficie general se introducen como imágenes de los entornos de aquella superficie simple, de cuya imagen sirve la superficie general dada.

OBSERVACION 2 Es obvio que toda superficie simple es superficie que no se interseca y no se coloca sobre sí misma. La superficie general puede admitir líneas de intersección y de autocolocación. Por ejemplo, la superficie que se muestra en la fig. 5.1, tiene líneas de intersección, pero es imagen localmente homeomorfa de una zona cilíndrica y constituye, por eso, una superficie general.

2. **Superficie regular.** Introduzcamos el concepto de superficie regular (k veces diferenciable).

Una superficie Φ , cuyos puntos tienen coordenadas x, y, z , se denomina *regular* (k veces diferenciable), si para cierto $k \geq 1$ cada punto de Φ cuenta con un entorno que admite realizar k veces parametrización diferenciable. Esto significa que cada uno de los entornos mencionados representa una aplicación homeomorfa de cierto dominio elemental G^2 en los planos (u, v) con ayuda de las relaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (5.1)$$

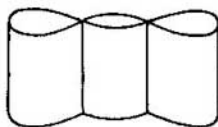


Fig. 5.1.

¹⁾ Recordemos que un conjunto se llama conexo, si cualesquiera dos puntos cuyos pueden unirse con una curva continua compuesta enteramente de los puntos de este conjunto.

²⁾ Un campo G sobre un plano se denomina *elemental*, si representa imagen de un círculo abierto, al realizarse la aplicación homeomorfa de este círculo sobre el plano.

en las cuales las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ son k veces diferenciables en el dominio G .

Si $k = 1$, la superficie se llama, habitualmente, *suave*.

Diremos, además, que con ayuda de las relaciones (5.1) introducimos en un entorno de un punto sobre la superficie la *parametrización regular* mediante los parámetros u y v .

OBSERVACION 1. Si toda la superficie Φ representa aplicación del campo G mediante las relaciones (5.1), diremos que en Φ está introducida la *parametrización única*.

Un punto de la superficie regular se llama *ordinario*, si existe tal parametrización regular de cierto entorno suyo que en este punto el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

sea igual a dos. De lo contrario, el punto de la superficie se llama *singular*.

Un dominio G de un plano se denominará *simple*, si dicho campo es una superficie plana simple. Por ejemplo, un anillo sin frontera es un campo simple.

Diremos que una función $f(u, v)$ pertenece en G a la clase C^k , siempre que es k veces diferenciable y si todas las derivadas parciales suyas de orden k son continuas en G .

Es válido el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Supongamos que en un dominio G del plano (u, v) vienen definidas las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ de la clase C^k , $k \geq 1$, con la particularidad de que el rango de la matriz (5.2) es igual a dos en todos los puntos de G . Entonces, las relaciones (5.1) definen en el espacio un conjunto Φ que representa una superficie general regular sin puntos singulares k veces diferenciable.*

DEMOSTRACION. Evidentemente, basta convencerse de que con ayuda de las relaciones (4.1) se realiza aplicación localmente homeomorfa del dominio G sobre el conjunto Φ .

Sea $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo cualquiera del conjunto Φ que corresponde a los valores (u_0, v_0) de los parámetros (u, v) (fig. 5.2). Por hipótesis, el rango de la matriz A es igual a dos en el punto (u_0, v_0) . Supongamos, para concretar, que en este punto el determinante

$\begin{vmatrix} x_u y_u \\ x_v y_v \end{vmatrix}$ de la matriz A es distinto de cero. Por cuanto el determinante

citado es jacobiano $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ y se diferencia de cero en el punto

(u_0, v_0) , mientras que las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en el dominio G , de conformidad con el teorema sobre la resolubilidad del sistema de ecuaciones funcionales (véase teorema 6.2, v. II) se encontrará tal entorno H del punto

(x_0, y_0) en el plano Oxy que dentro de los límites de dicho entorno existe la única solución y , además, k veces diferenciable

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{5.3}$$

del sistema

$$\left. \begin{aligned} x(u, v) - x &= 0, \\ y(u, v) - y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

De lo dicho se deduce que un entorno H del punto (x_0, y_0) representa una aplicación homeomorfa de cierto entorno \bar{G} del punto (u_0, v_0) mediante las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (la aplicación inversa de H sobre \bar{G} se realiza mediante las relaciones (5.3)).

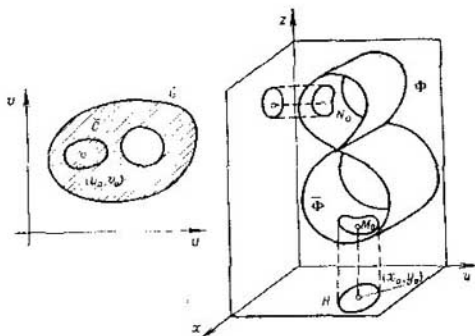


Fig. 5.2.

Sustituyendo las expresiones (5.3) para u y v en la relación $z = z(u, v)$, nos cercioramos de que cierto entorno $\bar{\Phi}$ del punto M_0 en el conjunto Φ es la gráfica de la función k veces diferenciable $z = z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y)$. Esto deja constancia de que con ayuda de la función $z(x, y)$ se realiza la aplicación homeomorfa del entorno H del punto (x_0, y_0) del plano Oxy sobre el entorno mencionado $\bar{\Phi}$ del punto M_0 del conjunto Φ . Evidentemente, el entorno \bar{G} del punto (u_0, v_0) se aplica del modo homeomorfo sobre el entorno $\bar{\Phi}$ del punto M_0 en el conjunto Φ^1). De otras palabras, Φ representa la imagen de G , al realizarse la aplicación localmente homeomorfa en el espacio, y es, por eso, una superficie general. El teorema está demostrado.

¹⁾ Hemos aprovechado aquí la afirmación evidente de lo que la realización sucesiva de las aplicaciones homeomorfas tiene por resultado también una aplicación homeomorfa.

OBSERVACION 2. Demostrando el teorema, hemos establecido que cada punto M_0 de una superficie Φ sin puntos singulares tiene un entorno $\bar{\Phi}$ que se proyecta unívocamente sobre uno de los planos coordenados y que, por esta razón, representa la gráfica de una función k veces diferenciable (en la demostración del teorema el papel de esta función desempeñaba la función $z(x, y)$).

En la fig. 5.2 se muestran los puntos M_0 y N_0 cuyos entornos se proyectan unívocamente sobre los planos Oxy y Oxz , respectivamente.

3. Definición de una superficie con ayuda de las funciones vectoriales. Veamos una superficie regular Φ . Esta superficie representa

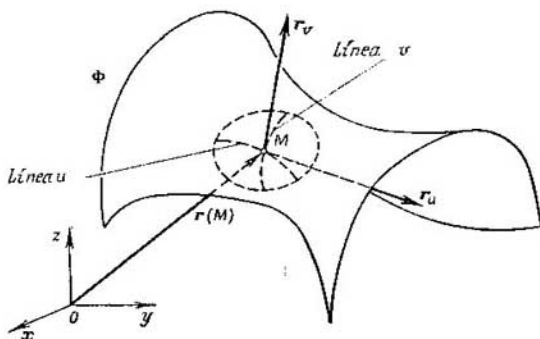


Fig. 5.3.

cierto conjunto de puntos M de un espacio con coordenadas (x, y, z) (fig. 5.3). Denotemos con $r(M)$ un vector que sale del origen de coordenadas y va al punto M de la superficie. Es evidente que $r(M)$ representa aquí una *función vectorial* del punto móvil (variable) M de la superficie¹⁾. Esta función se llama, de ordinario, *radio vector* de la superficie Φ .

Recurramos a un entorno del punto M que representa una aplicación homeomorfa de cierto dominio elemental G^2 con ayuda de las relaciones (5.1) (en la fig. 5.3 este entorno está contorneado con una línea punteada). Es obvio, entonces, que las coordenadas $x(u, v)$,

¹⁾ La función vectorial puede considerarse como una totalidad de tres funciones escalares. La información detallada de las funciones vectoriales se da en el § 1, cap. 12. Haremos uso de esta información a medida que surja la necesidad.

²⁾ Un campo G de un plano se llama elemental, si representa la imagen homeomorfa de un círculo abierto.

$y(u, v)$, $z(u, v)$ del punto M son coordenadas del vector $r(M)$. Está claro que en este entorno $r(M)$ será función de las variables u y v : $r(M) = r(u, v)$. Siendo fijo el valor de la variable v , el extremo del radio vector $r(u, v)$ describe en el entorno que se considera una curva llamada *línea u* (o *línea $v = \text{const}$*). Siendo fijo el valor de la variable u , el extremo del radio vector $r(u, v)$ describe la *línea v* (*línea $u = \text{const}$*). Estas líneas u y v se llaman *líneas coordenadas* sobre la superficie Φ en el entorno examinado.

Así pues, en cierto entorno de cada punto de la superficie Φ puede introducirse un sistema de líneas coordenadas u y v . Este sistema

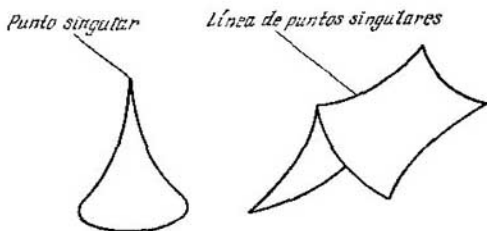


Fig. 5.4.

de líneas coordenadas lleva, además, el nombre de *sistema de coordenadas curvilíneas sobre la superficie* (con mayor precisión, en un entorno que se considera).

En el § 1, cap. 12 se da el sentido geométrico de las derivadas r_u y r_v de la función vectorial $r(u, v)$. Estos vectores son vectores de las tangentes a las líneas coordenadas (véase fig. 5.3).

Con ayuda de los vectores r_u y r_v puede aclararse el sentido geométrico de los puntos ordinario y singular de una superficie regular.

Recordemos que el punto M de una superficie se denomina ordinario, si en el entorno del punto citado puede introducirse tal parametrización mediante las ecuaciones (5.1) que el rango de la matriz A (véase la correlación (5.2)) en este punto sea igual a 2. Por cuanto las filas de la matriz A se componen de las coordenadas de los vectores r_u y r_v , y el rango de A es igual a dos, los citados vectores son linealmente independientes. Así pues, un punto ordinario se caracteriza por lo que en el entorno de este punto puede introducirse una parametrización tal que los vectores r_u y r_v sean en el punto M linealmente independientes.

En la fig. 5.3 el punto M es punto ordinario de la superficie Φ . En la fig. 5.4 se exponen superficies con puntos singulares.

4. Plano tangente y normal a la superficie. Superficies unilaterales y bilaterales. Ya hemos introducido el concepto de plano tangente

a una superficie que representa la gráfica de una función diferenciable $z = z(x, y)$ (véase p. 2, § 4, cap. 5, v. II). Recordemos que el plano tangente en el punto M_0 se definía como un plano que posee la propiedad de que el ángulo formado por dicho plano y la secante $M_0 M$ (M es un punto arbitrario de la superficie) tiende a cero, cuando M tiende a M_0 . Hemos demostrado que si $z(x, y)$ es una función diferenciable en el punto (x_0, y_0) , en el punto $M_0(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ de la superficie existe un plano tangente.

Cerciorémonos de que en cualquier punto ordinario de una superficie suave existe un plano tangente. Con este fin es suficiente, obviamente, establecer que cierto entorno de un punto ordinario de la superficie representa la gráfica de una función diferenciable. Ahora, en el p. 2 del párrafo presente (véase Observación en el p. 2) fue demostrada esta propiedad para cualquier punto ordinario de la superficie suave. Por consiguiente, *en cualquier punto ordinario de una superficie suave existe un plano tangente.*

OBSERVACION 1. De la definición de plano tangente a la superficie Φ proviene que una tangente en el punto M_0 a cualquier línea suave¹⁾ que está dispuesta sobre la superficie y que pasa por el punto M_0 se encuentra en el plano tangente a Φ , en el punto M_0 de la misma. Por cuanto los vectores r_u y r_v son tangentes a las líneas u y v , que pasan por M_0 , estos vectores se disponen en el plano tangente, a saber, en el punto M_0 .

Introduzcamos el concepto de *normal* a la superficie Φ en el punto M_0 .

Se denomina *normal* a la superficie Φ en el punto M_0 a una recta que pasa por M_0 y es perpendicular con relación al plano tangente en M_0 . Se llamará *vector de la normal* a una superficie en el punto M_0 cualquier vector no nulo que sea colineal respecto de la normal en M_0 .

Supongamos que M_0 es un punto ordinario de la superficie suave Φ y que cierto entorno $\bar{\Phi}$ de este punto está definido con ayuda de una función vectorial $r(u, v)$ tal que los vectores r_u y r_v en el punto M_0 no sean colineales. En este caso, evidentemente,

$$N = [r_u r_v] \quad (5.4)$$

será vector de la normal a la superficie, y el vector

$$n = \frac{[r_u r_v]}{|[r_u r_v]|} \quad (5.5)$$

es vector unidad a la superficie.

OBSERVACION 2. Por cuanto la superficie es, por hipótesis, suave, la función vectorial $N(u, v)$ y la función vectorial $n(u, v)$, definidas

¹⁾ Una línea L se llama *suave*, si puede definirse con ayuda de una función vectorial $r(t)$ de la clase G^1 , para la cual $r'(t) \neq 0$ (véase la información más detallada en el § 2, cap. 12).

con ayuda de las relaciones (5.4) y (5.5), respectivamente, serán continuas. De este modo, *en cierto entorno de todo punto de una superficie suave existe un campo vectorial continuo de normales.*

Surge, naturalmente, una cuestión de si toda superficie suave cuenta con un campo vectorial continuo global de normales. Resulta que hay superficies, sobre las cuales no existen campos vectoriales continuos globales de normales. Como ejemplo de tal superficie puede servir la así llamada cinta de Moebius¹⁾ ilustrada por la fig. 5.5. (Esta superficie se obtiene a partir de un rectángulo $ABB'A'$ pegando los lados AB y $A'B'$ de un modo tal que queden coincidentes los puntos A y B' y los A' y B (véase fig. 5.5).

Las superficies, sobre las cuales existe un campo vectorial continuo global de normales, se llamarán *bilaterales*. Las superficies privadas de tal campo global, se llamarán *unilaterales*.

Un plano, una esfera, un elipsoide, un hiperboloide de un casco son las superficies bilaterales; la cinta de Moebius es la superficie unilateral.

En lo que sigue se examinarán sólo superficies bilaterales.

5. Lemas auxiliares. En este punto demostraremos algunas afirmaciones que nos harán falta en adelante.

Lema 1. *Sea M_0 un punto ordinario de la superficie suave Φ . Entonces, un entorno del punto M_0 se proyecta unívocamente sobre un plano tangente trazado en cualquier punto de este entorno.*

DEMOSTRACION. Cerciorémonos de que la propiedad mencionada en el lema la posee, por ejemplo, un entorno $\bar{\Phi}$ del punto M_0 , en cuyos márgenes una normal en todo punto forma con la normal en M_0 un ángulo menor que $\pi/4$, y que se proyecta sobre cierto círculo en uno de los planos coordenados (por ejemplo, en Oxy)²⁾. Notemos, primero, que las normales en cualesquiera puntos de $\bar{\Phi}$ forman un ángulo inferior a $\pi/2$. Luego, admitamos que $\bar{\Phi}$ no posee la propiedad citada. En tal caso, para cierto punto M de $\bar{\Phi}$ se pueden encontrar tales

¹⁾ A. Moebius (1790—1868), matemático alemán.

²⁾ La posibilidad de elegir tal entorno $\bar{\Phi}$ se deduce de los razonamientos siguientes. En el punto antecedente se ha notado (véase Observación 2) que en cierto entorno del punto ordinario de una superficie existe un campo vectorial continuo de normales. Por eso, en un entorno suficientemente pequeño de M_0 las normales forman con la normal en M_0 un ángulo inferior a $\pi/4$. Se ha establecido también que cierto entorno de M_0 se proyecta unívocamente sobre un plano de coordenadas. Es evidente que en este entorno se tiene una parte que se proyecta sobre cierto círculo en el plano coordenado.

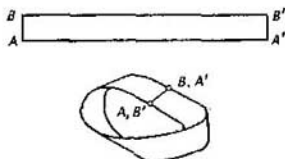


Fig. 5.5.

puntos P y Q de $\bar{\Phi}$, que la cuerda PQ sea paralela a la normal n_M en M (fig. 5.6). Veamos la línea de intersección de $\bar{\Phi}$ con un plano que es paralelo a Oz y que pasa por PQ . La parte PNQ de esta línea se dispone en $\bar{\Phi}$ (por la elección del entorno $\bar{\Phi}$) y representa la gráfica de una función diferenciable definida en un segmento que es proyección de PQ sobre el plano Oxy . Según el teorema de Lagrange, una tangente en cierto punto N de la citada parte es paralela a la cuerda PQ y, por tanto, paralela a la normal n_M en M . Mas,

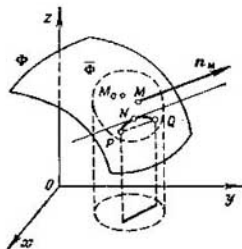


Fig. 5.6.

en este caso la normal en N (que es perpendicular con relación a la tangente mencionada) forma con la normal en M un ángulo $\pi/2$, lo que no es posible, puesto que las normales en cualesquiera dos puntos de $\bar{\Phi}$ (incluidos los puntos M y N) forman un ángulo inferior a $\pi/2$. La contradicción obtenida nos convence de la validez del lema el cual queda, pues, demostrado.

Introducamos el concepto de superficie completa. Una superficie Φ se llama completa, si

cualquier sucesión fundamental de puntos de esta superficie converge hacia cierto punto de la superficie Φ .

Un plano, una esfera, un elipsoide, un hiperboloide de un casco son ejemplos de las superficies completas. Un círculo sin frontera, cualquier conjunto abierto conexo en una esfera son superficies incompletas. Las superficies completas limitadas y las partes cerradas limitadas de las superficies completas se llamarán en lo sucesivo *superficies completas limitadas*.

Diremos que una parte de Φ tiene dimensiones inferiores a δ , si dicha parte se ubica en el interior de cierta esfera cuyo diámetro es menor que δ .

Resulta válido el siguiente lema.

Lema 2. *Sea Φ una superficie completa limitada suave sin puntos singulares. Existe un $\delta > 0$ tal que cualquier parte de Φ , cuyas dimensiones son menores que δ , se proyecta unívocamente sobre un plano tangente que pasa por cualquier punto de esta parte.*

DEMOSTRACIÓN. Admitamos que la afirmación del lema no es cierta. En tal caso, para cualquier $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$ puede indicarse una parte Φ_n de la superficie Φ , cuyas dimensiones sean inferiores a δ_n , y que no se proyecta unívocamente sobre un plano tangente en uno de sus puntos. Elijamos en cada parte Φ_n un punto M_n y separemos en la sucesión $\{M_n\}$ una subsucesión que sea con-

vergente hacia cierto punto M_0 de la superficie Φ^1). Examinemos un entorno del punto M_0 que satisfice las condiciones del lema 1. Siendo n suficientemente grande, este entorno contendrá cada parte Φ_n . Mas, en tal caso dicha parte ha de proyectarse sobre un plano tangente (en cualquier punto suyo), lo que contradice el modo de elegir las partes Φ_n . El lema está demostrado.

Resulta válido el siguiente lema.

Lema 3. *Sea Φ una superficie completa limitada y suave sin puntos singulares. Existe un $\delta > 0$ tal que cualquier parte de Φ , cuyas dimensiones son inferiores a δ , se proyectan unívocamente sobre uno de los planos coordenados.*

La demostración de este lema es sumamente análoga a la del lema 2.

Lema 4. *Sea Φ una superficie completa bilateral limitada y suave sin puntos singulares. Cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, pueden indicarse tal $\delta > 0$ que para el coseno del ángulo γ entre los vectores unidad de las normales en cualesquiera dos puntos de una parte arbitraria $\bar{\Phi}$ de la superficie cuyas dimensiones son menores que δ , sea justa una representación*

$$\cos \gamma = 1 - \alpha_{\Phi}, \quad (5.6)$$

donde $|\alpha_{\Phi}| < \varepsilon$.

DEMOSTRACION. Examinemos un campo de normales unidad $n(M)$ que es continuo en Φ (tal campo existe, pues Φ es una superficie bilateral). La función vectorial n es uniformemente continua, puesto que Φ es superficie completa limitada, por lo cual representa un conjunto cerrado acotado. Por eso, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, se puede indicar tal $\delta > 0$, que para dos puntos arbitrarios M_1 y M_2 de la superficie Φ , la distancia entre los cuales es menor que δ , se verifique la desigualdad

$$|n(M_2) - n(M_1)| < \sqrt{2\varepsilon}. \quad (5.7)$$

Por cuanto

$$\cos \gamma = 1 - \frac{1}{2} (n(M_2) - n(M_1))^2,$$

suponiendo que

$$\alpha_{\Phi} = \frac{1}{2} (n(M_2) - n(M_1))^2$$

y haciendo uso de la desigualdad (5.7), nos convencemos de la validez de la relación (5.6). El lema está demostrado.

¹ Por cuanto Φ es una superficie completa limitada, puede elegirse tal subsucesión.

² Se han aprovechado las siguientes correlaciones:

$$n^2(M_1) = 1, \quad n^2(M_2) = 1, \quad n(M_2) \cdot n(M_1) = \cos \gamma,$$

$$\frac{1}{2} (n(M_2) - n(M_1))^2 = \frac{1}{2} (n^2(M_2) - 2n(M_2) \cdot n(M_1) + n^2(M_1)).$$

§ 2. Área de una superficie

1. **Concepto de área de una superficie.** Sea Φ una superficie completa limitada bilateral. Dividamos Φ , mediante unas curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i , cada una de las cuales se proyecta unívocamente sobre un plano tangente que pasa por cualquier punto de la citada parte¹). Designemos con Δ la máxima de las dimensiones de las partes Φ_i , y con σ_i , el área de la proyección de Φ_i sobre un plano tangente en cierto punto M_i de la parte Φ_i . Formemos a continuación una suma $\sum_i \sigma_i$ de todas las áreas mencionadas.

Formulemos las siguientes definiciones.

Definición 1. Un número σ se llama límite de las sumas $\sum_i \sigma_i$ para $\Delta \rightarrow 0$, si con cualquier $\varepsilon > 0$ puede indicarse un $\delta > 0$ tal que para todas las particiones de Φ , mediante unas curvas continuas a trozos, en un número finito de partes Φ_i , para las cuales $\Delta < \delta$, independientemente de cómo se eligen puntos M_i en las partes Φ_i , se cumpla una desigualdad

$$\left| \sum_i \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon. \quad (5.8)$$

Definición 2. Si para una superficie Φ existe un límite σ de las sumas $\sum_i \sigma_i$ para $\Delta \rightarrow 0$, la superficie se llama cuadrable, y el número σ se denomina área de la superficie.

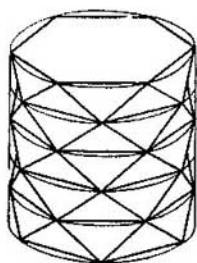


Fig. 5.7.

Nuestra tarea inminente consiste en aclarar las condiciones suficientes de cuadrabilidad de la superficie. Demostremos que las superficies completas suaves bilaterales limitadas son cuadrables. Demos a conocer, de paso, el aparato de cálculo con ayuda del cual pueden calcularse las áreas de las superficies.

Parece natural, a primera vista, abordar la cuestión de área de una superficie aproximando la superficie dada mediante los poliedros. Sin embargo, este camino no nos lleva al objetivo. He aquí un ejemplo que se debe a Schwarz²) y que muestra que las áreas de los poliedros inscritos en una superficie suave pueden crecer indefinidamente a medida que aumente el número de aristas y disminuyan sus dimensiones.

Sea Φ una zona cilíndrica (fig. 5.7). Dividamos Φ , mediante unas circunferencias paralelas a las bases de Φ , en n partes iguales. Cada una de estas

¹) La posibilidad de tal partición se garantiza por el lema 2 del punto antecedente.

²) H.A. Schwarz (1843—1921), matemático alemán.

circunferencias la dividamos en m partes iguales tal como se muestra en la fig. 5.7. En la misma figura está expuesto el poliedro Φ_{nm} inscrito en Φ . Cualquiera que sea m fijo, el área del poliedro citado Φ_{nm} es, evidentemente en n veces mayor que el área de la proyección de dicho poliedro sobre el plano de la base del cilindro. Por cuanto esta proyección no depende de n , el área del poliedro Φ_{nm} puede hacerse tan grande como se quiera, a cuenta del aumento de n con cualquier m fijo.

2. Cuadrabilidad de las superficies suaves. Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 2. Una superficie completa suave bilateral limitada sin puntos singulares es cuadrable.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que sobre la superficie Φ puede ser introducida una parametrización regular única. (En este caso el radio vector $r(M)$ de un punto móvil (variable) de la superficie Φ representa una función $r(u, v)$ de la clase C^1 ¹⁾, definida en cierto dominio cerrado y limitado Ω del plano de variables u y v . Las derivadas parciales r_u y r_v de la función $r(u, v)$ son funciones vectoriales continuas que no dependen de cómo se elige el sistema rectangular cartesiano de coordenadas en el espacio. Por eso, el valor de la integral $\iint_{\Omega} |r_u r_v| du dv$ tampoco depende de la elección del siste-

ma cartesiano de coordenadas en el espacio. Demostremos que la superficie Φ es cuadrable y su área es igual a σ .

Sea ε un número positivo arbitrario que en nuestros razonamientos posteriores se considera fijo. Determinemos, según dicho $\varepsilon > 0$, el número $\delta > 0$, partiendo de las siguientes exigencias: 1) cualquier parte Φ_i de la superficie Φ , cuyas dimensiones son menores que δ , se proyecta unívocamente sobre un plano tangente en cualquier punto de la parte Φ_i ; 2) el coseno de ángulo γ entre los vectores unidad de las normales en cualesquiera dos puntos de la parte Φ_i puede expresarse en la forma

$$\cos \gamma = 1 - \alpha_{\Phi_i}, \quad (5.9)$$

donde $|\alpha_{\Phi_i}| < \varepsilon/\sigma$, y $|\alpha_{\Phi_i}| < 1$. La posibilidad de elegir tal $\delta > 0$ se garantiza por los lemas 2 y 4, p. 3 del párrafo antecedente.

Veamos una partición arbitraria de Φ mediante curvas suaves a trozos en un número finito de partes Φ_i , cuya dimensión máxima Δ no sobrepasa δ . Por cuanto existe en Φ una parametrización única, a la partición dada Φ en las partes Φ_i le corresponde la partición del campo Ω en las partes Ω_i . En cada parte Φ_i elegimos un punto arbitrario M_i y designamos con σ_i el área de la proyección de la parte Φ_i sobre el plano tangente en el punto M_i . Con el fin de calcular σ_i procedamos del modo siguiente. Elijamos un sistema cartesiano de coordenadas de una manera tal que su origen coincida con M_i ,

¹⁾ Aquí sobreentendemos que cada componente de la función $r(u, v)$ pertenece a la clase C^1 .

el eje Oz esté dirigido a lo largo del vector de la normal a la superficie en M_i , y los ejes Ox y Oy , estén dispuestos en el plano tangente mencionado. En este sistema de coordenadas la superficie se definirá mediante las ecuaciones paramétricas $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, mientras que el vector $[r_u r_v]$ cuenta con las coordenadas $\{A, B, C\}$, donde

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Notemos que para los puntos de la parte Φ_i la magnitud C es positiva, $C > 0$, lo que se debe a la elección adecuada de δ y la orientación citada del eje Oz . Señalemos, además, que el coseno del ángulo γ_M formado por la normal en el punto M de la parte Φ_i y el eje Oz es

$$\cos \gamma_M = \frac{C}{|[r_u r_v]|}. \quad (5.11)$$

Está claro que el ángulo γ_M es el que se forma por las normales en los puntos M y M_i de la parte Φ_i , por lo cual para dicho ángulo es legítima la representación (5.9).

Volvamos a la integral $\iint_{\Omega_i} |[r_u r_v]| \, du \, dv$, la cual no depende, evidentemente, de cómo se eligen las coordenadas cartesianas en el espacio. Haciendo uso de que C es positiva, obtenemos a partir de las fórmulas (5.10):

$$\iint_{\Omega_i} |[r_u r_v]| \, du \, dv = \iint_{\Omega_i} \frac{|[r_u r_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| \, du \, dv. \quad (5.12)$$

Aplicando a la integral en el segundo miembro de (5.12) la primera fórmula del valor medio en la forma generalizada, obtenemos

$$\iint_{\Omega_i} |[r_u r_v]| \, du \, dv = \left(\frac{|[r_u r_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \right)_M \cdot \iint_{\Omega_i} \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| \, du \, dv, \quad (5.13)$$

donde M es un punto de la parte Φ_i .

Puesto que

$$\left(\frac{|[r_u r_v]|}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \right)_M = \frac{1}{\cos \gamma_M}$$

(véanse (5.10) y (5.11)), y $\iint_{\Omega_i} \left| \frac{\mathcal{Z}(x, y)}{\mathcal{Z}(u, v)} \right| du dv = \sigma_i$ ¹⁾, de la fórmula (5.13) y representación (5.9) para $\cos \gamma_M$ encontramos

$$\sigma_i = \iint_{\Omega_i} \|r_u r_v\| du dv - \iint_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} \|r_u r_v\| du dv. \quad (5.14)$$

Sumando las igualdades (5.14) para todas las partes Φ_i y tomando en consideración que $\sum_i \iint_{\Omega_i} \|r_u r_v\| du dv = \iint_{\Omega} \|r_u r_v\| du dv = \sigma$, tenemos

$$\sum_i \sigma_i = \sigma - \sum_i \iint_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} \|r_u r_v\| du dv. \quad (5.15)$$

Estimemos el último sumando en el segundo miembro de (5.15). Tenemos

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i \iint_{\Omega_i} \alpha_{\Phi_i} \|r_u r_v\| du dv \right| \leq \\ & \leq \sum_i \iint_{\Omega_i} |\alpha_{\Phi_i}| \|r_u r_v\| du dv < \frac{\varepsilon}{\sigma} \sum_i \iint_{\Omega_i} \|r_u r_v\| du dv = \frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \sigma = \varepsilon. \end{aligned}$$

De aquí y de la igualdad (5.15) obtenemos

$$\left| \sum_i \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon.$$

Así pues, la superficie Φ es cuadrable y su área es igual a σ .

Se ha examinado, pues, el caso en que sobre la superficie Φ puede ser introducida una parametrización única. En el caso general, la superficie Φ puede dividirse en un número finito de partes, en cada una de las cuales puede introducirse la parametrización única²⁾, después de lo cual el área de la superficie puede hallarse como suma de áreas de las partes mencionadas. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1 Supongamos que Φ es una superficie suave a trozos, es decir, está compuesta de un número finito de superficies bilaterales completas limitadas suaves. Es obvio que la superficie Φ es cuadrable: su área puede ser determinada como suma de áreas de las superficies que la integran.

¹⁾ Se ha aprovechado la fórmula para el área de un dominio plano, al pasar de las coordenadas (x, y) a las (u, v) con ayuda de las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

²⁾ Se puede recurrir, por ejemplo, al lema 3, p. 3 del párrafo anterior. De acuerdo con este lema, Φ puede dividirse en un número finito de partes, cada una de las cuales se proyecta unívocamente sobre cierto plano coordenado y, de esta manera, sirve de gráfica de una función diferenciable.

OBSERVACION 2 Al demostrar el teorema 5.2, hemos establecido que si en la superficie Φ puede introducirse una parametrización única y si de campo de definición del radio vector $r(u, v)$ de la superficie Φ sirve un campo limitado cerrado Ω del plano (u, v) , el área σ de la superficie puede hallarse según la fórmula

$$\sigma = \iint_{\Omega} |[r_u r_v]| \, du \, dv. \quad (5.16)$$

Si es que $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ son ecuaciones paramétricas de la superficie, el vector $[r_u r_v]$ tendrá las coordenadas $\{A, B, C\}$ que se definen por las relaciones (5.10). Por cuanto $|[r_u r_v]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, la fórmula (5.16) puede ser escrita en la forma siguiente

$$\sigma = \iint_{\Omega} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv. \quad (5.17)$$

Al emplear las designaciones

$$r_u^2 = E, \quad r_u r_v = F, \quad r_v^2 = G,$$

y la fórmula

$$|[r_u r_v]| = \sqrt{r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2},$$

podemos escribir en la siguiente forma la expresión (5.16) para el área de una superficie

$$\sigma = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (5.18)$$

OBSERVACION 3. El área de una superficie posee la propiedad de *aditividad*: si una superficie Φ está dividida, mediante una línea suave a trozos, en las partes Φ_1 y Φ_2 que no tienen puntos interiores comunes, el área σ de la superficie Φ es igual a la suma $\sigma_1 + \sigma_2$ de áreas de las partes Φ_1 y Φ_2 . Esta propiedad se predetermina por la representación de un área con ayuda de la integral y por la propiedad de aditividad de la misma.

§ 3. Integrales de superficie

1. Conceptos de las integrales de superficie de primera y segunda especies. Sea Φ una superficie bilateral completa limitada y suave. Supongamos que sobre Φ está definida una función $f(M)$ del punto M de la superficie Φ . Denotemos con $n(M)$ un campo vectorial continuo de normales unidad con relación a Φ .

Sirviéndonos de unas curvas suaves a trozos, dividamos la superficie Φ en las partes Φ_i y elijamos arbitrariamente un punto M_i

en cada una de las partes mencionadas. Introduzcamos las siguientes designaciones: Δ , dimensión máxima de las partes Φ_i ; σ_i , área de Φ_i ; X_i, Y_i, Z_i , ángulos que forma con los ejes coordenados el vector n (M_i).

Formemos cuatro sumas:

$$I\{\Phi_i, M_i\} = \sum_i f(M_i) \sigma_i, \quad (5.19)$$

$$I\{\Phi_i, M_i, Z_i\} = \sum_i f(M_i) \cos Z_i \sigma_i, \quad (5.20)$$

$$I\{\Phi_i, M_i, Y_i\} = \sum_i f(M_i) \cos Y_i \sigma_i, \quad (5.21)$$

$$I\{\Phi_i, M_i, X_i\} = \sum_i f(M_i) \cos X_i \sigma_i. \quad (5.22)$$

Para cada una de estas sumas se introduce el concepto de límite con $\Delta \rightarrow 0$. Enunciemos este concepto para las sumas (5.19). Para las sumas (5.20), (5.21) y (5.22) el concepto de límite se enuncia análogamente.

Definición. Un número I se denomina límite de sumas $I\{\Phi_i, M_i\}$ con $\Delta \rightarrow 0$, si para todo $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal $\delta > 0$, que para cualesquiera particiones de la superficie Φ , mediante unas curvas suaves a trozos, en un número finito de las partes Φ_i , cuya dimensión máxima Δ es inferior a δ , independientemente de cómo se eligen los puntos M_i en las partes Φ_i , se cumpla la desigualdad

$$|I\{\Phi_i, M_i\} - I| < \varepsilon.$$

El límite I de las sumas $I\{\Phi_i, M_i\}$ con $\Delta \rightarrow 0$ recibe el nombre de *integral de superficie de primera especie, de la función $f(M)$ extendida a la superficie Φ* , y se denota del modo siguiente.

$$I = \iint_{\Phi} f(M) d\sigma. \quad (5.23)$$

Si (x, y, z) representan las coordenadas del punto M sobre la superficie Φ , para $f(M)$ puede emplearse la designación $f(x, y, z)$. En este caso la fórmula (5.23) puede escribirse en la forma

$$I = \iint_{\Phi} f(x, y, z) d\sigma. \quad (5.24)$$

Los límites de las sumas $I\{\Phi_i, M_i, Z_i\}$, $I\{\Phi_i, M_i, Y_i\}$ e $I\{\Phi_i, M_i, X_i\}$, cuando $\Delta \rightarrow 0$, se denominan *integrales de superficie de segunda especie de la función $f(M)$ por la superficie Φ* . Para dichas integrales extendidas a la superficie Φ , se emplean las desig-

naciones

$$\iint_{\Phi} f(M) \cos Z \, d\sigma, \quad \iint_{\Phi} f(M) \cos Y \, d\sigma, \quad \iint_{\Phi} f(M) \cos X \, d\sigma$$

o las análogas a la designación (5.24).

OBSERVACIÓN 1. De la definición de integral de superficie de primera especie proviene su *independencia del modo de elegir la orientación del campo vectorial de normales unidad a la superficie*, o, como suele decirse, *de la elección del lado de la superficie*.

OBSERVACIÓN 2. *La integral de superficie de segunda especie depende del modo de elegir el lado de la superficie:* al cambiar la orientación de campo vectorial de normales por la opuesta, todas las tres integrales de superficie de segunda especie cambian su signo por el opuesto. Esto se debe a que en cada una de las sumas (5.20), (5.21) y (5.22) los valores de $f(M_i)$ y de σ_i no varían al cambiar la orientación, mientras que los valores de los cosenos de los ángulos que forma la normal $n(M_i)$ con los ejes coordenados cambian su signo por el opuesto.

OBSERVACIÓN 3. Elegido el determinado lado de la superficie, las integrales de superficie de segunda especie pueden, obviamente, considerarse como integrales de superficie de primera especie extendidas a la superficie Φ de las funciones respectivas $f(M) \cos Z(M)$, $f(M) \cos Y(M)$, $f(M) \cos X(M)$. En efecto, elegido el determinado lado de la superficie, $\cos Z$, $\cos Y$, $\cos X$ representan funciones del punto M de la superficie Φ .

2. Existencia de las integrales de superficie de primera y segunda especies. Supongamos que una superficie Φ satisface las condiciones enunciadas al principio del p. 1 de este párrafo. Elijamos en Φ un lado bien determinado. Con arreglo a la Observación 3 del punto anterior, siendo elegido un determinado lado de la superficie Φ , las integrales de superficie de segunda especie pueden considerarse como integrales de primera especie. Por eso, las condiciones suficientes de existencia se formularán por nosotros sólo para las integrales de primera especie.

Resulta ser lícito el siguiente teorema.

Teorema 5.3. *Supongamos que en la superficie Φ puede introducirse una parametrización única mediante las funciones*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (5.25)$$

definidas dentro de un campo cerrado limitado Ω del plano (u, v) y pertenecientes a la clase C^1 en dicho dominio. Si una función $f(M) = f(x, y, z)$ es continua sobre la superficie Φ^1 , la integral de super-

¹⁾ El concepto de continuidad de una función del punto M definida sobre cierto conjunto $\{M\}$ en el espacio fue enunciado en el p. 1, § 3, cap. 5, v. II. En el caso que se considera el papel del conjunto $\{M\}$ lo desempeña la superficie Φ .

ficie de primera especie, extendida a la superficie Φ , de la función citada existe y puede calcularse según la fórmula

$$I = \iint_{\Omega} f(M) d\sigma = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (5.26)$$

DEMOSTRACIÓN. Hace falta probar que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, puede indicarse tal $\delta > 0$ que para toda partición Φ , mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i , para la cual $\Delta < \delta$ independientemente del modo de elegir los puntos M_i en las partes Φ_i , se verifique la desigualdad

$$I(\Phi_i, M_i) - \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv < \varepsilon \quad (5.27)$$

Sea ε un número positivo fijo cualquiera. Elijamos, basándonos en dicho $\varepsilon > 0$, un número $\delta^* > 0$ tal que se cumplan las siguientes dos condiciones:

1) Para cualesquiera dos puntos $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$ y (u_i, v_i) del campo Ω dispuestos a una distancia inferior a δ^* uno del otro, se verifique la desigualdad

$$\left| \sqrt{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)} - \sqrt{E(u_i, v_i)G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)} \right| < \frac{\varepsilon}{2AP} \quad (5.28)$$

donde A es un número positivo superior al máximo de la función $|f(M)|$, y P , el área del campo Ω .

2) Para cualquier partición de Ω , mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Ω_i , cuyas dimensiones son inferiores a δ^* , y para cualquier elección de los puntos (u_i, v_i) dentro de los márgenes de cada parte Ω_i , se verifique la desigualdad

$$\left| \sum_i f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \sqrt{E(u_i, v_i)G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)} \sigma_i^* - \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.29)$$

en la cual σ_i^* son las áreas de las partes Ω_i .

¹⁾ $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ es una función obtenida mediante la superposición de las funciones $f(x, y, z)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. En virtud del teorema de continuidad de una función compuesta, esta función es continua en el campo Ω .

La posibilidad de elegir δ^* adecuado se garantiza por la propiedad de continuidad uniforme de la función $\sqrt{EG - F^2}$, continua y acotada dentro del campo cerrado Ω , y por la propiedad de integrabilidad de la función $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}$ que es continua en el campo Ω .

Determinemos, a base de $\delta^* > 0$, un número $\delta > 0$ tal que a cualquier partición de la superficie Φ , mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i , cuyas dimensiones son inferiores a δ , le corresponda una partición del dominio Ω en un número finito de partes Ω_i , cuyas dimensiones son menores que δ^* . La posibilidad de elegir tal δ la asegura el hecho de que la superficie Φ representa una aplicación homeomorfa del dominio Ω , y, por eso, a toda partición de Φ , mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i le corresponde una partición de Ω , mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Ω_i . En este caso, si la dimensión máxima de las partes Φ_i tiende a cero, lo hace también la dimensión máxima de las partes Ω_i .

Veamos, ahora, una partición de Φ , mediante curvas suaves a trozos, en un número finito de partes Φ_i , cuya dimensión máxima Δ satisface la desigualdad $\Delta < \sigma$, donde $\delta > 0$ está elegido a base de δ^* de una manera descrita más arriba. Formemos para dicha partición una suma $I\{\Phi_i, M_i\}$, haciendo uso de su expresión (5.19).

Por cuanto el área σ_i de la parte Φ_i es igual a $\iint_{\Omega_i} \sqrt{EG - F^2} du dv$,

entonces, al denotar las coordenadas del punto M_i en la parte Φ_i con $(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$, obtendremos

$$I(\Phi_i, M_i) = \sum_i f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \iint_{\Omega_i} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Al emplear el teorema del valor medio para las integrales que figuran en el segundo miembro de la última relación, podemos, obviamente, transformar dicha relación del modo siguiente:

$$\begin{aligned} I\{\Phi_i, M_i\} &= \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \left[\sum_i f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \right. \\ &\quad \times \left. \overline{\sqrt{EG - F^2}}(u_i, \bar{v}_i) \sigma_i^* \right. \\ &\quad \left. - \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_i f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \\
 & \times \left| \frac{E(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) G(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) - F^2(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) -}{-V E(u_i, v_i) G(u_i, v_i) - F^2(u_i, v_i)} \right| \sigma_i^* .
 \end{aligned}$$

De la última igualdad obtenemos fácilmente, con ayuda de las desigualdades (5.28) y (5.29), la desigualdad (5.27). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Es evidente que para el cálculo de la integral de superficie de segunda especie $\int_{\Phi} f(x, y, z) \cos Z \, d\sigma$, podemos, después de elegir un lado determinado de la superficie Φ , emplear la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Phi} \int f(x, y, z) \cos Z \, d\sigma \\
 & \int_{\Omega} \int f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \cos Z \, du \, dv. \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Las fórmulas análogas quedan en vigor para dos otras integrales de superficie de segunda especie.

OBSERVACIÓN 2. Supongamos que la superficie Φ es la gráfica de una función $z = z(x, y)$ perteneciente en el campo D de su definición a la clase C^1 . Elijamos sobre la superficie Φ aquel lado, para el cual el vector unidad de la normal $n(M)$ de la superficie forma con el eje Oz un ángulo agudo. En este caso $\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, donde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Sea $R(x, y, z)$ una función continua definida en la superficie Φ . Entonces, teniendo presente que a título de los parámetros u y v en la superficie se toman x e y (la superficie Φ se define mediante las ecuaciones paramétricas $x = x$, $y = y$, $z = z(x, y)$ y $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, podemos escribir la fórmula (5.30) en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Phi} \int R(x, y, z) \cos Z \, d\sigma = \int_D \int R(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy \\
 & \times \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \, dx \, dy = \int_D \int R(x, y, z(x, y)) \, dx \, dy.
 \end{aligned}$$

La observación citada explica la siguiente notación para una integral de superficie de segunda especie:

$$\int_{\Phi} \int R(x, y, z) \cos Z \, d\sigma = \int_D \int R(x, y, z) \, dx \, dy. \quad (5.31)$$

Notemos que la designación (5.31) se emplea también en el caso en que Φ no constituye la gráfica de la función $z = z(x, y)$.

Examinaremos en lo sucesivo integrales de superficie de segunda especie del siguiente tipo:

$$\iint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) d\sigma.$$

Las integrales de este tipo se designarán también del modo siguiente:

$$\iint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

OBSERVACIÓN 3. Los conceptos de integrales de superficie de primera y segunda especies se extienden, por supuesto, al caso en que la superficie Φ es suave a trozos. Para las superficies de tal índole queda válido, evidentemente, el teorema de existencia demostrado en este punto.

3. Integrales de superficie de segunda especie que no dependen del modo de elegir el sistema cartesiano de coordenadas. Basándonos en la definición de integrales de superficie de la primera y segunda especies, podemos concluir que la integral de primera especie no depende de cómo se elige el sistema cartesiano de coordenadas en un espacio, mientras que las integrales de segunda especie sí dependen de la elección del último, pues, al cambiar el sistema de coordenadas, varían los valores de los cosenos de los ángulos que forma la normal $n(M)$ con los ejes coordenados.

En el caso en que sobre una superficie sea dada una función vectorial, se puede señalar un acceso más general al concepto de integral de superficie de segunda especie que nos permite hablar, en un sentido determinado, de que el valor de la integral mencionada no depende de cómo se elige en un espacio el sistema cartesiano de coordenadas.

Así pues, admitamos que sobre una superficie bilateral completa limitada Φ viene dada una función vectorial continua $r(M)$. Elijamos en Φ un lado determinado y denotemos con $n(M)$ el campo vectorial de normales unidad a Φ .

Es obvio que el producto escalar $r(M) \cdot n(M)$ representa una función escalar continua que está definida en la superficie Φ y que, por esta razón, no depende de cómo se elige en el espacio el sistema cartesiano de coordenadas. Por consiguiente, la integral de superficie de primera especie de esta función

$$\iint_{\Phi} r(M) \cdot n(M) d\sigma$$

es independiente de la elección del sistema cartesiano de coordenadas en el espacio. Recurramos a la notación coordenada del producto escalar $r(M) \cdot n(M)$, considerando que el vector $r(M)$ tiene por sus coordenadas P, Q, R . Por cuanto las coordenadas del vector $n(M)$ son iguales a $\cos X, \cos Y, \cos Z$, resulta

$$r(M) \cdot n(M) = P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z,$$

y, por eso,

$$\iint_{\Phi} r(M) \cdot n(M) \, d\sigma = \iint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) \, d\sigma.$$

La integral en el segundo miembro de la última igualdad representa una suma de tres integrales de superficie de segunda especie y se llama, corrientemente, *integral general de superficie de segunda especie*. Por consiguiente, la integral $\iint_{\Phi} r(M) \cdot n(M) \, d\sigma$ también puede llamarse *integral general de superficie de segunda especie*.

OBSERVACIÓN 1. Si sobre la superficie Φ vienen dadas tres funciones escalares P, Q y R , entonces a la integral $\iint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) \, d\sigma$ se le puede atribuir una forma invariante (no dependiente) del sistema de coordenadas, considerando que P, Q y R son coordenadas de cierta función vectorial $r(M)$ definida en la superficie y escribiendo dicha integral en la forma $\iint_{\Phi} r(M) \cdot n(M) \, d\sigma$. Notemos que procediendo de esta manera, nosotros imponemos una ley determinada de transformación de la expresión subintegral, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas. En este caso obtendremos nuevas coordenadas del vector $r(M)$ que se calculan de acuerdo con las reglas conocidas por el curso de la geometría analítica. No obstante, tal forma invariante de notación de la integral de superficie suele ser muy cómoda en diferentes aplicaciones.

OBSERVACIÓN 2. Notemos que la integral general de superficie de segunda especie $\iint_{\Phi} r(M) \cdot n(M) \, d\sigma$ es numéricamente igual a una magnitud que en la física se llama *flujo* del vector $r(M)$ a través de la superficie Φ .

Capítulo 6

OPERACIONES PRINCIPALES DE LA TEORÍA DEL CAMPO

En este capítulo se estudiarán los campos escalares y vectoriales. Se analizan operaciones principales de la teoría del campo.

§ 1. Transformaciones de las bases y de las coordenadas. Invariantes

1. Bases de vectores recíprocas. Coordenadas covariantes y contravariantes de los vectores. Sea $r_i, i = 1, 2, 3$, una base de los vectores de un espacio tridimensional¹⁾ (para un plano el subíndice i toma los valores 1 y 2). Una base $r^k, k = 1, 2, 3$, se llama *recíproca* de la base r_i , si se verifican las relaciones²⁾

$$r_i r^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (6.1)$$

El símbolo δ_i^k lleva el nombre de Kronecker³⁾.

Surge una cuestión de existencia y unicidad de la base recíproca. La respuesta es positiva: *para la base dada r_i existe la única base recíproca r^k .*

Cerciorémonos, por ejemplo, de que el vector r^1 se define de un modo único. De acuerdo con (6.1), este vector es ortogonal con relación a los vectores r_2 y r_3 . Esto determina unívocamente la línea de actuación del vector r^1 . Luego, a partir de la condición $r_1 r^1 = 1$ se determina de un modo único el propio vector r^1 . Por analogía se construyen unívocamente los vectores r^2 y r^3 . Para convencerse de que los vectores r^1, r^2, r^3 forman una base, basta demostrar que $r^1 r^2 r^3 \neq 0$. De acuerdo con el teorema sobre el producto de determinantes,

$$(r_1 r_2 r_3) (r^1 r^2 r^3) = \begin{vmatrix} r_1 r^1 & r_1 r^2 & r_1 r^3 \\ r_2 r^1 & r_2 r^2 & r_2 r^3 \\ r_3 r^1 & r_3 r^2 & r_3 r^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (6.2)$$

Por cuanto $r_1 r_2 r_3 \neq 0$ (los vectores r_1, r_2, r_3 forman una base), de las correlaciones (6.2) se deduce que también $r^1 r^2 r^3 \neq 0$.

¹⁾ Recordemos que los vectores r_1, r_2, r_3 forman una base, si no son coplanares, es decir, si su producto mixto $r_1 r_2 r_3$ no es nulo.

²⁾ Siempre en este capítulo: con el símbolo ab se denota producto escalar de los vectores a y b ; con el símbolo abc , producto mixto de los vectores a, b , y c ; con el símbolo $[ab]$ se denota producto vectorial de los vectores a y b .

³⁾ L. Kronecker (1823—1891), matemático alemán.

OBSERVACION 1. Si una base r_i es ortonormal, la base recíproca r^k coincide con la base dada r_i .

Es fácil convencerse de que los vectores r^h de la base recíproca en un espacio tridimensional pueden hallarse con ayuda de las relaciones

$$r^1 = \frac{|r_2 r_3|}{r_1 r_2 r_3}, \quad r^2 = \frac{|r_3 r_1|}{r_1 r_2 r_3}, \quad r^3 = \frac{|r_1 r_2|}{r_1 r_2 r_3}.$$

Sean r_i, r^h las bases recíprocas, y sea x un vector arbitrario. Al descomponer el vector x según los vectores básicos, obtendremos

$$x = x_1 r^1 + x_2 r^2 + x_3 r^3, \quad x = x^1 r_1 + x^2 r_2 + x^3 r_3. \quad (6.3)$$

Los números x_1, x_2, x_3 se llaman coordenadas *covariantes* del vector x , y x^1, x^2, x^3 , coordenadas *contravariantes* de x . Estas nociones se explicarán en el punto siguiente.

Con el fin de abreviar notaciones de las fórmulas, donde figuran sumandos de un mismo tipo (de ejemplo para tales fórmulas pueden servir las relaciones (6.3)) se empleará en lo que sigue adelante un convenio de sumación que consiste en lo siguiente. Sea una expresión compuesta por unos cuantos factores. Si en dicha expresión se tienen dos índices literales iguales, de los cuales uno es superior, y el otro, inferior, se considera que de acuerdo con estos índices se realiza la sumación: a los índices se les asignan sucesivamente los valores 1, 2, 3, y los sumandos obtenidos se adicionan. Por ejemplo,

$$x_i r^i = x_1 r^1 + x_2 r^2 + x_3 r^3,$$

$$\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3,$$

$$g_{ik} x^i x^k = (g_{1k} x^1 x^k) + (g_{2k} x^2 x^k) + (g_{3k} x^3 x^k) =$$

$$= (g_{11} x^1 x^1 + g_{12} x^1 x^2 + g_{13} x^1 x^3) + (g_{21} x^2 x^1 + g_{22} x^2 x^2 + g_{23} x^2 x^3) + \\ + (g_{31} x^3 x^1 + g_{32} x^3 x^2 + g_{33} x^3 x^3).$$

Con ayuda del convenio de sumación, las fórmulas (6.3) se escriben del siguiente modo compacto:

$$x = x_i r^i, \quad x = x^i r_i. \quad (6.4)$$

OBSERVACION 2. Los índices iguales superior e inferior, de los cuales se trataba en el convenio de sumación, se denominan, de ordinario, índices de sumación. Está claro que los índices de sumación pueden designarse con letras cualesquiera, y en este caso no varía la expresión, donde ellos figuran. Por ejemplo, $x_i r^h$ y $x_h r^i$ representan una misma expresión.

OBSERVACION 3. Todo lo que acabamos de decir en este punto se refiere al caso de un espacio tridimensional. En el caso bidimensional los índices literales toman los valores de 1 y 2.

Obtengamos una expresión para las coordenadas covariantes y contravariantes de un vector. Con este objeto multipliquemos escalarmente la primera de las igualdades (6.4) por r_h , y la segunda, por r^k . Habida cuenta de la relación (6.1), encontramos

$$\begin{aligned} x r_k &= x_i (r^i r_k) = x_i \delta_k^i = x_k, \\ x r^h &= x^i (r_i r^h) = x^i \delta_i^h = x^h. \end{aligned}$$

Así pues,

$$x_i = x r_i, \quad x^i = x r^i. \quad (6.5)$$

Con ayuda de las relaciones (6.5) escribamos las fórmulas (6.4) en la forma siguiente

$$x = (x r_i) r^i, \quad x = (x r^i) r_i. \quad (6.6)$$

Las relaciones (6.6) llevan el nombre de fórmulas de Gibbs¹⁾. Volvamos una vez más a la cuestión de construcción de las bases recíprocas.

Con ayuda de las fórmulas (6.6) obtendremos

$$r^h = (r^h r^i) r_i, \quad r_k = (r_h r^i) r^i. \quad (6.7)$$

Introduzcamos las designaciones

$$g_{hi} = r_h r^i, \quad g^{hi} = r^h r_i \quad (6.8)$$

Con ayuda de estas designaciones reescribamos las relaciones (6.7) del modo siguiente:

$$r^h = g^{hi} r_i, \quad r_h = g_{hi} r^i. \quad (6.9)$$

Así pues, para construir la base r^h según la base r_i , es suficiente conocer la matriz (g^{hi}) , y para construir la base r_h según la base r^i , basta conocer la matriz (g_{hi}) . Demostremos que estas matrices son recíprocamente inversas. Para demostrar esto, multipliquemos la primera de las igualdades (6.9) escalarmente por r_j . Teniendo presentes las relaciones (6.1), obtenemos

$$g^{hi} g_{ij} = \delta_j^h = \begin{cases} 1, & j = h, \\ 0, & j \neq h. \end{cases}$$

Estas relaciones muestran que las matrices (g^{hi}) y (g_{hi}) son recíprocamente inversas. Por cuanto los elementos de una matriz inversa pueden calcularse en términos de los elementos de la matriz dada, se pone claro que con ayuda de las relaciones (6.9) se resuelve la cuestión de construcción de las bases recíprocas.

2. Transformaciones de la base y de las coordenadas. Sean r_i y r^i , $i = 1, 2, 3$, las bases recíprocas, y sean $r_{i'}$ y $r^{i'}$ las nuevas bases recíprocas.

Haciendo uso del convenio de sumación, escribamos las fórmulas de transformación de los vectores básicos. Tenemos:

¹⁾ J. Gibbs (1839—1903), físico teórico americano.

1) fórmulas de transición de una base antigua r_i a la nueva $r_{i'}$ y fórmulas de transición inversa:

$$r_{i'} = b_{i'}^i r_i, \quad r_i = b_i^{i'} r_{i'}, \quad i, i' = 1, 2, 3; \quad (6.10)$$

2) fórmulas de transición de la base antigua r^i a la nueva $r^{i'}$ y fórmulas de transición inversa

$$r^{i'} = \tilde{b}_i^{i'} r^i, \quad r^i = \tilde{b}_i^{i'} r^{i'}, \quad i, i' = 1, 2, 3. \quad (6.11)$$

Por cuanto las transformaciones (6.10) son recíprocamente inversas, serán recíprocamente inversas las matrices $(b_{i'}^i)$ y $(b_i^{i'})$. Por razones análogas son recíprocamente inversas también las matrices $(\tilde{b}_i^{i'})$ y $(\tilde{b}_i^{i'})$.

Demostremos que las matrices $(b_{i'}^i)$ y $(\tilde{b}_i^{i'})$ coinciden. Con ello será demostrada la coincidencia de las matrices $(b_{i'}^i)$ y $(\tilde{b}_i^{i'})$. Para demostrar, multipliquemos escalarmente la primera de las igualdades (6.10) por r^i , y la segunda de las igualdades (6.11), por $r_{i'}$. Tomando en consideración las relaciones (6.1), encontramos

$$\begin{aligned} r_i r^i &= b_{i'}^i (r_i r^i) = b_{i'}^i \delta_i^i = b_{i'}^i, \\ r^i r_{i'} &= \tilde{b}_i^{i'} (r^i r_{i'}) = \tilde{b}_i^{i'} \delta_i^{i'} = \tilde{b}_i^{i'}. \end{aligned}$$

De estas relaciones obtenemos

$$b_{i'}^i = r_i r^i, \quad (6.12)$$

$$\tilde{b}_i^{i'} = r^i r_{i'}. \quad (6.13)$$

Por cuanto son iguales los segundos miembros de las relaciones (6.12) y (6.13), serán también iguales los miembros primeros. Dicho de otro modo, $b_{i'}^i = \tilde{b}_i^{i'}$, y esto es indicio de que las matrices $(b_{i'}^i)$ y $(\tilde{b}_i^{i'})$ coinciden. Notemos que los elementos $b_{i'}^i$ de la matriz $(b_{i'}^i)$ pueden ser determinados según las fórmulas (6.12).

Podemos ahora afirmar que para el paso de la base r_i, r^i a la base $r_{i'}, r^{i'}$ es suficiente conocer sólo la matriz $(b_{i'}^i)$ del cambio de la base r_i por la base $r_{i'}$ (la matriz $(b_i^{i'})$ se calcula según la matriz $(b_{i'}^i)$). Demos a conocer las fórmulas de transformación de los vectores básicos:

$$\left. \begin{aligned} r_{i'} &= b_{i'}^i r_i, & r_i &= b_i^{i'} r_{i'}, \\ r^{i'} &= b_i^{i'} r^i, & r^i &= b_{i'}^i r^{i'}. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Obtendremos las fórmulas de transformación de las coordenadas al pasar a una base nueva.

Sean x_i las coordenadas covariantes de x en la base r_1, r^i . Entonces, de acuerdo con (6.5), tenemos

$$x_i = x r_i.$$

Al sustituir en el segundo miembro de esta relación la expresión para r_i en las fórmulas (6.14), encontramos

$$x_i = x (b_i^j r_j) = b_i^j (x r_j) = b_i^j x_j.$$

Así pues, las fórmulas de transformación de las coordenadas covariantes de un vector, al pasar a una base nueva, tienen por expresión

$$x_i = b_i^j x_j. \quad (6.14')$$

Vemos que al pasar a una base nueva, las coordenadas covariantes del vector x se transforman con ayuda de la matriz (b_i^j) del cambio directo de la base antigua a la nueva. Esta concordancia de las transformaciones explica precisamente la denominación «coordenadas covariantes¹⁾ de un vector». Al sustituir en el segundo miembro de la relación $x^{i'} = x r^{i'}$ la expresión para $r^{i'}$ de la fórmula (6.14), obtenemos, tras algunas transformaciones, las fórmulas siguientes:

$$x^{i'} = b_i^{i'} x^i. \quad (6.15)$$

Vemos que al pasar a una base nueva, las coordenadas covariantes del vector x se transforman con ayuda de la matriz $(b_i^{i'})$ del cambio inverso de la base antigua por la nueva. A dicho desacuerdo de las transformaciones se debe el término «coordenadas contravariantes de un vector²⁾».

3. Invariantes de un operador lineal. Divergencia y rotor de un operador lineal. Llamemos *invariantes* a unas expresiones que no dependen de la elección de la base. Por ejemplo, el valor de una función escalar en un punto dado representa un invariante. Lo será también un vector-objeto independiente de la elección de la base. Un producto escalar de los vectores es también un invariante.

En el punto presente familiaricémosnos con ciertos invariantes de un operador lineal. Sea A un operador lineal arbitrario definido sobre los vectores de un espacio euclídeo tridimensional (es decir, $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ para cualesquiera vectores x e y , y cualesquiera números reales α y β). Demostremos que una expre-

¹⁾ Covariante significa cambiante de un modo concordado.

²⁾ Contravariante significa cambiante de un modo inverso.

sión

$$r^i A r_i = r_i A r^i \quad (6.16)$$

es un invariante.

Hace falta probar que al pasar a la nueva base r_i, r^i , queda válida la igualdad

$$r^i A r_i = r^i A r_i. \quad (6.17)$$

Sea r_i, r^i la base nueva, y sea (b_i^j) la matriz del cambio de la base r_i, r^i por la base r_i, r^i . Tenemos

$$r_i = b_i^j r_j, \quad r^i = b_k^i r^k.$$

Al sustituir estos valores para r_i y r^i en la expresión $r^i A r_i$, obtenemos

$$r^i A r_i = (b_i^j b_k^i) r^k A r_j. \quad (6.18)$$

Por cuanto $(b_i^j b_k^i) = \delta_k^j$, resulta, a partir de (6.18):

$$r^i A r_i = \delta_k^j r^k A r_j = r^i A r_i.$$

La igualdad (6.17) queda, pues, demostrada y, por lo tanto, está demostrada la invariación de la expresión $r^i A r_i$.

El invariante $r^i A r_i$ del operador lineal A se denominará *divergencia* del citado operador y se denotará con el símbolo $\text{div } A$. De este modo,

$$\text{div } A = r^i A r_i = r_i A r^i. \quad (6.19)$$

OBSERVACIÓN En la base dada r_i, r^i un operador lineal puede ser definido con ayuda de una matriz llamada matriz del operador lineal. Dicha matriz es una matriz de coeficientes a_i^h de la descomposición de los vectores $A r_i$ respecto de la base r_h (por supuesto, podemos analizar también una matriz de coeficientes de la descomposición de los vectores $A r^i$ respecto de la base r^j).

$$A r_i = a_i^h r_h, \quad a_i^j = r^j A r_i. \quad (6.20)$$

La divergencia de una matriz A puede ser expresada en términos de los elementos de la matriz (a_i^h) . A saber,

$$\text{div } A = a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n. \quad (6.21)$$

Con el fin de cerciorarse de la validez de la fórmula (6.21), basta sustituir la expresión (6.20) para $A r_i$ en la expresión (6.19) para la divergencia y hacer uso de la relación $r^i r_i = \delta_i^i$.

¹⁾ La validez de la igualdad $r^i A r_i = r_i A r^i$ puede confirmarse razonando del modo siguiente. Tenemos, de acuerdo con (6.9), $r^i = g^{ih} r_h$, $r_i = g_{il} r^l$. Por eso habida cuenta de que (g^{ih}) y (g_{il}) son recíprocamente inversas y simétricas, obtendremos

$$r^i A r_i = g^{ih} g_{il} r_h A r^l = \delta_l^h r_h A r^l = r_h A r^h = r_i A r^i$$

Demostremos que una expresión

$$[r_i Ar^i] = [r^i Ar_i] \quad (6.22)$$

es también un invariante. Hace falta probar que al pasar a una base nueva $r_{i'}$, $r^{i'}$, queda válida la igualdad

$$[r_i Ar^i] = [r_{i'} Ar^{i'}]. \quad (6.23)$$

Sea $r_{i'}$, $r^{i'}$ la base nueva y sea $(b_{i'}^i)$ la matriz del cambio de la base r_i , r^i por la base $r_{i'}$, $r^{i'}$. Tenemos

$$r_i = b_{i'}^i r_{i'}, \quad r^i = b_{i'}^i r^{i'}$$

Al sustituir estos valores para r_i y r^i en la expresión $[r_i Ar^i]$, obtendremos

$$[r_i Ar^i] = (b_{i'}^i b_{i'}^i) [r_{i'} Ar^{i'}]. \quad (6.24)$$

Por cuanto $(b_{i'}^i b_{i'}^i) = \delta_{i'}^i$, resulta, a partir de (6.24):

$$[r_i Ar^i] = \delta_{i'}^i [r_{i'} Ar^{i'}] = [r_{i'} Ar^{i'}].$$

Así pues, la igualdad (6.23) queda demostrada y, por lo tanto, está demostrada también la invariación de la expresión $[r_i Ar^i]$.

El invariante $[r_i Ar^i]$ de un operador lineal A se llamará *rotor* de dicho operador y se denotará con el símbolo $\text{rot } A$. De este modo,

$$\text{rot } A = [r_i Ar^i] = [r_1 Ar^1] + [r_2 Ar^2] + [r_3 Ar^3]. \quad (6.25)$$

Demos a conocer la expresión para la divergencia y el rotor de un operador lineal A en un caso en que la base i, j, k sea *ortonormal*. Por cuanto en tal caso la base recíproca coincide con la dada, de conformidad con las fórmulas (6.20), los elementos a_{ij} de la matriz del operador A pueden hallarse según las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= iAi, & a_{12} &= iAj, & a_{13} &= iAk, \\ a_{21} &= jAi, & a_{22} &= jAj, & a_{23} &= jAk, \\ a_{31} &= kAi, & a_{32} &= kAj, & a_{33} &= kAk. \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

(a diferencia del caso general, hemos designado elementos de la matriz del operador A por los símbolos a_{mi} , en lugar de a^m_j).

Para la divergencia del operador A obtenemos la siguiente expresión

$$\text{div } A = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = iAi + jAj + kAk. \quad (6.27)$$

¹⁾ La validez de la igualdad $[r_i Ar^i] = [r^i Ar_i]$ puede confirmarse razonando del modo siguiente. Tenemos, de acuerdo con (6.9), $r^i = g^{ih} r_h$, $r_i = g_{il} r^l$. Por eso, teniendo presentes la inversibilidad recíproca y simetría de las matrices (g^{ik}) y (g_{il}) , obtenemos

$$[r^i Ar_i] = g^{ih} g_{il} [r_h Ar^l] = \delta_l^h [r_h Ar^l] = [r_h Ar^h] = [r_i Ar^i].$$

Hallemos la expresión para el rotor del operador A . Por ser coincidentes las bases recíprocas en el caso de una base ortonormal, a partir de (6.25) obtenemos

$$\text{rot } A = [iAi] + [jAj] + [kAk]. \quad (6.28)$$

Calculemos el primer producto vectorial $[iAi]$. Por cuanto $Ai = a_{11}i + a_{21}j + a_{31}k$, resulta

$$[iAi] = a_{11}[ii] + a_{21}[ij] + a_{31}[ik] = -a_{31}j + a_{21}k.$$

De un modo sumamente análogo se obtienen las fórmulas

$$[jAj] = a_{32}i - a_{12}k, \quad [kAk] = -a_{23}i + a_{13}j.$$

Con ayuda de las fórmulas obtenidas y la correlación (6.28) para $\text{rot } A$ determinemos

$$\text{rot } A = (a_{32} - a_{23})i + (a_{13} - a_{31})j + (a_{21} - a_{12})k. \quad (6.29)$$

§ 2. Campo escalar y campo vectorial. Conceptos y operaciones fundamentales

1. Concepto de campo escalar y vectorial. Sea Ω un dominio sobre un plano o en un espacio.

Se dice que *en el dominio Ω está dado un campo escalar*, si a todo punto M de Ω se le pone en correspondencia, según una ley conocida, cierto número $u(M)$.

Notemos que el concepto de campo escalar y el de una función definida en el dominio Ω coinciden. Por regla general, se emplea la siguiente terminología: *un campo escalar se define con ayuda de la función $u(M)$.*

El concepto de campo vectorial se introduce por analogía completa con el de campo escalar: *si a todo punto M del dominio D se le pone en correspondencia, según una ley conocida, cierto vector $p(M)$, suele decirse que en el dominio Ω viene dado un campo vectorial.* En este caso diremos que *un campo vectorial se define con ayuda de una función vectorial $p(M)$.*

El campo de temperaturas dentro de un cuerpo calentado, el campo de densidad de una masa son ejemplos de campos escalares. El campo de velocidades de un flujo estable, el campo de intensidad magnética constituyen ejemplos de campos vectoriales.

2. Campos escalares diferenciables. Gradiente de un campo escalar. Derivada direccional. Ya hemos dicho que el concepto de campo escalar $u(M)$ en el dominio Ω y el de función definida en el dominio citado coinciden. Por eso, la diferenciable de un campo escalar puede definirse como diferenciable de la función que define dicho campo. Enunciamos, para mayor comodidad, el concepto de diferenciable de un campo, recurriendo a la terminología un tanto diferente de la habitual.

Llamemos *forma lineal* $f(\Delta r)$ respecto del vector Δr a un producto escalar de este vector por cierto vector g independiente de Δr . Usemos también las siguientes designaciones:

$\rho = \rho(M, M')$ es la distancia entre los puntos M y M' ,

$\Delta r = \overline{MM'}$ es el vector que une los puntos M y M' ,

$\Delta u = u(M') - u(M)$ es el incremento del campo en el punto M .

Enunciemos la siguiente *definición*.

Definición 1. Un campo escalar $u(M)$ se denomina *diferenciable en el punto M del dominio Ω* , si el incremento del campo Δu en el punto M puede ser representado en la forma

$$\Delta u = f(\Delta r) + o(\rho), \quad (6.30)$$

donde $f(\Delta r)$ es la forma lineal respecto del vector Δr .

La correlación (6.30) se llamará *condición de diferenciability* del campo $u(M)$ en el punto M .

OBSERVACIÓN 1. Por cuanto la forma lineal $f(\Delta r)$ representa un producto escalar $g \cdot \Delta r$, donde g es un vector independiente de Δr , la condición de diferenciability (6.30) del campo escalar $u(M)$ en el punto M puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\Delta u = g \cdot \Delta r + o(\rho). \quad (6.31)$$

Demostremos que si un campo escalar $u(M)$ es diferenciable en el punto M , la representación (6.30) (ó (6.31)) para el incremento Δu de dicho campo en el punto M es único. Sean

$$\Delta u = g \cdot \Delta r + o_1(\rho) \quad \text{y} \quad \Delta u = h \cdot \Delta r + o_2(\rho) \quad (6.32)$$

dos representaciones del incremento Δu en el punto M . De las fórmulas (6.32) para $\Delta r \neq 0$ obtenemos una correlación

$$(g - h) e = \frac{o(\rho)}{|\Delta r|}, \quad (6.33)$$

en la cual $e = \frac{\Delta r}{|\Delta r|}$ es un vector unidad, y $o(\rho) = o_2(\rho) - o_1(\rho)$.

Por cuanto $\frac{o(\rho)}{|\Delta r|} = \frac{o(\rho)}{\rho}$ es una variable infinitésima para $\rho \rightarrow 0$, de (6.33) proviene que $(g - h) e = 0$, cualquiera que sea e , es decir, $g = h$. La unicidad de la representación (6.30) está demostrada.

Diremos que un campo escalar $u(M)$ definido en el dominio Ω es *diferenciable en este dominio*, si es diferenciable en cada punto del mismo.

Definición 2. Se llama *gradiente en un punto M del campo escalar $u(M)$* , diferenciable en dicho punto, al vector g definido mediante la correlación (6.31).

El gradiente de un campo escalar se denota con el símbolo $\text{grad } u$.

OBSERVACIÓN 2. La definición de diferenciability de un campo escalar enunciada más arriba, es cómoda por aquella razón que lleva

un carácter invariante, independiente de la elección del sistema de coordenadas. Por eso, el gradiente de un campo escalar representa un invariante de este campo.

OBSERVACIÓN 3. Señalemos la siguiente circunstancia importante: si un campo escalar $u(M)$ definido en el dominio Ω es diferenciable en dicho dominio, el gradiente $\text{grad } u$ del campo está definido en cada punto de Ω , y, evidentemente, representa un campo vectorial definido en Ω .

OBSERVACIÓN 4. Para un campo escalar se introduce la noción de superficie de nivel (línea de nivel, si se trata de un plano) que representa un conjunto de puntos, sobre el cual los valores del campo $u(M)$ son iguales. El gradiente del campo en un punto M es ortogonal a la superficie de nivel en dicho punto. El lector mismo puede cerciorarse con facilidad de la validez de esta afirmación.

Haciendo uso de la designación $\text{grad } u$ para el gradiente de un campo escalar, escribamos la correlación (6.31) en la siguiente forma:

$$\Delta u = \text{grad } u \cdot \Delta r + o(\rho). \quad (6.34)$$

Notemos que el sumando $\text{grad } u \cdot \Delta r$ se llama, de ordinario, diferencial du del campo escalar. De este modo,

$$du = \text{grad } u \cdot \Delta r. \quad (6.35)$$

Convengamos en llamar diferencial dr al incremento Δr del radio vector $r = \overline{OM}$, $\Delta r = \overline{OM'} - \overline{OM}$. Entonces, la fórmula (6.35) para la diferencial du del campo escalar puede ser escrita en la forma

$$du = \text{grad } u \cdot dr. \quad (6.36)$$

Supongamos que en el dominio Ω están dados dos campos diferenciales $u(M)$ y $v(M)$. Son válidas las siguientes correlaciones:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } (u \pm v) &= \text{grad } u \pm \text{grad } v, \\ \text{grad } (uv) &= u \text{ grad } v + v \text{ grad } u, \\ \text{grad } \left(\frac{u}{v} \right) &= \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2} \quad (\text{para } v \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Si F es una función diferenciable, tenemos

$$\text{grad } F(u) = F'(u) \text{ grad } u. \quad (6.38)$$

Las deducciones de las fórmulas (6.37) y (6.38) son de un mismo tipo. Demostremos, a título de ejemplo, la validez de la segunda fórmula de (6.37). Resulta, teniendo presentes la fórmula (6.34) y la continuidad de la función $u(M)$:

$$\begin{aligned} \Delta (uv) &= u(M')v(M') - u(M)v(M) = u(M')\Delta v + \\ &+ v(M)\Delta u = (u(M)\text{ grad } v + v(M)\text{ grad } u)\Delta r + o(\rho). \end{aligned}$$

De estas relaciones proviene que el incremento $\Delta(uv)$ puede representarse en la forma (6.31). Por eso, uv es una función diferenciable y $\text{grad}(uv) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u$. La segunda de las fórmulas (6.37) queda demostrada.

Introduzcamos el concepto de *derivada direccional* para un campo escalar.

Sea $u(M)$ un campo definido en el dominio Ω , sea M un punto de Ω , y sea e un vector unidad que indica la dirección en el punto M . Admitamos luego que M' es un punto cualquiera de Ω , diferente de M y de tal género que el vector $\overline{MM'}$ sea colineal con e . La distancia entre M y M' se denotará con ρ .

Si existe un límite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho}$$

($\Delta u = u(M') - u(M)$), el mismo se llama *derivada del campo u en el punto M según la dirección de e* y se denota con el símbolo $\frac{\partial u}{\partial e}$. De este modo,

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho}. \quad (6.39)$$

Resulta válida la siguiente afirmación.

Supongamos que un campo $u(M)$ es diferenciable en el punto M .

En este caso la derivada $\frac{\partial u}{\partial e}$ del campo en dicho punto según cualquier dirección de e existe y puede hallarse por la fórmula

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \text{grad } u \cdot e. \quad (6.40)$$

Demostremos esta afirmación. Sea e una dirección fija cualquiera y supongamos que un punto M' se elige de una manera tal que el vector $\Delta r = \overline{MM'}$ sea colineal con e . Está claro que $\Delta r = \rho e$. Al sustituir el valor de Δr en la relación (6.34), encontramos

$$\Delta u = (\text{grad } u \cdot e) \rho + o(\rho).$$

De aquí se obtiene la fórmula

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \text{grad } u \cdot e + \frac{o(\rho)}{\rho}. \quad (6.41)$$

A partir de las relaciones (6.39) y (6.41) proviene (6.40). La afirmación está demostrada.

Hallenos la expresión para el gradiente de un campo escalar diferenciable, considerando que en un espacio queda elegida la base ortonormal i, j, k , con la cual está ligado el sistema rectangular de coordenadas cartesianas $Oxyz$. Por cuanto $\text{grad } u = i(\text{grad } u \cdot i) +$

$+j(\text{grad } u \cdot j) + k(\text{grad } u \cdot k)$, y, además, $\frac{\partial u}{\partial i} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial j} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial z}$, obtendremos, con ayuda de la relación (6.40):

$$\text{grad } u = i \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial u}{\partial y} + k \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Recurriendo a la expresión (6.40) para una derivada direccional, obtenemos la siguiente ilustración gráfica de distribución de los valores de las derivadas direccionales del campo u (M) en el punto M de un dominio plano Ω . Sea $\text{grad } u \neq 0$ (si $\text{grad } u = 0$, de (6.40) se deduce que $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$ para e cualquiera). Empleando $\text{grad } u$ como

diámetro (fig. 6.1), construyamos sobre este vector una circunferencia C . Construyamos también una circunferencia C^* que es igual a C y que es tangente a la última en un punto M . Sea e una dirección arbitraria. Tracemos por M una semirrecta en dirección del vector e . Si dicha semirrecta es tangente a las circunferencias C y C^* , tendremos

$\frac{\partial u}{\partial e} = 0$ (el vector e es ortogonal con relación a $\text{grad } u$). En

cambio, si la semirrecta corta C o C^* en un punto N , resulta que $\frac{\partial u}{\partial e}$ es igual a la longitud MN tomada con el signo $+$, cuando N se dispone en C , y con el signo $-$, cuando N se dispone en C^* . Para un campo espacial las circunferencias C y C^* han de ser sustituidas por las esferas.

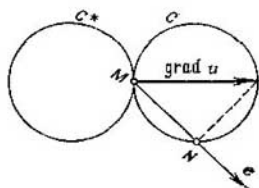


Fig. 6.1.

3. Campos vectoriales diferenciables. Divergencia y rotor de un campo vectorial. Derivada direccional de un campo vectorial. Supongamos que en un dominio Ω del espacio euclídeo tridimensional está dado un campo vectorial p (M). En lo que sigue adelante utilizaremos las designaciones: $\Delta r = \overline{MM'}$, $\Delta p = p(M') - p(M)$.

Enunciemos la siguiente *definición*.

Definición 3. Un campo vectorial p (M) se llama diferenciable en un punto M del dominio Ω , si el incremento del campo Δp en el punto M puede ser representado en la forma siguiente:

$$\Delta p = A \Delta r + o(|\Delta r|), \quad (6.42)$$

donde A es un operador lineal independiente de Δr (independiente de la elección del punto M').

Las relaciones (6.42) se denominarán *condiciones de diferenciabilidad del campo* $p(M)$ en el punto M .

Demostremos que si un campo vectorial $p(M)$ es diferenciable en el punto M , la representación (6.42) para el incremento Δp de este campo en el punto M es única.

Sean

$$\Delta p = A \Delta r + o_1(|\Delta r|) \quad \text{y} \quad \Delta p = B \Delta r + o_2(|\Delta r|) \quad (6.43)$$

dos representaciones del incremento Δp en el punto M . De las fórmulas (6.34) para $\Delta r \neq 0$ obtenemos una relación

$$(A - B)e = \frac{o(|\Delta r|)}{|\Delta r|}, \quad (6.44)$$

en la cual $e = \frac{\Delta r}{|\Delta r|}$ es el vector unidad; $o(|\Delta r|) = o_2(|\Delta r|) - o_1(|\Delta r|)$. Por cuanto $\frac{o(|\Delta r|)}{|\Delta r|}$ es un vector infinitamente pequeño para $\Delta r \rightarrow 0$, y e es vector unidad arbitrario, de (6.44) proviene que $(A - B)e = 0$ para cualquier e , es decir, $A = B$. La unicidad de la representación (6.42) está demostrada.

Diremos que un campo vectorial $p(M)$, definido en el dominio Ω , es diferenciable en dicho dominio, si es diferenciable en cada punto del mismo.

Introduzcamos el concepto de derivada direccional para el campo vectorial $p(M)$.

Sea $p(M)$ un campo definido en el dominio Ω , sea M cierto punto de Ω , y sea e el vector unidad que indica la dirección en el punto M . Admitamos, además, que M' es un punto cualquiera diferente de M y de tal género que el vector $\overline{MM'}$ sea colineal con el vector e . La distancia entre los puntos M y M' se designará con ρ . Si existe un límite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\rho}$$

($\Delta p = p(M') - p(M)$), el mismo se llama derivada del campo $p(M)$ en el punto M según la dirección de e y se denota con el símbolo $\frac{\partial p}{\partial e}$.

De este modo,

$$\frac{\partial p}{\partial e} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\rho}. \quad (6.45)$$

Resulta válida la siguiente afirmación. Supongamos que un campo $p(M)$ es diferenciable en el punto M del dominio Ω . En este caso la derivada $\frac{\partial p}{\partial e}$ del campo p en dicho punto según cualquier

dirección de e existe y puede hallarse por la fórmula

$$\frac{\partial p}{\partial e} = Ae, \quad (6.46)$$

donde A es un operador lineal definido por la relación (6.42).

Demostremos esta afirmación. Sea e una dirección fija cualquiera y supongamos que un punto M' se toma de una manera tal que el vector $\Delta r = \rho e$, y $|\Delta r| = \rho$. Al sustituir este valor de Δr en la relación (6.42) y al aprovechar las propiedades de un operador lineal, encontramos

$$\Delta p = \rho Ae + o(\rho).$$

De aquí obtenemos la fórmula

$$\frac{\Delta p}{\rho} = Ae + \frac{o(\rho)}{\rho}. \quad (6.47)$$

De las relaciones (6.45) y (6.47) se deduce la fórmula (6.46). La afirmación queda demostrada.

Sea $p(M)$ un campo diferenciable en el punto M del dominio Ω . Entonces,

$$\Delta p = A \Delta r + o(|\Delta r|).$$

Hallemos la matriz de un operador lineal A para el caso en que la base i, j, k sea ortonormal. Convengamos en considerar que con dicha base está relacionado el sistema rectangular de coordenadas cartesianas $Oxyz$.

Denotemos con P, Q y R las coordenadas del campo vectorial $p(M)$ en la base i, j, k . Es evidente que de conformidad con la fórmula (6.46),

$$\frac{\partial p}{\partial i} = \frac{\partial p}{\partial x} = Ai, \quad \frac{\partial p}{\partial j} = \frac{\partial p}{\partial y} = Aj, \quad \frac{\partial p}{\partial k} = \frac{\partial p}{\partial z} = Ak.$$

A partir de estas fórmulas y de las relaciones (6.26) para la matriz de los coeficientes de un operador lineal en la base ortonormal i, j, k se deduce que la matriz $\overset{\circ}{A}$ del operador en consideración A tiene por expresión

$$\overset{\circ}{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

Introduzcamos el concepto de *divergencia* y de *rotor* para el campo vectorial $p(M)$ diferenciable en un dominio Ω , esto es para tal campo cuyo incremento Δp en cada punto M del dominio Ω pueda ser representado en la forma

$$\Delta p = A \Delta r + o(|\Delta r|),$$

con la particularidad de que el operador A varía, en el caso general, al pasar de un punto del dominio Ω al otro. Dicho de otro modo, el operador depende del punto M y no depende, por supuesto, de Δr .

Llamemos *divergencia y rotor del campo p (M) en un punto M del dominio Ω a la divergencia y al rotor del operador lineal A . De este modo por definición,*

$$\operatorname{div} p = \operatorname{div} A, \operatorname{rot} p = \operatorname{rot} A. \quad (6.49)$$

OBSERVACION. Admitida la suposición sobre la diferenciabilidad del campo p (M) en el dominio Ω , la divergencia $\operatorname{div} p$ y el rotor $\operatorname{rot} p$ están definidos en todo punto de Ω . Por cuanto estos entes son invariantes (no dependen de la elección de la base), resulta obvio que $\operatorname{div} p$ es un campo escalar, y $\operatorname{rot} p$, campo vectorial en el dominio Ω .

Hallemos las expresiones para la divergencia, el rotor y la derivada direccional de un campo vectorial diferenciable p (M), considerando que en un espacio se encuentra elegido la base ortonormal i, j, k , con la cual está ligado el sistema rectangular de coordenadas cartesianas $Oxyz$. Convergamos en considerar, como antes, que el campo p (M) tiene coordenadas P, Q, R en la base i, j, k .

Como la matriz \hat{A} del operador lineal A se define en este caso por la relación (6.48), y como, por definición, $\operatorname{div} p = \operatorname{div} A$, $\operatorname{rot} p = \operatorname{rot} A$ (véase (6.49), entonces, de acuerdo con las fórmulas (6.27) y (6.29), obtendremos

$$\operatorname{div} p = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (6.50)$$

$$\operatorname{rot} p = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k. \quad (6.51)$$

Para calcular la derivada del campo vectorial p (M) según la dirección de e , hagamos uso de la fórmula (6.46) y de las propiedades del operador lineal.

Sea $e = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma$ ¹⁾. Entonces, de acuerdo con (6.46), obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial e} &= Ae = \cos \alpha Ai + \cos \beta Aj + \cos \gamma Ak = \\ &= \cos \alpha \frac{\partial p}{\partial i} + \cos \beta \frac{\partial p}{\partial j} + \cos \gamma \frac{\partial p}{\partial k} = \\ &= \cos \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial p}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

De este modo, la derivada $\frac{\partial p}{\partial e}$ puede calcularse o bien según la fórmula

$$\frac{\partial p}{\partial e} = \cos \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial p}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (6.52)$$

¹⁾ Por cuanto e es un vector unidad, sus coordenadas tienen por expresión $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, donde α, β y γ son los ángulos que forma este vector con los ejes Ox, Oy y Oz , respectivamente.

o bien, habida cuenta de que P, Q, R son coordenadas de \mathbf{p} (M), según la fórmula

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial e} = & \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial P}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial P}{\partial z} \cos \gamma \right) \mathbf{i} + \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Q}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \gamma \right) \mathbf{j} + \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial R}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial R}{\partial z} \cos \gamma \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6.53)$$

4. Operaciones reiteradas de la teoría del campo. Convengamos en considerar que en un dominio Ω del espacio euclídeo E^3 están definidos un campo escalar u (M) de la clase C^2 ¹⁾ y un campo vectorial \mathbf{p} (M) de la clase C^2 .

Admitidas estas suposiciones, $\text{grad } u$ representa un campo vectorial diferenciable en Ω ; $\text{div } \mathbf{p}$ es un campo escalar diferenciable y $\text{rot } \mathbf{p}$, un campo vectorial diferenciable. Por eso, resultan posibles las siguientes operaciones reiteradas:

$\text{rot grad } u$, $\text{div grad } u$, $\text{grad div } \mathbf{p}$, $\text{div rot } \mathbf{p}$, $\text{rot rot } \mathbf{p}$.

Demostremos que

$$\text{rot grad } u = 0, \quad \text{div rot } \mathbf{p} = 0. \quad (6.54)$$

Para demostrar, calculemos $\text{rot grad } u$ y $\text{div rot } \mathbf{p}$ en un sistema rectangular de coordenadas cartesianas. Por cuanto, en este caso, las coordenadas de $\text{grad } u$ son $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, entonces, en virtud de la fórmula (6.51), obtendremos

$\text{rot grad } u =$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = 0.$$

De este modo, la primera de las igualdades (6.54) es válida para el sistema cartesiano de coordenadas. Por ser invariante la expresión $\text{rot grad } u$, la primera de las igualdades (6.54) queda demostrada. Demostremos la segunda igualdad. Volvamos de nuevo a un sistema cartesiano de coordenadas. De acuerdo con (6.51), en este sistema el campo vectorial $\text{rot } \mathbf{p}$ tiene por coordenadas $\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)$, $\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$, donde P, Q, R son coordenadas del vector \mathbf{p} . De acuerdo con (6.50), la divergencia de un campo vectorial $\text{rot } \mathbf{p}$ en el sistema rectangular de coordenadas cartesianas es igual a la suma de derivadas de los componentes de dicho campo respecto de las coordena-

¹⁾ Una función pertenece a la clase C^k en el dominio Ω , si todas sus derivadas parciales de orden k son continuas.

das homónimas. De este modo,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0.$$

Así pues, la segunda de las igualdades (6.54) es válida para el sistema de coordenadas cartesianas. Por ser invariante la expresión $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{p}$, la segunda igualdad en (6.54) queda válida en cualquier sistema de coordenadas.

Una de las operaciones reiteradas principales en la teoría del campo es $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$. Esta operación se denota brevemente por Δu , con la particularidad de que el símbolo Δ se denomina, corrientemente, operador de Laplace¹⁾. De este modo,

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u. \quad (6.55)$$

Calculemos el operador de Laplace en un sistema rectangular de coordenadas cartesianas. En tal sistema el campo vectorial $\operatorname{grad} u$ sus coordenadas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. Volviendo a la expresión (6.50) para la divergencia de un campo vectorial, obtendremos

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (6.56)$$

Las operaciones reiteradas $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{p}$ y $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{p}$ están entrelazadas por la correlación

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{p} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{p} - \Delta \mathbf{p}, \quad (6.57)$$

donde $\Delta \mathbf{p}$ es un vector cuyas coordenadas en la base i, j, k son $\Delta P, \Delta Q, \Delta R$ (P, Q, R son coordenadas del campo vectorial \mathbf{p} en la base i, j, k). El lector mismo puede convencerse con facilidad de que (6.57) es válida.

§ 3. Expresión de las operaciones fundamentales de la teoría del campo en coordenadas curvilíneas

1. Coordenadas curvilíneas. Sea Ω un dominio de un espacio euclídeo E^3 ; y sean x, y, z , las coordenadas cartesianas en dicho espacio. Supongamos, además, que $\tilde{\Omega}$ es un dominio de un espacio euclídeo \tilde{E}^3 , mientras que x^1, x^2, x^3 , las coordenadas cartesianas en \tilde{E}^3 .

Examinemos una aplicación biunívoca y recíprocamente continua del dominio $\tilde{\Omega}$ sobre el Ω , la cual se realiza mediante las funciones

$$x = x(x^1, x^2, x^3), \quad y = y(x^1, x^2, x^3), \quad z = z(x^1, x^2, x^3). \quad (6.58)$$

¹⁾ P. S. Laplace (1749—1827), destacado astrónomo, físico y matemático francés.

Con ayuda de la aplicación mencionada se introducen en el dominio Ω las coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3 . El sentido de esta denominación lo esclarecen fácilmente los siguientes razonamientos. Primero, a todo punto $M(x, y, z)$ del dominio Ω se le ponen en correspondencia tres números x^1, x^2, x^3 . Para ser más preciso el punto M se predetermina por una terna de números x^1, x^2, x^3 . Exactamente a esto se debe la denominación «coordenadas» del punto M para los números x^1, x^2, x^3 . Segundo, si en los miembros derechos de las relaciones (6.58) son fijadas algunas coordenadas, x^2 y x^3 , por ejemplo, dichas relaciones

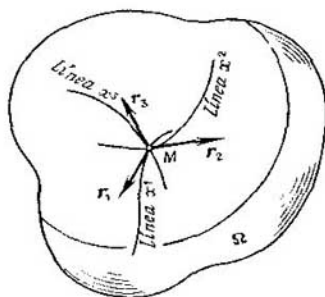


Fig. 6.2.

definen, para x^1 variable, cierta línea en Ω , la cual, generalmente, se diferencia de una recta. Resulta natural llamarla *línea coordenada x^1* , subrayando con ello que en los puntos de la citada línea varía sólo la coordenada x^1 . Por analogía completa se definen las líneas coordenadas x^2 y x^3 . En general, las líneas coordenadas x^1, x^2, x^3 no serán rectas, a lo que se debe el término «coordenadas curvilíneas».

Se ha puesto en claro que por todo punto M del dominio Ω pasan tres líneas coordenadas x^1, x^2, x^3 (fig. 6.2.). Construyamos en el punto M una base r_1, r^i ligada de un modo natural con las líneas coordenadas que pasan por el mismo punto. Hagamos uso en este caso de las relaciones (6.58). Evidentemente, las derivadas $\frac{\partial x}{\partial x^1}, \frac{\partial y}{\partial x^1}, \frac{\partial z}{\partial x^1}$, calculadas en el punto M , representan las coordenadas del vector de la tangente a la línea x^1 en este punto. Designemos este vector con r_1 . De un modo análogo construimos los vectores r_2 y r_3 de las tangentes a las líneas x^2 y x^3 , respectivamente. De este modo,

$$r_k = \left\{ \frac{\partial x}{\partial x^k}, \frac{\partial y}{\partial x^k}, \frac{\partial z}{\partial x^k} \right\}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6.59)$$

Para que los vectores r_1, r_2, r_3 formen una base, hace falta exigir que estos vectores no sean coplanares. Una condición suficiente para que se cumpla dicha exigencia consiste, evidentemente, en que el jacobiano

$$\frac{\mathcal{Z}(x, y, z)}{\mathcal{Z}(x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^1} & \frac{\partial y}{\partial x^1} & \frac{\partial z}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x}{\partial x^2} & \frac{\partial y}{\partial x^2} & \frac{\partial z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x}{\partial x^3} & \frac{\partial y}{\partial x^3} & \frac{\partial z}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

no se reduzca a cero, pues dicho jacobiano es igual al producto mixto de los vectores r_1, r_2, r_3 . Con ayuda de la base construida r_1, r_2, r_3 se construye de un modo estándar la base recíproca r^1, r^2, r^3 .

Así pues, si en el dominio Ω están introducidas las coordenadas x^1, x^2, x^3 , con cada punto M de este dominio se ligán de un modo natural los vectores básicos r_i, r^i . Veamos los ejemplos.

1°. *Sistema de coordenadas cilíndricas.* Este sistema de coordenadas se introduce con ayuda de las relaciones

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z. \quad (6.60)$$

De este modo, $x^1 = \rho, x^2 = \varphi, x^3 = z$. Se conoce que las coordenadas citadas ρ, φ, z (o bien, que es lo mismo, x^1, x^2, x^3) varían dentro de los siguientes límites¹⁾:

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Las desigualdades aducidas definen en el espacio euclídeo \tilde{E}^3 con las coordenadas ρ, φ, z (o bien x^1, x^2, x^3) un dominio infinito $\tilde{\Omega}$, expuesto en la fig. 6.3. Por consiguiente, la introducción de las coordenadas cilíndricas en el espacio euclídeo E^3 puede considerarse como resultado de la aplicación del dominio $\tilde{\Omega}$ del espacio \tilde{E}^3 en el espacio E^3 con ayuda de las fórmulas (6.60).

Evidentemente, las líneas coordenadas ρ (o líneas x^1) representan unas rectas que pasan por el eje Oz , siendo perpendiculares con relación a dicho eje; las líneas coordenadas φ (líneas x^2) son circunferencias con centro en el eje Oz cuyos planos son paralelos al plano Oxy . Las líneas coordenadas z (líneas x^3) son rectas paralelas al eje Oz (véase fig. 6.3.). Halleemos los vectores r_1, r_2, r_3 y r^1, r^2, r^3 . Se tiene

$$\begin{aligned} r_1 &= \left\{ \frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho} \right\} = \{ \cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi, 0 \}, \\ r_2 &= \left\{ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right\} = \{ -\rho \operatorname{sen} \varphi, \rho \cos \varphi, 0 \}, \\ r_3 &= \left\{ \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} \right\} = \{ 0, 0, 1 \}. \end{aligned}$$

¹⁾ Véase «Geometría analítica» del curso presente.

Destaquemos que las expresiones entre corchetes representan las coordenadas cartesianas de los vectores básicos r_1, r_2 y r_3 . Podemos convencernos directamente de que la base r_1, r_2, r_3 es ortogonal.

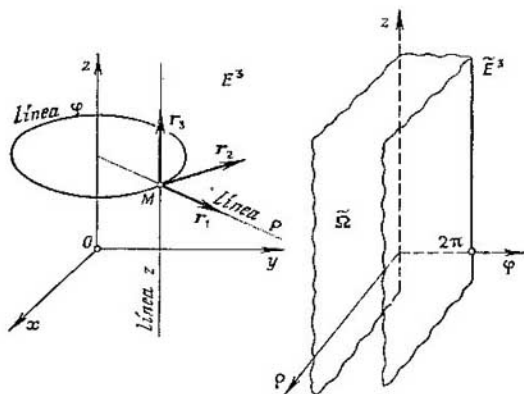


Fig. 6.3.

Con el fin de calcular la base recíproca hagamos uso de las fórmulas aducidas en el p. 1, § 1 de este capítulo. Tenemos

$$r_1 r_2 r_3 = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ -\rho \operatorname{sen} \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$[r_2 r_3] = \{\rho \cos \varphi, \rho \operatorname{sen} \varphi, 0\},$$

$$[r_3 r_1] = \{-\operatorname{sen} \varphi, \cos \varphi, 0\},$$

$$[r_1 r_2] = \{0, 0, \rho\}.$$

Por eso,

$$r^1 = \frac{[r_2 r_3]}{r_1 r_2 r_3} = \{\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi, 0\},$$

$$r^2 = \frac{[r_3 r_1]}{r_1 r_2 r_3} = \left\{ -\frac{1}{\rho} \operatorname{sen} \varphi, \frac{1}{\rho} \cos \varphi, 0 \right\},$$

$$r^3 = \frac{[r_1 r_2]}{r_1 r_2 r_3} = \{0, 0, 1\}.$$

2°. *Sistema de coordenadas esféricas.* Este sistema de coordenadas se introduce con ayuda de las relaciones

$$x = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (6.61)$$

De este modo, $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \theta$. Se conoce que las coordenadas citadas ρ , φ , θ (o bien, que es lo mismo, x^1 , x^2 , x^3) varían dentro de los siguientes límites:

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (6.62)$$

Las desigualdades (6.62) definen en el espacio euclídeo \tilde{E}^3 con las coordenadas ρ , φ , θ (o bien x^1 , x^2 , x^3) un dominio infinito $\tilde{\Omega}$ expuesto en la fig. 6.4. Por eso, la introducción de las coordenadas esféricas en el espacio euclídeo \tilde{E}^3 puede considerarse como resultado de la aplicación del dominio $\tilde{\Omega}$ del espacio \tilde{E}^3 en el espacio E^3 con ayuda de las fórmulas (6.61).

Es evidente que las líneas coordenadas ρ (o líneas x^1) representan unos rayos que salen del origen de coordenadas; las líneas coordenadas φ (líneas x^2) son circunferencias con centros en el eje Oz cuyos planos son paralelos al plano Oxy ; las líneas coordenadas θ (líneas x^3) son semicircunferencias cuyos centros se disponen en el origen de coordenadas y cuyos planos pasan por el eje Oz (véase fig. 6.4).

Hallemos los vectores r_1, r_2, r_3 y r^1, r^2, r^3 . Tenemos

$$\begin{aligned} r_1 &= \{ \text{sen } \theta \cos \varphi, & \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, & \cos \theta \}, \\ r_2 &= \{ -\rho \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi, & \rho \text{ sen } \theta \cos \varphi, & 0 \}, \\ r_3 &= \{ \rho \cos \theta \cos \varphi, & \rho \cos \theta \text{ sen } \varphi, & -\rho \text{ sen } \theta \}. \end{aligned}$$

Inmediatamente podemos convencernos de que la base r_1, r_2, r_3 es ortogonal. Para calcular la base recíproca, hagamos uso de las fórmulas aducidas en el p. 1, § 1 de este capítulo. Se tiene

$$r_1 r_2 r_3 = \begin{vmatrix} \text{sen } \theta \cos \varphi & \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi & \cos \theta \\ -\rho \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi & \rho \text{ sen } \theta \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \text{ sen } \varphi & -\rho \text{ sen } \theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \text{ sen } \theta,$$

$$[r_2 r_3] = \{ -\rho^2 \text{ sen}^2 \theta \cos \varphi, \quad -\rho^2 \text{ sen}^2 \theta \text{ sen } \varphi, \quad -\rho^2 \text{ sen } \theta \cos \theta \},$$

$$[r_3 r_1] = \{ \rho \text{ sen } \varphi, \quad \rho \cos \varphi, \quad 0 \},$$

$$[r_1 r_2] = \{ -\rho \cos \theta \text{ sen } \theta \cos \varphi, \quad -\rho \cos \theta \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi, \quad \rho \text{ sen}^2 \theta \}.$$

Por eso,

$$r^1 = \frac{[r_2 r_3]}{r_1 r_2 r_3} = \{ \text{sen } \theta \cos \varphi, \quad \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi, \quad \cos \theta \},$$

$$r^2 = \frac{[r_3 r_1]}{r_1 r_2 r_3} = \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \theta}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\cos \varphi}{\text{sen } \theta}, \quad 0 \right\},$$

$$r^3 = \frac{[r_1 r_2]}{r_1 r_2 r_3} = \left\{ \frac{1}{\rho} \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{1}{\rho} \cos \theta \text{ sen } \varphi, \quad -\frac{1}{\rho} \text{ sen } \theta \right\}.$$

3°. *Sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas.* Un sistema de coordenadas curvilíneas se llamará *ortogonal*, si en todo punto de un dominio Ω la base r_i , definida por la igualdad (6.59), es ortogonal.

Los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas que acabamos de estudiar intervienen como ejemplos de coordenadas curvilíneas ortogonales.

Obtengamos la expresión para los vectores r^i de la base recíproca para el caso de un sistema ortogonal de coordenadas. Introduzcamos

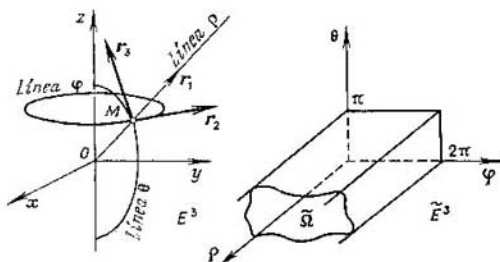


Fig. 6.4.

mos las siguientes designaciones:

$$H_1 = |r_1|, \quad H_2 = |r_2|, \quad H_3 = |r_3|.$$

Las magnitudes H_1, H_2, H_3 se denominan, de ordinario, *coeficientes o parámetros de Lamé*¹⁾.

Por cuanto el sistema de coordenadas es ortogonal y la terna de vectores r_1, r_2, r_3 es derecha, tenemos

$$r_1 r_2 r_3 = H_1 H_2 H_3, \quad [r_2 r_3] = \frac{H_2 H_3}{H_1} r_1,$$

$$[r_3 r_1] = \frac{H_3 H_1}{H_2} r_2, \quad [r_1 r_2] = \frac{H_1 H_2}{H_3} r_3.$$

Haciendo uso de estas relaciones y de las fórmulas que expresan los vectores de la base recíproca en términos de los vectores r_i (véase p. 1. § 1 de este capítulo), obtendremos

$$r^1 = \frac{1}{H_1^2} r_1, \quad r^2 = \frac{1}{H_2^2} r_2, \quad r^3 = \frac{1}{H_3^2} r_3.$$

2. Expresiones del gradiente y de la derivada direccional para un campo escalar en las coordenadas curvilíneas. Supongamos que en un dominio Ω , donde vienen introducidas las coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3 , está definido un campo escalar $u(M)$. En estas condiciones $\text{grad } u$ queda definido en cada punto de Ω y en cada punto del mismo puede calcularse según cualquier dirección e una derivada $\frac{\partial u}{\partial e}$. Tanto

¹⁾ G. Lamé (1795–1870), matemático francés.

el gradiente $\text{grad } u$, como también la derivada direccional en un punto dado M , se referirán a la base r_i, r^i en dicho punto, cuya construcción está escrita en el punto anterior.

1°. *Expresión del gradiente de un campo escalar en coordenadas curvilíneas.* Introducidas en el dominio Ω las coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3 , el campo vectorial u será, evidentemente, una función de las variables x^1, x^2, x^3 :

$$u = u(x^1, x^2, x^3).$$

Esta función puede ser considerada como resultado de la superposición de la función $u(x, y, z)$ de las variables x, y, z y de las funciones (6.58). Por eso, con el objeto de calcular las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, podemos aprovechar la regla de diferenciación de una función compuesta. Designando $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ con u_i , obtendremos

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x^i}. \quad (6.63)$$

Por cuanto $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ son coordenadas del vector $\text{grad } u$ en la base i, j, k , ligada con el sistema $Oxyz$, y ya que $\frac{\partial x}{\partial x^i}, \frac{\partial y}{\partial x^i}, \frac{\partial z}{\partial x^i}$ representan coordenadas del vector r_i , entonces, evidentemente, la correlación (6.53) puede reescribirse en la siguiente forma

$$u_i = r_i \text{grad } u. \quad (6.64)$$

Sirviéndonos de la fórmula de Gibbs (véanse (6.6) de este capítulo) para el vector $\text{grad } u$ y de la fórmula (6.64), obtendremos

$$\text{grad } u = (r_i \text{grad } u) r^i = u_i r^i.$$

Así pues, el gradiente del campo escalar u en las coordenadas curvilíneas tiene por expresión

$$\text{grad } u = u_i r^i \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i} \right). \quad (6.65)$$

En la práctica se encuentra frecuentemente el caso de un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas. En el punto antecedente se ha obtenido (véase p. 3°) la expresión para los vectores r^i de la base recíproca para el sistema ortogonal. Haciendo uso de estas expresiones y de la fórmula (6.65), hallemos para $\text{grad } u$ en las coordenadas ortogonales la siguiente fórmula

$$\text{grad } u = \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial u}{\partial x^1} r_1 + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial u}{\partial x^2} r_2 + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial u}{\partial x^3} r_3. \quad (6.66)$$

A la par con la base ortogonal r_i , se examina una base ortonormal $e_i = r_i^i H_i$. Es fácil ver que en la base e_i la expresión para grad u tiene la forma siguiente

$$\text{grad } u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial x^1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial x^2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial x^3} e_3. \quad (6.67)$$

2°. *Expresión de la derivada del campo escalar u (M) según la dirección de e en las coordenadas curvilíneas.* Sean e^i las coordenadas contravariantes del vector unidad e en la base r_i , de suerte que

$$e = e^h r_h.$$

Para la derivada $\frac{\partial u}{\partial e}$ hemos obtenido en el p.2, § 2 de este capítulo la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = e \cdot \text{grad } u$$

(véase la fórmula (6.40)). Al sustituir en esta fórmula la expresión para e en la base r_i y la fórmula (6.65) para grad u , obtendremos

$$\frac{\partial u}{\partial e} = (e^h r_h) (u_i r^i) = e^a u_i (r_h r^i) = e^h u_i \delta_k^i = u_i e^i.$$

Por consiguiente, la derivada del campo escalar u según la dirección e se expresa en las coordenadas curvilíneas del modo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = u_i e^i. \quad (6.68)$$

3. **Expresiones de la divergencia, del rotor y de la derivada direccional para un campo vectorial en las coordenadas curvilíneas.** Supongamos que sobre un dominio Ω , en el que están introducidas las coordenadas curvilíneas, viene dado un campo vectorial diferenciable p (M). En estas condiciones la divergencia y el rotor del campo p están definidos en cada punto del dominio Ω , y en cada punto del mismo puede calcularse una derivada $\frac{\partial p}{\partial e}$ según cualquier dirección de e . La divergencia, el rotor y la derivada direccional en un punto dado M se referirán a la base r_i , r^i en dicho punto.

1°. *Expresión de la divergencia de un campo vectorial en las coordenadas curvilíneas.* Introducidas en el dominio Ω las coordenadas curvilíneas x^1, x^2, x^3 , el campo vectorial p será, evidentemente, una función de las variables x^1, x^2, x^3 :

$$p = p(x^1, x^2, x^3).$$

Esta función puede considerarse como resultado de la superposición de la función $p(x, y, z)$ y de la función (6.58). Por eso, para el

cálculo de las derivadas $\frac{\partial p}{\partial x^i}$, podemos aplicar la regla de diferenciación de una función compuesta. Designando $\frac{\partial p}{\partial x^i}$ con p_i ,

obtendremos

$$p_i = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^i} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x^i} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x^i}. \quad (6.69)$$

Por cuanto $\frac{\partial p}{\partial x} = A_i$, $\frac{\partial p}{\partial y} = A_j$, $\frac{\partial p}{\partial z} = A_k$, donde A es un operador lineal definido por la igualdad $\Delta p = A \Delta r + o(|\Delta r|)$ (véase p. 3, § 2 de este capítulo), entonces, de las relaciones (6.69) obtenemos, teniendo presentes las propiedades del operador lineal:

$$p_i = A \left(\frac{\partial x}{\partial x^i} i + \frac{\partial y}{\partial x^i} j + \frac{\partial z}{\partial x^i} k \right) = A r_i. \quad (6.70)$$

Por definición, $\operatorname{div} p = \operatorname{div} A = r^i A r_i$. Por eso, de acuerdo con la fórmula (6.70), la divergencia del campo vectorial p (M) en el sistema de coordenadas curvilíneas puede calcularse según la fórmula

$$\operatorname{div} p = r^i p_i \left(p_i = \frac{\partial p}{\partial x^i} \right). \quad (6.71)$$

Hallamos la expresión de la divergencia para el caso de un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas. Empleando la expresión para los vectores r^i de la base recíproca para las coordenadas curvilíneas ortogonales y la fórmula (6.71), obtenemos

$$\operatorname{div} p = \frac{1}{H_1^2} p_1 r_1 + \frac{1}{H_2^2} p_2 r_2 + \frac{1}{H_3^2} p_3 r_3 \left(p_i = \frac{\partial p}{\partial x^i} \right). \quad (6.72)$$

La fórmula (6.72) puede ser escrita también en una forma diferente. Denotemos con P^i las coordenadas del campo p en la base ortonormal $e_i = \frac{r_i}{H_i}$. Entonces, tras una serie de transformaciones, la expresión (6.72) para $\operatorname{div} p$ adquiere una forma

$$\operatorname{div} p = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (P^1 H_2 H_3)}{\partial x^1} + \frac{\partial (P^2 H_3 H_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial (P^3 H_1 H_2)}{\partial x^3} \right]. \quad (6.73)$$

2°. *Expresión del rotor de un campo vectorial en las coordenadas curvilíneas.* Por definición, $\operatorname{rot} p = \operatorname{rot} A = [r^i A r_i]$. Por eso, de acuerdo con la fórmula (6.70), obtenemos

$$\operatorname{rot} p = [r^i p_i] \left(p_i = \frac{\partial p}{\partial x^i} \right). \quad (6.74)$$

Hallemos la expresión del rotor en un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas. Sirviéndonos de la expresión para los vectores r^i de la base recíproca para el sistema ortogonal y de la fórmula (6.74), obtenemos

$$\operatorname{rot} p = \frac{1}{H_1^2} [r_1 p_1] + \frac{1}{H_2^2} [r_2 p_2] + \frac{1}{H_3^2} [r_3 p_3] \left(p_i = \frac{\partial p}{\partial x^i} \right). \quad (6.75)$$

1) En el segundo miembro de esta fórmula la sumación respecto del índice i no se realiza.

En la base ortonormal $e_i = \frac{r_i}{H_i}$ el rotor del campo vectorial \mathbf{p} tiene por sus coordenadas

$$\left\{ \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial (P^3 H_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial (P^2 H_2)}{\partial x^3} \right], \frac{1}{H_3 H_1} \left[\frac{\partial (P^1 H_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial (P^3 H_3)}{\partial x^1} \right], \right. \\ \left. \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (P^2 H_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial (P^1 H_1)}{\partial x^2} \right] \right\}. \quad (6.76)$$

3°. *Expresión para la derivada direccional del campo vectorial en las coordenadas curvilineas.* Hagamos uso de la fórmula

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial e} = A\mathbf{e}, \quad (6.46)$$

obtenida en el p.3, § 2 de este capítulo. Sea $e = e^i r_i$. De la fórmula (6.46) obtenemos, teniendo presentes las propiedades del operador:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial e} = e^i A r_i.$$

Por cuanto $A r_i = p_i$, donde $p_i = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i}$, obtenemos la siguiente expresión para la derivada del campo vectorial \mathbf{p} según la dirección de e :

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial e} = e^i p_i. \quad (6.77)$$

4. *Expresión del operador de Laplace en las coordenadas curvilineas ortogonales.* Definimos el operador de Laplace Δu como una operación reiterada $\text{div grad } u$. Aprovechando las expresiones (6.67) y (6.73) para el gradiente y la divergencia en las coordenadas curvilineas ortogonales, obtendremos una expresión para el operador de Laplace.

En el caso que se considera como campo vectorial \mathbf{p} , cuya divergencia ha de ser calculada, interviene el campo $\text{grad } u$. Al sustituir (6.67) en (6.73), obtendremos

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial x^2} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial x^3} \right) \right]. \quad (6.78)$$

5. *Expresión de las operaciones principales de la teoría del campo en los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.*

1°. *Sistema de coordenadas cilíndricas.* En virtud de los resultados obtenidos en 1º, p.1, § 3, los parámetros de Lamé para las coordenadas cilíndricas tienen por expresión

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1$$

En tal caso, de las fórmulas (6.67), (6.73), (6.76) y (6.78) se desprenden las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \text{div } \mathbf{p} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho P_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}, \\ \text{rot } \mathbf{p} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial P_\rho}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho P_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \\ \Delta u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

2°. *Sistema de coordenadas esféricas.* En este caso los parámetros de Lamé tienen por expresión

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho \operatorname{sen} \theta, \quad H_3 = \rho.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \\ \text{div } \mathbf{p} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 P_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta P_\theta), \\ \text{rot } \mathbf{p} &= \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial (\operatorname{sen} \theta P_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial P_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\rho + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial P_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho P_\varphi)}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho P_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi, \\ \Delta u &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Como conclusión de este capítulo aducimos el sumario de fórmulas que ligan las operaciones de cálculo del gradiente, de la divergencia y del rotor con las operaciones algebraicas:

- 1°. $\text{grad } (u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v.$
- 2°. $\text{grad } (u \cdot v) = u \text{ grad } v + v \text{ grad } u.$
- 3°. $\text{grad } \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2} \quad (v \neq 0).$
- 4°. $\text{div } (\mathbf{p} \pm \mathbf{q}) = \text{div } \mathbf{p} \pm \text{div } \mathbf{q}.$
- 5°. $\text{div } (u \mathbf{p}) = \mathbf{p} \text{ grad } u + u \text{ div } \mathbf{p}.$
- 6°. $\text{div } [\mathbf{p} \mathbf{q}] = \mathbf{q} \text{ rot } \mathbf{p} - \mathbf{p} \text{ rot } \mathbf{q}.$
- 7°. $\text{rot } |\mathbf{p} \pm \mathbf{q}| = \text{rot } \mathbf{p} \pm \text{rot } \mathbf{q}.$
- 8°. $\text{rot } (u \mathbf{p}) = u \text{ rot } \mathbf{p} - [\mathbf{p} \text{ grad } u].$

El lector mismo puede convencerse de la validez de estas fórmulas.

NOTAS CONCLUSIVAS. En este capítulo hicimos conocimiento con las operaciones principales de la teoría del campo sin apoyarnos en representaciones físicas, puesto que nos servía de objetivo la construcción del aparato matemático. En el capítulo siguiente obtendremos una serie de importantes relaciones integrales que ligan algunas de las operaciones de la teoría del campo. Estas relaciones nos permitirán señalar la interpretación física de las nociones y operaciones introducidas en el presente capítulo.

FÓRMULAS DE GREEN, STOKES Y OSTROGRADSKI

En este capítulo obtendremos fórmulas importantes que son de gran papel en diferentes aplicaciones y, en particular, en la teoría del campo. Estas fórmulas representan, en un sentido determinado, generalizaciones para el caso multidimensional de la fórmula de Newton—Leibniz elaborada para las integrales unidimensionales.

§ 1. Fórmula de Green¹⁾

1. Formulación del teorema fundamental. Sea D un dominio finito, múltiplemente conexo, en el caso general, sobre un plano Oxy con la frontera suave a trozos L^2). El dominio D con la frontera L juntaada se denotará con \overline{D} . Resulta válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 7.1. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas en D y tienen derivadas parciales continuas de primer orden en D . Si existen integrales impropias, extendidas al dominio D , de cada una de las derivadas parciales de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ ³⁾, queda válida una relación*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy, \quad (7.1)$$

llamada fórmula de Green. En este caso la integral que figura en el segundo miembro de (7.1) representa una suma de integrales a lo largo de los componentes conexos de la frontera L , donde se marca tal dirección del recorrido que el dominio D quede por la izquierda.

Demostremos la fórmula de Green primero para una clase de dominios especial, pero suficientemente amplia. A continuación enunciemos una serie de afirmaciones auxiliares que nos harán falta para demostrar el teorema formulado.

¹⁾ G. Green (1793—1841), matemático inglés.

²⁾ La frontera L se denomina suave a trozos, si se compone de un número finito de curvas suaves. Si la frontera L se compone de un número finito de curvas cerradas suaves a trozos L_i , el dominio conexo D se llama, de ordinario, múltiplemente conexo, y las curvas L_i , reciben el nombre de componentes conexos de la frontera.

³⁾ Por cuanto las derivadas parciales de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ existen sólo en el dominio abierto D , las integrales citadas son impropias. Si suponemos complementariamente que las dichas derivadas parciales son continuas en \overline{D} , las integrales en consideración se convierten en las propias

2. **Demostración de la fórmula de Green para una clase especial de dominios.** Sea D un dominio simplemente conexo con la frontera suave a trozos L . Convengamos en considerar que cada recta paralela a cualquier eje de coordenadas corta la frontera L en dos puntos a lo sumo. Los dominios de tal índole se llamarán *dominios del tipo K* .

Por hipótesis, existen integrales impropias de las derivadas parciales de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$. Esto significa que para cual-

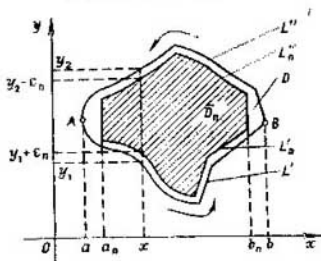


Fig. 7.1.

quier sistema de dominios $\{D_n\}$, que agotan monótonamente el dominio D , se verifica, por ejemplo, una relación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

(las relaciones análogas son válidas también para otras derivadas parciales de las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$).

Describamos la construcción de un sistema especial de dominios $\{D_n\}$ que agotan monótonamente un dominio del tipo K . Dicho sistema lo necesitaremos en la demostración de la fórmula de Green para los dominios del tipo citado.

Supongamos que un segmento $[a, b]$ del eje Ox representa una proyección sobre dicho eje del dominio \bar{D} . Tracemos por los puntos a y b unas rectas paralelas al eje Oy . Cada una de estas dos rectas se interseca con la frontera L en un solo punto. Estos dos puntos A y B de intersección de las citadas rectas con la frontera L (fig. 7.1) dividen L en dos curvas L' y L'' , que representan, obviamente, las gráficas de las funciones respectivas $y_1(x)$ e $y_2(x)$, continuas y diferenciables a trozos sobre el segmento $[a, b]$. Notemos que (fig. 7.1) $y_1(x) \leq y_2(x)$ (la igualdad tiene lugar sólo para $x = a$ y $x = b$).

Examinemos, ahora, una sucesión de segmentos $[a_n, b_n]$ de tal índole que sea $a < a_n < b_n < b$, $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, cuando $n \rightarrow \infty$. Admitamos, además, que el segmento $[a_n, b_n]$ está contenido en el

segmento $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, cualquiera que sea n . Elijamos un número $\varepsilon_n > 0$ de un modo tal que las gráficas L'_n y L''_n de las funciones $y_1(x) + \varepsilon_n$ e $y_2(x) - \varepsilon_n$ estén dispuestas en el dominio D y no se intersequen.

De frontera del dominio \bar{D}_n sirve una curva compuesta por las líneas L'_n y L''_n y por los segmentos de las rectas verticales que pasan por los puntos a_n y b_n (fig. 7.1). El dominio \bar{D}_{n+1} se construye del modo análogo, pero en lugar del segmento $[a_n, b_n]$ se toma el segmento $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, y el número $\varepsilon_{n+1} > 0$ se elige de tal modo que sea inferior a ε_n . Es evidente que si $\varepsilon_n \rightarrow 0$, el sistema construido de dominios $\{\bar{D}_n\}$ agota monótonamente el dominio D . Demostremos la siguiente afirmación.

Teorema 7.2. *Supongamos que en un dominio del tipo K las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.1. Entonces, para dicho dominio y para las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ es válida la fórmula de Green.*

DEMOSTRACION. Basta convencerse de la validez de las igualdades

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q dy, \quad - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P dx. \quad (7.2)$$

Por cuanto las igualdades mencionadas se demuestran de un modo igual, aduzcamos aquí sólo la demostración de la segunda igualdad.

Veamos la integral doble

$$\iint_{\bar{D}_n} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (7.3)$$

Para el dominio \bar{D}_n y para la función subintegral $\frac{\partial P}{\partial y}$ se cumplen en la integral (7.3) todas las condiciones, en las cuales es vigente la fórmula de integración reiterada. De acuerdo con esta última, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{D}_n} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{b_n}^{b_n} dx \int_{y_1(x)+\varepsilon_n}^{y_2(x)-\varepsilon_n} \frac{\partial P}{\partial y} dy - \\ &= \int_{a_n}^{b_n} P(x, y_2(x) - \varepsilon_n) dx - \int_{a_n}^{b_n} P(x, y_1(x) + \varepsilon_n) dx. \end{aligned} \quad (7.4)$$

El primer miembro de las relaciones (7.4) tiene, para $n \rightarrow \infty$, el límite que es igual a la integral $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$. En virtud de que la función $P(x, y)$ es uniformemente continua en el dominio cerrado

\bar{D} , cada uno de los sumandos en el segundo miembro de (7.4) tiene, cuando $n \rightarrow \infty$, un límite que es igual a $\int_a^b P(x, y_2(x)) dx$ para el primer sumando, y a $\int_b^a P(x, y_1(x)) dx$, para el segundo. La primera de estas dos integrales representa, para el sentido del recorrido de la frontera expuesto en la fig. 7.1, una integral curvilínea

$$-\int_{L^a} P(x, y) dx,$$

y la segunda, una integral curvilínea

$$\int_{L^b} P(x, y) dx.$$

Vemos que el segundo miembro de las relaciones (7.4) tiene, para $n \rightarrow \infty$, el límite igual a

$$-\int_L P(x, y) dx.$$

De este modo, la segunda de las fórmulas (7.2) queda demostrada. La validez de la primera de las fórmulas (7.2) se establece de un modo igual (hace falta proyectar \bar{D} sobre el eje Oy y repetir los razonamientos aducidos). El teorema está demostrado.

3. Notación invariante de la fórmula de Green. Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.1 en un dominio conexo D con la frontera suave a trozos L . Definamos en el dominio $\bar{D} = D + L$ un campo vectorial p , cuyas coordenadas en el sistema cartesiano de coordenadas son $P(x, y)$ y $Q(x, y)$. Es evidente que en las condiciones impuestas en las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ el campo p será continuo en el dominio \bar{D} , y continuamente diferenciable, en D . Hallemos el rotor de este campo vectorial. Haciendo uso de la expresión para $\text{rot } p$ en la base ortonormal i, j, k , obtenemos

$$\text{rot } p = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$$

A partir de esta relación resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = k \text{ rot } p. \quad (7.5)$$

OBSERVACIÓN 1 Pasemos en el plano Oxy a una nueva base ortonormal i', j' , y al nuevo sistema cartesiano de coordenadas $Ox'y'$, liga-

do con la base citada. Supongamos que en esta nueva base las coordenadas del campo vectorial \mathbf{p} son P' y Q' . En el nuevo sistema de coordenadas las funciones P' y Q' satisfacen, evidentemente, las condiciones del teorema 7.1. Además, puesto que en la nueva base

$\text{rot } \mathbf{p} = \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'} \right) \mathbf{k}$, tenemos

$$\frac{\partial Q'}{\partial x'} - \frac{\partial P'}{\partial y'} = k \text{ rot } \mathbf{p}. \quad (7.6)$$

Por cuanto el producto escalar $k \text{ rot } \mathbf{p}$ es un invariante, de (7.5) y (7.6) proviene que la expresión $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ no cambia el valor, ni tampoco la forma, al pasar a la nueva base ortonormal, es decir, representa también un invariante.

Apoyándonos en esta observación, podemos llegar a la siguiente deducción importante: *la integral en el primer miembro de la fórmula de Green (7.1) lleva un carácter invariante: su valor y su forma no cambian, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas.* En efecto, en tal transformación de las coordenadas el valor absoluto del jacobiano de transformación es igual a uno. Entre tanto, según la observación, la expresión subintegral no cambia su valor, ni tampoco la forma.

Recurramos ahora a la integral

$$\int_L P dx + Q dy, \quad (7.7)$$

que figura en el segundo miembro de la fórmula de Green. Cerciorémonos de que *esta integral es también de carácter invariante: su valor y forma no varían, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas.*

Sea \mathbf{t} un vector unidad de la tangente en los puntos de la frontera L , cuya dirección se encuentra concordada con el sentido del recorrido en L , y sean $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$, las coordenadas del vector \mathbf{t} . Elijamos, a título de parámetro en L , la longitud del arco l , con la particularidad de que en cada componente conexo de la frontera el crecimiento del parámetro l está concordado con el sentido del recorrido en este componente. En las condiciones, impuestas en L , la función $t(l)$ será continua a trozos. Bajo las condiciones enunciadas más arriba, el campo vectorial \mathbf{p} será continuo en L , mientras que sus coordenadas P y Q representan funciones continuas de l .

Notemos que, elegidos el sentido del recorrido y el parámetro en la curva L , la integral curvilínea de segunda especie (7.7) se transforma en una integral curvilínea de primera especie. En este caso P y Q se calculan en los puntos de L , y $dx = \cos \alpha dl$, $dy = \sin \alpha dl$.

De este modo,

$$\oint_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl = \int_L pt dl. \quad (7.8)$$

La relación (7.8) muestra que la integral (7.7) es realmente de carácter invariante: el producto escalar pt es un invariante y la parametrización con ayuda de la longitud del arco no está ligada con el sistema de coordenadas. Además, en el nuevo sistema cartesiano de coordenadas $Ox'y'$ tenemos

$$pt dl = (P' \cos \alpha' + Q' \sin \alpha') dl = P' dx' + Q' dy',$$

y, por eso,

$$P dx + Q dy = P' dx' + Q' dy'.$$

Así pues, nos hemos convencido de que la integral (7.7) lleva un carácter invariante: su valor y su forma no varían al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas.

Los razonamientos aducidos más arriba permiten atribuir a la fórmula de Green (7.1) la siguiente *forma invariante*:

$$\iint_D k \operatorname{rot} p d\sigma = \oint_L pt dl, \quad (7.9)$$

donde $d\sigma$ denota un elemento de área del dominio D .

OBSERVACIÓN 2 Una integral

$$\oint_L pt dl$$

se llama, de ordinario, *circulación del campo vectorial p a lo largo de la curva L* .

Del teorema 7.2 y de las deducciones de este punto podemos extraer un corolario importante.

Corolario. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.1 en un dominio finito D con la frontera suave a trozos L . Si el dominio D puede ser dividido en un número finito de subdominios D_h con fronteras suaves a trozos L_h (fig. 7.2) y si en tal caso cada*

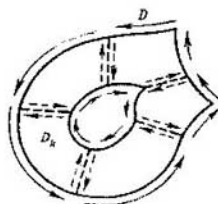


Fig. 7.2.

uno de D_h representa un dominio del tipo K con relación a cierto sistema cartesiano de coordenadas, entonces para el dominio D y para las funciones $P(x, y)$, y $Q(x, y)$ resulta ser válida la fórmula de Green.

La validez del corolario puede confirmarse mediante los razonamientos siguientes. Está claro que la fórmula de Green es válida para cada uno de los subdominios D_h . Esto se predetermina por el carácter invariante de la fórmula y por el teorema 7.2 (en cierto sistema de coordenadas D_h será un dominio del tipo K).

Luego, es obvio que la suma de integrales $\iint_{D_h} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ en los primeros miembros de las fórmulas de Green, extendidas al dominio D_h , representa una integral $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$. Entretanto, la suma de integrales curvilíneas $\int_{l_k} P dx + Q dy$ en los segundos miembros de las fórmulas de Green a lo largo de las fronteras L_h de los dominios D_h proporciona una integral $\int_L P dx + Q dy$, pues las integrales a lo largo de los tramos comunes de la frontera de los dominios D_h se reducirán, puesto que dichos tramos en los dominios vecinos D_h se recorren en los sentidos opuestos (véase fig. 7.2 para la explicación).

OBSERVACIÓN 3 Un dominio conexo finito arbitrario D con la frontera suave a trozos L no puede dividirse, en el caso general, en un número finito de dominios D_h del tipo mencionado más arriba. No obstante, en cada dominio finito D con la frontera suave a trozos puede eliminarse una parte (tan pequeña como se quiera) tal que el dominio restante ya se puede dividir de un modo adecuado. En este caso el aporte en los miembros primero y segundo de la fórmula de Green, correspondiente a la parte eliminada del dominio D , será, naturalmente, tan pequeño como se quiera. Esta idea yace en la base de la demostración de la fórmula de Green en el caso general.

En el punto siguiente demostraremos una serie de proposiciones auxiliares, con ayuda de las cuales se establecerá, mediante el método descrito, la fórmula de Green en el caso general.

4. Proposiciones auxiliares. Sea L una curva plana suave a trozos sin puntos múltiples, en la cual está elegida, a título de parámetro, la longitud del arco l .

Se denominará *entorno de un punto interior P* en la curva L a cualquier conjunto abierto conexo (no coincidente con toda la curva L) de puntos de dicha curva que contiene el punto P . Para un punto de frontera de L se introduce la noción de *semientorno*¹⁾. La longitud

¹⁾ Si P es un punto de frontera de la curva L , y Q es cualquier otro punto de L , el conjunto de todos los puntos de la curva L (encerrados entre P y Q) que incluye punto P y no incluye Q , se llamará *semientorno* del punto P .

de un entorno (o de un semientorno) se denominará dimensión del mismo.

Un punto interior P de la curva L divide cada entorno suyo en dos semientornos. Un entorno del punto P se llamará λ -entorno, si cada uno de los semientornos es de longitud λ .

Lema 1. Sea L una curva finita suave sin puntos múltiples y sean A y B los puntos de frontera de esta curva, mientras que \bar{L} es una parte conexas de la curva L , la cual se compone íntegramente, junto con sus extremos \bar{A} y \bar{B} , de los puntos interiores de la curva L (fig. 7.3)¹⁾. Pueden indicarse dos números positivos λ y δ tales que la cota superior exacta de los ángulos que forman las tangentes en los puntos del λ -entorno de cualquier punto P de la curva \bar{L} ²⁾ con la tangente en el punto P sea inferior a $\pi/8$, y la distancia desde el punto P hasta los puntos de la curva L dispuestos fuera del λ -entorno, no menos de δ ³⁾.

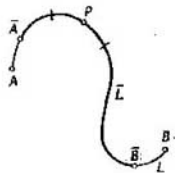


Fig. 7.3.

DEMOSTRACIÓN. Cerciorémonos de que existe un $\lambda > 0$ que satisface las condiciones del lema. Notemos primero que, cualquiera que sea $\alpha > 0$, para todo punto P puede indicarse un λ -entorno ($\lambda > 0$), en cuyos márgenes la cota superior de los ángulos que forman las tangentes en los puntos de este λ -entorno con la tangente en el punto P es menor que α . Esto se deduce de la continuidad de las tangentes a la curva L .

Se trata de λ universal, apto para todos los puntos de la curva \bar{L} .

Admitamos que no existe $\lambda > 0$ que satisfaga las condiciones del lema. Entonces, para cualquier $\lambda_n = 1/n$, en \bar{L} existen tales puntos P_n y Q_n que la longitud del arco $P_n Q_n$ sea inferior a λ_n , y el ángulo entre las tangentes en estos puntos, no menos de un $\alpha < \pi/8$ fijo.

Seleccionemos en la sucesión $\{P_n\}$ una subsucesión $\{P_{n_h}\}$ que sea convergente hacia el punto P de la curva L . Es evidente que una sucesión $\{Q_{n_h}\}$ también converge hacia P . Examinemos tal λ -entorno del punto P , en el cual la cota superior exacta de los ángulos entre las tangentes en los puntos del entorno y en el punto P es menos de $\alpha/2$.

¹⁾ Una curva puede ser cerrada también. En este caso \bar{L} puede coincidir con L . Si L es una curva cerrada dotada de un punto anguloso, \bar{L} será cualquier parte conexas cerrada de L que no contiene este punto anguloso.

²⁾ El entorno de un punto de la curva \bar{L} se considera como entorno de dicho punto en la curva L .

³⁾ Es evidente que $\lambda \geq \delta$.

Está claro que el ángulo entre las tangentes en cualesquiera dos puntos del λ -entorno citado del punto P es menos de α . Siendo n_n suficientemente grande, los puntos P_{n_n} y Q_{n_n} caerán en el λ -entorno elegido del punto P , por lo cual el ángulo entre las tangentes en estos puntos ha de ser menos de α , en tanto que la elección de estos puntos predetermina dicho ángulo superior o igual a α . Esta contradicción refuta la admisión de que no existe un $\lambda > 0$ que satisfaga las condiciones del lema. Notemos que el λ requerido es inferior a cada uno de los arcos $A\bar{A}$ y $B\bar{B}$.

Demostremos ahora que existe un $\delta > 0$ que satisface las condiciones del lema.

Admitamos que no hay $\delta > 0$ que satisfaga las condiciones del lema. Entonces, cualquiera que sea $\delta_n = 1/n$, pueden indicarse en \bar{L} y L tales puntos respectivos P_n y Q_n que la longitud del arco $P_n Q_n$ sea superior o igual a λ ¹⁾, mientras que la cuerda $P_n Q_n$ sea de longitud inferior a δ_n . Seleccionemos en la sucesión $\{P_n\}$ una subsucesión que converja hacia el punto P de la curva \bar{L} y examinemos una subsucesión correspondiente de la sucesión $\{Q_n\}$. En esta última subsucesión seleccionemos una subsucesión $\{Q_{n_k}\}$ que converja al punto Q de la curva L . Está claro que la subsucesión $\{P_{n_k}\}$ converge hacia P . Por cuanto, en virtud de la elección de los puntos P_{n_k} y Q_{n_k} , la longitud del arco $P_{n_k} Q_{n_k}$ es superior o igual a λ , la longitud del arco PQ es también superior o igual a λ . Debido a que las longitudes de las cuerdas $P_{n_k} Q_{n_k}$ tienden hacia cero, la longitud de la cuerda PQ será igual a cero, es decir, el punto P coincidirá con el punto Q , representando de esta manera un punto múltiple de la curva L sin puntos múltiples. La contradicción obtenida confirma la posibilidad de elegir un $\delta > 0$ requerido. La demostración del lema queda finalizada.

Corolario 1. *Supongamos que las curvas L y \bar{L} satisfacen las condiciones del lema. Puede, pues, indicarse tal número 2λ que cualquier arco de la curva \bar{L} de longitud inferior a 2λ se proyecte unívocamente sobre uno de los ejes coordenados del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares Oxy .*

En efecto, tomemos a título de λ el número aducido en el lema 1. Cualquier arco de la curva \bar{L} de longitud inferior a 2λ está contenido en el λ -entorno de cierto punto P en la curva L . Una tangente en el punto P forma con uno de los ejes Ox ó Oy un ángulo inferior o igual a $\pi/4$. Entonces, evidentemente, una tangente en cualquier punto del arco en consideración forma con la tangente citada un ángulo inferior a $\pi/2$, por lo cual este arco se proyecta unívocamente sobre

¹⁾ La existencia de tal λ ya se ha establecido en la primera parte de la demostración del teorema.

el eje mencionado (si la proyección no fuera unívoca, tendríamos unas tangentes que formarían con el eje indicado un ángulo igual a $\pi/2$).

Corolario 2. *Supongamos que las curvas L y \bar{L} satisfacen las condiciones del lema 1. Entonces, puede indicarse tal número $2\lambda > 0$, que cualquier arco de la curva \bar{L} de longitud inferior a 2λ se proyecte unívocamente sobre ambos ejes coordenados de un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares Oxy elegido especialmente para dicho arco.*

Tomemos a título de λ un número mencionado en el lema. Cualquier arco de la curva \bar{L} de longitud inferior a 2λ está contenido en el λ -entorno de cierto punto P de la curva \bar{L} . Elijamos un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares de un modo tal que una tangente en P forme con sus ejes un ángulo de $\pi/4$. Entonces, una tangente en cualquier punto de dicho arco formará con cada uno de los ejes Ox y Oy un ángulo inferior a $\pi/2$, por lo cual dicho arco se proyectará unívocamente sobre cada uno de los ejes. Notemos que los cambios no significantes del sistema elegido de coordenadas no influyen en la posibilidad de que el arco se proyecte unívocamente sobre ambos ejes coordenados.

Lema 2. *Sea Q un cuadrado y sea R un ángulo con vértice en el centro P del cuadrado Q y abertura igual a $2\alpha < \pi/4$. Designemos con Γ una parte de la frontera del cuadrado Q encerrada dentro del ángulo R . Entonces, el ángulo entre cualquier cuerda de la línea Γ (una línea recta que une dos puntos de Γ) y la bisectriz del ángulo R no es inferior a α .*

No damos la demostración de este lema por ser la misma elemental.

Lema 3. *Sea Q un cuadrado y sea L una curva suave sin puntos múltiples que tiene por origen el centro P del cuadrado Q . Supongamos que la cota superior exacta de los ángulos que forman las tangentes a L con una semitangente a L en el punto P es igual a $\bar{\alpha} < \pi/8$. Entonces, L corta la frontera del cuadrado Q en un punto a lo sumo.*

DEMOSTRACION Construyamos un ángulo R con abertura 2α , $\bar{2\alpha} < 2\alpha < \pi/4$, de cuya bisectriz sirve la semitangente a L en el punto P y de vértice, el centro P del cuadrado. Designemos con Γ una parte de la frontera del cuadrado Q encerrada dentro del ángulo R . Evidentemente, la curva L está dispuesta dentro del ángulo R (si L cortara el lado del ángulo R en un punto distinto de P , se encontraría una tangente paralela a este lado, y la misma formaría con la semitangente a L en el punto P un ángulo igual a $\alpha > \bar{\alpha}$, lo que contradiría la hipótesis). Supongamos que L corta Γ en dos puntos M y N . Entonces, se encontraría en L un punto, en el que una tangente sea paralela a la cuerda MN y, de acuerdo con el lema 3, dicha tangente formaría con la semitangente a L en P un ángulo no inferior a $\alpha > \bar{\alpha}$, lo que contradice la hipótesis del lema. Este último, pues, queda demostrado.

Corolario de los lemas 1 y 3. Supongamos que las curvas L y \bar{L} satisfacen las condiciones del lema 1 y que $\delta > 0$ es un número mencionado en dicho lema. Entonces, la curva \bar{L} corta la frontera de cualquier cuadrado Q con centro en un punto arbitrario P de esta curva y con el lado inferior a $\sqrt{2}\delta$ en dos puntos a lo sumo.

Cerciorémonos de que el corolario es verídico. Sea P un punto arbitrario de la curva \bar{L} y sea $\lambda > 0$ un número mencionado en el lema 1. Recurramos al λ -entorno del punto P . Ambos puntos de frontera de este entorno y la parte de \bar{L} dispuesta fuera del λ -entorno se disponen, de acuerdo con el lema 1, fuera de cualquier cuadrado con centro en P y con el lado inferior en longitud a $\sqrt{2}\delta$. Por eso, el

λ -entorno en consideración (y sólo dicho entorno) se interseca con la frontera del cuadrado Q ¹⁾. Por cuanto cada uno de los semientornos del λ -entorno en consideración del punto P satisface las condiciones del lema 3, se pone claro que el λ -entorno cortará la frontera del cuadrado Q en dos puntos a lo sumo.

5. **Partición especial del dominio D con frontera suave a trozos L .** Sea D un dominio finito conexo, cuya frontera L se compone de un número finito de curvas cerradas suaves a trozos y sean P_1, P_2, \dots, P_N los

puntos angulosos de la frontera L . Convengamos en considerar que en un plano está elegido un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares Oxy .

Demos a conocer un método de partición especial del dominio D en subdominios. Las particiones de este tipo nos harán falta en la demostración del teorema 1.

1°. Cerciorémonos de que para cualquier $\varepsilon > 0$ pueden elegirse los cuadrados Q_1, Q_2, \dots, Q_N con centros en los puntos angulosos de la frontera L y lados paralelos a los ejes Ox y Oy (fig. 7.4) de una manera tal que queden cumplidas las siguientes condiciones:

1) La frontera de cada cuadrado Q_i con centro en P_i se interseca con cada una de las dos ramas de la frontera L , que tienen por origen P_i ²⁾ exactamente en un punto (véase fig. 7.4). Estos puntos son los

¹⁾ Aquí se aprovecha el teorema de Jordan que afirma lo siguiente: si dos puntos de una curva continua L son puntos interior y exterior del dominio D , una curva L cortará la frontera de D .

²⁾ Un λ -entorno suficientemente pequeño del punto anguloso P_i se compone de dos ramas suaves que tienen dicho punto como su origen.

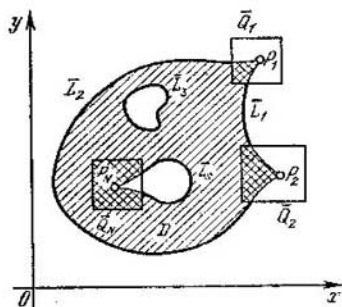


Fig. 7.4.

únicos puntos comunes de la frontera del cuadrado Q_i con la frontera L .

2) La suma de áreas de los cuadrados Q_i será inferior a ε ; la suma de longitudes de las partes de la frontera L dispuestas dentro de los cuadrados \bar{Q}_i también será inferior a ε . Es evidente que en este caso la suma de perímetros de los cuadrados \bar{Q}_i no sobrepasa $A\varepsilon$, donde A es una constante.

La posibilidad de elegir los cuadrados \bar{Q}_i precisamente de un modo descrito más arriba se confirma por los siguientes razonamientos.

Veamos los λ -entornos de los puntos angulosos que obedecen a los siguientes requisitos:

1. Dichos λ -entornos no se intersecan.
2. La suma de longitudes de todos los λ -entornos es menos de ε .
3. La cota superior exacta de los ángulos que forman las tangentes de cada uno de los semientornos del λ -entorno con la semitangente correspondiente en un punto anguloso es menos de $\bar{\alpha} < \pi/8$. Es evidente que la elección de tales λ -entornos de los puntos angulosos es bien posible. Notemos que cada uno de los semientornos de los λ -entornos elegidos satisface las condiciones del lema 3. Por eso, cada uno de estos semientornos se interseca a lo sumo en un solo punto con la frontera de cualquier cuadrado que tiene por su centro el correspondiente punto anguloso.

Definamos para cada punto anguloso P_i un número $\delta_i > 0$ que sea igual a la cota inferior exacta de las distancias desde P_i hasta la parte de L obtenida por eliminación en L del λ -entorno del punto P_i .

Designemos $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}$. Está claro que cualquier cuadrado Q_i con centro en P_i , cuyo lado es inferior en longitud a $\sqrt{2}\delta$, satisface la condición 1) enunciada anteriormente, pues, elegido del modo aducido el cuadrado Q_i , para cada uno de los semientornos del punto P_i quedan cumplidas las condiciones del lema 4, y, además, los puntos de frontera del semientorno se disponen fuera del cuadrado Q_i (precisamente a ello se debe la unicidad del punto de intersección del semientorno con la frontera del cuadrado). Está claro también que haciendo disminuir los lados de los cuadrados, podemos conseguir que la suma de sus áreas sea inferior a ε . Evidentemente la suma de longitudes de las partes de la frontera L dispuestas dentro de los cuadrados \bar{Q}_i será inferior a ε a cuenta de la elección especial de los λ -entornos de los puntos angulosos. De este modo, la condición 2) también se cumple con la elección indicada de los cuadrados Q_i .

2°. Eliminemos en L aquellas partes que se encuentran dentro de los cuadrados \bar{Q}_i . La parte restante de L representa un juego de curvas suaves \bar{L}_i sin puntos comunes; algunas de \bar{L}_i representan en este caso curvas suaves cerradas. Notemos que cada curva no cerrada L_i se compone de puntos interiores de la curva suave L_i , cuyos puntos de

frontera serán constituidos por los puntos angulosos de L (véase fig. 7.4).

Aprovechemos el lema 1 del punto antecedente para cada una de las curvas \bar{L}_i . Sean λ_i y δ_i^* los números garantizados para \bar{L}_i por dicho lema. El número δ_i^* lo hagamos obedecer en este caso a una exigencia más, considerando que él es menos de la cota inferior de las distancias desde los puntos de \bar{L}_i hasta las demás curvas \bar{L}_k . Denotemos $\lambda = \min \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ y $0 < \delta^* < \min \{\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_N^*\}$, $\delta^* < \sqrt{2}\delta$, donde δ es el número elegido en 1°. Es evidente que $\lambda \geq \delta^*$.

Dividamos cada una de las curvas \bar{L}_i en un número finito de partes de longitud δ^* . Construyamos los cuadrados Q_i cuyos centros se disponen en los puntos de partición de la curva \bar{L}_i y tienen los lados de longitud δ^* , paralelos a los ejes Ox y Oy .

3°. Con ayuda de los cuadrados \bar{Q}_i y Q_i construyamos la partición requerida del dominio D .

1) Eliminemos en D las partes que son comunes con D y los cuadrados Q_i . La parte restante de D se denotará con \bar{D}_e , y la frontera de \bar{D}_e se denotará con \bar{L}_e . La frontera de \bar{L}_e se compone de las curvas \bar{L}_i y de segmentos de unas rectas paralelas a los ejes coordenados.

2) Denotemos con \tilde{Q}_i la parte común del cuadrado Q_i y del dominio \bar{D}_e . Los dominios \tilde{Q}_i dividen el dominio \bar{D}_e en partes simplemente conexas \bar{D}_i ¹⁾, la frontera de cada una de ellas se compone de los segmentos rectilíneos paralelos a los ejes de coordenadas y, quizás, de un segmento rectilíneo que está contenido en una de las curvas \bar{L}_i y que tiene longitud inferior a δ . Por cuanto el citado segmento rectilíneo se proyecta unívocamente sobre uno de los ejes coordenados (la longitud de cada uno de estos segmentos es inferior a $\delta^* < \lambda_i$, y en este caso, de acuerdo con el corolario 1 del lema 1, dicho segmento se proyecta unívocamente sobre uno de los ejes coordenados), entonces, *evidentemente, cualquier dominio \bar{D}_i puede dividirse, mediante unas rectas paralelas a uno de los ejes coordenados, en un número finito de las partes D_k , cada una de las cuales representa o bien un rectángulo, o bien un trapecio curvilíneo*²⁾, degenerado, quizás, en un triángulo curvilíneo.

¹⁾ Un dominio D se llama simplemente conexo, si cualquier curva cerrada suave a trozos sin puntos múltiples, dispuesta en D , limita el dominio, cuyos puntos pertenecen todos a D .

²⁾ Recordemos que se llama trapecio curvilíneo a una figura cuyas bases son paralelas a uno de los ejes coordenados, además, uno de los lados laterales es paralelo al otro eje coordenado y sobre este último se proyecta unívocamente el lado lateral curvilíneo del trapecio.

En la fig. 7.5 se muestra uno de los dominios \bar{D}_i . Con líneas punteadas se señala la partición de \bar{D}_i en las partes D_k .

6. **Demostración del teorema 7.1.** Acabamos de convencernos de que, al eliminar en D las partes dispuestas dentro de los cuadrados \bar{Q}_i , se obtiene un dominio \bar{D}_ε con la frontera L_ε , el cual puede dividirse en un número finito de los dominios del tipo especial D_k .

Demostremos que para el dominio \bar{D}_ε es válida la fórmula de Green. De acuerdo con el corolario en el p. 3 del párrafo dado, para ello basta cerciorarse de que cada uno de los dominios D_k es un dominio del tipo K con relación a cierto sistema cartesiano de coordenadas especialmente elegido.

Si D_k es un rectángulo, a título de sistema requerido interviene, por ejemplo, un sistema de coordenadas en el que uno de los ejes es paralelo a la diagonal de este rectángulo. Sea D_k un trapecio curvilíneo o un triángulo curvilíneo. El método de construcción de los dominios D_k prevé que el lado encorvado de la frontera de D_k satisface las condiciones del lema 1, p. 4 de este párrafo, por lo cual se proyecta unívocamente, con arreglo al corolario 2 del lema citado, sobre ambos ejes coordenados del sistema rectangular de coordenadas cartesianas especialmente elegido. Por cuanto los cambios no significantes en la elección de dicho sistema no perturbau la propiedad mencionada, podemos, obviamente, elegir tal sistema de coordenadas que sobre ambos ejes del mismo también se proyecten unívocamente las partes rectilíneas de la frontera de D_k . Con relación a este sistema de coordenadas D_k será un dominio del tipo K . Así pues, para el dominio D_ε queda válida la fórmula de Green

$$\iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L_\varepsilon} P dx + Q dy. \quad (7.10)$$

El método de construcción de los dominios D_ε estipula que, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, los miembros izquierdo y derecho de la fórmula (7.10) tienen por límites $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ y $\int_L P dx + Q dy$, respectivamente. El teorema 7.1 está demostrado.

¹⁾ Recordemos que los cuadrados \bar{Q}_i se eligen a base de cualquier ε positivo dado de un modo tal que la suma de sus áreas sea inferior a ε , y que la suma de longitudes de las partes de la frontera L dispuestas en \bar{Q}_i , sea también inferior a ε . Está claro que los dominios \bar{D}_ε agotan el dominio D , cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

§ 2. Fórmula de Stokes¹⁾

1. Formulación del teorema fundamental. Sea S una superficie bilateral, completa, limitada y continua a trozos con una frontera suave a trozos L ²⁾.

Se llamará *entorno* de la superficie S a cualquier conjunto abierto Ω que contiene S .

Resulta válido el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 7.3. *Supongamos que en cierto entorno de la superficie S las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces, tiene lugar una relación siguiente:*

$$\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz, \quad (7.11)$$

que se denomina *fórmula de Stokes*. En esta fórmula la integral en el segundo miembro representa una suma de integrales a lo largo de los componentes conexos de la frontera Γ , donde se indica tal dirección del recorrido que, al tener en cuenta la elección del lado de la superficie, la superficie S quede por la izquierda.

Teniendo presente la observación 2, p. 2, § 3, cap. 4 sobre la forma de notación de las integrales de superficie de segunda especie y, por otra parte, las designaciones X, Y, Z para los ángulos formados por la normal a la superficie con los ejes coordenados, la fórmula de Stokes (7.11) puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\int_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right] d\sigma = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz. \quad (7.12)$$

En los puntos que vienen abajo demostraremos una serie de proposiciones que nos harán falta en la demostración del teorema enunciado.

2. Demostración de la fórmula de Stokes para una superficie suave que se proyecta unívocamente sobre tres planos coordenados. Es válido el siguiente teorema.

Teorema 7.4. *Sea S una superficie bilateral simplemente conexa, suave limitada y completa con una frontera suave a trozos Γ . Convengamos en considerar que S se proyecta unívocamente sobre cada uno de los*

¹⁾ G. G. Stokes (1819—1903), matemático y físico inglés.

²⁾ Notemos que una superficie cerrada no tiene frontera.

planos coordenados del sistema $Oxyz$. Supongamos que en cierto entorno de S vienen dadas las funciones P , Q y R que son continuas en dicho entorno y que tienen sobre el mismo derivadas parciales continuas de primer orden. En este caso queda válida la fórmula de Stokes (7.11).

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar, recurramos a la forma (7.12) en que se anota la fórmula de Stokes. Se considerará que los vectores unidad de la normal forman ángulos agudos con los ejes coordenados. Es evidente que el teorema quedará demostrado, si demostramos las igualdades

$$\left. \begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z \right) d\sigma &= \oint_{\Gamma} P dx, \\ \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos X \right) d\sigma &= \oint_{\Gamma} Q dy, \\ \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos X - \frac{\partial R}{\partial x} \cos Y \right) d\sigma &= \oint_{\Gamma} R dz. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Por cuanto las relaciones (7.13) se demuestran de un modo igual, detengámonos en la demostración de la primera de ellas.

Denotemos con I la integral en el primer miembro de la primera de las igualdades (7.13):

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z \right) d\sigma. \quad (7.14)$$

Por hipótesis, la superficie S es suave y se proyecta unívocamente sobre el plano Oxy . Por eso, S representa la gráfica de una función $z = z(x, y)$. En tal caso podemos hallar $\cos Y$ y $\cos Z$, si tomamos en consideración la orientación de las normales unidad con relación a S , de acuerdo con las siguientes fórmulas:

$$\cos Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad (7.15)$$

donde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Haciendo uso de las fórmulas (7.15), escribamos la relación (7.14) del modo siguiente:

$$I = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + q \frac{\partial P}{\partial z} \right) \cos Z d\sigma. \quad (7.16)$$

Sobre la superficie S los valores de la función $P(x, y, z)$ son iguales a $P(x, y, z(x, y))$, razón por la cual obtenemos, según la regla de diferenciación de la función compuesta

$$\frac{d}{dy} [P(x, y, z(x, y))] = \frac{\partial P}{\partial y} + q \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Por eso, la relación (7.16) toma la forma

$$I = - \int_S \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] \cos Z \, d\sigma. \quad (7.17)$$

Sea D la proyección sobre el plano Oxy de la superficie S , y sea L la proyección sobre el mismo plano de la frontera Γ de esta superficie. Es evidente que la integral de superficie en el segundo miembro de (7.17) será igual a una integral doble

$\int_D \int \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] \, dx \, dy$ (véase observación 2, p.2, §3, cap. 5), y, por eso,

$$I = - \int_D \int \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] \, dx \, dy. \quad (7.18)$$

Aplicando a la integral en el segundo miembro de (7.18) la fórmula de Green, obtenemos

$$\int_D \int \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] \, dx \, dy = - \int_L P(x, y, z(x, y)) \, dx. \quad (7.19)$$

Supongamos que un punto $M(x, y, z)$ de la curva Γ se proyecta en el punto $N(x, y)$ de la curva L . Entonces, evidentemente, el valor de la función $P(x, y, z)$ en el punto M de la curva Γ coincide con el de la función $P(x, y, z(x, y))$ en el punto N de la misma curva. Por eso resulta válida la siguiente igualdad

$$\oint_L P(x, y, z(x, y)) \, dx = \oint_\Gamma P(x, y, z) \, dx. \quad (7.20)$$

De las relaciones (7.14), (7.18)–(7.20) se deduce, obviamente, la primera de las igualdades (7.13). La demostración de la segunda y de la tercera de estas igualdades se realiza de un modo análogo, pero se deben examinar esta vez las proyecciones de S sobre los planos Oyz y Oxz , respectivamente. El teorema está demostrado.

3. Notación invariante de la fórmula de Stokes. Supongamos que las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas de primer orden en cierto entorno Ω de la superficie S . Definamos en Ω un campo vectorial \mathbf{p} , cuyas coordenadas en el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares dado son iguales a P, Q, R . Es evidente, que bajo las condiciones impuestas en las funciones P, Q, R , el campo \mathbf{p} será continuo y diferenciable en Ω . Haremos el rotor de este campo. Haciendo uso de la expresión para $\text{rot } \mathbf{p}$ en una base ortonormal $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, obtendremos

$$\text{rot } \mathbf{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (7.21)$$

Elijamos en la superficie S un lado determinado, es decir, señalemos en S un campo continuo de normales unidad \mathbf{n} . Recurriendo a la expresión (7.21) para rot \mathbf{p} , y empleando la designación estándar $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ para las coordenadas del vector unidad de la normal \mathbf{n} a la superficie S , obtendremos

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{p} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z. \quad (7.22)$$

De la relación (7.22) proviene que la integral en el primer miembro de la fórmula de Stokes (7.12) puede ser escrito en la forma

$$\iint_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{p} \, d\sigma. \quad (7.23)$$

Así pues, la integral en el primer miembro de la fórmula (7.12) puede considerarse, siendo elegido un lado determinado de la superficie, como integral de superficie de primera especie (7.23) de la función $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{p}$ definida sobre la superficie S . Por cuanto el producto escalar $\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{p}$ y el elemento de área $d\sigma$ de la superficie S no dependen de la elección del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares en el espacio, al pasar a una nueva base ortonormal i', j', k' , el primer miembro de la fórmula (7.12) no cambiará su valor y forma, es decir, el primer miembro es *invariante* respecto del sistema cartesiano de coordenadas rectangulares en el espacio.

Volvamos ahora a la integral

$$\oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz, \quad (7.24)$$

que figura Γ en el segundo miembro de la fórmula de Stokes.

Cerciorémonos de que *esta integral lleva también un carácter invariante*: su valor y su forma no varían, al pasar al sistema nuevo de coordenadas cartesianas.

Sea \mathbf{t} un vector unidad de la tangente en los puntos de la frontera Γ de la superficie S cuya dirección está concordada con el sentido del recorrido en Γ , y sean $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ las coordenadas del vector \mathbf{t} . Tomemos por parámetro en Γ la longitud del arco l , con la particularidad de que en cada componente conexo de la frontera el crecimiento del parámetro se concuerda con el sentido del recorrido en dicho componente. Bajo las condiciones impuestas en Γ , la función $\mathbf{t}(l)$ será continua a trozos. Por cuanto el campo \mathbf{p} es continuo en Γ , sus coordenadas representan en Γ funciones continuas de l . Observemos que, después de elegir el sentido del recorrido y el parámetro en la curva Γ , la integral curvilínea de segunda especie (7.24) se transforma en una integral curvilínea de primera especie. En tal caso P , Q , y R

se calculan en los puntos de Γ , y $dx = \cos \alpha dl$, $dy = \cos \beta dl$, $dz = \cos \gamma dl$. De este modo,

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl = \oint_{\Gamma} pt dl. \quad (7.25)$$

Las relaciones (7.25) muestran que la integral (7.24) es realmente de carácter invariante: el producto escalar pt es invariante y la parametrización con ayuda de la longitud del arco no está ligada con el sistema de coordenadas.

En el nuevo sistema cartesiano de coordenadas $Ox'y'z'$ tenemos

$$pt dl = (P' \cos \alpha' + Q' \cos \beta' + R' \cos \gamma') dl = P' dx' + Q' dy' + R' dz'.$$

Por eso,

$$P dx + Q dy + R dz = P' dx' + Q' dy' + R' dz'.$$

Indiquemos que la integral

$$\oint_{\Gamma} pt dl$$

se llama, de ordinario, *circulación del campo vectorial p a lo largo de la curva Γ* .

Los razonamientos aducidos permiten atribuir a la fórmula de Stokes (7.11) (ó a (7.12)) la siguiente forma invariante:

$$\iint_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{p} d\sigma = \oint_{\Gamma} pt dl. \quad (7.26)$$

4. Demostración del teorema 7.3. Demostremos la siguiente afirmación-auxiliar.

Lema. *Sea S una superficie suave bilateral, completa y limitada con una frontera suave a trozos Γ^1 . Existe tal $\delta > 0$ que cualquier parte conexa de la superficie S , cuyas dimensiones son inferiores a δ ²⁾ se proyecta unívocamente sobre cada uno de los planos coordenados de cierto sistema cartesiano de coordenadas.*

DEMOSTRACIÓN. Cerciorémonos primero de que cierto entorno de cada punto M de tal superficie se proyecta unívocamente sobre cada uno de los planos coordenados de cierto sistema cartesiano de coordenadas.

¹⁾ Notemos que una superficie cerrada no tiene fronteras.

²⁾ Tal parte de la superficie puede disponerse dentro de una esfera de radio δ .

Sea n_M el vector de una normal unidad a la superficie en el punto M . Elijamos un sistema cartesiano de coordenadas $Oxyz$ de un modo tal que el vector n_M forme ángulos agudos con los ejes Ox , Oy , Oz . Entonces, evidentemente, en este sistema de coordenadas los determinantes

$$\begin{vmatrix} y_u z_u \\ y_v z_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_u x_u \\ z_v x_v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_u y_u \\ x_v y_v \end{vmatrix}$$

son distintos de cero para los valores de u y v que definen el punto M , y, por ser S suave, distintos de cero en cierto entorno del punto (u, v) (estos determinantes son proporcionales a las coordenadas del vector unidad de la normal a la superficie). Recurriendo a la demostración del teorema 5.1 y a la observación que acompaña dicho teorema (véase p. 2, § 1, cap. 5), nos convencemos de que cierto entorno del punto se proyecta unívocamente sobre cada uno de los planos coordenados del sistema elegido de coordenadas $Oxyz$.

Admitamos que la afirmación del lema no es cierta. Entonces, para cada $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, puede indicarse una parte S_n de la superficie S , cuyas dimensiones son inferiores a δ_n , que no se proyecta unívocamente sobre tres planos coordenados de cualquier sistema cartesiano de coordenadas. Elijamos en cada parte S_n un punto M_n y separemos, a continuación, en cada sucesión $\{M_n\}$ una subsucesión que converja a cierto punto M de la superficie S . Examinemos un entorno del punto M que se proyecta unívocamente sobre cada uno de los planos coordenados de cierto sistema cartesiano de coordenadas $Oxyz$. Dicho entorno contiene una de las partes S_n que también se proyectará unívocamente sobre tres planos coordenados del sistema $Oxyz$, lo que contradice el modo de elegir las partes S_n . De este modo, la admisión de que la afirmación del lema era errónea conduce a una contradicción. El lema está demostrado.

Procedamos ahora con la demostración del teorema 7.3. Dividamos S , mediante unas curvas suaves a trozos, en un número finito de partes suaves S_i , cada una de las cuales sea inferior en dimensión a δ que acabamos de mencionar, demostrando el lema. Además, al número de las curvas que dividen S le sumemos también las aristas de la superficie. Por cuanto la parte S_i se proyecta unívocamente sobre tres planos coordenados de cierto sistema cartesiano de coordenadas, la fórmula de Stokes se verifica para la parte S_i , en virtud de la invariancia de la misma (véase p. 3 de este párrafo) y de las deducciones obtenidas en el p. 2 del párrafo presente. Sumemos, ahora, los miembros primero y segundo de las fórmulas de Stokes para las partes S_i . Es evidente que la suma de los primeros miembros de estas fórmulas

representan una integral doble $\int_S n \operatorname{rot} p \, d\sigma$, mientras que en el

segundo miembro figurará la suma de integrales $\oint p t dl$ a lo largo de las fronteras Γ_i de las partes S_i . Está claro que las integrales a lo largo de los tramos comunes de la frontera de las partes S_i se reducirán, puesto que dichos tramos se recorren en los sentidos opuestos

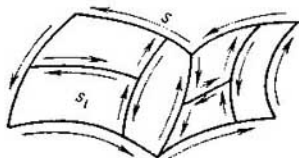


Fig. 7.6

(véase la ilustración en la fig. 7.6). Por eso, la suma de integrales curvilíneas citada más arriba es igual a la integral curvilínea a lo largo de la frontera Γ de la superficie S . De nuestros razonamientos proviene la validez de la fórmula

$$\iint_S \mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{p} d\sigma = \oint_{\Gamma} \mathbf{p} t dl,$$

la cual es precisamente fórmula de Stokes. El teorema está demostrado.

§ 3. Fórmula de Ostrogradski

1. **Formulación del teorema fundamental.** Sea V un dominio finito, en el caso general, múltiplemente conexo en un espacio $Oxyz$ con la frontera suave a trozos S ¹⁾. El dominio V con la frontera adjunta se denotará con \bar{V} . Es válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 7.5. *Supongamos que las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ son continuas en \bar{V} y tienen derivadas parciales continuas de primer orden en V . Si existen integrales impropias, extendidas al dominio V , de cada una de las derivadas parciales de las funciones P , Q y R queda válida la relación*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad (7.27)$$

¹⁾ La frontera S se llama suave a trozos, si está compuesta por un número finito de superficies suaves que lindan una con otra a lo largo de las curvas suaves, llamadas aristas de la superficie. Si la frontera S se compone de un número finito de superficies suaves a trozos cerradas S_i , estas últimas se denominan componentes conexos de S , y el dominio conexo V , se llama múltiplemente conexo.

que se denomina fórmula de Ostrogradski. La integral en el segundo miembro representa una suma de integrales a lo largo de los componentes conexos de la frontera S , en los cuales está elegido el lado exterior con relación a V .

Limitémonos a la demostración de la fórmula de Ostrogradski sólo para una clase especial de dominios.

Observemos que el teorema 7.5 puede ser demostrado aplicando el método empleado en el § 1 de este capítulo, al demostrar la fórmula de Green.

2. Demostración de la fórmula de Ostrogradski para una clase especial de dominios. Un dominio finito simplemente conexo V con la frontera suave a trozos S se llamará *dominio del tipo K* , si cada recta paralela a cualquier eje coordinado corta la frontera S del dominio V en dos puntos a lo sumo.

Para un dominio del tipo K se emplearán sistemas especiales de dominios agotadores $\{\bar{V}_n\}$. Describamos la construcción de este tipo de sistemas.

Spongamos que un dominio D en el plano Oxy representa una proyección sobre este plano del dominio V . Por los puntos de frontera del dominio D tracemos unas rectas paralelas al eje Oz . Cada una de estas rectas se interseca con la frontera S del dominio V en un solo punto. El conjunto de estos puntos divide S en dos partes S' y S'' (fig. 7.7) que representan las gráficas de las funciones $z_1(x, y)$ y $z_2(x, y)$, que son continuas en \bar{D} y diferenciables a trozos en D . Notemos que $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ (la igualdad tiene lugar sólo en los puntos de la frontera del dominio D).

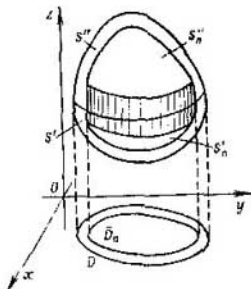


Fig. 7.7.

Veamos una sucesión arbitraria de dominios $\{\bar{D}_n\}$, que agotan monótonamente el dominio D . Sean S'_n y S''_n las gráficas de las funciones $z_1(x, y) + \varepsilon_n$ y $z_2(x, y) - \varepsilon_n$, definidas sobre \bar{D}_n (el número ε_n se elige tan pequeño que las superficies S'_n y S''_n no se intersequen).

La frontera del dominio \bar{V}_n es una superficie compuesta por las superficies S'_n y S''_n y la parte de una superficie cilíndrica con generatrices paralelas al eje Oz . En tal caso de generatriz de la superficie cilíndrica sirve la frontera del dominio \bar{D}_n . Un dominio \bar{V}_{n+1} se construye de un modo análogo, mas en lugar del dominio \bar{D}_n se toma el \bar{D}_{n+1} , y ε_{n+1} ha de ser inferior a ε_n . Es obvio que, cuando $\varepsilon_n \rightarrow 0$, el sistema $\{\bar{V}_n\}$ agota monótonamente el dominio V .

Demostremos la siguiente afirmación.

Teorema 7.6. Supongamos que en un dominio V del tipo K las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.5. Entonces, para dicho dominio y para las funciones P , Q y R es válida la fórmula de Ostrogradski.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que basta cerciorarse de la validez de las igualdades

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz &= \int_S P dy dz, \\ \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz &= \int_S Q dz dx, \\ \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \int_S R dx dy. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Por ser igual la demostración de cada una de estas igualdades, realicémosla sólo de la tercera de las mismas.

Veamos una integral triple

$$\iiint_{\bar{V}_n} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz. \quad (7.29)$$

Para el dominio \bar{V}_n y la función subintegral $\frac{\partial R}{\partial z}$ en la integral (7.29) se cumplen todas las condiciones, bajo las cuales resulta vigente la fórmula de integración reiterada. De acuerdo con esta fórmula, tenemos

$$\begin{aligned} \iiint_{\bar{V}_n} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\bar{D}_n} dx dy \int_{z_1(x, y) + \varepsilon_n}^{z_2(x, y) - \varepsilon_n} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{\bar{D}_n} R(x, y, z_2(x, y) - \varepsilon_n) dx dy - \iint_{\bar{D}_n} R(x, y, z_1(x, y) + \varepsilon_n) dx dy. \end{aligned} \quad (7.30)$$

El primer miembro de la relación (7.30) tiene, para $n \rightarrow \infty$, un límite igual a $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$. Por ser la función $R(x, y, z)$ uni-

formemente continua en el dominio cerrado \bar{V} , cada uno de los sumandos en el segundo miembro de (7.30) tiene, para $n \rightarrow \infty$, un límite que es igual a $\iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy$ para el pri-

mer sumando, y a $-\iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy$, para el segundo sumando. La primera integral de las que acabamos de señalar representa, al elegir el lado exterior de la superficie S , la integral $\iint_{S^+} R(x, y, z) dx dy$, y la segunda (habida cuenta del signo "menos" por delante de ella) la integral $\iint_{S^-} R(x, y, z) dx dy$. Así pues, el segundo miembro de las relaciones (7.30) tiene para $n \rightarrow \infty$, un límite igual a $\iint_S R(x, y, z) dx dy$. Por consiguiente, la tercera de las fórmulas (7.28) está demostrada.

La demostración de las fórmulas primera y segunda en (7.28) se realiza de un modo análogo (hace falta examinar las proyecciones de V sobre los planos Oyz y Oxz , respectivamente, y repetir los razonamientos aducidos). El teorema está demostrado.

3. Notación invariante de la fórmula de Ostrogradski. Supongamos que las funciones P, Q y R satisfacen las condiciones del teorema 7.5 en un dominio conexo finito V con la frontera suave a trozos S . Definamos en V un campo vectorial p , cuyas coordenadas en el sistema cartesiano dado de coordenadas $Oxyz$ son iguales a P, Q, R . Es evidente que bajo las condiciones impuestas en dichas funciones el campo p será continuo en \bar{V} y diferenciable en V .

Hallemos la divergencia del campo p . Al hacer uso de la expresión para la divergencia del campo p en la base ortonormal i, j, k , obtenemos

$$\operatorname{div} p = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

OBSERVACION. Pasemos a un nuevo sistema cartesiano de coordenadas en un espacio. Sean i', j', k' una base ortonormal ligada con dicho sistema, y sean P', Q', R' las coordenadas del campo p en esta base. Evidentemente, las funciones P', Q', R' son continuas en \bar{V} y diferenciables en V (estas funciones representan combinaciones lineales de las funciones P, Q, R). Por cuanto en el nuevo sistema de coordenadas

$$\operatorname{div} p = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial y'} + \frac{\partial R'}{\partial z'}$$

queda válida, por ser invariante la divergencia, una igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial x'} + \frac{\partial R'}{\partial z'}.$$

De este modo, si P, Q, R se consideran como coordenadas del campo vectorial \mathbf{p} , la expresión $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ no cambia su valor y forma, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, es decir, es un invariante.

Podemos obtener, por eso, la siguiente deducción importante: *la integral que figura en el primer miembro de la fórmula de Ostrogradski (7.27) tiene un carácter invariante; su valor y su forma no varían al pasar a un nuevo sistema cartesiano de coordenadas.* En efecto, en tal transformación de las coordenadas el valor absoluto del jacobiano de transformación es igual a uno. Por otra parte, de acuerdo con la observación, la expresión subintegral no cambia ni el valor ni tampoco la forma, al realizarse tal transformación de las coordenadas.

Volvamos ahora a la integral

$$\int_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \quad (7.31)$$

que figura en el segundo miembro de la fórmula de Ostrogradski (7.27). Cerciorémonos de que *esta integral lleva también carácter invariante: su valor y la forma de la expresión subintegral no varían, al pasar al nuevo sistema cartesiano de coordenadas.*

Teniendo presentes la observación 2, p. 2, § 3, cap. 5 sobre la forma de notación de una integral de superficie de segunda especie y las designaciones X, Y, Z para los ángulos que forma la normal \mathbf{n} a la superficie con los ejes coordenados, podemos escribir la integral (7.31) en la forma siguiente

$$\iint_S (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) \, d\sigma. \quad (7.32)$$

La expresión subintegral en la integral (7.32) es un producto escalar \mathbf{np} , por lo cual la integral (7.32) (o bien, que es lo mismo, (7.31)), puede ser escrita en la siguiente forma invariante

$$\iint_S \mathbf{np} \, d\sigma.$$

Notemos que esta última integral se denomina, de ordinario, *flujo del campo vectorial \mathbf{p} a través de la superficie S .*

Volviendo a la forma invariante de escribir la integral (7.31), vemos que en el nuevo sistema cartesiano de coordenadas esta integral tiene por expresión

$$\iint_S P' \, dy' \, dz' + Q' \, dz' \, dx' + R' \, dx' \, dy'.$$

Los razonamientos aducidos permiten escribir la fórmula de Ostrogradski (7.27) en la siguiente forma invariante:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{p} \, dv = \iint_S \mathbf{n} p \, d\sigma. \quad (7.33)$$

En esta forma mediante dv está denotado un elemento de área del dominio V .

Del teorema 7.6 y de las deducciones de este punto podemos extraer un corolario importante.

Corolario. Supongamos que las funciones $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$ satisfacen las condiciones del teorema 7.5 en un dominio finito V con la frontera suave a trozos S . Si el dominio V puede dividirse en un número finito de dominios V_k con las fronteras suaves a trozos S_k , y si cada uno de V_k representa un dominio del tipo K con relación a cierto sistema cartesiano de coordenadas, para el dominio V y para las funciones P , Q , R queda válida la fórmula de Ostrogradski.

La validez del corolario se deduce de los siguientes razonamientos. Está claro que la fórmula de Ostrogradski se verifica para cada uno de los dominios V_k . Esto se predetermina por el carácter invariante de la fórmula y por el teorema 7.6 (en cierto sistema de coordenadas V_k será un dominio del tipo K). Es obvio, además, que la suma de integrales $\iiint_{V_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$ de los primeros miembros de

las fórmulas de Ostrogradski para los dominios V_k representa una integral $\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$.

Mientras tanto, la suma de integrales de superficie $\iint_{S_k} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$ en los segundos miembros de las fórmulas de Ostrogradski a lo largo de las fronteras S_k de los dominios V_k proporciona una integral $\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$, pues las integrales a lo largo de los tramos comunes de la frontera de los dominios V_k se reducirán, puesto que dichos tramos en los dominios vecinos de V_k están orientados de un modo opuesto.

§ 4. Algunas aplicaciones de las fórmulas de Green, Stokes y Ostrogradski

1. Expresión para el área de un dominio plano en términos de la integral curvilínea. Sea D un dominio conexo plano finito con la frontera suave a trozos L . Es válida la siguiente afirmación.

El área σ del dominio D puede calcularse según la fórmula

$$\sigma = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx, \quad (7.34)$$

en la que la integral curvilínea representa una suma de integrales a lo largo de las componentes conexas de la frontera L , con la particularidad de que en cada una de dichas componentes se indica una dirección del recorrido, para la cual el dominio D queda por la izquierda.

Para demostrar la afirmación, veamos en D las funciones

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = x.$$

Es evidente que estas funciones satisfacen en D todas las condiciones, en las cuales es válida la fórmula de Green (7.1). De acuerdo con esta fórmula, tenemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L (-y) dx + (x) dy.$$

La integral doble en la última fórmula es igual a 2σ , mientras que la integral curvilínea es igual a $\oint_L x dy - y dx$. De este modo, la fórmula (7.34) está demostrada.

2. Expresión para el volumen en términos de la integral de superficie. Sea V un dominio conexo finito en un espacio con la frontera suave a trozos S .

Es válida la siguiente afirmación.

El volumen v del dominio V puede calcularse según la fórmula

$$v = \frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy, \quad (7.35)$$

en la que la integral de superficie representa una suma de integrales a lo largo de las componentes conexas de la frontera S , con la particularidad de que en cada una de dichas componentes está elegido el lado exterior con relación a V .

Para demostrar la afirmación, examinemos en V las funciones

$$P(x, y, z) = x, \quad Q(x, y, z) = y, \quad R(x, y, z) = z.$$

Es evidente que estas funciones satisfacen las condiciones, para las cuales se verifica la fórmula de Ostrogradski. De acuerdo con esta fórmula, tenemos

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\ &= \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy. \end{aligned}$$

La integral triple en la última fórmula es igual a $3v$. Por eso, de esta fórmula se deduce la relación (7.35). La afirmación está demostrada.

3. Condiciones en las cuales una forma diferencial $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ representa una diferencial total. En este punto se indicarán una serie de condiciones, en las cuales una forma diferencial $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, definida en un dominio conexo D representa la diferencial total de cierta función $u(x, y)$.

Demostremos el siguiente teorema.

Teorema 7.7. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas en un dominio D . Serán equivalentes las siguientes tres condiciones.*

1. *Para toda curva cerrada suave a trozos (quizás, con puntos múltiples) L dispuesta en D se tiene*

$$\oint_L P dx + Q dy = 0.$$

2. *Para cualesquiera dos puntos A y B del dominio D el valor de la integral*

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$$

no depende de la curva a trozos \widehat{AB} que une los puntos A y B y que está dispuesta en D .

3. *Una forma diferencial $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ es una diferencial total. Dicho de otro modo, en D viene definida tal función $u(M) = u(x, y)$, que*

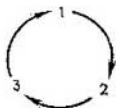
$$du = P dx + Q dy. \quad (7.36)$$

En este caso, para cualesquiera dos puntos A y B del dominio D y para una curva arbitraria suave a trozos \widehat{AB} que une dichos puntos y que está dispuesta en D

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy = u(B) - u(A). \quad (7.37)$$

De este modo, el cumplimiento de cada una de las condiciones 1, 2, 3 es necesario y suficiente para que se cumpla cada una de las dos restantes.

DEMOSTRACION. Realicemos la demostración según un esquema



es decir, demostremos que de la primera condición proviene la segunda, de la segunda, la tercera, y de la tercera, la primera. Es eviden-

te que en este caso quedará demostrada la equivalencia de las condiciones 1, 2, 3.

PASO PRIMERO. 1 \rightarrow 2. Sean A y B unos puntos arbitrarios fijos del dominio D , y sean \widehat{ACB} y $\widehat{AC'B}$ cualesquiera dos curvas suaves a trozos que unen los puntos citados y que están dispuestas en D (fig.

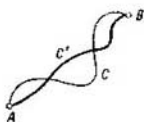


Fig. 7.8.

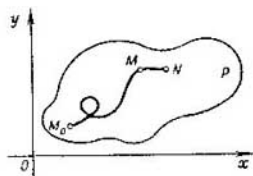


Fig. 7.9.

7.8). La unión de estas curvas representa una curva cerrada suave a trozos (quizás, con puntos múltiples) $L = \widehat{ACB} + \widehat{BC'A}$, dispuesta en D . Por cuanto la condición 1 se supone cumplida, tenemos

$$\oint_L P dx + Q dy = 0.$$

De esta igualdad obtenemos la siguiente relación tomando en consideración que $L = \widehat{ACB} + \widehat{BC'A}$ y que, al cambiar el sentido del recorrido, una integral curvilínea cambia de signo:

$$\int_{\widehat{ACB}} P dx + Q dy = \int_{\widehat{AC'B}} P dx + Q dy.$$

Por consiguiente, la condición 2 se cumple.

PASO SEGUNDO. 2 \rightarrow 3. Supongamos que M_0 es un punto fijo; $M(x, y)$, un punto arbitrario del dominio D ; $\widehat{M_0M}$, cualquier curva suave a trozos que une los puntos M_0 y M y que está dispuesta en D . En virtud de la condición 2, la expresión

$$u(M) = \int_{\widehat{M_0M}} P dx + Q dy \quad (7.38)$$

no depende de la curva $\widehat{M_0M}$, por lo cual representa una función definida en D . Demostremos que en cada punto M del dominio D existen derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, con la particularidad de que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \quad (7.39)$$

Por cuanto $P(x, y)$, y $Q(x, y)$ son continuas en D , de las últimas relaciones se deduce la diferenciabilidad de la función u y la igualdad (7.36), con lo cual será demostrado el segundo paso $2 \rightarrow 3$.

La demostración de la existencia de las derivadas parciales de la función $u(x, y)$ y de las igualdades (7.39) se realiza simultáneamente. Demostremos, por ejemplo, la existencia de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y la primera de las desigualdades (7.39). Fijemos un punto $M(x, y)$. Demos al argumento x un incremento Δx tan pequeño que el segmento \overline{MN} , que une los puntos $M(x, y)$ y $N(x + \Delta x, y)$, se disponga en D^1 . (fig. 7.9). Obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \\ &= \int_{\overline{M_0 M N}} P dx + Q dy - \int_{\overline{M_0 M}} P dx + Q dy = \int_{\overline{MN}} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Sobre el segmento \overline{MN} la magnitud y es de valor constante, por la cual $\int_{\overline{MN}} Q dy = 0$. Por consiguiente,

$$\Delta u = \int_{\overline{MN}} P dx = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt.$$

Aplicando a la última integral el teorema del valor medio, obtendremos

$$\Delta u = P(x + \theta \Delta x, y) \Delta x, \text{ donde } 0 < \theta < 1,$$

de donde

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = P(x + \theta \Delta x, y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Por ser $P(x, y)$ continua, el segundo miembro de la última igualdad tiene, para $\Delta x \rightarrow 0$, un límite que es igual al valor de esta función en el punto $M(x, y)$. Por consiguiente, lo tendrá también el primer miembro que es igual, por definición a la derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$. De este modo, la existencia de la derivada parcial y la validez de la primera igualdad en (7.39) está demostrada. La existencia de la derivada $\frac{\partial u}{\partial y}$ y la justeza de la segunda igualdad (7.39) resultan ser análogas.

Demostremos ahora la relación (7.37). Sean A y B cualesquiera puntos de D , y sea \overline{AB} una curva arbitraria suave a trozos que une dichos puntos y que está dispuesta en D . Esta curva se define me-

¹⁾ Por cuanto D es un dominio, es decir, un conjunto compuesto sólo por los puntos interiores, tal elección es bien posible.

diante las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$. Aprovechando la regla de cálculo de las integrales curvilíneas, obtenemos

$$\int_{\overline{AB}} P dx + Q dy = \int_a^b \{P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\} dt = \\ = \int_a^b u_t' dt = u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) = u(B) - u(A).$$

De este modo, la fórmula (7.37) queda demostrada.

PASO TERCERO: $3 \rightarrow 1$. Esta afirmación se deduce de la fórmula (7.37). En efecto, para la curva cerrada L el punto original coincidirá con el final, por lo cual, de conformidad con la fórmula (7.37), tenemos

$$\oint_L P dx + Q dy = u(A) - u(A) = 0.$$

El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Se ha mostrado que las condiciones 1, 2, 3 del teorema 7.7 son equivalentes y, por eso, en particular, la condición 3 representa una condición necesaria y suficiente, bajo la cual la integral curvilínea $\int_L P dx + Q dy$ no depende de la elección de la curva

L que une cualesquiera puntos dados A y B del dominio D .

Para los dominios simplemente conexos ¹⁾ señalemos una condición necesaria y suficiente, cómoda para las aplicaciones, para que la forma diferencial $P dx + Q dy$ sea una diferencial total de cierta función.

Naturalmente, esta condición será necesaria y suficiente para que la integral $\int_L P dx + Q dy$ sea independiente de la elección de la curva L que une cualesquiera puntos dados A y B del dominio D .

Teorema 7.8. *Supongamos que las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, como también sus derivadas parciales, son continuas en un dominio simplemente conexo D . Entonces, cada una de las tres condiciones 1, 2, 3 del teorema 7.7 es equivalente a la condición*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } D.$$

¹⁾ Recordemos que el dominio D se llama simplemente conexo, si cualquier curva cerrada suave a trozos sin puntos múltiples dispuesta en D , limita un dominio cuyos puntos pertenecen todos a D .

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos un esquema



Ya hemos demostrado las afirmaciones $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. Demostremos que $3 \rightarrow 4$ y $4 \rightarrow 1$.

PASO PRIMERO: $3 \rightarrow 4$. Supongamos que en el dominio D existe una función $u(x, y)$ tal que $du = P dx + Q dy$. Entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

De este modo, la condición 4 se cumple. Notemos que para demostrar el paso $3 \rightarrow 4$ no se requiere la condición de que el dominio D sea simplemente conexo.

PASO SEGUNDO: $4 \rightarrow 1$. Supongamos cumplida la condición 4. Entonces, en cada punto del dominio D se verifica la igualdad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \quad (7.40)$$

Si L es una curva suave a trozos cerrada sin puntos múltiples que está dispuesta en D y limita un dominio D^* (el dominio D es simplemente conexo, por lo cual cada punto del dominio D^* pertenece a D), entonces, al emplear la fórmula de Green al dominio D^* , y al hacer uso de (7.40), obtenemos

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

En el caso de que L tenga un número finito de puntos múltiples o sea una quebrada con un número finito de eslabones, para cada bucle \tilde{L} de la curva L se verifica una igualdad $\oint_{\tilde{L}} P dx + Q dy = 0$,

y, por eso, para L resulta válida la igualdad $\oint_L P dx + Q dy = 0$.

Sea L una curva suave a trozos cerrada arbitraria. Elijamos para L un número $\lambda > 0$ del modo mencionado en el lema 1. Dividamos L en las partes L_h de longitud inferior a λ (entre los puntos de partición se encuentran también los puntos angulosos de la curva L , véase fig. 7.10). De conformidad con el lema citado, las tangentes en los extremos M_h y N_h de cada parte L_h forman un ángulo inferior a $\pi/8$.

Entonces, obviamente, para λ suficientemente pequeño el triángulo curvilíneo $M_h N_h C_h$ (este triángulo está rayado en la fig. 7.10), en el cual $M_h C_h$ forma con la tangente en M_h un ángulo inferior a $\pi/8$, y $N_h C_h$ una normal a L en el punto N_h , se dispone íntegramente dentro de D y representa una curva suave a trozos cerrada sin puntos múltiples. Por eso,

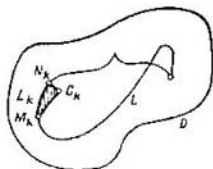


Fig. 7.10.

$$\oint_{M_h N_h C_h} P dx + Q dy = 0.$$

De aquí proviene que la integral curvilínea a lo largo del arco $\widehat{M_h N_h}$ es igual a la integral curvilínea a lo largo de la quebrada $M_h C_h N_h$:

$$\int_{\widehat{M_h N_h}} P dx + Q dy = \int_{M_h C_h N_h} P dx + Q dy.$$

Razonando análogamente para cualquier parte L_k , obtendremos, como resultado, una quebrada \hat{L} , dispuesta en D , para la cual

$$\oint_{\hat{L}} P dx + Q dy = 0. \quad (7.41)$$

Más arriba se ha observado que para una quebrada \hat{L} , dispuesta en D , la integral $\oint_{\hat{L}} P dx + Q dy$ es igual a cero. De aquí y de (7.41) llegamos a que

$$\oint_{\hat{L}} P dx + Q dy = 0.$$

El teorema está demostrado.

4. Campos vectoriales potenciales y solenoidales. Hemos introducido anteriormente los conceptos de circulación y de flujo de un campo vectorial (véanse p.3, § 1, p. 3, § 2 y p. 3, § 3). Recordemos estos conceptos.

Supongamos que en cierto dominio D viene dado un campo vectorial $\mathbf{p}(M) = \mathbf{p}(x, y, z)$.

Definición 1. Se llama *circulación del campo vectorial \mathbf{p}* a lo largo de una curva cerrada suave a trozos L , dispuesta en el dominio D , a una integral

$$\oint_L \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l},$$

en la cual t es el vector unidad de la tangente a L , y dl , la diferencial de la longitud del arco de la curva L .

Definición 2. Se llama flujo del campo vectorial p a través de una superficie orientada suave a trozos S dispuesta en el dominio D a una integral

$$\iint_S pn \, d\sigma,$$

donde n es el vector unidad de la normal a la superficie S que señala su orientación, y $d\sigma$, un elemento de área de la superficie S .

Introduzcamos los conceptos de campo vectorial potencial y de campo vectorial solenoidal.

Definición 3. Un campo vectorial p se llama potencial en el dominio D , si la circulación de este campo a lo largo de cualquier curva cerrada suave a trozos, dispuesta en el dominio D , es igual a cero.

Definición 4. Un campo vectorial p se llama solenoidal en el dominio D , si el flujo de este campo a través de cualquier superficie cerrada suave a trozos, que está dispuesta en D sin tener líneas de autointersección y que representa una frontera de cierto subdominio limitado del dominio D , es igual a cero.

Demostremos un teorema, que contiene condiciones necesarias y suficientes de potencialidad de un campo, para los campos vectoriales continuamente diferenciables y para una clase especial de dominios.

Introduzcamos previamente una noción de dominio tridimensional simplemente conexo por superficie.

Un dominio tridimensional D se denomina simplemente conexo por superficie, si para cualquier curva cerrada suave a trozos L , dispuesta en D , puede indicarse tal superficie orientable suave a trozos S , dispuesta en D , de cuya frontera sirve la curva L . Observemos que para la superficie mencionada S resulta válida la fórmula de Stokes.

Tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 7.9. Supongamos que en un dominio simplemente conexo por superficie D viene dado un campo vectorial continuamente diferenciable $p = \{P, Q, R\}$. Entonces, son equivalentes las siguientes tres condiciones:

1. El campo vectorial $p = p(M)$ es potencial.
2. En el dominio D existe una función potencial $u(M)$, es decir, una función tal que $p = \text{grad } u$, o bien, que es lo mismo.

$$du = P \, dx + Q \, dy + R \, dz.$$

En este caso, para cualesquiera puntos A y B del dominio D y para una curva arbitraria suave a trozos AB , que une dichos puntos y que está dispuesta en D , se tiene

$$\int_{AB} pt \, dl = u(B) - u(A)$$

(aquí, t es el vector unidad de la tangente a la curva AB , y dl , la diferencial del arco).

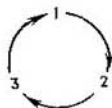
3. El campo vectorial $p = p(M)$ es irrotacional, es decir, $\text{rot } p = 0$ en D .

Es evidente que la condición 3 es equivalente a las relaciones

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Así pues, cada una de las condiciones 2 y 3 representa la condición necesaria y suficiente de potencialidad del campo vectorial diferenciable p .

DEMOSTRACIÓN. Apliquemos un esquema



Las afirmaciones $1 \rightarrow 2$ y $2 \rightarrow 3$ son válidas sin suponer que el dominio D es simplemente conexo por superficie y se demuestran por analogía completa con las afirmaciones correspondientes de los teoremas 7.7 y 7.8.

Demostremos la afirmación $3 \rightarrow 1$.

Sea L una curva cerrada suave a trozos, dispuesta en D . Por hipótesis, D es un dominio simplemente conexo por superficie. Por eso, existe en D una superficie suave a trozos S , de cuya frontera sirve la curva L . Según la fórmula de Stokes (7.26), tenemos

$$\oint_L p t dl = \iint_S n \text{rot } p d\sigma.$$

De aquí y de la condición de que $\text{rot } p = 0$, obtenemos

$$\oint_L p t dl = 0,$$

es decir, el campo p es potencial. El teorema está demostrado.

Demostremos en conclusión un teorema sobre las condiciones necesarias y suficientes de solenoidalidad en los así llamados dominios simplemente conexos por volumen. Un dominio espacial D se llama simplemente conexo por volumen, si cualquier superficie orientable cerrada y suave a trozos, que está dispuesta en D sin tener líneas de autointersección, es la frontera de un dominio dispuesto también en D .

Teorema 7.10. Para que un campo vectorial continuamente diferenciable p sea solenoidal en un dominio simplemente conexo por volumen D , es necesario y suficiente que en todos los puntos de D se verifique la igualdad

$$\text{div } p = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. 1) *Necesidad*. Sea M un punto arbitrario del dominio D . Estudiemos cualquier esfera S con centro en M , dispuesta íntegramente en D . Al aplicar a una bola D_S con la frontera S la fórmula de Ostrogradski (7.33), obtenemos

$$\iiint_{D_S} \operatorname{div} p \, dv = \iint_S np \, d\sigma. \quad (7.42)$$

Por cuanto p es un campo solenoidal, $\iint_S np \, d\sigma = 0$, y, por eso, de acuerdo con (7.42), $\iiint_{D_S} \operatorname{div} p \, dv = 0$. Aplicando a la última inte-

gral el teorema del valor medio, nos convencemos de que $\operatorname{div} p = 0$ en cierto punto de la bola D_S . En virtud de que dicha bola es arbitraria y el campo p , continuo, concluimos que $\operatorname{div} p$ se reduce a cero en el punto M . De este modo, la necesidad de las condiciones del teorema está demostrada.

2) *Suficiencia*. Sea S cualquier superficie orientable cerrada y suave a trozos que está dispuesta en D y que no tiene líneas de autointersección. Por ser D un dominio simplemente conexo por volumen, S será la frontera de un dominio D_S , dispuesto también en D . Aplicando a D_S y al campo vectorial p la fórmula de Ostrogradski (7.33), obtenemos la relación (7.42), a partir de la cual proviene, teniendo en cuenta que $\operatorname{div} p = 0$, una correlación

$$\iint_S np \, d\sigma = 0.$$

Por cuanto S es una superficie orientable cerrada y suave a trozos que está dispuesta en D y no tiene líneas con puntos múltiples la última igualdad deja constancia, por definición, de que el campo p en D es solenoidal. El teorema está demostrado.

Complemento al capítulo 7

FORMAS DIFERENCIALES EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

§ 1. Formas polilineales de signos variables

1. *Formas lineales*. Sea V un espacio vectorial n -dimensional arbitrario cuyos elementos se designarán por los símbolos ξ, η, \dots . El objeto de nuestro estudio lo constituirán las funciones que a todo elemento $\xi \in V$ le ponen en correspondencia cierto número real.

Definición 1. Una función $a(\xi)$ se llama forma lineal, si para cualesquiera $\xi \in V, \eta \in V$ y para todo número real λ se verifican las igualdades

$$1) a(\xi + \eta) = a(\xi) + a(\eta).$$

$$2) a(\lambda\xi) = \lambda a(\xi).$$

Definición 2. Llamemos suma de dos formas lineales a y b a una forma lineal c , la cual a todo vector $\xi \in V$ le pone en correspondencia un número

$$c(\xi) = a(\xi) + b(\xi).$$

Llamemos producto de una forma lineal por un número real λ a una forma lineal b que a todo vector $\xi \in V$ le pone en correspondencia un número

$$b(\xi) = \lambda a(\xi).$$

De este modo, el conjunto de todas las formas lineales forma un espacio vectorial que se designará por el símbolo $L(V)$ ¹⁾. Hallemos la representación de la forma lineal a en una base $\{e_i\}_{i=1}^n$. Sea

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i,$$

donde los números ξ^i se definen unívocamente. Si designamos $a_i = a(e_i)$, la representación buscada tendrá por expresión

$$a(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i a_i.$$

Demostremos que la dimensión $\dim L(V)$ del espacio lineal $L(V)$ es igual a n . Con esto fin basta señalar una base cualquiera en $L(V)$ que contenga exactamente n elementos, es decir, n formas lineales. Fijemos una base arbitraria $\{e_k\}$ del espacio V y examinemos las siguientes formas lineales:

$$e^k(\xi) = \xi^k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

donde $\{\xi^k\}$ son coeficientes de la descomposición del vector ξ según los elementos de la base $\{e_k\}$. De otras palabras, la forma lineal e^k actúa sobre los elementos de la base $\{e_i\}$ según la regla

$$e^k(e_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = k, \\ 0 & \text{para } i \neq k. \end{cases}$$

Entonces, en la base dada $\{e_i\}$ la forma lineal a tiene por expresión

$$a(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i e^i(\xi), \quad a_i = a(e_i),$$

es decir, las formas lineales $e^1(\xi)$, $e^2(\xi)$, \dots , $e^n(\xi)$ forman en $L(V)$ una base. Esta base se denomina *conjugada* (y también *recíproca* o *dual*) de la base $\{e_i\}$.

2. Formas bilineales. Designemos por $V \times V$ un conjunto de todas los pares ordenados (ξ_1, ξ_2) , donde $\xi_1 \in V$, $\xi_2 \in V$, y examinemos las funciones $a(\xi_1, \xi_2)$ que a todo elemento de $V \times V$ (es decir, a cada dos elementos $\xi_1 \in V$ y $\xi_2 \in V$) le ponen en correspondencia cierto número real.

Definición. Una función $a(\xi_1, \xi_2)$ se denomina *forma bilineal*, si para cada valor fijo de un argumento será forma lineal con relación al otro argumento.

De otras palabras, para cualesquiera vectores $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ y todos los números reales $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ se verifica la igualdad

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 \xi_1 + \mu_1 \eta_1, \lambda_2 \xi_2 + \mu_2 \eta_2) &= \\ &= \lambda_1 \lambda_2 a(\xi_1, \xi_2) + \lambda_1 \mu_2 a(\xi_1, \eta_2) + \\ &\quad + \mu_1 \lambda_2 a(\eta_1, \xi_2) + \mu_1 \mu_2 a(\eta_1, \eta_2). \end{aligned}$$

¹⁾ El espacio $L(V)$ se denota también con el símbolo V^* y se denomina *conjugado* (o *dual*) de V .

El conjunto de todas las formas bilineales se transforma con facilidad en un espacio lineal, al introducir en este conjunto de un modo natural las operaciones de sumación y multiplicación por un número real. El espacio obtenido de formas bilineales se denotará con $L_2(V)$.

Hallemos una representación de la forma bilineal $a(\xi_1, \xi_2)$ en una base $\xi_i = \{e_i\}_{i=1}^n$ del espacio V . Supongamos que $\xi_k = \sum_{j=1}^n \xi_k^j e_j$, $k=1, 2$. Pongamos $a(e_i, e_j) = a_{ij}$ y obtendremos la representación buscada

$$a(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_1^i \xi_2^j.$$

Para determinar la dimensión del espacio $L_2(V)$, formemos, con ayuda de las formas bilineales $e^i(\xi)$ que constituyen en $L(V)$ una base conjugada de la base $\{e_i\}$, las siguientes formas bilineales

$$e^{ij}(\xi_1, \xi_2) = e^i(\xi_1) e^j(\xi_2).$$

Entonces, una forma bilineal arbitraria será unívocamente representable en la siguiente forma

$$a(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} e^{ij}(\xi_1, \xi_2).$$

Esto significa que las formas $e^{ij}(\xi_1, \xi_2)$ forman una base en $L_2(V)$, y, por consiguiente, la dimensión de $L_2(V)$ es igual a n^2 .

3. Formas polilineales. Sea p un número natural. Con el símbolo $V^p = V \times V \times \dots \times V$ denotemos el conjunto de todos los números ordenados $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ de p vectores, cada uno de los cuales pertenece a V , y estudiemos unas funciones que a todo surtido de este género le pone en correspondencia cierto número real.

Definición. Una función $a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ se denomina forma polilineal de grado p (o bien p -forma), si es forma lineal respecto de cada argumento, siendo fijos los valores de los restantes.

Al introducir en el conjunto de todas las p -formas las operaciones lineales, obtendremos un espacio lineal, el cual se denotará con el símbolo $L_p(V)$.

Hallemos la representación de la forma polilineal arbitraria $a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ en una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ del espacio V . Designemos

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p} = a(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}).$$

Entonces, si $\xi_k = \sum_{i=1}^n \xi_k^i e_i$, $k=1, 2, \dots, p$, resulta

$$a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n a_{i_1 i_2 \dots i_p} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p}.$$

Si $e^k(\xi)$ es la base en $L(V)$ conjugada de $\{e_i\}$, entonces, evidentemente, las p -formas

$$e^{i_1 i_2 \dots i_p}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = e^{i_1}(\xi_1) e^{i_2}(\xi_2) \dots e^{i_p}(\xi_p)$$

forman una base en $L_p(V)$ y, de este modo, $L_p(V)$ es de dimensión n^p .

4. Formas polilineales de signo variable.

Definición. Una forma polilineal $a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ se llama de signo variable, si, al permutar cualesquiera dos argumentos, ella cambia de signo ¹⁾. Dicho de otro modo,

$$a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_p) = -a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_p).$$

El conjunto de todas las formas polilineales de signo variable de grado p forma, evidentemente, un subespacio del espacio lineal $L_p(V)$, el cual se denotará con el símbolo $A_p(V)$ ²⁾. Los elementos del espacio $A_p(V)$ vamos a designar con el símbolo $\omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$.

Notemos que si $\{e_i\}$ es una base arbitraria en V y

$$\omega = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \omega_{i_1 \dots i_p} \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p},$$

los números $\omega_{i_1 \dots i_p}$ cambian de signo, al permutar dos índices. Esto se deduce de lo que

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Resulta natural considerar que $A_1(V) = L_1(V)$, y $A_0(V)$ se compone de todas las constantes, es decir, coincide con la recta numérica.

5. Producto exterior de las formas de signo variable. Examinemos dos formas de signo variable $\omega^p \in A_p(V)$ y $\omega^q \in A_q(V)$. En este punto introducamos la operación fundamental en la teoría de las formas de signo variable, esto es, la operación de *producto exterior*.

Sea

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^p = \omega^p(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p), \eta_i \in V, \\ \omega^q = \omega^q(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q), \zeta_j \in V. \end{array} \right\}$$

Veamos la siguiente forma polilineal $p = L_{p+q}(V)$:

$$a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+q}) = \omega^p(\xi_1, \dots, \xi_p) \cdot \omega^q(\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q}). \quad (7.43)$$

En el caso general esta forma no es de signo variable. A saber, al permutarlos argumentos ξ_i y ξ_j , donde $1 \leq i \leq p$, y $p+1 \leq j \leq p+q$, puede suceder que la forma (7.43) no cambie de signo. A esta circunstancia se debe precisamente la necesidad de introducir el producto exterior.

Para introducir el producto exterior, no harán falta algunos hechos de la teoría de las permutaciones.

Recordemos que se denomina *permutación* de los números $\{1, 2, \dots, m\}$ a una función $\sigma = \sigma(k)$ que está definida en estos números y que los aplica biunívocamente sobre sí mismos. El conjunto de todas las permutaciones de tal género se denota con el símbolo Σ_m . Es evidente que existen en total $m!$ diferentes permutaciones de Σ_m . Para dos permutaciones, $\sigma \in \Sigma_m$ y $\tau \in \Sigma_m$, se define de un modo natural una superposición $\sigma\tau \in \Sigma_m$. La permutación σ^{-1} se llama inversa de σ , si $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$, donde ε es una permutación idéntica (es decir, $\varepsilon(k) = k$ $k = 1, 2, \dots, m$).

La permutación σ lleva el nombre de *transposición*, si hace permutar dos números, dejando en su lugar los demás. Dicho de otro modo, existe un par de números i y j ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$) tal que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$, y $\sigma(k) = k$ para $k \neq i$ y $k \neq j$. Evidentemente, si σ es una transposición, $\sigma^{-1} = \sigma$, y $\sigma \cdot \sigma = \varepsilon$.

¹⁾ Formas polilineales de signos variables se llaman también *antisimétricas*, *oblicuas*, *exteriores*.

²⁾ Este espacio se denomina también con el símbolo $\wedge^p V^*$ y se llama grado exterior p del espacio V^* .

Se sabe que cualquier permutación σ puede ser representada como una superposición de transposiciones que permutan los números vecinos, con la particularidad de que la paridad del número de transposiciones en tal representación no depende de su elección y se denomina paridad de la permutación σ .

Introduzcamos las siguientes designaciones:

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1, & \text{si la permutación } \sigma \text{ es par,} \\ -1, & \text{si la permutación } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Observemos que la forma $a \in L_p(V)$ pertenece a $A_p(V)$, si para toda permutación $\sigma \in \Sigma_p$

$$a(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot a(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p).$$

Examinemos de nuevo la forma polilineal (7.43). Para cualquier permutación $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ pongamos

$$\sigma a(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = a(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}). \quad (7.44)$$

No es difícil convencerse de que si $\tau \in \Sigma_{p+q}$ y $\sigma \in \Sigma_{p+q}$, tenemos $(\tau\sigma) a = \tau(\sigma a)$.

Introduzcamos la siguiente definición.

Definición. Se llama producto exterior de la forma $\omega^p \in A_p(V)$ y de la forma $\omega^q \in A_q(V)$ a una forma $\omega \in A_{p+q}(V)$ que se define mediante la igualdad

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \sigma a, \quad (7.45)$$

donde la suma se toma respecto de todas las permutaciones $\sigma \in \Sigma_{p+q}$ que satisfacen la condición

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q), \quad (7.46)$$

y la magnitud σa se define mediante las igualdades (7.43) y (7.44).

El producto exterior de las formas ω^p y ω^q se denota con el símbolo

$$\omega = \omega^p \wedge \omega^q.$$

Ilustremos con un ejemplo cómo actúa la permutación σ que satisface la condición (7.46). Supongamos que por una carretera se mueven paralelamente dos columnas de automóviles, en la primera de las cuales hay p , y en la segunda, q automóviles. Ahora, la carretera empieza a estrecharse y ambas columnas se reordenan en una a plena carrera. Los automóviles de la primera columna ocupan sus lugares entre los de la segunda columna, no obstante, el orden de movimiento de los automóviles dentro de cada columna queda intacto. De resultas, obtenemos una permutación que satisface la condición (7.46). Es fácil ver que, viceversa, toda permutación de esta índole puede ser realizada en nuestro modelo.

Con el fin de convencerse de que la definición enunciada es correcta, hace falta demostrar que $\omega = \omega^p \wedge \omega^q \in A_{p+q}(V)$. Evidentemente, se necesita sólo demostrar que la forma ω es de signo variable.

Problemos que, al permutar dos argumentos ξ_i y ξ_{i+1} , la forma ω cambia de signo. En este caso se deducirá con facilidad que $\omega \in A_{p+q}(V)$. Supongamos que $\tau \in \Sigma_{p+q}$ es precisamente tal permutación. Cerciorémonos de que

$$\tau\omega = -\omega = (\operatorname{sgn} \tau) \omega. \quad (7.47)$$

De la igualdad (7.45) obtenemos

$$\tau\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot (\tau\sigma) a.$$

Dividamos esta suma en dos:

$$\tau\omega = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) (\tau\sigma) a + \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) (\tau\sigma) a. \quad (7.48)$$

La primera suma contendrá aquellas permutaciones σ , para las cuales o bien $\sigma^{-1}(i) \leq p$, $\sigma^{-1}(i+1) \leq p$, o bien $\sigma^{-1}(i) \geq p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \geq p+1$. Para cada tal permutación

$$(\tau\sigma)a = -\sigma a.$$

Para que esta afirmación se haga más obvia, designemos $k = \sigma^{-1}(i)$, $l = \sigma^{-1}(i+1)$, es decir, $i = \sigma(k)$, $i+1 = \sigma(l)$. La forma σa representa un producto de las formas ω^p y ω^q , con la particularidad de que como los argumentos de ω^p sirven los vectores $\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}$, y como los de ω^q , los vectores $\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}$. Si $k \leq p$ y $l \leq p$, entonces $\xi_i = \xi_{\sigma(k)}$ y $\xi_{i+1} = \xi_{\sigma(l)}$ son argumentos de la forma ω^p , la cual es, por definición, de signo variable. Análogamente se examina el caso en que $k \geq p+1$ y $l \geq p+1$.

Así pues, para la primera suma se verifica la igualdad

$$\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) (\tau\sigma) a = - \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma a. \quad (7.49)$$

La segunda suma contendrá aquellas permutaciones σ , para las cuales o bien $\sigma^{-1}(i) \leq p$, $\sigma^{-1}(i+1) \geq p+1$, o bien $\sigma^{-1}(i) \geq p+1$, $\sigma^{-1}(i+1) \leq p$. Probemos que el conjunto de permutaciones $\{\sigma\}$ que satisfacen esta condición (como también, por supuesto, la condición (7.46)) coincide con el conjunto de permutaciones del tipo $\tau\sigma$, donde $\sigma \in \{\sigma\}$. Volvamos a nuestro modelo con dos columnas de automóviles. La afirmación adquirirá, evidentemente, la siguiente forma.

Si, en el proceso de alguna reordenación, el automóvil con el número k de la primera columna resulta disponerse inmediatamente delante del automóvil con el número l de la segunda columna, puede indicarse fácilmente otra reordenación, que tendrá por resultado el cambio de lugar de dichos automóviles, mientras que el orden de movimiento de los demás automóviles queda el mismo.

De este modo, por cuanto $\operatorname{sgn} \tau\sigma = -\operatorname{sgn} \sigma$, tenemos

$$\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) (\tau\sigma) a = - \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \tau\sigma) (\tau\sigma) a = - \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma a. \quad (7.50)$$

Sustituyendo (7.49) y (7.50) en (7.48), obtendremos (7.47).

EJEMPLO 1. Examinemos dos formas lineales $f(\xi) \in A_1(V)$ y $g(\xi) \in A_1(V)$. Como producto exterior interviene una forma bilineal

$$f \wedge g = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot \sigma f(\xi_1) g(\xi_2) = f(\xi_1) g(\xi_2) - g(\xi_1) f(\xi_2).$$

EJEMPLO 2. Sea $f(\xi) \in A_1(V)$, $g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q) \in A_q(V)$. Como producto exterior $\omega = f \wedge g$ interviene la $(q+1)$ -forma cuyos argumentos se denotarán con $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_q$,

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma f(\xi_0) g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q) = \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i f(\xi_i) g(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_q). \end{aligned}$$

6. Propiedades del producto exterior de las formas de signo variable.

1) La propiedad evidente del producto exterior es su *linealidad*:

a) si $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, para cualquier número real λ tenemos

$$(\lambda \omega^p) \wedge \omega^q = \omega^p \wedge (\lambda \omega^q) = \lambda (\omega^p \wedge \omega^q);$$

b) si $\omega_1^p \in A_p(V)$, $\omega_2^p \in A_p(V)$ y $\omega^q \in A_q(V)$, tendremos

$$(\omega_1^p + \omega_2^p) \wedge \omega^q = \omega_1^p \wedge \omega^q + \omega_2^p \wedge \omega^q.$$

2) *Anticonmutatividad.* Si $\omega^p \in A_p(V)$ y $\omega^q \in A_q(V)$, tenemos

$$\omega^p \wedge \omega^q = (-1)^{pq} \omega^q \wedge \omega^p.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\omega^p \wedge \omega^q = \omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+q}).$$

Es fácil ver que

$$\omega^q \wedge \omega^p = \omega(\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \dots, \xi_{p+q}, \xi_1, \dots, \xi_p).$$

Conseguiremos de que la permutación $(\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q}, \xi_1, \dots, \xi_p)$ puede obtenerse a partir de los vectores $(\xi_1, \dots, \xi_{p+q})$ con ayuda de pq transposiciones sucesivas. El vector ξ_{p+1} puede ser trasladado en el primer lugar, realizando p transposiciones. A continuación, con ayuda del mismo número de transposiciones, traslademos en el segundo lugar el vector ξ_{p+2} , etc. Se trasladarán en total q vectores, realizando cada vez p transposiciones, es decir, el número de todas las transposiciones es igual a pq . En este caso la anticonmutatividad se deducirá de que el producto exterior es de signo variable.

3) *Asociatividad.* Si $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, $\omega^r \in A_r(V)$, tendremos

$$(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r = \omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\sigma \in \Sigma_{p+q+r}$. Veamos la siguiente magnitud:

$$\omega = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) \sigma [\omega^p(\xi_1, \dots, \xi_p) \omega^q(\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q}) \omega^r(\xi_{p+q+1}, \dots, \xi_{p+q+r})]. \quad (7.51)$$

La suma (7.51) será igual a $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$, si, al principio, realizamos la sumación respecto de todas las permutaciones que dejan sin cambio los números $p+q+1, p+q+2, \dots, p+q+r$, y que satisfacen la condición (7.46), y sólo después sumamos respecto de todas las permutaciones que conservan el orden obtenido de los primeros $p+q$ argumentos y el orden de los argumentos $\xi_{p+q+1}, \dots, \xi_{p+q+r}$.

De un modo análogo podemos obtener la magnitud $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$.

Mostremos que en ambos casos se obtiene una suma respecto de todas las permutaciones que satisfacen las condiciones

$$\left. \begin{aligned} \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p), \\ \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(p+q), \\ \sigma(p+q+1) < \dots < \sigma(p+q+r). \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

Con este fin volvamos otra vez a nuestro modelo con las columnas de automóviles. Supongamos que por la carretera se mueven tres columnas de automóviles, en la primera de las cuales hay p automóviles, en la segunda q , y en la tercera, r máquinas. Uno de los métodos de reordenación de las tres columnas mencionadas en una consiste en lo que se reúnen las columnas primera y segunda, tras lo cual la columna obtenida se reúne con la tercera. Puede emplearse también otro método, cuando se reúnen primero las columnas segunda y tercera y a la columna obtenida se junta después la primera columna. Es evidente que la permutación σ , obtenida como resultado de cualquiera de las reordenaciones citadas, satisface la condición (7.52) y, viceversa, cualquier permutación que satisface la condición (7.52) puede obtenerse tanto con ayuda del primer método, como con ayuda del segundo método de reordenación. Esto significa precisamente que $(\omega^p \wedge \omega^q) \wedge \omega^r$ y $\omega^p \wedge (\omega^q \wedge \omega^r)$ coinciden.

La asociatividad de la multiplicación exterior presta la posibilidad de estudiar cualquier producto finito

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_m, \quad \text{donde } \omega_i \in A_{p_i}(V).$$

EJEMPLO 1. Sean $a_1(\xi), a_2(\xi), \dots, a_m(\xi)$ unas formas lineales. Entonces, $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_m = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) \sigma [a_1(\xi_1) a_2(\xi_2) \dots a_m(\xi_m)]$, (7.53)

donde la sumación se realiza respecto de todas las permutaciones $\sigma \in \sum_m$.

Esta igualdad se comprueba con facilidad por inducción. Notemos que si introducimos la matriz $\{a_i(\xi_j)\}$, la igualdad (7.53) puede escribirse en la forma siguiente

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_m)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \det \{a_i(\xi_j)\}. \quad (7.54)$$

7. Base en un espacio de formas de signo variable. Elijamos una base $\{e_i\}_{i=1}^n$ en el espacio V y denotemos con $\{e^i\}_{i=1}^n$ una base en $L(V)$, conjugada de la primera. Recordemos que $e^i(\xi)$ es una forma lineal que en los elementos de la base $\{e_j\}$ toma el valor $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

En el p. 3 se ha mostrado que toda clase de productos

$$e^{i_1}(\xi_1) e^{i_2}(\xi_2) \dots e^{i_p}(\xi_p)$$

forman en $L_p(V)$ una base. Por cuanto $A_p(V) \subset L_p(V)$, cada p -forma de signo variable puede descomponerse de un modo único en una combinación lineal de productos mencionados. No obstante, estos productos no forman una base en $A_p(V)$, puesto que no son p -formas de signo variable, es decir, no pertenecen a $A_p(V)$. Sin embargo, podemos construir de ellos una base en $A_p(V)$ con ayuda de la multiplicación exterior.

Teorema 7.11. Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base en el espacio V , y sea $\{e^i\}_{i=1}^n$ una base conjugada en el espacio $L(V)$. Toda p -forma de signo variable $\omega \in A_p(V)$ puede ser representada, y, además, de un modo único, en la forma

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}. \quad (7.55)$$

Cada sumando de la suma en el segundo miembro de (7.55) representa un producto de la constante $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}$ por la forma de signo variable $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$.

DEMOSTRACIÓN. En virtud de los resultados obtenidos en el p. 4, podemos escribir

$$\omega = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1} e^{i_2} \dots e^{i_p}, \quad (7.56)$$

donde los números $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} = \omega(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_p})$ están definidos de un modo único.

Por cuanto la forma $\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ es de signo variable, para cualquier permutación $\sigma \in \sum_p$ tenemos

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) = (\text{sgn } \sigma) \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p).$$

Por consiguiente,

$$\omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(p)}} = (\text{sgn } \sigma) \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (7.57)$$

Agrupemos los sumandos en la suma (7.56) que difieren en permutación de los índices i_1, i_2, \dots, i_p , y hagamos uso de la igualdad (7.57). Obtendremos

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} e^{i_{\sigma(1)}} \dots e^{i_{\sigma(p)}} = \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \left[\sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) e^{i_{\sigma(1)}} \dots e^{i_{\sigma(p)}} \right]. \end{aligned} \quad (7.58)$$

En virtud del ejemplo en el p. 6, la suma que figura entre corchetes es $e^{i_1} \wedge \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$. El teorema está demostrado.

Corolario 1. Los elementos $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$) forman una base en el espacio $A_p(V)$. Dicha base es vacía para $p > n$, y se compone de un solo elemento, si $p = n$.

Corolario 2. La dimensión del espacio $A_p(V)$ es igual a C_p^n .

En lo que sigue se considerará, por regla general, que la base elegida e_1, e_2, \dots, e_n es fija y que las formas lineales $e^i(\xi)$ están designadas por el símbolo $e^i(\xi) = \xi^i$. Entonces, cualquier forma $\omega \in A_p(V)$ tendrá por expresión

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_p}. \quad (7.59)$$

EJEMPLO 1.

$$\begin{aligned} \xi^1 \wedge \xi^2 &= (e^1 \wedge e^2)(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) \sigma [e^1(\xi_1) e^2(\xi_2)] = \\ &= e^1(\xi_1) e^2(\xi_2) - e^1(\xi_2) e^2(\xi_1) = \xi_1^1 \xi_2^2 - \xi_1^2 \xi_2^1, \end{aligned}$$

donde ξ_i^j es el j -ésimo coeficiente en la descomposición del vector ξ_i respecto de la base $\{e_j\}$.

EJEMPLO 2.

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \dots \wedge \xi^n = \det \{\xi_i^j\},$$

donde $\xi_i = \sum_{j=1}^n \xi_i^j e_j$.

§ 2. Formas diferenciales

1. Definiciones. Examinemos un dominio arbitrario abierto G de un espacio euclídeo n -dimensional E^n . Los puntos del dominio G se denotarán con los símbolos $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$, etc.

Definición. Se llama forma diferencial de grado p , definida en el dominio G , a una función $\omega(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$, la cual representa, para todo $x \in G$ fijo, una p -forma de signo variable de $A_p(E^n)$.

El conjunto de todas las p -formas diferenciales en el dominio G se denotará con $\Omega_p(G) = \Omega_p(G, E^n)$.

Convengamos en considerar que una p -forma ω representa, para $\xi_1, \dots, \xi_p \in E^n$ fijos, una función infinitamente diferenciable en G . Aprovechando los resultados del § 1, podemos escribir cada p -forma ω del modo siguiente

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_p}. \quad (7.60)$$

En adelante el vector ξ se denotará siempre con el símbolo $dx = (dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$, y los vectores ξ_k , con los símbolos $d_k(x) = (d_k x^1, d_k x^2, \dots, d_k x^n)$. A título de base en E^n elijamos los vectores $e_k = \{0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$, donde la unidad ocupa el k -ésimo lugar. Como elementos de la base conjugada intervienen las funciones $e^k(\xi) = e^k(dx)$, definidas mediante las igualdades

$$e^k(dx) = dx^k.$$

Entonces, la forma diferencial (7.60) tendrá por expresión

$$\omega(x, d_1 x, \dots, d_p x) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

EJEMPLO 1. La 0-forma diferencial es toda función definida en el dominio G (y, en virtud de nuestra suposición, continuamente diferenciable en G).

EJEMPLO 2. La 1-forma diferencial tiene por expresión

$$\omega(x, dx) = \sum_{k=1}^n \omega_k(x) dx^k.$$

En particular, cuando $n = 1$, $\omega(x, dx) = f(x) dx$. La forma diferencial de grado 1 se llama también forma diferencial lineal.

EJEMPLO 3. La 2-forma diferencial tiene por expresión

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = \sum_{i < k} \omega_{ik}(x) dx^i \wedge dx^k.$$

Por definición,

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dx^k &= (e^i \wedge e^k)(d_1x, d_2x) = e^i(d_1x) e^k(d_2x) - \\ &- e^i(d_2x) e^k(d_1x) = d_1x^i d_2x^k - d_2x^i d_1x^k = \begin{vmatrix} d_1x^i & d_1x^k \\ d_2x^i & d_2x^k \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En particular, cuando $n = 2$, obtenemos

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 \\ d_2x^1 & d_2x^2 \end{vmatrix}.$$

El determinante es igual al elemento de área correspondiente a los vectores d_1x y d_2x .

En el caso en que $n = 3$, obtenemos, al designar $\omega_{12} = R$, $\omega_{23} = P$, $\omega_{13} = -Q$:

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 4. La 3-forma diferencial en un espacio tridimensional tiene por expresión

$$\omega(x, d_1x, d_2x, d_3x) = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix}.$$

El determinante es igual al elemento de volumen correspondiente a los vectores d_1x, d_2x, d_3x .

2. Diferencial exterior.

Definición. Se llama diferencial exterior de una forma diferencial p -lineal $\omega \in \Omega_p(G)$ a una forma $d\omega \in \Omega_{p+1}(G)$ definida mediante la correlación

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

donde

$$d\omega_{i_1 \dots i_p} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} dx^k.$$

De este modo, si

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

se tiene

$$d\omega = \sum_{h=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^h} dx^h \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

EJEMPLO 1. La diferencial de una forma de grado cero (es decir, de una función $f(x)$) tiene por expresión

$$df(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

EJEMPLO 2. Calculemos la diferencial de una forma lineal

$$\omega = \omega(x, dx) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx^i.$$

Obtendremos

$$d\omega = d\omega(x, dx) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i.$$

Por cuanto $dx^h \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^h$, y $dx^h \wedge dx^h = 0$, resulta

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{h < i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^h} dx^h \wedge dx^i + \sum_{i < h} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^h} dx^h \wedge dx^i = \\ &= \sum_{h < i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^h} dx^h \wedge dx^i - \sum_{h < i} \frac{\partial \omega_h}{\partial x^i} dx^h \wedge dx^i = \sum_{h < i} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^h} - \frac{\partial \omega_h}{\partial x^i} \right) dx^h \wedge dx^i. \end{aligned}$$

En particular, cuando $n = 2$, obtendremos para $\omega = P dx^1 + Q dx^2$:

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx^1 \wedge dx^2.$$

3. Propiedades de la diferencial exterior. Directamente de la definición se deducen las siguientes propiedades:

- 1) si $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_p(G)$, entonces $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$,
- 2) si $\omega \in \Omega^p(G)$ y λ es un número real, entonces $d(\lambda\omega) = \lambda d\omega$,
- 3) si $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q(G)$, entonces

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Demostremos la propiedad 3). Sea

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Introduzcamos una designación

$$\frac{\partial \omega}{\partial x^h} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^h} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Podemos escribir $d\omega$ en la forma

$$d\omega = \sum_{h=1}^n dx^h \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^h}.$$

Recordemos que

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

Luego,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x^k} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k} \wedge \omega_1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{k=1}^n dx^k \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^k} = \sum_{k=1}^n dx^k \wedge \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^k} \wedge \omega_2 + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{p_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial x^k} \wedge \omega_1 \right) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1} d\omega_2 \wedge \omega_1. \end{aligned}$$

Por cuanto $d\omega_2$ es una $(q+1)$ -forma, tenemos

$$d\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{p(q+1)} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

De aquí, $d\omega = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$.
Es válida la siguiente propiedad importante de la diferencial.
Propiedad fundamental de la diferencial exterior:

$$d(d\omega) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos al principio que ω es una forma de grado 0, es decir, $\omega(x) = f(x)$. Entonces,

$$d(df) = d \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} dx^k \wedge dx^i.$$

Por cuanto $dx^k \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^k$, esta igualdad puede escribirse en la forma

$$d(df) = \sum_{i < k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^k,$$

de donde proviene que $d(df) = 0$.

Ahora, sea

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Entonces,

$$d\omega = \sum_{k=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\omega_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Observemos que cada término de la suma es un producto exterior de las diferenciales de las formas de grado 0, a saber, de las formas $\omega_{i_1, \dots, i_p}(x)$.

$e^{i_1}(dx_1, \dots, e^{i_p}(dx_p)$. Resta por aplicar la propiedad 3 y aprovechar el hecho de que para la forma de grado 0 la propiedad fundamental queda demostrada.

§ 3. Aplicaciones diferenciables

1. Definición de las aplicaciones diferenciables. Examinemos un dominio arbitrario m -dimensional D del espacio euclídeo E^n y un dominio n -dimensional $G \subset E^n$. Los puntos del dominio D se denotarán con los símbolos $t = (t^1, t^2, \dots, t^m)$, y los del dominio G , con los símbolos $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Diremos que φ aplica D en G , si

$$\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\},$$

donde $\varphi^k(t)$ están definidos en el dominio D , y los vectores con las coordenadas $x^k = \varphi^k(t)$ se disponen en el dominio G .

Definamos una aplicación φ^* que traslada $\Omega_p(G)$ en $\Omega_p(D)$, cualquiera que sea p , $0 \leq p \leq n$. En este caso consideramos que cada componente $\varphi^k(t)$ de la aplicación φ es infinitamente diferenciable.

Definición. Sea φ una aplicación de $D \subset E^m$ en $G \subset E^n$. Denotemos con φ^* una aplicación que actúa, para todo $0 \leq p \leq n$, de $\Omega_p(G)$ en $\Omega_p(D)$ de conformidad con la siguiente regla: si

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

entonces

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} (\varphi(t)) \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}),$$

donde

$$\varphi^*(dx^i) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^h} dt^h.$$

EJEMPLO 1. Sea ω una forma de grado 0, es decir, $\omega = f(x)$. En este caso

$$\varphi^*(f) = f(\varphi(t)).$$

EJEMPLO 2. Supongamos que φ aplica un dominio n -dimensional $D \subset E^n$ en un dominio n -dimensional $G \subset E^n$ y que ω es una n -forma

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= \left(\sum_{h_1=1}^n \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{h_1}} dt^{h_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{h_n=1}^n \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{h_n}} dt^{h_n} \right) = \\ &= \sum_{h_1=1}^n \sum_{h_n=1}^n \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{h_1}} \dots \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{h_n}} dt^{h_1} \wedge \dots \wedge dt^{h_n} = \\ &= dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^{\sigma(n)}} = \\ &= dt^1 \wedge \dots \wedge dt^n \det \left\{ \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j} \right\}. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\varphi^*(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n) = \frac{D(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)}{D(t^1, t^2, \dots, t^n)} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^n.$$

OBSERVACION. Una forma $\varphi^*(\omega)$ se llama forma diferencial que se obtiene a partir de la forma ω por sustitución de las variables φ .

2. Propiedades de la aplicación φ^* . Son válidas las siguientes propiedades de la aplicación φ^* :

1) Si $\omega_1 \in \Omega_p(G)$, $\omega_2 \in \Omega_q(G)$, entonces,

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\omega_1 = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2 = \sum_{h_1 < \dots < h_q} b_{h_1 \dots h_q}(x) dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_q}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{h_1 < \dots < h_q} a_{i_1 \dots i_p}(x) b_{h_1 \dots h_q}(x) \times \\ &\quad \times dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{h_1} \wedge \dots \wedge dx^{h_q} \end{aligned}$$

Y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \sum_i \sum_h a_i(\varphi(t)) b_h(\varphi(t)) \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dx^{h_q}) = \\ &= \sum_i a_i(\varphi) \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}) \wedge \left[\sum_h b_h(\varphi) \varphi^*(dx^{h_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dx^{h_q}) \right] = \\ &= \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2). \end{aligned}$$

2) Si $\omega \in \Omega_p(G)$, tenemos

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN. Al principio demosetremos que esta igualdad se verifica para $p = 0$, es decir, para $\omega = f(x)$. Obtenemos

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad \varphi^*(\omega) = f(\varphi(t)), \\ d\varphi^*(\omega) &= \sum_{h=1}^m \frac{\partial}{\partial t^h} f(\varphi(t)) dt^h = \sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^h} dt^h = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \varphi^*(dx^i) = \varphi^*(d\omega). \end{aligned}$$

Para un p arbitrario realicemos la demostración por inducción. Sea $\omega = f_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Entonces, $d\omega = df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$.

Con arreglo a la propiedad 1) y la relación que acabamos de demostrar,

$$\varphi^* (d\omega) = \varphi^* (df) \wedge \varphi^* (dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge \varphi^* (dx^{i_p}).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} d\varphi^* (\omega) &= d\varphi^* [(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge dx^{i_p}] = \\ &= d[\varphi^* (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^* (dx^{i_p})]. \end{aligned}$$

Ahora, en virtud de la propiedad 3) de la diferencial exterior,

$$\begin{aligned} d\varphi^* (\omega) &= d\varphi^* (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^* (dx^{i_p}) + \\ &+ (-1)^{p-1} \varphi^* (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge d\varphi^* (dx^{i_p}). \end{aligned}$$

Notemos que $\varphi^* (dx^{i_p}) = d\varphi^* (x^{i_p})$ debido a lo que acabamos de demostrar, y, en tal caso, de acuerdo con la propiedad fundamental de la diferencial exterior, tenemos $d\varphi^* (dx^{i_p}) = 0$.

Por la suposición de inducción, legítima para $p - 1$,

$$d\varphi^* (f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}) = \varphi^* (df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}).$$

De resultas obtenemos

$$d\varphi^* (\omega) = \varphi^* (df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^* (dx^{i_p})$$

y, según la propiedad 1),

$$d\varphi^* (\omega) = \varphi^* (df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}).$$

Una propiedad que sigue abajo se llama *transitividad*.

3) Examinemos los dominios abiertos $U \subset E^l$, $V \subset E^m$, $W \subset E^n$, cuyos puntos son $u = (u^1, u^2, \dots, u^l)$, $v = (v^1, v^2, \dots, v^m)$, $w = (w^1, w^2, \dots, w^n)$, respectivamente. Supongamos que φ aplica $V \rightarrow U$, y ψ aplica $W \rightarrow V$. Con $\psi \circ \varphi$ se designará una aplicación, llamada composición, que actúa según la regla

$$(\psi \circ \varphi) (u) = \psi [\varphi (u)].$$

De un modo semejante introduzcamos una composición $\varphi^* \circ \psi^*$, la cual traslada $\Omega_p (W)$ en $\Omega_p (U)$, cualquiera que sea p , es decir,

$$(\varphi^* \circ \psi^*) (\omega) = \varphi^* [\psi^* (\omega)].$$

Resulta válida la siguiente relación

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

DEMOSTRACION. Designamos $\beta = \psi \circ \varphi$. Esto significa que $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n)$, donde

$$\beta^k = \psi^k (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m).$$

Demos, primero, la demostración para una forma lineal $d\omega^k \in \Omega_1 (W)$. Obtendremos

$$\beta^* (d\omega^k) = d\beta^* (\omega^k) = d\beta^k (u) = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \beta^k}{\partial u^i} du^i = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i.$$

Luego,

$$\begin{aligned}(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) &= \varphi^*[\psi^*(dw^k)] = \varphi^*[d\psi^*(w^k)] = \varphi^*(d\psi^k) = \\ &= \varphi^*\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} dv^j\right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \varphi^*(dv^j).\end{aligned}$$

Pero,

$$\varphi^*(dv^j) = d\varphi^*(v^j) = d\varphi^j = \sum_{i=1}^l \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i,$$

y, por lo tanto,

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} du^i$$

y la igualdad queda, pues, demostrada. De aquí se deduce la validez de la propiedad 3) para cualquier forma lineal. Ahora realicemos la demostración por inducción. Sea

$$\omega = f(w) dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_p} \in \Omega_p(W).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\beta^*(w) &= \beta^*(f dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_p}) \wedge \beta^*(du^{i_p}) = \\ &= (\varphi^* \circ \psi^*)(f dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge (\varphi^* \circ \psi^*) \times \\ &\quad \times (dw^{i_p}) = (\varphi^* \circ \psi^*)(f dw^{i_1} \wedge \dots \wedge dw^{i_p}) = \\ &= (\varphi^* \circ \psi^*)(\omega).\end{aligned}$$

§ 4. Integración de las formas diferenciales

1. **Definiciones.** Denotemos con I^m un cubo unidad en el espacio euclídeo E^m :

$$I^m = \{t \in E^m, 0 \leq t^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Por aplicación φ del cubo I^m en un dominio n -dimensional $G \subset E^n$ se entenderá la aplicación en G de cierto dominio $D \subset E^m$, dentro del cual se contiene I^m . Análogamente, llamemos p -forma diferencial ω , definida en I^m , a una p -forma definida en cierto dominio $D \subset E^m$ que contiene I^m .

Definición 1. Se denomina *integral, extendida al cubo I^p , de una p -forma*

$$\omega = f(t) dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^p,$$

definida en el cubo I^p a una magnitud

$$\int_{I^p} \omega = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(t) dt^1 dt^2 \dots dt^p.$$

Nuestro objetivo inmediato consiste en determinar la integral de una forma diferencial extendida a una superficie cualquiera. Es natural que el grado de la forma coincidirá con la dimensión de la superficie. Por superficie se entenderá la aplicación de un cubo unidad de la misma dimensión (recordemos que la noción de aplicación incluye tanto el dominio de valores, como también la ley de concordancia). Por otra parte, a veces llamaremos superficie sólo una imagen del cubo.

Definición 2. Se denominará *cubo singular* m -dimensional en un espacio E^n ($m \leq n$) a una aplicación diferenciable del cubo I^m en E^n . De este modo, denotando el cubo singular con C , podemos escribir

$$C = \varphi: I^m \rightarrow E^n.$$

Diremos que el cubo singular C está contenido en $G \subset E^n$, si $\varphi(I^m) \subset G$. Ahora podemos determinar la integral de cualquier p -forma $\omega \in \Omega_p(G)$ extendida a cualquier cubo singular p -dimensional $C \subset G$.

Definición 3. Se denomina *integral de la forma* $\omega \in \Omega_p(G)$, extendida al cubo singular $C = \varphi: I^p \rightarrow E^n$ contenido en G , a una magnitud

$$\int_C \omega = \int_{I^p} \varphi^*(\omega).$$

Cerciorémonos de que la integral de una p -forma, extendida al cubo singular p -dimensional C , depende sólo de la imagen $\varphi(I^p)$, y no de la ley de correspondencia φ .

Analicemos, ante todo, más detalladamente la definición de integral de ω extendida al cubo singular C .

Supongamos que $\omega \in \Omega_p(G)$ tiene por expresión $\omega = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$, y, en este caso, $\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)] \varphi^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p)$. En virtud del ejemplo 2 en el p. 1, § 3,

$$\varphi^*(\omega) = f[\varphi(t)] \frac{D(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^p)}{D(t^1, t^2, \dots, t^p)} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^p.$$

Por consiguiente,

$$\int_C \omega = \int_{I^p} f[\varphi(t)] \frac{D(\varphi^1, \dots, \varphi^p)}{D(t^1, \dots, t^p)} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^p.$$

Definición 4. Sean $C_1 = \varphi_1: I^p \rightarrow E^n$ y $C_2 = \varphi_2: I^p \rightarrow E^n$ dos cubos singulares. Diremos que $C_1 = C_2$, si existe una aplicación biunívoca τ del cubo I^p sobre sí mismo de tal género que

- 1) $\varphi_1(t) = \varphi_2[\tau(t)]$,
- 2) $\frac{D(\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^p)}{D(t^1, t^2, \dots, t^p)} > 0$.

Está claro que si $C_1 = C_2$, se verifica la igualdad $C_2 = C_1$, puesto que la aplicación inversa τ^{-1} satisface las exigencias necesarias.

Suele decirse que $C_1 = -C_2$, si en la condición 2) el determinante funcional es siempre inferior a cero (es evidente que en este caso $C_2 = -C_1$). Se dice, entonces, que C_1 y C_2 se diferencian en orientación.

Es válida la siguiente afirmación: si $C_1 = C_2$, se tiene

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Demos la demostración para el caso en que

$$\omega = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p.$$

Por definición,

$$\int_{C_2} \omega = \int_{I^p} f[\varphi_2(t)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \dots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \dots, t^p)} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^p.$$

Por hipótesis, existe una aplicación τ del cubo I^p sobre sí mismo que satisfice las condiciones 1) y 2).

Realicemos en la integral el cambio de la variable $t = \tau(s)$, $s \in I^p$. Obtendremos $\varphi_2(t) = \varphi_2[\tau(s)] = \varphi_1(s)$,

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \omega &= \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_2^1, \varphi_2^2, \dots, \varphi_2^p)}{D(t^1, t^2, \dots, t^p)} \frac{D(\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^p)}{D(s^1, s^2, \dots, s^p)} ds^1 \wedge ds^2 \wedge \dots \wedge ds^p = \\ &= \int_{I^p} f[\varphi_1(s)] \frac{D(\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^p)}{D(s^1, \dots, s^p)} ds^1 \wedge \dots \wedge ds^p = \int_{C_1} \omega. \end{aligned}$$

De un modo análogo podemos probar que si $C_1 = -C_2$, entonces

$$\int_{C_1} \omega = - \int_{C_2} \omega.$$

2. Cadenas diferenciables. Nos harán falta unas superficies que se descomponen en varios pedazos, cada uno de los cuales es una imagen de cierto cubo m -dimensional. Como ejemplo de tal superficie pueden servir dos circunferencias de la frontera de un anillo que se dispone en un plano bidimensional. En este caso distinguiremos las orientaciones de dichas circunferencias. Con este motivo resulta útil introducir las combinaciones lineales de los cubos singulares con coeficientes reales.

Definición 1. Llamemos cadena p -dimensional C a un juego arbitrario

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, C_1, C_2, \dots, C_k\},$$

donde λ_i son números reales, y C_i , cubos singulares p -dimensionales. Se emplearán las siguientes designaciones

$$C = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_k C_k.$$

Diremos que C pertenece a G , si todos los C_i pertenecen a G .

El conjunto de cadenas p -dimensionales forma un espacio lineal, si introducimos de un modo natural las operaciones de sumación y multiplicación por unos números reales.

Definición 2. Se llama integral de la forma ω , extendida a la cadena p -dimensional C contenida en G , a una magnitud

$$\int_C \omega = \lambda_1 \int_{C_1} \omega + \lambda_2 \int_{C_2} \omega + \dots + \lambda_k \int_{C_k} \omega.$$

Podemos determinar, ahora, la frontera de un cubo singular arbitrario. Con este fin hallemos, al principio, la frontera de un cubo unidad.

Definición 3. Se llama frontera del cubo I^p a una cadena $(p-1)$ -dimensional

$$\partial I^p = \sum_{i=1}^p (-1)^i [I_0^p(i) - I_1^p(i)],$$

donde $I_\alpha^p(i)$ es la intersección del cubo I^p con un hiperplano $x^i = \alpha$, ($\alpha = 0, 1$).

Para que la definición aducida sea correcta, es necesario explicar qué sentido tiene la afirmación de lo que $I_\alpha^p(i)$ es un cubo singular $(p-1)$ -dimensional.

Construyemos una aplicación canónica $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_i^{\alpha, p}$ del cubo I^{p-1} sobre $I_\alpha^p(i)$. Sea $s = (s^1, s^2, \dots, s^{p-1}) \in I^{p-1}$. Pongamos

$$\tilde{\varphi}^k(s) = \begin{cases} s^k, & \text{si } 1 \leq k < i, \\ \alpha, & \text{si } k = i, \\ s^{k-1}, & \text{si } i < k \leq p. \end{cases}$$

Es evidente que $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2, \dots, \tilde{\varphi}^p)$ aplica biunívocamente I^{p-1} sobre $I_\alpha^p(i)$. En particular, cuando $\alpha = 0$ e $i = p$, la aplicación φ es una restricción en $I_0^p(p-1)$ de la aplicación idéntica del espacio E^p sobre sí mismo.

Definición 4. Se llama frontera del cubo singular p -dimensional $C = \varphi: I^p \rightarrow E^n$ a una cadena $(p-1)$ -dimensional

$$\partial C = \sum_{i=1}^n (-1)^i [\varphi(I_0^p(i)) - \varphi(I_1^p(i))].$$

Así pues, la frontera de la imagen del cubo I^p es la imagen de la frontera de I^p con orientación natural.

EJEMPLO 1. Examinemos en el plano un cuadrado I^2 . Es evidente que este cuadrado puede considerarse como un cubo singular, al tomar a título de φ una

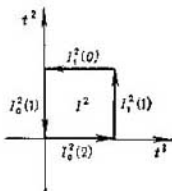


Fig. 7.11.

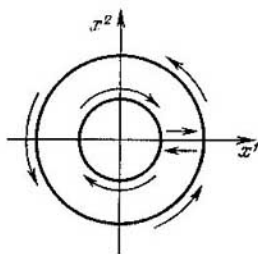


Fig. 7.12.

aplicación idéntica. En la fig. 7.11 se señala la frontera de este cuadrado, con la particularidad de que el sentido de las flechas coincide con la dirección de crecimiento del parámetro t^k , respecto del cual se realiza la integración, en el caso en que el lado dado del cuadrado integra la cadena ∂I^2 con el signo $+$, y la dirección de las flechas es contraria, si el lado se toma con el signo $-$. Vemos que nuestro convenio de los signos conduce al recorrido ordinario de la frontera en el sentido contrahorario.

Ejemplo 2. Veamos un cubo singular $C = \varphi: I^2 \rightarrow R^2$, donde φ tiene por expresión

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= (a + Rt^1) \cos 2\pi t^2, \\ \varphi^2 &= (a + Rt^1) \operatorname{sen} 2\pi t^2. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\varphi(I^2)$ es un anillo cuya frontera está formada por las circunferencias de radios a y $a + R$. Aclaremos qué constituye la frontera del cubo

singular C . Es obvio que $\varphi(I_0^2(1))$ es una circunferencia

$$\varphi^1 = a \cos 2\pi t^2,$$

$$\varphi^2 = a \operatorname{sen} 2\pi t^2.$$

Luego, $\varphi(I_1^2(1))$ es una circunferencia de radio $a + R$. Por fin, $\varphi(I_0^2(2))$ y $\varphi(I_1^2(2))$ es un segmento $x^2 = 0$, $a \leq x^1 \leq a + R$.

En la fig. 7.12 las flechas señalan la dirección del recorrido de la frontera ∂C , si el recorrido se realiza en el sentido contrahorario.

Por cuanto $\varphi(I_0^2(2)) - \varphi(I_1^2(2)) = 0$, podemos considerar que

$$\partial C = \varphi(I_1^2(1)) - \varphi(I_0^2(1)),$$

lo que coincide con la interpretación ordinaria de la frontera de un anillo.

Aclaremos de qué modo están ligadas entre sí la integral de la forma ω a lo largo de la frontera del cubo C y la de la forma $\varphi^*(\omega)$ a lo largo de la frontera de I^p .

Afirmación. Sea $C = \varphi: I^p \rightarrow E^n$ un cubo singular arbitrario contenido en G , y sea $\omega \in \Omega_{p-1}(G)$. Resulta válida una igualdad

$$\int_{\partial C} \omega = \int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

DEMOSTRACION Es evidente que, tomando en consideración la definición de la integral por una cadena, basta demostrar la igualdad

$$\int_{\varphi(I_\alpha^p(i))} \omega = \int_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega).$$

Veamos una aplicación canónica $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_i^{\alpha, p}: I^{p-1} \rightarrow I_\alpha^p(i)$. Por definición,

$$\int_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega) = \int_{I^{p-1}} \tilde{\varphi}^*[\varphi^*(\omega)].$$

En virtud de la propiedad 3) de las aplicaciones diferenciables (véase p. 2, § 3),

$$\tilde{\varphi}^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \tilde{\varphi})^*.$$

De este modo,

$$\int_{I_\alpha^p(i)} \varphi^*(\omega) = \int_{I^{p-1}} (\varphi \circ \tilde{\varphi})^*(\omega) = \int_{(\varphi \circ \tilde{\varphi})(I^{p-1})} \omega = \int_{\varphi(I_\alpha^p(i))} \omega,$$

puesto que $(\varphi \circ \tilde{\varphi})(I^{p-1}) = \varphi(I_\alpha^p(i))$.

3. Fórmula de Stokes.

Teorema fundamental. Sea $C = \varphi: I^p \rightarrow E^n$ un cubo singular arbitrario contenido en G , y sea $\omega \in \Omega_{p-1}(G)$. Es válida la fórmula de Stokes

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Demostremos, al principio, la fórmula de Stokes en el siguiente caso particular.

Sea ω una forma diferencial de grado $p - 1$, definida en I^p . Se verificará una igualdad

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{\partial I^p} \omega. \tag{7.61}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega = f(t) dt^2 \wedge \dots \wedge dt^p$. Por definición,

$$\int_{\partial I^p} \omega = \sum_{i=1}^p (-1)^i \left(\int_{I_0^p(i)} \omega - \int_{I_1^p(i)} \omega \right).$$

Calculemos la siguiente integral:

$$\int_{I_\alpha^p(i)} \omega, \text{ donde } i = 1, 2, \dots, p, \alpha = 0, 1.$$

Veamos una aplicación canónica $\tilde{\varphi}: I^{p-1} \rightarrow I_\alpha^p(i)$. Teniendo presentes los resultados de este párrafo, resulta

$$\int_{I_\alpha^p(i)} \omega = \int_{I^{p-1}} f[\tilde{\varphi}(s)] \frac{D(\tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^p)}{D(s^1, \dots, s^{p-1})} ds^1 \wedge \dots \wedge ds^{p-1}.$$

Por definición de la aplicación canónica $\tilde{\varphi}_i^{\alpha,p}$, el jacobiano tiene por expresión

$$J = \frac{D(s^2, \dots, s^{i-1}, \alpha, s^i, \dots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \dots, s^{p-1})} = 0,$$

si $i \neq 1$, y

$$J = \frac{D(s^1, s^2, \dots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \dots, s^{p-1})} = 1, \text{ si } i = 1.$$

De este modo, sólo las integrales extendidas a $I_\alpha^p(i)$ pueden ser distintas de cero, y, por eso, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^p} \omega &= (-1) \left(\int_{I_0^p(1)} \omega - \int_{I_1^p(1)} \omega \right) = \int_{I^{p-1}} f(1, s^1, s^2, \dots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \dots \\ &\dots \wedge ds^{p-1} - \int_{I^{p-1}} f(0, s^1, \dots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \dots \wedge ds^{p-1}. \end{aligned}$$

Por definición de integral extendida a un cubo I^{p-1} ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^p} \omega &= \int_0^1 \dots \int_0^1 [f(1, s^1, \dots, s^{p-1}) - f(0, s^1, \dots, s^{p-1})] ds^1 ds^2 \dots ds^{p-1} = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0 ds^1 \dots ds^{p-1} = \int_{I^p} \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0 \wedge \dots \wedge ds^{p-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^p.$$

Por consiguiente,

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{I^p} \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^p.$$

La igualdad (7.61) queda demostrada.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE STOKES. Por definición de la integral extendida a un cubo singular, tenemos

$$\int_C d\omega = \int_{I^p} \varphi^* (d\omega).$$

En virtud de la propiedad 2) de las aplicaciones diferenciables (véase p. 2, § 3),

$$\int_{I^p} \varphi^* (d\omega) = \int_{I^p} d\varphi^* (\omega).$$

Ahora aprovechamos la fórmula de Stokes, ya demostrada, para el cubo I^p :

$$\int_{I^p} d\varphi^* (\omega) = \int_{\partial I^p} \varphi^* (\omega).$$

Resta por observar que según la propiedad de las integrales a lo largo de la frontera de un cubo singular (véase el fin del p. 2 del párrafo presente)

$$\int_{\partial I^p} \varphi^* (\omega) = \int_{\partial C} \omega.$$

El teorema está completamente demostrado.

4. Ejemplos. 1) Examinemos un caso de $p = 1$. Un cubo singular unidimensional C en E^n representa una curva cuyos extremos se denotarán con a y b . La fórmula de Stokes adquiere la forma

$$\int_C df = \int_{\partial C} f = f(b) - f(a).$$

En particular, cuando $n = 1$, obtenemos la fórmula de Newton—Leibniz

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

2) Sea, ahora, $p = 2$. Un cubo singular bidimensional C representa una superficie bidimensional, la forma $\omega \in \Omega_1$ tiene por expresión

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k dx^k.$$

Sirviéndonos de ejemplo, 2, p. 2, § 2, obtenemos

$$\int_C \sum_{k < i} \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega^k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i = \int_{\partial C} \sum_{h=1}^n \omega_h dx^h.$$

Si $n = 2$, obtendremos, al designar $\omega = P dx^1 + Q dx^2$, la fórmula de Green

$$\int_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial C} P dx^1 + Q dx^2.$$

Si $n = 3$, obtendremos la fórmula corriente de Stokes.

3) Sea $p = n$. Entonces, $\omega \in \Omega_{n-1}$ tiene por expresión

$$\omega = \sum_{h=1}^n \omega_h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{h-1} \wedge dx^{h+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Luego,

$$d\omega = \sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_h}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} \frac{\partial \omega_h}{\partial x^h} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

En particular, cuando $n = 3$, tenemos

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2,$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

y obtenemos la fórmula de Ostrogradski.