Capítulo 8

MEDIDA E INTEGRAL DE LEBESGUE

En el capítulo 1 (v. II) y en el capítulo 2 de este volumen se estudiaba la integral de Riemann de la función de una y de n variables, respectivamente. El concepto de integral de Riemann abarcaba una clase de funciones o bien estrictamente continuas en un dominio que se consideraba, o bien próximas a las continuas (el conjunto de puntos de discontinuidad de tales funciones tiene un volumen n-dimensional igual a cero). Dicho concepto resulta ser insuficiente en una serie de apartados fundamentales de las matemáticas modernas (en la teoría de las funciones generalizadas, en la teoría moderna de las ecuaciones con derivadas parciales, y en otros).

En el presente capítulo se expone la teoría de una integral más general, a saber, de la llamada *integral de Lebesgue* [1]), para lo cual se desarrolla preliminarmente la teoría de la medida y de las así llamadas *funciones medibles* (que representan una amplia generalización de las funciones continuas).

La idea fundamental de la integral de Lebesgue, que lo hace diferente de la integral de Riemann, consiste en que, al componer la suma integral lebesguiana, los puntos se reúnen en sumandos separados no según la proximidad de dichos puntos en un dominio de integración (como se hacía en la suma integral de Riemann), sino a base de la proximidad en estos puntos de los valores de la función integrable. Esta idea permite precisamente extender el concepto de integral a una clase muy amplia de funciones.

Conviene notar que varias teorías matemáticas que admiten el entendimiento de una integral en el sentido de Riemann adquieren un carácter más acabado cuando se usa la integral de Lebesgue. Como ejemplo de tal teoría sirve la teoría de las series de Fourier que se expone con el empleo de la integral en el sentido de Riemann en el cap. 1, y de la integral de Lebesgue, en el cap. 2.

En este capítulo la exposición se realiza para el caso de una sola variable, aunque puede ser aplicada sin dificultades algunas al caso de cualquier número n de variables (la observación correspondiente se aduce al final del capítulo).

---

[1]) A. Lebesgue (1875—1941), matemático francés.

§ 1. Sobre la estructura de los conjuntos abiertos y cerrados

Examinemos un conjunto arbitrario E de puntos de una recta infinita $(-\infty, \infty)$.

Llamemos *complemento del conjunto* E a un conjunto denotado con el símbolo CE e igual a una totalidad de aquellos puntos de la recta infinita $(-\infty, \infty)$ que no pertenecen al conjunto E.

Si llamamos *diferencia* de los conjuntos A y B una totalidad de aquellos puntos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B, y si denotamos la diferencia de los conjuntos A y B con el símbolo $A \setminus B$, el complemento CE del conjunto E puede ser representado en la forma

$$CE = (-\infty, \infty) \setminus E.$$

Recordemos algunas definiciones introducidas en el v. I.

1°. Un punto x se denomina *punto interior* del conjunto E, si existe un entorno del punto x (es decir, un intervalo que contiene dicho punto) íntegramente perteneciente al conjunto E.

En adelante un entorno arbitrario del punto x se denotará con el símbolo $v(x)$.

2°. Un punto x se llama *punto límite* del conjunto E, si en todo entorno $v(x)$ del punto x existe por lo menos un solo punto x^1 del conjunto E que sea distinto de x.

3°. Un conjunto G se llama *abierto*, si todos los puntos de este conjunto son interiores.

4°. Un conjunto F se llama *cerrado*, si contiene todos los puntos límites suyos [1]).

Una totalidad de todos los puntos límites de un conjunto arbitrario E se denotará con el símbolo E', y *la suma* o *unión* de dos conjuntos A y B, con el símbolo $A + B$, o bien $A \cup B$ [2]). Convengamos en llamar *clausura* de un conjunto arbitrario E a un conjunto que se designa por el símbolo $\bar{E}$ y que es igual a la suma $E + E'$.

Es evidente que para cualquier conjunto cerrado F se verifica la igualdad $\bar{F} = F$.

Una totalidad de todos los puntos interiores de un conjunto arbitrario E se designará por el símbolo int E [3]).

Es evidente que para cualquier conjunto abierto F se verifica la igualdad int $G = G$.

---

[1]) En particular, un conjunto privado de puntos límites es cerrado (pues, el conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto).

[2]) Se llama *suma* o *unión* de los conjuntos A y B a un conjunto C que se compone de los puntos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos A o B.

[3]) Int, tres primeras letras de la palabra francés «intérieur» (parte interior).

Para un conjunto sumamente arbitrario E el conjunto int E es abierto, mientras que el conjunto $\overline{E}$ es cerrado.

OBSERVACIÓN. Se puede mostrar que int E es una suma de todos los conjuntos abiertos contenidos en E, y $\overline{E}$ es intersección [1]) de todos los conjuntos cerrados que contienen E. De este modo, int E representa un conjunto abierto *más grande* de los que están contenidos en E, y $\overline{E}$ es un conjunto cerrado *más pequeño* de los que contienen E.

Detengámonos en las propiedades más simples de los conjuntos abiertos y cerrados.

1°. *Si un conjunto F es cerrado, su complemento CF será abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Un punto cualquiera x del conjunto CF no pertenece a F y (en virtud del carácter cerrado de F) no pertenece al conjunto F' de puntos límites de F. Mas, esto es indicio de que cierto entorno $v(x)$ del punto x no pertenece a F, y, por eso, pertenece a CF.

2°. *Si un conjunto G es abierto, su complemento CG será cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquier punto límite x del conjunto CG pertenece a ciencia cierta a este conjunto, pues, en el caso contrario, x perteneciera a G, y por cuanto G es un conjunto abierto, entonces un entorno $v(x)$ del punto x también perteneciera a G, y no a CG, es decir, el punto x no fuera punto límite de CG.

3°. *La suma de cualquier número de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea E una suma de cualquier número de conjuntos abiertos G_α (el índice α no es, en el caso general, un número) y sea x un punto arbitrario de E. Entonces (por definición de la suma de conjunjos) x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos G_α, y por cuanto cada conjunto de G_α es abierto, se encontrará cierto entorno $v(x)$ del punto x que también pertenece al conjunto citado de G_α, y, por tanto, al conjunto E también.

4°. *Una intersección de cualquier número finito de conjuntos abiertos será un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el conjunto E es una intersección de los conjuntos abiertos $G_1, G_2, \ldots, G_n$, y que x es un punto cualquiera de E. Entonces, el punto x pertenece a G_k, cualquiera que sea k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, por lo cual existe un entorno $v_k(x) = (x - \varepsilon_k, x + \varepsilon_k)$, $\varepsilon_k > 0$, del punto x que también pertenece a G_k. Si $\varepsilon = \min\{\varepsilon_k, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, el entorno $v(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ del punto x pertenece a todos los G_k, a consecuencia de lo cual pertenece también a E.

5°. *La intersección de cualquier número de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

1) Se llama *intersección* de A y B un conjunto de puntos que pertenecen tanto a A, como a B.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el conjunto E representa una intersección de cualquier número de conjuntos cerrados F_α (el índice α, no es, en el caso general, un número). Notemos que el complemento CE representa una suma de todos los complementos CF_α, cada uno de los cuales es, de acuerdo con 1°, un conjunto abierto.

Según 3°, el conjunto CE es abierto, razón por la cual, en virtud de 2°, el conjunto E es cerrado.

6°. *La suma de un número finito de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea E una suma de conjuntos cerrados $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Entonces, CE representa una intersección de los conjuntos $CF_1, CF_2, \ldots, CF_n$, cada uno de los cuales es, en virtud de 1°, abierto. De acuerdo con 4°, el conjunto CE es abierto, y, por eso, en virtud de 2°, el conjunto E es cerrado.

7°. *Si el conjunto F es cerrado y el conjunto G, abierto, el conjunto $F\setminus G$ será cerrado y el $G\setminus F$, abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente notar que el conjunto $F\setminus G$ es una intersección de los conjuntos cerrados F y CG, mientras que el conjunto $G\setminus F$ es intersección de los conjuntos abiertos G y CF.

Sirviéndonos de las propiedades establecidas, demostremos un teorema sobre la estructura de un conjunto abierto arbitrario de puntos de una recta infinita.

Convengamos en denominar (aquí y en adelante en este capítulo) intervalo a cualquier conjunto abierto conexo de puntos de una recta infinita (no forzosamente acotado). Dicho de otro modo, un intervalo representa o bien un segmento abierto $a < x < b$, o bien una de las semirrectas abiertas $a < x < \infty$, o $-\infty < x < b$, o bien toda la recta infinita $-\infty < x < \infty$.

Teorema 8.1. *Todo conjunto abierto de puntos de una recta infinita representa una suma de un número finito o numerable*[1]) *de intervalos disjuntos dos a dos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un conjunto abierto cualquiera y sea x, cualquier punto fijo en G. Por cuanto G es abierto, se encontrará un entorno $v(x)$, contenido en G, del punto x. La suma de todos los entornos $v(x)$ del punto fijo dado x contenidos en G se denotará con $I(x)$. Demostremos que $I(x)$ es un *intervalo*.

Denotemos con a la cota inferior exacta del conjunto de todos los punto de $I(x)$ (en el caso en que el conjunto de todos los puntos de $I(x)$ no está acotado inferiormente, pongamos $a = -\infty$), y con b la cota superior exacta del conjunto de todos los puntos de $I(x)$ (en el caso en que el conjunto de todos los puntos de $I(x)$ no está acotado superiormente, pongamos $b = \infty$). Basta probar que un punto arbitrario y del intervalo (a, b) pertenece a $I(x)$. Sea y un

[1]) Recordemos que *numerable* se denomina un conjunto infinito cuyos elementos pueden ser numerados, es decir, puestos en una correspondencia biunívoca con la serie natural de números 1, 2, 3, . . . (véase v. I, cap 3, § 4, p. 6).

punto arbitrario del intervalo (a, b). Convengamos en considerar, para concretar, que $a < y < x$ (el caso en que $x < y < b$ se estudia de una manera sumamente análoga). Por definición de la cota inferior exacta, existe un punto y' que pertenece a $I(x)$ y que es de tal índole que $a \leqslant y' < y$. Mas, esto significa que se encontrará un entorno $v(x)$ del punto fijo x que contiene el punto y'. En virtud de las desigualdades $y' < y < x$, resulta que el mismo entorno $v(x)$ contiene también el punto y. De aquí se deduce que también $I(x)$ contiene y, con lo que queda demostrada la afirmación de que $I(x)$ es un intervalo. Puede decirse que $I(x)$ es el intervalo *más grande* contenido en G que contiene el punto x.

Ahora, cerciorémonos de que si los intervalos $I(x_1)$ e $I(x_2)$ están construidos para dos puntos diferentes fijos x_1 y x_2 del conjunto G, dichos intervalos *o bien no tienen puntos comunes, o bien coinciden*. Efectivamente, si los intervalos $I(x_1)$ e $I(x_2)$ contuvieran un punto común x, se contendrían ambos en $I(x)$ y, por eso, coincidirían.

Al construir para cada punto x su propio intervalo $I(x)$, elijamos ahora los intervalos que no contienen puntos comunes (es decir, disjuntos dos a dos). Cada uno de estos intervalos contiene por lo menos un solo punto racional (lo que se conoce del cap. 2, v. I). Por cuanto el conjunto de todos los puntos racionales es numerable (véase v. 1, cap. 3, § 4, p. 6), el número de todos los intervalos $I(x)$ disjuntos dos a dos, es a lo sumo numerable. Ya que la suma de todos los intervalos de esta índole constituye el conjunto G, el teorema queda demostrado.

Corolario. *Todo conjunto cerrado de puntos de una recta infinita se obtiene suprimiendo en la recta finita un número finito o numerable de intervalos disjuntos dos a dos.*

§ 2. Conjuntos medibles

1. Medida exterior de un conjunto y sus propiedades. Toda la teoría que se expone en este párrafo se debe a A. Lebesgue. De punto de partida en dicha teoría sirve el empleo, a título del conjunto principal (original), de un intervalo $\Delta = (a, b)$, cuya longitud o medida se considera conocida e igual al número $|\Delta| = b - a > 0$.

Sea E un conjunto arbitrario sobre una recta numérica. Se denomina *recubrimiento* $S = S(E)$ de un conjunto E a todo sistema finito o numerable de intervalos $\{\Delta_n\}$, la suma de los cuales contiene el conjunto E. La suma de longitudes de todos los intervalos $\{\Delta_n\}$ que integran el recubrimiento $S = S(E)$ se denotará con el símbolo $\sigma(S)$.

Así pues,

$$\sigma(S) = \sum_n |\Delta_n| \leqslant \infty.$$

Definición. *Se llama medida exterior del conjunto E a una cota inferior exacta de $\sigma(S)$ sobre el conjunto de todos los recubrimientos $S = S(E)$ del conjunto E.*

La medida exterior del conjunto E se denotará con el símbolo $|E|^*$. Así pues, por definición

$$|E|^* = \inf_{S(E)} \sigma(S).$$

Evidentemente, la medida exterior de cualquier intervalo coincide con la longitud de este intervalo.

Pongamos en claro las propiedades de la medida exterior.

1°. *Si el conjunto E_1 está contenido en E_2* [1]), *tendremos* $|E_1|^* \leqslant |E_2|^*$. Para demostrar, basta notar que cualquier recubrimiento de E_2 es simultáneamente el recubrimiento de E_1.

2°. *Si un conjunto E representa una suma de un número finito o numerable de conjuntos $\{E_k\}$ (simbólicamente $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$), entonces*

$$|E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^*. \tag{8.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por definición de una medida $|E_k|^*$ como cota inferior exacta, para cada número k existe tal recubrimiento $S_k(E_k)$ del conjunto E_k por un sistema de intervalos $\{\Delta_n^k\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n^k| \leqslant |E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{8.2}$$

Designemos con S un recubrimiento de todo el conjunto E que reúne todos los recubrimientos S_k $(k = 1, 2, \ldots)$ y que se compone de todos los intervalos $\{\Delta_n^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$. Por cuanto S es un recubrimiento de E, entonces $|E|^* \leqslant \sigma(S)$, pero $\sigma(S) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\Delta_n^k|$.

De las dos últimas relaciones y de (8.2) obtenemos

$$|E|^* \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(|E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|^* + \varepsilon.$$

La desigualdad (8.1) está demostrada.

Convengamos en llamar distancia entre los conjuntos E_1 y E_2 la cota inferior exacta de las distancias entre dos puntos de los conjuntos E_1 y E_2, respectivamente.

---

[1]) El hecho de que el conjunto E_1 está contenido en E_2 se designa simbólicamente así: $E_1 \subset E_2$.

Designaremos la distancia entre los conjuntos E_1 y E_2 por el símbolo $\rho(E_1, E_2)$.

3°. *Si* $\rho(E_1, E_2) > 0$, *tenemos* $|E_1 \cup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $\delta = \frac{1}{2}\rho(E_1, E_2)$. Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario y para $\delta > 0$ elegido existe tal recubrimiento $S(E)$ del conjunto $E = E_1 \cup E_2$, que $\sigma(S) \leqslant |E|^* + \varepsilon$, y la longitud de cada intervalo del recubrimiento $|\Delta_n|$ es inferior a δ [1]). Evidentemente, los intervalos Δ_n que recubren los puntos de E_1 no contienen puntos de E_2, y, viceversa, los intervalos que recubren los puntos de E_2 no contienen puntos de E_1. De otras palabras, el recubrimiento tomado $S(E)$ se desintegra en una suma de dos recubrimientos: $S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2)$, el primero de los cuales S_1 recubre E_1, y el segundo recubrimiento S_2 recubre E_2. Llegamos, pues, a que

$$S_1(E_1) + S_2(E_2) \leqslant |E|^* + \varepsilon.$$

De aquí proviene que $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E|^* + \varepsilon$, y, por tanto (en virtud de que ε es arbitrario), $|E_1|^* + |E_2|^* \leqslant |E|^*$. Por cuanto, según la propiedad 2°, se verifica también la desigualdad inversa $|E|^* \leqslant |E_1|^* + |E_2|^*$, resulta que $|E|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$. La propiedad 3° está demostrada.

En particular, la propiedad 3° queda válida, si E_1 y E_2 son acotados, cerrados y no contienen puntos comunes.

4°. *Para un conjunto arbitrario E y un número arbitrario $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto G que contiene E y es de tal índole que* $|G|^* \leqslant |E|^* + \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar a título de G la suma de todos los intervalos que componen el recubrimiento $S(E)$ del conjunto E, para el cual $\sigma(S) \leqslant |E|^* + \varepsilon$.

2. Conjuntos medibles y sus propiedades.

Definición 1. *Un conjunto E se llama medible, si para cualquier número positivo ε existe un conjunto abierto G que contiene E y es de tal índole que la medida exterior de la diferencia $G \setminus E$ es inferior a ε.*

La medida exterior del conjunto medible E se llamará medida de dicho conjunto y se denotará con el símbolo $|E|$.

De esta definición se deduce que la medida del conjunto E es igual a cero cuando, y sólo cuando, es nula la medida exterior de este conjunto.

---

[1]) Esto se deduce de lo que para $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ *arbitrarios* existe un recubrimiento $S(E)$ del conjunto E tal que $\sigma(S) < |E|^* + \varepsilon$, y $\Delta_n < \delta$ (para todo intervalo Δ_n del recubrimiento S). Para cerciorarse de ello, basta, al tomar un recubrimiento S', para el cual $\sigma(S') < |E|^* + \frac{\varepsilon}{2}$, dividir cada intervalo del recubrimiento S' en intervalos de longitud inferior a δ, y, después, recubrir los extremos de estos últimos intervalos con los intervalos, cuyas longitudes sumadas constituyen en total una magnitud inferior a $\varepsilon/2$.

Demostremos una serie de afirmaciones que aclaran las propiedades principales de los conjuntos medibles.

Teorema 8.2. *Todo conjunto abierto es medible, con la particularidad de que su medida es igual a la suma de intervalos disjuntos dos a dos que lo componen.*

La demostración es obvia (basta tomar $G = E$ en la definición de mensurabilidad y constatar que la cota inferior exacta de $\sigma(S)$ se logra sobre el recubrimiento S coincidente con la partición de E en una suma de intervalos disjuntos dos a dos).

Teorema 8.3. *Una suma de un número finito o numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, siendo cada E_n medible. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Para todo conjunto E_n existe un conjunto abierto G_n que contiene E_n y que es de tal índole que

$$| G_n \setminus E_n |^* < \varepsilon \cdot 2^{-n}. \tag{8.3}$$

Al poner $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, notemos que el conjunto E está contenido en G y que la diferencia $G \setminus E$ está contenida en la suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$. Mas, en este caso, de la propiedad 2° de la medida exterior (véase el punto antecedente) y de la desigualdad (8.3) obtenemos

$$|G \setminus E|^* \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon.$$

El teorema está demostrado.

Teorema 8.4. *Todo conjunto cerrado F es medible.*

DEMOSTRACIÓN. Realicemos la demostración en dos etapas.

1°. Supongamos al principio que el conjunto F *está acotado.* Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. De acuerdo con la propiedad 4° de la medida exterior (véase el punto antecedente), existe un conjunto abierto G que contiene F y que es de tal índole que

$$| G |^* \leqslant | F |^* + \varepsilon. \tag{8.4}$$

Según la propiedad 7° del § 1, el conjunto $G \setminus F$ es abierto. Por eso, de acuerdo con el teorema 8.1, el conjunto $G \setminus F$ puede representarse en forma de una suma $G \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ de intervalos disjuntos dos a dos. El teorema quedará demostrado, si establecemos que

$$|G \setminus F|^* = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \varepsilon. \tag{8.5}$$

Convengamos en denotar (para cada intervalo $\Delta = (a, b)$ y todo número α del intervalo $0 < \alpha < \frac{b-a}{2}$) con el símbolo Δ^α un intervalo $\Delta^\alpha = (a + \alpha, b - \alpha)$, y con el símbolo $\overline{\Delta}^\alpha$ un segmento $\overline{\Delta}^\alpha = [a + \alpha, b - \alpha]$. En cambio, si $\alpha \geqslant \frac{b-a}{2}$, con Δ^α se designará un conjunto vacío, para el cual $|\Delta^\alpha| = 0$. Para todo número n pongamos $\overline{E}_n^\alpha = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k^\alpha$. Es evidente que $|\overline{E}_n^\alpha|^* = \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k^\alpha|$. El conjunto $\overline{E}_n^\alpha$ es, de acuerdo con la propiedad 6° del § 1, cerrado. Por cuanto este conjunto no tiene puntos comunes con el conjunto cerrado F, entonces (en virtud de la propiedad 3° de la medida exterior)

$$|\overline{E}_n^\alpha + F|^* = |\overline{E}_n^\alpha|^* + |F|^*. \tag{8.6}$$

Por otra parte, ya que el conjunto $\overline{E}_n^\alpha + F$ (para todo $\alpha > 0$ y para todos los números n) está contenido en G, tendremos (en virtud de la propiedad 1° de la medida exterior)

$$|\overline{E}_n^\alpha + F|^* \leqslant |G|^*. \tag{8.7}$$

De (8.5), (8.6) y (8.7) obtenemos

$$|\overline{E}_n^\alpha|^* + |F|^* \leqslant |F|^* + \varepsilon \tag{8.8}$$

(para todo $\alpha > 0$ y todo número n). Por cuanto el conjunto F es acotado y su medida exterior $|F|^* < \infty$, de (8.8) resulta que

$$|\overline{E}^\alpha|^* < \varepsilon \tag{8.9}$$

(para todo $\alpha > 0$ y todo número n). Pasando en (8.9) al límite primero para $\alpha \to 0 + 0$, y, luego, para $n \to \infty$, obtendremos la desigualdad (8.5). Con esto queda demostrado el teorema para el caso del conjunto acotado F.

2°. Si el conjunto cerrado F no es, como regla general, acotado, representemos F en forma de una suma $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde F_n es una intersección de los conjuntos cerrados F y $[-n, n]$. De acuerdo con lo demostrado en la primera etapa, cada F_n es medible (pues está cerrado y acotado), a consecuencia de lo cual es medible también, en virtud del teorema 8.3, el conjunto F. El teorema está completamente demostrado.

Teorema 8.5. *Si un conjunto E es medible, su complemento CE también será medible.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición de mensurabilidad del conjunto E, existe para todo número n un conjunto abierto G_n que contiene E, para el cual

$$|G_n \setminus E|^* < \frac{1}{n}. \tag{8.10}$$

Sea $F_n = CG_n$. Por cuanto $CE_1 \setminus CE_2 = E_2 \setminus E_1$ para cualesquiera conjuntos E_1 y E_2 (que el lector mismo lo compruebe), entonces $CE \setminus CG_n = G_n \setminus E$, y por, consiguiente, $CE \setminus F_n = G_n \setminus E$. De la última igualdad se deduce que para todo número n

$$CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset G_n \setminus E. \tag{8.11}$$

(Recordemos que la notación $E_1 \subset E_2$ significa que E_1 pertenece a E_2).

De (8.11) y de la propiedad 1° de la medida exterior proviene que para todo número n

$$|CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k|^* \leqslant |G_n \setminus E|^*,$$

y de la última desigualdad y de (8.10) resulta que

$$|CE \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k|^* < \frac{1}{n}$$

(para todo número n). Mas, esto es indicio de que la medida exterior y, por consiguiente, también la medida del conjunto $E_0 = CE \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ es igual a cero, es decir, el conjunto CE es igual a la suma de conjuntos medibles E_0 y $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ (el último conjunto es medible en virtud de los teoremas 8.4 y 8.3). El teorema está demostrado.

Corolario. *Para que un conjunto E sea medible, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo ε exista un conjunto cerrado F que se contenga en E y que sea de tal índole que la medida exterior de la diferencia $E \setminus F$ sea inferior a ε.*

DEMOSTRACIÓN. La mensurabilidad del conjunto E es equivalente a la de CE (teorema 8.5), es decir, equivalente a la exigencia de que para todo $\varepsilon > 0$ se encuentra un conjunto abierto G que contenga CE y que sea de tal índole que $|G \setminus CE|^* < \varepsilon$. Mas, la exigencia mencionada (en virtud de la identidad $CE_1 \setminus CE_2 = E_2 \setminus E_1$) es equivalente al requisito de que para todo $\varepsilon > 0$ exista un conjunto cerrado $F = CG$ que se contenga en E y sea tal que $|E \setminus F|^* = |CF \setminus CE|^* = |G \setminus CE|^* < \varepsilon$. El corolario está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. La condición de mensurabilidad que se contiene en el corolario recién demostrado, puede tomarse por la nueva definición de mensurabilidad que es equivalente a la enunciada al principio de este punto.

Teorema 8.6. *La intersección de un número finito o numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible.*

DEMOSTRACIÓN. La intersección de los conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ designemos por el símbolo $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. En virutd de la identidad $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \equiv$ $\equiv C\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} CE_n\right]$ (que el lector mismo compruebe esta identidad), el teorema se deduce inmediatamente de los teoremas 8.3 y 8.5.

Teorema 8.7. *La diferencia de dos conjuntos medibles es un conjunto medible.*

DEMOSTRACIÓN se deduce de la identidad $A \setminus B \equiv A \cap (CB)$ y de los teoremas 8.5 y 8.6.

Procedamos, ahora, con la demostración del teorema fundamental de la teoría de la medida.

Teorema 8.8. *La medida de una suma de un número finito o numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos es igual a la suma de medidas de dichos conjuntos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, con la particularidad de que los conjuntos E_n son medibles y disjuntos de dos en dos. Examinemos separadamente *dos casos.*

1) Supongamos primero que todos los E_n *son acotados.* Observemos que para un caso en que todos los E_n son cerrados y hay un número finito de ellos, la demostración del teorema se deduce inmediatamente de la propiedad 3° de la medida exterior (véase el p. 1 de este párrafo).

Sean, ahora, E_n unos conjuntos acotados disjuntos dos a dos.

En virtud del corolario del teorema 8.5, para cualquier $\varepsilon > 0$ y para todo número n existe un conjunto cerrado F_n que está contenido en E_n y es de tal índole que [1] $|E_n \setminus F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Por cuanto todos los conjuntos F_n son acotados, cerrados y disjuntos dos a dos, para cualquier número finito m tenemos, en virtud de la observación aducida más arriba:

$$\left|\bigcup_{n=1}^{m} F_n\right| = \sum_{n=1}^{m} |F_n|. \tag{8.12}$$

Por otra parte, de la igualdad $E_n = (E_n \setminus F_n) \cup F_n$ se deduce (en virtud de la propiedad 2° de la medida exterior) que $|E_n| \leqslant$ $\leqslant |E_n \setminus F_n| + |F_n| < |F_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$, de suerte que

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant \sum_{n=1}^{m} |F_n| + \varepsilon \tag{8.13}$$

[1] Por cuanto la mensurabilidad de todos los conjuntos que figura en la demostración ya está establecida, podemos escribir siempre simplemente medida en lugar de la medida superior.

(para todo m finito). De (8.12) y (8.13) concluimos que para cualquier m finito

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant \left| \bigcup_{n=1}^{m} F_n \right| + \varepsilon. \tag{8.14}$$

Ahora tendremos en cuenta que la suma de todos los conjuntos F_n está contenida en E. De aquí proviene que para cualquier número m

$$\left| \bigcup_{n=1}^{m} F_n \right| \leqslant |E|,$$

de suerte que (en virtud de (8.14)) para cualquier número m

$$\sum_{n=1}^{m} |E_n| \leqslant |E| + \varepsilon. \tag{8.15}$$

Pasando en (8.15) al límite para $m \to \infty$, llegamos a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leqslant |E| + \varepsilon$$

y, por consiguiente, en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leqslant |E|. \tag{8.16}$$

Resta por notar que del hecho de que la suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es igual al conjunto E y de la propiedad 2° de la medida exterior se deduce una desigualdad inversa

$$|E| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|. \tag{8.17}$$

De las desigualdades (8.16) y (8.17) se desprende la afirmación del teorema (para el caso de los conjuntos acotados E_n).

2) Supongamos, ahora, que los conjuntos E_n *no son, en general, acotados*. Denotemos con el símbolo E_n^k el conjunto acotado $E_n^k = E_n \cap (k-1 \leqslant |x| < k)$ (recordemos que el signo $\cap$ significa una intersección).

De la igualdad $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n^k$ y del caso examinado más arriba se deduce que

$$|E| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |E_n^k| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|.$$

El teorema queda completamente demostrado.

OBSERVACIÓN 2. La propiedad fundamental de la medida que se establece por el teorema 8.8 recibe el nombre de *σ-aditividad* de la medida.

Con el fin de enunciar una propiedad más de la medida, introduzcamos un concepto nuevo.

Definición 2. *Diremos que un conjunto E es del tipo G_δ, si E puede ser representado en forma de una intersección de un número numerable de conjuntos abiertos G_n, y conjunto del tipo F_σ, si E puede ser representado en forma de una suma de un número numerable de conjuntos cerrados F_n.*

Teorema 8.9. *Si un conjunto E es medible, existen un conjunto E_1 del tipo F_σ contenido en E, y un conjunto E_2 del tipo G_δ que contiene E, para los cuales $|E_1| = |E| = |E_2|$.*

DEMOSTRACIÓN. Debido a la mensurabilidad de E y al corolario del teorema 8.5, para cualquier número n existen un conjunto abierto G_n, en el que está contenido E, y un conjunto cerrado F_n que se contiene en E de tal índole que

$$|E - F_n| < \frac{1}{n}, \quad |G_n \setminus E| < \frac{1}{n}. \tag{8.18}$$

Pongamos $E_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $E_2 = \bigcap\limits_{n+1}^{\infty} G_n$. Por cuanto para cualquier número n

$$E \setminus E_1 \subset E \setminus F_n, \quad E_2 \setminus E \subset G_n \setminus E,$$

resulta, en virtud de (8.18) y de la propiedad 1° de la medida exterior:

$$|E \setminus E_1| < \frac{1}{n}, \quad |E_2 \setminus E| < \frac{1}{n}.$$

Por ser arbitrario el número n, de aquí se deduce que $|E \setminus E_1| = 0$ y $|E_2 \setminus E| = 0$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 3. Notemos que existen conjuntos *no medibles*. Para construirlos es suficiente tomar en consideración que en una circunferencia unidad existe un número numerable de conjuntos disjuntos de dos en dos y congruentes [1]) uno respecto de otro, cuya unión es igual al conjunto de todos los puntos de la citada circunferencia. A título de tales conjuntos interviene, por ejemplo, un conjunto E_0 de todos los puntos de la circunferencia, de los cuales dos puntos cualesquiera no se puede coincidir uno con el otro mediante un giro al ángulo $n \cdot \alpha$, donde n es un número entero cualquiera y α, un número *irracional* fijo, como también todos los conjuntos E_n que se obtienen a partir de E_0 mediante un giro al ángulo $n \cdot \alpha$. Si E_0 fuera medible serían medibles también todos los conjuntos E_n, con la particularidad de que $|E_n| = |E_0|$ para todo n entero. Mas, en

[1]) Por término «congruentes» se deben entender en el caso dado los conjuntos, uno de los cuales puede coincidirse con el otro girando la circunferencia en el plano a cierto ángulo.

este caso obtendríamos, en virtud de teorema 8.8, que $2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |E_n|$, lo que es imposible, cualquiera que sea el valor de $|E_n|$.

§ 3. Funciones medibles

1. Concepto de función medible. Convengamos en llamar recta numérica *extendida* a una recta numérica ordinaria $-\infty < x < \infty$ con dos elementos nuevos, $-\infty$ y $+\infty$, añadidos. Para poder aplicar operaciones aritméticas en la recta numérica extendida, se considerará que $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$ (para cualquier a finito); $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) - a = +\infty$, $(-\infty) - a = -\infty$ (para cualquier a finito); $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$; $a \cdot (+\infty) = +\infty$ cuando $a > 0$, $0 \cdot (+\infty) = 0$, $a \cdot (+\infty) = -\infty$ cuando $a < 0$; $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$, $0 \cdot (-\infty) = 0$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$ cuando $a > 0$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$ cuando $a < 0$; $\frac{\pm\infty}{a} = (\pm\infty) \cdot \frac{1}{a}$ para cualquier $a \neq 0$ finito, $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ para cualquier a finito.

Quedan indefinidas sólo las siguientes operaciones: $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

En lo que sigue adelante en este capítulo se examinarán siempre las funciones que están definidas en los conjuntos *medibles* de la recta numérica *ordinaria* y que toman valores pertenecientes a la recta numérica *extendida*.

Como ejemplo de tal función puede servir

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{para } x < -1, \\ 0 & \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ +\infty & \text{para } x > 1. \end{cases}$$

Convengamos en denotar, aquí y en adelante, con el símbolo E [f satisface la condición A] un conjunto de todos los valores de x en E, para los cuales $f(x)$ satisface la condición A.

Por ejemplo, $E[f \geqslant a]$ es un conjunto de aquellos valores de x en E, para los cuales $f(x) \geqslant a$.

Definición. *Una función $f(x)$ definida en un conjunto E se denomina medible en este conjunto, si para cualquier número real a el conjunto $E[f \geqslant a]$ es medible.*

Teorema 8.10. *Para que una función $f(x)$ sea medible en el conjunto E, es necesario y suficiente que uno de los siguientes tres conjuntos:*

$$E[f > a], \quad E[f < a], \quad E[f \leqslant a] \tag{8.19}$$

sea medible para cualquier a real.

DEMOSTRACIÓN. 1) Teniendo presente la mensurabilidad de la función $f(x)$ de las relaciones elementales

$$E[f>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f\geqslant a+\frac{1}{n}\right],$$

$$E[f\geqslant a]=\bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f>a-\frac{1}{n}\right]$$

y de los teoremas 8.3 y 8.6 deducimos que la mensurabilidad (para cualquier a real) del conjunto $E[f>a]$ es una condición necesaria y suficiente de mensurabilidad de la función $f(x)$ sobre el conjunto E.

2) De las relaciones $E[f<a]=E\setminus E[f\geqslant a]$ y de los teoremas 8.3 y 8.7 se deduce que la mensurabilidad (para cualquier a real) del conjunto $E[f<a]$ es una condición necesaria y suficiente de mensurabilidad de la función $f(x)$ sobre el conjunto E.

3) Por fin, de la relación $E[f\leqslant a]=E\setminus E[f\leqslant a]$, de los mismos teoremas 8.3 y 8.7 y de lo demostrado en 1) se deduce que la mensurabilidad (para cualquier a real) del conjunto $E[f\leqslant a]$ es una condición necesaria y suficiente de mensurabilidad de la función $f(x)$ sobre el conjunto E. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. En virtud del teorema 8.10. la mensurabilidad (para todo a real) de cualquiera de los tres conjuntos (8.19) puede tomarse por la nueva definición de mensurabilidad de la función $f(x)$ sobre el conjunto E equivalente a la enunciada más arriba.

2. Propiedades de las funciones medibles.

1°. *Si la función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E, será medible en cualquier parte medible E_1 del conjunto E.*

La demostración se deduce inmediatamente de la identidad $E_1[f\geqslant a]\equiv E_1\cap E[f\geqslant a]$ y del teorema 8.6.

2°. *Si el conjunto E es una suma finita o numerable de conjuntos medibles E_n, y si una función $f(x)$ es medible en cada conjunto E_n, será también medible sobre el conjunto E.*

La demostración se deduce inmediatamente de la identidad $E[f\geqslant a]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n[f\geqslant a]$ y del teorema 8.3.

3°. *Toda función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E de medida cero.*

En efecto, cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero es medible y tiene medida cero.

Definición 1. *Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, definidas sobre un conjunto medible E, se denominan equivalentes en dicho conjunto, si el conjunto $E[f\neq g]$ es de medida cero.*

Para denotar funciones equivalentes (en el conjunto E) $f(x)$ y $g(x)$ se usa frecuentemente el símbolo $f\approx g$.

4°. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes en el conjunto E y si $f(x)$ es medible en E, será también medible en E la función $g(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $E_0 = E[f \neq g]$, $E_1 = E \setminus E_0$. Por cuanto la función $g(x)$ coincide en E_1 con $f(x)$, $g(x)$ será medible en E_1 en virtud de la propiedad 1°. De acuerdo con la propiedad 3°, $g(x)$ es también medible sobre E_0 y, por eso, según la propiedad 2°, $g(x)$ es medible en E.

Definición 2. *Suele decirse que cierta propiedad A es válida casi en todo punto sobre el conjunto E, si un conjunto de puntos de E, sobre el cual dicha propiedad falla de ser válida, es de medida cero.*

Corolario de la propiedad 4°. *Si una función $f(x)$ es continua casi en todo punto sobre el conjunto medible E, será medible sobre E.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos al principio que si una función $f(x)$ es continua sobre un conjunto cerrado F, ella será medible en F, pues el conjunto $F[f \geqslant a]$ es cerrado, cualquiera que sea a, y, por consiguiente, es medible. Supongamos que $f(x)$ es continua sobre un conjunto medible arbitrario E casi en todo punto y denotemos con R un subconjunto de todos los puntos de discontinuidad de $f(x)$ que tiene medida cero.

En virtud de las propiedades 2° y 3°, basta mostrar la mensurabilidad de $f(x)$ sobre el conjunto $E_1 = E \setminus R$. Con arreglo al teorema 8.9, existe un conjunto E_2 del tipo F_σ (véase p. 2, § 2) que se contiene en E_1 y es de tal índole que $|E_2| = |E_1| = |E|$. En virtud de las mismas propiedades 2° y 3°, basta mostrar que $f(x)$ es medible sobre el conjunto E_2. Mas, E_2 (siendo un conjunto del tipo F_σ) puede representarse en forma de una suma numerable de conjuntos cerrados F_n, en cada uno de los cuales $f(x)$ es continua y, por consiguiente (en virtud de la observación aducida más arriba) medible. Entonces, de acuerdo con la propiedad 2°, la función $f(x)$ es medible en E_2.

OBSERVACIÓN. Subrayemos que la continuidad de la función $f(x)$ casi en todo punto del conjunto E conviene diferirla de la equivalencia de $f(x)$ sobre E a una función continua. Así, por ejemplo, la función de Dirichlet $f(x) = 1$, si x es racional, y $f(x) = 0$, si x es irracional, no es continua en ningún punto del segmento $[0, 1]$ (véase cap. 4, v. I), no obstante dicha función es equivalente en $[0, 1]$ a una función $g(x) \equiv 0$, pues, $f(x) \neq g(x)$ sólo en el conjunto de todos los puntos racionales del segmento $[0, 1]$, el cual es numerable y tiene, por eso, medida cero [1]).

3. Operaciones aritméticas con las funciones medibles. Demostremos, ante todo, un lema siguiente.

Lema 1. 1) *Si una función $f(x)$ es medible sobre un conjunto E, la función $|f(x)|$ también será medible en dicho conjunto.* 2) *Si $f(x)$ es medible sobre un conjunto E, y C es una constante cualquiera, cada una de las funciones $f(x) + C$ y $C \cdot f(x)$ es medible sobre el conjunto E.*

---

[1]) El hecho de que un conjunto numerable de puntos es de medida cero se deduce del teorema 8.8 y de lo que la medida de un conjunto compuesto por un solo punto es igual a cero.

3) *Si $f(x)$ y $g(x)$ son medibles sobre un conjunto E, el conjunto $E[f > g]$ será medible.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Basta tomar en consideración que para todo a no negativo

$$E[|f| \geqslant a] = E[f \geqslant a] \cup E[f \leqslant -a]$$

y emplear el teorema 8.3. Si $a < 0$, resulta que $E[|f| > a]$ coincide con E y es también medible.

2) Basta aprovechar, para cualquier a real, las relaciones

$$E[f + C \geqslant a] = E[f \geqslant a - C],$$

$$E[C \cdot f \geqslant a] = \begin{cases} E\left[f \geqslant \frac{a}{C}\right] \text{ para } C > 0, \\ E\left[f \leqslant \frac{a}{C}\right] \text{ para } C < 0. \end{cases}$$

Si $C = 0$, tenemos $C \cdot f(x) \equiv 0$, y, por eso, es medible.

3) Sea $\{r_k\}$ todos los puntos racionales de la recta infinita $(-\infty, \infty)$. Basta tomar en consideración que

$$E[f > g] = \bigcap_{k=1}^{\infty} (E[f > r_k] \cap E[g < r_k]).$$

Apoyándonos en el lema 1, demostremos el siguiente teorema.

Teorema 8.11. *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ toman sobre un conjunto E valores finitos y son medibles en dicho conjunto, cada una de las funciones $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $f(x)/g(x)$ (para el cociente $f(x)/g(x)$ se necesita adicionalmente que todos los valores de $g(x)$ sean distintos de cero) será medible sobre el conjunto E.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Para demostrar la mensurabilidad de la diferencia $f(x) - g(x)$, basta notar que para cualquier a real un conjunto $E[f - g > a]$ coincide con el conjunto medible (en virtud del lema 1) $E[f > g + a]$.

2) Para demostrar la mensurabilidad de la suma $f(x) + g(x)$, basta tener presente que $f + g = f - (-g)$ y que la función $-g(x)$ es medible segun el lema 1.

3) Para demostrar la mensurabilidad de un producto de dos funciones medibles, cerciorémonos primero que el cuadrado de una función medible es función medible. Efectivamente, si $a < 0$, el conjunto $E[f^2 > a]$ coincide con E y es, por ello, medible. En cambio, si $a \geqslant 0$, el conjunto $E[f^2 > a]$ coincide con un conjunto medible (con arreglo al lema 1) $E[|f| > \sqrt{a}]$. La mensurabilidad del cuadrado de una función medible y la mensurabilidad de una suma y de una diferencia de las funciones medibles predeterminan (en virtud de la relación $f \cdot g = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2$) la mensurabilidad del producto $f(x)\, g(x)$.

4) Por ser medible el producto de dos funciones medibles, para demostrar la mensurabilidad de un cociente f/g, basta probar que $1/g$ es medible, y la mensurabilidad de ésta se deduce de los teoremas 8.3 y 8.6, y de las relaciones

$$E\left[\frac{1}{g}>a\right]=\begin{cases} E\,[g>0]\cap E\left[g<\frac{1}{a}\right] & \text{para } a>0,\\ E\,[g>0] & \text{para } a=0,\\ E\,[g>0]\cup E\left[g<\frac{1}{a}\right] & \text{para } a<0.\end{cases}$$

El teorema está completamente demostrado.

4. Sucesiones de funciones medibles. Demostremos algunas afirmaciones importantes concernientes a la sucesión de funciones medibles.

Teorema 8.12. *Si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de funciones medibles en el conjunto E, tanto el límite inferior, como el superior de dicha sucesión* [1]) *serán funciones medibles sobre el conjunto E.*

DEMOSTRACIÓN. Cerciorémonos primero de que si una sucesión $\{g_n(x)\}$ se compone de las funciones medibles sobre el conjunto E, cada una de las funciones [2]) $\varphi(x)=\inf\limits_n g_n(x)$ y $\psi(x)=\sup\limits_n g_n(x)$ será medible sobre el conjunto E. Basta tomar en consideración las relaciones

$$E\,[\varphi<a]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\,[g_n<a],$$

$$E\,[\psi>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\,[g_n>a]$$

y aprovechar el teorema 8.3.

Denotemos, ahora, los límites inferior y superior de la sucesión $\{f_n(x)\}$ con $\underline{f}(x)$ y $\overline{f}(x)$, respectivamente. Para demostrar la mensurabilidad de $\underline{f}(x)$ y $\overline{f}(x)$ sobre el conjunto E, basta notar que

$$\underline{f}(x)=\sup_{n\geqslant 1}\left\{\inf_{k\geqslant n} f_k(x)\right\},$$

$$\overline{f}(x)=\inf_{n\geqslant 1}\left\{\sup_{k\geqslant n} f_k(x)\right\},$$

1) En el capítulo 3, v. I se ha demostrado que cualquier sucesión acotada cuenta con los límites inferior y superior. Aquí convenimos en considerar que si una sucesión no es acotada inferiormente (superiormente), su límite inferior (superior) es igual a $-\infty$ $(+\infty)$.

2) La notación $\varphi(x)=\inf\limits_n g_n(x)$ significa que en todo punto x el valor de $\varphi(x)$ es la cota inferior exacta de los valores en este punto de $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... Un sentido análogo tiene la notación $\psi(x)=\sup\limits_n g_n(x)$

y hacer uso de la afirmación demostrada más arriba. El teorema está demostrado.

Teorema 8.13. *Si una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles sobre el conjunto E, converge casi en todo punto en E hacia una función $f(x)$, la función $f(x)$ será medible en E.*

DEMOSTRACIÓN. En el caso en que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ no casi en todo punto, sino *siempre* en E, la afirmación del teorema sobre mensurabilidad de $f(x)$ se deduce inmediatamente del teorema 8.12. En cambio, si $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en todo punto sobre E, a excepción de un conjunto E_0 de medida cero, $f(x)$ es medible en $E \setminus E_0$ en virtud del teorema 8.12, y medible en E_0, siendo este último conjunto de medida cero (propiedad 3° del p. 2) y, por eso, medible sobre el conjunto $E = (E \setminus E_0) \cup E_0$ (en virtud de la propiedad 2° del p. 2). El teorema está demostrado.

Introduzcamos, ahora, el concepto importante de convergencia *en medida* de una sucesión sobre un conjunto dado.

Definición. *Supongamos que las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y $f(x)$ son medibles en un conjunto E y toman casi en todo punto de E valores finitos. Se dice que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E, si para cualquier número positivo ε se verifica una igualdad*

$$\lim_{n\to\infty} |E[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]| = 0, \tag{8.20}$$

es decir, si para cualesquiera ε y δ positivos existe un número N tal que con $n \geqslant N$ se verifique la desigualdad $|E[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]| < \delta$.

A. Lebesgue demostró el siguiente teorema.

Teorema 8.14. *Sea E un conjunto medible de medida finita y supongamos que las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y $f(x)$ son medibles sobre el conjunto E y toman casi en todo punto de E valores finitos. Entonces, la convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ casi en todo punto de E predetermina también la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $A = E[|f| = +\infty]$, $A_n = E[|f_n| = +\infty]$, $B = E \setminus E[\lim\limits_{n\to\infty} fn = f]$, $C = A + B + \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Entonces, por hipótesis del teorema, $|C| = 0$, y en todo punto fuera del conjunto C la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$, mientras que todas las funciones $f_n(x)$ y $f(x)$ tienen valores finitos.

Para un $\varepsilon > 0$ arbitrario pongamos $E_n = E[|f - f_n| \geqslant \varepsilon]$, $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. Entonces, por cuanto E_n está contenido en R_n, se verifica la desigualdad $|E_n| \leqslant |R_n|$, y para demostrar (8.20), *basta probar que* $|R_n| \to 0$, *cuando* $n \to \infty$.

Denotemos con R una intersección de todos los conjuntos R_1, $R_2, \ldots$ y cerciorémonos de que $|R_n| \to |R|$, cuando $n \to \infty$. Por construcción, R_{n+1} está contenido en R_n para cada número n, y, por tanto, para cada número n tenemos

$$R_n \setminus R = \bigcup_{k=n}^{\infty} (R_k \setminus R_{k+1}),$$

con la particularidad de que los conjuntos bajo el signo de la suma con disjuntos dos a dos. Mas, en virtud del teorema 8.8, para cada número n

$$|R_n \setminus R| = \sum_{k=n}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|, \tag{8.21}$$

y, por ser convergente la serie

$$|R_1 \setminus R| = \sum_{k=1}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|,$$

el resto de la serie (8.21) tiende a cero cuando $n \to \infty$. Así pues, $|R_n \setminus R| \to 0$, cuando $n \to \infty$. En virtud de la relación $|R_n| = |R_n \setminus R| + |R|$, esto es indicio de que $|R_n| \to |R|$, cuando $n \to \infty$.

Ahora, para demostrar (8.20), nos resta probar que $|R| = 0$. Con este fin *es suficiente mostrar que R está contenido en C*.

Sea x_0 un punto cualquiera que no pertenece a C. Entonces, para un $\varepsilon > 0$ arbitrario fijo existe un número $N(x_0, \varepsilon)$ tal que $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$, cuando $n \geqslant N(x_0, \varepsilon)$. Esto significa que para $n \geqslant N(x_0, \varepsilon)$, el punto x_0 no pertenece a E_n y menos aún pertenece a R_n y al conjunto R, el cual es intersección de todos los R_n. Así pues, todo punto x_0 que no pertenece a C tampoco pertenece a R. Mas, esto significa precisamente que R está contenido en C. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Subrayemos que la convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ hacia la función $f(x)$ en medida sobre el conjunto E no predetermina ni mucho menos no sólo la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ casi en todo punto en E, sino tampoco la covergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ *por lo menos en un solo punto* del conjunto E. Basta examinar un ejemplo construido en el p. 3, § 2, cap. 1. Una sucesión $\{f_n(x)\}$, construida en el citado ejemplo, es divergente en todo punto del segmento $[0, 1]$, pero, por cuanto cada función $f_n(x)$ es distinta de cero sólo en el segmento I_n, cuya longitud tiende a cero cuando $n \to \infty$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia la función $f(x) \equiv 0$ en medida sobre el segmento $[0, 1]$.

Sin embargo, F. Riezs [1]) demostró el siguiente teorema.

Teorema 8.15. *Sea E un conjunto medible de medida finita y supongamos que las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y $f(x)$ son medibles sobre el conjunto E y toman casi en todo punto de E los valores finitos.*

---

[1]) F. Riezs (1880–1956), matemático húngaro.

Entonces, si una sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E, en dicha sucesión puede elegirse una subsucesión que sea convergente hacia $f(x)$ casi en todo punto de E.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, sin limitar la generalidad de nuestros razonamientos, que las funciones $f_n(x)$ y $f(x)$ toman valores finitos no casi en todo punto, sino siempre sobre E (de lo contrario, se introducirían los mismos conjuntos A y A_n que figuraban en la demostración del teorema antecedente y se repetirían todos los razonamientos para el conjunto $E \setminus A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$). De la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E se deduce que para cualquier número k existe tal número n_k que para la medida del conjunto $E_k = E[|f - f_{n_k}| \geqslant 1/k]$ se verifique la desigualdad $|E_k| \leqslant 1/2^k$. Pongamos, al igual que en la demostración del teorema antecedente, $R_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$, $R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$. Entonces, en virtud de la propiedad de la medida exterior (véase p. 1, § 2), $|R_n| \leqslant$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |E_k|, \text{ de suerte que } |R_n| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k = 1/2^{n-1}$$

De este modo, $|R_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. De un modo sumamente análogo al empleado en el teorema antecedente se demuestra que $|R_n| \to |R|$, cuando $n \to \infty$. Llegamos, pues, a que $|R| = 0$.

Resta por demostrar que fuera de R la subsucesión $\{f_{n_k}(x)\}$ siempre converge hacia $f(x)$. Sea x un punto arbitrario de $E \setminus R$. En este caso x no pertenece al conjunto R_N para cierto $N = N(x)$. Pero, esto quiere decir que x no pertenece a E_k, cuando $k \geqslant N(x)$. Dicho de otro modo, $|f(x) - f_{n_k}(x)| < 1/k$ para $k \geqslant N(x)$. El teorema está demostrado.

§ 4. Integral de Lebesgue

1. Concepto de integral de Lebesgue de una función acotada. Llamemos *partición* de un conjunto medible E a toda familia T de un número finito de subconjuntos medibles y disjuntos dos a dos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ del conjunto E que en suma integran el conjunto E.

Para denotar la partición del conjunto E se empleará el símbolo $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$, o bien un símbolo más breve $T = \{E_k\}$.

Examinemos en el conjunto E de medida finita una función acotada $f(x)$. Para una partición arbitraria $T = \{E_k\}$ del conjunto E, designemos por los símbolos M_k y m_k las cotas exactas superior e inferior, respectivamente, de la función $f(x)$ sobre un conjunto parcial E_k e introduzcamos en el análisis dos sumas

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k| \quad \text{y} \quad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|$$

que se denominan sumas *superior* e *inferior*, respectivamente, de la partición T.

Notemos en seguida que para toda partición $T = \{E_k\}$

$$s_T \leqslant S_T. \tag{8.22}$$

Para cualquier función $f(x)$, acotada sobre el conjunto de medida finita E, tanto el conjunto de todas las sumas superiores $\{S_T\}$, como también el de todas las sumas inferiores $\{s_T\}$ (correspondientes a toda clase de particiones $T = \{E_k\}$ del conjunto E) están ambos acotados. Por eso, existe una cota inferior exacta del conjunto $\{S_T\}$, que se denotará con el símbolo $\overline{I}$ y se llamará *integral superior de Lebesgue*, y una cota superior exacta del conjunto $\{s_T\}$ que se denotará con $\underline{I}$ y se llamará *integral inferior de Lebesgue*.

Definición. *Una función $f(x)$, acotada sobre conjunto de medida finita E, se denomina integrable según Lebesgue en dicho conjunto, si $\underline{I} = \overline{I}$, es decir, si las integrales de Lebesgue superior e inferior de dicha función coinciden.*

En este caso el número $\underline{I} = \overline{I}$ se llama integral de Lebesgue, extendida a E, respecto de la función $f(x)$ y se denota con el símbolo

$$\int\limits_E f(x)\,dx.$$

Detengámonos en algunas propiedades de las sumas superiores e inferiores y de las integrales superiores e inferiores de Lebesgue.

Convengamos en llamar la partición $T^* = \{E_i^*\}_{i=1}^m$ *refino* de la partición $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, si para cualquier número i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ existe un número $\nu(i)$ que satisface las desigualdades $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$, y que es de tal índole que E_i^* esté contenido en $E_{\nu(i)}$.

El número $\nu(i)$ puede resultar un mismo para diferentes números i, con la particularidad de que la suma de conjuntos E_i^* tomada respecto de todos los números i, para los cuales $\nu(i)$ es igual a un mismo número k, equivale, obviamente, al conjunto E_k, es decir,

$$\bigcup_{\nu(i)=k} E_i^* = E_k. \tag{8.23}$$

Además, pongámonos de acuerdo llamar la partición $\hat{T} = \{E_l\}$ *producto* de las particiones $T_1 = \{E_p^{(1)}\}$ y $T_2 = \{E_q^{(2)}\}$, si $\hat{T}$ se compone de los conjuntos E_l que representan las intersecciones de toda clase de pares de conjuntos $E_p^{(1)}$ y $E_q^{(2)}$, es decir, si cada E_l es igual a $E_p^{(1)} \cap E_q^{(2)}$, siendo agotadas todas las combinaciones posibles de los números p y q.

Es evidente que el producto $\hat{T}$ de dos particiones T_1 y T_2 es un refino de cada una de las particiones T_1 y T_2 (con la particularidad de que cualquier otra partición de T que fuera un refino tanto de T_1, como de T_2, es, a su vez, refino de $\hat{T}$).

17*

Son válidas las siguientes propiedades de las sumas superiores e inferiores y de las integrales superiores e inferiores.

1°. *Si la partición T^* es un refino de la partición T, se tiene $s_T \leqslant s_{T^*}$, $S_{T^*} \leqslant S_T$*

DEMOSTRACIÓN. Demos la demostración para las sumas superiores (para las sumas inferiores la demostración es sumamente análoga). Sea $T^* = \{E_i^*\}_{i=1}^m$ un refino de la partición $T = \{E_k\}_{k=1}^n$, y sean M_i^* la cota superior exacta de $f(x)$ sobre el conjunto E_i^* $(i = 1, 2, \ldots, m)$ y M_k, la cota superior exacta de $f(x)$ sobre el conjunto E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Por definición de refino, existe, para cada número i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, un número correspondiente $\nu(i)$ que satisface las desigualdades $1 \leqslant \nu(i) \leqslant n$, y que es de tal índole que E_i^* esté contenido en $E_{\nu(i)}$, con la particularidad de que la suma de conjuntos E_i^* tomada respecto de todos los números i, para los cuales $\nu(i)$ es igual a un mismo número k, satisface la igualdad (8.23). Diremos en adición que para todos los números, i, para los cuales $\nu(i)$ equivale a un mismo número k, resulta válida una desigualdad

$$M_i^* \leqslant M_k \tag{8.24}$$

(pues, la cota superior exacta sobre un subconjunto no sobrepasa la cota superior exacta en todo el conjunto)

De la definición de la suma superior y de las relaciones (8.23) y (8.24) llegamos a que [1])

$$S_{T^*} = \sum_{i=1}^{m} M_i^* \, |E_i^*| = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{\nu(i)=k} M_i^* \, |E_i^*| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \left[\sum_{\nu(i)=k} |E_i^*| \right] = \sum_{k=1}^{n} M_k \, |E_k| = S_T.$$

2°. *Para dos particiones sumamente arbitrarias T_1 y T_2 se verifica la desigualdad $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\hat{T}$ un producto de las particiones T_1 y T_2. Por cuanto $\hat{T}$ es un refino de cada una de las particiones T_1 y T_2, se verifican, en virtud de la propiedad 1°, las desigualdades

$$s_{T_1} \leqslant s_{\hat{T}}, \quad S_{\hat{T}} \leqslant S_{T_2}. \tag{8.25}$$

De las desigualdades (8.25) y (8.22) se deduce que $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$.

3°. *Las integrales superior e inferior de Lebesgue están entrelazadas mediante una relación $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos una partición *arbitraria* T_2. Ya que para cualquier partición T_1 es válida, en virtud de la propiedad 2°,

[1]) Aquí se tiene en cuenta que de (8.23) y de lo que los conjuntos E_i^* son disjuntos dos a dos, se deduce, en virtud del teorema 8.8, que $\sum\limits_{\nu(i)=k} |E_i^*| = |E_k|$

la desigualdad $s_{T_1} \leqslant S_{T_2}$, el número S_{T_2} será *una* de las cotas superiores del conjunto $\{s_{T_1}\}$ de todas las sumas inferiores, y, por tanto, la cota superior *exacta* $\underline{I}$ del conjunto citado satisface la desigualdad $\underline{I} \leqslant S_{T_2}$. Siendo válida la última desigualdad para la partición arbitraria T_2, el número $\underline{I}$ será *una* de las cotas inferiores del conjunto $\{S_{T_2}\}$ de todas las sumas superiores, y, por tanto, la cota inferior exacta $\overline{I}$ del conjunto citado satisface la condición $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

Corolario. *Toda función integrable según Riemann es integrable según Lebesgue, con la particularidad de que las integrales de Lebesgue y de Riemann respecto de tal función coinciden.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f(x)$ es integrable en $E = [a, b]$ según Riemann (y, por consiguiente, es acotada en este segmento). Al designar, para esta función, por los símbolos $\underline{I}$ e $\overline{I}$ las integrales inferior y superior de Lebesgue y por los símbolos $\underline{I}_R$ e $\overline{I}_R$, las integrales inferior y superior de Darboux (véase cap. 1, v. II) obtendremos las siguientes desigualdades [1])

$$\underline{I}_R \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}_R. \tag{8.26}$$

Si una función es integrable según Riemann, para ella $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, y por tanto, en virtud de (8.26), $\underline{I} = \overline{I}$, es decir, dicha función es integrable según Lebesgue. Más aún, cuando $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, de (8.26) se deducen las igualdades $\underline{I}_R = \underline{I} = \overline{I} = \overline{I}_R$, es decir, se deduce la coincidencia de las integrales de Riemann y de Lebesgue, pues, la primera de estas integrales es igual al número $\underline{I}_R = \overline{I}_R$, y la segunda, al número $\underline{I} = \overline{I}$.

En el punto siguiente demostraremos que la clase de funciones integrables según Lebesgue es más amplia que la de funciones integrables según Riemann. Se aclara, además, que resulta conveniente introducir funciones medibles.

2. Clase de funciones acotadas integrables según Lebesgue. Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 8.16. *Cualquiera que sea un conjunto medible de medida finita E, toda función $f(x)$, acotada y medible sobre E, es integrable en dicho conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Construyamos una partición especial del conjunto E, llamada *lebesguiana*. Al denotar con M y m las cotas exactas de $f(x)$ sobre el conjunto E, dividamos un segmento $[m, M]$, con ayuda de los puntos $m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = M$, en los segmentos parciales $[y_{k-1}, y_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y denotemos con δ la longi-

[1]) Pues, cualquier partición de $E = [a, b]$ en segmentos parciales se incluye en la clase de particiones del conjunto E en el sentido de Lebesgue.

tud del máximo de estos segmentos, es decir, pongamos

$$\delta = \max_{k=1,\,2,\,\ldots,\,n} (y_k - y_{k-1}).$$

Llamemos partición *lebesguiana* del conjunto E a una partición $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$, en la cual $E_1 = E\,[y_0 \leqslant f \leqslant y_1]$, $E_k = E\,[y_{k-1} < f \leqslant y_k]$ para $k = 2, 3, \ldots, n$.

Sean S_T y s_T las sumas superior e inferior, correspondientes a la partición lebesguiana, que se denominan *sumas lebesguianas superior e inferior*. Notemos que para todo número k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ son válidas las desigualdades

$$y_{k-1} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant y_k, \tag{8.27}$$

en las cuales con M_k y m_k están designadas las cotas exactas de $f(x)$ sobre un conjunto parcial E_k. Multiplicando las desigualdades (8.27) por la medida $|E_k|$ del conjunto E_k y al sumarlas, después, respecto de todos los números $k = 1, 2, \ldots, n$, tendremos

$$\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,|E_k| \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k\,|E_k|.$$

De las desigualdades obtenidas concluimos que

$$0 \leqslant S_T - s_T \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k\,|E_k| - \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,|E_k| = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\,|E_k| < \delta\,|E|. \tag{8.28}$$

Por cuanto las desigualdades $s_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_T$ se verifican para cualquier partición T, de (8.28) obtendremos

$$0 \leqslant \overline{I} - \underline{I} < \delta\,|E|. \tag{8.29}$$

Ya que $\delta > 0$ puede elegirse arbitrariamente pequeño, de (8.29) proviene que $\underline{I} = \overline{I}$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. En el complemento 2 a este capítulo se demostrará que la mensurabilidad de una función $f(x)$, acotada sobre un conjunto medible E, es no sólo una condición suficiente, sino también necesaria, de integrabilidad de esta función según Lebesgue en el conjunto E.

OBSERVACIÓN 2. Sea ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ un elemento arbitrario de un conjunto parcial E_k de la partición lebesguiana T. Una suma $\sigma_T(\xi_k, f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot|E_k|$ se denominará *suma integral lebesguiana* de la función $f(x)$. Por cuanto, siendo arbitraria la elección de los puntos ξ_k sobre los conjuntos E_k, dicha suma está encerrada entre las sumas inferior y superior de la correspondiente partición lebesguiana T, de la desigualdad (8.28) proviene que $\sigma_T(\xi_k, f)$ (junto con S_T y s_T) tiende, para $\delta \to 0$, hacia la integral de Lebesgue $\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_E f(x)\,dx$.

3. Propiedades de la integral de Lebesgue de una función acotada

1°. $\int\limits_E 1\,dx = |E|$.

Para demostrar, es suficiente notar que para una función $f(x) \equiv 1$ tanto la suma superior, como la interior de cualquier partición T del conjunto E es igual a $|E|$.

2°. *Si una función $f(x)$ es acotada e integrable sobre un conjunto E de medida finita y α es un número real, la función $[\alpha \cdot f(x)]$ también será integrable sobre el conjunto E, con la particularidad de que*

$$\int\limits_E [\alpha \cdot f(x)]\,dx = \alpha \cdot \int\limits_E f(x)\,dx. \tag{8.30}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos, para una partición arbitraria $T = \{E_k\}$ del conjunto E, las sumas superior e inferior de la función $f(x)$ con los símbolos S_T y s_T; las sumas superior e inferior de la función $[\alpha \cdot f(x)]$ denotemos con los símbolos $S_T^{(\alpha)}$ y $s_T^{(\alpha)}$. Entonces, es evidente que

$$S_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha S_T & \text{para } \alpha \geqslant 0, \\ \alpha s_T & \text{para } \alpha < 0, \end{cases} \quad s_T^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot s_T & \text{para } \alpha \geqslant 0 \\ \alpha \cdot S_T & \text{para } \alpha < 0. \end{cases} \tag{8.31}$$

Si designamos por $\overline{I}$ e $\underline{I}$ las integrales superior e inferior de la función $f(x)$, y con $\overline{I}^{(\alpha)}$ e $\underline{I}^{(\alpha)}$, las integrales superior e inferior de la función $[\alpha \cdot f(x)]$, entonces, de (8.31) proviene que

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \overline{I} & \text{para } \alpha \geqslant 0, \\ \alpha \cdot \underline{I} & \text{para } \alpha < 0, \end{cases} \quad \underline{I}^{(\alpha)} = \begin{cases} \alpha \cdot \underline{I} & \text{para } \geqslant 0 \\ \alpha \cdot \overline{I} & \text{para } \alpha < 0. \end{cases} \tag{8.32}$$

Por ser $f(x)$ integrable, se verifica la desigualdad

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_E f(x)\,dx,$$

y por eso, de las desigualdades (8.32) se deduce que para α cualquiera

$$\overline{I}^{(\alpha)} = \underline{I}^{(\alpha)} = \alpha \cdot \int\limits_E f(x)\,dx.$$

Esto significa precisamente que la integral en el primer miembro de (8.30) existe y que se verifica la igualdad (8.30).

3°. *Si cada una de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es acotada e integrable sobre un conjunto de medida finita E, la suma de estas funciones $[f_1(x) + f_2(x)]$ es también integrable en el conjunto E, con la particularidad de que*

$$\int\limits_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int\limits_E f_1(x)\,dx + \int\limits_E f_2(x)\,dx. \tag{8.33}$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, y sea $T = \{E_k\}$ una partición arbitraria del conjunto E. Denotemos para la función $f(x)$ las cotas exactas sobre un conjunto parcial E_k con M_k y m_k; las sumas superior e inferior de la partición T, con S_T y s_T; las integrales superior e inferior de Lebesgue, mediante $\overline{I}$ e $\underline{I}$. Las magnitudes análogas para las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ se denotarán con los mismos símbolos que se han usado para $f(x)$, mas con los índices (1) y (2), respectivamente.

Notemos que *la cota superior exacta (inferior exacta) de la suma no es superior (no es inferior) a la suma de cotas superiores exactas (inferiores exactas) de los sumandos.* De aquí se deduce que para cualquier número k

$$m_k^{(1)} + m_k^{(2)} \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M_k^{(1)} + M_k^{(2)},$$

y, por consiguiente, para cualquier partición T

$$s_T^{(1)} + s_T^{(2)} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant S_T^{(1)} + S_T^{(2)}.$$

De las últimas desigualdades proviene, a su vez, que

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}. \tag{8.34}$$

Por cuanto (en virtud de que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son integrables)

$$\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int_E f_1(x)\,dx, \quad \underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int_E f_2(x)\,dx,$$

de (8.34) resulta que

$$\underline{I} = \overline{I} = \int_E f_1(x)\,dx + \int_E f_2(x)\,dx.$$

Esto significa precisamente que la integral en el primer miembro de (8.33) existe y que se verifica la igualdad (8.33).

Corolario. Inmediatamente de 2° y 3° se deduce *la propiedad lineal de la integral: si cada una de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es acotada e integrable sobre un conjunto de medida finita E, y si α y β son unos números reales arbitrarios, la función $\alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)$ será integrable en E, con la particularidad de que*

$$\int_E [\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)]\,dx = \alpha \cdot \int_E f_1(x)\,dx + \beta \cdot \int_E f_2(x)\,dx.$$

4°. *Si una función $f(x)$ es acotada e integrable sobre cada uno de los conjuntos disjuntos E_1 y E_2 de medida finita, la función $f(x)$ será integrable también sobre la suma E de los conjuntos E_1 y E_2, con la particularidad de que*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx. \tag{8.35}$$

Esta propiedad se llama, de ordinario, *aditividad* de la integral.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que la unión de una partición arbitraria T_1 del conjunto E_1 y de una partición arbitraria T_2 del conjunto E_2 forma una partición T del conjunto $E = E_1 \cup E_2$. Denotemos las sumas superiores de $f(x)$, correspondientes a las particiones T_1, T_2 y T, con S_{T_1}, S_{T_2} y S_T, respectivamente, y las sumas inferiores de $f(x)$, correspondientes a las particiones T_1, T_2, y T, con s_{T_1}, s_{T_2}, y s_T, respectivamente. Entonces, evidentemente.

$$S_T = S_{T_1} + S_{T_2}, \quad s_T = s_{T_1} + s_{T_2}. \tag{8.36}$$

Denotemos las integrales superior e inferior de la función $f(x)$ sobre el conjunto E_1 con $\overline{I}^{(1)}$ y $\underline{I}^{(1)}$; sobre el conjunto E_2, con $\overline{I}^{(2)}$ e $\underline{I}^{(2)}$, y sobre el conjunto E, con $\overline{I}$ e $\underline{I}$.

A partir de las igualdades (8.36) y de lo que la cota superior exacta (inferior exacta) de la suma no es superior (no es inferior) a la suma de cotas superiores exactas (inferiores exactas) de los sumandos concluimos que

$$\underline{I}^{(1)} + \underline{I}^{(2)} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{I}^{(1)} + \overline{I}^{(2)}. \tag{8.37}$$

Por cuanto (debido a que $f(x)$ es integrable sobre E_1 y E_2) $\underline{I}^{(1)} = \overline{I}^{(1)} = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx$, $\underline{I}^{(2)} = \overline{I}^{(2)} = \int\limits_{E_2} f(x)\,dx$, de (8.37) obtenemos

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx.$$

Esto significa precisamente que la integral en el primer miembro de (8.35) existe y que se verifica la igualdad (8.35).

5°. *Si cada una de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ es acotada e integrable sobre un conjunto de medida finita E, y si en cada punto de dicho conjunto $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, entonces*

$$\int\limits_E f_1(x)\,dx \geqslant \int\limits_E f_2(x)\,dx. \tag{8.38}$$

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto todas las sumas inferiores de la función $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ son no negativas, resulta que $\underline{I} \geqslant 0$. De aquí se deduce que $\int\limits_E F(x)\,dx = \int\limits_E f_1(x)\,dx - \int\limits_E f_2(x)\,dx \geqslant 0$ (la existencia de esta integral y la igualdad escrita se deducen de la propiedad lineal ya demostrada). Con ello queda demostrada (8.38).

4. Integral de Lebesgue de una función no acotada y no negativa. Sus propiedades. Ahora pasamos a la definición de integral de Lebesgue para el caso en que una función medible $f(x)$ no es acotada. *Convengamos en considerar, al principio, que $f(x) \geqslant 0$ en todo punto del conjunto de medida finita E.*

Pongamos para cualquier $N > 0$:

$$(f)_N(x) = \text{mín}\{N,\ f(x)\}, \tag{8.39}$$

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)\,dx. \tag{8.40}$$

Notemos que para cualquier función $f(x)$, medible sobre un conjunto E, la función (8.39) será también medible [1]) y, por eso, la integral (8.40) existe. Indiquemos, además, que de (8.39) y (8.40) se deduce que *$I_N(f)$ va creciendo cuando N aumenta.*

Definición. *Si existe un límite finito $I_N(f)$ para $N \to \infty$, la función $f(x)$ recibe el nombre de función sumable (según Lebesgue) sobre un conjunto E, y el límite mencionado se llama integral de la función $f(x)$ extendida al conjunto E y se designa por el símbolo* $\int_E f(x)\,dx$.

Así pues, por definición

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} I_N(f).$$

Cerciorémonos de que *si una función $f(x)$, no negativa sobre el conjunto E, es sumable en dicho conjunto, la función $f(x)$ puede tender a $+\infty$ sólo en un subconjunto de E de medida cero.* En efecto, pongamos $E_0 = E[f = +\infty]$ y tengamos en cuenta que de (8.40) y (8.39) se deduce (en virtud de las propiedades 4° y 5° del punto anterior) una cadena de desigualdades

$$I_N(f) = \int_E (f)_N(x)\,dx \geqslant \int_{E_0} (f)_N(x)\,dx \geqslant \int_{E_0} N\,dx \geqslant N\,|E_0|$$

Pero, de la desigualdad $I_N(f) \geqslant N\,|E_0|$ proviene que la suposición de $|E_0| > 0$ llevaría a lo que $\lim\limits_{N\to\infty} I_N(f)$ sea igual a $+\infty$.

Añadamos que *toda función $f(x)$ es sumable sobre un conjunto de medida cero* (esto es evidente).

Al tratar de aclarar las propiedades generales de las funciones sumables, notemos, ante todo, que *para las funciones sumables no negativas quedan vigentes las propiedades 2°—5° establecidas en el punto antecedente para las funciones integrables acotadas* [2]).

Demos a conocer, a título de ejemplo, la demostración de la propiedad 3°. De (8.39) se deducen inmediatamente las siguientes desi-

---

[1]) Pues, para todo a real será medible el conjunto $E[(f)_N > a] = \begin{cases} E[f > a] \text{ para } a < N, \\ \text{conjunto vacío para } a \geqslant N. \end{cases}$

[2]) La constante α en la propiedad 2° debe ser en este caso no negativa.

gualdades:

$$(f_1)_{N/2}(x) + (f_2)_{N/2}(x) \leqslant (f_1 + f_2)_N(x) \leqslant (f_1)_N(x) + (f_2)_N(x)$$

que se cumplen para cualquier $N > 0$ en todo punto x del conjunto E. Integrando estas desigualdades en el conjunto E [1]), llegaremos a establecer la propiedad 3° para las funciones sumables no negativas arbitrariamente elegidas f_1 y f_2.

La demostración de las demás propiedades 2°—5° para tales funciones dejamos al cargo del lector.

Aclaremos, ahora, dos propiedades fundamentales más de las funciones sumables no negativas arbitrariamente elegidas.

***Teorema 8.17*. (*aditividad completa*).** *Supongamos que un conjunto E es una suma de un número numerable de conjuntos medibles disjuntos de dos en dos E_k, es decir, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. En tal caso serán válidas dos afirmaciones.*

I. *Si una función no negativa $f(x)$ es sumable sobre el conjunto E, será sumable también sobre cada uno de los conjuntos E_k, con la particularidad de que se verifica la igualdad*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx. \qquad (8.41)$$

II. *Si una función $f(x)$, no negativa sobre el conjunto E, es sumable en cada conjunto E_k y si la serie en el segundo miembro de (8.41) es convergente, la función $f(x)$ será sumable también sobre E, y para ella se verifica la igualdad* (8.41).

DEMOSTRACIÓN. 1) Demostremos, primero, los teoremas I y II para una función integrable $f(x)$ no negativa y *acotada*. Supongamos que existe una constante M tal que $f(x) \leqslant M$ en todo punto de E. Pongamos $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k$ y notemos que, en virtud del teorema 8.8, $|R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |E_k| \to 0$ (para $n \to \infty$). Pero, en este caso, en virtud de las propiedades 4°, 5° y 1°,

$$\int_E f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,dx = \int_{R_n} f(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{R_n} dx = M\,|R_n| \to 0$$

(para $n \to \infty$). La última relación demuestra los teoremas I y II para el caso de una función integrable acotada.

[1]) Aprovechamos las propiedades 5° y 3° para las funciones acotadas integrables.

2) Ahora demostremos el teorema I para una función sumable e integrable arbitrariamente elegida. La sumabilidad de $f(x)$ en cada E_k se deduce directamente de la desigualdad $\int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \leqslant \leqslant \int\limits_{E} (f)_N(x)\,dx$ y de lo que la integral en el primer miembro de ésta no decrece respecto de N. Resta por probar la igualdad (8.41). Con ayuda de lo demostrado en el p. 1) y de la desigualdad $(f)_N(x) \leqslant \leqslant f(x)$ obtenemos

$$\int\limits_{E} (f)_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx. \qquad (8.42)$$

Al pasar en la última igualdad al límite para $N \to \infty$, tendremos

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx. \qquad (8.43)$$

Por otra parte, en virtud de las propiedades demostradas en el punto anterior, para cualquier número m

$$\int\limits_{E} (f)_N(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k} (f)_N(x)\,dx,$$

y haciendo tender en la última desigualdad, primero, N a ∞, y, luego, m a ∞, obtendremos una desigualdad

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\,dx,$$

la cual demuestra, junto con (8.43), la igualdad (8.41).

3) Por fin, demostremos el teorema II para una función sumable no negativa arbitrariamente elegida. Notemos que resulta suficiente demostrar sólo la sumabilidad de $f(x)$ sobre un conjunto E (pues, la igualdad (8.41) se deducirá en este caso del teorema I ya demostrado).

Mas, la sumabilidad de $f(x)$ en E se deduce inmediatamente de la desigualdad (8.42) y de lo que la serie en el segundo miembro de esta desigualdad es convergente. El teorema está completamente demostrado.

***Teorema 8.18.* (continuidad absoluta de una integral).** *Si una función $f(x)$ es no negativa y sumable sobre un conjunto E, existe, para cualquier ε positivo, un número positivo δ tal que, cualquiera que sea un subconjunto sumable e del conjunto E con la medida $|e|$ inferior* *a δ, se verifique la desigualdad*

$$\int_e f(x)\,dx < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. 1) Supongamos al principio que la función no negativa $f(x)$ *es acotada*, es decir, existe tal M que $f(x) \leqslant M$. Entonces (en virtud de las propiedades establecidas en el punto antecedente)

$$\int_e f(x)\,dx \leqslant M \int_e dx = M\,|e| < M\delta < \varepsilon, \text{ para } \delta < \frac{\varepsilon}{M}.$$

2) Demostremos, ahora, el teorema para una función arbitraria $f(x)$, no negativa y sumable. Al fijar arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos elegir (en virtud de la definición de sumabilidad) $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$\int_E [f(x) - (f_N(x)]\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.44}$$

Con ayuda de (8.44) y de la desigualdad $(f_N)(x) \leqslant N$ obtendremos

$$\int_e f(x)\,dx = \int_e [f(x) - (f)_N(x)]\,dx + \int_e (f)_N(x) < \frac{\varepsilon}{2} + N \int_e dx =$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + N \cdot |e| < \frac{\varepsilon}{2} + N\delta < \varepsilon,$$

siempre que $\delta < \varepsilon/2N(\varepsilon)$. El teorema está demostrado.

Indiquemos en adición dos propiedades más que son válidas exclusivamente para las funciones sumables no negativas.

Condición bajo la cual una función sumable no negativa es equivalente a cero. Si una función $f(x)$ es no negativa, medible y sumable sobre un conjunto E, y si una integral $\int_E f(x)\,dx$ es nula, la función $f(x)$ será equivalente a cero idéntico sobre el conjunto E.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que la medida del conjunto $E[f > 0]$ es igual a cero. Primero, cerciorémonos de que para todo $a > 0$ es igual a cero la medida del conjunto $E_a = E[f > a]$. En efecto, si la medida $|E_a|$ fuera positiva, se obtendría una desigualdad

$\int_E f(x)\,dx \geqslant \int_{E_a} f(x)\,dx \geqslant aE_a > 0$, que contradice la condición de

que sea $\int_E f(x)\,dx = 0$. Ahora resta notar que se verifica la igualdad $E[f > 0] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E[f > 1/k]$, de la cual proviene que $|E[f > 0]| \leqslant$

$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |E[f > 1/k]| = 0.$

Criterio mayorante de sumabilidad de una función medible no negativa. Si una función $f_1(x)$ es no negativa y sumable sobre un conjunto E, y la función $f_2(x)$ es sumable en E, y si en todo punto de E se verifica la desigualdad $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, entonces la función $f_1(x)$ es también sumable sobre E.

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que

$$\int_E (f_1)_N(x)\,dx \leqslant \int_E (f_2)_N(x)\,dx \leqslant \int_E f_2(x)\,dx$$

y tomar en consideración que la integral en el primer miembro de la última desigualdad es una función no decreciente de N.

5. Integral de Lebesgue de una función no acotada de signo arbitrario. Supongamos que una función medible $f(x)$ no es, en el caso general, acotada sobre un conjunto E y toma en dicho conjunto los valores de signos cualesquiera.

Introduzcamos en el análisis dos funciones *no negativas*

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \text{ y } f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

la primera de las cuales, $f^+(x)$, coincide con $f(x)$ sobre el conjunto $E[f \geqslant 0]$ y es nula sobre el conjunto $E[f < 0]$, mientras que la segunda función, $f^-(x)$, coincide con $-f(x)$ sobre el conjunto $E[f < 0]$ y es nula sobre el conjunto $E[f \geqslant 0]$. Es evidente que $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$.

Definición. *Una función $f(x)$ se denomina sumable sobre el conjunto E, si en dicho conjunto es sumable cada una de las funciones no negativas $f^+(x)$ y $f^-(x)$. En este caso la diferencia entre las integrales $\int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx$ se denomina integral de Lebesgue de la función $f(x)$ en el conjunto E y se designa por el símbolo $\int_E f(x)\,dx$.*

Así pues, por definición

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx. \tag{8.45}$$

En lugar del término «función sumable» se usa frecuentemente el término «función integrable».

Una colección de todas las funciones sumables sobre el conjunto E se denota, corrientemente, por el símbolo $L(E)$ o $L^1(E)$. La notación $f(x) \in L(E)$ significa que $f(x)$ pertenece a la clase $L(E)$, es decir, es medible y sumable sobre el conjunto E.

Subrayemos que *una función $f(x)$, sumable sobre el conjunto E, es sumable en E cuando, y sólo cuando, es sumable en E la función $|f(x)|$.*

En efecto, si $f(x)$ es sumable en E, entonces, por definición, cada una de las funciones $f^+(x)$ y $f^-(x)$ es sumable en E, y, por consiguiente, la suma de las funciones mencionadas $f^+(x)$ y $f^-(x)$, que es igual a $|f(x)|$, será sumable en E. En cambio, si la función $|f(x)|$ es sumable en el conjunto E, la mensurabilidad en E de cada una de las funciones $f^+(x)$ y $f^-(x)$, como también las desigualdades $f^+(x) \leqslant |f(x)|$, $f^-(x) \leqslant |f(x)|$ predeterminan (en virtud del criterio mayorante de sumabilidad de una función medible no negativa (véase el fin del punto antecedente), que tanto $f^+(x)$, como $f^-(x)$, son sumables en E, y esto deja constancia de que la función $f(x)$ es sumable en el conjunto E.

De este modo, para la integral de Lebesgue (a diferencia de la integral de Riemann), la integrabilidad de una función $f(x)$ es equivalente a la de $|f(x)|$.

Pasemos a la cuestión *de propiedades* de las funciones sumables arbitrarias.

Notemos en seguida que *para las funciones sumables arbitrarias son válidas las propiedades* $2°-5°$, establecidas en el p. 3 para las funciones acotadas integrables, y en el p. 4, para funciones sumables no negativas. La validez de las propiedades citadas para las funciones sumables arbitrarias se deduce inmediatamente de la igualdad (8.45) y de la validez de las propiedades mencionadas para las funciones sumables no negativas.

Por fin, para las funciones sumables arbitrarias quedan en vigor las propiedades de aditividad completa y continuidad absoluta de la integral de Lebesgue (la demostración de estas propiedades para las funciones sumables no negativas ha constituido el contenido de los teoremas 8.17 y 8.18 del punto anterior). Aduzcamos la formulación y breves indicaciones referentes a la demostración de las propiedades mencionadas.

Teorema 8.17* **(*propiedad de aditividad completa*)**. *Supongamos que un conjunto E es una suma de un número numerable de conjuntos medibles disjuntos de dos en dos E_k, es decir, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Entonces, son válidas las siguientes dos afirmaciones.*

I. *Si una función $f(x)$ es sumable sobre un conjunto E, será también sumable en cada conjunto E_k, con la particularidad de que se verifica la igualdad* (8.41).

II. *Si una función $f(x)$ es medible y sumable en cada conjunto E_k, y si converge una serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|\, dx,$$

$f(x)$ será sumable en el conjunto E y se verifica la igualdad (8.41).

Con el fin de demostrar el teorema I, basta aplicar el teorema 8.17, I a las funciones no negativas $f^+(x)$ y $f^-(x)$ y aprovechar la igualdad (8.45).

Con el fin de demostrar el teorema II, basta tomar en consideración que la función $f(x)$ es sumable en E, debido al teorema 8.17, II. Mas, en este caso $f(x)$ es también sumable en E' y, en virtud del teorema I ya demostrado, se verifica la igualdad (8.41).

Teorema 8.18* (propiedad de continuidad absoluta de la integral). *Si una función $f(x)$ es sumable sobre un conjunto E, existe, para cualquier ε positivo, un número positivo δ tal que, cualquiera que sea un subconjunto e del conjunto E cuya medida $|e|$ sea inferior a δ se verifica una desigualdad* $\left|\int_e f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Para la demostración basta aplicar el teorema 8.18 a una función no negativa $|f(x)|$ y aprovechar la desigualdad $\left|\int_e f(x)\,dx\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,dx$.

6. Paso límite bajo el signo de la integral de Lebesgue.

Definición. *Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, sumables sobre un conjunto E, converge hacia una función $f(x)$ en $L(E)$, sumable sobre el mismo conjunto, si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0. \tag{8.46}$$

La convergencia de la sucesión $\{f_n(x)\}$ en $L(E)$ asegura la posibilidad de integrar término a término la sucesión $\{f_n(x)\}$ sobre el conjunto E, pues, de (8.46) se desprende que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$.

Observemos que *si una subsucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles y sumables sobre el conjunto E, converge hacia una función $f(x)$ en $L(E)$, medible y sumable en E, entonces $\{f_n(x)\}$ es convergente también en medida hacia $f(x)$ sobre E.*

Efectivamente, al fijar un $\varepsilon > 0$ arbitrario y al denotar con E_n un conjunto $E[|f - f_n| > \varepsilon]$, tendremos

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqslant \int_{E_n} |f_n(x) - f(x)|\,dx \geqslant \varepsilon\,|E_n|,$$

de suerte que de (8.46) proviene que $|E_n| \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Así pues, la convergencia en medida sobre E es más débil que la convergencia en $L(E)$ (y, según lo demostrado más arriba, más débil que la convergencia casi en todo punto de E).

Demostremos, no obstante, admitidas unas suposiciones adicionales que, de la convergencia en medida sobre E se deducirá la convergencia en $L(E)$.

***Teorema 8.19* (*de Lebesgue*).** *Si una sucesión de funciones $f_n(x)$, medibles sobre un conjunto E, converge en medida en E hacia una función $f(x)$ medible sobre E, y si existe una función $F(x)$, sumable sobre el conjunto E, tal que para todos los números n y casi todos p los puntos de E se cumple la desigualdad $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, entonces la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en $L(E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Cerciorémonos, primero, de que la función límite $f(x)$ satisface casi en todo punto de E la desigualdad $|f(x)| \leqslant F(x)$. Del teorema 8.15 se deduce que en la sucesión $\{f_n(x)\}$ puede elegirse una subsucesión $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ que sea convergente hacia $f(x)$ casi en todo punto de E. Pasando en la desigualdad $|f_{n_k}(x)| \leqslant F(x)$ al límite para $k \to \infty$, llegaremos a que $|f(x)| \leqslant F(x)$ para casi todos los puntos de E. De la desigualdad demostrada y del criterio mayorante de sumabilidad de una función medible no negativa (véase el fin del p. 4) proviene que $f(x)$ *es sumable* en E.

Al fijar un $\varepsilon > 0$ arbitrario y al designar con E_n un conjunto $E[|f - f_n| > \varepsilon]$, tendremos [1])

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx = \int_{E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx + \int_{E \setminus E_n} |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{E_n} F(x)\,dx + \varepsilon|E|.$$

Esta desigualdad y la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ permiten constatar que para establecer la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en $L(E)$, basta demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} F(x)\,dx = 0$, pero esto se deduce inmediatamente del teorema 8.18* sobre la continuidad absoluta de la integral y de lo que, por hipótesis $|E_n| \to 0$, cuando $n \to \infty$. El teorema está demostrado.

***Corolario* (*teorema de Lebesgue sobre el paso límite bajo el signo de integral*).** *Si una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles sobre el conjunto E, converge casi en todo punto de E hacia una función límite $f(x)$, y si existe una función $F(x)$, sumable en el conjunto E, tal que para todos los números n y casi todos los puntos de E se cumple la*

[1]) Tenemos presente en este caso que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2F(x)$ casi en todo punto en E.

desigualdad $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, *entonces* $f(x)$ *es sumable sobre* E *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx. \tag{8.47}$$

DEMOSTRACION. Del teorema 8.13 se deduce la mensurabilidad de $f(x)$ sobre el conjunto E. Ahora basta notar que de la convergencia casi en todo punto de E proviene (en virtud del teorema 8.14) convergencia en medida sobre E, y, además, aplicar el teorema 8.19.

Teorema 8.20 (teorema de B. Levi). *Supongamos que cada función* $f_n(x)$ *es medible y sumable sobre el conjunto* E, *y que para todos los números* n *y para casi todos los puntos del conjunto* E *se cumple una desigualdad* $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. *Supongamos, además, que existe una constante* M *tal que para todos los números* n *se cumple la desigualdad* $\left|\int_E f_n(x)\,dx\right| \leqslant M$. *Entonces, para casi todos los puntos* x *del conjunto* E *existe un límite finito* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *con la particularidad de que la función límite* $f(x)$ *es sumable sobre el conjunto* E *y se verifica la igualdad* (8.47).

DEMOSTRACIÓN. Sin perder la generalidad de los razonamientos, podemos considerar que todas las $f_n(x)$ son *no negativas* en casi todo punto de E (de lo contrario, en lugar de $f_n(x)$ tomaríamos funciones no negativas $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$). Por cuanto la sucesión $\{f_n(x)\}$ no decrece casi en todo punto de E, queda definida casi en todos los puntos de E la función $f(x)$ que toma en estos puntos o bien valores finitos, o bien valores iguales a $+\infty$. Si demostramos que dicha función límite es sumable sobre el conjunto E, esto será un indicio de que $f(x)$ tiene casi en todo punto de E valores *finitos*, es decir, un indicio de que la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente hacia $f(x)$ *casi en todo punto* de E. De aquí y de la desigualdad $f_n(x) \leqslant f(x)$ (casi en todo punto de E) se deducirá, en virtud del corolario en el teorema antecedente, la igualdad (8.47).

Así pues, para demostrar el teorema, basta establecer la sumabilidad de la función límite $f(x)$ sobre el conjunto E.

Observemos que para cualquier $N > 0$ una sucesión [1]) $\{(f_n)_N(x)\}$ converge hacia $(f)_N(x)$ casi en todo punto de E, con la particularidad de que la función acotada $(f)_N(x)$ es sumable en E y la desigualdad $(f_n)_N(x) \leqslant (f)_N(x)$ queda válida para todos los números n y para casi todos los puntos de E.

---

[1]) Recordemos que para todo $N > 0$ y para cada función $F(x)$ suponemos $(F)_N(x) = \min\{N, F(x)\}$.

Esto asegura la aplicación a la sucesión $\{(f_n)_N(x)\}$ del corolario del teorema antecedente, en virtud del cual

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (f_n)_N(x)\,dx = \int_E (f)_N(x)\,dx.$$

De esta relación y de la desigualdad [1])

$$\int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E (f_n)_N(x)\,dx$$

concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx \geqslant \int_E (f)_N(x)\,dx,$$

y, por cuanto $\int_E f_n(x)\,dx \leqslant M$ para todos los números n, resulta que también

$$\int_E (f)_N(x)\,dx \leqslant M. \tag{8.48}$$

De la desigualdad (8.48) y del hecho de que la integral en el primer miembro de esta igualdad no decrece por N se deduce la existencia de un límite

$$\lim_{N\to\infty} \int_E (f)_N(x)\,dx,$$

lo cual significa precisamente que $f(x)$ es sumable sobre el conjunto E. El teorema está demostrado.

Enunciemos, ahora, el teorema 8.20 en términos de una serie funcional (en esta forma el teorema citado es de amplio uso).

Si toda función $u_n(x)$ es no negativa casi en todo punto de E, sumable y medible en dicho conjunto, y si converge una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)\,dx$$

será convergente casi en todo punto de E la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{8.49}$$

[1]) Esta desigualdad proviene de lo que $(f_n)_N(x) = \text{mín}\ \{N,\ f_n(x)\}$.

con la particularidad de que la suma $S(x)$ de la serie (8.49) *es sumable sobre el conjunto E y satisface la condición*

$$\int_E S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x)\,dx.$$

Teorema 8.21 (teorema de Fatou). *Si una subsucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles y sumables sobre el conjunto E, converge en casi todo punto de E hacia una función límite $f(x)$, y si existe una constante A tal que para todos los números n se verifica una desigualdad $\int_E |f_n(x)|\,dx \leqslant A$, la función límite $f(x)$ será sumable sobre el conjunto E y para ella se cumple la desigualdad $\int_E |f(x)|\,dx \leqslant A$.*

DEMOSTRACIÓN. Introduzcamos en el análisis las funciones $g_n(x) = \inf_{k \geqslant n} |f_k(x)|$ [1] y notemos que cada función $g_n(x)$ es no negativa y medible [2] sobre el conjunto E y que la sucesión $\{g_n(x)\}$ no decrece sobre el conjunto E y para casi todos los puntos de E converge hacia $|f(x)|$. Además, en todo punto del conjunto E se cumple, para cualquier número n, una desigualdad

$$g_n(x) \leqslant |f_n(x)|, \tag{8.50}$$

de la cual se deduce (en virtud del criterio mayorante de sumabilidad de una función medible no negativa, véase el fin del p. 4) la sumabilidad de $g_n(x)$ sobre el conjunto E. Aplicando a la sucesión $\{g_n(x)\}$ el teorema 8.20, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,dx = \int_E |f(x)\,dx. \tag{8.51}$$

Por cuanto para todo número n, en virtud de (8.50), $\int_E g_n(x)\,dx \leqslant$ $\leqslant \int_E |f_n(x)|\,dx \leqslant A$, de (8.51) obtenemos $\int_E |f(x)|\,dx \leqslant A$. El teorema está demostrado.

7. *Clases de Lebesgue* $L^p(E)$. Recordemos que un espacio lineal R se llama *normado*, si se cumplen las siguientes dos exigencias: 1) se conoce una regla, por cuyo intermedio a todo elemento f del espacio R se le pone en correspondencia un número real llamado

---

[1]) Esta notación significa que para todo x el valor de $g_n(x)$ es la cota superior exacta de los valores $|f_n(x)|$, $|f_{n+1}(x)|$, . . .

[2]) La mensurabilidad de $g_n(x)$ en E se deduce del teorema 8.12 del párrafo anterior.

norma de dicho elemento y denotado con el símbolo $\| f \|_R$, 2) la citada regla satisface los siguientes tres axiomas:

1°. $\| f \|_R > 0$, si $f \neq 0$ [1]. $\| f \|_R = 0$, si $f = 0$.

2°. $\| \lambda f \|_R = | \lambda | \cdot \| f \|_R$ para todo elemento f y todo número real λ.

3°. Para cualesquiera dos elementos f y g se verifica la así llamada *desigualdad triangular* $\| f + g \|_R \leqslant \| f \|_R + \| g \|_R$.

Examinemos en el espacio normado lineal R una sucesión arbitraria de elementos $\{f_n\}$.

Definición 1. *Una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de un espacio normado lineal R se llama fundamental, si*

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \| f_m - f_n \|_R = 0.$$

Definición 2. *Suele decirse que una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de un espacio normado lineal R converge en R hacia un elemento de este espacio f, si*

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_R = 0.$$

La convergencia de esta índole se denomina también *convergencia en norma*, o *convergencia fuerte* en R.

Es fácil demostrar que *toda sucesión de elementos $\{f_n\}$ convergente en R es siempre fundamental.* En efecto, si existe un elemento f tal que $\| f_n - f \|_R \to 0$ para $n \to \infty$, de la desigualdad triangular

$$\| f_m - f_n \|_R \leqslant \| f_m - f \|_R + \| f - f_n \|_R$$

se deduce inmediatamente que

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \| f_m - f_n \|_R = 0.$$

Surge, naturalmente, una cuestión de si es convergente en R hacia cierto elemento f del espacio R toda sucesión fundamental de elementos $\{f_n\}$.

Definición 3. *Un espacio normado lineal R se llama completo, si toda sucesión fundamental de elementos $\{f_n\}$ del espacio R converge en R hacia cierto elemento f de este espacio.*

En este punto analicemos una clase importante de espacios normados lineales introducidos por Lebesgue y demostremos la completitud de estos espacios.

Supongamos que un número real p satisface la condición de que $p \geqslant 1$.

[1] 0 significa elemento nulo del espacio lineal R.

***Definición* 4.** *Diremos que una función $f(x)$ pertenece a la clase (o espacio) $L^p(E)$, si la función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E, y la función $|f(x)|^p$, sumable en dicho conjunto* [1]).

Es fácil convencerse de que la clase $L^p(E)$ es, para $p \geqslant 1$ cualquiera, un espacio normado lineal, si introducimos en él una norma con ayuda de la relación

$$\|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

La linealidad de tal espacio es obvia. No es difícil comprobar la validez de los axiomas 1°—3° de la definición de espacio normado. El axioma 1° se deduce inmediatamente de la hipótesis de equivalencia a cero de la función sumable (véase el fin del p. 4). El axioma 2° es perfectamente evidente. El axioma 3° es evidente para $p = 1$, y, cuando $p > 1$, proviene de la desigualdad de Minkowski establecida en el complemento al capítulo 1, v. II [2]):

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Demostremos, ahora, el siguiente teorema *fundamental* [3]).

***Teorema* 8.22.** *Para todo* $p \geqslant 1$ *el espacio* $L^p(E)$ *es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión fundamental arbitraria de elementos del espacio $L^p(E)$. Pongamos

$$\varepsilon_n = \sup_{m \geqslant n} \|f_m - f_n\|_p$$

(la cota superior exacta de la magnitud $\|f_m - f_n\|_p$ se toma por el conjunto de todos los m que satisfacen la desigualdad $m \geqslant n$). Por ser $\{f_n\}$ una sucesión fundamental, resulta que $\varepsilon_n \to 0$, cuando $n \to \infty$. De aquí se deduce que puede elegirse una subsucesión n_k ($k = 1, 2, \ldots$) tal que sea convergente una serie [4])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k}. \tag{8.52}$$

---

[1]) No se distinguirán en este caso funciones equivalentes sobre el conjunto E, considerándolas como un solo elemento de $L^p(E)$.

[2]) En el complemento aducido la desigualdad de Minkowski se establece para el caso de la integral de Riemann. Al tratar la integral de Lebesgue, basta establecer esta desigualdad sólo para las funciones acotadas $f(x)$ y $g(x)$, lo que se hace según el mismo esquema que se aplicó en el caso de la integral de Riemann (es suficiente examinar *la partición lebesguiana* del conjunto E).

[3]) En una forma especial (referente al así llamado sistema trigonométrico) este teorema fue demostrado en 1907 por Riezs e (independientemente de Riezs) por Fisher. En 1909 Hermann Weyl estableció que la conexión con el sistema trigonométrico no era esencial y dio la formulación más general (para $p = 2$) que aquí presentamos.

[4]) Basta tomar tal n_k que se verifique la desigualdad $\varepsilon_{n_k} \leqslant 2^{-k}$.

De la desigualdad de Hölder [1]) establecida en el complemento 1 del cap. 1, v. II, tenemos

$$\int_E |f(x)\cdot g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_E |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}$$

$\left(p>1,\ q=\frac{p}{p-1}\right)$, se deduce que, cuando $p>1$, resulta

$$\int_E |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,dx \leqslant \|f_{n_{k+1}}(x)-$$

$$-f_{n_k}(x)\|_p\cdot\left(\int_E 1^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \varepsilon_{n_k}\cdot|E|^{\frac{p-1}{p}}.$$

De la última desigualdad y de lo que la serie (8.52) es convergente se deduce la convergencia de la serie [2])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,dx. \qquad (8.53)$$

Teniendo presentes la convergencia de la serie (8.53) y el teorema 8.20 (véase la formulación de este teorema en términos de una serie), concluimos que casi en todo punto de E converge una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|,$$

y, por consiguiente, también una serie

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)].$$

Pero, esto es testimonio de que la k-ésima suma parcial de la serie citada, que es igual a $f_{n_{k+1}}(x)$, converge casi en todo punto de E hacia cierta función $f(x)$. Ahora, por cuanto $\|f_m(x)-f_{n_k}(x)\|_p\leqslant$ $\leqslant\varepsilon_m$ para cualquier número m y cualquier $n_k\geqslant m$, y puesto que, para $k\to\infty$, $[f_m(x)-f_{n_k}(x)]\to[f_m(x)-f(x)]$ casi en todo punto de E, entonces, de acuerdo con el teorema de Fatou 8.21, $\|f_m(x)-$ $-f(x)\|_p\leqslant\varepsilon_m$ (para cualquier número m), y esto significa que la sucesión $\{f_m(x)\}$ converge en $L^p(E)$ hacia $f(x)$. El teorema está demostrado.

[1]) En el complemento aducido la desigualdad de Hölder se establece para la integral de Riemann. Al tratar la integral de Lebesgue, basta establecer esta desigualdad sólo para las funciones acotadas $f(x)$ y $g(x)$, lo que se hace según el mismo esquema que se aplicó para la integral de Riemann (es suficiente examinar la *partición lebesguiana* del conjunto E).

[2]) Cuando $p=1$, no se debe aplicar la desigualdad de Hölder, pues la serie (8.53) coincide con la (8.52).

8. Observaciones conclusivas. El punto central de la teoría de Lebesgue consiste en su *carácter cerrado respecto de la operación de paso límite* tanto en la teoría de los conjuntos medibles (teoremas 8.3 y 8.8), como en la de funciones medibles (teorema 8.13) y, también, de la teoría de integral (teorema 8.22).

Toda la exposición se realizaba para el caso de una sola variable. En el caso de n variables, el esquema de construcción de la teoría queda el mismo, mas por un conjunto de partida (principal) debe tomarse, el lugar del intervalo (a, b), un paralelepípedo n-dimensional abierto $\prod_{k=1}^{n} (a_k < x_k < b_k)$ (para los números a_k se admiten valores $-\infty$, y para los números b_k, valores $+\infty$). En el caso n-dimensional de momento cualitativamente nuevo de la teoría sirve el así llamado teorema de Fubini sobre la reducción de una integral de Lebesgue n-múltiple a una integral reiterada de multiplicidad menor. No nos detendremos aquí en este teorema.

Complemento 1 al capítulo 8

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE DE INTEGRABILIDAD SEGÚN RIEMANN

Sin perder la generalidad de nuestros razonamientos, examinemos las funciones definidas sobre el segmento $[0, 1]$. Para cada función $f(x)$ de esta índole introduzcamos las así llamadas *funciones de Baire* $m(x)$ y $M(x)$, que en cada punto x representan límites superior e inferior, respectivamente, en este punto de la función en consideración $f(x)$ [1]. Así pues, por definición

$$m(x) = \underline{\lim}_{y \to x} f(y), \quad M(x) = \overline{\lim}_{y \to x} f(y).$$

Observemos que las funciones de Baire pueden definirse también de un modo diferente:

$$m(x) = \lim_{\delta \to 0+0} \left[\inf_{v_\delta(x)} f(y)\right], \quad M(x) = \lim_{\delta \to 0+0} \left[\sup_{v_\delta(x)} f(y)\right],$$

donde $v_\delta(x)$ es un δ-entorno del punto x (en el caso de que x sea un punto límite de $[0, 1]$, se deben tomar en lugar de δ-entornos los δ-semientornos del punto x, derecho o izquierdo, respectivamente).

Evidentemente, *la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 cuando, y sólo cuando, $f(x_0) = m(x_0) = M(x_0)$.*

Teorema 8.23. *Para que una función $f(x)$ acotada sobre el segmento $[0, 1]$*

[1]) En el caso en que dentro de un entorno arbitrariamente pequeño del punto x la función $f(x)$ no sea acotada inferiormente (superiormente), suponemos que el límite inferior (superior) de $f(x)$ en este punto es igual a $-\infty$ $(+\infty)$.

sea integrable según Riemann en dicho segmento, es necesario y suficiente que dicha función sea continua casi en todo punto de [0, 1].

DEMOSTRACIÓN. Dividamos un segmento [0, 1], para cualquier número n, en 2^n intervalos $\Delta_k^{(n)} = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$ e introduzcamos en el análisis con funciones escalonadas $\varphi_n(x)$ y $\Phi_n(x)$, suponiendo que en cada intervalo $\Delta_k^{(n)}$ las funciones $\varphi_n(x)$ y $\Phi_n(x)$ son iguales a $\inf\limits_{\Delta_k^{(n)}} f(y)$ y a $\sup\limits_{\Delta_k^{(n)}} f(y)$, respectivamente, y en los puntos $k/2^n$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n)$ ambas funciones $\varphi_n(x)$ y $\Phi_n(x)$ son nulas. Entonces, al tomar una sucesión de intervalos $\Delta_k^{(n)}$ que se encoge hacia x, obtendremos, para cada punto $x \neq k/2^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = m(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = M(x). \tag{8.54}$$

De este modo, la convergencia (8.54) tiene lugar *casi en todo punto* del segmento [0, 1]. Por cuanto las funciones escalonadas $\varphi_n(x)$ y $\Phi_n(x)$ son a ciencia cierta medibles en [0, 1], de (8.54) y del teorema 8.13 se deduce que también son medibles en [0, 1] las funciones de Baire $m(x)$ y $M(x)$.

De (8.54) resulta que casi en todo punto sobre [0, 1]

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)] = M(x) - m(x).$$

De la última relación se deduce, en virtud del corolario en el teorema 8.19, que[1])

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [\Phi_n(x) - \varphi_n(x)]\, dx = \int_0^1 [M(x) - m(x)]\, dx. \tag{8.55}$$

Resta por notar que

$$\int_0^1 \Phi_n(x)\, dx = S_n, \qquad \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = s_n, \tag{8.56}$$

donde S_n y s_n son sumas superior e inferior de Darboux, respectivamente, correspondientes a la partición $\{\Delta_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$.

De (8.55) y (8.56) se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = \int_0^1 [M(x) - m(x)]\, dx,$$

de modo que (en virtud del cap 1, v. II) la condición necesaria y suficiente de integrabilidad según Riemann se reduce a una igualdad $\int_0^1 [M(x) - m(x)]\, dx = 0$. Pero, la última igualdad significa (en vista de que una función no negativa medible y sumable es equivalente a cero (véase p. 4, § 4)) que $M(x) - m(x) = 0$ casi en todo punto sobre [0, 1]. El teorema queda demostrado.

[1]) En adelante, todas las integrales en el Complemento 1 se entienden en el sentido de Lebesgue.

Complemento 2 al capítulo 8

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE DE INTEGRABILIDAD DE UNA FUNCIÓN ACOTADA SEGÚN LEBESGUE

Teorema 8.24. *Para que una función $f(x)$ acotada sobre un conjunto medible E sea integrable en dicho conjunto según Lebesgue, es necesario y suficiente que esta función sea medible en el conjunto P.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de la suficiencia constituye el contenido del teorema 8.16, por lo cual es necesario sólo demostrar la necesidad.

Sea una función $f(x)$ acotada e integrable según Lebesgue sobre el conjunto medible E. Esto quiere decir que las integrales de Lebesgue superior e inferior de esta función son iguales y, por consiguiente, existe una sucesión de particiones $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ del conjunto E de tal índole que las correspondientes sucesiones de sumas superiores $\{S_n\}$ y de sumas inferiores $\{s_n\}$ satisfacen la condición $S_n - s_n < 1/n$, con la particularidad de que cada partición sucesiva $T_n = \{E_k^{(n)}\}$ es un refino de la partición antecedente $T_{n-1} = \{E_k^{(n-1)}\}$. (Con el fin de construir tal sucesión, es suficiente tomar, por donde sea necesario, el producto de particiones introducidas).

Recordemos que, por definición,

$$S_n = \sum_k M_k^{(n)} \cdot |E_k^{(n)}|, \quad s_n = \sum_k m_k^{(n)} \cdot |E_k^{(n)}|,$$

donde $M_k^{(n)}$ y $m_k^{(n)}$ son las cotas superior exacta e inferior exacta, respectivamente, de la función $f(x)$ sobre el conjunto $E_k^{(n)}$.

Definamos dos sucesiones de funciones $\{\overline{f_n}(x)\}$ y $\{\underline{f_n}(x)\}$, al hacer la función $\overline{f_n}(x)$ igual a $M_k^{(n)}$ sobre el conjunto $E_k^{(n)}$, y la función $\underline{f_n}(x)$, igual a $m_k^{(n)}$ sobre el conjunto $E_k^{(n)}$.

Es evidente que para todo número n ambas funciones $\overline{f_n}(x)$ y $\underline{f_n}(x)$ son medibles sobre el conjunto E (ya que dichas funciones representan combinaciones lineales de las funciones características de los conjuntos medibles $E_k^{(n)}$).

Además, evidentemente, la sucesión $\{\overline{f_n}(x)\}$ no es creciente, y la sucesión $\{\underline{f_n}(x)\}$ no decrece sobre el conjunto E, con la particularidad de que en cada punto del conjunto E se cumplen las desigualdades

$$\underline{f_n}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f_n}(x), \tag{8.57}$$

cualquiera que sea n.

Pongamos $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n}(x)$, $\underline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{f_n}(x)$. De (8.57) concluimos que en cada punto x

$$\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x), \tag{8.58}$$

y, además, las funciones $\overline{f}(x)$ y $\underline{f}(x)$ son medibles sobre el conjunto E en virtud del teorema 8.13.

Del teorema de B. Levi 8.20 obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [\overline{f_n}(x) - \underline{f_n}(x)]\, dx = \int_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]\, dx. \tag{8.59}$$

De la definición de las funciones $\overline{f}_n(x)$ y $\underline{f}_n(x)$ se deduce que $\int\limits_E [\overline{f}_n(x) - \underline{f}_n(x)]\,dx = S_n - s_n$, con la particularidad de que, por construcción $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$. En virtud de (8.59), esto nos lleva a una igualdad $\int\limits_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]\,dx = 0$.

Partiendo de la última igualdad y del hecho de que la función $[\overline{f}(x) - \underline{f}(x)]$ es, en virtud del p. 4, § 4, negativa, obtenemos que $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$ casi en todo punto sobre E. Por consiguiente, en virtud de (8.58), $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ casi en todo punto sobre E, y, por cuanto las funciones $\underline{f}(x)$ y $\overline{f}(x)$ son medibles en E, entonces, de acuerdo con la propiedad 4° del p. 2, § 3, $f(x)$ será también medible sobre el conjunto E. El teorema está demostrado.

Capítulo 9

INTEGRALES DEPENDIENTES DE LOS PARÁMETROS

Estudiemos en este capítulo una clase especial de funciones que se caracteriza por la denominación general «integrales dependientes de un parámetro». La idea de estas funciones puede obtenerse, si integramos respecto de x, con cada y fijo, una función de dos variables x e y. Como resultado, se obtendrá, evidentemente, una función dependiente del parámetro y.

Surgen, naturalmente, las cuestiones acerca de la continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad de tales funciones. Todos estos problemas se estudiarán en el presente capítulo.

Está perfectamente claro que la integración respecto del argumento x no ha de ser forzosamente propia: si un dominio en el que viene dada la función $f(x, y)$ es una franja infinita $\Pi = \{a \leqslant x < \infty, c \leqslant y \leqslant d\}$, la integración respecto de x, con y fijo, se realizará en una semirrecta, razón por la cual la integral correspondiente respecto de la variable x será impropia. De este modo, surge una noción de integrales impropias dependientes de un parámetro. Las propiedades de tales integrales también se estudiarán en este capítulo.

Subrayemos que se tratarán aquí sólo las funciones integrables según Riemann (no según Lebesgue) y todas las integrales, sean propias o impropias, se entienden en el sentido de Riemann.

§ 1. Integrales propias dependientes de un parámetro

1. Concepto de integral dependiente de un parámetro. Supongamos que en un rectángulo $\Pi = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ viene definida una función $f(x, y)$ integrable respecto de x sobre el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ para cualquier y fijo del segmento $c \leqslant y \leqslant d$. En este caso sobre el segmento $c \leqslant y \leqslant d$ queda definida una función

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{9.1}$$

llamada *integral dependiente del parámetro* y. La función $f(x, y)$ puede definirse también sobre un conjunto de forma más general. Por ejemplo, como dominio de definición de $f(x, y)$ puede servir el siguiente conjunto $D = \{a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$. En este caso sobre el segmento $[c, d]$ está definida una función de y con ayuda de la relación (9.1), pero los límites de integración a y b dependen de y. Estudiemos, primero, un caso en que los límites de integración son constantes.

2. Propiedades de continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad de las integrales dependientes de un parámetro. Los teoremas que siguen abajo dan respuesta a las cuestiones citadas. En estos teoremas se denotará con el símbolo Π un rectángulo $\{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$.

Teorema 9.1. *Si una función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo Π, la función $I(y)$, definida mediante la relación* (9.1), *será continua sobre el segmento $[c, d]$.*

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula (9.1) se deduce que un incremento $\Delta I = I(y + \Delta y) - I(y)$ de la función $I(y)$ es igual a

$$\Delta I = \int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\, dx. \tag{9.2}$$

Como que, de acuerdo con el teorema de Cantor, la función $f(x, y)$ es uniformemente continua en el rectángulo Π, según $\varepsilon > 0$ dado puede indicarse tal $\delta > 0$ que para todo x de $[a, b]$ y todos los y y $(y + \Delta y)$ de $[c, d]$ de tal índole que $|\Delta y| < \delta$, se verifique la desigualdad $|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Mas, en este caso, de la relación (9.2) se deduce que cuando $|\Delta y| < \delta$, se cumple la desigualdad $|\Delta I| < \varepsilon$, la cual significa la continuidad de la función $I(y)$ en cada punto y del segmento $[c, d]$. El teorema esta demostrado.

Teorema 9.2. *Si una función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo Π, la función $I(y)$ será integrable sobre el segmento $[c, d]$. Además, es válida la fórmula*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{9.3}$$

Dicho de otro modo, en las condiciones del teorema, *la integral dependiente de un parámetro puede integrarse respecto del parámetro bajo el signo de integral.*

DEMOSTRACIÓN. De conformidad con el teorema 9.1, una función $I(y)$ es continua sobre el segmento $[c, d]$ y, por eso, integrable en el mismo. La validez de la fórmula (9.3) proviene de la igualdad de las integrales reiteradas que figuran en la relación (9.3) (estas integrales son iguales a la integral doble $\iint\limits_{\Pi} f(x, y)\, dx\, dy$). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. En la relación (9.3) podemos poner cualquier número del segmento $[c, d]$ en lugar del límite superior d de integración respecto de y.

Teorema 9.3. *Si una función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo* Π, *la función $I(y)$ es diferenciable sobre el segmento $[c, d]$ y la derivada suya $\frac{\partial I}{\partial y}$ puede hallarse según la fórmula*

$$\frac{dI}{dy}=\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \tag{9.4}$$

De otras palabras, en las condiciones del teorema, *la integral dependiente de un parámetro puede diferenciarse respecto del parámetro bajo el signo de integral.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos la siguiente función auxiliar

$$g(y)=\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \tag{9.5}$$

Por cuanto $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en el rectángulo Π, entonces, de acuerdo con el teorema 9.1, la función $g(y)$ es continua sobre el segmento $[c, d]$ y la integral de esta función extendida al segmento $[c, y]$ puede hallarse según la fórmula de integración bajo el signo de integral. De conformidad con la observación al teorema 9.2, obtenemos

$$\int_c^y g(t)\,dt=\int_a^b dx\int_c^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\,dt=\int_a^b f(x, y)\,dx-\int_a^b f(x, c)\,dx. \tag{9.6}$$

Por cuanto $\int_a^b f(x, y)\,dx=I(y)$, y $\int_a^b f(x, c)\,dx=I(c)$, de la relación (9.6) obtenemos la siguiente expresión para $I(y)$:

$$I(y)=\int_c^y g(t)\,dt+I(c). \tag{9.7}$$

Como se sabe, la derivada de una integral con límite superior variable de una función continua $g(t)$ existe y es igual al valor de esta función en el punto y. Por eso, la función $I(y)$ es diferenciable y su derivada $\frac{\partial I}{\partial y}$ es igual a $g(y)$. Recurriendo a la fórmula (9.5) para $g(y)$, nos convencemos de que la relación (9.4) es válida. El teorema queda demostrado.

3. Caso en que los límites de integración dependen de un parámetro. Ya se ha dicho que puede haber un caso en que los límites de integración dependen de un parámetro. Convengamos en considerar que la función $f(x, y)$ viene dada en el rectángulo Π, el cual incluye un dominio D definido mediante las relaciones $\{a(y) \leqslant x \leqslant b(y), c \leqslant y \leqslant d\}$ (fig. 9.1). Si. para cualquier y fijo del segmento $[c, d]$, la función $f(x, y)$ es integrable respecto de x sobre el segmento $[a(y)], [b(y)]$, entonces, obviamente, en el segmento $[c, d]$ queda definida la siguiente función:

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \quad (9.8)$$

que representa *una integral dependiente del parámetro y cuyos límites de integración también dependen del parámetro.*

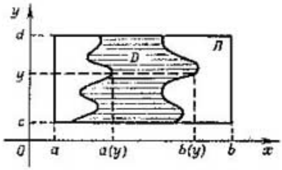

Fig. 9.1.

Analicemos la continuidad y diferenciabilidad respecto del parámetro de tales integrales. Los siguientes teoremas dan respuesta a las preguntas citadas.

Teorema 9.4. *Sea $f(x, y)$ una función continua en el rectángulo Π, y sean $a(y)$ y $b(y)$ funciones continuas sobre el segmento $[c, d]$. Entonces, la función $I(y)$ definida mediante la relación (9.8) es continua en el segmento $[c, d]$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un y_0 arbitrario del segmento $[c, d]$, y representemos $I(y)$ en la siguiente forma:

$$I(y) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)\, dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\, dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\, dx. \quad (9.9)$$

Por cuanto la primera integral en el miembro derecho de (9.9) depende del parámetro y tiene límites constantes de integración, siendo continua su función subintegral, dicha integral será, en virtud del teorema 9.1, una función continua de y, por lo cual tiende a $I(y_0)$ cuando $y \to y_0$. Para otras dos integrales obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\left| \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right| \leqslant M\, |b(y) - b(y_0)|,$$

$$\left| \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y)\, dx \right| \leqslant M\, |a(y) - a(y_0)|,$$

donde $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)|$. De las últimas desigualdades y de la continuidad de las funciones $a(y)$ y $b(y)$ proviene que para $y \to y_0$ ambas últimas integrales en el segundo miembro de (9.9) tienden a cero. De este modo, el límite del segundo miembro de (9.9) existe cuando $y \to y_0$, y es igual a $I(y_0)$.

Así pues, la función $I(y)$ es continua en todo punto y_0 del segmento $[c, d]$, es decir, continua sobre dicho segmento. El teorema queda demostrado.

Demostremos el teorema sobre la diferenciabilidad de la integral $I(y)$ respecto del parámetro.

Teorema 9.5. *Supongamos que una función $f(x, y)$ y su derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo Π. Supongamos, además, que las funciones $a(y)$ y $b(y)$ son diferenciables sobre el segmento $[c, d]$. Entonces, la función $I(y)$, definida por la relación (9.8), es diferenciable sobre el segmento $[c, d]$ y su derivada $I'(y)$ puede calcularse según la fórmula*

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + b'(y)\, f(b(y), y) - a'(y)\, f(a(y), y). \tag{9.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos arbitrariamente y_0 del segmento $[c, d]$ y representemos $I(y)$ en la forma (9.9). La primera integral en el miembro derecho de (9.9) es una integral que depende del parámetro y que tiene límites constantes de integración. Ya que, por hipótesis, $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en Π, entonces, de conformidad con el teorema 9.3, el primer sumando representa una función diferenciable en el punto y_0, y la derivada de la citada función en este punto será igual a $\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y}\, \partial x$. Mostremos que el segundo sumando en el miembro derecho de (9.9) tiene derivada en el punto y_0. Por cuanto este segundo sumando se anula para $y = y_0$, basta convencerse de que existe un límite

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\, dx}{y - y_0}, \tag{9.11}$$

que, por definición, es precisamente igual a la derivada buscada.

Transformemos la integral en el numerador de la fórmula (9.11). Según la fórmula del valor medio tenemos

$$\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)\, dx = f(\overline{x}, y)\,(b(y) - b(y_0)), \tag{9.12}$$

donde $\overline{x}$ está encerrado entre $b(y_0)$ y $b(y)$. Al sustituir la expresión para la integral de la fórmula (9.12) en el numerador de la expresión (9.11), teniendo presente que, en virtud de la continuidad, $f(\overline{x}, y) \to f(b(y_0), y_0)$ cuando $y \to y_0$, y que $\frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} \to b'(y_0)$ cuando $y \to y_0$, nos convencemos de que el límite (9.11) que nos interesa existe y es igual a $b'(y_0)\, f(b(y_0),\ y_0)$. Razonando de un modo sumamente igual, nos convencemos de que el tercer sumando en el miembro derecho de (9.9) también tiene derivada en el punto y_0 que es igual a $a'(y_0)\, f(a(y_0),\ y_0)$.

Así pues, se ha demostrado que la función $I(y)$ es diferenciable en un punto arbitrario y_0 del segmento $[c,\ d]$ y su derivada $I'(y_0)$ puede calcularse según la fórmula (9.10). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Los teoremas 9.4 y 9.5 son lícitos también para un caso en que la función $f(x,\ y)$ viene dada sólo en un dominio D y satisface en éste las mismas exigencias que en el rectángulo Π.

§ 2. Integrales impropias dependientes de un parámetro

1. Concepto de integral impropia de primera especie dependiente de un parámetro. Concepto de convergencia uniforme de la integral impropia dependiente de un parámetro. Denotemos con el símbolo Π_∞ una semifranja $\{a \leqslant x < \infty,\ c \leqslant y \leqslant d\}$.

Supongamos que en la semifranja Π_∞ está dada una función $f(x,\ y)$ integrable respecto de x en el sentido impropio sobre la semirrecta $a \leqslant x < \infty$ para cualquier y fijo del segmento $[c,\ d]$. En estas condiciones sobre el segmento $[c,\ d]$ queda definida una función

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,\ y)\, dx, \tag{9.13}$$

llamada *integral imporia de primera especie dependiente del parámetro y*. Suele decirse en este caso que la integral (9.13) converge sobre el segmento $[c,\ d]$.

En la teoría de integrales impropias dependientes de un parámetro desempeña un papel importante el concepto de *convergencia uniforme*. Enunciemos este concepto.

Definición. *Una integral impropia* (9.13) *se llama uniformemente convergente respecto del parámetro y sobre el segmento* $[c,\ d]$, *si converge en dicho segmento y si para todo $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal número $A \geqslant a$, dependiente sólo de ε, que se verifique la desigualdad*

$$\left| \int\limits_R^\infty f(x,\ y)\, dx \right| < \varepsilon, \tag{9.14}$$

cualesquiera que sean $R \geqslant A$ e y del segmento $[c,\ d]$.

Formulemos el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de las integrales impropias dependientes de un parámetro.

Teorema 9.6. *Para que la integral impropia* (9.13) *sea uniformemente convergente respecto del parámetro y sobre el segmento* $[c,\ d]$, *es necesario y suficiente que para todo* $\varepsilon > 0$ *pueda indicarse un número* $A \geqslant a$ *que dependa sólo de* ε *y sea de tal índole que se verifique la desigualdad*

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x,\ y)\, dx \right| < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean R' *y* R'', *superiores a* A, *e y del segmento* $[c,\ d]$.

La validez de este criterio se desprende directamente de la definición de convergencia uniforme.

Para las aplicaciones resulta conveniente dar a conocer una serie de criterios suficientes de convergencia uniforme de las integrales impropias dependientes de un parámetro.

Teorema 9.7 (criterio de Weierstrass). *Supongamos que una función* $f(x,\ y)$ *está definida en una semifranja* Π_∞, *y que para todo* y *del segmento* $[c,\ d]$ *ella es integrable respecto de* x *sobre cualquier segmento* $[a,\ R]$. *Además, supongamos que para todos los puntos de la franja* Π_∞ *se cumple una desigualdad*

$$|f(x,\ y)| \leqslant g(x). \tag{9.15}$$

Entonces, de la convergencia de la integral $\int\limits_a^\infty g(x)\, dx$ *se deduce la convergencia uniforme respecto de* y *sobre el segmento* $[c,\ d]$ *de la integral* (9.13).

DEMOSTRACIÓN. En virtud del criterio de Cauchy para la convergencia de una integral de la función $g(x)$ (véase el teorema 3.1), puede indicarse, para todo $\varepsilon > 0$, tal $A \geqslant a$ que se verifique la desigualdad

$$\int_{R'}^{R''} g(x)\, dx < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $R'' > R' \geqslant A$.

Aplicando la desigualdad (9.15), obtenemos

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x,\ y)\, dx \right| \leqslant \int_{R'}^{R''} g(x)\, dx < \varepsilon$$

para todo y del segmento $[c,\ d]$.

Esto es precisamente un testimonio de que el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de la integral (9.13) se cumple.

Corolario. *Supongamos que una función* $\varphi(x,\ y)$, *definida en la semifranja* Π_∞, *es acotada sobre la misma e integrable respecto de* x *en cualquier segmento* $[a,\ R]$ *para cada* $y \in [c,\ d]$. *Entonces, si con-*

verge una integral

$$\int_a^\infty |h(x)|\,dx,$$

será uniformemente convergente respecto de y sobre el segmento $[c, d]$ *la integral* $\int_a^\infty \varphi(x, y)\, h(x)\, dx$.

Para demostrar, resulta suficiente poner en el teorema 9.7: $f(x, y) = \varphi(x, y)\, h(x)$, $g(x) = M\,|h(x)|$, donde $M = \sup\limits_{\Pi_\infty} |\varphi(x, y)|$.

Notemos que el criterio de Weierstrass es criterio suficiente de convergencia uniforme de las integrales impropias, dependientes de un parámetro, que garantiza la convergencia absoluta. Por analogía con lo que se ha hecho al demostrar el teorema 3.4 podemos establecer el siguiente criterio suficiente de convergencia uniforme que es aplicable a las integrales convergentes condicionalmente. Es válida la siguiente *afirmación* (*criterio de Dirichlet—Abel*).

Sea una función $f(x, y)$ definida en la semifranja Π_∞ que es integrable, para cada $y \in [c, d]$, respecto de x sobre cualquier segmento $[a, R]$ y con cierta constante $M > 0$ satisface la condición

$$\left|\int_a^x f(t, y)\, dt\right| \leqslant M.$$

Supongamos, además, que una función $g(x)$, definida para $x \geqslant a$, tiende a cero cuando $x \to +\infty$ sin crecer monótonamente. Entonces, una integral impropia

$$\int_a^\infty f(x, y)\, g(x)\, dx$$

es uniformemente convergente respecto de y sobre el segmento $[c, d]$.

El criterio de convergencia uniforme que sigue abajo se refiere a las integrales de las funciones no negativas.

***Teorema 9.8* (*criterio de Dini*).** *Supongamos que una función $f(x, y)$ es continua y no negativa en la semifranja Π_∞ y que para cada $y \in [c, d]$ converge la integral impropia*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx. \tag{9.13}$$

Supongamos ahora que la función $I(y)$ es continua sobre el segmento $[c, d]$. Entonces, la integral (9.13) es uniformemente convergente respecto de y sobre dicho segmento.

DEMOSTRACIÓN. Veamos una sucesión de funciones

$$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\,dx,$$

cada una de las cuales es continua sobre el segmento $[c, d]$ en virtud del teorema 9.1. Por cuanto la función subintegral $f(x, y)$ es no negativa, entonces $I_n(y)$ converge sobre el segmento $[c, d]$ hacia la función continua $I(y)$ sin decrecer monótonamente. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 1.5 (criterio de Dini para las sucesiones funcionales la sucesión $I_n(y)$ converge uniformemente sobre $[c, d]$ hacia $I(y)$. Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que

$$I(y) - I_N(y) = \int_{a+N}^{\infty} f(x, y)\,dx < \varepsilon$$

simultáneamente para todos los y del segmento $[c, d]$. De lo que $f(x, y)$ es no negativa se deduce que para todo $R \geqslant N + a$ y todo $y \in [c, d]$

$$0 \leqslant \int_R^{\infty} f(x, y)\,dx < \varepsilon.$$

Esto es precisamente un indicio de que la integral (9.13) es uniformemente convergente. El teorema está demostrado.

2. Propiedades de continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad de las integrales impropias dependientes de un parámetro. Son válidos los siguientes dos teoremas.

Teorema 9.9 *Supongamos que una función $f(x, y)$ es continua en la semifranja Π_∞, y la integral* (9.13) *converge uniformemente sobre un segmento $[c, d]$. Entonces, la integral citada es función continua de y sobre el segmento $[c, d]$.*

DEMOSTRACIÓN. Estudiemos una sucesión de funciones

$$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\,dx,$$

cada una de las cuales es, en virtud del teorema 9.1, continua sobre el segmento $[c, d]$. Es evidente que de la convergencia uniforme de la integral (9.13) proviene la convergencia uniforme hacia $I(y)$ de la sucesión funcional $I_n(y)$. En tal caso la continuidad de la función $I(y)$ se deduce del teorema 1.7.

Teorema 9.10. *Supongamos que la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en la semifranja Π_∞. Admitamos, además, que para cierto y del segmento $[c, d]$ resulta convergente la integral*

$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx$, *mientras que la integral* $\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ *converge uniformemente respecto de* y *sobre el segmento* $[c, d]$. *Bajo estas condiciones la función* $I(y)$, *diferenciable sobre el segmento* $[c, d]$, *y su derivada* $I'(y)$ *pueden hallarse según la fórmula*

$$I'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx. \qquad (9.16)$$

De otras palabras, en las condiciones del teorema *la diferenciación respecto del parámetro puede realizarse bajo el signo de la integral impropia dependiente del parámetro.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos una sucesión de funciones

$$I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x, y)\,dx.$$

De acuerdo con el teorema 9.3, cada una de las funciones $I_n(y)$ es diferenciable sobre el segmento $[c, d]$ y se verifica una igualdad

$$I_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \qquad (9.17)$$

De las condiciones del teorema se deduce que la sucesión de integrales que figuran en el segundo miembro de (9.17) es uniformemente convergente sobre $[c, d]$. Por consiguiente, a la misma función límite converge uniformemente la sucesión de derivadas $I_n'(y)$. Aplicando el teorema 1.9, obtenemos la igualdad (9.16).

Demostremos un teorema sobre *la integración propia de una integral impropia dependiente de un parámetro.*

Teorema 9.11. *Cumplidas las condiciones del teorema 9.9, la integral (9.13) puede integrarse respecto del parámetro* y *sobre el segmento* $[c, d]$, *con la particularidad de que*

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x, y)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (9.18)$$

De otras palabras, en las condiciones del teorema *una integral impropia dependiente de un parámetro puede ser integrada respecto del parámetro bajo el signo de integral impropia.*

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto quedan cumplidas las condiciones del teorema 9.9, la función $I(y)$ es continua sobre el segmento $[c, d]$, y, por consiguiente, integrable en este segmento. Pasemos a la demostración de la relación (9.18).

Haciendo uso de la convergencia uniforme de la integral (9.13), podemos indicar, según un $\varepsilon > 0$ dado, tal $A \geqslant a$, que, cuando $R \geqslant A$, se cumple, para todos los y del segmento $[c, d]$, la siguiente desigualdad

$$\left|\int_R^\infty f(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}. \tag{9.19}$$

Considerando $R \geqslant A$, y empleando la posibilidad de cambiar el orden de integración para las integrales propias dependientes de un parámetro, volvamos a las siguientes igualdades evidentes:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^R f(x, y)\,dx + \int_R^\infty f(x, y)\,dx\right] dy =$$

$$= \int_a^R dx\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] + \int_c^d dy\left[\int_R^\infty f(x, y)\,dx\right].$$

De estas relaciones y de la desigualdad (9.19) se deduce la siguiente desigualdad que es válida para todo $R \geqslant A$:

$$\left|\int_c^d I(y)\,dy - \int_a^R dx\left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]\right| < \varepsilon,$$

la cual significa que la integral impropia $\int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy$ respecto de la variable x converge y es igual al número $\int_c^d I(y)\,dy$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Evidentemente, en la relación (9.18) en lugar del límite superior d de integración respecto de y podemos poner cualquier número del segmento $[c, d]$.

Corolario. *Si una función $f(x, y)$ es continua y no negativa en la semifranja Π_∞, y si la integral* (9.13) *es función continua sobre el segmento $[c, d]$, será válida la fórmula* (9.18).

En efecto, para las exigencias formuladas quedan cumplidas todas las condiciones del criterio de Dini de convergencia uniforme de la integral (9.13) (véase teorema 9.8). De este modo, la afirmación del corolario es legítima.

Demostremos un teorema sobre *la integración impropia de una integral impropia dependiente de un parámetro.*

Teorema 9.12. *Sea una función $f(x, y)$ no negativa y continua para $x \geqslant a$ e $y \geqslant c$. Supongamos ahora que las integrales*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad y \quad K(x) = \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

son continuas para $y \geqslant c$ y $x \geqslant a$, respectivamente. Entonces, de la convergencia de una de dos integrales impropias

$$\int_c^\infty I(y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad y \quad \int_a^\infty K(x)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

se deduce la convergencia de la otra y, también, la igualdad entre dichas integrales.

DEMOSTRACIÓN. Admitamos que la integral $\int_c^\infty I(y)\,dy$ es convergente. Hace falta demostrar que la integral $\int_a^\infty K(x)\,dx$ converge y es igual a $\int_c^\infty I(y)\,dy$. Dicho de otro modo, hemos de demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ puede encontrarse tal $A \geqslant a$, que, cuando $\overline{R} \geqslant A$, se cumple una desigualdad

$$\left| \int_c^\infty I(y)\,dy - \int_a^{\overline{R}} K(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{9.20}$$

De las condiciones del teorema se deduce que con cualquier $\overline{R} \geqslant a$ para la función $f(x, y)$ quedan cumplidas en la semifranja $\{a \leqslant x \leqslant \leqslant \overline{R}, c \leqslant y < \infty\}$ las condiciones del corolario en el teorema 9.11. Por eso, para todo $\overline{R} \geqslant a$ se verifican las relaciones

$$\int_a^{\overline{R}} K(x)\,dx = \int_a^{\overline{R}} dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^{\overline{R}} f(x, y)\,dx.$$

Aprovechando estas igualdades y la convergencia de la integral $\int_c^\infty I(y)\,dy$, transformemos la diferencia que figura bajo el signo de la magnitud absoluta en la desigualdad (9.20). Para cualquier $\overline{\overline{R}}$

superior a c escribamos una igualdad

$$\int_c^\infty I(y)\,dy - \int_a^{\bar R} K(x)\,dx = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,\ y)\,dx - \int_c^\infty dy \int_a^{\bar R} f(x,\ y)\,dx =$$

$$= \int_c^\infty dy \int_{\bar R}^\infty f(x,\ y)\,dx = \int_{\bar{\bar R}}^\infty dy \int_{\bar R}^\infty f(x,\ y)\,dx + \int_c^{\bar{\bar R}} dy \int_{\bar R}^\infty f(x,\ y)\,dx \qquad (9.21)$$

Procedamos a estimar las últimas integrales en la relación (9.21). Ya que la integral $\int_c^\infty I(y)\,dy$ converge por hipótesis, podemos indicar, según un $\varepsilon > 0$ dado, tal $\bar{\bar R} > c$ que se cumplen las desigualdades $0 \leqslant \int_{\bar{\bar R}}^\infty I(y)\,dy < \varepsilon/2$ [1]. Sustituyendo en estas desigualdades $I(y)$ por su expresión en términos de una integral, obtendremos las siguientes desigualdades: $0 \leqslant \int_{\bar{\bar R}}^\infty dy \int_a^\infty f(x,\ y)\,dx < \varepsilon/2$. De aquí concluimos, teniendo presente el hecho de que $f(x,\ y)$ es no negativa, que para $\bar{\bar R} > c$ elegido y cualquier $\bar R \geqslant a$ resulta válida una estimación

$$0 \leqslant \int_{\bar{\bar R}}^\infty dy \int_{\bar R}^\infty f(x,\ y)\,dx < \varepsilon/2. \qquad (9.22)$$

Fijemos ahora $\bar{\bar R}$ de un modo descrito más arriba y aprovechemos la arbitrariedad en la elección de $\bar R$. En la semifranja $\{a \leqslant x < \infty,\ c \leqslant y \leqslant \bar{\bar R}\}$ la función $f(x,\ y)$ satisface todas las condiciones del criterio de Dini de convergencia uniforme de las integrales impropias (véase el teorema 9.8). Por eso, se puede elegir, según $\varepsilon > 0$ dado, $A \geqslant a$ de tal modo que para cualquier $\bar R \geqslant A$ y para todo y del segmento $[c,\ \bar{\bar R}]$ se verifiquen las desigualdades $0 \leqslant \int_{\bar R}^\infty f(x,\ y)\,dx < \frac{\varepsilon}{2(\bar{\bar R} - c)}$ [1], a partir de las cuales se obtiene la siguiente estimación

$$0 \leqslant \int_c^{\bar{\bar R}} dy \int_{\bar R}^\infty f(x,\ y)\,dx < \varepsilon/2. \qquad (9.23)$$

---

[1] La izquierda de estas desigualdades proviene de lo que para $x \geqslant a$ e $y \geqslant c$ la función $f(x,\ y)$ es no negativa.

Volviendo a la expresión (9.21) y a las estimaciones (9.22) y (9.23) de las últimas integrales en esta expresión, vemos que para un $\varepsilon > 0$ arbitrario puede elegirse tal $A \geqslant a$, que para cualquier $\bar{R} \geqslant A$ se verifique la desigualdad (9.20). La demostración del teorema está finalizada.

3. Integrales impropias de segunda especie dependientes de un parámetro. Introduzcamos el concepto de integrales impropias de segunda especie dependientes de un parámetro. Sea $f(x, y)$ una función definida en el rectángulo semiabierto $\Pi = \{a \leqslant x < b,\ c \leqslant \leqslant y \leqslant d\}$. Admitamos que para cualquier y fijo del segmento $[c, d]$ la integral impropia de segunda especie $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ es convergente. En estas condiciones queda definida sobre el segmento $[c, d]$ una función

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx, \tag{9.24}$$

llamada *integral impropia de segunda especie dependiente del parámetro y.*

En la teoría de tales integrales desempeña un papel importante el concepto de *convergencia uniforme.* Enunciemos este concepto.

Definición. *La integral impropia* (9.24) *se denomina uniformemente convergente respecto del parámetro y sobre el segmento $[c, d]$, si es convergente para cada y del segmento $[c, d]$ y para todo $\varepsilon > 0$ puede indicarse tal $\delta > 0$, dependiente sólo de ε, que con cualquier α del intervalo $0 < \alpha < \delta$ y todo y del segmento $[c, d]$ se verifique una desigualdad*

$$\left| \int\limits_{b-\alpha}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Para las integrales impropias de segunda especie se enuncian y se demuestran sin dificultades algunos teoremas de continuidad, integrabilidad y diferenciabilidad respecto del parámetro.

Notemos que con ayuda de la transformación de la variable x, aducida en el p. 2 § 2 del capítulo 3, las integrales impropias de segunda especie dependientes del parámetro y se reducen a las integrales impropias de primera especie dependientes de un parámetro.

§ 3. Aplicación de la teoría de integrales dependientes de un parámetro al cálculo de las integrales impropias

Las operaciones con integrales impropias dependientes de un parámetro, argumentadas en el párrafo antecedente, permiten calcular diversas integrales impropias.

Veamos unos ejemplos de cálculo e investigaciones de las propiedades de tales integrales.

1°. Demostremos que una integral

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx, \tag{9.25}$$

cuya función subintegral en un punto $x=0$ es igual, por definición, a uno, converge uniformemente respecto de α sobre la semirrecta $0\leqslant\alpha<\infty$. Obtendremos, al principio, ciertas estimaciones. Notemos, en primer lugar, que

$$\int e^{-\alpha x}\operatorname{sen} x\,dx=-\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\operatorname{sen} x+\cos x)}{1+\alpha^2}+C=\Phi(\alpha,\ x)+C.$$

Es evidente que, cuando $\alpha\geqslant 0$ y $x\geqslant 0$, la función $\Phi(\alpha,\ x)$ (la cual es una primitiva para la función $e^{-\alpha x}\operatorname{sen} x$) está acotada:

$$|\Phi(\alpha,\ x)|\leqslant\frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\leqslant 2. \tag{9.26}$$

Estimemos la siguiente integral:

$$\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\quad (R>0).$$

Integrando por partes con cualquier $\alpha\geqslant 0$, encontramos

$$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right|=\left|\left[\frac{\Phi(\alpha,\ x)}{x}\right]_R^\infty+\int_R^\infty\frac{\Phi(\alpha,\ x)}{x^2}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\Phi(\alpha,\ R)|}{R}+\int_R^\infty\frac{|\Phi(\alpha,\ x)|}{x^2}\,dx.$$

De esta desigualdad y de la (9.26) obtenemos la siguiente estimación:

$$\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right|\leqslant\frac{2}{R}+2\int_R^\infty\frac{dx}{x^2}=\frac{4}{R}. \tag{9.27}$$

De esta estimación se deduce la convergencia uniforme de la integral (9.25) respecto de α en la semirrecta $0\leqslant\alpha<\infty$. En efecto, sea ε un número positivo arbitrario. Elijamos según este ε un número $A > 0$ de un modo tal que se cumpla la desigualdad

$$\frac{4}{A} < \varepsilon.$$

Está claro que, cuando $R \geqslant A$, para todos los $\alpha \geqslant 0$ se verifica, en virtud de la estimación (9.27), una correlación

$$\left| \int_R^\infty e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \right| < \varepsilon,$$

que significa la convergencia uniforme respecto de α de la integral (9.25) sobre la semirrecta $0 \leqslant \alpha < \infty$.

2°. Haciendo uso de las deducciones que acabamos de obtener para el cálculo de la integral[1])

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx. \qquad (9.28)$$

Notemos primeramente que la integral citada representa un valor límite, para $\alpha \to 0 + 0$, de la función $I(\alpha)$ definida mediante la relación (9.25). Efectivamente, la función subintegral en la integral (9.25) es continua cuando $\alpha \geqslant 0$ y $x \geqslant 0$ (para $x = 0$ esta función se considera igual a uno) y la integral (9.25) converge uniformemente respecto de α en la semirrecta $0 \leqslant \alpha < \infty$. Por eso, de acuerdo con el teorema 9.9, la integral (9.25) representa una función continua de α en la semirrecta $\alpha \geqslant 0$. De aquí proviene que

$$\lim_{\alpha \to 0+0} I(\alpha) = I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx. \qquad (9.29)$$

Obtengamos para la función $I(\alpha)$ una representación especial, mediante la cual se hallará el valor límite (9.29). La citada representación se obtiene de la expresión para la derivada $I'(\alpha)$. Por eso, hemos de convencernos al principio de la posibilidad de diferenciar la integral (9.25) respecto del parámetro α bajo el signo de integral. Con este fin comprobemos el cumplimiento de las condiciones del teorema 9.13 con arreglo a la integral (9.25). Son evidentes la continuidad de la función subintegral y la de su derivada parcial respecto del parámetro α cuando $\alpha \geqslant 0$ y $x \geqslant 0$. Volvamos, ahora, a aclarar la convergencia uniforme según α de la integral

$$-\int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{sen} x \, dx \qquad (9.30)$$

---

[1]) La convergencia de la integral en consideración fue establecida en el p. 2, § 1, cap. 3.

respecto de la derivada parcial de la función subintegral en (9.25). Fijemos cualquier $\Delta > 0$. Ya que para todo $\alpha \geqslant \Delta$ resulta válida una igualdad $|e^{-\alpha x} \operatorname{sen} x| \leqslant e^{-\Delta x}$, y por cuanto la integral $\int_0^\infty e^{-\Delta x}\,dx$ es convergente, entonces, de acuerdo con el criterio de Weierstrass (teorema 9.7), la integral (9.30) converge uniformemente respecto de α cuando $\alpha \geqslant \Delta$. Como Δ es un número positivo, podemos diferenciar la integral (9.25) bajo el signo de integral según el parámetro α, cualquiera que sea $\alpha > 0$. Así pues, para $\alpha > 0$

$$I'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Integrando los miembros izquierdo y derecho de las últimas relaciones, obtendremos para $\alpha > 0$

$$I(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\operatorname{arctg}\alpha + C. \qquad (9.31)$$

Hallemos la constante C. Por cuanto $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leqslant 1$ para $x \geqslant 0$, de la expresión (9.25) para $\alpha > 0$ obtendremos una desigualdad

$$|I(\alpha)| \leqslant \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

de la cual se deduce que

$$\lim_{\alpha\to\infty} |I(\alpha)| = 0,$$

y, por tanto,

$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = 0. \qquad (9.32)$$

Por cuanto $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \operatorname{arctg}\alpha = \pi/2$, de (9.31) y (9.32) encontramos $C = \pi/2$. Así pues, cuando $\alpha > 0$, la función $I(\alpha)$ puede ser representada en la siguiente forma:

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha.$$

De aquí y de la fórmula (9.29) obtenemos el valor de la integral (9.28):

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (9.33)$$

OBSERVACIÓN. Examinemos una integral

$$K(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx \tag{9.34}$$

Hallemos el valor de esta integral para diferentes valores de α.

Siendo $\alpha > 0$, realicemos en la integral (9.34) un cambio de variables, suponiendo $\alpha x = y$. Entonces

$$K(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}.$$

Siendo $\alpha < 0$, realicemos el cambio de variables, suponiendo $\alpha x = -y$ $(y > 0)$. Entonces,

$$K(\alpha)=-\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy=-\frac{\pi}{2}.$$

Cuando $\alpha = 0$, la integral (9.34), es, obviamente, igual a cero. Así pues

$$K(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx=\begin{cases}\pi/2 & \text{para } \alpha>0,\\ 0 & \text{para } \alpha=0,\\ -\pi/2 & \text{para } \alpha<0.\end{cases}$$

La integral examinada se llama, corrientemente, *factor discontinuo de Dirichlet*.

Con ayuda del factor discontinuo de Dirichlet obtenemos la siguiente representación analítica de la función conocida $\operatorname{sgn}\alpha$, denominada, de ordinario, por el término «signo α»[1]):

$$\operatorname{sgn}\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{x}\,dx.$$

§ 4. Integrales de Euler

En este párrafo daremos a conocer algunas propiedades de las importantes funciones no elementales que se llaman integrales de Euler[2]).

[1]) Esta denominación está ligada con lo que los valores de $\operatorname{sgn}\alpha$ para $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ y $\alpha < 0$ son iguales a 1, 0, -1, respectivamente.

[2]) La información detallada sobre las integrales de Euler el lector puede encontrar en el libro «Curso del análisis moderno» que se debe a E. G. Whittaker y G. N. Watson.

Se denomina integral de Euler de primera especie o «beta-función» a una integral

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{9.35}$$

En esta integral p y q se consideran parámetros. Si estos parámetros satisfacen las condiciones $p < 1$ y $q < 1$, entonces la integral (9.35) será impropia, dependiente de los parámetros p y q, con la particularidad de que como puntos singulares de esta integral intervienen $x = 0$ y $x = 1$.

Se acostumbra llamar integral de segunda especie o «gamma-función» a una integral impropia

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{9.36}$$

Notemos que en la integral (9.36) se tienen dos tipos de singularidades: 1) integración en la semirrecta $0 \leqslant x < \infty$, 2) cuando $p < 1$, el punto $x = 0$ es punto singular de la función subintegral (la función subintegral se reduce al infinito).

En nuestros razonamientos hemos de tomar en consideración las singularidades aducidas de las funciones $B(p, q)$ y $\Gamma(p)$. Más abajo nos convenceremos de que los integrales (9.35) y (9.36) son convergentes para los valores de $p > 0$ y $q > 0$.

1. Dominio de convergencia de las integrales de Euler. Demostremos que la función $B(p, q)$ está definida para todos los valores positivos de los parámetros p y q, y la función $\Gamma(p)$, para todos los valores positivos de p.

Preocupémonos, primero, de la función $B(p, q)$. Cuando $p \geqslant 1$ y $q \geqslant 1$, la función subintegral en la relación (9.35) es continua, por lo cual la integral en el segundo miembro de (9.35) es propia. Por eso, la función $B(p, q)$ está definida para todos los valores mencionados de p y q. Volvamos ahora al caso en que se cumplen una o ambas de las siguientes desigualdades:

$$0 < p < 1, \quad 0 < q < 1. \tag{9.37}$$

En este caso uno o ambos de los puntos $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares de la función subintegral. Teniéndolo en cuenta, representemos $B(p, q)$ en la siguiente forma:

$$B(p, q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx =$$
$$= I_1(p, q) + I_2(p, q).$$

Es obvio que cada una de las integrales $I_1(p, q)$ e $I_2(p, q)$ tiene un solo punto singular.

Para la integral $I_1(p, q) = \int\limits_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ el punto singular será $x = 0$. Observando que sobre el segmento $[0, 1/2]$ la función $(1-x)^{q-1}$ es continua y, por eso, está acotada por cierta constante C, es fácil convencerse de que la función Cx^{p-1} será mayorante para la función subintegral de la integral $I_1(p, q)$. De aquí se deduce que la integral $I_1(p, q)$ converge para $0 < p < 1$, y para cualquier q. Razonando análogamente, es fácil convencerse de que la integral $I_2(p, q)$ converge para $0 < q < 1$, y para cualquier p.

Así pues, nos hemos convencido de que en un caso cuando se cumplen las desigualdades $p > 0$ y $q > 0$, la integral (9.35) converge, es decir, *la función* $\mathrm{B}(p, q)$ *está definida para todos los valores positivos de* p *y* q.

Pasemos ahora a la función $\Gamma(p)$. Ya hemos notado que la integral (9.36) tiene dos tipos de singularidades: la integración en una semirrecta y el punto singular $x = 0$. Para separar estas singularidades, dividamos el dominio de integración en dos partes de un modo tal que en cada parte haya una sola de las singularidades mencionadas. Por ejemplo, se puede representar $\Gamma(p)$ del modo siguiente:

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx + \int\limits_1^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx = I_1(p) + I_2(p).$$

Por cuanto $|e^{-x}x^{p-1}| \leqslant x^{p-1}$ para $x > 0$, entonces, de acuerdo con el criterio parcial de comparación, la integral $I_1(p)$ converge para $p > 0$. La integral $I_2(p)$ es también convergente cuando $p > 0$. Para convencerse de ello, se puede aprovechar el criterio parcial de comparación en la forma límite: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}x^r = 0$ para todo r. Así pues, hemos demostrado que como dominio de definición de la función $\Gamma(p)$ interviene la semirrecta $p > 0$.

2. Continuidad de las integrales de Euler. Demostremos que la función $\mathrm{B}(p, q)$ es continua en un cuadrante $p > 0$, $q > 0$, mientras que la función $\Gamma(p)$ es continua en la semirrecta $p > 0$. Analicemos al principio la función $\mathrm{B}(p, q)$. Para demostrar la continuidad de $\mathrm{B}(p, q)$ en el cuadrante $p > 0$, $q > 0$, basta, evidentemente, convencerse de que la integral (9.35) converge uniformemente con relación a los parámetros p y q para $p \geqslant p_0 > 0$ y $q \geqslant q_0 > 0$, cualesquiera que sean los valores positivos fijos de p_0 y q_0. Por cuanto $p_0 - 1 \leqslant p - 1$, $q_0 - 1 \leqslant q - 1$, entonces, cuando $0 < x < 1$, se cumplen las desigualdades

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} < x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}.$$

De aquí y de la convergencia de la integral $\int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx$ se deduce, en virtud del criterio de Weierstrass, la convergencia uniforme de la integral (9.35) para los valores indicados de p y q. De este modo, la continuidad de $B(p, q)$ para $p > 0$ y $q > 0$ queda demostrada.

Para demostrar la continuidad de $\Gamma(p)$ en una semirrecta $p > 0$, es suficiente, evidentemente, establecer la convergencia uniforme de la integral (9.36) según el parámetro p cuando $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ para cualesquiera valores fijos de p_0 y p_1, que satisfagan una condición $0 < p_0 < p_1$. Por cuanto para los valores mencionados de p, p_0 y p_1 y para $x > 0$ se cumple la desigualdad

$$e^{-x}\,x^{p-1} \leqslant e^{-x}\,[x^{p_0-1} + x^{p_1-1}],$$

de la convergencia de la integral

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,[x^{p_0-1} + x^{p_1-1}]\,dx$$

proviene, en virtud del criterio de Weierstrass, la convergencia uniforme de la integral (9.36) para los valores mencionados de p. De este modo, la continuidad de $\Gamma(p)$ para $p > 0$ está demostrada.

3. Algunas propiedades de la función $\Gamma(p)$. En este punto se demostrará la existencia de la derivada de cualquier orden de la función $\Gamma(p)$. Además, para dicha función se obtendrá una fórmula llamada *fórmula de reducción*.

Diferenciando $\Gamma(p)$ respecto del parametro bajo el signo de integral, obtendremos la siguiente integral:

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx, \tag{9.38}$$

la cual converge uniformemente según el parámetro p en todo segmento $0 < p_0 \leqslant p \leqslant p_1$. En efecto, el valor absoluto de la función subintegral en la integral (9.38) satisface en la semirrecta $0 < x < \infty$ una desigualdad

$$|\,x^{p-1}e^{-x}\ln x\,| < e^{-x}\,|\ln x\,|\,(x^{p_0-1} + x^{p_1-1}).$$

De aquí, la convergencia de la integral

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,|\ln x|\,(x^{p_0-1} + x^{p_1-1})\,dx$$

predetermina, de acuerdo con el criterio de Weierstrass, la convergencia uniforme de la integral (9.38). Esta circunstancia, como también la continuidad de la función subintegral en (9.38)[1]) para $0 < x < \infty$, $0 < p < \infty$ permiten llegar a la deducción de que resulta posible la diferenciación de $\Gamma(p)$ respecto del parámetro bajo el signo de integral. Así pues, *la derivada* $\Gamma'(p)$ *existe y es igual a la expresión* (9.38).

Razonando análogamente, es fácil convencerse de que la función $\Gamma(p)$ tiene derivada de cualquier orden y esto derivada puede hallarse por diferenciación respecto del parámetro p bajo el signo de integral en la expresión (9.36) para $\Gamma(p)$.

Deduzcamos *la fórmula de reducción* para la función $\Gamma(p)$. Al aplicar la fórmula de integración por partes para la función $\Gamma(p+1)$, cuando $p > 0$, obtendremos

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = [-x^p e^{-x}]_0^\infty + p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p).$$

Así pues, para cualquier $p > 0$ se verifica la fórmula

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{9.39}$$

Aplicando sucesivamente la fórmula (9.39) para cualquier $p > n-1$ y para todo n natural, obtendremos

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\ldots(p-n+1)\Gamma(p-n+1). \tag{9.40}$$

La relación (9.40) recibe el nombre de *fórmula de reducción* para la función $\Gamma(p)$. Con ayuda de esta fórmula la gamma-función para los valores del argumento superiores a la unidad «se reduce» a una gamma-función para los valores de argumento encerrados entre cero y la unidad.

Por cuanto $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, obtendremos, poniendo en (9.40) $p = n$:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

Esta fórmula se empleará más abajo para deducir la así llamada fórmula de Stirling[2]) que proporciona una representación asintótica para $n!$.

La información obtenida sobre la función $\Gamma(p)$ permite dar una característica cualitativa de la gráfica de esta función. Daremos a conocer la investigación geométrica de la gráfica de $\Gamma(p)$ siguiendo, en lo principal, el esquema expuesto en el § 6, cap. 9, v. I.

Hemos establecido que como dominio de definición de $\Gamma(p)$

[1]) Esta función es una derivada parcial respecto del parámetro p de la función subintegral en la expresión (9.36) para $\Gamma(p)$.

[2]) J. Stirling (1692—1770), matemático escocés.

sirve una semirrecta $0 < p < \infty$. En esta semirrecta la función $\Gamma(p)$ es continua y diferenciable cualquier número de veces, con la particularidad de que toda derivada puede hallarse por diferenciación de la expresión (9.36) para $\Gamma(p)$ respecto del parámetro p bajo el signo de integral. En particular, la segunda derivada $\Gamma''(p)$ es igual a

$$\Gamma''(p) = \int_0^\infty x^{p-1} (\ln x)^2 e^{-x}\, dx.$$

Ya que $\Gamma''(p) > 0$, la primera derivada $\Gamma'(p)$ puede tener un solo cero. Por cuanto $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ [1]), entonces, de acuerdo con el teorema de Rolle, este cero de la derivada $\Gamma'(p)$ existe y se dispone en el intervalo $(1, 2)$. Por cuanto $\Gamma''(p) > 0$, en un punto, donde $\Gamma'(p)$ se reduce a cero, la función $\Gamma(p)$ tiene su mínimo. Notemos, además, que la gráfica de $\Gamma(p)$ es convexa hacia las y negativas. La gráfica de la función $\Gamma(p)$ tiene asíntota vertical en el punto $p = 0$. Efectivamente, ya que $\Gamma(1) = 1$ y $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$, de la continuidad de $\Gamma(p)$ en el punto 1 se deduce que $\Gamma(p) \to +\infty$, cuando $p \to \to 0 + 0$. Evidentemente, $\Gamma(p) \to +\infty$, cuando $p \to +\infty$. Diremos sin demostración que la gráfica de la función $\Gamma(p)$ no tiene asíntotas oblícuas.

4. Algunas propiedades de la función $B(q, p)$. En este punto se indicarán la propiedad de simetría de la función $B(p, q)$ y la fórmula de reducción para esta función.

Realicemos en la integral (9.35) un cambio de la variable, haciendo $x = 1 - t$. Al realizar los cálculos necesarios, nos convencemos de la validez de una ecuación

$$B(p, q) = B(q, p), \tag{9.41}$$

la cual ofrece *la propiedad de simetría de la función* $B(p, q)$.

Establezcamos para la función $B(p, q)$ las fórmulas de reducción. Con este fin volvamos a la función $B(p, q + 1)$, considerando positivos p y q. Aplicando la integración por partes y la fórmula $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1 - x)$, obtendremos

$$B(p, q+1) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^q\, dx = \left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]_0^1 +$$

$$+ \frac{q}{p}\int_0^1 x^p (1-x)^{q-1}\, dx = \frac{q}{p}\int_0^1 \{x^{p-1}(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^q\}\, dx =$$

$$= \frac{q}{p} B(p, q) - \frac{q}{p} B(p, q+1).$$

[1]) Esto se deduce de la relación (9.39).

De estas relaciones obtenemos la siguiente fórmula

$$B(p,\ q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,\ q). \tag{9.42}$$

De un modo sumamente análogo obtenemos, para $p>0$ y $q>0$ una relación.

$$B(p+1,\ q)=\frac{p}{p+q}B(p,\ q). \tag{9.43}$$

Las fórmulas (9.42) y (9.43) se denominan fórmulas de reducción para la función $B(p,\ q)$ La aplicación sucesiva de estas fórmulas reduce el cálculo de $B(p,\ q)$ para valores positivos arbitrarios de los argumentos al cálculo de esta función para valores de los argumentos del cuadrado semiabierto $0<p\leqslant 1$, $0<q\leqslant 1$.

5. Relación entre las integrales de Euler. Realicemos en la integral (9.35) un cambio de variable, suponiendo que $x=\frac{1}{1+t}$. De resultas, obtendremos para $B(p,\ q)$ la siguiente expresión

$$B(p,\ q)=\int_0^\infty \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt. \tag{9.44}$$

Aprovechando la fórmula (9.41), obtendremos, a la par con (9.44), la siguiente expresión para $B(p,\ q)$:

$$B(p,\ q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt. \tag{9.45}$$

Volvamos ahora a la expresión (9.36) para $\Gamma(p)$. Con ayuda de la sustitución $x=ty$, $t>0$, transformemos esta expresión a la forma

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p}=\int_0^\infty e^{-ty}y^{p-1}\,dy. \tag{9.46}$$

Al sustituir en esta fórmula p por $p+q$ y t por $1+t$, obtendremos

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^\infty e^{-(1+t)y}y^{p+q-1}\,dy.$$

Multipliquemos ambos miembros de la última igualdad por t^{p-1} e integremos respecto de t desde 0 hasta ∞. Evidentemente, de acuerdo con la relación (9.45), obtendremos la fórmula

$$\Gamma(p+q)B(p,\ q)=\int_0^\infty dt\int_0^\infty y^{p+q-1}t^{p-1}e^{-(1+t)y}\,dy. \tag{9.47}$$

Si en el segundo miembro de la relación (9.47) se pueden cambiar de lugar los órdenes de integración respecto de t e y, entonces, teniendo presente (9.46), obtendremos

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,\ q)=\int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y}\,dy\int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-ty}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-y}\frac{\Gamma(p)}{y^p}\,dy=\Gamma(p)\int\limits_0^\infty y^{q-1}e^{-y}\,dy=\Gamma(p)\,\Gamma(q),$$

es decir, quedará demostrada la valídez de la fórmula

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9.48}$$

Cerciorémonos ahora de la posibilidad de cambiar el orden de integración en el segundo miembro de (9.47). Con este fin se debe comprobar el cumplimiento de las condiciones del teorema. Supongamos, al principio, que $p>1$ y $q>1$. Entonces, evidentemente, se cumplen las condiciones del teorema 9.12. En efecto:

1) la función $f(t,\ y)=t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}$ es no negativa y continua en el cuadrante $t\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

2) La integral $\int\limits_0^\infty f(t,\ y)\,dy=t^{p-1}\int\limits_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}\,dy=\frac{\Gamma(p+q)\,t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$ es una función continua de t para $t\geqslant 0$.

3) La integral $\int\limits_0^\infty f(t,\ y)\,dt=y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-ty}\,dy=\Gamma(p)\,y^{q-1}e^{-y}$ es una función continua de y para $y\geqslant 0$.

4) La convergencia de la intègral $\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty f(t,\ y)\,dt$ fue establecida por cálculo directo.

Así pues, cuando $p>1$ y $q>1$, es válida la fórmula (9.48). En cambio, si se cumplen sólo las condiciones $p>0$ y $q>0$, resulta válida, según lo demostrado más arriba, la fórmula

$$\mathrm{B}(p+1,\ q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

A partir de esta fórmula obtendremos de nuevo, con ayuda de las fórmulas de reducción para las funciones $\mathrm{B}(p,\ q)$ y $\Gamma(p)$ la fórmula (9.48).

6. Cálculo de las integrales definidas con ayuda de las integrales de Euler. Las integrales eulerianas representan funciones no elementales bien estudiadas. Un problema se considera resuelto, si se reduce al cálculo de las integrales eulerianas.

Demos a conocer ejemplos de cálculo de las integrales corrientes e impropias, reduciéndolas a las integrales de Euler.

1 Calculemos una integral

$$I=\int_0^{\infty} x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx.$$

Volviendo a las fórmulas (9.44) y (9.48), obtendremos, evidentemente:

$$I=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma(5/4)\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

2. Calculemos una integral

$$I=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{p-1}\varphi\cos^{q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Poniendo $x=\operatorname{sen}^2\varphi$, obtendremos

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1-x)^{\frac{q}{2}-1}\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

3 Volvamos a la integral

$$I_{p-1}=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{p-1}\varphi\,d\varphi.$$

Haciendo uso del resultado obtenido en el ejemplo 2 (hay que poner $q=1$), hallaremos

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{p-1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.\tag{9.49}$$

Tenemos ahora

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^{\infty}e^{-(\sqrt{x})^2}\,d\sqrt{x}.$$

Suponiendo $\sqrt{x}=t$, y observando que $\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt$ es igual a $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt$, obtenemos, de acuerdo con el ejemplo analizado en el p.2, § 4 del capítulo 3 (integral de Poisson),

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Por eso, la fórmula (9.49) toma la forma

$$I_{p-1}=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{p-1}\varphi\,d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \qquad (9.50)$$

§ 5. Fórmula de Stirling

Recibe el nombre de Stirling la siguiente fórmula asintótica:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}(1+\alpha_n), \qquad (9.51)$$

donde $\alpha_n\to 0$ cuando $n\to\infty$.

Demostremos en este párrafo una fórmula más general que describe, con una exactitud tan alta como se quiera, el comportamiento de la gamma-función euleriana para valores grandes del argumento

$$\Gamma(\lambda+1)=\int_0^{\infty}t^{\lambda}e^{-t}\,dt. \qquad (9.52)$$

Con este fin hagamos uso del así llamado *método de Laplace* que se apoya en la siguiente afirmación.

Lema. *Sea $f(t)$ una función integrable para cierto $a>0$ sobre un segmento $[-a, a]$ que puede ser representada en la forma*

$$f(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}c_kt^k+O(t^{2n}). \qquad (9.53)$$

En este caso tiene lugar la siguiente fórmula asintótica

$$\int_{-a}^{a}e^{-\lambda t^2}f(t)\,dt=\sum_{m=0}^{n-1}c_{2m}\,\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}+\frac{O(1)}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}. \qquad (9.54)$$

DEMOSTRACIÓN. Sustituyamos la relación (9.53) en la integral que figura en el primer miembro de la fórmula (9.54) y tomemos en consideración que las integrales correspondientes a las potencias impares de t se anulan. Para estimar las integrales restantes, basta cerciorarse de que para $m\geqslant 0$ es válida la siguiente igualdad:

$$\int_0^{a}t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}+O(e^{-\lambda a^2}). \qquad (9.55)$$

Representemos la integral en el primer miembro de (9.55) en la siguiente forma:

$$\int_0^a t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt=\int_0^\infty t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt-\int_a^\infty t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt. \qquad (9.56)$$

En (9.56) transformemos la primera integral del miembro izquierdo, realizando una sustitución $x=\lambda t^2$, y obtendremos

$$\int_0^\infty t^{2m}e^{-\lambda t^2}\,dt=\frac{1}{2\lambda^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}. \qquad (9.57)$$

Notemos, ahora, que, cuando $\lambda>1$ y $t\geqslant a$, es válida la siguiente desigualdad:

$$e^{-\lambda t^2}\leqslant e^{-(\lambda-1)a^2}e^{-t^2}.$$

Aplicando esta desigualdad, estimemos la segunda integral en el miembro derecho de (9.56)

$$\int_a^\infty e^{-\lambda t^2}t^{2m}\,dt\leqslant e^{-(\lambda-1)a^2}\int_a^\infty t^{2m}e^{-t^2}\,dt=ce^{-\lambda a^2}. \qquad (9.58)$$

De las desigualdades (9.56), (9.57) y de la estimación (9.58) se deduce la fórmula requerida (9.55). El lema está demostrado.

Con el fin de aplicar este lema, realicemos en la integral (9.52) una sustitución $t=\lambda(1+x)$. Como resultado, la citada integral tomará la forma

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int_{-1}^\infty e^{-\lambda[x-\ln(1+x)]}\,dx. \qquad (9.59)$$

Denotemos con $g(x)$ la siguiente función definida sobre una semirrecta $x>-1$:

$$g(x)=\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{x-\ln(1+x)}. \qquad (9.60)$$

Entonces, la igualdad (9.59) puede escribirse así

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int_{-1}^\infty e^{-\lambda g^2(x)}\,dx. \qquad (9.61)$$

Nuestro objetivo consiste en estudiar el comportamiento asintótico, cuando $\lambda\to+\infty$, de la siguiente integral:

$$I(\lambda)=\int_{-1}^\infty e^{-\lambda g^2(x)}\,dx. \qquad (9.62)$$

Con este fin analicemos más detalladamente la función $g(x)$ definida por la igualdad (9.60). Por cuanto

$$\frac{d}{dx} g^2(x) = \frac{d}{dx}(x - \ln(1+x)) = \frac{x}{1+x}, \qquad (9.63)$$

la función $g^2(x)$ será estrictamente decreciente para $-1 < x < 0$, y estrictamente creciente, cuando $x > 0$. De aquí se deduce que la función $g(x)$ es estrictamente creciente en la semirrecta $x > -1$, con la particularidad de que como dominio de sus valores interviene toda la recta numérica. Ahora, ya que la función $g^2(x)$ tiene en un entorno del punto $x = 0$ un desarrollo

$$g^2(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right) = \frac{x^2}{2} + O(x^3),$$

existe tal función $h(x)$, estrictamente positiva para $x > -1$, que se verifique la igualdad

$$g^2(x) = x^2 h(x).$$

La función $h(x)$ es infinitamente diferenciable para $x > -1$, por lo cual también será infinitamente diferenciable la función $g(x) = x\sqrt{h(x)}$.

Tomando en consideración lo dicho más arriba, podemos afirmar que para la función $y = g(x)$, definida por la igualdad (9.60), existe una función inversa $x = g^{-1}(y)$ que es estrictamente creciente e infinitamente diferenciable en toda la recta numérica y satisface la condición $g^{-1}(0) = 0$.

Denotemos esta función inversa con el símbolo $x = \varphi(y)$. Aprovechando sus propiedades citadas anteriormente, hallemos la asintótica de la integral (9.62). Resulta válido el siguiente teorema.

Teorema 9.13. *Supongamos que una función $x = \varphi(y)$ es inversa de la función $y = g(x)$ definida por la igualdad* (9.60). *Entonces, para la integral* (9.62) *es válida la siguiente fórmula asintótica*

$$I(\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(2m+1)}(0)}{(2m)!} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}} + \frac{O(1)}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}. \qquad (9.64)$$

cualquiera que sea el número n fijo.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un número positivo arbitrario a y pongamos $b = \varphi(-a)$, $c = \varphi(a)$. Esto significa que $a = g(c) = -g(b)$, y, por consiguiente, $-1 < b < 0$, y $c > 0$.

Estimemos las siguientes dos integrales:

$$I_1(\lambda) = \int_{-1}^{b} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx, \quad I_2(\lambda) = \int_{c}^{\infty} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx. \qquad (9.65)$$

Para estimar la primera integral, notemos que, cuando $-1 < x < b$, se cumple la desigualdad $g(x) < -a$, es decir, $g^2(x) > a^2$, y, por lo tanto,

$$e^{-\lambda g^2(x)} < e^{-\lambda a^2}.$$

En tal caso

$$I_1(\lambda) \leqslant e^{-\lambda a^2} \int_{-1}^{b} dx = (1 - |b|)\, e^{-\lambda a^2}. \tag{9.66}$$

Análogamente se estima la integral $I_2(\lambda)$. Cuando $x > c$, se cumple la desigualdad $g(x) > a$, es decir, $g^2(x) > a^2$. Por consiguiente, para $\lambda > 1$ y $x > c$, tiene lugar la estimación

$$e^{-\lambda g^2(x)} = e^{-(\lambda-1)g^2(x)} e^{-g^2(x)} < e^{-(\lambda-1)a^2} e^{-g^2(x)}.$$

De aquí obtenemos

$$I_2(\lambda) \leqslant e^{-(\lambda-1)a^2} \int_{c}^{\infty} e^{-g^2(x)}\, dx = c_1 e^{-\lambda a^2}. \tag{9.67}$$

De las estimaciones (9.66) y (9.67), que se satisfacen por las integrales (9.65), obtenemos para la integral (9.62) la siguiente relación:

$$I(\lambda) = \int_{b}^{c} e^{-\lambda g^2(x)}\, dx + O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.68}$$

Realicemos en la integral (9.68) el cambio de la variable $t = g(x)$, es decir, $x = \varphi(t)$. De resultas obtenemos

$$I(\lambda) = \int_{-a}^{a} e^{-\lambda t^2} \varphi'(t)\, dt + O(e^{-\lambda a^2}). \tag{9.69}$$

Por cuanto la función $\varphi'(t)$ es infinitamente diferenciable, representémosla, aprovechando la fórmula de Maclaurin, en la forma

$$\varphi'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + O(t^{2n}).$$

Para obtener la fórmula (9.64), queda por aplicar el tema a la función $f(t) = \varphi'(t)$. El teorema 9.13 está demostrado.

Como conclusión de este párrafo, señalemos el siguiente método simple de calcular las derivadas $\varphi^k(0)$. De las igualdades (9.63) obtenemos

$$2g \cdot g' = \frac{x}{x+1} = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+1}.$$

De esta igualdad se deduce una relación

$$\varphi'(t) = \frac{1}{g'} = 2g\,\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)} = 2t\,\frac{1+\varphi(t)}{\varphi(t)}.$$

De este modo, obtenemos la siguiente igualdad

$$\varphi(t)\,\varphi'(t) = 2t + 2t\varphi(t). \tag{9.70}$$

Diferenciando sucesivamente esta igualdad y suponiendo $t = 0$, determinemos todas las derivadas $\varphi^{k}(0)$. Hallemos, por ejemplo, los valores de las primeras tres derivadas de la función $\varphi(t)$ en el cero.

Al diferenciar (9.70), obtenemos

$$[\varphi'(t)]^2 + \varphi(t)\,\varphi''(t) = 2 + 2\,(t\varphi'(t) + \varphi(t)). \tag{9.71}$$

Pongamos $t = 0$ y tengamos en cuenta que $\varphi(0) = 0$. Entonces, $\varphi'^2(0) = 2$, es decir, $\varphi'(0) = \sqrt{2}$.

Al diferenciar la igualdad (9.71), obtendremos

$$3\varphi'\cdot\varphi'' + \varphi\cdot\varphi''' = 2\,(t\varphi'' + 2\varphi').$$

Igualando a cero t, obtenemos $3\sqrt{2}\varphi''(0) = 4\sqrt{2}$, es decir, $\varphi''(0) = 4/3$. Análogamente, de la igualdad

$$3\varphi''^2 + 4\varphi'\cdot\varphi''' + \varphi\cdot\varphi^{\mathrm{IV}} = 2\,(t\varphi''' + 3\varphi''),$$

obtenemos $\varphi'''(0) = \sqrt{2}/3$.

Por consiguiente, la fórmula (9.64) puede escribirse en la forma

$$f(\lambda) = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{\Gamma(3/2)}{\lambda\sqrt{\lambda}} + \frac{O(1)}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}. \tag{9.72}$$

Sustituyamos la igualdad (9.72) en (9.61) y tomemos en consideración que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3/2) = 1/2\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. Obtenemos, como resultado:

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\,\lambda^{\lambda}e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{O(1)}{\lambda^2}\right). \tag{9.73}$$

Escribamos los primeros cinco términos del desarrollo asintótico de la gamma-función de Euler:

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\,\lambda^{\lambda}e^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{12\lambda} + \frac{1}{288\lambda^2} - \frac{139}{51\,840\lambda^3} - \frac{571}{2\,488\,320\lambda^4} + \frac{O(1)}{\lambda^5}\right).$$

Señalemos sin demostración que el resto de la serie asintótica no sobrepasa el último sumando retenido.

§ 6. Integrales múltiples dependientes de un parámetro

1. Integrales múltiples propias dependientes de un parámetro. Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un punto arbitrario del dominio D del espacio euclídeo m-dimensional E^m, y sea $y = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ un punto del dominio Ω del espacio E^l. Denotemos con el símbolo $D \times \Omega$ un subconjunto $(l + m)$-dimensional de un espacio euclídeo compuesto por todos los puntos $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{m+l})$ de tal índole que el punto $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ pertenece a D, y el $(z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m+l})$ pertenece a Ω. En este caso se empleará frecuentemente la designación $z = (x, y) \in D \times \Omega$. La clausura del dominio D se denotará con el símbolo $\overline{D}$. Es fácil ver que la clausura $D \times \Omega$ coincide con la $\overline{D} \times \overline{\Omega}$.

Sea $f(x, y)$ una función definida en $D \times \Omega$, con la particularidad de que para todo $y_0 \in \Omega$ la función $f(x, y_0)$ es integrable respecto de x en el dominio D. Entonces, la función

$$I(y) = \int\limits_D f(x, y)\, dx, \tag{9.74}$$

definida en el dominio Ω se llamará integral dependiente del parámetro y. Notemos que el parámetro y es un vector l-dimensional y, por consiguiente, la integral (9.74) depende de l parámetros numéricos $y_1, y_2, \ldots, y_l$.

Por suma analogía con los teoremas 9.9—9.12 se demuestran los siguientes teoremas.

***Teorema 9.14* (sobre continuidad de la integral (9.74) respecto de un parámetro).** *Si una función $f(x, y)$ es continua con relación a la totalidad de argumentos en el dominio cerrado $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, la función (9.74) representa una función continua del parámetro y en el dominio $\overline{\Omega}$.*

***Teorema 9.15* (sobre integrabilidad de la integral (9.74) respecto del parámetro).** *Si una función $f(x, y)$ es continua con relación a la totalidad de argumentos en el dominio $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, la función (9.74) puede integrarse respecto del parámetro bajo el signo de integral, es decir,*

$$\int\limits_\Omega I(y)\, dy = \int\limits_D dx \int\limits_\Omega f(x, y)\, dy.$$

***Teorema 9.16* (sobre diferenciabilidad de la integral (9.74) respecto de un parámetro).** *Si una función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ son continuas en $\overline{D} \times \overline{\Omega}$, la integral (9.74) tiene en el dominio*

Ω *una derivada parcial continua* $\frac{\partial I}{\partial y_k}$, *y, además, se verifica una desigualdad*

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = \int_D \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_k} dx.$$

2. Integrales múltiples impropias dependientes de los parámetros. El concepto de integral múltiple impropia dependiente de los parámetros se podría introducir de una manera igual a la que se ha empleado en el punto antecedente para el caso en que la función $f(x, y)$ se definía en $D \times \Omega$, donde $D \subset E^m$ y $\Omega \subset E^l$. Sin embargo, el mayor interés representa un caso en que $D = \Omega$, el cual se estudiará aquí. Además, supondremos que $f(x, y) = F(x, y)\, g(x)$, donde $F(x, y)$ es continua en $\overline{D} \times \overline{D}$, cuando $x \neq y$, y la función $g(x)$ es acotada en D. De este modo, analizamos las integrales de la forma

$$V(y) = \int_D F(x, y)\, g(x)\, dx, \tag{9.75}$$

donde la función subintegral puede tener singularidades sólo cuando $x = y$. Es de interés para nosotros la cuestión de continuidad de las integrales de la forma (9.75) respecto del parámetro y. Con este motivo introduzcamos la siguiente definición de *convergencia uniforme de la integral* (9.75) *en un punto*. Denotemos con el símbolo $K(y_0, \delta)$ una bola de radio δ con centro en el punto y_0.

Definición. *La integral* (9.75) *se llama convergente uniformemente respecto del parámetro* y *en el punto* $y_0 \in D$, *si para todo* $\varepsilon > 0$ *puede indicarse tal* $\delta > 0$ *que* $K(y_0, \delta) \subset D$ *y para todo dominio cubicable* $\omega \subset K(y_0, \delta)$ *y todos los puntos* $y \in K(y_0, \delta)$ *se verifica la desigualdad*

$$\left| \int_\omega F(x, y)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Teorema 9.17. *Si la integral* (9.75) *es uniformemente convergente respecto de* y *en el punto* $y_0 \in D$, *será continua en este punto* y_0.

DEMOSTRACION. Se necesita demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, cuando $|y - y_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|V(y) - V(y_0)| < \varepsilon$. De la definición de convergencia uniforme en un punto proviene la existencia de ta $\delta_1 > 0$ que $K(y_0, \delta_1) \subset D$ y, para $y \in K(y_0, \delta_1)$,

$$\left| \int_K F(x, y)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon/3. \tag{9.76}$$

Pongamos

$$V_1(y) = \int_K F(x, y)\, g(x)\, dx,$$

$$V_2(y) = \int_{D \setminus K} F(x, y)\, g(x)\, dx. \tag{9.77}$$

De la desigualdad (9.76) se deduce que para $|y - y_0| < \delta_1$

$$|V_1(y)| < \varepsilon/3. \tag{9.78}$$

Notemos ahora que, cuando $x \in D \setminus K(y_0, \delta_1)$ e $y \in K(y_0, \delta_1/2)$, la función $F(x, y)$ será uniformemente continua en la totalidad de argumentos. Por consiguiente, existe un número positivo $\delta < \delta_1/2$ de tal índole que, para $|y - y_0| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|F(x, y_0) - F(x, y)| < \varepsilon/3M\,|D|,$$

donde M es una constante que acota la función g, y $|D|$, el volumen del dominio D. En este caso, para $|y - y_0| < \delta$, tenemos

$$|V_2(y) - V_2(y_0)| \leqslant M \int\limits_{D \setminus K(y_0, \delta_1)} |F(x, y_0) - F(x, y)|\, dx \leqslant \varepsilon/3. \tag{9.79}$$

De las relaciones (9.77) — (9.79) se deduce que para $|(y - y_0| < \delta$,

$$|V(y) - V(y_0)| \leqslant |V_1(y)| + |V_1(y_0)| + |V_2(y) - V_2(y_0)| < \varepsilon.$$

El teorema está demostrado.

Señalemos una condición suficiente de convergencia uniforme de la integral en un punto que se encuentra con mayor frecuencia en las aplicaciones.

Teorema 9.18. *Supongamos que una función $F(x, y)$ es continua en $\overline{D} \times \overline{D}$ para $x \neq y$, y la función $g(x)$ es uniformemente acotada en D. Admitamos que existen unas constantes λ, $0 < \lambda < m$, y $c > 0$ tales que para cualquier $x \in D$, $y \in D$ se verifique la desigualdad*

$$|F(x, y)| \leqslant c\,|x - y|^{-\lambda}. \tag{9.80}$$

En estas condiciones la integral (9.75) es uniformemente convergente respecto de y en cada punto $y_0 \in D$.

DEMOSTRACIÓN. Sea y_0 un punto arbitrario del dominio D. Es necesario demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier dominio cubicable $\omega \subset K(y_0, \delta)$ y todos los $y \in K(y_0, \delta)$ se cumpla la desigualdad

$$\left| \int\limits_{\omega} F(x, y)\, g(x)\, dx \right| < \varepsilon, \tag{9.81}$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Aplicando (9.80) y aprovechando el hecho de que $g(x)$ es acotada, obtenemos

$$\left| \int\limits_{\omega} F(x, y)\, g(x)\, dx \right| \leqslant c_1 \int\limits_{\omega} |x - y|^{-\lambda}\, dx.$$

Fijemos un punto $y \in K(y_0, \delta)$ y notemos que de la condición $\omega \subset K(y_0, \delta)$ se desprende una inclusión $\omega \subset K(y, 2\delta)$. Por consiguiente,

$$\left| \int_\omega F(x, y) g(x) \, dx \right| \leqslant c_1 \int_{K(y, 2\delta)} |x - y|^{-\lambda} \, dx. \qquad (9.82)$$

Al pasar en la integral del miembro derecho en (9.82) a las coordenadas esféricas con centro en el punto y (véase cap. 2, § 5, p. 3°), obtendremos

$$\left| \int_\omega F(x, y) g(x) \, dx \right| \leqslant c_2 \int_0^{2\delta} r^{m-1-\lambda} \, dr = \frac{c_2 2^{m-\lambda}}{m-\lambda} \delta^{m-\lambda} = c_3 \delta^{m-\lambda}.$$

De aquí proviene que al elegir δ suficientemente pequeño, obtendremos la desigualdad (9.81). El teorema está demostrado.

3. Suplemento a la teoría del potencial newtoniano. Supongamos que en cierto punto P_0 (x, y, z) se ubica una masa m_0. De acuerdo con la ley de gravitación universal, la masa m ubicada en un punto M (ξ, η, ζ) se encuentra bajo el efecto de la fuerza

$$F = -\gamma \frac{m m_0}{R^2} \overline{r},$$

donde $R = \rho(P_0, M) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$; γ es la constante de gravitación universal; $\overline{r} = \overline{R}/R$ es el vector unidad cuya dirección coincide con la dirección del vector $\overline{P_0 M}$. Considerando $\gamma = 1$, y la masa $m = 1$, obtendremos la fuerza de la gravedad

$$F = -\frac{m_0}{R} \overline{r}.$$

Notemos que los componentes de esta fuerza tienen por expresión

$$X = -\frac{m_0}{R^3} (\xi - x),$$

$$Y = -\frac{m_0}{R^3} (\eta - y),$$

$$Z = -\frac{m_0}{R^3} (\zeta - z).$$

Es evidente que el potencial de la fuerza de gravedad, definido como una función escalar u tal que $F = \operatorname{grad} u$, es igual a

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

Si la masa está concentrada no en el punto P_0 (x, y, z), sino viene distribuida por el dominio D con una densidad ρ (x, y, z), entonces para el potencial de la fuerza de gravedad y para los componentes de la fuerza de gravedad obtendremos las siguientes expresiones:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \iiint\limits_D \frac{\rho(x, y, z)}{R}\, dx\, dy\, dz, \tag{9.83}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= -\iiint\limits_D \frac{\rho(x, y, z)}{R^3}(\xi - x)\, dx\, dy\, dz, \\ Y &= -\iiint\limits_D \frac{\rho(x, y, z)}{R^3}(\eta - y)\, dx\, dy\, dz, \\ Z &= -\iiint\limits_D \frac{\rho(x, y, z)}{R^3}(\zeta - z)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{9.84}$$

No es difícil mostrar que las integrales (9.84) representan derivadas parciales del potencial (9.83). Por cuanto las funciones subintegrales en las integrales (9.83) y (9.84) se mayorean mediante la función $\frac{C}{R^\lambda}$, donde $\lambda = 1$ para la integral (9.83), y $\lambda = 2$, para la integral (9.84), entonces, en virtud del teorema 9.18, las integrales citadas convergen uniformemente en cada punto $M(\xi, \eta, \zeta)$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 9.17, estas integrales representan las funciones continuas del punto $M(\xi, \eta, \zeta)$.

Capítulo 10

SERIES E INTEGRAL DE FOURIER

Por el curso del álgebra lineal se conoce que si elegimos cierta base en un espacio lineal *de dimensión finita*, cualquier elemento del espacio lineal citado puede ser desarrollado según dicha base (y, además, de un modo único).

Un problema mucho más complejo consiste en elección de la base y en desarrollo según la base para el caso de espacio *de dimensión infinita*.

En este capítulo el problema planteado se estudia para el caso de los así llamados espacios euclídeos *de dimensión infinita* y para las bases de un tipo especial (llamadas bases *ortonormalizadas*).

Con una atención más circunstanciada se estudia una base formada en el espacio de todas las funciones continuas a trozos por el así llamado sistema *trigonométrico*.

El desarrollo de una función en la así llamada *serie de Fourier* [1]), estudiado en este capítulo, es una generalización de la idea del desarrollo de la función según una base.

Siempre en este capítulo la integral se entiende en el sentido de Riemann.

§ 1. Concepto de los sistemas ortonormalizados y de la serie general de Fourier

En el párrafo presente se examinará un espacio euclídeo arbitrario de dimensión *infinita* [2]). Para mayor conveniencia, aduzcamos la definición de espacio euclídeo.

Definición 1. *Un espacio lineal R se llama euclídeo, si se cumplen las siguientes dos exigencias:*

1) *se conoce la regla, de acuerdo con la cual a cualesquiera dos elementos f y g del espacio R se les pone en correspondencia un número denominado producto escalar de dichos elementos y denotado con el símbolo* (f, g);

2) *la regla citada satisface los siguientes axiomas:*

1°. $(f, g) = (g, f)$ (*propiedad conmutativa*).

2°. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ (*propiedad distributiva*)

---

[1]) J. Fourier (1772—1837), matemático francés.

[2]) Suele decirse que un espacio lineal es de *dimensión infinita*, si en dicho espacio existe un número cualquiera, prefijado de antemano, de elementos linealmente independientes.

3°. $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$ *para cualquier número real* λ.

4°. $(f, f) > 0$, *si* $f \neq \mathbf{0}$[1]), $(f, f) = 0$, *si* $f = \mathbf{0}$.

De ejemplo clásico de espacio euclídeo de dimensión infinita sirve *el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre cierto segmento* $a \leqslant x \leqslant b$.

Siempre en este capítulo entenderemos por función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$, una función de tal índole que es continua en todo punto del segmento $[a, b]$, a excepción, quizás, de un número finito de puntos x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, en los cuales tiene discontinuidad de primera especie, con la particularidad de que en cada punto de discontinuidad x_i dicha función satisface la condición

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}. \qquad (10.1)$$

Así pues, en este capítulo exigimos siempre que *la función continua a trozos* $f(x)$ *satisfaga en cada punto de discontinuidad* x_i *la condición* (10.1), *es decir, sea igual a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo*. Notemos que en cada punto, en el cual la función $f(x)$ es continua, la condición del tipo (10.1) es automáticamente válida.

Un producto escalar de dos elementos cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$ del espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ lo denotemos del modo siguiente

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) \, dx. \qquad (10.2)$$

La existencia de la integral (10.2) de un producto de dos funciones continuas a trozos no causa dudas algunas. Es fácil comprobar la validez, para el producto escalar (10.2), de los axiomas 1°—4°. La validez del axioma 1° es evidente. La validez de los axiomas 2° y 3° se deduce de las propiedades lineales de la integral.

Detengámonos en la demostración del axioma 4°. Por cuanto es obvio que siempre $(f, f) = \int_a^b f^2(x) \, dx \geqslant 0$, basta mostrar que de la igualdad $(f, f) = \int_a^b f^2(x) \, dx = 0$ se deduce que $f(x) \equiv 0$, es decir, es un elemento nulo del espacio en consideración. Ya que $f(x)$ es una función continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$, este último se

[1]) $\mathbf{0}$ denota el elemento nulo de un espacio lineal.

desintegra en un número finito de segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$, en cada uno de los cuales $f(x)$[1]) es continua.

De la igualdad $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ se deduce que para cada segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ también tenemos

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx = 0. \tag{10.3}$$

Mas, de la igualdad (10.3) y de la continuidad de $f^2(x)$ sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ proviene que $f(x) \equiv 0$ en $[x_{i-1}, x_i]$[2]).

Por cuanto la última igualdad es válida para cada segmento parcial y en los puntos de discontinuidad rige la relación (10.1), entonces $f(x) \equiv 0$ en todo el segmento $[a, b]$. La validez del axioma 4° está establecida.

Con esto queda demostrado que el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $[a, b]$ es espacio euclídeo con el producto escalar (10.2).

Establezcamos la siguiente propiedad general de cualquier espacio euclídeo.

Teorema 10.1. *En todo espacio euclídeo para cualesquiera dos elementos f y g se cumple la siguiente desigualdad*

$$(f, g)^2 \leqslant (f, f)\cdot(g, g), \tag{10.4}$$

llamada desigualdad de Cauchy—Buniakovski.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier número real λ

$$(\lambda f - g, \lambda f - g) \geqslant 0.$$

En virtud de los axiomas 1°—4°, la última desigualdad puede escribirse en la forma

$$\lambda^2\cdot(f, f) - 2\lambda(f, g) + (g, g) \geqslant 0.$$

La condición necesaria y suficiente para que el último trinomio cuadrado sea no negativo consiste en el carácter no positivo de su discriminante, es decir, en la desigualdad

$$(f, g)^2 - (f, f)\cdot(g, g) \leqslant 0. \tag{10.5}$$

De (10.5) se deduce en seguida (10.4). El teorema está demostrado.

---

[1]) En este caso los valores de $f(x)$ en los puntos de frontera x_{i-1} y x_i de cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ suponemos ser iguales a los valores límites de $f(x_{i-1}+0)$ y de $f(x_i-0)$, respectivamente.

[2]) Pues, en el § 6, cap. 1, v. II se ha demostrado que si una función es continua, no negativa y no igual a cero idénticamente sobre un segmento dado, la integral de dicha función extendida al segmento dado es superior a cero.

Nuestra tarea de turno es introducir en el espacio euclídeo que se considera el concepto de *norma* de cada elemento.

Pero, en primer lugar recordemos la definición de espacio normado lineal.

Definición 2. *Un espacio lineal R se llama normado, si se cumplen las siguientes dos exigencias:*

1) *se conoce la regla, por medio de la cual a todo elemento f del espacio R se le pone en correspondencia un número real llamado norma del elemento citado y denotado con el símbolo $\|f\|$;*

2) *la regla citada satisface los siguientes axiomas:*

1°. $\|f\| > 0$, *si* $f \neq 0$, $\|f\| = 0$, *si* $f = 0$.

2°. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ *para cualquier elemento f y todo número real λ.*

3°. *Para cualesquiera dos elementos f y g se cumple la siguiente desigualdad*

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \tag{10.6}$$

llamada desigualdad triangular (o desigualdad de Minkowski).

Teorema 10.2. *Todo espacio euclídeo es normado, si la norma de cualquier elemento f en él definimos mediante la igualdad*

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \tag{10.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente convencerse de que para la norma definida por la relación (10.7) son válidos los axiomas 1°—3° de la definición 2.

La validez del axioma 1° se deduce en seguida del axioma 4° para un producto escalar. La validez del axioma 2° también se deduce casi directamente de los axiomas 1° y 3° para un producto escalar.

Resta por convencerse de la validez del axioma 3°, es decir, de la desigualdad (10.6). Apoyémonos en la desigualdad de Cauchy—Buniakovski (10.4) que escribamos en la forma

$$|(f, g)| \leqslant \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}.$$

Con ayuda de la última desigualdad y los axiomas 1°—4° para un producto escalar y de la definición de norma (10.7), obtenemos

$$\begin{gathered}\|f+g\| = \sqrt{(f+g, f+g)} = \sqrt{(f, f) + 2(f, g) + (g, g)} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(f, f) + 2\sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)} + (g, g)} = \\ = \sqrt{\left[\sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)}\right]^2} = \sqrt{(f, f)} + \sqrt{(g, g)} = \|f\| + \|g\|.\end{gathered}$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Por supuesto, el producto escalar (y la norma) puede introducirse en cada espacio euclídeo de una manera no única. En lo que sigue nos será suficiente que en el espacio euclídeo en consideración existe al menos un método de introducir un producto escalar. Al fijar el método, definiremos siempre la norma del espacio euclídeo en consideración mediante la relación (10.7). Por ejemplo, en un espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $[a, b]$ la norma se define, de conformidad con (10.2) mediante la ecuación

$$\| f \| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{10.8}$$

y la desigualdad triangular (10.6) tiene por expresión

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}. \tag{10.9}$$

Introduzcamos el concepto de elementos *ortogonales* del espacio euclídeo dado.

Definición 3. *Dos elementos de un espacio euclídeo* f *y* g *se llaman ortogonales, si el producto escalar de estos elementos* (f, g) *es igual a cero.*

Veamos en un espacio euclídeo arbitrario R de dimensión finita una sucesión de elementos

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \ldots \tag{10.10}$$

Definición 4. *La sucesión* (10.10) *se denomina sistema ortonormalizado, si los elementos que la integran son ortogonales dos a dos y tienen norma igual a la unidad.*

A título de ejemplo clásico de sistema ortonormalizado en el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ sirve el así llamado *sistema trigonométrico*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \operatorname{sen}\frac{nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{10.11}$$

El lector comprobará con facilidad que todas las funciones (10.11) son ortogonales dos a dos (en el sentido del producto escalar (10.2) tomado para $a = -\pi$, $b = \pi$) y que la norma de cada una de estas funciones (definida mediante la igualdad (10.7) para $a = -\pi$, $b = \pi$) es igual a la unidad.

En las matemáticas y sus aplicaciones se encuentran a menudo diferentes sistemas ortonormalizados de funciones (en los conjuntos correspondientes).

He aquí algunos ejemplos de tales sistemas.

1°. Polinomios definidos por la igualdad

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

suelen llamarse *polinomios de Legendre*.

No es difícil convencerse de que las funciones

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot P_n(x) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

formadas con ayuda de estos polinomios, constituyen (sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$) un sistema ortonormalizado de funciones.

2°. Los polinomios definidos mediante las igualdades $T_0(x) \equiv 1$, $T_n(x) = 2^{1-n}\cos n(\arccos x)$ para $n = 1, 2, \ldots$, llevan el nombre *de Chébishev*. Entre todos los polinomios de n-ésimo grado, cuyos coeficientes de x^n son iguales a la unidad, el polinomio de Chébishev $T_n(x)$ se caracteriza por el máximo del módulo más pequeño sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Se puede mostrar que las funciones

$$\psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[4]{1-x^2}},$$

$$\psi_n(x)=\frac{2^{n-\frac{1}{2}}\cdot T_n(x)}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt[4]{1-x^2}} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

obtenidas con ayuda del polinomio de Chébishev, forman un sistema ortonormalizado sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

3°. En la teoría de las probabilidades se emplea frecuentemente el así llamado *sistema de Rademacher* [1])

$$\psi_n(x) = \varphi(2^n\cdot x) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

donde $\varphi(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen} 2\pi t)$.

Se puede demostrar que este sistema es ortonormalizado sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4°. En una serie de investigaciones referentes a la teoría de funciones se emplea el así llamado *sistema de Haar* [2]) que es ortonormalizado sobre el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$. Los elementos de este sistema $\chi_n^{(k)}(x)$ se definen, para todos los $n = 0, 1, \ldots$, y para cualquier k que toma los valores $1, 2, 4, \ldots, 2^n$. Tienen por expresión

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{para } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant x < \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{para } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < x \leqslant \dfrac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{en los puntos restantes de } [0,\ 1]. \end{cases}$$

Cada función de Haar representa un escalón del mismo tipo que la función $\sqrt{2^n}\operatorname{sgn} x$ sobre un segmento $[-2^{-(n+1)},\ 2^{-(n+1)}]$. Para cada número fijo n, este escalón se desplaza, al aumentar el valor de k, a la derecha. Fuera del escalón correspondiente cada función de Haar siempre es idénticamente igual a cero.

Supongamos que en un espacio euclídeo arbitrario R de dimensión infinita viene dado un sistema ortonormalizado arbitrario de elementos $\{\psi_k\}$. Veamos un elemento cualquiera f del espacio R.

[1]) H. Rademacher (n. 1892), matemático alemán.
[2]) A. Haar (1885—1933), matemático húngaro.

Definición 5. *Llamemos serie de Fourier del elemento f según el sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$ a una serie de la forma*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\psi_k, \tag{10.12}$$

en la que con f_k están designados números constantes llamados coeficientes de Fourier del elemento f y definidos mediante las igualdades

$$f_k=(f,\ \psi_k),\quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Resulta natural denominar una suma finita

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k \tag{10.13}$$

n-ésima *suma parcial* de la serie de Fourier (10.12).

Examinemos, a la par con la n-ésima suma parcial (10.13), una combinación arbitraria de los primeros n elementos del sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k \tag{10.14}$$

con cualesquiera números constantes $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$.

Aclaremos qué hace diferir la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier (10.13) de las demás sumas (10.14).

Convengamos en llamar una magnitud $\|f-g\|$ *desviación* de g con relación a f (según la norma del espacio euclídeo dado).

Tiene lugar el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 10.3. *Entre todas las sumas de la forma* (10.14) *la desviación mínima con relación al elemento f en norma de un espacio euclídeo dado tiene la n-ésima suma parcial* (10.13) *de la serie de Fourier del elemento f.*

DEMOSTRACIÓN. Teniendo presente el carácter ortonormalizado del sistema $\{\psi_k\}$ y aprovechando los axiomas del producto escalar, podemos escribir

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k-f\right\|^2=\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k-f,\ \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k-f\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} C_k^2(\psi_k,\ \psi_k)-2\sum_{k=1}^{n} C_k(f,\ \psi_k)+(f,\ f)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} C_k^2-2\sum_{k=1}^{n} C_kf_k+\|f\|^2=\sum_{k=1}^{n} (C_k-f_k)^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2+\|f\|^2.$$

Así pues,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (C_k - f_k)^2 + \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \quad (10.15)$$

En el primer miembro de (10.15) figura el cuadrado de la desviación de la suma (10.14) con relación al elemento f (según la norma de un espacio euclídeo dado). La forma del segundo miembro de (10.15) deja constancia de que el citado cuadrado de desviación es mínimo cuando $C_k = f_k$ (pues, en este caso, la primera suma en el segundo miembro de (10.15) se anula, y los sumandos restantes en el segundo miembro de (10.15) no dependen de C_k). El teorema está demostrado.

Corolario 1. *Para un elemento arbitrario f del espacio euclídeo dado y cualquier sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$, siendo arbitraria la elección de las constantes C_k, se cumple la desigualdad*

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f \right\|^2, \quad (10.16)$$

cualquiera que sea n.

La desigualdad (10.16) es un corolario inmediato de la identidad (10.15).

Corolario 2. *Para un elemento arbitrario f del espacio euclídeo dado, todo sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$ y cualquier número n, se verifica la igualdad*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \quad (10.17)$$

llamada frecuentemente identidad de Bessel [1]).

Para demostrar la igualdad (10.17), basta poner en (10.15) $C_k = f_k$.

Teorema 10.4. *Para cualquier elemento f de un espacio euclídeo dado y todo sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leqslant \| f \|^2, \quad (10.18)$$

llamada desigualdad de Bessel.

DEMOSTRACIÓN. De lo que el primer miembro de (10.17) es no negativo se deduce que para *cualquier* número n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leqslant \| f \|^2. \quad (10.19)$$

---

[1]) F. Bessel (1784—1846), astrónomo y matemático alemán.

Pero, esto es indicio de que la serie de términos no negativos que figura en el primer miembro de (10.18) cuenta con una sucesión acotada de sumas parciales, por lo cual es convergente. Pasando en la desigualdad (10.19) al límite para $n \to \infty$ (véase teorema 3.13, v. I), obtendremos la desigualdad (10.18). El teorema está demostrado.

Volvamos, a título de ejemplo, al espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, y, en dicho espacio, a la serie de Fourier según el sistema trigonométrico (10.11) (esta serie suele llamarse *serie trigonométrica de Fourier*). Para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, la citada serie de Fourier tiene por expresión

$$\bar{f}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{10.20}$$

donde los coeficientes de Fourier $\bar{f}_k$ y $\bar{\bar{f}}_k$ se definen por las fórmulas

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$\bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad \bar{\bar{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

La desigualdad de Bessel, válida para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, tiene por expresión

$$\bar{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k^2 + \bar{\bar{f}}_k^2) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{10.21}$$

La desviación de $f(x)$ con relación a $g(x)$ en la norma es igual en este caso a la así llamada desviación media cuadrática,

$$\| f - g \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2\, dx}. \tag{10.22}$$

Además, en la teoría de las series trigonométricas de Fourier está aceptada la forma de notación un poco diferente tanto para la propia serie de Fourier (10.20), como también para la desigualdad de Bessel (10.21). A saber, la serie trigonométrica de Fourier (10.20) se escribe, corrientemente, en la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx), \tag{10.20'}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\overline{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{\overline{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{\overline{\overline{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx \end{aligned}\right\} \tag{10.23}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Con tal forma de notación la desigualdad de Bessel (10.21) tiene por expresión

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{10.21'}$$

OBSERVACIÓN. De la desigualdad de Bessel (10.21′) se deduce que para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, las magnitudes a_k y b_k (llamadas *coeficientes trigonométricos de Fourier* de la función $f(x)$) tienden a cero cuando $k \to \infty$ (en virtud de la condición necesaria de convergencia de la serie en el primer miembro de (10.21′)).

§ 2. Sistemas ortonormalizados cerrados y completos

Examinemos, al igual que en el párrafo antecedente, un sistema ortonormalizado arbitrario $\{\psi_k\}$ en un espacio euclídeo arbitrario R de dimensión infinita.

Definición 1. *Un sistema ortonormalizado $\{\psi_k\}$ se denomina cerrado, si para cualquier elemento f de un espacio euclídeo dado R y para todo número positivo ε existe tal combinación lineal* (10.14) *de un número finito de elementos de $\{\psi_k\}$, cuya desviación con relación a f (según la norma del espacio R) sea inferior a ε.*

Dicho de otro modo, el sistema $\{\psi_k\}$ se llama cerrado, si todo elemento f del espacio euclídeo dado R puede ser aproximado según la norma de este espacio con cualquier orden de exactitud mediante combinaciones lineales de un número finito de elementos de $\{\psi_k\}$.

OBSERVACIÓN 1. Omitimos la cuestión de si en cada espacio existen sistemas ortonormalizados cerrados. Notemos que en el capítulo 2 se estudia una subclase importante de espacios euclídeos, los así llamados espacios *de Hilbert*, y se establece la existencia en cada espacio de esta índole de los sistemas ortonormalizados cerrados.

Teorema 10.5. *Si un sistema ortonormalizado* $\{\psi_k\}$ *es cerrado, para cualquier elemento* f *del espacio euclídeo en consideración la desigualdad de Bessel* (10.18) *se convierte en una igualdad exacta*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \| f \|^2, \tag{10.24}$$

llamada igualdad de Parseval[1])

DEMOSTRACIÓN. Fijamos un elemento arbitrario f del espacio euclídeo en consideración y un número positivo arbitrario ε. Por cuanto el sistema $\{\psi_k\}$ es cerrado, existe tal número n y tales números $C_1, C_2, \ldots, C_n$, que el cuadrado de la norma que figura en el segundo miembro de (10.16) sea inferior a ε. En virtud de (10.16), esto significa que para $\varepsilon > 0$ arbitrario se encontrará un número n, para el cual

$$\| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon. \tag{10.25}$$

Para todos los números que sobrepasan el número citado n, la desigualdad (10.25) será con mayor razón válida, pues, al crecer n, la suma en el primer miembro de (10.25) sólo puede aumentar.

Hemos demostrado, pues, que para $\varepsilon > 0$ arbitrario se encontrará un número n, a partir del cual queda válida la desigualdad (10.25).

Junto con la desigualdad (10.19) esto significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ converge hacia la suma $\| f \|^2$. El teorema está demostrado.

Teorema 10.6. *Si un sistema ortonormalizado* $\{\psi_k\}$ *es cerrado, entonces, cualquiera que sea un elemento* f, *la serie de Fourier de este elemento converge a él en la norma del espacio euclídeo en consideración, es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f \right\| = 0. \tag{10.26}$$

DEMOSTRACIÓN. La afirmación de este teorema se deduce inmediatamente de la igualdad (10.17) y del teorema anterior.

OBSERVACIÓN 2. En el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ la convergencia en la norma (10.26) se convierte en la convergencia *en media* sobre dicho segmento (véase p. 3, § 2, cap. 1). De este modo, si demostramos el carácter cerrado del sistema trigonométrico (10.11), el teorema 10.6 afirmará que para toda función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ la serie trigonométrica de Fourier de dicha función converge hacia la misma en media sobre el segmento dado.

Definición 2. *Un sistema ortonormalizado* $\{\psi_k\}$ *se denomina completo, si no existe (a excepción del elemento nulo) ningún otro elemento*

[1]) M. Parseval (m. en 1836), matemático francés.

f de un espacio euclídeo dado que sea ortogonal a todos los elementos ψ_k del sistema $\{\psi_k\}$.

De otras palabras, el sistema $\{\psi_k\}$ se denomina completo, si cada elemento f, ortogonal a todos los elementos ψ_k del sistema $\{\psi_k\}$ es elemento nulo.

Teorema 10.7. *Todo sistema ortonormalizado cerrado $\{\psi_k\}$ es completo.*

DEMOSTRACION. Sea $\{\psi_k\}$ un sistema cerrado, y sea f, un elemento cualquiera del espacio euclídeo dado, ortogonal a todos los elementos ψ_k del sistema $\{\psi_k\}$.

Entonces, todos los coeficientes de Fourier f_k del elemento f con relación al sistema $\{\psi_k\}$ son nulos y, por lo tanto, en virtud de la ecuación de Parseval (10.24), también $\|f\| = 0$. La última igualdad (en virtud del axioma 1° para la norma) significa que $f = 0$. El teorema está demostrado.

OBSERVACION 3. Hemos demostrado que en un espacio euclídeo arbitrario el carácter cerrado del sistema predetermina la completitud de éste. En el cap. 11 se dará un ejemplo a mostrar que en un espacio euclídeo arbitrario de la completitud de un sistema ortonormalizado no proviene, en el caso general, el carácter cerrado del sistema mencionado. Demostraremos, además, que para una clase muy importante de espacios euclídeos (los así llamados espacios de Hilbert) la completitud del sistema ortonormalizado es equivalente a su carácter cerrado.

Teorema 10.8. *Para todo sistema ortonormalizado completo (y, con mayor, para todo sistema cerrado) $\{\psi_k\}$, dos elementos diferentes f y g del espacio euclídeo en consideración no pueden tener las series de Fourier iguales.*

DEMOSTRACION. Si todos los coeficientes de Fourier de los elementos f y g coincidieran, todos los coeficientes de Fourier de la diferencia $f - g$ serían iguales a cero, es decir, la diferencia $f - g$ sería ortogonal a todos los elementos ψ_k del sistema completo $\{\psi_k\}$. Mas, esto significaría que la diferencia $f - g$ es un elemento nulo, es decir, los elementos f y g coinciden. El teorema está demostrado.

Con esto finalizamos el examen de la serie general de Fourier con relación al sistema ortonormalizado arbitrario en cualquier espacio euclídeo.

Nuestro objetivo de turno consiste en el estudio detallado de la serie de Fourier con relación al sistema trigonométrico (10.11).

§ 3. Carácter cerrado del sistema trigonométrico y corolarios

1. Aproximación uniforme de una función continua mediante polinomios trigonométricos. En este párrafo se establecerá el carácter cerrado (y, por consiguiente, la completitud) del sistema trigonométrico (10.11) en el espacio de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Pero, antes de proceder con la demostración del carácter cerrado del sistema trigonométrico, demos a conocer un teorema importante sobre la aproximación uniforme de una función continua mediante los así llamados polinomios trigonométricos.

Llamemos *polinomio trigonométrico* a una combinación lineal arbitraria de cualquier número finito de elementos del sistema (10.11), es decir, una expresión de la forma

$$T(x) = \overline{C}_0 + \sum_{k=1}^{n} (\overline{C}_k \cos kx + \overline{\overline{C}}_k \operatorname{sen} kx),$$

donde n es un número cualquiera, y $\overline{C}_k$, $\overline{\overline{C}}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ son números reales constantes arbitrarios.

He aquí dos *afirmaciones* sumamente elementales:

1°. *Si $P(x)$ es un polinomio algebraico cualquiera de grado arbitrario n, $P(\cos x)$ y $P(\operatorname{sen} x)$ son polinomios trigonométricos.*

2°. *Si $T(x)$ es un polinomio trigonométrico, cada una de las expresiones $T(x)\cdot \operatorname{sen} x$ y $T(x)\cdot \operatorname{sen}^2 x$ también será un polinomio trigonométrico.*

Ambas afirmaciones se deducen de lo que un producto de dos (y, por eso, de cualquier número finito) funciones trigonométricas [1] del argumento x se reduce a una combinación lineal de un número finito de funciones trigonométricas de los argumentos del tipo kx (que el mismo lector se cerciore de esto).

En la teoría de las series trigonométricas de Fourier un papel importante desempeña el concepto de función *periódica*.

Una función $f(x)$ se denomina periódica de período T, si: 1) $f(x)$ está definida para todos los números reales x; 2) para todo x real se verifica la igualdad

$$f(x + T) = f(x).$$

Esta igualdad se llama, de ordinario, *condición de periodicidad.* Al análisis de las funciones periódicas conduce el estudio de diferentes procesos oscilantes.

Notemos que todos los elementos del sistema trigonométrico (10.11) son funciones periódicas de período 2π.

Es válido el siguiente teorema *principal.*

***Teorema 10.9* (*teorema de Weierstrass*).** *Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisface la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, dicha función puede aproximarse uniformemente sobre el citado segmento mediante polinomios trigonométricos,* es decir, para $f(x)$ y para cualquier número positivo ε existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ de tal índole que simultáneamente para todos los x del seg-

[1] Por funciones trigonométricas se entienden en este caso el coseno o seno.

mento $[-\pi, \pi]$ se cumpla una desigualdad

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{10.27}$$

DEMOSTRACIÓN. Realicemos la demostración en dos etapas.

1°. Al principio supongamos adicionalmente que la función $f(x)$ es *par*, es decir, para todo x del segmento $[-\pi, \pi]$ satisface la condición $f(-x) = f(x)$.

En virtud del teorema de continuidad de una función compuesta $y = f(x)$, donde $x = \arccos t$ (véase § 7, cap. 4, v. I), la función $F(t) = f(\arccos t)$ es función continua del argumento t sobre el segmento $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema de Weierstrass, para los polinomios algebraicos (véase teorema 1.18 del cap. 1) existe, dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, un polinomio algebraico $P(t)$ tal que $|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon$ simultáneamente para todos los t del segmento $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Al poner $t = \cos x$, obtendremos

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon \tag{10.28}$$

simultáneamente para todos los x del segmento $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Por cuanto ambas funciones $f(x)$ y $P(\cos x)$ son *pares*, la desigualdad (10.28) será también válida para todos los x del segmento $-\pi \leqslant x \leqslant 0$. De este modo, la desigualdad (10.28) se cumple para todos los x del segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, y, por ser $P(\cos x)$ (en virtud de la afirmación 1° aducida más arriba) un polinomio trigonométrico, el teorema queda demostrado para la función par $f(x)$.

Notemos ahora que la función $f(x)$ que satisface las condiciones del teorema en consideración puede ser prolongada con el período 2π a toda la recta infinita $-\infty < x < \infty$ de un modo tal que la función prolongada sea continua en cada punto x de la recta infinita. Si la función $f(x)$ es prolongada precisamente de este modo, entonces, por cuanto $P(\cos x)$ es también función periódica del período 2π, llegamos a que *para la función par $f(x)$ la desigualdad* (10.28) *se cumple en todo punto de la recta infinita $-\infty < x < \infty$.*

2°. Ahora, sea $f(x)$ una función sumamente arbitraria que satisface las condiciones del teorema que se demuestra. Haremos prolongar con el período 2π dicha función a toda la recta infinita y formemos con ayuda de ella las siguientes dos funciones *pares*:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \tag{10.29}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \operatorname{sen} x. \tag{10.30}$$

Según lo demostrado en el punto 1°, existen para $\varepsilon > 0$ cualquiera los polinomios trigonométricos $T_1(x)$ y $T_2(x)$ de tal índole que en cada punto de la recta infinita

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \varepsilon/4, \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \varepsilon/4,$$

y, por eso,

$$| f_1(x) \operatorname{sen}^2 x - T_1(x) \operatorname{sen}^2 x | < \varepsilon/4,$$
$$| f_2(x) \operatorname{sen} x - T_2(x) \operatorname{sen} x | < \varepsilon/4.$$

Al sumar dos últimas desigualdades, teniendo en cuenta que el módulo de una suma de dos magnitudes no sobrepasa la suma de sus módulos, llegamos a que (tomando en consideración las igualdades (10.29) y (10.30)) en cada punto de la recta infinita se cumple la desigualdad

$$| f(x) \operatorname{sen}^2 x - T_3(x) | < \varepsilon/2, \tag{10.31}$$

en la cual con $T_3(x)$ está designado un polinomio trigonométrico igual a $T_3(x) = T_1(x) \operatorname{sen}^2 x + T_2(x) \operatorname{sen} x$.

En los razonamientos realizados podemos en lugar de la función $f(x)$ tomar la función $f(x + \pi/2)$[1]. Por analogía completa con (10.31) obtenemos que para la función $f(x + \pi/2)$ se encontrará un polinomio trigonométrico $T_4(x)$ tal que en cada punto de la recta infinita se verifique la desigualdad

$$| f(x + \pi/2) \operatorname{sen}^2 x - T_4(x) | < \varepsilon/2. \tag{10.32}$$

Sustituyendo en (10.32) x por $x - \pi/2$, y denotando con $T_5(x)$ el polinomio trigonométrico del tipo $T_5(x) = T_4(x - \pi/2)$, concluimos que en cada punto de la recta infinita se cumple la desigualdad

$$| f(x) \cos^2 x - T_5(x) | < \varepsilon/2. \tag{10.33}$$

Por fin, al sumar las desigualdades (10.31) y (10.33) y al designar con $T(x)$ un polinomio del tipo $T(x) = T_4(x) + T_5(x)$, llegamos a que en todo punto de la recta infinita se cumple la desigualdad (10.27). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Cada una de las condiciones 1) de continuidad de $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, 2) de igualdad de los valores $f(-\pi)$ y $f(\pi)$ *es necesaria* para que la función $f(x)$ pueda aproximarse uniformemente sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ mediante polinomios trigonométricas.

Dicho de otro modo, el teorema de Weierstrass podemos formular del modo siguiente: *para que la función $f(x)$ pueda aproximarse uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ mediante polinomios trigonométricos, es necesario y suficiente que la función $f(x)$ sea continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisfaga la condición $f(-\pi) = f(\pi)$.*

La suficiencia constituye el contenido del teorema 10.9.

Detengámonos en la demostración de la *necesidad*. Supongamos que existe una sucesión de polinomios trigonométricos $\{T_n(x)\}$

[1] Pues, esta función satisface las mismas condiciones que la función $f(x)$ obtenida después de la prolongación.

que converge uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ hacia la función $f(x)$. Por cuanto toda función $T_n(x)$ es continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, de acuerdo con el teorema 1.8, la función $f(x)$ es también continua en el mismo segmento. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un polinomio $T_n(x)$ tal que $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon/2$ para todos los x del segmento $[-\pi, \pi]$. Por consiguiente,

$$|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \varepsilon/2, \quad |f(\pi) - T_n(\pi)| < \varepsilon/2.$$

De las últimas dos desigualdades y de la igualdad $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$, que se deduce de la condición de periodicidad (con el período 2π), concluimos que $|f(-\pi) - f(\pi)| < \varepsilon$, de donde $f(-\pi) = f(\pi)$ (en virtud de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario).

2. Demostración del carácter cerrado del sistema trigonométrico. Apoyándonos en el teorema de Weierstrass, demostremos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 10.10. *El sistema trigonométrico* (10.11) *es cerrado* [1]), es decir, para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y para todo número positivo ε existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ tal que se verifique la desigualdad

$$\| f(x) - T(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2\, dx} < \varepsilon. \qquad (10.34)$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos, ante todo, que para cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, y para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $F(x)$, continua sobre el mismo segmento, que satisface la condición $F(-\pi) = F(\pi)$ y que es de tal índole que

$$\| f(x) - F(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2\, dx} < \varepsilon/2. \qquad (10.35)$$

Efectivamente, basta tomar una función $F(x)$ coincidente con $f(x)$ siempre, a excepción de los entornos (suficientemente pequeños) de los puntos de discontinuidad de $f(x)$ y del punto $x = \pi$, y elegir $F(x)$ en los entornos mencionados como función lineal de un modo tal que $F(x)$ sea continua en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisfaga la condición $F(-\pi) = F(\pi)$.

Por cuanto una función continua a trozos y una función lineal que la corta son acotadas, entonces, al elegir los entornos citados de los puntos de discontinuidad de $f(x)$ y del punto $x = \pi$ suficientemente pequeños, aseguramos el cumplimiento de las desigualdades (10.35).

Según el teorema de Weierstrass 10.9, para la función $F(x)$ se encontrará un polinomio trigonométrico $T(x)$ tal que para todo x

[1]) Y, por consiguiente (en virtud del teorema 10.7), también *completo*.

del segmento $[-\pi, \pi]$ se cumpla la desigualdad

$$|F(x) - T(x)| \leqslant \varepsilon/2\sqrt{2\pi}. \qquad (10.36)$$

De (10.35) concluimos que

$$\| F(x) - T(x) \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [F(x) - T(x)]^2\, dx} \leqslant \varepsilon/2. \qquad (10.37)$$

De (10.35), (10.37) y de la desigualdad triangular para las normas

$$\| f(x) - T(x) \| \leqslant \| f(x) - F(x) \| + \| F(x) - T(x) \|$$

se deduce la desigualdad (10.34). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. De los teoremas 10.10 y 10.7 se deduce en seguida que *el sistema trigonométrico* (10.11) *es completo*. De aquí proviene, a su vez, que *el sistema* $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *es completo en el conjunto de todas las funciones, continuas a trozos sobre el segmento* $[0, \pi]$ (*o sobre el segmento* $[-\pi, 0]$, *respectivamente*). En efecto, cualquier función $f(x)$ continua a trozos sobre el segmento $[0, \pi]$, ortogonal en este segmento a todos los elementos del sistema $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx\right\}$, siendo prolongada al segmento $[-\pi, 0]$, resulta ser ortogonal sobre $[-\pi, \pi]$ a *todos* los elementos del sistema trigonométrico (10.11). Por ser el sistema (10.11) completo, dicha función es igual a cero en $[-\pi, \pi]$, y, por lo tanto, también en $[0, \pi]$. De un modo sumamente análogo se demuestra que *el sistema* $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *es completo en el conjunto de todas las funciones continuas a trozos sobre el segmento* $[0, \pi]$ (o sobre el segmento $[-\pi, 0]$, respectivamente).

OBSERVACIÓN 2. Se puede mostrar que entre los sistemas ortonormalizados mencionados en el § 1 los sistemas formados con ayuda de los polinomios de Legendre, polinomios de Chébishev y de las funciones de Haar, son cerrados, mientras que el sistema de Rademacher no es cerrado.

3. Corolarios del carácter cerrado de un sistema trigonométrico.

Corolario 1. *Para cualquier función* $f(x)$, *continua a trozos sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$, *se verifica la igualdad de Parseval*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \qquad (10.38)$$

(se deduce del teorema 10.5).

Corolario 2. *Una serie trigonométrica de Fourier de cualquier función* $f(x)$, *continua a trozos sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$, *converge hacia esta función en media sobre el segmento citado* (se deduce del teorema 10.6 y la Observación 2 al mismo).

Corolario 3. Una serie trigonométrica de Fourier de cualquier función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, puede integrarse sobre dicho segmento término a término (se deduce del corolario antecedente y del teorema 1.11 del cap. 1).

Corolario 4. Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, tienen series trigonométricas de Fourier iguales, dichas funciones coinciden en todos los puntos de este segmento (se deduce del teorema 10.8).

Corolario 5. Si la serie trigonométrica de Fourier de una función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, es uniformemente convergente sobre cierto segmento $[a, b]$ contenido en $[-\pi, \pi]$, es convergente sobre el segmento $[a, b]$ precisamente hacia la función $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $F(x)$ es una función, hacia la cual converge uniformemente sobre $[a, b]$ la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$. Demostremos que $F(x) \equiv f(x)$ en todo punto del segmento $[a, b]$. Por cuanto de la convergencia uniforme sobre el segmento $[a, b]$ se deduce la convergencia en media sobre dicho segmento (véase cap. 1, § 2, p. 3), la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge hacia la función $F(x)$ en media sobre el segmento $[a, b]$. Esto significa que para $\varepsilon > 0$ arbitrario se encontrará un número n_1, a partir del cual la n-ésima suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier $S_n(x)$ satisface la desigualdad

$$\|F(x) - S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b [F(x) - S_n(x)]^2\, dx} < \varepsilon/2. \qquad (10.39)$$

Por otra parte, en virtud del corolario 2, la sucesión $S_n(x)$ converge hacia $f(x)$ en media sobre todo el segmento $[-\pi, \pi]$, y, por consiguiente, también en el segmento $[a, b]$, es decir, para $\varepsilon > 0$ arbitrario fijo existe un número n_2, a partir del cual se verifica la igualdad

$$\| S_n(x) - f(x) \| = \sqrt{\int_a^b [S_n(x) - f(x)]^2\, dx} < \varepsilon/2. \qquad (10.40)$$

De (10.39), (10.40) y de la desigualdad triangular

$$\|F(x) - f(x)\| \leqslant \| F(x) - S_n(x)\| + \| S_n(x) - f(x)\|$$

proviene que $\| F(x) - f(x) \| < \varepsilon$. De la última desigualdad y de la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se deduce que $\| F(x) - f(x) \| = 0$, y de aquí concluimos, de acuerdo con el primer axioma para la norma, que $F(x) - f(x)$ es *un elemento nulo* del espacio de funciones continuas a trozos sobre $[a, b]$, es decir, una función que en el segmento $[a, b]$ es idénticamente igual a cero. El corolario 5 está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Por supuesto, en el corolario 5 el segmento $[a, b]$ puede coincidir con todo el segmento $[-\pi, \pi]$, es decir, *de la conver-*

gencia uniforme de la serie de Fourier de la función $f(x)$ en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ se deduce que la serie citada converge sobre dicho segmento precisamente hacia la función $f(x)$.

OBSERVACION 2. Los corolarios perfectamente análogos serán válidos también para una serie de Fourier respecto de cualquier otro sistema ortonormalizado en el espacio de funciones, continuas a trozos sobre un segmento arbitrario $[a, b]$, dotado del producto escalar (10.2) y norma (10.8). Como ejemplos de tales sistemas pueden servir sistemas ortonormalizados ligados con los polinomios de Legendre y Chébishev, como también el sistema de Haar, mencionados todos en el § 1.

§ 4. Condiciones más simples de convergencia uniforme y de diferenciación término a término de una serie trigonométrica de Fourier

1. Notas de introducción. En la física matemática y en una serie de otros apartados de las matemáticas es de papel esencial una cuestión sobre las condiciones cuyo cumplimiento asegura la convergencia de una serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en un punto dado x del segmento $[-\pi, \pi]$ hacia la citada función.

Ya al final del siglo pasado se sabía que existen funciones, continuas sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, que satisfacen la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, cuyas series trigonométricas de Fourier divergen en un punto dado con anticipación del segmento $[-\pi, \pi]$ (o, incluso, divergen en un conjunto infinito de puntos del segmento $[-\pi, \pi]$, siempre denso sobre dicho segmento) [1]).

De este modo, una sola continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ no asegura sin condiciones complementarias no sólo convergencia uniforme de la serie trigonométrica de Fourier de esta función, sino tampoco la convergencia de la serie mencionada en un punto prefijado de antemano del segmento indicado.

En este párrafo y en los siguientes párrafos aclaremos cuáles son las exigencias que han de ser sumadas a la continuidad de la función $f(x)$ (o introducidas en lugar de la continuidad de la función $f(x)$) con el fin de asegurar la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de dicha función en un punto dado y, además, asegurar la convergencia uniforme de la citada serie en todo el segmento $[-\pi, \pi]$, o en alguna parte del mismo.

En el estudio de la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier surge también otra pregunta: ¿Ha de ser convergente *por lo menos en un solo punto* del segmento $[-\pi, \pi]$ la serie de Fourier de cualquier función $f(x)$, continua a trozos (o, incluso, estrictamente continua) sobre el segmento mencionado?

---

[1]) El primer ejemplo de tal función fue construido en 1876 por P. du Bois-Reymond, matemático francés.

La respuesta positiva a la pregunta levantada fue obtenida sólo en el año 1966.

Esta respuesta constituye un corolario del teorema fundamental demostrado en 1966 por L. Carleson[1]) quien resolvió el problema famoso de N. N. Luzin[2]) planteado aún en 1914: *la serie trigonométrica de Fourier de cualquier función* $f(x)$, *para la cual existe una integral* $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$, *entendida en el sentido de Lebesgue, converge hacia esta función casi en todo punto del segmento* $[-\pi, \pi]$ [3]).

Del teorema de Carleson se desprende que la serie de Fourier no sólo de cualquier función continua a trozos, sino también de cualquier función $f(x)$ integrable sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ en el sentido propio de Riemann, converge hacia dicha función casi en todo punto del segmento $[-\pi, \pi]$ (pues, para tal función existe una integral $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ en el sentido de Riemann y, por lo tanto, también en el sentido de Lebesgue).

Notemos que si una función $f(x)$ es integrable sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ no en el sentido de Riemann, sino sólo en el de Lebesgue, la serie trigonométrica de Fourier de esta función puede fallar de ser convergente en todos los puntos del segmento $[-\pi, \pi]$. El primer ejemplo de la función $f(x)$, integrable sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ en el sentido de Lebesgue, con la serie trigonométrica de Fourier divergente en todos los puntos fue construido en el año 1923 por el matemático soviético A. N. Kolmogórov [4]).

2. Condiciones más simples de convergencia absoluta y uniforme de una serie trigonométrica de Fourier. Convengamos en usar la siguiente terminología.

Definición 1. *Diremos que una función* $f(x)$ *tiene sobre el segmento* $[a, b]$ *una derivada continua a trozos, si la derivada* $f'(x)$ *existe y es continua en todo punto del segmento* $[a, b]$, *a excepción, quizás, de un*

---

[1]) L. Carleson, matemático sueco contemporáneo. La demostración completa del teorema de Carleson se la puede encontrar en la colección de artículos traducidos «Matemáticas», v. II, No. 4, 1967, págs. 113—132.

[2]) N. N. Luzin, matemático soviético, fundador de la escuela matemática moderna de Moscú concerniente a la teoría de funciones (1883—1950). El planteamiento del problema de Luzin resuelto por Carleson y de otros problemas puede encontrarse en el libro de Luzin «Integral y serie trigonométrica», Moscú — Leningrado, Gostejizdat, 1951.

[3]) Véase en el cap. 8, de este libro la definición de la integral en el sentido de Lebesgue y de la convergencia casi en todo punto sobre un segmento dado.

[4]) Se puede encontrar la construcción del ejemplo de Kolmogórov en las págs. 412—421 del libro de N. K. Bari «Series trigonométricas», Moscú, Fizmatguiz, 1961.

número finito de puntos, en cada uno de los cuales la función $f'(x)$ tiene valores límites finitos derecho e izquierdo [1]*).*

Definición 2. *Diremos que una función $f(x)$ tiene sobre el segmento $[a, b]$ una derivada continua a trozos de orden $n \geqslant 1$, si la función $f^{n-1}(x)$ tiene en este segmento una derivada continua a trozos en el sentido de la definición 1.*

Resulta válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 10.11. *Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, tiene en el mismo derivada continua a trozos y satisface la condición $f(-\pi) = f(\pi)$, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge hacia esta función uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Más aún, una serie formada por los módulos de los términos de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ es en $[-\pi, \pi]$ uniformemente convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar que la serie compuesta por los módulos de los términos de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k \cos kx| + |b_k \operatorname{sen} kx|\} \tag{10.41}$$

converge uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, pues de aquí proviene tanto la convergencia uniforme en $[-\pi, \pi]$ de la propia serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$, como la convergencia de la citada serie (en virtud del corolario 5 del p. 3, § 4) precisamente hacia la función $f(x)$.

En virtud del criterio de Weierstrass (véase el teorema 1.4 del cap. 1), para demostrar la convergencia uniforme sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ de la serie (10.41), es suficiente probar la convergencia de la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k| + |b_k|\} \tag{10.42}$$

que la mayora.

Denotemos con α_k y β_k los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f'(x)$, al definirla adicionalmente de un modo arbitrario en un número finito de puntos, en los cuales no existe derivada de la función $f(x)$ [2]).

Realizando la integración por partes y teniendo presente que la función $f(x)$ es continua en todo el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisface la relación $f(-\pi) = f(\pi)$, obtendremos las siguientes relaciones que

---

[1]) En este caso la función $f'(x)$ puede resultar no definida en un número finito de puntos del segmento $[a, b]$. En estos puntos la definamos adicionalmente de un modo arbitrario (por ejemplo, pongamos igual a la semisuma de valores límites derecho e izquierdo).

[2]) Por ejemplo, en los puntos citados podemos poner la función $f'(x)$ igual a la semisuma de valores límites derecho e izquierdo.

ligan los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f'(x)$ con la propia función $f(x)$[1]:

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx=k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx=k\cdot b_k,$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx=-k\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=-k\cdot a_k.$$

De este modo,

$$|a_k|+|b_k|=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k},$$

y para demostrar la convergencia de la serie (10.42), resulta suficiente demostrar la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k}\right\}. \tag{10.43}$$

La convergencia de la serie (10.43) se deduce de las desigualdades elementales [2])

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha_k|}{k}&\leqslant\frac{1}{2}\left(\alpha_k^2+\frac{1}{k^2}\right),\\ \frac{|\beta_k|}{k}&\leqslant\frac{1}{2}\left(\beta_k^2+\frac{1}{k^2}\right)\end{aligned} \tag{10.44}$$

y de la convergencia de las series

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2+\beta_k^2),\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}, \tag{10.45}$$

la primera de las cuales converge en virtud de la igualdad de Parseval para una función continua a trozos $f'(x)$, y la segunda, en virtud del criterio integral de Cauchy—Maclaurin (véase § 2, cap. 4, v. II). El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN. Si prolongamos una función $f(x)$ que satisface las condiciones del teorema 10.11 a toda la recta infinita del modo

---

[1]) Al integrar por partes, se debe dividir el segmento $[-\pi, \pi]$ en un número finito de segmentos parciales (que no tengan puntos interiores comunes), sobre cada uno de los cuales la derivada $f'(x)$ es continua, y, escogiendo la fórmula de integración por partes para cada uno de estos segmentos parciales, tomar en consideración que al sumar las integrales respecto de todos los segmentos parciales, todas las sustituciones se reducen a cero (en vista de la continuidad de $f(x)$ sobre todo el segmento $[-\pi, \pi]$ y debido a las condiciones $f(-\pi)=f(\pi)$.

[2]) Partimos de la desigualdad elemental $|a|\cdot|b|\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ que proviene de lo que la magnitud $(|a|-|b|)^2$ es no negativa.

periódico (con el período 2π), el teorema 10.11 afirmará la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier hacia la función prolongada del modo indicado, la cual *es uniforme en toda la recta infinita*.

3. Condiciones más simples de diferenciación término a término de una serie trigonométrica de Fourier. Demostremos, ante todo, el siguiente lema sobre el orden de los coeficientes trigonométricos de Fourier.

Lema 1. *Supongamos que una función $f(x)$ y todas las derivadas suyas hasta cierto orden m (m es un número entero no negativo) son continuas sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisfacen las condiciones*

$$\left.\begin{array}{c} f(-\pi) = f(\pi), \\ f'(-\pi) = f'(\pi), \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi). \end{array}\right\} \tag{10.46}$$

Supongamos, además, que la función $f(x)$ tiene sobre el segmento, $[-\pi, \pi]$ una derivada continua a trozos de orden $(m+1)$. Entonces, es convergente la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m \{|a_k| + |b_k|\}, \tag{10.47}$$

en la cual a_k y b_k son coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos con α_k y β_k los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f^{m+1}(x)$, al definir adicionalmente esta función de un modo arbitrario en un número finito de puntos, en los cuales no existe la derivada de $(m+1)$-ésimo orden de la función $f(x)$. Integrando las expresiones para α_k y β_k $(m+1)$ veces por partes, teniendo en cuenta la continuidad sobre todo el segmento $[-\pi, \pi]$ de la propia función $f(x)$ y de todas las derivadas suyas hasta el orden m, y tomando en consideración las relaciones (10.46), establezcamos la siguiente relación que existe entre los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $f^{m+1}(x)$ y la propia función $f(x)$ [1]:

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}\{|a_k| + |b_k|\}.$$

De este modo,

$$k^m\{|a_k| + |b_k|\} = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k},$$

[1]) Al integrar por partes, se debe dividir el segmento $[-\pi, \pi]$ en un número finito de segmentos parciales (que no tienen puntos interiores comunes), en cada uno de los cuales $f^{(m+1)}(x)$ es continua, y tomar en consideración que al sumar las integrales respecto de todos los segmentos parciales, todas las sustituciones dan cero.

y la convergencia de la serie (10.47) se deduce de las desigualdades elementales (10.44) y de la convergencia de las series (10.45), la primera de las cuales es convergente en virtud de la igualdad de Parseval para la función continua a trozos $f^{m+1}(x)$, y la segunda, en virtud del criterio de Cauchy—Maclaurin. El lema está demostrado.

Como corolario inmediato del lema 1 interviene el siguiente teorema.

Teorema 10.12. *Supongamos que una función $f(x)$ satisface las mismas condiciones que se aducen en el lema 1, y, además, $m \geqslant 1$. Entonces, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ puede diferenciarse término a término m veces sobre el segmento $[-\pi, \pi]$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea s cualquiera de los números $1, 2, \ldots, m$. Como resultado de la diferenciación s veces término a término de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$, se obtiene una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s \left\{ a_k \cos\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(kx - \frac{\pi s}{2}\right)\right\}. \qquad (10.48)$$

Notemos que para todo x del segmento $[-\pi, \pi]$ tanto la serie trigo nométrica de Fourier original, como también la serie (10.48) (con cualquier $s = 1, 2, \ldots, m$) puede mayorarse mediante la serie numérica convergente (10.47). De acuerdo con el criterio de Weierstrass (véase teorema 1.4 del cap. I), tanto la serie trigonométrica de Fourier original, como cada una de las series (10.48) (cuando $s = 1, 2, \ldots, m$) convergen uniformemente sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y esto asegura (en virtud del teorema 1.9 del capítulo I) la posibilidad de diferenciación m-múltiple término a término de la serie de Fourier. El teorema está demostrado.

§ 5. Condiciones más exactas de convergencia uniforme y condiciones de convergencia en un punto dado

1. Módulo de continuidad de una función. Clases de Hölder. Empecemos por aclarar los conceptos que caracterizan la suavidad de las funciones estudiadas y por determinar las clases de funciones en cuyos términos se enunciarán condiciones de convergencia de una serie trigonométrica de Fourier.

Sea $f(x)$ una función que está definida y es continua sobre el segmento $[a, b]$.

Definición 1. *Para cada $\delta > 0$, llamemos módulo de continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ la cota superior exacta del módulo de una diferencia $|f(x') - f(x'')|$ en el conjunto de todos los x' y x'' que pertenecen al segmento $[a, b]$ y satisfacen la condición $|x' - x''| < \delta$.*

Denotemos con un símbolo $\omega(\delta, f)$ el módulo de continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Así pues, por definición [1]:

$$\omega(\delta, f) = \sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x',\, x'' \in [a,b]}} |f(x') - f(x'')|.$$

Del teorema de Cantor se deduce inmediatamente (véase el teorema 10.2) que *el módulo de continuidad* $\omega(\delta, f)$ *de cualquier función* $f(x)$, *continua sobre el segmento* $[a, b]$, *tiende hacia cero, cuando* $\delta \to 0$ [2].

Sin embargo, para una función $f(x)$ arbitraria, que es solamente continua sobre el segmento $[a, b]$, no podemos decir nada acerca del *orden* de su módulo de continuidad $\omega(\delta, f)$ respecto de δ pequeño.

Mostremos ahora que *si la función* $f(x)$ *es diferenciable sobre el segmento* $[a, b]$ *y si su derivada* $f'(x)$ *está acotada en dicho segmento, el módulo de continuidad* $\omega(\delta, f)$ *de la función* $f(x)$ *en el segmento mencionado es de orden* $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ [3].

En efecto, del teorema de Lagrange [4] se deduce que para cualesquiera puntos x' y x'' del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ, encerrado entre x' y x'', tal que se verifique la igualdad

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x''|. \tag{10.49}$$

Por cuanto la derivada $f'(x)$ está acotada sobre el segmento $[a, b]$, se encontrará una constante M de tal índole que para todo x del segmento citado se verifique $|f'(x)| \leqslant M$, y, por lo tanto, $|f'(\xi)| \leqslant M$. De la última desigualdad y de (10.49) concluimos que $|f(x') - f(x'')| \leqslant M\delta$, cualesquiera que sean x' y x'' de $[a, b]$ que satisfagan la condición $|x - x''| < \delta$. Mas, esto significa precisamente que $\omega(\delta, f) \leqslant M\delta$, es decir, $\omega(\delta, f) = O(\delta)$.

Sea α cualquier número real del semisegmento $0 < \alpha < 1$.

Definición 2. *Diremos que una función* $f(x)$ *pertenece sobre el segmento* $[a, b]$ *a la clase de Hölder* C^{α} *con exponente* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *si el módulo de continuidad de la función* $f(x)$ *sobre el segmento* $[a, b]$ *es de orden* $\omega(\delta, f) = O(\delta^{\alpha})$.

Para expresar el hecho de que la función $f(x)$ pertenece en el segmento $[a, b]$ a la clase de Hölder C^{α}, se emplea corrientemente el símbolo: $f(x) \in C^{\alpha}[a, b]$.

---

[1] Recordemos que el símbolo $\in$ significa «pertenece a», de modo que la notación $x', x'' \in [a, b]$ dice que los puntos x' y x'' pertenecen al segmento $[a, b]$.

[2] Pues (en virtud del teorema de Cantor) para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$, que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ para todos los x' y x'' del segmento $[a, b]$ que satisfacen la condición $|x' - x''| < \delta$.

[3] Recordemos que el símbolo $\alpha = O(\delta)$ fue introducido en los caps. 3 y 4, v. I y significa la existencia de tal constante M que $|\alpha| \leqslant M\delta$.

[4] Véase el teorema 8.12, v. I.

Notemos ahora mismo que si una función $f(x)$ es diferenciable sobre el segmento $[a, b]$ y si su derivada está acotada en el mismo, dicha función a ciencia cierta pertenece sobre $[a, b]$ a la clase de Hölder C^1 [1]) (esta afirmación se deduce directamente de la relación $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ demostrada más arriba).

OBSERVACION. Sea $f(x) \in C^{\alpha}[a, b]$. La cota superior exacta de una fracción $\frac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^{\alpha}}$ sobre el conjunto de todos los x' y x'', que pertenecen al segmento $[a, b]$ y que no son iguales entre sí, la llaman *constante de Hölder* (o *coeficiente de Hölder*) de la función $f(x)$ (sobre el segmento $[a, b]$). La suma de la constante de Hölder de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$ con la cota superior exacta $|f(x)|$ en dicho segmento se denomina *norma de Hölder* de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y se denota con el símbolo $\|f\|_{C^{\alpha}[a, b]}$.

EJEMPLO. Una función $f(x) = \sqrt{x}$ pertenece sobre el segmento $[0, 1]$ a la clase $C^{1/2}$, puesto que para cualesquiera x' y x'' de $[0, 1]$ entrelazados por la condición $x' > x''$ se cumple una desigualdad $|f(x') - f'(x'')| = \sqrt{x' - x''}\,\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}} \leqslant \sqrt{x' - x''}$ (en este caso la *constante de Hölder*, que es cota superior exacta en $[0, 1]$ de la fracción $\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$, es igual a la unidad, y la *norma de Hölder* es igual a dos).

2. Expresión para una suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier. Sea $f(x)$ una función arbitraria, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Hagamos prolongar esta función periódicamente (con el período 2π) a toda la recta infinita [2]). Denotemos con $S_n(x, f)$ la suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en un punto x que es igual a

$$S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx). \tag{10.50}$$

[1]) Una clase de Hölder C^1 correspondiente al valor $\alpha = 1$ se denomina a menudo *clase de Lipschitz*.

[2]) Según el convenio aceptado aún en el § 1, una función continua a trozos $f(x)$ debe tener en cada punto x un valor igual a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo. Para que esta propiedad subsista también para la función $f(x)$ prolongada periódicamente (con el período 2π) a toda la recta infinita, hemos de exigir que para la función prolongada tenga lugar una relación $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$. De otras palabras, llamemos la función $f(x)$, definida en la recta infinita, *prolongación periódica* de la función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, si ambas funciones citadas coinciden en el intervalo $-\pi < x < \pi$ y si la función $f(x)$, definida en la recta infinita, satisface la condición de periodicidad $f(x + 2\pi) = f(x)$, y la condición $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$.

Introduciendo en el segundo miembro de (10.50) los valores de los coeficientes de Fourier [1])

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky\,dy, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \operatorname{sen} ky\,dy \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

y tomando en consideración las propiedades de la integral, llegamos a que para cualquier punto x de la recta infinita tenemos

$$S_n(x,\ f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos ky \cos kx + \operatorname{sen} ky \operatorname{sen} kx) \right] dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(y - x) \right] dy.$$

Al realizar en la última integral el cambio de variable $y = t + x$, obtenemos la siguiente expresión

$$S_n(x,\ f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right] dt. \qquad (10.51)$$

Notemos ahora que por cuanto cada una de las funciones $f(x+t$ y $\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right]$ es función periódica de la variable t de período 2π, toda la función subintegral en (10.51) (designémosla brevemente con $F(t)$) es función periódica de t de período 2π. Señalemos, además, que la integración en (10.51) se realiza por el segmento $[-\pi - x,\ \pi - x]$ cuya longitud es igual a 2π, es decir, igual al período de la función subintegral. Hagamos uso de la siguiente *afirmación* elemental: *si $F(t)$ es una función periódica de período 2π, integrable por cualquier segmento finito, todas las integrales de esta función por cualquiera de los segmentos cuya longitud es igual a 2π,*

---

[1]) Véanse las fórmulas (10.23).

son iguales, es decir, para todo x

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt\text{[1]}. \tag{10.52}$$

La igualdad (10.52) permite escribir la fórmula (10.51) del modo siguiente:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt. \tag{10.53}$$

Calculemos la suma que figura entre corchetes en (10.53). Con este fin notemos que para cualquier número k y todo valor de t se verifica la igualdad

$$2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\cos kt = \text{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \text{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)t.$$

Al sumar esta igualdad respecto de todos los números k, iguales a $1, 2, \ldots, n$, obtendremos

$$2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cdot\cos kt = \text{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \text{sen}\,\frac{t}{2}.$$

De aquí

$$2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right] = \text{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

y, por consiguiente,

$$\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right] = \frac{\text{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}}. \tag{10.54}$$

---

[1]) Para demostrar esta afirmación, resulta suficiente representar la integral $\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t)\,dt$, aprovechando la propiedad de aditividad, en forma de una suma de tres integrales

$$\int_{-\pi-x}^{-\pi} F(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt + \int_{\pi}^{\pi-x} F(t)\,dt$$

y señalar que con ayuda de la condición de periodicidad $F(t) = F(t+2\pi)$ y del cambio de variable $t = y - 2\pi$, la primera de las tres integrales citadas se reduce a la tercera tomada con el signo menos. En efecto,

$$\int_{-\pi-x}^{-\pi} F(t)\,dt = \int_{-\pi-x}^{-\pi} F(t+2\pi)\,dt = \int_{\pi-x}^{\pi} F(y)\,dy = -\int_{\pi}^{\pi-x} F(y)\,dy.$$

Al sustituir (10.54) en (10.53), obtendremos en definitiva la siguiente expresión para la suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt, \qquad (10.55)$$

que es válida en cualquier punto x de la recta infinita.

OBSERVACIÓN. De la fórmula (10.55) y de lo que todas las sumas parciales $S_n(x, 1)$ de la función $f(x) \equiv 1$ son iguales a la unidad [1]) se deduce la siguiente igualdad:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt. \qquad (10.56)$$

3. Módulo integral de continuidad de una función. Sea $f(x)$ una función integrable (en el sentido de la propia integral de Riemann) sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Hagamos prolongar esta función periódicamente (con el período de 2π) a toda la recta infinita.

Definición. *Para cualquier δ del semisegmento $0 < \delta \leqslant 2\pi$, llamemos módulo integral de continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ la cota superior exacta de una integral*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| \, dt$$

en el conjunto de todos los números y que satisfacen la condición $|u| \leqslant \delta$.

Denotemos con el símbolo $I(\delta, f)$ el módulo integral de continuidad de la función $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$.

Así pues, por definición,

$$I(\delta, f) = \sup_{|u| \leqslant \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| \, dt.$$

Es válida la siguiente afirmación.

Lema 2. *Si una función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período 2π) prolongada a toda la recta infinita, el módulo integral de continuidad de esta función sobre dicho segmento $I(\delta, f)$ tiende a cero cuando $\delta \to 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. De acuerdo con el teorema 10.10 (sobre el carácter cerrado de un sistema trigonométrico), existe para la función $f(x)$ un polinomio trigonométrico $T(x)$

[1]) Pues la magnitud (10.55) para la función $f(x) \equiv 1$ es igual a la suma 10.50), en la que $a_0 = 2$, $a_K = b_k = 0$, cuando $k = 1, 2, \ldots$

de tal índole que

$$\| f - T \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2 \, dt} < \varepsilon/3 \sqrt{2\pi},$$

y, por eso, en virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski [1]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)| \, dt \leqslant \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T(t)]^2 \, dt \int_{-\pi}^{\pi} dt} < \varepsilon/3. \qquad (10.57)$$

De la desigualdad (10.57) y de lo que $f(t)$ y $T(t)$ son funciones periódicas de período 2π, concluimos que para todo número u

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)| \, dt < \varepsilon/3. \qquad (10.58)$$

Por cuanto el módulo de una suma de tres magnitudes no sobrepasa la suma de módulos de estas magnitudes, para cualquier número u se cumple la desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| \, dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - T(t+u)| \, dt +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} + |T(t+u) - T(t)| \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t) - f(t)| \, dt. \qquad (10.59)$$

Resta por notar que debido a la continuidad del polinomio trigonométrico y al teorema de Cantor (véase teorema 1.2, v. II), para $\varepsilon > 0$ fijo se encontrará un $\delta > 0$ tal que con $|u| \leqslant \delta$

$$|T(t+u) - T(t)| < \varepsilon/6\pi,$$

cualquiera que sea t de $[-\pi, \pi]$, por lo cual

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u) - T(t)| \, dt \leqslant \varepsilon/3. \qquad (10.60)$$

Cotejando la desigualdad (10.59) con las (10.57), (10.58) y (10.60), llegamos a que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)| \, dt < \varepsilon \qquad (10.61)$$

para todos los u, para los cuales $|u| \leqslant \delta$. El lema está demostrado.

---

[1] Véase la desigualdad (1.33).

OBSERVACIÓN AL LEMA 2. Es fácil ver que *el módulo integral de continuidad* $I(\delta, f)$ *tiende a cero, cuando* $\delta \to 0$, *no sólo para cualquier función continua a trozos* $f(x)$, *sino también para toda función* $f(x)$ *integrable (en el propio sentido de Riemann) sobre el segmento* $[-\pi, \pi]$. Para demostrar esto, fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y notemos que, en virtud de la integrabilidad de $f(t)$ sobre un segmento $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, existe tal $\delta_0 > 0$ que, para *cualquier* partición del segmento $[-\pi, \pi]$ en segmentos parciales de longitud inferior a δ_0, la diferencia entre las sumas superior e inferior de la función $f(t)$ sea menos de $\varepsilon/4$. Fijamos una partición T del segmento $[-\pi, \pi]$ en segmentos parciales *de una misma* longitud $\delta < \delta_0$. De lo que $f(t)$ es una función periódica se deduce que para todo $|u| \leqslant \delta$ y para la partición fijada T del segmento $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ la diferencia entre las sumas superior e inferior de la función $f(t+u)$ (siendo δ suficientemente pequeño) por lo menos no sobrepasará $\varepsilon/2$. Mas, de aquí proviene que para la partición fija T la diferencia entre las sumas superior e inferior de la función $[f(t+u) - f(t)]$ será menos de $\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\varepsilon$, cualquiera que sea $|u| \leqslant \delta$. Para la partición fija T, denotemos las sumas superior e inferior de la función $[f(t+u) - f(t)]$ con S y s, respectivamente, y las sumas superior e inferior de la función $|f(t+u) - f(t)|$, con $\overline{S}$ y $\overline{s}$, respectivamente. En el § 5 del cap. 1, v. II se ha establecido que, cualquiera que sea la partición, las sumas superior e inferior S y s de la propia función y las sumas superior e inferior $\overline{S}$ y $\overline{s}$ del módulo de la función citada están entrelazadas mediante una relación $\overline{S} - \overline{s} \leqslant S - s$. De este modo, para la partición fija T se cumple la desigualdad $\overline{S} - \overline{s} < 3\varepsilon/4$. Mas, esto es un testimonio de que para la partición fija T la diferencia entre cualquier suma integral de la función $|f(t+u) - f(t)|$ y la integral $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt$ es menos del número $3\varepsilon/4$. Si en esta suma integral elegimos todos los puntos interiores ξ_k en el centro de los correspondientes segmentos parciales de longitud δ y exigimos que el número u satisfaga la desigualdad $|u| < \delta/2$, ambos puntos ξ_k y $\xi_k + u$ pertenecerán al k-ésimo segmento parcial, y, por eso, la diferencia $|f(\xi_k + u) - f(\xi_k)|$ no sobrepasará la oscilación $M_k - m_k$ de la función $f(t)$ sobre el k-ésimo segmento parcial [1]. Más en este caso, toda la suma integral mencionada no excederá la suma $\sum (M_k - m_k)\,\Delta t_k$, igual a la diferencia entre las sumas superior e inferior de la función $f(t)$ para la partición T, es decir, no sobrepasará el número $\varepsilon/4$. De aquí proviene que, para $|u| < \delta/2$, la integral $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u) - f(t)|\, dt$ no es mayor que el número ε, y esto demuestra precisamente que $I(\delta, f)$ tiende a cero cuando $\delta \to 0$.

He aquí una serie de corolarios que el lema 2 nos presta para la exposición ulterior.

Corolario 1. *Si $f(x)$ es una función continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita, y si x es cualquier punto fijo del segmento $[-\pi, \pi]$, se encontrará, para cualquier $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tal que se*

---

[1]) Con M_k y m_k denotamos las cotas exactas superior e inferior de la función $f(t)$ sobre el k-ésimo segmento parcial.

cumpla una desigualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt<\varepsilon \tag{10.62}$$

para $|u|<\delta$.

DEMOSTRACIÓN. Al cambiar la variable $\tau = x+t$ en la integral que figura en el primer miembro de (10.62):

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau$$

y al constatar que (en virtud de la igualdad (10.52)),

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau,$$

nos convencemos de que la desigualdad (10.62) es un corolario de (10.61).

Corolario 2. *Si cada una de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita, la función*

$$I(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,dt$$

será función continua de x sobre el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

DEMOSTRACIÓN. Sea x un punto cualquiera del segmento $[-\pi, \pi]$. Entonces,

$$I(x+u)-I(x)=\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u)-f(x+t)]\,g(t)\,dt,$$

y, puesto que la función $g(t)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ satisface en este segmento la condición acotada $|g(t)| \leqslant M$, tenemos

$$|I(x+u)-I(x)| \leqslant M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt,$$

por lo cual (en virtud de (10.62)) para todo $\varepsilon>0$

$$|I(x+u)-I(x)|<\varepsilon \text{ cuando } |u|<\delta(\varepsilon).$$

La continuidad de $I(x)$ en el punto x queda demostrada.

Corolario 3. *Si cada una de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período* *de 2π) prolongada a toda la recta infinita, los coeficientes trigonométricos de Fourier de la función $F(x, t) = f(x + t)\,g(t)$, al desarrollar la última según la variable t,*

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\cos nt\,dt, \qquad (10.63)$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt \qquad (10.64)$$

convergen hacia cero (para $n \to \infty$) uniformemente con relación a x en el segmento $[-\pi, \pi]$ (y, por lo tanto, también en toda la recta infinita).

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier punto fijo x del segmento $[-\pi, \pi]$, la función $F(x, t) = f(x + t)\,g(t)$ es función continua a trozos del argumento t sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y, por tanto, para esta función se verifica la igualdad de Parseval [1])

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2(x) + b_k^2(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\,g^2(t)\,dt. \qquad (10.65)$$

De la igualdad (10.65) proviene la convergencia de la serie en el primer miembro de ella en cada punto fijo x del segmento $[-\pi, \pi]$. Ya que la serie citada se compone de términos no negativos, resulta, en virtud del teorema de Dini [2]), que para demostrar la convergencia uniforme en el segmento $[-\pi, \pi]$ de dicha serie, basta probar que tanto cada función $a_n(x)$ y $b_n(x)$, como también la suma de la serie (10.65) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\,g^2(t)\,dt$ son todas funciones continuas de x sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, mas esto se deduce en seguida del corolario antecedente (basta tomar en consideración que el cuadrado de una función continua a trozos es función continua a trozos y que $\cos nt$ y $\mathrm{sen}\,nt$ son funciones continuas para cada número n fijo).

Corolario 4. *Si cada una de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita, una sucesión*

$$c_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\,\mathrm{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t\,dt \qquad (10.66)$$

converge hacia cero uniformemente con relación a x sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ (y, por tanto, en toda la recta infinita).

---

[1]) Véase corolario 1 del p. 3, § 3 de este capítulo.
[2]) Véase teorema 1.5 (formulación en términos de las series).

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar en consideración que

$$\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t=\cos nt\cdot\operatorname{sen}\frac{t}{2}+\operatorname{sen} nt\cdot\cos\frac{t}{2},$$

y aplicar el corolario antecedente, tomando en (10.63) en lugar de $g(t)$ una función $g(t)\cdot\operatorname{sen}\frac{t}{2}$, y en (10.64), en lugar de $g(t)$ una función $g(t)\cdot\cos\frac{t}{2}$.

4. Principio de localización. En este punto demostraremos que la cuestión de si es convergente o divergente la serie trigonométrica de Fourier de una función $f(x)$, continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y periódica (de período 2π), en un punto dado x_0 se resuelve *sólo a base de comportamiento de la función $f(x)$ en un entorno del punto x_0 tan pequeño como se quiera*. Esta propiedad notable de la serie trigonométrica de Fourier suele llamarse *principio de localización*.

Empecemos por demostrar un lema importante.

***Lema 3* (de Riemann).** *Si una función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita y si dicha función se anula en cierto segmento $[a, b]$* [1]*, para cualquier número positivo δ, inferior a $\frac{b-a}{2}$, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ es uniformemente convergente sobre el segmento $[a+\delta, b-\delta]$ hacia cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea δ un número positivo arbitrario inferior a $\frac{b-a}{2}$. La suma parcial de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en un punto arbitrario x de la recta infinita se define mediante la igualdad (10.55). Suponiendo

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}} & \text{para } \delta\leqslant|t|\leqslant\pi,\\ 0 & \text{para } |t|<\delta\end{cases}\tag{10.67}$$

y teniendo presente que $f(x+t)$ es igual a cero a condición de que x pertenece al segmento $[a+\delta, b-\delta]$, y t pertenece al segmento $|t|\leqslant\delta$ [2], podemos reescribir la igualdad (10.55) para cada punto x del segmento $[a+\delta, b-\delta]$ de una manera siguiente:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt.$$

[1]) El segmento $[a, b]$ es sumamente arbitrario. En particular, puede ocurrir que este segmento no se contenga íntegramente en $[-\pi, \pi]$.

[2]) En virtud de que la función $f(x)$ es nula en todo el segmento $[a, b]$.

Nos queda tomar en consideración que la sucesión en el segundo miembro de la última igualdad converge, en virtud del corolario 4 del p. 3, hacia cero uniformemente con relación a x en toda la recta infinita. El lema está demostrado.

Los siguientes dos teoremas constituyen corolarios inmediatos del lema demostrado.

Teorema 10.13. *Supongamos que una función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente prolongada (con el período de 2π) a toda la recta infinita, y sea $[a, b]$ un segmento. Para que la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converja (hacia esta función) uniformemente sobre un segmento $[a+\delta, b-\delta]$ con cualquier δ positivo inferior a $\frac{b-a}{2}$, es suficiente que exista una función $g(x)$, continua a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ y periódica (de período 2π), que posea una serie trigonométrica de Fourier uniformemente convergente sobre el segmento $[a, b]$ y que sea coincidente con la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$.*

DEMOSTRACION. Aplicando el lema 3 a la diferencia $[f(x) - g(x)]$, llegamos a que la serie trigonométrica de Fourier de la diferencia $[f(x) - g(x)]$ converge, con cualquier δ del intervalo $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$, hacia cero uniformemente en el segmento $[a+\delta, b-\delta]$ de aquí y de la convergencia uniforme en el segmento $[a, b]$ de la serie trigonométrica de Fourier de la función $g(x)$ se deduce la convergencia uniforme en el segmento $[a+\delta, b-\delta]$ de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$. El hecho de que la última serie converge en el segmento $[a+\delta, b-\delta]$ *precisamente hacia la función* $f(x)$ se deduce inmediatamente del corolario 5 del p. 3, § 3 de este capítulo. El teorema está demostrado.

Teorema 10.14. *Supongamos que una función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita, y sea x_0 un punto de la recta infinita. Para que la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converja en el punto x_0, es suficiente que exista una función $g(x)$, continua a trozos en el segmento $[-\pi, \pi]$ y periódica (de período 2π), que posea una serie trigonométrica de Fourier uniformemente convergente en el punto x_0 y que sea coincidente con $f(x)$ en un δ-entorno del punto x_0 tan pequeño como se quiera.*

DEMOSTRACION. Basta aplicar el lema 3 a la diferencia $[f(x) - g(x)]$ en el segmento $\left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right]$ y tener en cuenta que de la convergencia en el punto x_0 de las series trigonométricas de las funciones $[f(x) - g(x)]$ y $g(x)$ se deduce que en este punto converge también la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$. El teorema está demostrado.

El teorema 10.14 no establece un tipo particular de las condiciones que aseguren la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en el punto x_0. Sólo demuestra que estas condiciones se determinan únicamente por el comportamiento de $f(x)$ en un entorno del punto x_0 tan pequeño como se quiera (es decir, tienen carácter *local*).

5. Convergencia uniforme de una serie trigonométrica de Fourier para las funciones de la clase de Hölder. En este punto y en los siguientes preocupémonos de la precisión de las condiciones que aseguran la convergencia uniforme y convergencia en un punto dado de una serie trigonométrica de Fourier.

Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 10.15. *Si una función $f(x)$ pertenece sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ a la clase de Hölder C^α con cualquier exponente α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ positivo, y si, además, $f(-\pi) = f(\pi)$, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge (hacia esta función) uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$.*

DEMOSTRACIÓN. Convengamos en considerar, como antes, que la función $f(x)$ está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita. La condición $f(-\pi) = f(\pi)$ asegura la pertenencia de la función prolongada del modo citado a la clase de Hölder C^α en toda la recta infinita.

Sea x un punto cualquiera del segmento $[-\pi, \pi]$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad (10.56) por $f(x)$ y sustrayendo la igualdad que se obtiene de (10.55), obtenemos una igualdad

$$S_n(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \, dt. \quad (10.68)$$

De la condición de que $f(x)$ pertenece a la clase de Hölder C^α se deduce la existencia de una constante M tal que

$$| f(x+t) - f(x) | \leqslant M \cdot t^\alpha \quad (10.69)$$

en todo caso para cualesquiera x y todos los t del segmento $[-\pi, \pi]$.

Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario, y a base de éste, un $\delta > 0$ que satisfaga la desigualdad

$$\frac{M}{\alpha} \cdot \delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (10.70)$$

Al dividir el segmento $[-\pi, \pi]$ en la suma del segmento $|t| \leqslant \delta$ y el conjunto $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$, atribuyamos a la igualdad (10.68) la forma

$$S_n(x, f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt - \frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt. \tag{10.71}$$

Para estimar la primera de las integrales en el segundo miembro de (10.71), aprovechamos la desigualdad (10.69), teniendo presente que $\frac{1}{2\left|\operatorname{sen} \frac{t}{2}\right|} \leqslant \frac{\pi}{2|t|}$ para todos los t del segmento $[-\pi, \pi]$ [1]. Llegamos a que para todo número n y cualquier x del segmento $[-\pi, \pi]$

$$\left| \int\limits_{|t| \leqslant \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|t| \leqslant \delta} |f(x+t) - f(x)| \frac{\left|\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t\right|}{2\left|\operatorname{sen} \frac{t}{2}\right|} \cdot dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\pi}{2} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} |t|^{\alpha-1} dt = M\pi \int\limits_0^\delta t^{\alpha-1} dt = \frac{M\pi}{\alpha} \cdot \delta^\alpha.$$

De aquí, en virtud de (10.70), para todo número n y todo x del segmento $[-\pi, \pi]$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} [f(x+t) - f(x)] \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.72}$$

La segunda de las integrales en el miembro derecho de (10.71) se escribe, con ayuda de la función (10.67) continua a trozos sobre el

[1]) La desigualdad citada se deduce inmediatamente de lo que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *decrece*, al variar x de 0 a $\pi/2$, desde 1 hasta $2/\pi$. El hecho de que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ decrece se deduce, a su vez, de lo que $\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0$, siempre cuando $0 < x < \pi/2$, pues $x < \operatorname{tg} x$ para $0 < x < \pi/2$ (véase p. 6, § 5, cap. 4, v. I).

segmento $[-\pi, \pi]$, en la forma

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t.$$

En virtud del corolario 4 del p. 3, el segundo miembro de la última igualdad converge hacia cero (para $n \to \infty$) uniformemente con relación a x en el segmento $[-\pi, \pi]$. Por eso, para $\varepsilon > 0$ fijo existe un número N_1 tal que

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (10.73)$$

para todos $n \geqslant N_1$ y cualesquiera x del segmento $[-\pi, \pi]$.

Para estimar la última integral en el segundo miembro de (10.71) señalemos que con ayuda de la función continua a trozos (10.67) esta integral se escribe en la forma

$$\frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t) \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t \, dt.$$

La integral en el segundo miembro de la última igualdad converge hacia cero (para $n \to \infty$) debido al mismo corolario 4 del p. 3 (basta aplicar el corolario citado a la función $f(x) \equiv 1$). Teniendo presente, además, que la función $f(x)$ está acotada en todo caso sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, llegamos a que para un $\varepsilon > 0$ fijo arbitrario existe un número N_2 tal que

$$\left| \frac{f(x)}{\pi} \int\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (10.74)$$

para todos $n \geqslant N_2$ y cualesquiera x del segmento $[-\pi, \pi]$.

Al denotar con N el mayor de dos números N_1 y N_2, tendremos, en virtud de (10.71)—(10.74), que para un $\varepsilon > 0$ fijo arbitrario existe un número N tal que

$$|S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon$$

para todos $n \geqslant N$ y cualesquiera x del segmento $[-\pi, \pi]$. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Es evidente que en las condiciones del teorema 10.15 la serie trigonométrica de Fourier converge uniformemente no sólo en el segmento $[-\pi, \pi]$, sino también *uniformemente en toda la recta infinita* (hacia una función que es prolongación periódica (con el período de 2π) de $f(x)$ a toda la recta infinita).

OBSERVACIÓN 2. Notemos que al estimar las integrales (10.73) y (10.74), se ha aprovechado sólo la continuidad a trozos (y el carácter acotado que desprende de la continuidad) de la función $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ (no se usaba, al estimar dichas integrales, que $f(x)$ pertenece a la clase de Hölder).

OBSERVACIÓN 3. Surge, naturalmente, una pregunta de si podemos debilitar en el teorema 10.15 la exigencia de suavidad de la función $f(x)$, conservando intacta la afirmación de esto teorema sobre la convergencia uniforme en el segmento $[-\pi, \pi]$ de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$.

Recordemos que la pertenencia de $f(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ a la clase de Hölder C^α significa, por definición, que el módulo de continuidad de $f(x)$ en dicho segmento es de orden

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha).$$

Demos a conocer sin demostración el así llamado *teorema de Dini—Lipschitz*, el cual afirma que *para la convergencia uniforme en el segmento $[-\pi, \pi]$ de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$, es necesario que esta función satisfaga la condición $f(-\pi) = f(\pi)$ y que su módulo de continuidad sobre $[-\pi, \pi]$ sea de orden*

$$\omega(\delta, f) = \left(\frac{1}{\ln 1/\delta}\right),$$

es decir, represente, para $\delta \to 0$, una infinitésima de orden más elevado que $\frac{1}{\ln 1/\delta}$.

El teorema de Dini—Lipschitz contiene una condición *definitiva* (en términos del módulo de continuidad de una función) de convergencia uniforme de la serie trigonométrica de Fourier, pues se puede construir una función $f(x)$ que satisfaga la condición $f(-\pi) = f(\pi)$ con un módulo de continuidad que tenga sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ el orden $O\left(\frac{1}{\ln 1/\delta}\right)$, y con la serie trigonométrica de Fourier que sea divergente sobre un conjunto de puntos siempre denso en el segmento $[-\pi, \pi]$ [1].

En las condiciones del teorema 10.15, la función $f(x)$, siendo prolongada periódicamente (con el período de 2π), resultaba ser perteneciente a la clase de Hölder C^α *en toda la recta infinita*. Naturalmente, surge una cuestión de comportamiento de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ la que pertenece a la clase de Hölder *sólo en cierto segmento* $[a, b]$, satisfaciendo sólo la exigencia corriente de continuidad a trozos en todo punto fuera del segmento mencionado.

La respuesta a esta pregunta la ofrece el siguiente teorema.

---

[1]) La demostración del teorema de Dini—Lipschitz y construcción del ejemplo recién mencionado se pueden encontrar en el libro «Trigonometric Series» de A. Zygmund, v. I, Cambridge, 1959.

Teorema 10.16. *Sea $f(x)$ una función continua a trozos sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ que está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita. Supongamos, además, que en cierto segmento $[a, b]$ de longitud inferior a 2π, dicha función pertenece a la clase de Hölder C^α con el exponente positivo α $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Entonces, para cualquier δ del intervalo $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ es uniformemente convergente (hacia $f(x)$) sobre el segmento $[a + \delta, b - \delta]$.*

DEMOSTRACIÓN. Construyamos la gráfica de una función $g(x)$ que coincide con $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$, y en el $[b, a + 2\pi]$

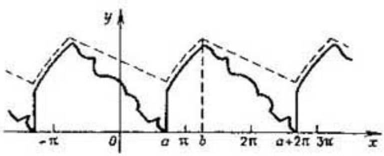

Fig. 10.1.

es una función lineal del tipo $Ax + B$, que se convierte en $f(b)$, cuando $x = b$, y en $f(a)$, cuando $x = a + 2\pi$ [1]) y que está periódicamente (con el período de 2π) prolongada del segmento $[a, a + 2\pi]$ a toda la recta infinita (en la fig. 10.1 la línea gruesa expone la gráfica de la función $f(x)$, y la rayada, la gráfica de $g(x)$ construida a base de $f(x)$).

Evidentemente, la función construida $g(x)$ satisface la condición $g(-\pi) = g(\pi)$ y pertenece a la clase de Hölder C^α (con el mismo exponente positivo α que tiene $f(x)$) en toda la recta infinita [2]). En virtud del teorema 10.15 y de la observación 1, la serie trigonométrica de Fourier de la función $g(x)$ converge uniformemente en toda la recta infinita, por lo cual, en vista del teorema 10.13, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge (hacia esta función) uniformemente sobre el segmento $[a + \delta, b - \delta]$, cualquiera que sea δ del intervalo $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$. El teorema está demostrado.

[1]) La condición de conversión de la función $Ax + B$ en $f(b)$, para $x = b$, y en $f(a)$, para $x = a + 2\pi$ define unívocamente las constantes A y B: $A = \frac{f(a) - f(b)}{a + 2\pi - b}$, $B = \frac{(a + 2\pi) f(b) - bf(a)}{a + 2\pi - b}$.

[2]) Basta tener presente que $g(x)$ es siempre continua y que una función lineal tiene derivada acotada, por lo cual pertenece a la clase de Hölder C^α, cualquiera que sea $\alpha \leqslant 1$.

OBSERVACIÓN 4. La afirmación del teorema 10.16 queda válid también para el segmento $[a, b]$ cuya longitud es *igual* a 2π (e decir, para un caso de que $b = a + 2\pi$), mas, al demostrar en est caso el teorema, se debe tomar, fijando δ arbitrario del interval $0 < \delta < \pi$, una función $g(x)$ que coincida con $f(x)$ en un segment $\left[a + \frac{\delta}{2}, a + 2\pi - \frac{\delta}{2}\right]$, sea lineal en el segmento $\left[a + 2\pi - \frac{\delta}{2}, a + 2\pi + \frac{\delta}{2}\right]$ y esté periódicamente (con el período de 2π) prolongada del segmento $\left[a + \frac{\delta}{2}, a + 2\pi + \frac{\delta}{2}\right]$ a toda la recta infinita. En cambio, si el segmento $[a, b]$ tiene longitud *superior* a 2π, de la pertenencia de $f(x)$ a la clase de Hölder C^{α} en tal segmento y de la condición de periodicidad de $f(x)$ (con el períod de 2π) se deduce que $f(x)$ pertenece a la clase C^{α} en toda la recta infinita, es decir, en este caso llegamos al teorema 10.15.

6. Sobre la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de una función hölderiana a trozos.

Definición 1. *Llamemos una función $f(x)$ hölderiana a trozos sobre un segmento $[a, b]$, si esta función es continua a trozos en $[a, b]$, y si el segmento $[a, b]$ se divide, mediante un número finito de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, en segmentos parciales $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, en cada uno de los cuales dicha función pertenece a la clase de Hölder C^{α_k} con cierto exponente positivo α_k $(0 < \alpha_k \leqslant 1)$, con la particularidad de que, al definir la clase de Hölder sobre un segmento parcial $[x_{k-1}, x_k]$, a título de valores de la función en los extremos del segmento han de tomarse los valores límites $f(x_{k-1} + 0)$ y $f(x_k - 0)$* [1].

Dicho de otro modo, el dominio de definición de toda función hölderiana a trozos se descompone en un número finito de segmentos, privados de puntos interiores comunes, en cada uno de los cuales la función en consideración pertenece a la clase de Hölder con cierto exponente positivo.

Cada uno de estos segmentos se denominará *sección de suavidad* de la función.

Definición 2. *Llamemos una función $f(x)$ suave a trozos sobre el segmento $[a, b]$, si esta función es continua a trozos en $[a, b]$ y tiene en el mismo segmento derivada continua a trozos* [2]*, es decir, si la función $f(x)$ es continua a trozos sobre el segmento $[a, b]$ y su derivada $f'(x)$ existe es continua en todo punto del segmento citado, a excepción,*

[1] Los valores de una función hölderiana a trozos (al igual que de cualquier función continua a trozos) deben ser iguales en cada punto x_k a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo en el punto citado, es decir, ha de verificarse la igualdad $f(x_k) = 1/2\,[f(x_k - 0) + f(x_k + 0)]$.

[2] Véase difinición 1 del p. 2, § 4 de este capítulo.

quizás, de un número finito de puntos, en cada uno de los cuales la función $f'(x)$ tiene valores límites finitos derecho e izquierdo.

Está claro que toda función suave a trozos sobre el segmento $[a, b]$ es hölderiana a trozos sobre este segmento.

Tiene lugar el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 10.17.** *Supongamos que una función $f(x)$, hölderiana a trozos sobre un segmento $[-\pi, \pi]$, está periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta numérica. Entonces, la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ converge en cada punto x de la recta infinita al valor de $f(x) = 1/2\,[f(x-0) + f(x+0)]$, con la particularidad de que la convergencia de esta índole es uniforme en cada segmento fijo dispuesto en el interior de la sección de suavidad de la función $f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. La afirmación del teorema acerca de la convergencia uniforme sobre todo segmento fijo, dispuesto en el interior de la sección de suavidad, se deduce inmediatamente del teorema 10.16, de donde se deduce también la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en cada punto *interior* de la sección de suavidad de la función $f(x)$ [1]. Resta por demostrar la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$ en cada punto de empalme de dos secciones de suavidad.

Fijemos uno de tales puntos y denotémoslo con x. Entonces, se encontrarán tales constantes M_1 y M_2 que, para cualquier t positivo suficientemente pequeño, se verifique la desigualdad

$$|f(x+t) - f(x+0| \leqslant M_1 t^{\alpha_1} \quad (0 < \alpha_1 \leqslant 1), \qquad (10.75)$$

y para cualquier t negativo suficientemente pequeño se verifique la desigualdad

$$|f(x+t) - f(x-0)| \leqslant M_2 \cdot |t|^{\alpha_2} \quad (0 < \alpha_2 \leqslant 1). \qquad (10.76)$$

Denotemos con M el mayor de los números M_1 y M_2, y con α, el mayor de los números α_1 y α_2. Entonces, cuando $|t| \leqslant 1$, en el segundo miembro de cada una de las desigualdades (10.75) y (10.76) podemos escribir $M \cdot |t|^{\alpha}$.

Fijamos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, y, a base de ε, un $\delta > 0$ que satisface la desigualdad (10.70) y es tan pequeño que, para $|t| \leqslant \delta$, son válidas ambas desigualdades (10.75) y (10.76), de modo que podemos escribir el número $M \cdot |t|^{\alpha}$ en el segundo miembro de estas desigualdades. Al repetir los razonamientos aducidos en la demostración del teorema 10.15, llegaremos a la igualdad (10.71) y para demostrar el teorema, nos queda convencerse de que en el punto fijo x son válidas las estimaciones (10.72), (10.73) y (10.74). En la observación 2, p. 5 se ha notado que las estimaciones (10.73) y (10.74) son válidas para cualquier función que sea *solamente*

[1]) Pues cada punto interior de la sección de suavidad puede ser incluido en un segmento dispuesto en el interior de dicha sección.

continua a trozos y periódica (*de período* 2π). Resta por demostrar la validez para todos los números n de la estimación (10.72).

Teniendo presente que $f(x) = 1/2\,[f(x-0) + f(x+0)]$ y que [1])

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\delta} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\delta}^{0} \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt,$$

podemos reescribir la integral en el primer miembro de (10.72) del modo siguiente:

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} [f(x+t)-f(x)]\,\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+t)-f(x+0)]\,\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0} [f(x+t)-f(x-0)]\,\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt. \qquad (10.77)$$

Para estimar las integrales que figuran en el segundo miembro de (10.77), hagamos uso de las desigualdades (10.75) y (10.76), escribiendo en el segundo miembro de estas desigualdades el número $M\,|\,t\,|^{\alpha}$. Al tomar en consideración la estimación $\frac{1}{2\left|\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right|} \leqslant$

---

[1]) En vista de que una función $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$ es *par*, es decir, para cualquier t satisface la condición $\varphi(-t) = \varphi(t)$. Es fácil convencerse de que para tal función $\int_{0}^{\delta}\varphi(d)\,dt = \int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt$ (basta realizar $t = -\tau$ en una de estas integrales la sustitución), y, por eso,

$$\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt.$$

$\leqslant \frac{\pi}{2|t|}$ (para $|t| \leqslant \pi$), ya empleada en la demostración del teorema 10.5, y la desigualdad (10.70), tendremos

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \delta} |f(x+t) - f(x)| \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2} \left[\int\limits_0^{\delta} t^{\alpha-1}\, dt + \int\limits_{-\delta}^{0} |t|^{\alpha-1}\, dt \right] = \frac{M}{\alpha} \cdot \delta^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La estimación (10.72) y, junto con ella, el teorema quedan demostrados.

***Corolario* 1.** *La afirmación del teorema 10.17 será con mayor razón válida, si en su formulación se toma, en lugar de la función hölderiana a trozos, una función suave a trozos (sobre el segmento $[-\pi, \pi]$), periódicamente (con el período de 2π) prolongada a toda la recta infinita.*

Para poder formular un corolario más, introduzcamos una noción nueva. Sea $0 < \alpha \leqslant 1$.

***Definición* 3.** *Diremos que una función $f(x)$ satisface en un punto dado x por la derecha (por la izquierda) la condición de Hölder de orden α, si la función $f(x)$ tiene en el punto x el valor límite derecho (izquierdo), y si existe tal constante M que con todo t positivo (negativo), suficientemente pequeño, se cumple la desigualdad*

$$\frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t^{\alpha}} \leqslant M \quad \left(\frac{|f(x+t) - f(x-0)|}{|t|^{\alpha}} \leqslant M \right).$$

Es evidente que si la función $f(x)$ tiene en el punto dado x derivada a la derecha (a la izquierda) entendida como un límite $\lim\limits_{t \to 0+0} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ $\left(\lim\limits_{t \to 0-0} \frac{f(x+t) - f(x-0)}{t} \right)$, la función $f(x)$ a ciencia cierta satisface en este punto x por la derecha (por la izquierda) la condición de Hölder de cualquier orden $\alpha \leqslant 1$.

***Corolario* 2 (*condición de convergencia de una serie trigonométrica de Fourier en un punto dado*).** *Para que una serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x)$, continua a trozos y periódica (de período 2π) converja en un punto dado x de la recta infinita, es suficiente que la función $f(x)$ satisfaga en el punto x por la derecha la condición de Hölder de algún orden positivo α_1, y en el punto x por la izquierda, la condición de Hölder de algún orden positivo α_2 (y, con mayor razón, es suficiente que la función $f(x)$ tenga en el punto x las derivadas a la derecha y a la izquierda).*

DEMOSTRACIÓN. Basta señalar que de lo que la función $f(x)$ satisface en el punto x por la derecha (por la izquierda) la condición de Hölder de orden α_1 (de orden α_2) se deduce la existencia de una constante M_1 (constante M_2) tal que para todo t positivo (negativo), suficientemente pequeño, quede válida la desigualdad (10.75) (desigualdad 10.76). Pero, la demostración expuesta del teorema 10.17 sólo aprovecha las desigualdades (10.75) y (10.76), y la continuidad a trozos y la periodicidad de $f(x)$.

EJEMPLO. Sin calcular los coeficientes de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{para } -\pi\leqslant x<0,\\ 1/2 & \text{para } x=0,\\ \sqrt{x} & \text{para } 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

podemos afirmar que la serie trigonométrica de Fourier de esta función converge en el punto $x=0$ hacia el valor 1/2, pues la función $f(x)$ tiene en este punto derivada a la izquierda y satisface en el mismo por la derecha la condición de Hölder de orden $\alpha_2=1/2$.

7. Sumabilidad de las series trigonométricas de Fourier de una función continua mediante los promedios. Ya se ha notado que la serie trigonométrica de Fourier de una función siempre continua y periódica (de período 2π) puede ser divergente (véase el p. 1). Demostremos que esta serie es, no obstante, siempre sumable (uniformemente en toda la recta infinita) por el método de Cesaro (o mediante los promedios) [1]).

Teorema 10.18 (teorema de Fejér [2])). *Si una función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y satisface la condición $f(-\pi)=f(\pi)$, el promedio de las sumas parciales de su serie trigonométrica de Fourier*

$$\sigma_n(x, f)=\frac{S_0(x, f)+S_1(x, f)+\ldots+S_{n-1}(x, f)}{n}$$

converge (hacia esta función) uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$ (y en un caso en que la función de período 2π está prolongada a toda la recta infinita, uniformemente en toda la recta infinita).

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad (10.55) para $S_n(x, f)$ obtenemos

$$\sigma_n(x, f)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right]dt. \qquad (10.78)$$

Para calcular la suma que en (10.78) figura entre corchetes, sumemos una identidad

$$2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\cos kt-\cos(k+1)t$$

respecto de todos los $k=0, 1, \ldots, n-1$. Obtendremos, como resultado,

$$2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)t=1-\cos nt=2\operatorname{sen}^2\frac{nt}{2}.$$

---

[1]) Véase Complemento 3 al cap. 4, v. II.

[2]) L. Fejér (1880—1959), matemático húngaro. Demostró el teorema en 1904.

Con ayuda de la última igualdad, la expresión (10.78) se reduce a la forma

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}\, dt. \tag{10.79}$$

De (10.79) se deduce inmediatamente que

$$\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}\, dt \quad 1, \tag{10.80}$$

pues, el primer miembro es (10.80) es igual al promedio de las sumas parciales de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x) \equiv 1$, y todas las sumas parciales mencionadas son idénticamente iguales a la unidad (véase p. 2).

Fijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. De conformidad con el teorema de Weierstrass 10.9, existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ de tal índole que

$$| f(x) - T(x) | \leqslant \varepsilon/2 \tag{10.81}$$

para cualquier x de la recta infinita. Por ser lineales los promedios, $\sigma_n(x, f) = \sigma_n(x, f - T) + \sigma_n(x, T)$, de suerte que

$$| \sigma_n(x, f) - T(x) | \leqslant | \sigma_n(x, f - T) | + | \sigma_n(x, T) - T(x) |. \tag{10.82}$$

Al escribir la igualdad (10.79) para la función $[f(x) - T(x)]$, obtendremos, teniendo presente que una función $\dfrac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}$, llamada *núcleo de Fejér*, es no negativa y aprovechando la estimación (10.81) y la igualdad (10.80):

$$|\sigma_n(x, f - T)| \leqslant \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - T(x+t)| \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{nt}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}\, dt = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.83}$$

La desigualdad (10.83) se cumple para todo número n. Señalemos ahora que la serie trigonométrica de Fourier del polinomio $T(x)$ *coincide con este polinomio*. De aquí proviene que todas las sumas parciales $S_n(x, T)$, a partir de cierto número n_0, son iguales a $T(x)$. Mas, esto no permite hallar, para $\varepsilon > 0$ fijo, un número N tal que se cumpla

$$| \sigma_n(x, T) - T(x) | < \varepsilon/2 \tag{10.84}$$

para todos los $n \geqslant N$ y cada x.

De las desigualdades (10.82), (10.83) y (10.84) concluimos que $| \sigma_n(x, f) - f(x) | < \varepsilon$, cualesquiera que sean $n \geqslant N$ y x. El teorema está demostrado.

8. Notas conclusivas. 1°. Al resolver una serie de problemas concretos, nos ocurre a veces desarrollar una función en serie trigonométrica de Fourier no sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, sino en un segmento $[-l, l]$, donde l es un número positivo arbitrario. Para poder analizar este caso, basta en todos los razonamientos aducidos sustituir la variable x por la $\frac{\pi}{l}x$. Con tal sustitución lineal de la variable quedan, por supuesto, válidos todos los resultados establecidos. Estos resultados se refieren a la serie trigonométrica de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}kx\right) \tag{10.85}$$

con las siguientes expresiones para los coeficientes de Fourier

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,\\ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt,&\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}kt\,dt\\ (k&=1,\,2,\,\ldots).\end{aligned}\right\} \tag{10.86}$$

No somos propensos a formular de nuevo todos los teoremas establecidos, indicando solamente que en todas las formulaciones el segmento $[-\pi, \pi]$ ha de sustituirse por el segmento $[-l, l]$, y el período 2π, por el $2l$.

2°. Recordemos que una función $f(x)$ se llama *par*, si satisface la condición $f(-x)=f(x)$, e *impar*, si satisface la condición $f(-x)=-f(x)$.

De la forma (10.86) para los coeficientes trigonométricos de Fourier se deduce que para una función par $f(x)$ son nulos todos los coeficientes b_k $(k=1, 2, \ldots)$, y para una función impar $f(x)$ son nulos todos los coeficientes a_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$. De este modo, *una función $f(x)$ par se desarrolla en serie trigonométrica de Fourier sólo respecto de los cosenos*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi}{l}kx,$$

y una función $f(x)$ impar se desarrolla en serie trigonométrica de Fourier sólo respecto de los senos

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}kx.$$

3°. Demos a conocer aquí *una forma compleja* de notación de la serie trigonométrica de Fourier (10.85) que en la práctica se usa muy a menudo.

Empleando las relaciones [1])

$$e^{-i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}kx,\quad e^{i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}kx,$$

es fácil convencerse de que la serie trigonométrica de Fourier (10.85) con el coeficiente de Fourier (10.86) se reduce a la forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{\pi}{l}kx}, \tag{10.87}$$

en la cual los coeficientes complejos c_k tienen por expresión

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\, e^{i\frac{\pi}{l}kt}\,dt \tag{10.88}$$

y se expresan en términos de los coeficientes (10.86) según las fórmulas

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_{-k}=\frac{a_k-ib_k}{2},\quad c_k=\frac{a_k+ib_k}{2}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

4°. Es de importancia exclusiva para las aplicaciones un problema de cálculo de los valores de una función según los coeficientes de Fourier de esta función dados de un modo aproximado. La resolución de este problema con ayuda del llamado *método de regularización* se aduce en el Complemento al final de este libro.

§ 6. Integral de Fourier

Cuando la función $f(x)$ viene dada en toda la recta infinita y no es periódica con cualquier período finito, resulta natural desarrollar dicha función no en serie trigonométrica, sino en la llamada *integral de Fourier.*

Al estudio de tal desarrollo se dedica este párrafo, en el cual siempre se sobreentiende que la función $f(x)$ está subordinada a la exigencia de integrabilidad absoluta en la recta infinita $(-\infty,\ \infty)$, es decir, requerimos que exista una integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{10.89}$$

Convengamos en emplear los siguientes términos.

---

[1]) Estas relaciones son corolarios inmediatos de la fórmula de Euler, establecida en el p. 3, § 5, cap. 1.

Definición. *Diremos que una función $f(x)$ pertenece en la recta infinita $(-\infty, \infty)$ a la clase L_1 y escribamos $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, si la función $f(x)$ es integrable (en el propio sentido de Riemann) sobre cualquier segmento y si es convergente la integral impropia* (10.89).

1. Imagen de Fourier y sus propiedades más simples.

Lema 4. *Si $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, para cualquier punto y de la recta infinita $-\infty < y < \infty$ existe una integral impropia*[1])

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)\, dx, \tag{10.90}$$

llamada imagen (o transformada) de Fourier de la función $f(x)$. Más aún, la función $\hat{f}(y)$ es continua respecto de y en cada punto de la recta infinita y tiende hacia cero para $|y| \to \infty$, es decir,

$$\lim_{|y| \to \infty} |\hat{f}(y)| = 0. \tag{10.91}$$

DEMOSTRACIÓN. De la igualdad $|e^{ixy} f(x)| = |f(x)|$, de la convergencia de la integral (10.89) y del criterio de Weierstrass (véase teorema 9.7) se deduce la convergencia uniforme respecto de y de la integral (10.90) en cada segmento de la recta infinita, y de aquí, en virtud de que la función e^{ixy} es continua respecto de y, del teorema 9.9 proviene la continuidad de la integral (10.90) respecto de y (en cada segmento, es decir, en cada punto de la recta infinita).

Resta por demostrar la relación (10.91). Fijamos arbitrariamente un $\varepsilon > 0$. Por ser convergente la integral (10.89), podemos fijar $A > 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(x)|\, dx + \int_{A}^{\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.92}$$

Con tal A fijo será válida (en virtud de (10.92)), la desigualdad

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{xiy} f(x)\, dx \right| \leqslant \left| \int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\, dx \right| + \frac{\varepsilon}{3}, \tag{10.93}$$

y para demostrar la relación (10.91) queda probar que la integral en el segundo miembro de (10.93) es inferior a $\frac{2}{3}\varepsilon$ para todos los $|y|$ suficientemente grandes.

Por cuanto la función $f(x)$ es integrable sobre el segmento $[-A, A]$, podemos fijar tal partición T del segmento $[-A, A]$,

---

[1]) Una función compleja $\hat{f}(y) = u(y) + iv(y)$ del argumento real y se considera aquí como un par de funciones reales $u(y)$ y $v(y)$. La continuidad de $\hat{f}(y)$ en el punto dado y se entiende como la continuidad en este punto de cada una de las funciones $u(y)$ y $v(y)$.

que para la suma superior S_T de esta partición sea válida la desigualdad [1])

$$0 < S_T - \int_{-A}^{A} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.94}$$

Supongamos que esta partición T se realiza mediante los puntos $-A = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = A$, y que M_k es la cota superior exacta de la función $f(x)$ sobre un segmento parcial $[x_{k-1}, x_2]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Introduzcamos una función

$$\overline{f}_T(x) = \begin{cases} M_k & \text{para } x_{k-1} < x < x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ 0 & \text{para } x = x_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Por cuanto la integral no depende del valor de la función subintégral en un número finito de puntos, tendremos, obviamente:

$$\int_{-A}^{A} \overline{f}_T(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = S_T,$$

de suerte que, en vista de (10.94),

$$\int_{-A}^{A} |\overline{f}_T(x) - f(x)|\,dx = \int_{-A}^{A} [\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10.95}$$

Apoyándose en la desigualdad (10.95) y teniendo presente que $|e^{ixy}| = 1$ y que $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| \leqslant 2/|y|$, tendremos

$$\left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} [f(x) - \overline{f}_T(x) + \overline{f}_T(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} \overline{f}_T(x)\,dx\right| + \left|\int_{-A}^{A} e^{ixy} [\overline{f}_T(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |M_k| \cdot \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy}\,dx\right| + \int_{-A}^{A} |\overline{f}_T(x) - f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{|y|} \sum_{k=1}^{n} |M_k| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon,$$

siempre que $|y| > \frac{6}{\varepsilon}\left[\sum_{k=1}^{n} |M_k|\right]$. El lema está demostrado.

[1]) Véanse §§ 2 y 3 del cap. 1, v. II.

Corolario. *Si* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, *resulta que*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda x \cdot f(x)\,dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}\lambda x \cdot f(x)\,dx = 0.$$

2. Condiciones de desarrollo de una función en serie de Fourier.

Definición. *Para toda función* $f(x)$ *de la clase* $L_1(-\infty, \infty)$ *un límite*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(u-x)} f(u)\,du \right] dy,$$

si existe, se llama desarrollo de esta función en una integral de Fourier.

Demostremos el siguiente teorema fundamental.

Teorema 10.19. **(*condición para el desarrollo de una función en un punto dado en integral de Fourier*).** *Si* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ *y si la función* $f(x)$ *satisface en el punto dado* x *por la derecha la condición de Hölder de algún orden positivo* α_1 $(0 < \alpha_1 \leqslant 1)$, *y por la izquierda, la condición de Hölder de algún orden positivo* α_2 $(0 < \alpha_2 \leqslant 1)$, *en el punto dado* x *se verifica la igualdad*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{10.96}$$

OBSERVACIÓN 1. En todo punto x, en el que el valor de $f(x)$ es igual a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo (en particular, en cada punto de continuidad de $f(x)$), podemos escribir $f(x)$ en el segundo miembro de (10.96).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 10.19. Por cuanto la imagen de Fourier $\hat{f}(y)$ (en virtud del lema 4) es una función continua de y, para cualquier λ *positivo* existe una integral

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f(u)\,du \right] dy. \tag{10.97}$$

En la integral que figura en el segundo miembro de (10.97) podemos cambiar el orden de integración respecto de y y u (puesto que la integral interior converge uniformemente respecto de y en cualquier segmento $[-\lambda, \lambda]$).

Cambiando el orden de integración respecto de y y u, aprovechando las igualdades $e^{iy(u-x)} = \cos y(u-x) + i \operatorname{sen} y(u-x)$, $\int_{-\lambda}^{\lambda} \cos y(u-x)\,dy = \frac{\operatorname{sen}\lambda(u-x)}{2(u-x)}$, $\int_{-\lambda}^{\lambda} \operatorname{sen} y(u--x)\,dy = 0$, y realizando una sustitución $u=x+t$, tendremos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iy(u-x)}\,dy\right]f(u)\,du=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda(u-x)}{u-x}f(u)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}f(x+t)\,dt.$$

Así pues, para cualquier λ positivo

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}f(x+t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}f(x+t)\,dt. \tag{10.98}$$

Notemos ahora que para todo λ positivo se verifica la igualdad [1]) $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$, y, por lo tanto, también $\int_{-\infty}^{0}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$.

De las últimas dos igualdades se deduce que para todo λ positivo

$$\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x+0)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt, \tag{10.99}$$

$$\frac{f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x-0)\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt. \tag{10.100}$$

Al sustraer de (10.98) las igualdades (10.99) y (10.100), resulta que para todo λ positivo

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x+t)-f(x+0)]\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}[f(x+t)-f(x-0)]\,\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt. \tag{10.101}$$

Por cuanto la función $f(x)$ satisface en el punto x por la derecha la condición de Hölder de orden α_1, y, por la izquierda, la condición de Hölder de orden α_2, existen, pues, unas constantes M_1 y M_2 tales que para todos los t positivos, suficientemente pequeños, se

[1]) Véase cap. 9, § 3.

cumpla la desigualdad (10.75), y para todos los t negativos, suficientemente pequeños, se cumpla la desigualdad (10.76). Si denotamos con M el mayor de los números M_1 y M_2, y con α, el número menor de α_1 y α_2, en los miembros derechos de (10.75) y (10.76) podemos escribir $M\,|\,t\,|^{\alpha}$, con la particularidad de que dichas desigualdades serán válidas para todos los valores positivos (negativos, respectivamente) de t que satisfacen la condición $|\,t\,|\leqslant\delta$, donde δ es un número positivo arbitrario, suficientemente pequeño.

Ahora podemos reescribir del modo siguiente la relación (10.101):

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+t)-f(x-0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant\delta}f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt-$$
$$-\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt-\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt. \qquad (10.102)$$

Fijamos un $\varepsilon>0$ arbitrario y, según éste, un $\delta>0$ tan p queño que se cumpla una desigualdad

$$\frac{M\delta^{2}}{\pi\alpha}<\frac{\varepsilon}{4}. \qquad (10.103)$$

Estimando las primeras dos integrales en el miembro derecho de (10.102) con ayuda de las desigualdades (10.75) y (10.76) (con la magnitud $M\,|\,t\,|^{\alpha}$ en los segundos miembros de estas desigualdades), tendremos

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}|\,f(x+t)-f(x+0)\,|\frac{dt}{t}\leqslant\frac{M}{\pi}\int_{0}^{\delta}t^{\alpha-1}\,dt=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi^{\alpha}}$$

y, de manera sumamente análoga,

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+t)-f(x-0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|\,f(x+t)-f(x-0)\,|\frac{dt}{|\,t\,|}\leqslant\frac{M}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|\,t\,|^{\alpha-1}\,dt=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

De las últimas dos desigualdades y de (10.103), obtendremos

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+t)-f(x+0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|+ \\ +\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^0 [f(x+t)-f(x-0)]\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (10.104)$$

Para estimar la tercera integral en el miembro derecho de (10.102), introduzcamos una función

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{f(x+t)}{t} & \text{para } |t|\geqslant\delta,\\ 0 & \text{para } |t|<\delta.\end{cases}$$

Por cuanto $g(t)\in L_1(-\infty,\infty)$, entonces, en virtud del corolario del lema 4,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\operatorname{sen}\lambda t\,dt=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=0,$$

mas, esto significa que para $\varepsilon>0$ fijo existe Λ_1 tal que

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant\delta} f(x+t)\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{4}\ (\text{para } \lambda\geqslant\Lambda_1). \qquad (10.105)$$

Por fin, notemos que

$$\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=\int_{\delta}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt=\int_{\lambda\delta}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\tau}\,d\tau\to 0$$

cuando $\lambda\to\infty$. De aquí proviene que para $\varepsilon>0$ fijo arbitrario y para el punto en consideración x se encontrará tal Λ_2 que

$$\left|\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|+\left|\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{t}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{4}\ (\text{para } \lambda\geqslant\Lambda_2). \qquad (10.106)$$

Denotemos con Λ el mayor de los números Λ_1 y Λ_2. De las relaciones (10.102), (10.104)—(10.106) concluimos que

$$\left|\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon\ (\text{para } \lambda\geqslant\Lambda).$$

El teorema está demostrado.

Corolario. *La igualdad* (10.96) *es con mayor razón verídica, si* $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ *y si la función* $f(x)$ *tiene en el punto dado* x *derivadas a la derecha y a la izquierda entendidas como límites de las relaciones* $\lim\limits_{t\to 0+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \left(\lim\limits_{t\to 0-0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t} \right)$.

OBSERVACIÓN 2. El límite que figura en el primer miembro de (10.96) puede escribirse en forma de una integral impropia

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy, \tag{10.107}$$

pero se debe recordar que esta integral impropia *es convergente en el sentido del valor principal*, es decir, es un límite de la correspondiente integral propia sólo bajo la condición de que los límites de integración en esta integral propia *son números simétricos con relación a cero*. No se puede entender la integral impropia (10.107) como límite

$$\lim_{\substack{\lambda' \to -\infty \\ \lambda'' \to +\infty}} \int_{\lambda'}^{\lambda''} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy$$

cuando tienden independientemente: λ' hacia $-\infty$, y λ'' hacia ∞. En el punto que viene abajo escribiremos, en lugar del límite (10.96), la integral impropia (10.107), entendiéndola cada vez en el sentido mencionado.

3. Noción de las transformaciones de Fourier directa e inversa. Escribiendo el primer miembro de (10.96) en forma de la integral impropia (10.107) y considerando que el valor de la función $f(x)$ en un punto dado x es igual a la semisuma de los valores límites derecho e izquierdo, obtendremos una igualdad

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \hat{f}(y)\, dy, \tag{10.108}$$

que permite hallar la función $f(x)$ según su imagen de Fourier $\hat{f}(y)$ y que se denomina frecuentemente *transformación inversa de Fourier*. Con relación a esta igualdad, la fórmula (10.90), mediante la cual la imagen de Fourier $f(y)$ se expresa en términos de la propia función $f(x)$, se llama a menudo *transformación directa de Fourier*.

Por analogía con la serie trigonométrica de Fourier concluimos que la imagen de Fourier es un análogo del coeficiente de Fourier, y la transformación inversa de Fourier (10.108) es un análogo del desarrollo de una función en serie trigonométrica de Fourier.

Analicemos las transformaciones de Fourier directa e inversa. Para dos casos particulares de importancia: 1) para el caso en que la función $f(x)$ es *par* (es decir, satisface la condición $f(-x) = f(x)$), y 2) para el caso en que la función $f(x)$ es *impar* (es decir, satisface la condición $f(-x) = -f(x)$.

1) Si $f(x)$ es una función par, de la fórmula (10.90), obtendremos con ayuda de la fórmula de Euler $e^{ixy} = \cos xy + i \operatorname{sen} xy$:

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos xyf(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx. \qquad (10.109)$$

De la fórmula (10.109) se deduce, a su vez, que la imagen de Fourier $\hat{f}(y)$ es también una función par de y. Por eso, la transformación inversa de Fourier (10.108) toma una forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\cos yx\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(y)\cos yx\,dy. \qquad (10.110)$$

La fórmula (10.109) se llama, a menudo, *coseno transformación directa de Fourier*, y la (10.110), *coseno transformación inversa de Fourier*.

2) Si $f(x)$ es una función impar, de un modo sumamente análogo obtendremos de las fórmulas (10.90) y (10.108) *la seno transformación directa de Fourier*

$$\hat{f}(y) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} xy\,dx$$

y *la seno transformación inversa de Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \hat{f}(y)\operatorname{sen} yx\,dy.$$

En la práctica se encuentra frecuentemente un caso, cuando la función $f(x)$ viene dada *solamente en una semirrecta* $0 \leqslant x < \infty$. Según nuestro deseo, podemos hacer prolongar esta función a la semirrecta $-\infty < x \leqslant 0$ de un modo o bien par, o bien impar, y emplear para dicha función o bien el coseno transformación de Fourier, o bien el seno transformación de Fourier.

EJEMPLO. Veamos en la semirrecta $0 \leqslant x < \infty$ una función $f(x) = e^{-ax}$, donde $a > 0$. Haciendo prolongar la función de un modo par a la semirrecta $-\infty < x \leqslant 0$, obtendremos las coseno transformaciones de Fourier directa e inversa

$$\hat{f}(y) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos xy\,dx = \frac{2a}{a^2+y^2} \quad [1]$$

[1] Recordemos que la integral $\int e^{-ax}\cos xy\,dx$ puede calcularse de un modo elemental, integrando por partes (véase cap. 6, v. I).

$\hat{f}(y)$ se llama, a veces, *coseno imagen de Fourier*)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}a\int_0^\infty \frac{\cos yx}{a^2+y^2}\,dy=e^{-ax}\quad (x\geqslant 0).$$

Haciendo prolongar la misma función a la semirrecta $-\infty < x \leqslant 0$ de un modo impar, es decir, suponiendo

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax} & \text{para } x>0,\\ 0 & \text{para } x=0,\\ -e^{-a|x|} & \text{para } x<0,\end{cases}$$

obtendremos seno transformaciones de Fourier directa e inversa

$$\hat{f}(y)=2\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} xy\,dx=\frac{2y}{a^2+y^2}\;{}^{1)}$$

($\hat{f}(y)$ se llama, a veces, *seno-imagen de Fourier*),

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\operatorname{sen} yx}{a^2+y^2}\,dy=\begin{cases} e^{-ax} & \text{para } x>0\\ 0 & \text{para } x=0.\end{cases}$$

4. Algunas propiedades adicionales de la transformación de Fourier. En este punto detengámonos en ciertas propiedades adicionales de la transformación de Fourier que se ponen de manifiesto frecuentemente en las aplicaciones.

Lema 5. *Supongamos que para cierto número entero no negativo k se tiene una función $(1+|x|)^k\cdot f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. Entonces, la imagen de Fourier* (10.90) *de la función $f(x)$ es k veces diferenciable respecto de la variable y, con la particularidad de que la derivada respecto de y de cualquier orden m $(m=1, 2, \ldots, k)$ puede calcularse por diferenciación bajo el signo de integral* (10.90), *es decir, según la fórmula*

$$\frac{d^m}{dy^m}\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}(ix)^m\cdot f(x)\,dx\quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ k)\qquad (10.111)$$

DEMOSTRACIÓN. De la desigualdad

$$\left|\frac{d^m}{dy^m}e^{ixy}f(x)\right|=|e^{ixy}\cdot(ix)^m f(x)|\leqslant(1+|x|)^k\cdot|f(x)|$$

que se verifica para m cualquiera $(m=0, 1, \ldots, k)$ y de la convergencia de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^k\cdot|f(x)|\,dx$, en virtud del criterio de Weierstrass (es decir, del teorema 9.7), se deduce la convergencia, uniforme respecto de y (en cada segmento) de la integral que figura en el segundo miembro de (10.111), cualquier que sea $m=0, 1, \ldots, k$. Debido al teorema 9.10, esto asegura la existencia de la derivada respecto de y de cualquier orden $m=1, 2, \ldots, k$ y la validez de la fórmula (10.111). El lema está demostrado.

[1]) Véase la nota anterior a pie de la página.

Lema 6. *Supongamos que una función $f(x)$ tiene en cada punto x todas las derivadas de hasta el orden $k \geqslant 1$ inclusive, con la particularidad de que la propia función $f(x)$ y la derivada de k-ésimo orden son absolutamente integrables en la recta infinita y para cualquier $m = 0, 1, \ldots, (k-1)$ es válida la relación*

$$\lim_{|x| \to \infty} \left[\frac{d^m f(x)}{dx^m} \right] = 0. \tag{10.112}$$

En este caso para la transformación de Fourier $\hat{f}(y)$ es válida, para $|y| \to \infty$, una estimación

$$|\hat{f}(y)| = o(|y|^{-k}). \tag{10.113}$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos para todo $\lambda > 0$ una integral

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx.$$

Integrándola k veces por partes, obtendremos la siguiente fórmula

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx = \left[e^{ixy} \frac{d^{k-1} f(x)}{dx^{k-1}} \right] \Bigg|_{-\lambda}^{\lambda} -$$

$$-\left[iy \cdot e^{ixy} \frac{d^{k-2} f(x)}{dx^{k-2}} \right] \Bigg|_{-\lambda}^{\lambda} + \ldots + (-i)^k \cdot y^k \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy} f(x)\, dx.$$

Haciendo tender λ hacia ∞ en la igualdad obtenida y considerando que en virtud de (10.112) todas las sustituciones se reducen a cero, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \frac{d^k f(x)}{dx^k}\, dx = (-iy)^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \cdot f(x)\, dx = (-iy)^k \cdot \hat{f}(y).$$

Teniendo presente que la integral en el primer miembro de la última igualdad tiende, en virtud del lema 4, hacia cero, cuando $|y| \to \infty$, obtenemos precisamente la estimación (10.113). El lema está demostrado.

Teorema 10.20. *Supongamos que una función $f(x)$ y su segunda derivada son absolutamente integrables en una recta infinita $(-\infty, \infty)$, con la particularidad de que la propia función $f(x)$ y su primera derivada tienden hacia cero cuando $|x| \to \infty$. Admitamos, además, que una función $g(x)$ es absolutamente integrable en la recta infinita $(-\infty, \infty)$. Entonces, se verifica la siguiente igualdad*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \hat{g}^*(y)\, dy, \tag{10.114}$$

llamada igualdad generalizada de Parseval o igualdad de Plancherel [1]). (En esta igualdad $\hat{f}(y)$ y $\hat{g}(y)$ denotan las imágenes de Fourier de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, y $\hat{g}^*(y)$ es una magnitud compleja conjugada de $\hat{g}(y)$).

[1]) M. Plancherel (n. 1885), matemático francés.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 10.19, en cada punto x se verifica una igualdad

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy, \tag{10.115}$$

y, además, en virtud del lema 6, es válida la estimación $|\hat{f}(y)| \leqslant C(1+|y|)^{-2}$ que asegura la convergencia absoluta e uniforme (respecto de x) de la integral que figura en el segundo miembro de (10.115) en toda la recta infinita.

Multiplicando ambos miembros de (10.115) por $g(x)$ e integrando respecto de x en los márgenes de $-\lambda$ a λ, tendremos

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} g(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\hat{f}(y)\,dy\right]dx. \tag{10.116}$$

En vista de la convergencia uniforme respecto de x (aducida más arriba) de la integral (10.115), podemos cambiar en el segundo miembro de (10.116) el orden de integración respecto de x e y, obteniendo como resultado:

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy}g(x)\,dx\right]^{*}\hat{f}(y)\,dy \tag{10.117}$$

(el asterisco denota una conjugación compleja).

En virtud de la desigualdad

$$\left|\left[\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixy}g(x)\,dx\right]^{*}\right|\cdot|\hat{f}(y)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\cdot dx\cdot C(1+|y|)^{-2}$$

y del criterio de Weierstrass, la integral en el segundo miembro de (10.117) converge uniformemente respecto de λ en la recta infinita $-\infty<\lambda<\infty$. Por consiguiente, en (10.117) podemos pasar a un límite para $\lambda\to\infty$, realizando en el miembro de (10.117) el paso al límite bajo el signo de integral. El teorema está demostrado.

§ 7. Series trigonométricas múltiples e integrales de Fourier

1. Concepto de serie trigonométrica múltiple de Fourier y de sus sumas parciales rectangulares y esféricas. Supongamos que una función de N variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ está definida y es integrable en un cubo N-dimensional $-\pi\leqslant x_k\leqslant\pi$ $(k=1, 2, \ldots, N)$. Designemos dicho cubo por un símbolo Π. Resulta cómodo escribir la serie trigonométrica múltiple de tal función directamente en una forma compleja, empleando, para abreviar la notación, una noción de producto escalar de dos vectores N-dimensionales.

Sea $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ un vector que tiene coordenadas reales arbitrarias $x_1, x_2, \ldots, x_N$, y sea $\boldsymbol{n}=(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ un vector con coordenadas de números *enteros* $n_1, n_2, \ldots, n_N$.

Se denomina *serie trigonométrica múltiple de Fourier de la función* $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ una serie de la forma

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \cdot e^{-i(nx)}, \tag{10.118}$$

en la que los números $\hat{f}_n$, llamados *coeficientes de Fourier*, se definen mediante las igualdades

$$\hat{f}_n = \hat{f}_{n_1 n_2 \ldots n_N} =$$
$$= (2\pi)^{-N} \int \underset{\Pi}{\cdots} \int f(y_1, \ldots, y_N)\, e^{i(y_1 n_1 + \ldots + y_N n_N)}\, dy_1 \ldots dy_N, \tag{10.119}$$

y el símbolo (xn) denota producto escalar de los vectores $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{n}$ que es igual a $x_1 n_1 + \ldots x_N n_N$.

Por supuesto, la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) puede considerarse como una serie de Fourier con relación a un sistema [1]) ortonormalizado (en el cubo N-dimensional Π), formado con ayuda de toda clase de productos de elementos de un sistema trigonométrico unidimensional tomados según las variables $x_1, x_2, \ldots, x_N$, respectivamente. Este sistema ortonormalizado suele denominarse *sistema trigonométrico múltiple*.

Al igual que para todo sistema ortonormalizado, para un sistema trigonométrico múltiple es válida *la desigualdad de Bessel* que tiene por expresión

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \leqslant (2\pi)^{-N} \int \underset{\Pi}{\cdots} \int f^2(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N, \tag{10.120}$$

donde $f(x_1, \ldots, x_N)$ es cualquier función continua en el cubo N-dimensional Π.

Examinemos la cuestión de convergencia de la serie trigonométrica múltiple de Fourier. Si esta serie *no converge* en un punto dado $x = (x_1, \ldots, x_N)$ *absolutamente*, la cuestión de su convergencia depende (en virtud del teorema de Riemann 4.10, v. II) del orden en que siguen sus términos (o, que es lo mismo, del orden de sumación según los índices $n_1, n_2, \ldots, n_N$).

Son de amplio uso dos métodos de sumar la serie trigonométrica múltiple de Fourier: el método *esférico* y el *rectangular*.

Se llaman *sumas parciales esféricas* de la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) las sumas de la forma

$$S_\lambda(x, f) = \sum_{|n| \leqslant \lambda} \hat{f}_n e^{-i(xn)}$$

[1]) En este caso un producto escalar de dos cualesquiera funciones se define como integral del producto de estas funciones extendida al cubo Π.

tomadas según todos los valores de números enteros $n_1, n_2, \ldots, n_N$ que satisfacen la condición $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_N^2} \leqslant \lambda$.

Se dice que la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) *es sumable en un punto dado x por el método esférico, si en dicho punto existe un límite* $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(x, f)$.

Se llaman *sumas parciales rectangulares* de la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) las sumas de la forma

$$S_{m_1 m_2 \ldots m_N}(x, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \ldots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \hat{f}_n e^{-i(xn)}.$$

Se dice que la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118) *es sumable en un punto dado x por el método rectangular* (*o por el método de Princegeime*), *si en dicho punto existe un límite*

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty\\ m_2\to\infty\\ \cdots\cdots\\ m_N\to\infty}} S_{m_1 m_2 \ldots m_N}(x, f)$$

(*cuando tiende al infinito cada índice* $m_1, m_2, \ldots, m_N$).

Ambos métodos de sumación tienen tanto sus ventajas, como deficiencias. Si una serie trigonométrica múltiple de Fourier se analiza como serie de Fourier con relación a un sistema ortonormalizado, resulta natural disponer sus términos en el orden de crecimiento de $|\boldsymbol{n}|$ y utilizar las sumas parciales esféricas.

Las sumas parciales rectangulares se emplean al analizar el comportamiento de las series de potencias múltiples cerca de la frontera del dominio de convergencia. Conviene notar, que la definición de la suma de una serie como límite de las sumas rectangulares (contrariamente a la definición que se apoya en el límite de las sumas esféricas) no impone restricciones algunas en el conjunto infinito de sumas parciales de esta serie.

Antes de formular las condiciones de convergencia de una serie trigonométrica múltiple de Fourier, definamos ciertas características de suavidad de una función de N variables.

2. Módulo de continuidad y clases de Hölder para las funciones de N variables. Supongamos que una función de N variables $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ está definida y es continua en un dominio N-dimensional D.

Definición 1. *Para cada $\delta > 0$, llamemos módulo de continuidad de la función $f(x)$ en un dominio D la cota superior exacta del módulo de la diferencia $|f(x') - f(x'')|$ sobre el conjunto de todos los puntos x' y x'' que pertenecen al dominio D, y la distancia $\rho(x', x'')$ entre los cuales es inferior a δ.*

Denotemos con $\omega(\delta, f)$ el módulo de continuidad de la función $f(x)$ en el dominio D.

Definición 2. *Para cualquier $\varkappa$ de un semisegmento $0 < \varkappa \leqslant 1$ diremos que una función $f(x)$ pertenece en el dominio D a la clase de Hölder $C^\varkappa$ con el exponente $\varkappa$ y escribiremos $f(x) \in C^\varkappa(D)$, si el módulo de la función continua $f(x)$ en D es de orden $\omega(\delta, f) = o(\delta^\varkappa)$ para $0 < \varkappa < 1$, y $\omega(\delta, f) = O(\delta)$ para $\varkappa = 1$.*

Sea, ahora, α *cualquier* número *positivo* (no forzosamente entero). Este número podemos representarlo en la forma $\alpha = r + \varkappa$, donde r es un número entero, y $\varkappa$ pertenece al semisegmento $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Definición 3. *Diremos que una función $f(x)$ pertenece en el dominio D a la clase de Hölder C^α con el exponente $\alpha > 0$, y escribiremos $f(x) \in C^\alpha(D)$, si todas las derivadas parciales de la función $f(x)$ de orden r son continuas en el dominio D y cada derivada parcial de orden r pertenece a la clase $C^\varkappa(D)$ introducida en la definición 2.*

3. Condiciones de convergencia de una serie trigonométrica múltiple de Fourier. Empecemos por establecer las condiciones más simples de convergencia absoluta y uniforme de la serie trigonométrica múltiple de Fourier.

Teorema 10.21. *Si una función $f(x)$ está periódicamente (con el período de 2π respecto de cada una de las variables) prolongada a todo el espacio E^N y tiene en E^N derivadas continuas de orden $s = [N/2] + 1$, donde $[N/2]$ es la parte entera del número $N/2$, la serie trigonométrica múltiple de Fourier de la función $f(x)$ converge (hacia esta función) absoluta y uniformemente en todo el espacio E^N.*

DEMOSTRACIÓN. Convengamos en denotar con el símbolo $\left(\widehat{\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}}\right)_{\mathbf{n}}$ el coeficiente de Fourier de la derivada $\frac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ con el número $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_N)$. Integrando por partes, llegamos a que $\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}} = i n_k \hat{f}_{\mathbf{n}}$ (para cualquier $k = 1, 2, \ldots, N$) de suerte que $\left|\sum_{k=1}^{N} \left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}}\right| = |\hat{f}_{\mathbf{n}}| (|n_1| + \ldots + |n_N|)$ y, por consiguiente

$$|\hat{f}_{\mathbf{n}}| = (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \left|\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_{\mathbf{n}}\right|. \qquad (10.121)$$

La fórmula (10.121) es válida no sólo para la función f, sino también para cada derivada parcial de la función f de hasta el orden $(s - 1)$ inclusive.

De aquí se deduce en seguida una relación

$$|\hat{f}_{\mathbf{n}}| \leqslant (|n_1| + \ldots + |n_N|^{-s} \sum_{s_1 + \ldots + s_N = s} \left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}}\right)_{\mathbf{n}}\right|, \qquad (10.122)$$

en cuyo segundo miembro la suma se toma según todos los $s_1, s_2, \ldots, s_N$ enteros no negativos que satisfacen la condición $s_1 + s_2 + \ldots + s_N = s$ (de modo que el número de sumandos en esta suma es igual a N^s). De (10.122) proviene [1]) a su vez:

$$|\hat{f}_n| \leqslant \frac{1}{2}(|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-2s} + \frac{N^s}{2} \sum_{s_1+\ldots+s_N=s} \left| \left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}} \right)_n \right|^2. \qquad (10.123)$$

Tomando en consideración que $s = \frac{N}{2} + \varepsilon$, donde $\varepsilon = 1$ para N par y $\varepsilon = 1/2$, para N impar, y que

$$(|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-2s} = (|n_1| + \ldots + |n_N|)^{-N-2\varepsilon} \leqslant \leqslant |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} \ldots |n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}},$$

obtenemos de (10.123)

$$|\hat{f}_n| \leqslant \frac{1}{2} |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} \ldots |n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}} + \frac{N^s}{2} \cdot \sum_{s_1+\ldots+s_N=s} \left| \left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}} \right)_n \right|^2. \qquad (10.124)$$

Con el fin de probar la convergencia absoluta y uniforme de la serie trigonométrica múltiple de Fourier (10.118), basta (en virtud del criterio de Weierstrass) demostrar la convergencia de una serie numérica que la mayora

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|,$$

pero, (en virtud de la desigualdad (10.124)) la convergencia de la última serie es una consecuencia directa de la convergencia, para cualquier k, de la serie numérica

$\sum_{n_k=-\infty}^{\infty} |n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$, y de la convergencia, para cualesquiera s_1,

[1]) Empleamos las desigualdades $|a| \cdot |b| \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ y $(|a_1| + \ldots + |a_p|)^2 \leqslant p\,(a_1^2 + \ldots + a_p^2)$.

$s_2, \ldots, s_N$, de la serie

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}} \right)_n \right|^2,$$

que se deduce, a su vez, de la desigualdad de Bessel (10.120) escrita para la función continua $\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}$.

El hecho de que la serie trigonométrica de Fourier (10.118) converge precisamente hacia la función $f(x)$ lo determina la completitud del sistema trigonométrico múltiple [1]). Efectivamente, si la serie (10.118) fuera uniformemente convergente hacia cierta función $g(x)$, entonces de la posibilidad de integrar término a término tal serie se deduciría que todos los coeficientes de Fourier de la función $g(x)$ coincidirían con los coeficientes correspondientes de Fourier de la función $f(x)$. Mas, la diferencia $[f(x) - g(x)]$ sería ortogonal en tal caso a todos los elementos del sistema trigonométrico múltiple y (por ser el sistema completo) sería igual a cero. El teorema está demostrado.

OBSERVACIÓN 1. El teorema 10.21 puede ser precisado. Resulta válida la siguiente *afirmación* [2]): *si una función $f(x)$ es periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π) y pertenece en E^N a la clase de Hölder C^α para $\alpha > N/2$, la serie trigonométrica múltiple de Fourier de $f(x)$ converge (hacia esta función) absoluta y uniformemente en todo el espacio E^N.*

La aclaración de las condiciones de convergencia *no absoluta* de la serie trigonométrica múltiple requiere que sea atraída la técnica más fina.

Formulemos sin demostración las condiciones de sumabilidad de una serie trigonométrica múltiple de Fourier por el método esférico y el rectangular.

Teorema 10.22. *Si una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N)$ es periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π) y pertenece en el espacio E^N a la clase de Hölder C^α para $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$, las sumas parciales esféricas*

---

[1]) La completitud del sistema trigonométrico múltiple se deduce en seguida de la completitud de los sistemas trigonométricos unidimensionales que lo integran y de cuyo producto es el mismo.

[2]) Esta afirmación se obtiene de un modo más simple a partir del lema 3.1, demostrado en la obra de V. Ilyín y Sh. Alimov «Condiciones de convergencia de los desarrollos espectrales correspondientes a las extensiones autoconjugadas de los operadores elípticos, I» (Ecuaciones diferenciales, v. 7, No. 4, 1971, págs. 670—710).

de una serie trigonométrica múltiple de Fourier de la función $f(x_1, \ldots, x_N)$ converge hacia esta función uniformemente en todo el espacio E^N [1].

Teorema 10.23. *Para todo α positivo inferior a $\frac{N-1}{2}$ y cualquier punto x_0 del cubo N-dimensional Π, existe una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π), que pertenece en E^N a la clase C^α, se anula en cierto δ-entorno del punto x_0 y que es de tal índole que las sumas parciales esféricas de la serie trigonométrica múltiple de Fourier de esta función están privados de límite en el punto x_0* [2].

Los teoremas 10.22 y 10.23 establecen condiciones *definitivas* (en las clases de Hölder C^α) de convergencia de las sumas parciales esféricas de una función periódica $f(x_1, \ldots, x_N)$. De acuerdo con estos teoremas, para $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$ tiene lugar la convergencia uniforme de las sumas parciales esféricas, y cuando $\alpha < \frac{N-1}{2}$, ni siquiera es válido, para las sumas parciales esféricas, el principio de localización (por suave que sea la función f en el entorno de un punto x_0, la pertenencia de esta función a la clase $C^\alpha(E^N)$ para $\alpha < \frac{N-1}{2}$ no asegura la convergencia de las sumas parciales esféricas de esta función en el punto x_0).

Las condiciones definitivas (en las clases de Hölder C^α) de convergencia de las sumas parciales rectangulares de una serie trigonométrica múltiple de Fourier están establecidas en las obra de L. V. Zhizhiashvili [3].

Teorema 10.24. *Si una función de N variables $f(x_1, \ldots, x_N)$ es periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π) y pertenece en E^N a la clase C^α para cualquier $\alpha > 0$, las sumas parciales rectangulares de la serie trigonométrica múltiple de Fourier de la función $f(x_1, \ldots, x_N)$ converge (hacia esta función) uniformemente en E^N.*

OBSERVACIÓN. Observemos que aún en el año 1928 L. Tonelli [4]) estableció que una sola continuidad de una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N)$ no aseguraba no sólo la convergencia uniforme, sino tampoco el principio de localización de las sumas parciales rectangulares de su serie trigonométrica múltiple de Fourier (existe una función, periódica con relación a cada una de las variables (con el período de 2π) y continua en E^N que se anula en cierto δ-entorno del punto dado x_0 y es tal que las sumas parciales rectangulares de esta función divergen en x_0).

4. Sobre el desarrollo de una función en integral N-múltiple de Fourier. Supongamos que una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N) = f(x)$ admite la existencia de una integral im-

---

[1]) Este teorema se deduce de las afirmaciones más generales demostradas en la obra de V. Ilyín «Problemas de localización y convergencia de las series de Fourier respecto de los sistemas fundamentales de funciones del operador de Laplace» (Éxitos de la ciencia matemática, v. 23, 2, 1968, págs. 61—120) y en la obra de V. Ilyín y Sh. Alimov mencionada más arriba.

[2]) Este teorema es un caso particular de una afirmación más general demostrada en el cap. 3 de la obra de V. Ilyín mencionada más arriba.

[3]) L. V. Zhizhiashvili «Sobre las funciones conjugadas y series trigonométricas». Tesis de doctorado. Moscú, Universidad de Moscú Lomonósov, 1967.

[4]) L. Tonelli (1885—1946), matemático italiano.

propia

$$\int_{E^N} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots, dx_N. \tag{10.125}$$

Llamemos *imagen* (o *transformada*) *de Fourier* de tal función a una magnitud

$$\hat{f}(y_1, \ldots, y_N) = \hat{f}(y) = \int_{E^N} \cdots \int e^{i(xy)} f(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N.$$

Por suma analogía con el lema 4 se demuestra que $\hat{f}(y)$ es una función continua de y en cada punto de E^N y tiende a cero cuando $|y| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_N^2} \to \infty$.

Un límite

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{|y| \leqslant \lambda} \cdots \int \hat{f}(y_1, \ldots, y_N)\, e^{-i(x, y)}\, dy_1 \ldots dy_N \tag{10.126}$$

(si existe) se denomina *desarrollo de la función $f(x)$ en integral N-múltiple de Fourier.*

Son válidas las siguientes dos afirmaciones [1]).

1°. Si una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N)$ se anula fuera de cierto dominio acotado y pertenece en todo el espacio E^N a la clase de Hölder C^α para $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$, el desarrollo de esta función en la integral N-múltiple de Fourier (10.126) converge (hacia esta función) uniformemente en todo el espacio E^N.

2°. Para todo α positivo inferior a $\frac{N-1}{2}$ y cualquier punto x_0, existe una función de $N \geqslant 2$ variables $f(x_1, \ldots, x_N)$, distinta de cero sólo en un dominio acotado y perteneciente en E^N a la clase C^α, que se anula en cierto δ-entorno del punto x_0 y es de tal índole que para esta función el límite (10.126) en el punto x_0 no existe.

Las afirmaciones 1° y 2° establecen las condiciones definitivas (en las clases de Hölder C^α) de convergencia del desarrollo en integral N-múltiple de Fourier de cualquier función igual a cero fuera de cierto dominio acotado del espacio E^N. De acuerdo con estas afirmaciones, para $\alpha \geqslant \frac{N-1}{2}$ tiene lugar convergencia uniforme (en cualquier dominio acotado) del desarrollo en integral N-múltiple de Fourier, y cuando $\alpha < \frac{N-1}{2}$, ni siquiera es válido, para el desarrollo en integral N-múltiple de Fourier, el principio de localización (por suave que sea la función f en el entorno del punto x_0, la pertenencia de esta función en todo el espacio E^N a la clase C^α para $\alpha < \frac{N-1}{2}$ no asegura la convergencia en el punto x_0 del desarrollo de esta función en integral N-múltiple de Fourier).

[1]) Ambas afirmaciones se deducen de las afirmaciones más generales demostradas en la obra de Sh. Alimov y V. A. Ilyín «Condiciones de convergencia de los desarrollos espectrales correspondientes a las extensiones autoconjugadas de los operadores elípticos, II». (Ecuaciones diferenciales, v. 7, No 5, 1971, págs. 851—882).