Capítulo 11

ESPACIO DE HILBERT

En este capítulo se estudia una clase importante de espacios euclídeos de dimensión infinita: los así llamados *espacios de Hilbert.*

Establecemos una representación especial, importante para las aplicaciones, de toda función lineal de los elementos de tal espacio (una función de esta índole suele llamarse *funcional lineal*), establecemos también que en cada conjunto infinito de elementos, acotado en norma, de un espacio de Hilbert puede elegirse una subsucesión convergente en cierto sentido débil (esta propiedad se denomina *compacticidad débil* de la bola en un espacio de Hilbert).

Una atención particular se dedica al estudio de los sistemas ortonormalizados de elementos de Hilbert. Establecemos la equivalencia para tales sistemas de las nociones del carácter cerrado y completitud, introducidas en el § 2, cap. 10, y demostramos el famoso teorema de Riesz—Ficher, de acuerdo con el cual, cualquier sucesión de números, una serie de cuyos cuadrados es convergente, representa una sucesión de los coeficientes de Fourier de cierto elemento de un espacio de Hilbert en un desarrollo con relación a un sistema, prefijado de antemano, ortonormalizado de elementos de dicho espacio. En el último párrafo se demuestra la existencia de los valores propios y de los así llamados *operadores ininterrumpidos totalmente autoconjugados* que actúan en un espacio de Hilbert.

§ 1. Espacio l^2

1. Concepto del espacio l^2. Examinemos un conjunto cuyos elementos están constituidos por toda clase de sucesiones de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ tales que una serie compuesta de los cuadrados de estos números

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \tag{11.1}$$

es convergente. Los elementos de tal conjunto se denotarán (como vectores) con letras latinas semigruesas: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, etc. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ se llamarán coordenadas del elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Definamos las operaciones de sumación y multiplicación de los elementos por los números reales. Se llama *suma* de dos elementos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ un elemento $z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$ [1]. Este elemento lo denotemos con el símbolo $z = x + y$. Se llama *producto de un elemento* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *por un número real* λ al elemento designado por el símbolo λx o $x\lambda$ e igual a $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \ldots, \lambda x_n, \ldots)$. Es fácil comprobar que el conjunto definido es un *espacio lineal*, es decir, comprobar el cumplimiento de todos los axiomas referentes a la sumación y multiplicación de los elementos por los números reales [2].

Introduzcamos ahora en el conjunto citado un producto escalar de dos elementos cualesquiera $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, al definirlo como suma de una serie [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Suponemos, pues, $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Es fácil comprobar el cumplimiento de todos los cuatro axiomas de un producto escalar. (Estos axiomas se tratan en § 1, cap. 10, y la comprobación de su validez para el espacio en consideración queda al cargo del lector).

De este modo, el conjunto introducido es *un espacio euclídeo*. Adheriéndonos a la tradición establecida, denotemos este conjunto con el símbolo l^2.

Al igual que en todo espacio euclídeo, introduzcamos en l^2 la norma de cada elemento $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, poniéndola igual a

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}. \tag{11.2}$$

Por cuanto la serie (11.1) es convergente, tal definición tiene sentido).

---

[1] La convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)^2$ se deduce en seguida de la desigualdad $(x_k + y_k)^2 \leqslant 2x_k^2 + 2y_k^2$ y de la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

[2] La formulación de los axiomas de un espacio lineal puede encontrarse en cualquier curso del álgebra lineal.

[3] La convergencia de la serie citada se deduce de la desigualdad $| x_k y_k | \leqslant \frac{1}{2} (x_k^2 + y_k^2)$ y de la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$.

Como siempre, llamemos dos elementos de l^2 ortonormalizados, si su producto escalar es igual a cero.

Recordemos que se llama *sistema ortonormalizado* en un espacio euclídeo arbitrario a una sucesión de elementos $\{e_k\}$ de dicho espacio que satisface dos exigencias: 1) cualesquiera dos elementos de esta sucesión son ortogonales; 2) la norma de cada elemento es igual a la unidad.

Demostremos que en el espacio l^2 existe un sistema ortonormalizado *cerrado* (y, por consiguiente, de acuerdo con el teorema 10.7, también *completo*) [1]. Cerciorémonos de que tal sistema es una sucesión de elementos

$$\left.\begin{array}{l} e_1=(1,\,0,\,0,\,\ldots,\,0,\,\ldots),\\ e_2=(0,\,1,\,0,\,\ldots,\,0,\,\ldots),\\ e_3=(0,\,0,\,1,\,\ldots,\,0,\,\ldots),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{11.3}$$

El hecho de que este sistema es ortonormalizado es obvio (la norma (11.2) para cada elemento e_k es igual a la unidad, y el producto escalar de cualesquiera dos elementos representa una suma infinita de productos, cada uno de los cuales es igual a cero). Para demostrar el carácter cerrado del sistema ortonormalizado (11.3) basta demostrar que para todo elemento $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ del espacio l^2 la serie de Fourier de este elemento según el sistema (11.3) converge hacia dicho elemento en norma del espacio l^2 [2].

Por cuanto los coeficientes de Fourier (x, e_k) del elemento x coinciden con las coordenadas x_k de este elemento, la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier del elemento x es igual a $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, y nos queda probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x\right\| = 0. \tag{11.4}$$

Pero, de la definición de la norma (11.2), de lo que el sistema $\{e_k\}$ es ortonormalizado y de las propiedades de un producto escalar se

---

[1] Véase en § 2, cap. 10 definición de la completitud y del carácter cerrado de un sistema ortonormalizado.

[2] Puesto que en tal caso todo elemento x del espacio l^2 puede aproximarse con cualquier grado de exactitud en norma de l^2 mediante las sumas parciales de la serie citada de Fourier.

deduce que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x, \sum_{k=1}^{n} x_k e_k - x \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k, x) + \| x \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2,$$

de suerte que la relación (11.4) se deduce de la convergencia de la serie (11.1).

2. Forma general de la funcional lineal en l^2. Examinaremos las funciones, de cuyos argumentos sirven los elementos de l^2, y de valores, unos números reales. Las funciones de este género suelen llamarse *funcionales* (definidas en el espacio l^2).

Hablando con mayor precisión, nuestro objetivo es el estudio detallado de una funcional más simple definida en el espacio l^2, a saber, de la así llamada funcional *lineal*.

Definición 1. *Una funcional $l(x)$ definida en el espacio l^2 se denomina lineal, si para cualesquiera elementos x e y del espacio l^2 y todos los números reales α y β se verifica una igualdad*

$$l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y).$$

Sea x_0 un elemento arbitrario del espacio l^2. Con el fin de geometrizar la terminología, este elemento x_0 se llamará a menudo *punto* del espacio l^2.

Definición 2. *Una diferencial arbitraria $l(x)$, definida en el espacio l^2, se llama continua en un punto x_0 del espacio l^2, si para toda sucesión de elementos $\{x_n\}$ del espacio l^2, convergente en norma del espacio l^2 hacia el elemento x_0, la sucesión numérica $l(x_n)$ converge hacia $l(x_0)$.*

Definición 3. *Una funcional $l(x)$ se llama continua, si lo es en todo punto x del espacio l^2.*

Notemos ahora mismo que *en el caso de una funcional lineal $l(x)$ la continuidad por lo menos en un solo punto x_0 predetermina la continuidad en cada punto x del espacio l^2*. Efectivamente, supongamos que una funcional lineal es continua en el punto x_0, y que x es un punto arbitrario del espacio l^2. Denotemos con $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de elementos de l^2 que converge en norma de l^2 hacia x. Entonces, la sucesión $\{x_0 + x_n - x\}$ converge en norma de l^2 hacia x_0, y de la continuidad de la funcional en el punto x_0 proviene que

$$l(x_0 + x_n - x) \to l(x_0) \quad \text{para} \quad n \to \infty. \tag{11.5}$$

Pero, de lo que la funcional es lineal se deduce que $l(x_0 + x_n - x) = l(x_0) + l(x_n) - l(x)$. A partir de la última igualdad y de

(11.5) obtenemos: $l(x_n) \to l(x)$, cuando $n \to \infty$, lo que significa precisamente la continuidad de la funcional en el punto x.

Definición 4. *Una funcional $l(x)$ se llama acotada, si existe una constante C tal que para todos los elementos x del espacio l^2 se cumple una desigualdad*

$$|l(x)| \leqslant C \|x\|. \tag{11.6}$$

Teorema 11.1. *Para que una funcional lineal $l(x)$ sea continua, es necesario y suficiente que sea acotada.*

DEMOSTRACIÓN. 1. NECESIDAD. Supongamos que la funcional lineal $l(x)$ es continua. Supongamos, además, que no existe una constante C que asegure el cumplimiento de la desigualdad (11.6). Entonces, se encontrará una sucesión de elementos no nulos x_n [1] tal que $|l(x_n)| \geqslant n^2 \|x_n\|$. Pongamos $y_n = \frac{1}{n\|x_n\|} x_n$. Por cuanto $\|y_n - 0\| = \|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, resulta que, en virtud de que la funcional es continua, $l(y_n) \to l(\mathbf{0}) = 0$, cuando $n \to \infty$, lo que contradice la desigualdad $l(y_n) = \frac{1}{n\|x_n\|} \times l(x_n) \geqslant n$. La necesidad está demostrada.

2. SUFICIENCIA. Supongamos que la funcional lineal $l(x)$ es acotada, es decir, existe una constante C tal que para todo elemento x se verifique la desigualdad (11.6). Ahora, sea x_0 un punto arbitrario de l^2, y sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de elementos de l^2 que converge en norma de l^2 hacia x_0. Entonces, por ser la funcional lineal, $l(x_n) - l(x_0) = l(x_n - x_0)$, de suerte que, en virtud de la desigualdad (11.6), $|l(x_n) - l(x_0)| = |l(x_n - x_0)| \leqslant C \|x_n - x_0\|$. De la última desigualdad proviene que $l(x_n) \to l(x_0)$ cuando $n \to \infty$. La suficiencia está demostrada.

El teorema demostrado permite introducir la norma de una funcional lineal continua.

Definición 5. *Se llama norma de una funcional lineal continua $l(x)$ la cota superior exacta de la relación $\frac{|l(x)|}{\|x\|}$ sobre el conjunto de todos los elementos x del espacio l^2.*

La norma de una funcional lineal continua $l(x)$ se denotará con el símbolo $\|l\|$.

Así pues, por definición,

$$\|l\| = \sup_{x \in l^2} \frac{|l(x)|}{\|x\|}. \tag{11.7}$$

Es válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 11.2 (teorema de Riesz). *Para toda funcional lineal continua $l(x)$ existe un (y sólo uno) elemento $\boldsymbol{a}$ del espacio l^2 de tal*

[1] Para un elemento nulo $\mathbf{0}$ la desigualdad (11.6) se cumple con cualquier constante C, pues, por ser lineal la funcional, $l(\mathbf{0}) = l(0x) = 0 \cdot l(x) = 0$.

índole que para todos los elementos x del espacio l^2 se verifica una igualdad

$$l(x) = (a, x), \tag{11.8}$$

con la particularidad de que $\| l \| = \| a \|$.

DEMOSTRACION. Sea $\{e_k\}$ un sistema ortonormalizado cerrado (11.3), y $a_k = l(e_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Cerciorémonos de que una sucesión de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ representa un elemento del espacio l^2, es decir, de lo que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ es convergente.

Para cualquier número n pongamos $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$.

Entonces, en virtud de que la funcional es lineal, tenemos

$$l(S_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k l(e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \| S_n \|^2. \tag{11.9}$$

Por otro lado, del teorema 11.1 y de la definición de norma de la funcional lineal continua (11.7) se deduce que

$$| l(S_n) | \leqslant \| l \| \cdot \| S_n \|. \tag{11.10}$$

De (11.9) y (11.10) obtenemos que $\| S_n \| \leqslant \| l \|$, o, que es lo mismo,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \| l \|^2. \tag{11.11}$$

La última desigualdad, válida para cualquier número n, demuestra la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$, es decir, demuestra que la sucesión $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ representa cierto elemento de l^2, el cual se denotará con a.

Sea, ahora, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ un elemento arbitrario de l^2. Entonces, por ser cerrado el sistema ortonormalizado (11.3), la suma parcial de la serie de Fourier $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ converge en norma de l^2 hacia x, cuando $n \to \infty$. En virtud de que la funcional es continua, de aquí se deduce que

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \to l(x) \text{ para } n \to \infty.$$

Pero, de lo que la funcional es lineal y de la igualdad $a_k = l(e_k)$ proviene que

$$l\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k l(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k.$$

Por consiguiente, hemos demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k a_k = l(x),$$

y esto significa precisamente que se ha establecido la igualdad (11.8) con el elemento *unívocamente* definido a, cuyas coordenadas son iguales a $l(e_k)$.

Resta por cerciorarse de que $\| l \| = \| a \|$. De la desigualdad (11.11), válida para cualquier número n, proviene en seguida que

$$\| a \| \leqslant \| l \|. \tag{11.12}$$

Por otro lado, de la igualdad (11.8), ya demostrada, obtenemos, con ayuda de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski [1] $|(a, x)| \leqslant \leqslant \| a \| \cdot \| x \|$, que $|l(x)| \leqslant \| a \| \cdot \| x \|$, de donde proviene, en virtud de la definición de la norma (11.7), que

$$\| l \| \leqslant \| a \|. \tag{11.13}$$

De (11.12) y (11.13) concluimos que $\| l \| = \| a \|$. El teorema está completamente demostrado.

El teorema demostrado establece la forma general de cualquier funcional lineal continua en el espacio l^2.

3. Sobre la compacticidad débil de un conjunto acotado en la norma de l^2.

***Definición* 1.** *Un conjunto E de elementos de l^2 se denomina acotado (o acotado en norma), si existe una constante M tal que $\| x \| \leqslant M$ para todos los elementos x del conjunto E.*

***Definición* 2.** *Un conjunto infinito E de elementos de l^2 se llama compacto, si en cualquier sucesión de elementos $\{x_n\}$, perteneciente al conjunto E, puede elegirse una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que sea convergente en norma de l^2.*

Es obvio que *todo conjunto compacto E de elementos de l^2 es acotado* [2].

En un espacio euclídeo de un número *finito* de dimensiones es cierta también la afirmación inversa: *todo conjunto acotado E que contiene un número infinito de elementos es compacto* (teorema de Bolzano—Weierstrass). Pero, en un espacio de dimensión *infinita*, como es l^2, de lo que un conjunto infinito de elementos de E está acotado ya no proviene la compacticidad de dicho conjunto.

Por ejemplo, un conjunto $\{e_k\}$ de todos los elementos del sistema

---

[1] Según el teorema 10.1, la desigualdad de Cauchy — Buniakovski es válida para cualesquiera dos elementos de todo espacio euclídeo.

[2] En efecto, de lo que el conjunto E está acotado se deduciera la existencia de una sucesión de elementos, pertenecientes a E, para los cuales la sucesión de tal sucesión diverge en la norma de l^2, lo que contradice la condición de compacticidad del conjunto E.

ortonormalizado (11.3) es acotado (pues, las normas de todos los elementos son iguales a la unidad), pero no es compacto (pues, para que la sucesión de elementos converja en norma de l^2, es necesario que la norma de la diferencia de dos elementos con los números k y $k+1$ tienda hacia cero cuando $k \to \infty$, y para cualquier subsucesión, formada de los elementos de (11.3), se verifique la igualdad $\| e_k - e_l \|^2 = \| e_k \|^2 + \| e_l \|^2 = 2$, cualesquiera que sean k y l desiguales).

Es natural tratar de introducir el concepto de compacticidad de un conjunto en el sentido más débil (que en la definición 2), con tal de que todo conjunto acotado (que contiene un número infinito de elementos) sea compacto en el sentido débil.

***Definición* 3.** *Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos del espacio l^2 se denomina débilmente convergente hacia un elemento x_0 de este espacio, si para cualquier elemento a del espacio l^2 resulta válida la relación*

$$(x_n, a) \to (x_0, a) \quad \text{para} \quad n \to \infty.$$

Notemos que de la convergencia de $\{x_n\}$ hacia x_0 en la norma de l^2 y de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski se deduce convergencia débil de $\{x_n\}$ hacia x_0, puesto que $| (x_n, a) - (x_0, a) | = | (x_n - x_0, a) | \leqslant \sqrt{\| x_n - x_0 \| \cdot \| a \|}$ para todo elemento a. La débil convergencia de $\{x_n\}$ hacia x_0 no lleva consigo, en el caso general, la convergencia de $\{x_n\}$ hacia x_0 en norma de l^2. Por ejemplo, la sucesión $\{e_k\}$ de todos los elementos del sistema ortonormalizado (11.3) converge débilmente hacia un elemento nulo 0, pues para todo elemento a del espacio l^2 se cumple la desigualdad de Bessel [1])

$$\sum_{k=1}^{\infty} (e_k, a)^2 \leqslant \| a \|^2, \quad \text{de acuerdo con la cual}$$

e_n, $a) \to (0, a) = 0$, cuando $n \to \infty$. Además, se ha demostrado anteriormente que la sucesión $\{e_k\}$ no converge en la norma de l^2.

La convergencia en la norma de l^2 (en diferencia de la convergencia débil) se llama a menudo *convergencia fuerte*.

***Definición* 4.** *Un conjunto infinito E de elementos de l^2 se llama débilmente compacto, si en cualquier sucesión de elementos $\{x_n\}$, perteneciente al conjunto E, puede elegirse una subsucesión débilmente convergente.*

Es válido el siguiente teorema fundamental.

***Teorema 11.3*.** *Todo conjunto acotado en l^2, compuesto de un número infinito de elementos, es débilmente compacto.*

---

[1]) De acuerdo con el teorema 10.4, la desigualdad de Bessel es válida para cada elemento y cualquier sistema ortonormalizado en un espacio euclídeo arbitrario.

DEMOSTRACION. Sea E un subconjunto acotado arbitrario de l^2 que contiene un número infinito de elementos, y sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de elementos de E. El carácter acotado del conjunto E permite afirmar que $\| x_n \| \leqslant M$, donde M es una constante. Pero, en tal caso, de la relación $\| x_n \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{nk}^2$ se desprende que la sucesión numérica de las k-ésimas coordenadas x_{nk} de los elementos x_n es acotada para cualquier número k. Por consiguiente, en virtud del teorema de Bolzano—Weierstrass (véase teorema 3.3, v. I), en la sucesión $\{x_n\}$ puede elegirse tal subsucesión de elementos $\{x_n^{(1)}\}$ que las primeras coordenadas de estos elementos formen una sucesión numérica convergente; después, a partir de $\{x_n^{(1)}\}$ puede elegirse una subsucesión de elementos $\{x_n^{(2)}\}$ tal que tanto las primeras, como las segundas coordenadas de estos elementos formen las sucesiones numéricas convergentes, etc. Realizados k pasos, elegimos una subsucesión de elementos $\{x_n^{(k)}\}$, en la cual cada una de las primeras coordenadas forma una sucesión numérica convergente.

Pongamos $y_n = x_n^{(n)}$. Es evidente que $\{y_n\}$ es una subsucesión de la sucesión original de elementos $\{x_n\}$ y que una sucesión formada por *cualquier* coordenada de los elementos y_n es sucesión numérica convergente, es decir, si $y_n = (y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nk}, \ldots)$, para todo k, la sucesión y_{nk} converge cuando $n \to \infty$. Denotemos con ξ_k el límite de la sucesión de las k-ésimas coordenadas de los elementos y_n, es decir, pongamos $\xi_k = \lim\limits_{n\to\infty} y_{nk}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ y cerciorémonos de que la sucesión $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ es un elemento del espacio l^2, es decir, de que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k^2$ es convergente. Por cuanto $\| y_n \| \leqslant M$ para todos los números n, tenemos para todo n

$$\sum_{k=1}^{N} y_{nk}^2 \leqslant M^2 \tag{11.14}$$

y, con mayor razón,

$$\sum_{k=1}^{N} y_{nk}^2 \leqslant M^2 \tag{11.15}$$

(para *cualquier* número fijo N y para todos los números n).

Pasando en (11.15) al límite para $n \to \infty$, obtendremos que $\sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k^2 \leqslant M^2$ con cualquier número N, y esto es indicio de que la sucesión $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ representa cierto elemento de l^2, que se designará por ξ.

Resta demostrar que la sucesión $\{y_n\}$ es débilmente convergente hacia este elemento ξ, es decir, probar que para todo elemento

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ del espacio l^2 es válida la relación $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n, a) = (\xi, a)$, o bien, que es igual, la relación

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} y_{nk} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k.$$

En vista de que $\lim\limits_{n\to\infty} y_{nk} = \xi_k$, y, en virtud del teorema sobre el paso al límite término a término (véase teorema 1.6), basta mostrar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_{nk} \cdot a_k \tag{11.16}$$

converge uniformemente respecto de todos los números n. Fijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. De la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ se deduce la existencia de tal número m_0 que

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{M^2} \tag{11.17}$$

para todos los $m \geqslant m_0$ y para cada p natural ($p = 1, 2, \ldots$).

Aplicando al resto de la serie (11.16) la desigualdad de Cauchy—Buniakovski para las sumas [1])

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk} a_k \right| \leqslant \left[\sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk}^2 \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k^2 \right]^{1/2}$$

y aprovechando las desigualdades (11.14) y (11.17), llegamos a que

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} y_{nk} a_k \right| < \varepsilon$$

para cualesquiera $m \geqslant m_0$, p naturales y, simultáneamente, para todos los números n. Mas, esto significa precisamente que la serie (11.16) converge uniformemente respecto de todos los números n. El teorema está demostrado.

El teorema demostrado es de muy amplio uso. En particular, se emplea frecuentemente en la teoría de los métodos de variación en la resolución de los problemas de la física matemática.

§ 2. Espacio L^2

1. Propiedades más simples del espacio L^2. El espacio L^2 ya lo conocimos en el p. 7, § 4, cap. 8, dedicado al estudio de las clases L^p para $p \geqslant 1$.

[1]) Esta desigualdad se ha establecido en el Complemento 1 al capítulo 1, v. II.

Recordemos que se denomina espacio $L^2(E)$ a un conjunto de todas las funciones $\{f(x)\}$ de tal género que cada función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E, y cada función $f^2(x)$, sumable (es decir, integrable en el sentido de Lebesgue) sobre el conjunto E, con la particularidad de que no distinguimos funciones equivalentes sobre E, considerándolas como un solo elemento de $L^2(E)$.

$L^2(E)$ se llama brevemente *espacio de funciones con un cuadrado sumable* (sobre el conjunto E).

Notemos ahora mismo que todas las integrales en este párrafo se entienden en el sentido de Lebesgue, y por el conjunto E se entiende un conjunto medible de medida finita positiva en la recta infinita, aunque toda la teoría que se expone se extiende sin complicaciones algunas al caso de un conjunto arbitrario de medida positiva E en un espacio de cualquier número n de mediciones.

En el p. 7, § 4, cap. 8 se ha establecido que el espacio $L^2(E)$ es espacio normado lineal con la norma de cualquier elemento $f(x)$ de la forma

$$\|f\| = \left(\int_E f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \tag{11.18}$$

El espacio $L^2(E)$ se diferencia esencialmente de todos los demás espacios $L^p(E)$ para $p \neq 2$ en lo que $L^2(E)$ es un espacio euclídeo dotado de producto escalar de cualesquiera dos elementos $f(x)$ y $g(x)$ de la forma [1])

$$(f, g) = \int_E f(x)\,g(x)\,dx. \tag{11.19}$$

La validez en $L^2(E)$ de todos los cuatro axiomas del producto escalar[2]) proviene con facilidad de la independencia del producto $f(g)\,g(x)$ del orden de los factores, de las propiedades lineales de la integral y de la condición de equivalencia a cero de una función $f^2(x)$ medible, sumable y no negativa.

Indiquemos, además, que de (11.18) y (11.19) se deduce que (al igual que en todo espacio euclídeo) la norma y el producto escalar en L^2 están ligados entre sí mediante una relación

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Por fin, recordemos que en el p. 7. § 4, cap. 8 se ha demostrado que el espacio $L^2(E)$ es completo. [3])

---

[1]) La definición de espacio euclídeo y de producto escalar se da en el § 1, cap. 10.

[2]) Véanse en el § 1, cap. 10 los axiomas de un producto escalar.

[3]) Recordemos que un espacio normalizado lineal se llama *completo*, si para cualquier sucesión fundamental $\{f_n\}$ de elementos de este espacio (es decir, para la sucesión $\{f_n\}$, para la cual $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geqslant n} \|f_m - f_n\| = 0$) existe un elemento f del espacio R, hacia el cual converge en R esta sucesión.

Pasemos, ahora, al esclarecimiento de las propiedades más profundas del espacio $L^2(E)$.

2. Separabilidad del espacio L^2. Veamos al principio un espacio normalizado lineal arbitrario R.

Definición 1. *Un conjunto M de elementos de un espacio normalizado lineal R se denomina siempre denso (o denso en R), si para todo elemento f del espacio R podemos separar una sucesión de elementos $\{f_n\}$ de M que converja en la norma de R hacia f.*

Definición 2. *Un espacio normalizado lineal R se llama separable, si en el mismo existe un conjunto numerable de elementos M siempre denso.*

El objetivo de este punto consiste en demostrar la separabilidad del espacio L^2.

Teorema 11.4. *Un conjunto de funciones continuas sobre E es siempre denso en $L^2(E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(x)$ una función arbitraria de $L^2(E)$. Sin limitar la generalidad de los razonamientos, podemos considerar que $f(x) \geqslant 0$. En efecto, al introducir dos funciones no negativas

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

es fácil convencerse de la validez del teorema para toda función $f \in L_2$ a condición de que para las funciones no negativas el mismo está demostrado.

Además, podemos suponer que $f(x)$ toma siempre los valores finitos. Así pues, sea $f(x) \in L_2(E)$ y $0 \leqslant f(x) < \infty$.

Para cada número n, veamos una sucesión de conjuntos [1]) disjuntos

$$E_n^k = E\left[\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Entonces, evidentemente, para todo número n $(n = 1, 2, \ldots)$ la suma de los conjuntos mencionados respecto de todos los $k = 0, 1, \ldots$ da el conjunto E, es decir, $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_n^k$.

Construyamos una sucesión $\{f_n(x)\}$ de funciones, definidas sobre el conjunto E, al poner para cada número n que $f_n(x) = k/2^n$, cualquiera que sea x perteneciente a E_n^k. De este modo, cada función $f_n(x)$ es función «escalonada» sobre el conjunto E (que toma a lo sumo un número numerable de valores).

Ahora, es también obvio que para todos los números n y todos los puntos x del conjunto E queda válida una desigualdad

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) < 1/2^n,$$

[1]) Recordemos que el símbolo E [f satisface la condición A] denota un conjunto de todos los puntos de E, para los cuales la función $f(x)$ satisface la condición A.

de la cual proviene que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ uniformemente sobre el conjunto E. Pongamos $\Psi_n(x) = \min\{n, f_n(x)\}$.

Toda función $\Psi_n(x)$ toma sobre el conjunto E sólo un número *finito* de valores, con la particularidad de que la sucesión $\{\Psi_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ *en todo punto* de E. Además, por cuanto en cada punto de E se cumple la desigualdad $0 \leqslant f(x) - \Psi_n(x) \leqslant f(x)$, de la cual proviene que $[f(x) - \Psi_n(x)]^2 \leqslant f^2(x)$ en todo punto de E, entonces, en virtud del corolario del teorema 8.19, la sucesión $[f(x) - \Psi_n(x)]^2$ converge hacia cero en $L^1(E)$, es decir, la sucesión $\Psi_n(x)$ converge hacia $f(x)$ en $L^2(E)$.

Queda por demostrar que toda función $\Psi_n(x)$ puede aproximarse en la norma de $L^2(E)$ mediante una función continua con cualquier grado de exactitud. Recordemos que cada función $\Psi_n(x)$ toma sólo un número finito de valores, es decir, tiene por expresión $\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k\omega_k(x)$, donde a_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ son unos números constantes, y $\omega_k(x)$, las así llamadas funciones *características* del conjunto E_k:

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ sobre el conjunto } E_k, \\ 0 \text{ fuera del conjunto } E_k. \end{cases}$$

De este modo, para finalizar la demostración del teorema es suficiente construir una sucesión de funciones continuas que converja en $L^2(E)$ hacia la función $\omega(x)$ de la forma

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 \text{ sobre el conjunto } E_0, \\ 0 \text{ fuera del conjunto } E_0, \end{cases}$$

donde E_0 es un conjunto medible contenido en E.

Para el conjunto E_0 y para todo número n existen un conjunto abierto G_n que contiene E_0, y un conjunto cerrado F_n contenido en E_0 de tal género que la medida de la diferencia $G_n - F_n$ sea inferior a $1/n$ [1]).

Denotemos con el símbolo $\widetilde{F}_n$ un complemento del conjunto G_n y pongamos

$$\varphi_n(x) = \frac{\rho(x, \widetilde{F}_n)}{\rho(x, \widetilde{F}_n) + \rho(x, F_n)},$$

donde el símbolo $\rho(x, F)$ denota la distancia del punto x al conjunto F.

Evidentemente, toda función $\varphi_n(x)$ es continua en E, es igual a la unidad en F_n, igual a cero en $\widetilde{F}_n$ y satisface siempre la condición

[1]) En virtud de la definición de mensurabilidad del conjunto E_0 y del corolario del teorema 8.5 (véase p. 2, § 2, cap. 8).

$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1$. De aquí obtenemos la siguiente estimación para la norma de la diferencia $\varphi_n(x) - \omega(x)$:

$$\| \varphi_n - \omega \|^2_{L^2(E)} = \int_E [\varphi_n(x) - \omega(x)]^2 \, dx \leqslant \int_{G_n \setminus F_n} dx < \frac{1}{n}, \qquad (11.20)$$

la cual da por terminado la demostración del teorema.

Demostremos ahora el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 11.5.** *Para cualquier conjunto medible acotado E el espacio $L^2(E)$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero un caso en que el conjunto E es un segmento $[a, b]$. Probemos que podemos tomar a título de conjunto numerable siempre denso en $L^2([a, b])$ un conjunto M de todos los polinomios de coeficientes racionales [1]).

De acuerdo con el teorema 11.4, toda función $f(x)$ de $L^2([a, b])$ puede aproximarse con cualquier grado de exactitud en la norma de $L^2([a, b])$ mediante una función continua. Luego, de acuerdo con el teorema de Weierstrass 1.18, toda función continua en el segmento $[a, b]$ puede uniformemente aproximarse en dicho segmento (y, por tanto, también en la norma de $L^2([a, b])$) con cualquier grado de exactitud mediante un polinomio algebraico de coeficientes reales.

Por fin, es obvio que un polinomio algebraico de coeficientes reales puede uniformemente aproximarse en $[a, b]$, y, por consiguiente, en la norma de $L^2([a, b])$ con cualquier grado de exactitud mediante un polinomio de coeficientes racionales. Con esto queda finalizada la demostración del teorema en el caso, cuando el conjunto E es el segmento $[a, b]$.

Ahora, sea E un conjunto medible acotado arbitrario. Por cuanto el conjunto E es acotado, se encontrará un segmento $[a, b]$ que contenga el conjunto E.

Supongamos que $f(x)$ es una función arbitraria de $L^2(E)$. Hagamos prolongar esta función al segmento $[a, b]$, poniéndola igual a cero fuera de E. Resta notar que la función $f(x)$, prolongada de la manera indicada, pertenece a la clase $L^2([a, b])$, y, por eso, de conformidad con lo demostrado más arriba, puede aproximarse con cualquier grado de exactitud en la norma de $L^2([a, b])$ (y, con mayor razón, en la norma de $L^2(E)$) mediante los polinomios de coeficientes racionales. Por consiguiente, en este caso también los polinomios de coeficientes racionales forman un conjunto siempre denso en $L^2(E)$. El teorema está completamente demostrado.

3. Existencia en L^2 de un sistema ortonormalizado cerrado compuesto de un número numerable de elementos. Para construir en L^2 un sistema ortonormalizado cerrado de elementos, partiremos de

[1]) El hecho de que este conjunto M es numerable se desprende de numerabilidad de todos los números racionales y de numerabilidad del número de todos los polinomios de diferentes grados.

lo que en L^2 existe un conjunto siempre denso de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$

Demostremos que un sistema normalizado cerrado puede ser construido con ayuda de las combinaciones [1]) lineales finitas de elementos del conjunto siempre denso $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$

Este método de construir un sistema ortonormalizado se llama, de ordinario, *proceso de ortogonalización*.

Convengamos en considerar que entre los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ no hay linealmente dependientes [2]) (de lo contrario, al aumentar sucesivamente el número n, tendríamos que eliminar en la $\{f_n\}$ cada elemento f_n que es una combinación lineal de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$).

Construyamos un sistema de elementos no nulos ortogonales dos a dos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ tales que para todo número n cada uno de los elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ sea una combinación lineal de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$, y, viceversa, cada uno de los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sea una combinación lineal de elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ [3]).

Demostremos, empleando el método de inducción matemática, que el citado sistema de elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$ puede ser sucesivamente definido mediante las relaciones

$$\Psi_1 = f_1, \tag{11.21}$$

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} (f_1, \Psi_1) & (f_1, \Psi_2) & \ldots & (f_1, \Psi_{n-1}) & f_1 \\ (f_2, \Psi_1) & (f_2, \Psi_2) & \ldots & (f_2, \Psi_{n-1}) & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (f_n, \Psi_1) & (f_n, \Psi_2) & \ldots & (f_n, \Psi_{n-1}) & f_n \end{vmatrix} \quad \text{para } n \geqslant 2. \tag{11.22}$$

Está claro que el elemento Ψ_1, definido por la relación (11.21), es no nulo (pues, de lo contrario, para todo número n resultarían ser linealmente dependientes los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

De este modo, cuando $n=1$, quedan cumplidas todas las exigencias mencionadas anteriormente. Supongamos ahora que el sistema $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$, construida con ayuda de las relaciones (11.21) y (11.22), satisface todos los requisitos citados más arriba y cerciorémonos de que en este caso se satisfacen también por el sistema $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$, construido con ayuda de las mismas relaciones.

De (11.22) se pone claro que un elemento Ψ_n es una combinación

[1]) Se dice que un elemento Ψ_n es combinación lineal de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_m$, si existen tales números reales $\alpha_m, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ que $\Psi_n = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_m f_m$.

[2]) Esto significa que ninguno de los elementos f_n de $\{f_n\}$ es combinación lineal de un número finito de otros elementos de $\{f_n\}$.

[3]) En el lenguaje del álgebra lineal esto significa que la cápsula lineal tendida sobre los elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ coincide con la cápsula lineal tendida sobre los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

lineal de elementos $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, y, por lo tanto, no es nulo (de lo contrario, sería un elemento nulo la citada combinación lineal, es decir, los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ resultarían ser linealmente dependientes).

Luego, por cuanto los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ se expresan linealmente en términos de $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{n-1}$, y como el menor en la esquina derecha inferior del determinante (11.22) de f_n es igual a $\| \Psi_{n-1} \|$ [1]), y, por eso, es distinto de cero, de la igualdad (11.22) concluimos que también el elemento f_n se expresa linealmente en términos de $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$.

Por fin, de (11.22) se deduce inmediatamente que el elemento Ψ_n es ortogonal con relación a cada uno de los elementos $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ $\ldots, \Psi_{n-1}$. En efecto, si k es cualquiera de los números $1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, entonces, al multiplicar ambos miembros de (11.22) escalarmente por Ψ_k, obtendremos en el segundo miembro un determinante cuyas columnas k-ésima y n-ésima son iguales. De lo que tal determinante es igual a cero proviene que $(\Psi_n, \Psi_k) = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Queda finalizada la inducción y el sistema $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots$, que satisface las exigencias mencionadas, está construido.

Ahora, al poner, para cada número n, $\varphi_n = \Psi_n / \| \Psi_n \|$, obtenemos un sistema ortonormalizado $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$

El carácter cerrado del sistema construido $\{\varphi_n\}$ se deduce en seguida de lo que todo elemento del conjunto siempre denso $\{f_n\}$ es una combinación lineal de un número finito de elementos del sistema $\{\varphi_n\}$.

De la numerabilidad del conjunto siempre denso de elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ se desprende que el sistema ortonormalizado cerrado construido contiene *a lo sumo un número numerable* de elementos. Mas, el número de elementos de este sistema *no puede ser finito*, pues, esto significaría que el espacio L^2 es de dimensión finita [2]).

Con esto queda definitivamente demostrada la existencia en L^2 de un sistema ortonormalizado cerrado compuesto de un número numerable de elementos.

Señalemos en conclusión que un sistema ortonormalizado cerrado de elementos en L^2 se denomina, a menudo, *base ortonormalizada* [3]).

---

[1]) Para cerciorarse de esto, basta escribir la igualdad (11.22) para el número $(n-1)$ y multiplicarla escalarmente por Ψ_{n-1}.

[2]) El hecho de que la dimensión del espacio $L^2(E)$ es infinita se deduce directamente de que para cualquier número n, prefijado de antemano en este espacio, existen n elementos linealmente independientes $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

[3]) Un sistema de elementos $\{\varphi_n\}$ se llama *base* del espacio $L^2(E)$, si a todo elemento f de $L^2(E)$ le corresponde unívocamente un desarrollo de este elemento en serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ con coeficientes constantes c_n, convergente hacia el elemento f en la norma del espacio $L^2(E)$.

4. Isomorfismo de los espacios L^2 y l^2 y corolarios. Al igual que en el espacio l^2, se introduce en el espacio $L^2(E)$ el concepto de convergencia débil de una sucesión de elementos y el de compacticidad débil de un conjunto de elementos.

Definición 1. *Una sucesión $\{f_n(x)\}$ de elementos del espacio $L^2(E)$ se denomina débilmente convergente hacia un elemento $f(x)$ de este espacio, si para cualquier elemento $g(x)$ de $L^2(E)$ es válida la relación*

$$(f_n, g) \to (f, g) \quad para \quad n \to \infty,$$

o bien, que es lo mismo,

$$\int_E f_n(x)\, g(x)\, dx \to \int_E f(x)\, g(x)\, dx \quad para \ n \to \infty.$$

De un modo elemental, por suma analogía con el caso de l^2, se demuestra que de la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en la norma de $L^2(E)$ se deduce la convergencia débil de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$. Por supuesto, la convergencia débil de los elementos de $L^2(E)$ no lleva consigo la convergencia en la norma de $L^2(E)$ (de ejemplo puede servir cualquier sucesión ortonormalizada de elementos del espacio $L^2(E)$).

Definición 2. *Un conjunto infinito M de elementos del espacio $L^2(E)$ se llama débilmente compacto, si en cualquier sucesión de elementos $\{f_n(x)\}$, perteneciente al conjunto M, puede separarse una subsucesión débilmente convergente.*

Por suma analogía con lo que se ha hecho para el espacio l^2, en el espacio L^2 se introduce el concepto de funcional lineal continua.

Definición 3. *Una funcional $l(f)$, definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$, se llama lineal, si para cualesquiera dos elementos f y g del espacio $L^2(E)$ y para cualesquiera números reales α y β se verifica la igualdad $l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g)$.*

Convengamos en llamar los elementos f de $L^2(E)$ *puntos* de este espacio (en los casos cuando ello sea cómodo).

Definición 4. *Una funcional $l(f)$, definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$, se llama continua en un punto f_0 de dicho espacio, si para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de elementos de $L^2(E)$, convergente en la norma de $L^2(E)$ hacia el elemento f_0, una sucesión numérica $l(f_n)$ converge hacia $l(f_0)$.*

Definición 5. *Una funcional $l(f)$ se denomina simplemente continua, si es continua en cada punto f del espacio $L^2(E)$.*

Lo mismo que en el caso de l^2, es fácil demostrar que si una funcional lineal en $L^2(E)$ es continua al menos en un solo punto de $L^2(E)$, será continua en todo punto de $L^2(E)$, es decir, es simplemente continua.

Surge, naturalmente, la cuestión de aplicación en el espacio $L^2(E)$ del teorema **11.2** sobre la forma general de la funcional lineal continua y del 11.3 sobre la compacticidad débil de todo conjunto acotado (en norma), demostrados ambos para el espacio l^2.

Establezcamos una relación profunda existente entre los espacios L^2 y l^2, que nos permitirá constatar inmediatamente la validez para el espacio L^2 de los teoremas que acabamos de citar.

Introduzcamos la siguiente noción fundamental.

Definición 6. *Dos espacios euclídeos arbitrarios R y R' se llaman isomorfos, si entre los elementos de dichos espacios se puede establecer una correspondencia biunívoca de un modo tal que, a condición de que los elementos x' e y' del espacio R' son imágenes de los elementos x e y del espacio R, se cumplan los siguientes requisitos:* 1) *un elemento $x' + y'$ del espacio R' es la imagen del elemento $x + y$ del espacio R;* 2) *con cualquier λ real, un elemento $\lambda x'$ del espacio R' es la imagen del elemento λx del espacio R;* 3) *los productos escalares (x', y') y (x, y) son iguales.*

En el curso de álgebra lineal se establece que todos los espacios euclídeos n-dimensionales son isomorfos entre sí e isomorfos al espacio E^n.

El objetivo principal de este punto consiste en establecer el isomorfismo de los espacios euclídeos de dimensión infinita $L^2(E)$ y l^2. Pero, demostremos, ante todo, el siguiente teorema notable.

Teorema 11.6 (teorema de Riesz—Fisher). *Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema ortonormalizado arbitrario en $L^2(E)$* [1]*. Entonces, para toda sucesión de números reales $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ que satisface una condición $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, es decir, es un elemento de l^2, existe una, y sólo una, función $f(x)$ del espacio $L^2(E)$ tal que $c_n = (f, \varphi_n) = \int f(x)\varphi_n(x)\,dx$ y $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 = \int_E f^2(x)\,dx$.*

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$. La sucesión $\{f_n\}$ es fundamental, puesto que para $m \geqslant n$ se verifica la igualdad $\|f_m - f_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2$ y, por hipótesis, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ es convergente. Mas, en este caso, por ser completo el espacio $L^2(E)$ (la completitud fue establecida en el p. 7, § 4, cap. 8) existe un elemento f del espacio $L^2(E)$ de tal género que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f \right\| = 0. \qquad (11.23)$$

[1]) No se presupone la completitud, ni menos aún, el carácter cerrado de este sistema.

De la última relación y de la identidad de Bessel (10.17), obtenida en el § 1, cap. 10 [1]), se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k^2=\|f\|^2, \text{ es decir, } \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2=\|f\|^2.$$

Demostremos que $(f, \varphi_k) = c_k$ para todo número k. Con este fin notemos que en virtud de que el sistema $\{\varphi_k\}$ es ortonormalizado para todo $n \geqslant k$, se verifica la igualdad

$$(f_n, \varphi_k)=\left(\sum_{l=1}^{n} c_l\varphi_l, \varphi_k\right)=\sum_{l=1}^{n} c_l(\varphi_l, \varphi_k)=c_k, \tag{11.24}$$

y tomemos en consideración que, en virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski,

$$|(f_n, \varphi_k)-(f, \varphi_k)|=|(f_n-f, \varphi_k)|\leqslant\sqrt{\|f_n-f\|\cdot\|\varphi_k\|}=\sqrt{\|f_n-f\|}$$

y, en vista de (11.23), es válida la relación

$$(f_n, \varphi_k)\to(f, \varphi_k) \quad \text{para} \quad n\to\infty. \tag{11.25}$$

De (11.24) y (11.25) obtenemos que $(f, \varphi_k) = c_k$ para todo número k.

Resta por demostrar que f es el *único* elemento de $L^2(E)$ que satisface todas las condiciones del teorema. Sea g cualquier otro elemento de $L^2(E)$ que satisface todas las condiciones del teorema. De la desigualdad de Cauchy—Buniakovski $|(f_n - f, g)| \leqslant \leqslant \sqrt{\|f_n-f\|}\cdot\sqrt{\|g\|}$ y de (11.23) se deduce que

$$(f_n-f, g)\to 0 \quad \text{para} \quad n\to\infty. \tag{11.26}$$

Pero, de la igualdad $(g, \varphi_k) = c_k$ y de los axiomas del producto escalar proviene que

$$(f_n-f, g)=\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k-f, g\right)=\sum_{k=1}^{n} c_k(g, \varphi_k)-(f, g)=\sum_{k=1}^{n} c_k^2-(f, g),$$

de suerte que, en vista de (11.26),

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2=(f, g). \tag{11.27}$$

De (11.27) y de las relaciones $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2=\|f\|^2$ y $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2=\|g\|^2$ obtenemos

$$\|f-g\|=(f-g, f-g)=\|f\|^2-2(f, g)+\|g\|^2=0.$$

[1]) La citada desigualdad de Bessel se cumple para todo sistema ortonormalizado en cualquier espacio euclídeo.

Mas, esto significa precisamente que la diferencia $f - g$ es un elemento nulo de $L^2(E)$, es decir, $f = g$. El teorema está completamente demostrado.

OBSERVACIÓN. Si un sistema ortonormalizado $\{\varphi_n\}$ está cerrado o, por lo menos completo, la unicidad del elemento f tendrá lugar incluso sin la exigencia de que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$ (véase con esto motivo el teorema 10.8).

Apoyándonos en el teorema de Riesz—Fisher, demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 11.7. *Los espacios $L^2(E)$ y l^2 son isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Elijamos en el espacio $L^2(E)$ un sistema ortonormalizado cerrado $\{\varphi_k\}$ y pongamos en correspondencia a todo elemento f del espacio $L^2(E)$ un elemento $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ del espacio l^2 cuyas coordenadas c_k tienen por expresión $c_k = (f, \varphi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. En virtud del teorema 11.6, tal correspondencia es biunívoca.

Queda por demostrar que si a los elementos f y g del espacio $L^2(E)$ les corresponden, respectivamente, los elementos $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ y $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ del espacio l^2, entonces: 1) al elemento $f + g$ le corresponde el elemento $c + d = (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n, \ldots)$, 2) para todo λ real, al elemento λf le corresponde un elemento $\lambda c = (\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_n, \ldots)$, 3) se verifica la igualdad

$$(f, g) = (c, d) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k, \tag{11.28}$$

llamada, corrientemente, *igualdad generalizada de Parseval*.

Las exigencias 1) y 2) se deducen de las propiedades del producto escalar [1]). Demostremos la igualdad (11.28). Por ser cerrado el sistema $\{\varphi_k\}$, para cada una de las funciones f, g y $f + g$ son válidas las igualdades de Parseval

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2, \tag{11.29}$$

$$(f + g, f + g) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2. \tag{11.30}$$

Al sustraer (11.29) de (11.30), obtendremos

$$2(f, g) = 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.$$

El teorema está completamente demostrado.

---

[1]) Para demostrar 1), basta notar que $(f + g, \varphi_k) = (f, \varphi_k) + (g, \varphi_k) = c_k + d_k$.

El teorema demostrado permite considerar l^2 como una forma coordenada de notación de los elementos del espacio $L^2(E)$. Este teorema hace extender a $L^2(E)$ todas las afirmaciones establecidas para l^2, y viceversa.

En particular, del teorema 11.7 se deducen las siguientes afirmaciones.

1°. El espacio l^2 es completo.

2°. Cualquier conjunto acotado en norma de $L^2(E)$, que contiene un número infinito de elementos de $L^2(E)$, es débilmente compacto.

3°. Para toda funcional lineal continua $l(f)$, definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$, existe uno, y sólo un elemento g del espacio $L^2(E)$ de tal género que para todos los elementos f del espacio $L^2(E)$ se verifique la igualdad $l(f) = (f, g)$, con la particularidad de que

$$\| l \| = \sup_{f \in L^2(E)} \frac{|l(f)|}{\| f \|} = \| g \|.$$

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, el teorema 11.7 es una argumentación matemática de la equivalencia existente entre la «mecánica matricial» de Heisenberg y la «mecánica ondulatoria» de Schrödinger, la primera de las cuales empleaba como aparato matemático el espacio coordenado l^2, y la segunda, un espacio de funciones con cuadrado integrable L^2.

El teorema 11.7 sugiere, naturalmente, una idea de que ambos espacios, l^2 y L^2, son sólo dos diferentes realizaciones concretas de un mismo espacio abstracto, y nosotros pasamos al análisis de dicho espacio.

§ 3. Espacio abstracto de Hilbert

1. Concepto de espacio abstracto de Hilbert. Un espacio de Hilbert H, el que ya conocimos en forma de dos sus realizaciones concretas l^2 y L^2, se introduce axiomáticamente como una totalidad de elementos X, Y, Z, ... de cualquier género que satisfacen un sistema determinado de axiomas.

He aquí todos los axiomas a los cuales han de satisfacer los elementos del espacio abstracto de Hilbert H.

1. a) Axioma sobre la existencia de una regla, por medio de la cual a cualesquiera dos elementos X e Y del espacio H se les pone en correspondencia un elemento de este espacio Z, llamado suma de X e Y.

b) Axioma sobre la existencia de una regla, por medio de la cual a todo elemento X del espacio H y a todo número real λ se les pone en correspondencia un elemento del espacio H, llamado producto de X por λ.

c) Ocho axiomas del espacio lineal [1]).

II. a) Axioma sobre la existencia de una regla, por medio de la cual a cualesquiera dos elementos X e Y del espacio H se les pone en correspondencia un número, llamado producto escalar de estos elementos y denotado con el símbolo (X, Y).

b) Cuatro axiomas del producto escalar [2]).

III. Axioma sobre la completitud del espacio H respecto de la norma definida mediante una igualdad $\| X \| = \sqrt{(X, X)}$ [3]).

IV. Axioma sobre la existencia en H de cualquier número prefijado de antemano de elementos linealmente independientes.

V. Axioma sobre la existencia en H de un conjunto numerable de elementos siempre denso (en el sentido de la norma de H).

Dicho de otro modo, *se llama espacio de Hilbert H todo espacio euclídeo lineal completo separable de dimensión infinita.*

En el espacio de Hilbert H se introducen: 1) concepto de convergencia de una sucesión de elementos *en norma y de convergencia débil* (se dice que una sucesión de elementos $\{X_n\}$ es débilmente convergente hacia el elemento X, si para todo elemento Y es válida la relación $(X_n, Y) \to (X, Y)$ cuando $n \to \infty$); 2) concepto de *compacticidad débil* del conjunto M de elementos de H (que se define como la posibilidad de elegir en cualquier sucesión de elementos de M una subsucesión débilmente convergente); 3) concepto de funcionales *lineal* y *continua* $l(X)$, definidas sobre los elementos X del espacio H (una funcional $l(X)$ se llama *lineal*, si $l(\alpha X + \beta Y) = \alpha l(X) + \beta l(Y)$ para cualesquiera elementos X e Y del espacio H y para

---

[1]) Los ocho axiomas mencionados pueden encontrarse en cualquier curso de álgebra lineal. Para mayor comodidad damos aquí estos axiomas.

1°. $X + Y = Y + X$ (para cualesquiera elementos X e Y).

2°. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (para cualesquiera elementos X, Y y Z).

3°. Existe un elemento 0 tal que $X + 0 = X$ para todo elemento X.

4°. Para cada elemento X existe un elemento X' tal que $X + X' = 0$.

5°. $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta) \cdot X$ para todo elemento X y cualesquiera números reales α y β.

6°. $1 \cdot X = X$ para todo elemento X.

7°. $(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X$ para todo elemento X y cualesquiera números reales α y β.

8°. $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$ para cualesquiera elementos X e Y y todo número real α.

[2]) Los axiomas del producto escalar se tratan en el § 1, cap. 10. Para mayor comodidad damos aquí estos axiomas.

1°. $(X, Y) = (Y, X)$ para cualesquiera X e Y.

2°. $(X + Y, Z) = (X, Z) + (Y, Z)$ para cualesquiera elementos X, Y, Z.

3°. $(\alpha X, Y) = \alpha (X, Y)$ para cualesquiera elementos X e Y y todo número real α.

4°. $(X, X) > 0$ para todo elemento no nulo X, $(0, 0) = 0$.

[3]) Véase la definición de espacio normalizado lineal en el p. 7, § 4, cap. 8.

todos los números reales α y β; una funcional $l(X)$ se llama *continua en un «punto»* X_0, si $l(X_n) \to l(X_0)$ para toda sucesión $\{X_n\}$ de elementos de H, para la cual $\| X_n - X_0 \| \to 0$; simplemente *continua* se denomina una funcional $l(X)$ que es continua en todo punto X del espacio H).

Por suma analogía con lo que se ha hecho en el p. 3, § 2 para el espacio L^2, en el caso del espacio de Hilbert H se demuestra la existencia de *un sistema de elementos ortonormalizado cerrado* $\{\Phi_n\}$ (con este fin se realiza el proceso de ortogonalización de un conjunto de elementos de H siempre denso).

Para el espacio abstracto de Hilbert H (al igual que para L^2 también) es válido *el teorema de Riesz—Fisher*: si $\{\Phi_n\}$ es un sistema ortonormalizado arbitrario en H, y $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$, una sucesión arbitraria de números reales que satisfacen la condición $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, existe en H, y, además, el único elemento X tal que $c_k = (X, \Phi_k)$ y $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| X \|^2$.

La demostración de este teorema se diferencia de la del teorema 11.6 sólo en lo que en todos los razonamientos conviene tomar los elementos de H en lugar de los elementos del espacio L^2.

El teorema de Riesz—Fisher permite establecer el siguiente teorema fundamental.

Teorema 11.8. *Todos los espacios de Hilbert son isomorfos uno al otro.*

Basta demostrar que todo espacio de Hilbert H es isomorfo al espacio l^2, y con este fin es suficiente repetir la demostración del teorema 11.7, sustituyendo en todos los razonamientos los elementos de L^2 por los de H.

Del teorema 11.8 se deducen en seguida las siguientes *afirmaciones.*

1°. *Todo conjunto acotado en norma de H que contiene un número infinito de elementos de H es débilmente compacto.*

2°. *Para cada funcional lineal continua $l(X)$, definida sobre los elementos X del espacio de Hilbert H, existe uno (y sólo un) elemento Y de este espacio tal que para todos los elementos X del espacio H se verifique la desigualdad $l(X) = (X, Y)$, con la particularidad de que* $\| l \| = \sup\limits_{x \in H} \dfrac{|l(X)|}{\| X \|} = \| Y \|$.

OBSERVACIÓN. Se puede mostrar que todo conjunto M débilmente compacto de un número infinito de elementos de H es acotado (en la norma de H). De otras palabras, se puede demostrar que *el carácter acotado de un subconjunto M de H que contiene un número infinito de elementos constituye una condición necesaria y suficiente de la compacticidad débil de dicho subconjunto.*

2. Equivalencia de los conceptos de completitud y de carácter cerrado de un sistema ortonormalizado en el espacio de Hilbert. De acuerdo con el teorema 10.7, en cualquier espacio euclídeo (y, por lo tanto, en cualquier espacio de Hilbert) todo sistema ortonormalizado cerrado es completo. Ahora demostremos que en el espacio de Hilbert es válida también la afirmación inversa.

Teorema 11.9. *Todo sistema ortonormalizado completo de elementos de un espacio arbitrario de Hilbert es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\Phi_n\}$ un sistema ortonormalizado completo arbitrario de elementos de H, y sea Ψ cualquier elemento de H. Es suficiente mostrar que la n-ésima suma parcial S_n de la serie de Fourier del elemento Ψ según el sistema $\{\Phi_n\}$ converge hacia dicho elemento Ψ en norma de H.

Sea $c_k = (\Psi, \Phi_k)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\Phi_k$. Por cuanto la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ es convergente[1]) (en virtud de los axiomas del producto escalar y de lo que el sistema $\{\Phi_n\}$ es ortonormalizado) y puesto que, para todo $m \geqslant n$

$$\| S_m - S_n \| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k \right\| = \left(\sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k, \sum_{k=n+1}^{m} c_k \Psi_k \right) = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2,$$

la sucesión $\{S_n\}$ es *fundamental.*

Mas, en este caso, por ser completo el espacio H, existe un elemento de este espacio Ψ_0 tal que

$$\| S_n - \Psi_0 \| \to 0 \quad \text{para} \quad n \to \infty. \tag{11.31}$$

Resta por demostrar que $\Psi_0 = \Psi$. Con este fin es suficiente probar que los elementos Ψ y Ψ_0 tienen iguales coeficientes de Fourier[2]). Fijemos un número arbitrario k. Para todo $n \geqslant k$, en virtud del carácter ortonormalizado del sistema $\{\Phi_n\}$ y de los axiomas del producto escalar,

$$(S_n, \Phi_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} c_l\Phi_l, \Phi_k \right) = \sum_{l=1}^{n} c_l (\Phi_l, \Phi_k) = c_k. \tag{11.32}$$

Por otra parte, dado que, en vista de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski,

$$\begin{aligned} |(S_n, \Phi_k) - (\Psi_0, \Phi_k)| = |(S_n - \Psi_0, \Phi_k)| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\| S_n - \Psi_0 \| \cdot \| \Phi_k \|} = \sqrt{\| S_n - \Psi_0 \|}, \end{aligned}$$

[1]) La convergencia de esta serie proviene, por ejemplo, de la desigualdad de Bessel (véase teorema 10.10).

[2]) En efecto, la coincidencia de todos los coeficientes de Fourier de los elementos Ψ y Ψ_0 significaría que el elemento $\Psi - \Psi_0$ es ortogonal a todos los Φ_n, y, por tanto, es *nulo*, por ser completo el sistema Φ_n.

de (11.31) se desprende que

$$(S_n, \Phi_k) \to (\Psi_0, \Phi_k) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

De esta relación y de (11.32) obtenemos que $(\Psi_0, \Phi_k) = c_k = (\Psi, \Phi_k)$. El teorema está demostrado.

Corolario. *En el espacio de Hilbert H la completitud de un sistema ortonormalizado es equivalente a su carácter cerrado.*

OBSERVACIÓN. Para un espacio euclídeo no completo el teorema 11.9 no es, en el caso general, válido.

Ilustremos este hecho con el siguiente ejemplo [1].

Examinemos un espacio euclídeo C^0 de todas las funciones $f(x)$, *continuas* sobre un segmento $[-\pi, \pi]$, con un producto escalar definido mediante la igualdad

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Por supuesto, este espacio no es completo [2] (y, por lo tanto, no es de Hilbert). Construyamos en este espacio un sistema ortonormalizado completo de elementos que no sea cerrado. El proceso de construcción de tal sistema se subdivide en dos etapas.

1°. Primero demostremos que en el espacio de Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$ existe un sistema ortonormalizado completo $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ tal que la función $\varphi_0(x)$ es *discontinua* sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y todas las funciones $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, son *continuas* sobre dicho segmento.

Pongamos

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{para } -\pi \leqslant x < 0, \end{cases} \tag{11.33}$$

$$\Psi_{2n}(x) = \frac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\Psi_{2n-1} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, nx}{\sqrt{\pi}} & \text{para } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 0 & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

---

[1] Este ejemplo nos proporcionó Sh. A. Alímov.

[2] Es suficiente fijar una función $f_0(x)$ sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ que sea continua a trozos (pero no estrictamente continua) y observar que (en virtud del corolario 2 del p. 3, § 3, cap. 10) la sucesión de sumas parciales de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f_0(x)$ converge hacia esta función en la norma de $L^2[-\pi, \pi]$. Por ser completo el espacio $L^2[-\pi, \pi]$, la citada sucesión de sumas parciales es fundamental. Aunque todo elemento de dicha sucesión es una función continua en $[-\pi, \pi]$, su límite en $L^2[-\pi, \pi]$ (es decir, la función $f_0(x)$) no pertenece a C^0.

Indiquemos ahora mismo que la función $\Psi_0(x)$ es *discontinua* sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, mientras que todas las demás funciones $\Psi_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) son continuas en el mismo. Además, es fácil comprobar que la función $\Psi_0(x)$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ a cada una de las funciones $\Psi_n(x)$ (para todo $n = 1, 2, \ldots$).

Cerciorémonos de que aunque el sistema $\{\Psi_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) no es ortonormalizado en $L^2[-\pi, \pi]$, es, sin embargo, completo en el sentido de que cualquier elemento $f(x)$ del espacio $L^2[-\pi, \pi]$, ortogonal a todas las $\Psi_n(x)$ (para $n = 0, 1, 2, \ldots$), será idénticamente igual a cero.

En efecto, sea $f(x)$ un elemento cualquiera del espacio $L^2[-\pi, \pi]$, ortogonal a todas las $\Psi_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

De la ortogonalidad de $f(x)$ a todos los elementos de $\{\Psi_{2n-1}(x)\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) se deduce que sobre el segmento $[-\pi, 0]$ la función $f(x)$ es ortogonal al sistema $\left\{\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, nx}{\sqrt{\pi}}\right\}$ ($n = 1, 2, \ldots$), y, por consiguiente, por ser completo este sistema en $[-\pi, 0]$ (la completitud está establecida en la observación 1 del p. 2, §3, cap. 10) la función $f(x)$ es equivalente a cero sobre $[-\pi, 0]$.

En este caso de la ortogonalidad de $f(x)$ a todos los elementos $\Psi_{2n}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) se deduce que en el segmento $[0, \pi]$ la función $f(x)$ será ortogonal al sistema $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \frac{\sqrt{2}\cos nx}{\sqrt{\pi}}$ ($n = 1, 2, \ldots$), y, por ser completo este sistema en $[0, \pi]$ (la completitud está establecida en la misma observación 1, p. 2, § 3, cap. 10) la función $f(x)$ será también equivalente a cero en el segmento $[0, \pi]$.

De este modo, la función $f(x)$ es equivalente a cero sobre todo el segmento $[-\pi, \pi]$.

Así pues, el sistema $\{\Psi_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) es completo en $L^2[-\pi, \pi]$. Al aplicar el proceso de ortogonalización al sistema $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots, \Psi_n, \ldots$, obtendremos un sistema ortogonal $\Psi_0, \overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \ldots, \overline{\Psi}_n, \ldots$ Resta normalizar este último sistema, es decir, poner[1] $\varphi_0 = \Psi_0$, $\varphi_n = \frac{\overline{\Psi}_n}{\|\overline{\Psi}_n\|}$ (para $n = 1, 2, \ldots$).

Obtendremos un sistema ortonormalizado completo $\{\varphi_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), cuyo elemento nulo $\varphi_0(x) = \Psi_0(x)$ se define mediante la fórmula (11.33) y representa una función discontinua sobre el segmento $[-\pi, \pi]$, mientras que todos los demás elementos son continuos en $[-\pi, \pi]$, puesto que son combinaciones lineales de las funciones continuas.

2°. Volvamos ahora al análisis del espacio C^0 de todas las funciones continuas sobre el segmento $[-\pi, \pi]$ y demostremos que el

[1] Tenemos presente que $\|\Psi_0\| = 1$.

sistema $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ es completo en este espacio, pero no es en C^0 cerrado.

Primero cerciorémonos de que el sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es completo en C^0. Sea Ψ un elemento arbitrario de C^0, ortogonal a todas las φ_n para $n = 1, 2, \ldots$, es decir, de tal índole que

$$(\Psi, \varphi_n) = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11.34}$$

Entonces, la función

$$f = \Psi - \varphi_0 (\Psi, \varphi_0) \tag{11.35}$$

será un elemento de $L^2[-\pi, \pi]$ y satisface las condiciones [1])

$$(f, \varphi_n) = 0 \quad \text{para todo} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.36}$$

Por ser el sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ completo en $L^2[-\pi, \pi]$, de (11.36) se deduce que f es un elemento nulo, y, entonces, de (11.35) y de lo que la función $\Psi(x)$ es continua y la función $\varphi_0(x)$, discontinua sobre $[-\pi, \pi]$ se deduce que $(\Psi, \varphi_0) = 0$. La última igualdad considerada junto con (11.34) deja constancia de que Ψ es un elemento nulo, es decir, demuestra la completitud en C^0 del sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Demostremos ahora que el sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ no es cerrado en C^0. Sea P un polinomio de la forma $P = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$ con unos coeficientes sumamente arbitrarios a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Por ser ortonormalizado el sistema $\{\varphi_k\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ y en vista de los axiomas del producto escalar, tenemos

$$\| \varphi_0 - P \| = \sqrt{(\varphi_0 - P, \varphi_0 - P)} = \sqrt{\| \varphi_0 \|^2 + \| P \|^2} \geqslant 1. \tag{11.37}$$

Por cuanto un conjunto de funciones continuas es siempre denso en $L^2[-\pi, \pi]$, para un elemento φ_0 se encontrará tal función continua $f(x)$ que

$$\| \varphi_0 - f \| < 1/2. \tag{11.38}$$

Pero, de (11.37) y (11.38) proviene que $\| f - P \| > 1/2$ para un polinomio sumamente arbitrario (con cualesquiera coeficientes) y esto quiere decir precisamente que el elemento f del espacio C^0 no puede aproximarse en la norma de $L^2[-\pi, \pi]$ mediante una combinación lineal de elementos de $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, es decir, significa que el sistema $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ no es cerrado en C^0.

---

[1]) En efecto, cuando $n = 1, 2, \ldots$ (11.36) se deduce en seguida de (11.34) y de la ortogonalidad de φ_0 a todas las φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. La igualdad $(f, \varphi_0) = 0$ proviene de (11.35), de los axiomas del producto escalar y de lo que $(\varphi_0, \varphi_0) = 1$.

§ 4. Operadores autoconjugados totalmente continuos en el espacio de Hilbert

1. Concepto de operador lineal continuo. Sea H un espacio de Hilbert arbitrario. Los elementos de este espacio se denotarán, para mayor comodidad, mediante letras latinas pequeñas x, y, z, ...

Si se conoce una regla, por medio de la cual a todo elemento x del espacio H se le pone en correspondencia cierto elemento de espacio citado y, suele decirse que en H está definido *un operador* A que actúa de H en H, y se escribe $y = Ax$.

Definición 1. *Un operador A se llama lineal, si para cualesquiera elementos x e y del espacio H y para todos los números reales α y β se verifica la igualdad*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay.$$

Al igual que en el caso de una funcional, llamemos (cuando sea cómodo) los elementos del espacio H *puntos* del mismo.

Definición 2. *Un operador arbitrario A que actúa de H en H se llama continuo en el punto x_0 del espacio H, si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de H que converge en la norma de H hacia el elemento x_0, la correspondiente sucesión $\{Ax_n\}$ converge en la norma de H hacia un elemento Ax_0.*

Definición 3. *Un operador A se llama continuo, si es continuo en todo punto x del espacio H.*

Definición 4. *Un operador arbitrario A que actúa de H en H se llama acotado, si existe una constante C tal que para todos los elementos x del espacio H se cumple la desigualdad $\|Ax\| < C\|x\|$.*

Las definiciones enunciadas 1—4 son completamente análogas a las definiciones correspondientes 1—4 para una funcional formuladas en el p. 2 § 1 de este capítulo.

Esta analogía permite ofrecer sin demostración la siguiente afirmación: *un operador lineal A que actúa de H en H es continuo cuando, y sólo cuando, es acotado.*

La demostración de esta afirmación es absolutamente idéntica a la del teorema 11.1.

Para un operador continuo lineal (lo mismo que para una funcional continua lineal) se introduce el concepto de *norma*.

Definición 5. *Se llama norma de un operador continuo lineal A la cota superior exacta de la relación $\|Ax\| / \|x\|$ sobre un conjunto de todos los elementos $x \neq 0$ del espacio H.* (*o bien* (que es lo mismo) *la cota superior exacta de una magnitud $\|Ax\|$ sobre el conjunto de todos los elementos x del espacio H, cuya norma $\|x\|$ es igual a la unidad*).

La norma del operador continuo lineal A se denotará con el símbolo $\|A\|$. Así pues, por definición,

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} \|Ax\|. \qquad (11.39)$$

En lo que sigue más abajo en este párrafo se analizan siempre los operadores continuos lineales.

Aduzcamos un ejemplo de operador continuo lineal en el espacio de Hilbert.

Estudiemos un espacio de Hilbert $L^2\ [a \leqslant t \leqslant b]$ y supongamos que está dada una función de dos variables $K\ (t,\ s)$, definida y continua en un cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$. Demostremos que un operador integral A, definido sobre los elementos $x\ (t)$ del espacio $L^2\ [a \leqslant t \leqslant b]$ mediante una igualdad

$$Ax\ (t) = \int_a^b K\ (t,\ s)\ x\ (s)\ ds, \tag{11.40}$$

es lineal y continua. La linealidad de este operador se deduce inmediatamente de la propiedad de linealidad de la integral.

Para demostrar la continuidad del operador (11.40), basta demostrar su carácter acotado, para lo cual es suficiente establecer que su norma (11.39) es finita. Denotemos con M un número

$$M = \left[\int_a^b \int_a^b K^2\ (t,\ s)\ dt\ ds\right]^{1/2} \tag{11.41}$$

y cerciorémonos de que $\|A\| \leqslant M$. En virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski y de la definición de la norma, tenemos

$$|Ax\ (t)|^2 \leqslant \int_a^b K^2\ (t,\ s)\ ds \int_a^b x^2\ (s)\ ds = \|x\|^2 \int_a^b K^2\ (t,\ s)\ ds.$$

Al integrar la última desigualdad respecto de t dentro de los límites desde a hasta b, y al aprovechar la designación (11.41), tendremos

$$\|Ax\| \leqslant M\ \|x\|.$$

Mas, esto es precisamente un testimonio de que el operador A es acotado y la desigualdad $\|A\| < M$ para su norma es válida. Notemos que para algunos operadores integrales (11.40) la norma $\|A\|$ es exactamente igual a M.

2. Concepto de operador conjugado. Introduzcamos ahora una noción importante de operador *conjugado*.

Supongamos que en un espacio de Hilbert H está definido arbitrariamente un operador continuo lineal A que actúa de H en H.

Fijemos un elemento arbitrario y del espacio H y estudiemos una funcional $f\ (x) = f_y\ (x) = (Ax,\ y)$, definida sobre todos los elementos x del espacio H. Es evidente que esta funcional es continua y lineal.

Según el teorema de Riesz sobre la forma general de una funcional lineal, existe el único elemento $h = h_y$ del espacio H tal que para todos los elementos x del espacio H se verifique una igualdad $f(x) = (x, h)$.

Por consiguiente, a todo elemento y del espacio H se ha puesto en correspondencia uno, y sólo un, elemento de este espacio h de tal índole que $f_y(x) = (x, h)$, es decir, hemos definido en H cierto operador A^* tal que $h = A^*y$. El citado operador A^* se denomina *operador conjugado de operador A*.

Dicho de otro modo, llegamos a la siguiente definición.

Definición 1. *Un operador A^* se llama conjugado de operador A que actúa de H en H, si para cualesquiera elementos x e y del espacio H se verifica la igualdad*

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{11.42}$$

De los razonamientos aducidos proviene que para cada operador continuo lineal A existe, y, además, el único operador conjugado A^*.

Directamente de la definición 1 se deduce que si para el operador A^* existe un operador conjugado $(A^*)^*$, es válida la igualdad $(A^*)^* = A$.

Cerciorémonos, ahora, de que para el caso en que el operador A es continuo y lineal, el operador A^* es también continuo y lineal (por lo cual para A^* existe un operador conjugado y se verifica la igualdad $(A^*)^* = A$ que permite llamar los operadores A y A^* *recíprocamente conjugados*).

Teorema 11.10. *Un operador A^*, conjugado del operador continuo lineal A, es también lineal y continuo, con la particularidad de que las normas de los operadores A^*, y A están entrelazadas mediante una relación*

$$\| A^* \| = \| A \| . \tag{11.43}$$

DEMOSTRACIÓN. La linealidad del operador A^* proviene inmediatamente de la relación (11.42) y de los axiomas del producto escalar. Resta demostrar el carácter acotado del operador A^* y la igualdad (11.43).

En vista de la igualdad (11.42), la relación $\| Ay \| \leqslant \| A \| \, \|y\|$ [1]) y la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, para cualesquiera elementos x e y del espacio H es válida la desigualdad

$$| (A^* x, y) | = | (x, Ay) | \leqslant \| x \| \cdot \| Ay \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \| \times \\ \times \| y \| .$$

[1]) La relación citada, válida para todo elemento y del espacio H, se deduce de la definición de la norma de un operador continuo lineal A.

Al tomar en esta desigualdad a título de y el elemento A^*x, llegamos a que para todo elemento x del espacio H es válida la desigualdad

$$\| A^*x \|^2 = (A^*x, A^*x) \leqslant$$
$$\leqslant \| A \| \cdot \| x \| \cdot \| A^*x \|,$$

o bien $\| A^*x \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \|$.

La última desigualdad significa que el operador A^* es acotado y que su norma $\| A^* \|$ satisface la condición

$$\| A^* \| \leqslant \| A \| . \tag{11.44}$$

La linealidad y el carácter acotado (o, que es igual, la continuidad del operador A^* demostradas por nosotros aseguran la existencia de un operador conjugado $(A^*)^* = A$. Al repetir para este operador los razonamientos aducidos más arriba, obtendremos, en lugar de (11.44), una desigualdad

$$\| A \| \leqslant \| A^* \| . \tag{11.45}$$

De (11.44) y (11.45) se deduce la igualdad (11.43). El teorema está demostrado.

Definición 2. *Un operador arbitrario A que actúa de H en H se denomina autoconjugado, si para A existe un operador conjugado A^* coincidente con el operador A* (es decir, para cualesquiera dos elementos x e y del espacio H se verifica una igualdad $(Ax, y) = (x, Ay)$).

Veamos de nuevo a título de ejemplo el operador integral (11.40) con cierta función $K(t, s)$ continua sobre el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times \times [a \leqslant s \leqslant b]$ (dicha función $K(t, s)$ suele llamarse *núcleo* del operador integral (11.40)).

Cerciorémonos de que un operador integral A^*, definido por la igualdad

$$A^*x(t) = \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, ds, \tag{11.46}$$

será conjugado del operador A que se define mediante la igualdad (11.40). (Por $K(s, t)$ en (11.46) ha de entenderse la misma función que figura en (11.40), pero en (11.46), a diferencia de (11.40), esta función se integra respecto del primer argumento).

De (11.40) y (11.46) se deduce que para cualesquiera elementos

$x(t)$ e $y(t)$ del espácio $L^2[a, b]$ se verifican las igualdades

$$(Ax, y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right) y(t)\, dt, \tag{11.47}$$

$$(x, A^*y) = \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s)\, y(t)\, dt \right) x(s)\, ds. \tag{11.48}$$

Los segundos miembros de (11.47) y (11.48) se diferencian sólo en orden de integración respecto de las variables t y s, y, por esta razón, coinciden [1]). Por consiguiente, son coincidentes también los primeros miembros de las igualdades (11.47) y (11.48), lo que es precisamente un indicio de que el operador A^*, definido mediante la igualdad (11.46), es conjugado del operador A definido mediante la igualdad (11.40).

De las relaciones (11.40) y (11.46) se deduce que el operador integral A, definido mediante la igualdad (11.40), es autoconjugado, cuando, y sólo cuando, para todos los t y s de $[a, b]$ se verifica la igualdad $K(t, s) = K(s, t)$. El núcleo $K(t, s)$ que satisface la igualdad mencionada se denomina *simétrico*.

Demostremos ahora la siguiente afirmación.

Teorema 11.11. *La norma $\| A \|$ de un operador continuo lineal autoconjugado A representa la cota superior exacta de la magnitud $|(Ax, x)|$ sobre un conjunto de todos los elementos x del espacio H. que tienen norma igual a la unidad, es decir, la norma de A se determina por la igualdad*

$$\| A \| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} |(Ax, x)|. \tag{11.49}$$

DEMOSTRACION. Denotemos con μ la magnitud que figura en el segundo miembro de (11.49) (la existencia de la citada cota superior exacta no causa dudas algunas). Con el fin de demostrar que $\mu = \| A \|$, basta probar dos desigualdades $\mu \leqslant \| A \|$ y $\mu \geqslant \| A \|$.

La primera de estas desigualdades se deduce inmediatamente de lo que, en virtud de la definición de norma y de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, para todos los elementos x del espacio H, para los cuales $\| x \| = 1$, se tiene

$$|(Ax, x)| \leqslant \| Ax \| \cdot \| x \| = \| Ax \| \leqslant \| A \|.$$

[1]) En efecto, para las funciones continuas $x(t)$ e $y(t)$ la equivalencia de los segundos miembros en (11.47) y (11.48) es obvia. Mas, en virtud del teorema 11.4 y de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski, la igualdad mencionada será en este caso válida también para los elementos arbitrarios $x(t)$ e $y(t)$ del espacio $L^2[a, b]$.

Resta por demostrar que $\mu \geqslant \| A \|$. Por cuanto el operador A es lineal, para cada elemento x del espacio H se cumple una desigualdad [1])

$$|(Ax, x)| \leqslant \mu \cdot \| x \|^2. \tag{11.50}$$

Ahora, de los axiomas del producto escalar y de lo que el operador lineal A es autoconjugado (es decir, de la igualdad $(Ax, y) = (x, Ay)$) proviene que para cualesquiera dos elementos x e y del espacio H se verifica la igualdad

$$4(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y).$$

De esta igualdad y de (11.50) se deduce que

$$4 \,|(Ax, y)| \leqslant \mu \cdot \| x+y \|^2 + \mu \| x - y^2 \| = \\ = 2\mu (\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

De la última desigualdad proviene que para los elementos arbitrarios x e y del espacio H, para los cuales $\| x \| = \| y \| = 1$,

$$|(Ax, y)| \leqslant \mu. \tag{11.51}$$

Al poner en (11.51) $y = Ax/\| Ax \|$, llegamos a que para todos los elementos x, para los cuales $\| x \| = 1$, se cumple la desigualdad $(Ax, Ax)/ \| Ax \| \leqslant \mu$, y, por lo tanto, también la desigualdad $\| Ax \| \leqslant \mu$. De este modo, $\| A \| \leqslant \mu$. El teorema queda demostrado.

3. Concepto de operador totalmente continuo.

Definición. *Un operador A que actúa de H en H se denomina totalmente continuo, si aplica todo conjunto acotado (en norma) de elementos de H en un conjunto compacto.*

En otras palabras, el operador A se llama totalmente continuo, si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de elementos de H de tal índole que $\| x_n \| \leqslant C = \text{const}$, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ tal que la correspondiente subsucesión $\{Ax_{n_k}\}$ converja en la norma de H.

Recordemos que el operador lineal A es continuo cuando, y sólo cuando, está acotado, es decir, cuando, y sólo cuando, todo conjunto acotado (en norma de H) se aplica por él en un conjunto también acotado. Por cuanto un conjunto compacto es acotado [2]), todo operador totalmente continuo es continuo. Conviene, sin embargo, añadir que no todo operador lineal continuo es totalmente continuo. Por ejemplo, un operador idéntico E del tipo $Ex = x$ es continuo, pero no es

---

[1]) Pues, para todo elemento $x_0 = \dfrac{1}{\| x \|} \cdot x$, cuya norma es igual a la unidad, se cumple la desigualdad $|(Ax_0, x_0)| \leqslant \mu$.

[2]) Véase p. 3, § 1.

totalmente continuo: basta ver la aplicación de un conjunto acotado que no es compacto. Demostremos el siguiente lema.

Lema. *Sea A un operador lineal totalmente continuo que actúa de H en H. Supongamos, además, que $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria de elementos de H que es débilmente convergente hacia un elemento x_0 y de tal índole que $\| x_n \| = 1$, cualquiera que sea el número n. Entonces, la sucesión $\{Ax_n\}$ converge hacia el elemento Ax_0 en la norma de H.*

DEMOSTRACIÓN. Por cuanto el operador A es lineal y totalmente continuo [1]), existe, de acuerdo con el punto anterior, un operador conjugado A^*, y para todo elemento x_n y un elemento arbitrario y se verifica la igualdad $(Ax_n, y) = (x_n, A^*y)$. De esta igualdad y de la convergencia débil de $\{x_n\}$ hacia x_0 llegamos a una deducción de que, cuando $n \to \infty$, para cada elemento y del espacio H tenemos: $(Ax_n, y) \to (x_0, A^*y) = (Ax_0, y)$, lo que significa la convergencia débil de la sucesión $\{Ax_n\}$ hacia el elemento Ax_0.

Demostremos, ahora, que la sucesión $\{Ax_n\}$ también converge hacia Ax_0 en la norma de H.

Supongamos que $\{Ax_n\}$ no converge hacia Ax_0 en la norma de H. Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cierta subsucesión de elementos $\{x_{m_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ se cumpla una desigualdad

$$\| Ax_{m_k} - Ax_0 \| \geqslant \varepsilon. \tag{11.51'}$$

En vista de que el operador A es totalmente continuo y de que $\| x_n \| = 1$, en la sucesión $\{x_{m_k}\}$ puede elegirse una subsucesión $\{x_{n_p}\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ tal que la correspondiente subsucesión $\{Ax_{n_p}\}$ converja en la norma de H. Por cuanto, en virtud de lo demostrado más arriba, la subsucesión $\{Ax_{n_p}\}$ es débilmente convergente hacia el elemento Ax_0, la misma en la norma de H también converge hacia el elemento Ax_0. Mas, la desigualdad (11.51'), válida para todos los números m_k (y, con mayor razón, para todos los números n_p) contradice la deducción obtenida, lo que demuestra el lema.

OBSERVACIÓN. *El lema demostrado es un corolario de una afirmación más general: un operador A que actúa de H en H es totalmente continuo, cuando, y sólo cuando, aplica cualquier sucesión débilmente convergente $\{x_n\}$ de elementos de H en la sucesión $\{Ax_n\}$ convergente en la norma de H.*

Se omite aquí la demostración de esta afirmación.

Cerciorémonos ahora de que el operador integral A definido mediante la igualdad (11.40) (con el núcleo $K(t, s)$ continuo dentro del cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant t]$) es totalmente continuo.

Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión arbitraria de elementos de $L^2[a, b]$, acotada en la norma de $L^2[a, b]$, es decir tal que para todo número n se tiene

$$\| x_n(t) \| \leqslant C. \tag{11.52}$$

[1]) Y, por consiguiente, continuo.

Es suficiente mostrar que la correspondiente sucesión de funciones $y_n(t) = Ax_n(t)$ es uniformemente acotada y equicontinua sobre $[a, b]$. (Entonces, en virtud del teorema de Arzelà 1.12, en esta sucesión puede elegirse una subsucesión que sea convergente uniformemente sobre $[a, b]$ y, con mayor razón, en la norma de $L^2[a, b]$). De (11.52) y de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski se deduce la desigualdad

$$|y_n(t)| = \left|\int_a^b K(t, s)\, x_n(s)\, ds\right| \leqslant \left[\int_a^b K^2(t, s)\, ds\right]^{1/2} \cdot \|x_n\|,$$

la cual demuestra que en $[a, b]$ la sucesión $\{y_n(t)\}$ es uniformemente acotada [1]).

Notemos ahora que de la continuidad y de la continuidad uniforme (que proviene de la primera) del núcleo $K(t, s)$ sobre el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ se deduce que para un $\varepsilon > 0$ *arbitrario* existe tal $\delta > 0$ que

$$|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \tag{11.53}$$

con todo s de $[a, b]$ y todos los t_1 y t_2 de $[a, b]$ de tal índole que $|t_1 - t_2| < \delta$.

De (11.52) y (11.53) y de la desigualdad de Cauchy-Buniakovski obtendremos que

$$|y_n(t_2) - y_n(t_1)| \leqslant \int_a^b |K(t_2, s) - K(t_1, s)| \cdot |x_n(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \int_a^b |x_n(s)|\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{C\sqrt{b-a}} \cdot \|x_n\| \cdot \sqrt{\int_a^b ds} = \varepsilon$$

para todos los t_1 y t_2 de $[a, b]$ tales que $|t_1 - t_2| < \delta$.

La última desigualdad demuestra la equicontinuidad de la sucesión $\{y_n(t)\}$ sobre $[a, b]$ y da por terminado, en virtud de lo dicho más arriba, la demostración de lo que el operador (11.40) es totalmente continuo.

4. Existencia de los valores propios de un operador autoconjugado lineal totalmente continuo.

Definición. *Un número real λ se llama valor propio del operador A, si existe un elemento no nulo del espacio H que satisface la condición $Ax = \lambda x$.*

El citado elemento x se llama en este caso elemento propio del operador A correspondiente al valor propio λ.

---

[1]) Basta notar que el núcleo $K(t, s)$ es continuo sobre el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$.

Si el operador A es lineal, de la condición de que x es un elemento propio de A correspondiente al valor propio λ se deduce que, cualquiera que sea un número real α distinto de cero, un elemento αx será también elemento propio de A correspondiente al valor propio λ. Por eso, todos los elementos propios del operador lineal A se consideran, naturalmente, *normalizados*, es decir, satisfacen la condición $\| x \| = 1$.

La importancia del concepto de elementos propios radica en lo que la actuación de un operador sobre ellss se reduce a la multiplicación por cierta constante λ.

No todo operador A cuenta con los valores propios [1]).

Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 11.12.** *Todo operador lineal autoconjugado totalmente continuo A tiene por lo menos un valor propio λ que satisface la condición $| \lambda | = \| A \|$. Entre todos los valores propios del operador A el citado valor propio es mayor en módulo.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos con M y m las cotas exactas superior e inferior, respectivamente, de un producto escalar (Ax, x) sobre un conjunto de todos los elementos x del espacio H que satisfacen la condición $\| x \| = 1$, es decir, pongamos

$$M = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} (Ax, x), \quad m = \inf_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} (Ax, x). \qquad (11.54)$$

---

[1]) Por ejemplo, el operador integral (11.40) no tiene ningún valor propio cuando $a = 0$, $b = \pi$. $K(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen}(n+1) x \operatorname{sen} ns$. En efecto, sea $\varphi(x)$ un elemento arbitrario de $L^2[0, \pi]$, para el cual $\int_0^{\pi} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \lambda\varphi(x)$, y sean $\{b_n\}$ los coeficientes de Fourier en el desarrollo de $\varphi(x)$ según un sistema $\left\{ \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$ *completo* y ortonormalizado sobre $[0, \pi]$. Si $\lambda = 0$, entonces, en vista de la igualdad generalizada de Parseval tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \times \operatorname{sen}(n+1) x = 0$, de donde proviene que todos los $b_n = 0$ y $\varphi(x) = 0$. En cambio, si $\lambda \neq 0$, de la igualdad $\int_0^{\pi} K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \lambda\varphi(x)$ y de las propiedades del núcleo $K(x, s)$, que aseguran la convergencia uniforme de la serie de Fourier de la función $\varphi(x)$, obtenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \operatorname{sen}(n+1) x = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$. Por cuanto $\lambda \neq 0$, de la última igualdad se deduce que $b_n = 0$ y $\varphi(x) = 0$.

Para concretar, vamos a examinar el caso de $|M| > |m|$ (el caso de $|M| \leqslant |m|$ se analiza de un modo sumamente igual).

Por cuanto $|M| > |m|$, tenemos $M > 0$. Demostremos que el número $\lambda = M$ es un valor propio del operador A.

Por definición de la cota superior exacta, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de H tal que $(Ax_n, x_n) \to \lambda$, y $\| x_n \| = 1$. Por cuanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada (en la norma de H), se encontrará, en virtud del teorema de compacticidad débil de cualquier conjunto infinito acotado (en la norma de H), una subsucesión de la sucesión $\{x_n\}$ que converja débilmente hacia un elemento x_0 del espacio H. Enumeremos esta subsucesión de nuevo, es decir, otra vez designémosla con $\{x_n\}$. Así pues, $\{x_n\}$ converge débilmente hacia el elemento x_0 del espacio H. Mas, en este caso (en virtud del lema mencionado en el punto anterior) la sucesión $\{Ax_n\}$ converge hacia Ax_0 en la norma de H.

Siendo el operador A autoconjugado, resulta válida la igualdad $(Ax_n, x_0) = (x_n, Ax_0)$, de la cual proviene una relación

$$(Ax_n, x_n) - (Ax_0, x_0) = (A(x_n - x_0), (x_n + x_0)). \tag{11.55}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, obtenemos de (11.55)

$$|(Ax_n, x_n) - (Ax_0, x_0)| \leqslant \| x_n + x_0 \| \cdot \| Ax_n - Ax_0 \| \to 0$$

(pues, la sucesión $\{Ax_n\}$ converge hacia Ax_0 en la norma de H, y $\| x_n \| = 1$).

Hemos demostrado de este modo que

$$(Ax_n, x_n) \to (Ax_0, x_0). \tag{11.56}$$

De (11.56) y de lo que $(Ax_n, x_n) \to \lambda$ se deduce que

$$(Ax_0, x_0) = \lambda. \tag{11.57}$$

Cerciorémonos ahora de que $\| x_0 \| = 1$. En virtud de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, para cualquier elemento y se cumple la desigualdad $|(x_n, y)| \leqslant \| x_n \| \cdot \| y \| = \| y \|$. Pasando en esta desigualdad al límite para $n \to \infty$, y teniendo presente la convergencia débil de $\{x_n\}$ hacia x_0, obtenemos que $|(x_0, y)| \leqslant \| y \|$ (para todo elemento y). De la última desigualdad obtenemos para $y = x_0$ que $\| x_0 \| \leqslant 1$. Con el fin de demostrar que $\| x_0 \| = 1$, basta cerciorarse de que la suposición sobre el cumplimiento de la desigualdad $0 < \| x_0 \| < 1$ lleva a una contradicción.

Sea $0 < \| x_0 \| < 1$. Pongamos $y_0 = x_0 / \| x_0 \|$. Entonces, $\| y_0 \| = 1$, y, en virtud de que el operador es lineal, tenemos, tomando en consideración las relaciones (11.57):

$$(Ay_0, y_0) = \frac{1}{\| x_0 \|^2} (Ax_0, x_0) = \frac{\lambda}{\| x_0 \|^2} > \lambda,$$

lo que contradice (11.54), puesto que $\lambda = M$. Así pues, $\| x_0 \| = 1$.

Demostremos ahora que x_0 es un elemento propio correspondiente al valor propio λ.

Sirviéndonos de la definición de la norma de un elemento, de los axiomas del producto escalar, de la igualdad (11.57) y de la definición de la norma de un operador, tendremos

$$\| Ax_0 - \lambda x_0 \|^2 = (Ax_0 - \lambda x_0, Ax_0 - \lambda x_0) =$$
$$= \| Ax_0 \|^2 - 2\lambda (Ax_0, x_0) + \lambda^2 \| x_0 \|^2 = \| A \|^2 - \lambda^2.$$

En vista del teorema 11.11, el miembro derecho (y, por consiguiente, el izquierdo) de la última relación es nulo. Esto es precisamente un testimonio de que $Ax_0 = \lambda x_0$, es decir, significa que x_0 es elemento propio del operador A correspondiente al valor propio λ.

Cuando $|M| \leqslant |m|$, los razonamientos son análogos, pero se debe poner λ igual a m.

Resta por demostrar en adición que si existen otros valores propios, el valor propio λ, correspondiente a la condición $|\lambda| = \|A\|$, será entre ellos mayor en módulo. Sea λ_1 algún otro valor propio y sea x_1, un elemento propio normalizado que corresponde a λ_1. Entonces, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, y, por lo tanto, $(Ax_1, x_1) = \lambda_1$. En este caso, de la relación [1])

$$|\lambda| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} |(Ax, x)|$$

se deduce directamente que $|\lambda| \geqslant |\lambda_1|$.

El teorema está completamente demostrado.

Examinemos, con ayuda del teorema demostrado, la así llamada *ecuación integral de Fredholm de segunda especie*, es decir, una relación

$$x(t) = \mu \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds, \qquad (11.58)$$

de la cual se determinan, para el núcleo dado $K(t, s)$, una función $x(t)$, distinta de cero idéntico, y aquellos valores del parámetro numérico μ, para los cuales tal función existe. Los valores del parámetro numérico μ, para los cuales existen las soluciones $x(t)$ (distintas de cero idéntico) de ecuación integral (11.58), se denominan *valores propios* de esta ecuación. Toda solución no nula de la ecuación (11.58), correspondiente al valor propio dado, recibe el nombre de *función propia* de la misma ecuación.

Las magnitudes, inversas de los valores propios de la ecuación integral (11.58), suelen llamarse *números característicos* de la citada ecuación.

---

[1]) Esta relación proviene de (11.54) y de lo que $\lambda = M$ cuando $|M| > |m|$, y $\lambda = m$, cuando $|M| \leqslant |m|$.

Es evidente que si introducimos en el análisis el operador integral A, definido mediante la igualdad (11.40), los valores propios de este operador A serán números característicos de la ecuación integral (11.58) y los elementos propios del operador A, correspondientes a estos valores propios, serán funciones propias de la ecuación integral (11.58).

En los pp. 1—3 se ha demostrado que si el núcleo $K(t, s)$ es continuo en el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ y simétrico, el operador (11.40) es autoconjugado lineal y totalmente continuo.

Según el teorema 11.12, la ecuación integral (11.58) con tal núcleo $K(t, s)$ tiene por lo menos un número característico. Para que la ecuación integral mencionada tuviera por lo menos un solo *valor propio*, se debe exigir que la misma tuviera al menos un número característico *distinto de cero*, para lo cual a la exigencia de continuidad y simetría del núcleo $K(t, s)$ se debe añadir una condición de que el núcleo $K(t, s)$ no se reduzca a cero idéntico [1]).

Así pues, llegamos a la siguiente *afirmación* fundamental: *si el núcleo $K(t, s)$ de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie* (11.58) *es continuo en el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$, simétrico y no es igual idénticamente a cero, dicha ecuación tiene por lo menos un solo valor propio.*

OBSERVACIÓN. Se podría demostrar que la afirmación enunciada es válida también en un caso cuando la exigencia de continuidad del núcleo $K(t, s)$ sobre el cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$ se sustituye por una exigencia más débil de existencia de la integral finita

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, dt\, ds.$$

(Basta cerciorarse de que al cumplirse esta exigencia más débil, el operador integral (11.40) que actúa de $L^2[a, b]$ en $L^2[a, b]$ sigue siendo totalmente continuo).

5. Propiedades principales de los valores propios y elementos propios de un operador autoconjugado lineal totalmente continuo. En conclusión aclaremos las propiedades principales de los valores propios y de los elementos propios de un operador autoconjugado lineal totalmente continuo que actúa de H en H.

[1]) La condición de que el núcleo continuo $K(t, s)$ no se reduzca a cero idéntico, es necesaria y suficiente para que el operador integral A, definido mediante la igualdad (11.40), tenga valores propios *no nulos*. En efecto, en virtud del teorema 11.12, $\| A \| = |\lambda|$, donde λ es el valor propio del operador A mayor en módulo, de suerte que basta demostrar que $\| A \| = 0$ cuando, y sólo cuando, $K(t, s)$ no es idénticamente igual a cero. Si $K(t, s) \equiv 0$, se pone claro que $\| A \| = 0$. Viceversa, si $\| A \| = 0$, el operador A, definido por la igualdad (11.40), aplica todos los elementos no nulos del espacio $L^2[a, b]$ en un elemento nulo, y, en particular, aplica en cero idéntico todos los elementos de $\{x_n(t)\}$ de cierto sistema ortonormalizado *completo* en $L^2[a, b]$. Mas, esto significa precisamente que $K(t, s) \equiv 0$.

1°. *Los elementos propios x_1 y x_2, correspondientes a dos valores propios diferentes λ_1 y λ_2, son ortogonales.*

En efecto, en virtud de las propiedades del producto escalar, de las igualdades $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ y de la propiedad de autoconjugación del operador A, obtendremos

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) - (x_1, \lambda_2 x_2) = (Ax_1, x_2) - (x_1, Ax_2) = 0.$$

Por cuanto $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de la igualdad obtenida proviene que $(x_1, x) = 0$.

2°. A un mismo valor propio λ le pueden corresponder unos cuantos elementos propios del operador A. Demostremos, sin embargo, que *a cualquier valor propio no nulo λ le puede corresponder sólo un número finito de elementos propios linealmente independientes* [1]).

Supongamos que a cierto $\lambda \neq 0$ le corresponde un número infinito de elementos propios linealmente independientes. Realizando el proceso de ortogonalización y normalización de estos elementos, obtendremos un sistema ortonormalizado infinito $\{x_n\}$ de elementos del espacio H, cada uno de los cuales es elemento propio del operador A que corresponde al valor propio $\lambda \neq 0$. Como para cualquier elemento y del espacio H es válida la desigualdad de Bessel $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)^2 \leqslant \leqslant \| y \|^2$, resulta que $\lim_{n\to\infty} (x_n, y) = 0 = (0, y)$ es decir, la sucesión de elementos propios $\{x_n\}$ es débilmente convergente al elemento nulo 0. Mas, en este caso, de la condición de continuidad total del operador A y del lema del p. 3 se desprende que la correspondiente sucesión $\{Ax_n\}$ converge en la norma de H hacia un elemento $A0 = 0$. En virtud de la relación $Ax_n = \lambda x_n$, llegamos a que $|\lambda| = \| Ax_n \| \to 0$ (cuando $n \to \infty$), y esto significa precisamente que $|\lambda| = 0$, lo que contradice la condición de que $\lambda \neq 0$. La contradicción obtenida es indicio de que a todo $\lambda \neq 0$ puede corresponder sólo un número finito de elementos propios.

Los razonamientos aducidos señalan también que *todos los elementos propios* (tanto los que corresponden a un mismo valor propio λ, como también los que corresponden a diferentes λ) *pueden considerarse ortogonales de dos en dos y sus normas son iguales a la unidad.*

3°. Demostremos ahora que *si el operador A cuenta con una infinidad de valores propios, cualquier sucesión $\{\lambda_n\}$ seleccionada de los valores propios es infinitamente pequeña.*

Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de valores propios y sea $\{x_n\}$, la sucesión correspondiente de elementos propios, la cual puede considerarse or-

[1]) Al valor propio no nulo $\lambda = 0$ le puede corresponder también un número infinito de elementos propios. Por ejemplo, para el operador integral (11.40) con el núcleo $K(t, s)$ idénticamente igual a cero, cada elemento de cierto sistema ortonormalizado $\{x_n(t)\}$ de elementos de $L^2[a, b]$ es elemento propio correspondiente al valor propio de $\lambda = 0$.

tonormalizada en virtud de los razonamientos aducidos al demostrar la propiedad 2°. Escribiendo para todo elemento y del espacio H la desigualdad de Bessel respecto del sistema $\{x_n\}$, nos cercioramos de que la sucesión $\{x_n\}$ es débilmente convergente hacia el elemento cero. Por cuanto el operador A es totalmente continuo, del lema 3 se desprende que una sucesión $\{Ax_n\}$ converge hacia el elemento cero en la norma de H. Mas, en este caso, la igualdad $Ax_n = \lambda_n x_n$ lleva consigo una relación

$$|\lambda_n| = \|Ax_n\| \to 0 \quad (\text{cuando } n \to \infty).$$

La propiedad demostrada permite afirmar que *los valores propios de un operador autoconjugado lineal totalmente continuo no tienen en el eje numérico, a excepción del punto cero, otros puntos límites* [1]).

Esto significa que *todos los valores propios pueden ser numerados en el orden en que sus módulos no crecen, de suerte que se cumplirán las desigualdades*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots,$$

con la particularidad de que $|\lambda_n| \to 0$, cuando $n \to \infty$.

En particular, todas las propiedades establecidas son válidas para las funciones propias y los números característicos de la ecuación de Fredholm de segunda especie (11.58) con el núcleo $K(t, s)$ continuo sobre un cuadrado $[a \leqslant t \leqslant b] \times [a \leqslant s \leqslant b]$.

[1]) Cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, fuera del intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ puede disponerse sólo un número finito de valores propios.

Capítulo 12

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LAS CURVAS Y SUPERFICIES

En este capítulo se dará una información referente a las curvas y superficies que es de gran importancia para las aplicaciones.

§ 1. Funciones vectoriales

1. Concepto de función vectorial[1]). Introduzcamos el concepto de función vectorial de m variables.

Si a todo punto M de un conjunto $\{M\}$ de puntos del espacio euclídeo m-dimensional E^m se le pone en correspondencia, de acuerdo con una ley determinada, cierto vector $\boldsymbol{r}$ [2]), *se dice que sobre el conjunto $\{M\}$ está definida una función vectorial* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$. En este caso el conjunto $\{M\}$ se llama *dominio de definición de la función* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$. Si $p = m$, se dice (al igual que en el caso de $m = 2$ ó $m = 3$ (véase p. 1, § 2, cap. 6)) que sobre el conjunto $\{M\}$ está dado un campo vectorial definido mediante la función vectorial $\boldsymbol{r}(M)$.

El vector $\boldsymbol{r}(M)$, correspondiente al punto dado M del conjunto $\{M\}$, se llamará *valor particular de la función vectorial en el punto* M. Una totalidad de todos los valores particulares de la función $\boldsymbol{r}(M)$ se denomina *conjunto de valores* de esta función.

Si $\{M\}$ es un conjunto de puntos en la recta dada, y $\{u\}$, el conjunto de coordenadas de estos puntos, la función vectorial $\boldsymbol{r}(M)$ puede considerarse, evidentemente, como función vectorial de una variable escalar u:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u).$$

En cambio, si $\{M\}$ es un conjunto de puntos de un espacio m-dimensional, y si $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ son las coordenadas del punto M, entonces $\boldsymbol{r}(M)$ representa una función vectorial de argumentos escalares $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

OBSERVACIÓN. Supongamos que $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$ son coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(M)$. Es evidente que definir una función vectorial $\boldsymbol{r}(M)$ es lo mismo que definir p funciones escalares $r_1(M), r_2(M), \ldots, r_p(M)$.

[1]) Algunos datos sobre las funciones vectoriales se han dado en p. 6, § 1, cap. 5, v. I).

[2]) El vector $\boldsymbol{r}$ pertenece, en el caso general, al espacio euclídeo p-dimensional E^p, por eso se define por p coordenadas $r_1, r_2, \ldots, r$.

Admitamos que los vectores $\boldsymbol{r}(M)$ pertenecen al espacio euclídeo E^p. Convengamos en considerar que los orígenes de todos estos vectores coinciden con el origen de un sistema cartesiano de coordenadas elegido en E^p. En este caso un conjunto puntual de extremos de los vectores $\boldsymbol{r}(M)$ se denomina *hodógrafo* de la función $\boldsymbol{r}(M)$. El hodógrafo de la función vectorial de una sola variable escalar es, en el caso general, una línea. El hodógrafo de una función de dos variables será, en el caso general, una superficie.

2. Valor límite de una función vectorial. Continuidad. Por analogía completa con las funciones corrientes, para las funciones vectoriales se introducen los conceptos de valor límite y de continuidad.

Una sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$ *se llama convergente hacia un vector* $\boldsymbol{a}$, *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *puede indicarse tal número* N, *que con* $n \geqslant N$ *se cumple una desigualdad* [1])

$$|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| < \varepsilon.$$

El vector $\boldsymbol{a}$ *se denomina límite de la sucesión* $\{\boldsymbol{a}_n\}$.

En la forma simbólica la existencia del límite $\boldsymbol{a}$ de la sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$ se escribe de una manera siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}.$$

OBSERVACIÓN. Si $\{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}\}$ y $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ son, respectivamente, las coordenadas de los vectores $\boldsymbol{a}_n$ y $\boldsymbol{a}$, de la convergencia de la sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$ hacia $\boldsymbol{a}$ se deduce la convergencia de las sucesiones numéricas $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, $\ldots$, $\{a_{pn}\}$ hacia los números $a_1, a_2, \ldots, a_p$, respectivamente. Indiquemos, además, que de la convergencia de las citadas sucesiones numéricas hacia los números respectivos $a_1, a_2, \ldots, a_p$ proviene la convergencia de la sucesión $\{\boldsymbol{a}_n\}$ de vectores con las coordenadas $\{a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{pn}\}$ hacia el vector $\boldsymbol{a}$ con las coordenadas $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$. La validez de la observación se deduce de las siguientes desigualdades obvias [2]):

$$|a_{kn} - a_k| \leqslant |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}| \leqslant |a_{1n} - a_1| + \\ + |a_{2n} - a_2| + \ldots + |a_{pn} - a_p|.$$

Veamos una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ definida sobre el conjunto $\{M\}$ de puntos de un espacio euclídeo m-dimensional y un punto A, el cual, quizás no pertenece al conjunto $\{M\}$, pero posee una propiedad de que en cualquier entorno de este punto se contiene por lo menos un solo punto del conjunto $\{M\}$, que sea distinto de A.

Definición 1. *Un vector* $\boldsymbol{b}$ *se llama valor límite de la función vectorial* $\boldsymbol{r}(M)$ *en el punto* A *(o bien, límite de* $\boldsymbol{r}(M)$ *para* $M \to A$*),*

---

[1]) Se llama *módulo* $|\boldsymbol{a}|$ del vector $\boldsymbol{a}$ con las coordenadas $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ a un número $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_p^2}$.

[2]) El vector $\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}$ tiene por coordenadas $\{a_{1n} - a_1, a_{2n} - a_2, \ldots, a_{pn} - a_p\}$.

si para toda sucesión $M_1, M_2, \ldots, M_n \ldots$ de puntos del conjunto $\{M\}$ convergente hacia A, cuyos elementos M_n son distintos de A [1] *($M_n \neq A$), la sucesión correspondiente $\boldsymbol{r}(M_1)$, $\boldsymbol{r}(M_2), \ldots, \boldsymbol{r}(M_n) \ldots$ de valores de la función $\boldsymbol{r}(M)$ converge hacia el vector $\boldsymbol{b}$.*

Para denotar el valor límite $\boldsymbol{b}$ de la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ en el punto A se usa el siguiente símbolo:

$$\lim_{M \to A} \boldsymbol{r}(M) = \boldsymbol{b}, \text{ o bien } \lim_{\substack{u_1 \to a_1 \\ u_2 \to a_2 \\ \cdots\cdots \\ u_m \to a_m}} \boldsymbol{r}(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \boldsymbol{b},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ son coordenadas del punto A.

No ofrecemos aquí la definición de valor límite de una función vectorial en el lenguaje de «$\varepsilon - \delta$», como tampoco para el caso en que el punto M tiende hacia el infinito. Estas definiciones se enuncian por analogía completa con las definiciones correspondientes para las funciones escalares.

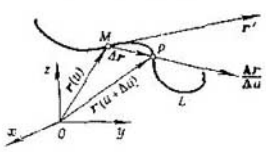

Fig. 12.1.

Supongamos que el punto A pertenece a un dominio de definición de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ y cualquier entorno de este punto contiene los puntos del dominio de definición de la función distintos de A.

Definición 2. *La función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(M)$ se llama continua en el punto A, si el valor límite de esta función en A existe y es igual al valor particular $\boldsymbol{r}(A)$.*

Una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(A)$ se llama continua sobre el conjunto $\{M\}$, si es continua en todo punto de este conjunto.

3. Derivada de una función vectorial. En el § 1 cap. 5, v. I de este curso se trataba la derivada de una función vectorial de una sola variable escalar. Enunciemos este concepto una vez más.

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ una función vectorial de la variable escalar u. Fijemos un valor u del argumento y le daremos al argumento u tal incremento arbitrario $\Delta u \neq 0$, que la magnitud $u + \Delta u$ pertenezca al dominio de definición de la función. Examinemos un vector

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u) - \boldsymbol{r}(u).$$

En la fig. 12.1 este vector coincide con el vector $\overline{MP}$. Al multiplicar el vector $\Delta \boldsymbol{r}$ por el número $1/\Delta u$, obtendremos un vector nuevo

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u} \left[\boldsymbol{r}(u + \Delta u) - \boldsymbol{r}(u)\right], \tag{12.1}$$

[1] Esta exigencia se debe, en particular, a que la función $\boldsymbol{r}(M)$ puede ser no definida en el punto A.

colineal con el antiguo. El vector (12.1) representa la velocidad media de variación de la función vectorial sobre el segmento $[u, u+\Delta u]$.

El límite de la relación en diferencias (12.1) (si existe) *para* $\Delta u \to 0$ *recibe el nombre de derivada de la función vectorial* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ *en un punto fijo dado.*

La derivada de una función vectorial se denota con el símbolo $\boldsymbol{r}'(u)$ ó $\frac{d\boldsymbol{r}}{du}$.

Los razonamientos geométricos [1]) muestran que la derivada de una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$ es un vector tangente al hodógrafo de esta función. Aclaremos cuál es la relación entre la derivada de la función vectorial y las derivadas de sus coordenadas. Limitémonos, para simplificar, a un caso cuando los valores $\boldsymbol{r}(u)$ de una función vectorial representan vectores de un espacio tridimensional. Sean $\{x(u), y(u), z(u)\}$ las coordenadas de la función vectorial $\boldsymbol{r}(u)$. Es evidente que las coordenadas de la relación en diferencias (12.1) serán

$$\frac{x(u+\Delta u)-x(u)}{\Delta u}, \quad \frac{y(u+\Delta u)-y(u)}{\Delta u}, \quad \frac{z(u+\Delta u)-z(u)}{\Delta u}.$$

De acuerdo con la Observación del p. 2 de este párrafo, las coordenadas de la derivada $\boldsymbol{r}'(u)$ son iguales a las derivadas $x'(u)$, $y'(u)$, $z'(u)$ de las coordenadas de la función $\boldsymbol{r}(u)$. Por eso, el cálculo de la derivada de una función vectorial se reduce al cálculo de las derivadas de sus coordenadas.

OBSERVACIÓN 1. Una función vectorial $\boldsymbol{r}(u)$ expresa la ley del movimiento de un punto material por el hodógrafo L de esta función, si la variable u se considera como el tiempo. Por eso, la derivada $\boldsymbol{r}'(u)$ es igual a la velocidad del movimiento de un punto a lo largo de L.

OBSERVACION 2. Notemos que las reglas de diferenciación de varios productos de las funciones vectoriales (escalar, vectorial, mixto) son idénticas a las reglas de diferenciación de los productos de funciones corrientes. Esto se deduce de lo que las coordenadas de la derivada de una función vectorial son iguales a las derivadas de las coordenadas de la propia función, como también de la expresión de los productos mencionados en términos de las coordenadas de los factores.

He aquí las reglas de diferenciación de los productos de funciones vectoriales:

$$\{\boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}(u)\}' = \boldsymbol{r}'(u)\,\boldsymbol{s}(u) + \boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}'(u),$$

$$\{[\boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}(u)]\}' = [\boldsymbol{r}'(u)\,\boldsymbol{s}(u)] + [\boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}'(u)],$$

$$\{\boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}(u)\,\boldsymbol{t}(u)\}' = \boldsymbol{r}'(u)\,\boldsymbol{s}(u)\,\boldsymbol{t}(u) + \boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}'(u)\,\boldsymbol{t}(u) + \boldsymbol{r}(u)\,\boldsymbol{s}(u)\,\boldsymbol{t}'(u).$$

[1]) Estos razonamientos se confirman por la afirmación en el p. 2, § 2 de este capítulo.

Pasemos ahora al problema de diferenciación de las funciones vectoriales de varias variables escalares. Por cuanto en lo que sigue más abajo se emplearán funciones vectoriales de dos variables escalares u y v, limitémonos aquí precisamente a este caso concreto.

Supongamos que una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ está definida en cierto entorno G del punto M_0 (u_0, v_0) (fig. 12.2). Veamos en el plano (u, v) una dirección definida mediante el vector unidad $\boldsymbol{a}$ con las coordenadas $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$. Tracemos por el punto M_0 un eje $\boldsymbol{l}$ cuya orientación coincide con la dirección del vector $\boldsymbol{a}$, tomemos en este eje los puntos M (u, v) y denotemos con l la magnitud del segmento orientado M_0M del citado eje. Las coordenadas (u, v) del punto M se definen mediante las igualdades

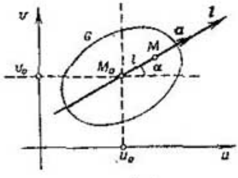

Fig. 12.2.

$$u = u_0 + l\cos\alpha, \quad v = v_0 + l\operatorname{sen}\alpha.$$

En el eje mencionado $\boldsymbol{l}$ la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ será, evidentemente, función vectorial de una sola variable l. *Si esta función tiene en un punto $l = 0$ una derivada respecto de la variable l, dicha derivada se llama derivada según la dirección de $\boldsymbol{l}$ de la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ en el punto M_0 (u_0, v_0) y se denota con el símbolo* $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$.

OBSERVACION 3. Si la orientación de $\boldsymbol{l}$ coincide con la dirección del eje coordenado u (del eje v) (en la fig. 12.2 estas direcciones se indican con líneas punteadas), la correspondiente derivada direccional se llama derivada parcial de la función vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$ y se denota con el símbolo $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ ó $\boldsymbol{r}_u$ $\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \text{ ó } \boldsymbol{r}_v\right)$. Si la derivada parcial $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ está definida en todos los puntos de cierto entorno del punto M (u, v), representa en dicho entorno una función vectorial. Esta última función puede tener, a su vez, una derivada parcial, por ejemplo, respecto del argumento u. Es natural que esta derivada parcial se llame segunda derivada parcial respecto del argumento u y se denote $\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^2}$ (o $\boldsymbol{r}_{uu}$). De un modo análogo se determinan otras derivadas parciales de diferente orden.

El sentido geométrico de la derivada direccional se pone claro de los siguientes razonamientos. El hodógrafo de una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ se representa, en general, por la superficie S (fig. 12.3). Cuando el punto M (u, v) se desplaza por el eje l, el extremo P del vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ describe en la superficie S una línea L que puede considerarse como hodógrafo de la función vectorial de una sola variable l. Por eso, la derivada $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ según la dirección de $\boldsymbol{l}$ representa un vector tangente a L en el punto P_0.

Si la dirección de $\boldsymbol{l}$ coincide con la del eje coordenado u, al desplazarse el punto M por el eje correspondiente que pasa por el punto M_0, el extremo del vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ describe en la superficie S una línea llamada *línea coordenada* (esta línea en la fig. 12.3 se marca por una línea punteada). De este modo, la derivada parcial $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ representa un vector tangente a la línea coordenada u. La derivada parcial $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ representa un vector tangente a la línea coordenada v.

4. Diferenciabilidad de una función vectorial. Llamemos *incremento* (o *incremento total*) de una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ en

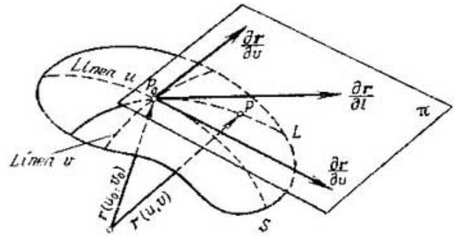

Fig. 12.3.

el punto $M(u, v)$ (correspondiente a los incrementos Δu y Δv de los argumentos) a una expresión

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v).$$

Una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ *se llama diferenciable en el punto* $M(u, v)$, *si su incremento total en este punto puede ser representado en la forma*

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\Delta u + \boldsymbol{b}\Delta v + \boldsymbol{\alpha}\Delta u + \boldsymbol{\beta}\Delta v, \qquad (12.2)$$

donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ *son ciertos vectores, que no dependen de* Δu *y* Δv, *y* $\boldsymbol{\alpha}$ *y* $\boldsymbol{\beta}$ *son funciones vectoriales infinitamente pequeñas, para* $\Delta u \to 0$ *y* $\Delta v \to 0$ [1], *iguales a cero cuando* $\Delta v = \Delta u = 0$ [2].

OBSERVACIÓN 1. Si una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ es diferenciable en un punto $M(u, v)$, entonces, evidentemente, los vectores

[1] Una función vectorial $\boldsymbol{\alpha}(\Delta u, \Delta v)$ se llama infinitamente pequeña, si su límite para $\Delta u \to 0$ y $\Delta v \to 0$ es igual a cero (al vector nulo).

[2] No damos aquí la definición de diferenciabilidad de la función vectorial de una sola variable. Puede ser formulada por analogía completa con la definición correspondiente para las funciones escalares de una sola variable.

$\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son iguales, respectivamente, a las derivadas parciales $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ en el punto dado.

OBSERVACION 2. Supongamos que una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ es diferenciable en un punto $M(u, v)$ y $\boldsymbol{l}$ es cierto eje que pasa por M en el plano (u, v) y que forma con el eje u un ángulo α. Entonces, la derivada $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ según la dirección de $\boldsymbol{l}$ existe y puede ser determinada de acuerdo con la fórmula

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cos \alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \operatorname{sen} \alpha. \quad (12.3)$$

En efecto, para la dirección de $\boldsymbol{l}$ tenemos $\Delta u = l \cos \alpha$, $\Delta v = l \times \operatorname{sen} \alpha$ (fig. 12.4). Sustituyendo estos valores de Δu y Δv en la relación (12.2) y haciendo uso de la relación $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l} = \lim\limits_{l \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{l}$, nos convencemos de la validez de la fórmula (12.3).

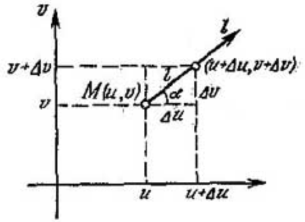

Fig. 12.4.

OBSERVACIÓN 3. Nos hemos convencido de que en el caso de diferenciabilidad de la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ es válida la fórmula (12.3). De esta fórmula se deduce que todos los vectores $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}$ están dispuestos en el plano de los vectores $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$. Un plano que pasa por el punto del hodógrafo de la función $\boldsymbol{r}(u, v)$, correspondiente al punto $M(u, v)$ y paralelo a los vectores $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$, se llama, naturalmente, *plano tangente* a la superficie S que es un hodógrafo. En la fig. 12.3 el plano π representa un plano tangente a la superficie S en el *plano* P_0.

5. Fórmula de Taylor para las funciones vectoriales. La fórmula de Taylor para una función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ con centro del desarrollo en el punto $M(u, v)$ y término residual en la forma de Peano tiene por expresión:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) &= \boldsymbol{r}(u, v) + \frac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v} \Delta v + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u^2} \Delta u^2 + 2\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u\, \partial v} \Delta u\, \Delta v + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v^2} \Delta v^2\right) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u^n} \Delta u^n + n \frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u^{n-1}\, \partial v} \Delta u^{n-1} \Delta v + \ldots \right. \\ &\left. \ldots + \frac{\partial^n \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v^n} \Delta v^n\right) + \boldsymbol{R}_n(\Delta u, \Delta v). \quad (12.4) \end{aligned}$$

donde el término residual $\boldsymbol{R}_n$ $(\Delta u, \Delta v)$ representa un vector cuyo orden de pequeñez es superior a ρ^n $(\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2})$ [1]).

De lo que la fórmula (12.4) es válida podemos convencernos, representando cada una de las coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ según la fórmula de Taylor con el término residual en forma de Peano y escribiendo a continuación la expresión para $\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ con ayuda del desarrollo según los vectores básicos (los coeficientes del desarrollo serán precisamente las coordenadas de este vector).

6. Integrales de las funciones vectoriales. Se ha constatado ya que una función vectorial se define por sus coordenadas que son unas funciones escalares. Esto nos permite extender al caso de las funciones vectoriales la operación de integración.

Supongamos, por ejemplo, que una función vectorial $\boldsymbol{r}(u)$ está dada sobre un segmento $[a, b]$ y que sus coordenadas $r_1(u)$, $r_2(u)$, $r_3(u)$ representan las funciones integrables sobre el segmento $[a,b]$. Si $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ son los vectores básicos, resulta natural poner, por definición:

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(u)\,du = \boldsymbol{e}_1 \int_a^b r_1(u)\,du + \boldsymbol{e}_2 \int_a^b r_2(u)\,du + \boldsymbol{e}_3 \int_a^b r_3(u)\,du.$$

Notemos que la integral para la función $\boldsymbol{r}(u)$ puede ser definida también de un modo directo, como límite de sumas integrales para la función $\boldsymbol{r}(u)$.

Por suma analogía con el caso examinado pueden introducirse también las integrales de las funciones vectoriales. Notemos que las fórmulas y reglas de integración de las funciones escalares pueden ser extendidas al caso de integrales de las funciones vectoriales.

§ 2. Algunos datos de la teoría de las curvas

1. Curvas regulares. En el § 1, cap. 2, v. II de este curso se trataba del concepto de curva y de los métodos de su definición. Entre los métodos de definir una curva se indicaba el método paramétrico, para el cual las coordenadas de un punto variable de la curva se definen como funciones de una variable escalar, esto es, de un parámetro. Tomando estas coordenadas por las del vector que sale del origen de coordenadas y va al punto de la curva, obtendremos una función vectorial de cuyo hodógrafo sirve la curva dada. De este modo, podemos definir una curva con ayuda de una función vectorial de una sola variable escalar y este método es equivalente al método paramétrico de definir una curva.

---

[1]) El orden de pequeñez de un vector se define como orden de pequeñez de su módulo.

Supongamos que una curva L se define por medio de la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ [1]). Admitamos que el parámetro t se sustituye por otro parámetro u, con ayuda de la relación $t = f(u)$, donde $f(u)$ es una función continua estrictamente creciente. En este caso la función $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ se convierte en una función nueva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(f(u))$ del parámetro u. De este modo, podemos obtener diferentes parametrizaciones de una misma curva.

Llamemos la curva L *regular* (k veces diferenciable) sin puntos singulares, si esta curva admite tal parametrización con ayuda del parámetro t, que la función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ es k veces diferenciable para cierto $k \geqslant 1$ entero y $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$ para todos los valores del parámento t. Cuando $k = 1$, la curva se llama *suave*.

En este capítulo se analizarán curvas regulares sin puntos singulares y aquellas parametrizaciones de estas curvas, para las cuales $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$.

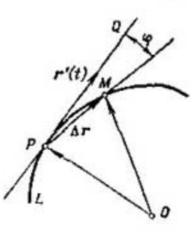

Fig. 12.5.

2. Tangente a una curva. Sea L una curva y P, un punto fijo en la curva L (fig. 12.5). Tracemos una cuerda PM de la curva. La recta PQ, a la que tiende la curva PM [2]) para $M \to P$, se llama *tangente* a L en el punto P.

Es válida la siguiente *afirmación*.

Una curva suave L sin puntos singulares tiene en cada punto P una tangente.

Demostremos que la tangente se representa por la recta PQ que pasa por el punto P paralelamente al vector $\boldsymbol{r}'(t)$ (recordemos que $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$). En efecto, un vector $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ es paralelo a la cuerda PM (véase fig. 12.5) y, cuando $\Delta t \to 0$, tiende a $\boldsymbol{r}'(t)$. De aquí se deduce que el ángulo formado por la recta PM y la PQ tiende a cero, cuando $M \to P$. Por eso, la recta PQ es tangente a la curva L. La afirmación está demostrada.

Deduzcamos la ecuación vectorial de una tangente a la curva L en el punto P. Sea $\boldsymbol{R}$ un radio vector del punto variable Q en la tangente en el punto P. El vector $\overline{PQ} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$ es colineal al vector $\boldsymbol{r}'(t)$ y, por eso, $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t) = u\boldsymbol{r}'(t)$. De aquí obtenemos la ecuación buscada de la tangente

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t), \tag{12.5}$$

[1]) Una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ se denomina, corrientemente, *radio vector* de la curva L.

[2]) Diremos que la curva PM tiende a la curva PQ cuando $M \to P$, si el ángulo entre estas rectas tiende a cero.

en la cual el papel del parámetro lo desempeña la magnitud u, mientras que t es el valor fijo del parámetro en la curva L que determina el punto P.

3. Plano osculador de una curva. Sea PQ una tangente a la curva L en un punto P (fig. 12.6). Tracemos por la tangente PQ y el punto M de la curva un plano PQM. Un plano π, al cual tiene el plano PQM [1]), cuando $M \to P$, se denomina *plano osculador a la curva* L en el punto P.

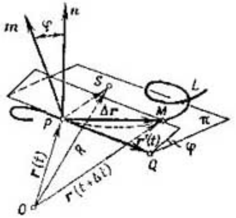

Fig. 12.6.

Es válida la siguiente *afirmación*.

Una curva regular L sin puntos singulares (por lo menos dos veces diferenciable) tiene un plano osculador en cada punto, en el cual los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ no son colineales.

Demostremos que el plano osculador será plano π que pasa por la tangente PQ paralelamente al vector $\boldsymbol{r}''(t)$. Es evidente que un vector

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{r}'(t)\, \boldsymbol{r}''(t)] \tag{12.6}$$

será el vector de la normal al plano π, y el vector

$$\boldsymbol{m} = \frac{2}{\Delta t^2}[\boldsymbol{r}'(t)\, \Delta\boldsymbol{r}], \quad \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t), \tag{12.7}$$

(véase fig. 12.6) será vector de la normal al plano PQM. Por cuanto la curva L es dos veces diferenciable, tendremos, de acuerdo con la fórmula de Taylor:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{r}''(t)\,\Delta t^2 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\Delta t^2, \tag{12.8}$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es una función vectorial infinitamente pequeña cuando $\Delta t \to 0$. De las fórmulas (12.6)—(12.8) se deduce que

$$\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{r}'(t)\, \boldsymbol{r}''(t)] + 2[\boldsymbol{r}'(t)\, \boldsymbol{\alpha}] = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\beta}, \tag{12.9}$$

donde $\boldsymbol{\beta} = 2[\boldsymbol{r}'(t)\, \boldsymbol{\alpha}]$ es una función vectorial infinitamente pequeña para $\Delta t \to 0$. De la relación (12.9) se deduce que, cuando $M \to P$, el vector $\boldsymbol{m}$ tiende a $\boldsymbol{n}$, y, por tanto, tiende a cero también el ángulo φ formado por los planos PQM y π. Por eso, el plano π es plano osculador respecto de la curva en el punto P. La afirmación está demostrada.

Deduzcamos la ecuación vectorial de un plano osculador. Sea $\boldsymbol{R}$ un radio vector del punto variable S de este plano. Los vectores

[1]) Diremos que el plano PQM tiende al plano π cuando $M \to P$, si el ángulo entre dichos planos tiende a cero.

$\overline{PS} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ son paralelos al plano osculador, y, por eso, $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t) = u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t)$. De aquí obtenemos la ecuación buscada del plano osculador

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(t) + u\boldsymbol{r}'(t) + v\boldsymbol{r}''(t), \tag{12.10}$$

en la cual u y v son argumentos de la función vectorial $\boldsymbol{R}$, mientras que t es el valor fijo del parámetro en la curva L que determina el punto P.

Obtengamos la ecuación del plano osculador en otra forma. Por cuanto los vectores $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}'(t), \boldsymbol{r}''(t)$ son coplanares, el vector $\boldsymbol{R}$ satisface la siguiente ecuación:

$$(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(t))\,\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}''(t) = 0. \tag{12.11}$$

Si X, Y, Z son coordenadas del vector $\boldsymbol{R}$ (coordenadas del punto variable S del plano π), y $x(t), y(t), z(t)$, coordenadas del vector $\boldsymbol{r}(t)$, entonces la ecuación (12.11) se escribirá en la forma coordenada del modo siguiente:

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \tag{12.12}$$

La ecuación (12.12) será, evidentemente, ecuación del plano osculador.

OBSERVACIÓN. En plano osculador está definido por nosotros geométricamente con ayuda de un paso límite y, por eso, si existe, será único. De aquí y de la afirmación demostrada en este punto se deduce que si en un punto dado π de la curva existe un plano osculador, entonces, cualquiera que sea la parametrización de la curva, el vector $\boldsymbol{r}''(t)$ es paralelo a este plano. Si el parámetro t se considera como tiempo, $\boldsymbol{r}''(t)$ será el vector de aceleración, al desplazarse el punto a lo largo de la curva L según la ley $\boldsymbol{r}(t)$. De este modo, para cualquier método de movimiento por la curva, el vector de aceleración en el punto dado se dispone en el plano osculador de la curva en este punto. Por esta razón el plano osculador se denomina *plano de aceleración*.

Una recta que pasa por el punto P de la curva L perpendicularmente a la tangente en este punto se llama *normal*. Una normal, dispuesta en el plano osculador lleva el nombre de *normal principal* de la curva y la normal perpendicular al plano osculador, *binormal* de la curva. La deducción de las ecuaciones de estas rectas queda al cargo del lector.

4. Curvatura de una curva. Sea P un punto fijo arbitrario de una curva regular L sin puntos singulares y sea M, un punto de esta curva distinto de P. Denotemos con φ el ángulo formado por las tangentes en los puntos P y M, y con l, la longitud del arco PM [1])(fig. 12.7).

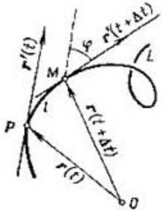

Fig. 12.7.

Se llama *curvatura* k_1 *de la curva* L *en el punto* P *un límite de la razón* φ/l para $l \to 0$ (es decir, para $M \to P$).

Es válida la siguiente *afirmación*.

Una curva regular L *(dos veces diferenciable) sin puntos singulares tiene en cada punto la curva determinada* k_1.

Pasemos a la demostración de esta afirmación. Supongamos que los puntos P y M de la curva corresponden a los valores t y $t+\Delta t$ respectivamente, del parámetro.

Calculemos sen φ y l. Por cuanto la curva L es regular, en cualquier punto de L se tiene $\boldsymbol{r}'(t) \neq 0$, y, por eso,

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|\,|\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)|}, \tag{12.13}$$

$$l = \int_t^{t+\Delta t} |\boldsymbol{r}'(\tau)|\,d\tau = |\boldsymbol{r}'(\tau^*)|\,\Delta t = |\boldsymbol{r}'(t)|\,\Delta t + \delta\,\Delta t, \tag{12.14}$$

donde $\delta \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

Notemos que en las transformaciones de la expresión para l se han aprovechado la fórmula del valor medio para la integral y la continuidad de la función $\boldsymbol{r}'(t)$.

Transformemos la expresión (12.13) para sen φ. De acuerdo con la fórmula de Taylor,

$$\boldsymbol{r}'(t+\Delta t) = \boldsymbol{r}'(t) + \boldsymbol{r}''(t)\,\Delta t + \boldsymbol{\alpha}\Delta t,\ \ \boldsymbol{\alpha} \to 0 \text{ para } \Delta t \to 0.$$

Con ayuda de esta fórmula la expresión (12.13) para sen φ toma una forma:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\,\boldsymbol{r}''(t)]| + \beta}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2 + \gamma}\,\Delta t, \tag{12.15}$$

donde $\beta \to 0$ y $\gamma \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

Volviendo a las fórmulas (12.14) y (12.15) y aprovechando, para $\varphi \neq 0$, una identidad

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\,\frac{\operatorname{sen}\varphi}{l}$$

[1]) Por cuanto L es una curva regular, cualquier arco suyo PM es rectificable.

(cuando $\varphi = 0$, la relación $\frac{\varphi}{l}$ es igual a cero), obtendremos

$$\frac{\varphi}{l} = \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\, \boldsymbol{r}''(t)]| + \beta}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3 + \mu}, \tag{12.16}$$

donde β y μ tienden a cero para $\Delta t \to 0$. Por cuanto $\varphi \to 0$ para $\Delta t \to 0$, resulta que $\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \to 1$ cuando $\Delta t \to 0$. Por eso, de la relación (12.16) se deduce que, cuando $\Delta t \to 0$, es decir, cuando $M \to P$, el límite $\frac{\varphi}{l}$ existe y es igual a $\frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\, \boldsymbol{r}''(t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}$. La afirmación está demostrada.

Así pues, en las condiciones de la afirmación la curvatura k_1 existe y puede ser calculada por la fórmula

$$k_1 = \frac{|[\boldsymbol{r}'(t)\, \boldsymbol{r}''(t)]|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3}. \tag{12.17}$$

OBSERVACIÓN. Si a título de parámetro en la curva está elegida la longitud del arco l, de suerte que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(l)$, entonces $|\boldsymbol{r}'(l)| = 1$, y el vector $\boldsymbol{r}''(l)$ es ortogonal al vector $\boldsymbol{r}'(l)$ [1]. En este caso, evidentemente, la fórmula (12.17) tendrá por expresión

$$k_1 = |r''(l)|. \tag{12.18}$$

5. Torsión de una curva. Sea P un punto fijo arbitrario de la curva regular L sin puntos singulares y sea M un punto de la curva citada, distinto de P. Denotemos con φ el ángulo entre los planos osculadores en los puntos P y M, y con l, la longitud del arco PM.

Se llama *torsión absoluta* $|k_2|$ de la curva L en el punto P el límite de la razón φ/l para $l \to 0$ (es decir, para $M \to P$).

Es válida la siguiente *afirmación*.

Una curva regular L (tres veces diferenciable) sin puntos singulares tiene en cada punto, en el que la curvatura es distinta de cero, una determinada torsión absoluta.

Pasemos a la demostración de esta afirmación.

Supongamos que los puntos P y M de la curva L corresponden a los valores t y $t + \Delta t$, respectivamente, del parámetro. Las normales a los planos osculadores en P y M se definen por los vectores $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_P$ y $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']_M$ [2]. De acuerdo con la fórmula de Taylor, habida cuenta de la

---

[1] Si la longitud del arco es un parámetro, de la fórmula $\Delta l = \int_l^{l+\Delta l} |\boldsymbol{r}'(\tau)| \times$ $\times d\tau$ se deduce, por ser arbitrarios l y Δl, que $|\boldsymbol{r}'(l)| = 1$ en cualquier punto de la curva. Al diferenciar la relación $\boldsymbol{r}'^2(l) = 1$, obtendremos $2\boldsymbol{r}'(l)\, \boldsymbol{r}''(l) = 0$, es decir, el vector $\boldsymbol{r}''(l)$ es ortogonal al vector $\boldsymbol{r}'(l)$.

[2] Las expresiones $[r'r'']_P$ y $[r'r'']_M$ significan que el producto vectorial $[\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'']$ está calculado en los puntos P y M, respectivamente.

igualdad $[r''r''] = 0$, obtenemos

$$[r'r'']_M = [r'r'']_P + ([r'r''])'_P \Delta t + \alpha \Delta t =$$
$$= [r'r'']_P + [r'r''']_P \Delta t + \alpha \Delta t, \qquad (12.19)$$

donde $\alpha \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

Para el cálculo del límite φ/l para $l \to 0$ nos hará falta el valor del seno del ángulo φ entre las normales a los planos osculadores en los puntos P y M. Con este fin hallemos el módulo del producto vectorial $[r'r'']_P$ y $[r'r'']_M$ y el producto de módulos de estos vectores. Con ayuda de (12.19) obtendremos

$$[[r'r'']_P [r'r'']_M] = [[r'r'']_P ([r'r'']_P + [r'r''']_P \Delta t + \alpha \Delta t)].$$

De aquí, aprovechando la propiedad distributiva del producto vectorial y la conocida fórmula $[a[bc]] = b(ac) - c(ab)$ para el producto vectorial doble, hallemos

$$[[r'r'']_P [r'r'']_M] = r'_P (r'r''r''')_P \Delta t + \beta \Delta t,$$

donde $\beta = [[r'r'']_P \alpha]$, y, por eso, $\beta \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$. De la última expresión para $[[r'r'']_P [r'r'']_M]$ obtenemos la siguiente fórmula

$$|[[r'r'']_P [r'r'']_M]| = |r'_P| \, |(r'r''r''')_P| \Delta t + \gamma \Delta t, \qquad (12.20)$$

donde $\gamma \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

Razonando análogamente, obtenemos también la siguiente fórmula:

$$|[r'r'']_P| \cdot |[r'r'']_M| = [r'r'']_P^2 + \mu \Delta t, \qquad (12.21)$$

donde $\mu \to 0$ para $\Delta t \to 0$.

De las fórmulas (12.20) y (12.21) obtenemos la expresión para sen φ que se busca:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{(|r'| \, |(r'r''r''')| + \gamma) \Delta t}{[r'r'']^2 + \mu \Delta t}.$$

Notemos que en esta expresión los valores de las derivadas de la función $r(t)$ están calculados en el punto P.

Volviendo a la expresión (12.14) para l, aprovechando la fórmula para sen φ que acabamos de recibir, y el límite conocido $\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} \to 1$ para $\varphi \to 0$, nos convencemos de que el límite $\frac{\varphi}{l}$ para $l \to 0$ existe y es igual a $\frac{|(r'r''r''')|}{[r'r'']^2}$.

Así pues, en las condiciones de la afirmación la torsión absoluta $|k_2|$ existe y puede ser calculada por la fórmula

$$|k_2| = \frac{|(r'r''r''')|}{[r'r'']^2}. \qquad (12.22)$$

Definamos *la torsión* k_2 de una curva con ayuda de la igualdad

$$k_2 = + \frac{(r'r''r''')}{[r'r'']^2}. \qquad (12.23)$$

Demostremos que *la torsión* k_2 *no depende de la elección de la parametrización de una curva y por eso constituye una determinada característica geométrica de la curva dada* [1].

Pasemos a otra parametrización de una curva con ayuda de un parámetro τ.

Al denotar la diferenciación respecto del parámetro τ con un punto, obtendremos, rigiéndonos por la regla de diferenciación de una función compuesta, las siguientes fórmulas:

$r' = \dot{r}\tau'$,

$r'' = \ddot{r}\tau'^2 + \{$términos que se expresan linealmente a través de $\dot{r}\}$,

$r''' = \dddot{r}\tau'^3 + \{$términos que se expresan linealmente a través de $\dot{r}$ y $\ddot{r}\}$.

De estas fórmulas se deducen las siguientes relaciones

$(r'r''r''') = (\dot{r}\ddot{r}\dddot{r})\tau'^6$, $[r'r'']^2 = [\dot{r}\ddot{r}]^2\tau'^6$. De este modo,

$$k_2 = \frac{(r'r''r''')}{[r'r'']} = \frac{(\dot{r}\ddot{r}\dddot{r})}{[\dot{r}\ddot{r}]^2}.$$

Nos hemos convencido de que k_2 no depende de cómo se elige la parametrización de una curva

6. Fórmulas de Frenet. Ecuaciones naturales de una curva. En el p. 3 de este párrafo se han introducido los conceptos de normal y de binormal de una curva. Estas rectas son, junto con la tangente, las aristas de un ángulo triedro, llamado *triedro natural*. Supongamos que como parámetro l en la curva L interviene la longitud del arco. Entonces, $\boldsymbol{r}'(l) = \boldsymbol{t}$ es el vector unidad de la tangente a L. Elijamos un vector unidad $\boldsymbol{n}$ de la normal principal de un modo tal que sea colineal al vector $\boldsymbol{r}''(l)$ [2], y tomemos a título de vector unidad de la binormal un vector

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{tn}]. \qquad (12.24)$$

De este modo, los vectores $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ forman una terna derecha de vectores, es decir, $(\boldsymbol{tnb}) > 0$. Los vectores $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{b}$ son funciones de la longitud del arco. Hallemos los desarrollos de las derivadas $\boldsymbol{t}'$, $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$

---

[1] La magnitud absoluta $|k_2|$ está determinada geométricamente. Por eso, de la parametrización puede depender sólo el signo de la expresión $\dfrac{(r'r''r''')}{[r'r'']^2}$.

[2] De acuerdo con la observación en el p. 4 de este párrafo, el vector $\boldsymbol{r}''(l)$ es ortogonal al vector $\boldsymbol{t}$ y se dispone en el plano osculador de la curva.

de estas funciones según los vectores $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{b}$. Por cuanto $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'(l)$, se tiene $\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{r}''(l)$. Por eso, el vector $\boldsymbol{t}'$ es colineal respecto de $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t}' = \alpha \boldsymbol{n}.$$

De conformidad con la observación 4 de esto párrafo, $\alpha = k_1$ ($\alpha = |\boldsymbol{t}'| = |\boldsymbol{r}''(l)| = k_1$) y por eso

$$\boldsymbol{t}' = k_1 \boldsymbol{n}. \tag{12.25}$$

Volvamos ahora al vector $\boldsymbol{b}$. Por cuanto $\boldsymbol{b}$ es un vector unidad, $\boldsymbol{b}'$ será ortogonal a $\boldsymbol{b}$. Demostremos que el vector $\boldsymbol{b}'$ es también orto-

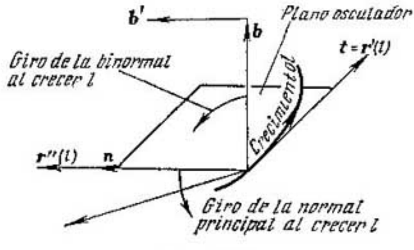

Fig. 12.8.

gonal a $\boldsymbol{t}$. Al diferenciar la identidad $(\boldsymbol{bt}) = 0$, obtenemos $(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}) + (\boldsymbol{bt}') = 0$. Por cuanto, de acuerdo con (12.25), $(\boldsymbol{bt}') = k_1(\boldsymbol{bn}) = 0$, entonces $(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{t}) = 0$, lo que es indicio de que el vector $\boldsymbol{b}'$ es ortogonal a $\boldsymbol{t}$. De los razonamientos aducidos se desprende que el vector $\boldsymbol{b}'$ es colineal con $\boldsymbol{n}$, es decir,

$$\boldsymbol{b}' = \beta \boldsymbol{n}. \tag{12.26}$$

Demostremos que $\beta = -k_2$. Sea φ un ángulo formado por los planos osculadores en los puntos correspondientes a los valores del parámetro l y $l + \Delta l$. Es evidente que el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{b}(l)$ y $\boldsymbol{b}(l + \Delta l)$ es también igual a φ, dado que el vector $\boldsymbol{b}$ es ortogonal a los planos osculadores. Por eso, tomando en consideración que $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\varphi}{\Delta l} = k_2$, obtendremos

$$|\boldsymbol{b}'| = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\boldsymbol{b}(l + \Delta l) - \boldsymbol{b}(l)}{\Delta l} \right| = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\varphi}{\Delta l} \right| = |k_2|.$$

Por consiguiente, siendo $|\beta| = |\boldsymbol{b}'|$, la relación $|\beta| = |k_2|$ se verifica. Supongamos que los vectores $\boldsymbol{b}'$ y $\boldsymbol{n}$ son de una misma orientación. De la fórmula (12.26) se deduce que en tal caso $\beta = |\boldsymbol{b}'|$, es decir, $\beta > 0$. Está claro que en este caso los vectores $\boldsymbol{r}'(l)$, $\boldsymbol{r}''(l)$

y $r'''(l)$ forman una terna de sentido opuesto con relación a la terna t, n, b (fig. 12.8) y, por eso, $(r', r'', r''') < 0$, es decir, $k_2 < 0$. Como $\beta > 0$ y $|\beta| = |k_2|$, se tiene $\beta = -k^2$. En el caso cuando los vectores b' y n son de orientación opuesta, es fácil convencerse, razonando de una manera igual, de que $\beta < 0$ y $k_2 > 0$. Por cuanto $|\beta| = |k_2|$, en este caso también $\beta = -k_2$. En el caso de que $\beta = 0$, la igualdad $\beta = -k_2$ es evidente. Hemos demostrado pues que

$$\beta = -k_2. \tag{12.27}$$

De las fórmulas (12.26) y (12.27) se deduce la expresión requerida para b'

$$b' = -k_2 n. \tag{12.28}$$

Hallemos ahora la expresión para n'. Haciendo uso de la regla de diferenciación de un producto escalar y de las fórmulas (12.25) y (12.28) obtendremos

$$n' = [bt]' = [b't] + [bt'] = -k_2[nt] + k_1[bn] = -k_1 t + k_2 b.$$

Reuniendo en una tabla las fórmulas (12.25), (12.28) y la expresión para n', que acabamos de deducir, obtendremos las siguientes fórmulas llamadas *fórmulas de Frenet* [1]):

$$\left.\begin{aligned} t' &= k_1 n, \\ n' &= -k_1 t + k_2 b, \\ b' &= -k_2 n. \end{aligned}\right\} \tag{12.29}$$

Las fórmulas de Frenet se llaman fórmulas fundamentales de la teoría de las curvas.

De las fórmulas de Frenet se deduce que si se conocen la curvatura k_1 y la torsión k_2 de la curva L, pueden hallarse las derivadas de las funciones vectoriales t, n y b (es decir, las velocidades de variación de estas funciones). Naturalmente, esto nos lleva a una idea de que la curvatura y la torsión definen la curva L, lo que realmente tiene lugar. A saber, es válida la siguiente *afirmación.*

Supongamos que $k_1(l)$ y $k_2(l)$ son cualesquiera funciones diferenciables y, además, $k_1(l) > 0$. Entonces, existe la única curva, con una exactitud de hasta la posición en el espacio, para la cual $k_1(l)$ y $k_2(l)$ son la curvatura y la torsión respectivamente.

No vamos a demostrar esta afirmación. Notemos solamente que la demostración se fundamenta en el teorema de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por cuanto, de acuerdo con la afirmación enunciada, la curvatura $k_1(l)$ y la torsión $k_2(l)$ definen por completo una curva, el sistema de

[1]) J. Frenet, matemático francés (1801—1880).

ecuaciones

$$k_1 = k_1(l), \quad k_2 = k_2(l)$$

se denominan, de ordinario, *ecuaciones naturales* (*intrínsecas*) de la curva.

§ 3. Algunos datos de la teoría de las superficies

En el cap. 5 hemos conocido una serie de datos importantes sobre las superficies: se ha introducido el concepto de superficie, el de superficie regular y suave sin puntos singulares y concepto de plano tangente y de normal a una superficie. Aquí daremos a conocer una serie de propiedades importantes de las superficies regulares.

1. Primera forma cuadrática de una superficie. Mediciones sobre una superficie. Sea Φ una superficie regular sin puntos singulares y sea $\boldsymbol{r}(u, v)$, el radio vector de la citada superficie. Según se sabe, en este caso $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$.

Se llama primera forma cuadrática I de la superficie Φ una expresión

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2. \tag{12.30}$$

La denominación «forma cuadrática» se debe a que la expresión

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \, du dv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2$$

representa *una forma cuadrárica de las diferenciales du y dv.*

La primera forma cuadrática es definida positivamente por la forma: se reduce en 0 *sólo* cuando $du = dv = 0$, y para los demás valores de du y dv es positiva. En efecto, si $d\boldsymbol{r}^2 = 0$, entonces, $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = 0$. Por eso, si du y dv no se anulan simultáneamente, de la igualdad $\boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = 0$ se deduce que $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ son colineales, es decir, $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] = 0$, lo que es imposible, puesto que, por hipótesis, $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$.

Para los coeficientes de la primera forma cuadrática se emplean las designaciones

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \qquad \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = F, \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G. \tag{12.31}$$

Con ayuda de estas designaciones la expresión (12.30) para la primera forma cuadrática puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\mathrm{I} = d\boldsymbol{r}^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{12.32}$$

Así pues, *sobre una superficie regular Φ definida por el radio vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, viene dada una primera forma cuadrática* I *mediante la relación* (12.32). En este caso los coeficientes de la forma citada pueden calcularse según las fórmulas (12.31).

Con ayuda de la primera forma cuadrática pueden realizarse mediciones sobre una superficie: en particular, cálculo de las longitudes de los *arcos de las líneas y mediciones de los ángulos entre las líneas de las áreas de los dominios.*

Sea L una línea regular sobre una superficie Φ, definida por las ecuaciones paramétricas [1])

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \tag{12.33}$$

con la particularidad de que $u(t)$ y $v(t)$ son funciones diferenciables con derivadas continuas.

Se conoce que la longitud l del arco de la curva L, definida por el radio vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, puede hallarse según la fórmula

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt \tag{12.34}$$

(véase fórmula (2.21), v. II).

Como $|\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = |\boldsymbol{r}'(u(t), v(t))|\, dt = |d\boldsymbol{r}(u, v)|$, de la fórmula (12.34) obtenemos

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |\boldsymbol{r}'|\, dt = \int_L |d\boldsymbol{r}(u, v)| = \int_L \sqrt{d\boldsymbol{r}^2} = \int_L \sqrt{\mathrm{I}} \tag{12.35}$$

(las últimas tres integrales en (12.35) representan integrales curvilíneas de primera especie). Así pues, si se conoce la primera forma cuadrática, se pueden calcular las longitudes, con ayuda de (12.35).

Pasemos ahora a las mediciones de los ángulos en las superficies.

Sea Φ una superficie dada mediante una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

La dirección $du : dv$ sobre la superficie Φ en su punto P se define como dirección del vector $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v\, dv$ en dicho punto [2]).

Examinemos en el punto P dos direcciones, $du : dv$ y $\delta u : \delta v$. El ángulo φ entre estasdi recciones se determina según la fórmula bien conocida por el curso de la geometría analítica para el coseno del

---

[1]) Está claro que la representación de u y v en forma de las funciones (12.33) de cierto parámetro t determina en una superficie una curva definida por la función vectorial $\boldsymbol{r}(u(t), v(t))$. La cuestión de si toda línea suave L en la superficie Φ puede definirse por las ecuaciones paramétricas de la forma (12.33) se resuelve afirmativamente, por ejemplo, de un modo siguiente. Sean $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ las ecuaciones paramétricas de L. Entonces, u y v, siendo funciones del parámetro t, pueden determinarse a partir de las ecuaciones $x(t) = x(u, v)$, $y(t) = y(u, v)$, $z(t) = z(u, v)$. La solución de la forma (12.33) se garantiza por la condición $[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v] \neq 0$, de la cual se deduce, por ejemplo, que $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$. La última condición asegura la resolubilidad del sistema $x(t) = x(u, v)$, $y(t) = y(u, v)$ respecto de u y v.

[2]) Es evidente que este vector está dispuesto en el punto P del plano tangente.

ángulo φ entre los vectores $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv$ y $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \delta u + \boldsymbol{r}_v \delta v$:

$$\cos\varphi = \frac{(d\boldsymbol{r} \cdot \delta\boldsymbol{r})}{\sqrt{d\boldsymbol{r}^2}\sqrt{\delta\boldsymbol{r}^2}}.$$

Tomando en consideración la relación (12.31), de esta fórmula obtenemos para $\cos\varphi$ la siguiente expresión:

$$\cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\ \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v + G\delta v^2}}. \qquad (12.36)$$

El ángulo entre las curvas L_1 y L_2 sobre la superficie Φ que se intersecan en un punto P se define como ángulo entre las direcciones de las tangentes a L_1 y L_2 en el punto P. Notemos que si una curva sobre la superficie se define mediante las ecuaciones paramétricas $u = u(t)$, $v = v(t)$, la dirección $du : dv$ en un punto de esta curva se define por un vector

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = (\boldsymbol{r}_u u' + \boldsymbol{r}_v v')\,dt.$$

Así pues, conociendo la primera forma cuadrática, podemos calcular, con ayuda de (12.36), los ángulos entre las direcciones sobre la superficie.

El problema de medición de las áreas de los dominios en una superficie fue detalladamente examinado en el cap. 5.

Recordemos que si un dominio Π en la superficie se define prefijando los parámetros u y v en el dominio de su variación Ω, el área σ del dominio Π puede calcularse según la fórmula

$$\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

(véase fórmula (5.18)).

De este modo, si se conoce la primera forma cuadrática, podemos medir áreas de los dominios sobre una superficie.

Todos los hechos que pueden obtenerse por medición sobre una superficie con ayuda de la primera forma cuadrática se refieren a la así llamada *geometría intrínseca de las superficies.*

Dos diferentes superficies pueden contar con una misma geometría intrínseca. Como ejemplo más simple de tales superficies puede servir un plano y un cilindro parabólico. Notemos que las superficies de una misma geometría intrínseca se llaman *isométricas*.

2. Segunda forma cuadrática de una superficie. Sea Φ una superficie regular definida por un radio vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, y sea $\boldsymbol{n}(u, v)$ un vector unidad de la normal a esta superficie definido por una relación

$$\boldsymbol{n} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]|} = \frac{[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}\ ^{1)}. \qquad (12.37)$$

[1]) Por cuanto $|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{\boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2}$, entonces, de acuerdo con las fórmulas (12.31), $|[\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$.

Se llama segunda forma cuadrática II de una superficie una expresión

$$\mathrm{II} = -\,d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{n}. \tag{12.38}$$

Puesto que $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$[1]), tenemos $d\,(d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}) = 0$, es decir, $d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = -d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{n}$, y, por eso, la segunda forma cuadrática puede ser definida también con ayuda de la relación

$$\mathrm{II} = d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{12.39}$$

Por cuanto $d^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{uu}du^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\,du\,dv + \boldsymbol{r}_{vv}dv^2$, entonces, de acuerdo con (12.39), la segunda forma cuadrática puede escribirse del modo siguiente:

$$\mathrm{II} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,du^2 + 2\,(\boldsymbol{r}_{uv}\,\boldsymbol{n})\,du\,dv + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,dv^2. \tag{12.40}$$

Para los coeficientes de la segunda forma se emplean las siguientes designaciones

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = L, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = M, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = N. \tag{12.41}$$

Volviendo a la expresión (12.37) para $\boldsymbol{n}$, obtendremos, con ayuda de (12.41), las siguientes fórmulas para los coeficientes de la segunda forma:

$$L = \frac{\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad M = \frac{\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad N = \frac{\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}. \tag{12.42}$$

3. Clasificación de los puntos de una superficie regular. Analicemos un problema de desviación de una superficie del plano tangente en un punto dado.

Sean: Φ, una superficie regular (dos veces diferenciable); $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, v)$, el radio vector que define la citada superficie; $\boldsymbol{n}\,(u, v)$, el vector unidad de la normal; $P\,(u, v)$, un punto fijo de la superficie; $\boldsymbol{n}_P$, el vector $\boldsymbol{n}\,(u, v)$ en el punto P[2]); M, un punto de la superficie que corresponde a los valores de los parámetros $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ (fig. 12.9).

Sea N la base de una perpendicular trazada de M a un plano tangente π en el punto P, y sea h una magnitud cuyo valor absoluto es igual a la distancia entre M y el plano π. El signo de h es positivo, si las direcciones de los vectores $\overline{NM}$ y $\boldsymbol{n}_P$ coinciden, y es negativo en el caso contrario. Es evidente que

$$h = \Delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}_P, \tag{12.43}$$

donde $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}\,(u, v) = \overline{PM}$. Por cuanto u y v son variables independientes, podemos considerar $\Delta u = du$, $\Delta v = dv$, y, por eso, aprovechando la fórmula de Taylor (véase fór-

[1]) El vector $d\boldsymbol{r}$ se dispone en el plano tangente a la superficie y, por eso, $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$.

[2]) La letra P al pie del vector significará en adelante que el vector se toma en el punto P.

mula (12.4)), obtendremos

$$\Delta r = (dr)_P + \frac{1}{2}(d^2r)_P + R_2. \qquad (12.44)$$

En esta relación las diferenciales están calculadas en el punto P, y R_2 es un vector de orden $o(\rho^2)$, donde $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$. De las fór-

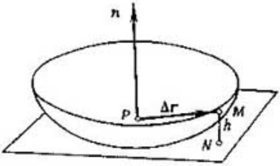

Fig. 12.9.

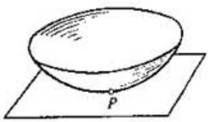

Fig. 12.10.

mulas (12.43) y (12.44) obtenemos para h la siguiente expresión:

$$h = \frac{1}{2} d^2r_P \cdot n_P + R_2 \cdot n_P. \qquad (12.45)$$

Por cuanto $d^2r_P \cdot n_P$ es la segunda forma cuadrática II_P calculada en el punto P, y $R_2 n_P = o(\rho^2)$, la relación (12.45) puede ser escrita en la forma:

$$h = \frac{1}{2} II_P + o(\rho^2). \qquad (12.46)$$

Volviendo a la fórmula (12.46), podemos suponer que la influencia principal en la magnitud h la ejerce el sumando $1/2\ II_P$, y, por eso, la estructura espacial de una superficie en las cercanías de un punto regular se determina por la segunda forma cuadrática en este punto.

Esta suposición se confirma por los siguientes razonamientos.

1°. La segunda forma cuadrática II_P es *de signo fijo* ($LN - M^2 > 0$).

En este caso [1])

$$|II_P| \geqslant A\rho^2, \quad A > 0.$$

De aquí y de la relación (12.46) se deduce que la magnitud h conserva intacto un signo determinado para todos los valores ρ suficientemente pequeños, y, por eso, en un entorno del punto P la superficie se dispone por un lado respecto del plano tangente π_P en este punto (fig. 12.10).

[1]) Podemos convencernos de la validez de la desigualdad $|II_P| \geqslant A\rho^2$, del modo siguiente, por ejemplo. Tenemos $|II_P| = |L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2| = |L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + N\,\mathrm{sen}^2\alpha|\,\rho^2$, donde $\cos\alpha = du/\rho$, $\mathrm{sen}\,\alpha = dv/\rho$. Por cuanto II_P es una forma de signo fijo, la expresión $|L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + N\,\mathrm{sen}^2\alpha|$ tiene mínimo positivo A, es decir, $|II_P| \geqslant A\rho^2$.

El punto P de una superficie se llama en este caso *elíptico*.

Una esfera, un elipsoide, un paraboloide elíptico son ejemplos de las superficies, cada punto de las cuales es elíptica.

2°. La segunda forma cuadrática II_P es de *signo variable* ($LN - M^2 < 0$). En este caso, en el punto P de la superficie pueden indicarse dos direcciones diferentes, $du : dv$ y $\delta u : \delta v$, de tal índole que para los valores de las diferenciales de las variables u y v, que definen las citadas direcciones, la segunda forma se anula, mientras que las demás direcciones se subdividen por dos mencionadas en dos

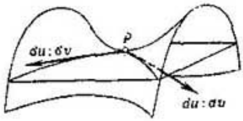

Fig. 12.11.

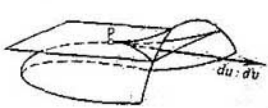

Fig. 12.12.

clases. Para las diferenciales du y dv, la razón $du : dv$ entre las cuales define una dirección perteneciente a una de estas clases, la segunda forma es positiva; para las razones $du : dv$, que definen las direcciones de la otra clase, la segunda forma es negativa. Por eso, la superficie en cercanías del punto P se dispone por los lados diferentes respecto del plano tangente π_P en este punto (fig. 12.11).

El punto P de la superficie se llama en este caso *hiperbólico*.

Cada punto de un hiperboloide de una hoja y de un paraboloide hiperbólico es hiperbólico.

3° La segunda forma cuadrática II_P es *casi de signo fijo* ($LN - M^2 = 0$). En este caso, sobre la superficie puede indicarse en el punto P una dirección $du : dv$ de tal índole que para los valores de las diferenciales du y dv, que definen dicha dirección, la segunda forma se reduce a cero. Para todos los demás valores de las diferenciales la forma conserva intacto su signo [1]) (fig. 12.12).

El punto P de la superficie se llama en este caso *parabólico*. Cada punto de una superficie cilíndrica es parabólico.

4°. La segunda forma cuadrática II_P es igual a cero en el punto P ($L = M = N = 0$). El punto P se llama en este caso *punto de aplastamiento*. En la fig. 12.13 se expone una superficie con un punto de aplastamiento.

Cualquier punto de un plano es punto de aplastamiento. Como ejemplo de punto aislado de aplastamiento puede servir un punto con las coordenadas (0, 0, 0) de la superficie definida mediante una ecuación $z = x^4 + y^4$.

---

[1]) En este caso la segunda forma puede ser representada en forma del cuadrado de cierta forma lineal de las diferenciales du y dv.

Notemos que si todos los puntos de una superficie son puntos de aplastamiento, la superficie es un plano.

4. Curvatura de una curva sobre la superficie. Supongamos que la superficie regular Φ está definida mediante una función vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$; $\boldsymbol{n}$ es el vector unidad de la normal a Φ, y L, una curva regular sobre Φ que tiene en el punto $P(u, v)$ una dirección $du : dv$.

Elijamos a título de parámetro sobre L la longitud l de un modo tal que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(l), v(l)) = \boldsymbol{r}(l)$ a lo largo de L. En el punto 6 del

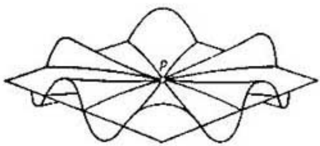

Fig. 12.13.

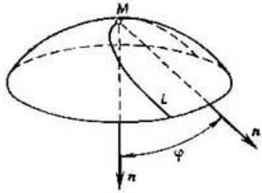

Fig. 12.14.

párrafo anterior se ha establecido que el vector $\boldsymbol{r}''(l)$ está dirigido a lo largo de la normal principal $\boldsymbol{n}_L$ a la curva L en el punto P y que el módulo de este vector es igual a la curvatura k de la curva L en el punto P. Por eso,

$$\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} = k \cos \varphi, \tag{12.47}$$

donde φ es el ángulo entre la normal principal $\boldsymbol{n}_L$ de la curva L y la normal $\boldsymbol{n}$ a la superficie (fig. 12.14). Según la regla de diferenciación de una función compuesta tenemos:

$$\boldsymbol{r}''(l) = \boldsymbol{r}_{uu}u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u'v' + \boldsymbol{r}_{vv}v'^2 + \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v''.$$

Por cuanto el vector $\boldsymbol{n}$ es ortogonal a los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$, sustituyendo la expresión determinada de $\boldsymbol{r}''(l)$ en el primer miembro de (12.47) y teniendo presentes las fórmulas (12.41), obtenemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,u'^2 + 2\,(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\,u'v' + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,v'^2 = \\ &= Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2.\end{aligned} \tag{12.48}$$

Puesto que $u' = \frac{du}{dl}$, $v' = \frac{dv}{dl}$, y sobre la curva L se verifica la igualdad $dl^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, entonces, de (12.47) y (12.48) proviene una relación

$$k \cos \varphi = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{12.49}$$

El segundo miembro de (12.49) depende sólo de la razón $du : dv$, es decir, sólo de la dirección $du : dv$. Por eso, *para todas las curvas*

L sobre la superficie Φ que pasan por el punto P en la dirección dada du : dv, la expresión k cos φ *es igual a cierta constante* k_n:

$$k \cos \varphi = k_n = \text{const.} \tag{12.50}$$

En particular, si una curva L es la así llamada *sección normal* L_n de la superficie Φ en la dirección $du : dv$, es decir, una línea de intersección de la superficie Φ con un plano que pasa por la normal $\boldsymbol{n}$ y la dirección $du : dv$, entonces $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, y, por eso, la fórmula (12.50) adquiere la forma

$$k = k_n.$$

De este modo, la magnitud k_n representa la curvatura de la sección normal de la superficie $du : dv$ y puede ser calculada según la fórmula

$$k_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{12.51}$$

La magnitud k_n se llama también curvatura normal de la línea L.

Notemos que la igualdad (12.50) expresa el contenido del *teorema de Meusnier* [1]).

5. Curvas especiales sobre una superficie.

1°. *Líneas asintóticas.* Una dirección $du : dv$ sobre la superficie regular Φ en un punto P se denomina *asintótica*, si la curvatura normal en esta dirección es igual a cero.

De la relación (12.51) proviene que la dirección $du : dv$ será asintótica sólo en aquel caso en que para esta dirección se cumple la condición

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0. \tag{12.52}$$

Por cuanto la segunda forma se reduce a cero en los puntos hiperbólicos, puntos parabólicos y puntos de aplastamiento de la superficie, sólo en los puntos mencionados se tienen direcciones asintóticas; en un punto hiperbólico dos direcciones asintóticas, en un punto parabólico una dirección asintótica, en un punto de aplastamiento cualquier dirección es asintótica.

Introduzcamos el concepto de *línea asintótica*.

Se llama *línea asintótica* sobre una superficie a una curva, cuya dirección en cada punto es asintótica.

Si una superficie regular se compone de puntos hiperbólicos, está cubierta con dos familias de líneas asintóticas.

Por ejemplo, dos familias de generatrices rectilíneas de un hiperboloide de una hoja son líneas asintóticas.

Si en una superficie se tienen dos familias de líneas asintóticas, ellas pueden tomarse, en el caso general, por líneas de coordenadas u y v. En este caso, a lo largo de la línea u, por ejemplo, no varía el

[1]) Meusnier, matemático francés (1754—1799).

parámetro v, y, por eso, en esta línea la segunda forma tiene por expresión $\mathrm{II} = L\,du^2$. Por cuanto en la dirección asintótica $\mathrm{II} = 0$ (véase la relación (12.52)), resulta que $L = 0$. De un modo análogo podemos convencernos de que $N = 0$. Así pues, *si las líneas asintóticas de una superficie son líneas coordenadas, la segunda forma tendrá por expresión*

$$\mathrm{II} = 2M\,du\,dv.$$

2°. *Direcciones principales. Líneas de curvatura.* De la fórmula (12.51) se ve que la curvatura normal en un punto dado es una función de du y dv, y, con mayor precisión, de la razón du/dv, es decir, de la dirección $du : dv$ en el punto dado.

Los valores extremales de la curvatura normal en un punto dado se denominan *curvaturas principales*, y las direcciones correspondientes, *direcciones principales.*

Cerciorémonos de que en un punto dado de una superficie regular siempre hay direcciones principales.

Al suponer

$$\frac{du}{\sqrt{du^2+dv^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{dv}{\sqrt{du^2+dv^2}} = \operatorname{sen}\alpha,$$

reduzcamos la expresión (12.51) para k_n a una forma

$$k_n = \frac{L\cos^2\alpha + 2M\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + N\operatorname{sen}^2\alpha}{E\cos^2\alpha + 2F\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + G\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

De este modo, en un punto dado la curvatura normal k_n representa una función diferenciable del argumento α, que está definida en un segmento $[0, 2\pi]$ y que toma valores iguales para $\alpha = 0$ y $\alpha = 2\pi$. Por eso, en cierto punto interior α de dicho segmento k_n tiene un extremo local. Al valor mencionado de α le corresponde una dirección $du : dv$ sobre la superficie, la cual será, naturalmente, principal. Si empezamos a medir los ángulos α a partir de esta dirección principal, entonces, razonando análogamente, nos convencemos de que por lo menos para una dirección más $du : dv$ se logra un extremo de la curvatura normal.

Así pues, *en cada punto de una superficie regular existen por lo menos dos diferentes direcciones principales.*

Demos a conocer un método de calcular curvaturas principales en un punto dado. Considerando k_n como función de du y dv, obtenemos de (12.51) la siguiente identidad respecto de du y dv:

$$(L - k_nE)\,du^2 + 2\,(M - k_nF)\,du\,dv + (N - k_nG)\,dv^2 \equiv 0.$$

Diferenciando esta identidad respecto de du y respecto de dv, y tomando en consideración que la derivada de la curvatura normal para la dirección principal es igual a cero, obtendremos para du y dv

que definen cualquier dirección principal, las relaciones:

$$\left.\begin{aligned}(L-k_iE)\,du+(M-k_iF)\,dv=0,\\(M-k_iF)\,du+(N-k_iG)\,dv=0,\end{aligned}\right\}\qquad(12.53)$$

en las cuales k_i es el valor de la curvatura principal en la dirección $du:dv$. Por cuanto en todo punto existen direcciones principales, el sistema (12.53) tiene soluciones no nulas respecto de du y dv. Por consiguiente, ha de ser igual a cero el determinante de este sistema:

$$\begin{vmatrix}L-k_iE & M-k_iF\\ M-k_iF & N-k_iG\end{vmatrix}=0.\qquad(12.54)$$

De la ecuación (12.54) pueden determinarse las curvaturas principales k_i, y a continuación, de las relaciones (12.53), las direcciones principales.

La ecuación (12.54) es ecuación cuadrada respecto de k_i cuyas raíces reales son las curvaturas principales. Por eso, pueden tener lugar dos casos:

1°. La ecuación (12.54) tiene dos raíces reales k_1 y k_2.

2°. Las raíces k_i de la ecuación (12.54) son iguales. Examinemos estos casos separadamente.

1°. *La ecuación* (12.54) *tiene dos raíces diferentes*: k_1 y k_2, $k_1\neq k_2$. A estas raíces les corresponden dos diferentes direcciones principales. Cerciorémonos de que *si las direcciones de las líneas coordenadas u y v en un punto dado coinciden con las principales, en dicho punto $F=0$ y $M=0$. Notemos que la reducción de F a cero significa ortogonalidad de las direcciones principales.*

Así pues, supongamos que las direcciones de las líneas coordenadas u y v en punto dado coinciden con las direcciones principales. Esto significa que las direcciones $du:0$, $0:dv$ son principales, y, por eso, de las relaciones (12.53) provienen las igualdades

$$L-k_1E=0,\quad M-k_1F=0,$$
$$M-k_2F=0,\quad N-k_2G=0.$$

Por cuanto $k_1\neq k_2$, es evidente que $M=0$, $F=0$. Notemos que para la elección mencionada de las líneas coordenadas las curvaturas principales k_1 y k_2 pueden hallarse a partir de las relaciones

$$k_1=\frac{L}{E},\quad k_2=\frac{N}{G}.$$

2°. *La ecuación* (12.54) *tiene dos raíces iguales*: $k_1=k_2=k$. *Cerciorémonos de que en este caso cualquier dirección en un punto dado es principal. Si las líneas coordenadas en un punto dado son ortogonales, en el punto citado $F=0$ y $M=0$.*

Ya se ha notado que en todo punto se tienen por lo menos *dos direcciones principales diferentes.* En el caso que se considera a cada una de estas direcciones principales le corresponde un mismo valor k de la curvatura principal. Mas, en este caso deben reducirse a cero los coeficientes del sistema (12.53), es decir,

$$L - kE = 0, \quad M - kF = 0, \quad N - kG = 0.$$

De estas igualdades se deduce que en un punto dado los coeficientes de la segunda forma son proporcionales a los coeficientes de la primera forma:

$$L = kE, \quad M = kF, \quad N = kG.$$

Sustituyendo estos valores de L, M y N en la fórmula (12.51), nos convencemos de que en el punto dado las curvaturas de las secciones normales en cualquier dirección $du : dv$ son iguales y equivalen a k. Por consiguiente, cualquier dirección $du : dv$ en el punto dado es principal.

Si las líneas coordenadas en un punto dado son ortogonales, tenemos $F = 0$, y en este caso de la relación $M - kF = 0$ se deduce que también $M = 0$.

Así pues, podemos llegar a la siguiente deducción: *en todo punto de una superficie se tienen direcciones principales ortogonales. Si las direcciones de las líneas coordenadas coinciden con dichas direcciones principales, en el punto citado $F = 0$ y $M = 0$.*

Introduzcamos el concepto de *línea de curvatura.*

Se llama línea de curvatura sobre una superficie a una curva cuya dirección en cada punto es principal.

Sobre cualquier superficie regular se tienen, en el caso general, dos familias diferentes de líneas de curvatura (más arriba se ha indicado que en cada punto hay dos diferentes direcciones principales).

Señalemos que si elegimos, a título de líneas coordenadas, las líneas de curvatura, la primera y la segunda formas de una superficie tendrán por expresión:

$$\mathrm{I} = E\, du^2 + G\, dv^2,$$
$$\mathrm{II} = L\, du^2 + N\, dv^2,$$

puesto que $F = 0$ y $M = 0$.

3°. *Líneas geodésicas.* Se llama *línea geodésica* sobre una superficie una curva en todo punto de la cual la normal principal coincide con la normal a la superficie.

Dos puntos cualesquiera de una superficie completa regular pueden unirse mediante una línea geodésica. Si dichos puntos son suficientemente próximos, la línea geodésica que los une será, además, más corta: cualquier otra línea sobre la superficie que une los puntos mencionados, será de mayor longitud.

Notemos que el movimiento de un punto por la superficie en ausencia de las fuerzas externas se realiza a lo largo de la línea geodésica.

6. Fórmula de Euler. Curvaturas media y gaussiana de una superficie. Teorema de Gauss. Sea P un punto fijo de la superficie regular Φ. Convengamos en considerar que las líneas coordenadas u y v son ortogonales en un punto dado y que las direcciones de dichas líneas coinciden con las direcciones principales. En el p. 5 de este párrafo se ha establecido que con tal elección de las líneas coordenadas en el punto dado se cumplen las relaciones

$$F = 0, \quad M = 0, \quad L - k_1 E = 0, \quad N - k_2 G = 0.$$

Con ayuda de estas relaciones la fórmula (12.51) para la curvatura normal k_n toma por expresión

$$k_n = \frac{k_1 E\, du^2 + k_2 G\, dv^2}{E\, du^2 + G\, dv^2}.$$

Al poner

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{E}\, dv}{\sqrt{E\, du^2 + G\, dv^2}}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{G}\, dv}{\sqrt{E\, du^2 + G\, dv^2}}, \qquad (12.55)$$

obtendremos, evidentemente, la siguiente fórmula para la curvatura normal:

$$k_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \operatorname{sen}^2 \varphi. \qquad (12.56)$$

La fórmula (12.56) lleva el nombre *de Euler*. Con ayuda de esta fórmula la curvatura normal k_n en la dirección $du : dv$ puede ser calculada en términos de las curvaturas principales k_1 y k_2.

Evidentemente, las fórmulas de Euler y (12.50) ofrecen una completa información sobre la distribución de las curvaturas de las líneas sobre una superficie.

OBSERVACIÓN 1. El ángulo φ en la fórmula de Euler, cuyo valor puede hallarse, para la dirección dada $du : dv$, según las fórmulas (12.55) representa un ángulo que la dirección $du : dv$ forma con la dirección de la línea coordenada u.

Con el fin de cerciorarse de esto, calculemos, según la fórmula (12.36), el coseno del ángulo formado por las direcciones $du : dv$ y $du{:}0$ de la línea u. Al poner en la fórmula (12.36) $\delta u = du, \delta v = 0$, obtenemos para el coseno buscado una expresión $\frac{\sqrt{E}\, du}{\sqrt{E\, du^2 + G\, dv^2}}$ la cual coincide con la expresión para $\cos\varphi$, hallada según la primera de las fórmulas (12.55).

En la teoría de las superficies son de amplio uso el concepto de *curvatura media* y el de *curvatura gaussiana* de una superficie en un punto dado.

Se llama curvatura media H de una superficie a una semisuma $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ de las curvaturas principales. Se llama curvatura gaussiana K de una superficie a un producto $k_1 k_2$ de curvaturas principales.

Volviendo a la ecuación (12.54) para las curvaturas principales y aprovechando las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrada, obtenemos las siguientes fórmulas para H y K:

$$H=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}, \tag{12.57}$$

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}. \tag{12.58}$$

OBSERVACION 2. De la expresión (12.58) para la curvatura gaussiana proviene que su signo coincide con el del discriminante $LN-M^2$ de la segunda forma cuadrática (el discriminante $EG-F^2$ de la primera forma es siempre positivo, puesto que la primera forma es definida positiva). Por eso, la curvatura gaussiana en los puntos elípticos es positiva, en los puntos hiperbólicos es negativa y es nula en los puntos parabólicos y en los de aplastamiento.

A primera vista se produce una impresión de que la curvatura gaussiana K de una superficie puede hallarse sólo en el caso cuando son conocidas las formas cuadráticas primera y segunda de la superficie (véase fórmula (12.58)).

No obstante, en realidad la curvatura gaussiana puede ser expresada sólo en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y, por eso, representa un objeto de la geometría intrínseca de la superficie. Este hecho notable fue establecido por Gauss [1]) y se llama en la literatura matemática *«famoso teorema de Gauss»*. Demostremos este teorema.

Teorema de Gauss. *La curvatura gaussiana K de una superficie puede ser expresada en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie y de sus derivadas.*

DEMOSTRACIÓN. Volviendo a la fórmula (12.58) para la curvatura gaussiana K y haciendo uso de la expresión (12.42) para los coeficientes de la segunda forma cuadrática, es fácil convencerse de que con el fin de demostrar el teorema, basta expresar en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas la siguiente expresión:

$$A=(\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)(\mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)-(\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)^2.$$

Esta expresión se transforma fácilmente en una forma [2])

$$A=\begin{vmatrix}\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_{vv}-\mathbf{r}_{uv}^2 & \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_v\\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{vv} & E & F\\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{vv} & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_v\\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_{uv} & E & F\\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_{uv} & F & G\end{vmatrix}. \tag{12.59}$$

[1]) C. F. Gauss (1777—1855), matemático eminente alemán.

[2]) En la transformación se usa la siguiente identidad:

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1)(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2\mathbf{c}_2)=\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{a}_1\mathbf{c}_2\\ \mathbf{b}_1\mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1\mathbf{c}_2\\ \mathbf{c}_1\mathbf{a}_2 & \mathbf{c}_1\mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\end{vmatrix}.$$

Al diferenciar respecto de u y v las expresiones

$$\boldsymbol{r}_u^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = F; \quad \boldsymbol{r}_v^2 = G,$$

obtenemos

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u = \frac{1}{2} E_u, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u = \frac{1}{2} E_v, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v = \frac{1}{2} G_v,$$

$$\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v = \frac{1}{2} G_u, \quad \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v = F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u = F_v - \frac{1}{2} G_u.$$

Diferenciando la expresión para $\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v$ respecto de v, y la expresión $\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v$ respecto de u, y sustrayendo los resultados obtenidos, hallamos

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_{vv} - \boldsymbol{r}_{uv}^2 = -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}.$$

Sustituyendo la expresión determinada y las expresiones para los productos escalares de las derivadas en el segundo miembro de (12.59), nos convencemos de que el teorema es válido.

Aduzcamos en conclusión una expresión para la curvatura gaussiana K en términos de las coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas:

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}\right) & \frac{1}{2} E_u & \left(F_u - \frac{1}{2} E_v\right) \\ \left(F_v - \frac{1}{2} G_u\right) & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{vmatrix} -$$

$$- \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{vmatrix}.$$

Anexo

SOBRE EL CÁLCULO DE LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN SEGÚN LOS COEFICIENTES DE FOURIER DADOS EN LA FORMA APROXIMADA

1. Problema de sumación de la serie trigonométrica de Fourier con coeficientes de Fourier dados en la forma aproximada. Supongamos al principio que una función $f(x)$ satisface las condiciones que aseguran convergencia uniforme de su serie trigonométrica de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k \operatorname{sen} kx) \tag{A.1}$$

en todo el segmento $[-\pi, \pi]$. Admitamos también que en lugar de los valores exactos de los coeficientes trigonométricos de Fourier a_k y b_k de dicha función se conocen sólo valores aproximados $\widetilde{a}_k$ y $\widetilde{b}_k$ de los coeficientes de Fourier mencionados. Precisamente este caso se encuentra frecuentemente en los problemas de aplicación.

Convengamos en considerar que los errores de definición de los valores aproximados de los coeficientes trigonométricos de Fourier son pequeños en el sentido de la norma de un espacio l^2 [1]. Esto quiere decir que se cumple una desigualdad

$$\frac{(a_0-\widetilde{a}_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\widetilde{a}_k)^2+(b_k-\widetilde{b}_k)^2\leqslant\delta^2, \tag{A.2}$$

donde δ es un número positivo suficientemente pequeño, que se llamará *error* en la definición de los coeficientes de Fourier.

Surge, naturalmente, un problema importante para las aplicaciones: dados los valores aproximados de los coeficientes de Fourier $\widetilde{a}_k$ y $\widetilde{b}_k$, restablecer en un punto fijo dado x la función $f(x)$ con un error $\varepsilon(\delta)$ que tiende a cero cuando $\delta\to 0$.

Probemos que por una sumación directa de la serie de Fourier con los coeficientes de Fourier dados en la forma aproximada

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k\cos kx+\widetilde{b}_k \operatorname{sen} kx), \tag{A.3}$$

es imposible, en el caso general, restablecer la función $f(x)$ en un punto dado x, cualquiera que sea el grado de exactitud.

---

[1] Véanse en el p. 1, § 1, c. 11 la definición del espacio l^2 y de norma de sus elementos.

Fijamos arbitrariamente un error pequeño $\delta > 0$ y ponemos $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$. Supongamos que los errores en la definición de los coeficientes de Fourier tienen la siguiente forma concreta:

$$\tilde{a}_0 - a_0 = 0, \quad a_k - \tilde{a}_k = b_k - \tilde{b}_k = \frac{\delta}{kC\sqrt{2}} \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Para los coeficientes de Fourier dados con tales errores será válida, evidentemente, la relación (A. 2) con el signo de igualdad exacta. Al mismo tiempo, al sustituir la serie exacta de Fourier (A. 1) por una serie de Fourier con coeficientes dados aproximadamente (A.3), cometimos un error que es igual a la suma de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k - a_k) \cos kx + (\tilde{b}_k - b_k) \operatorname{sen} kx.$$

En el punto $x = 0$ este error será igual a la suma de una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k - a_k) = \frac{\delta}{C\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

(por pequeño que sea un error $\delta > 0$ que se fija por nosotros).

De este modo, por rápido que converja la serie trigonométrica de Fourier (A.1) hacia la función $f(x)$ y por pequeño que sea un error δ en la relación (A.2) que prefija el grado de desviación de los coeficientes aproximados de Fourier con relación a los exactos, por sumación directa de la serie de Fourier con coeficientes dados aproximadamente (A.3) resulta imposible restablecer la función $f(x)$ en un punto dado del segmento $[-\pi, \pi]$, cualquiera que sea el grado de exactitud.

Hemos demostrado, de hecho, que, por pequeño que sea un número $\delta > 0$ que caracteriza la desviación (una de la otra en el sentido de (A.2)) de dos totalidades de coeficientes de Fourier $\{a_k, b_k\}$ y $\{\tilde{a}_k, \tilde{b}_k\}$, correspondiente a estas dos totalidades, las sumas directas de las series trigonométricas de Fourier (A.1). y (A.3) puede diferenciarse una de la otra tan fuertemente como se quiera.

Los problemas de tal índole, en los cuales una desviación tan pequeña como se quiera en la definición de los datos iniciales (en el caso examinado el papel de estos datos iniciales lo desempeña una totalidad de coeficientes de Fourier) puede causar una desviación, tan grande como se quiera, de las soluciones correspondientes a estos datos iniciales (en el caso examinado por solución se entiende una suma directa de la serie trigonométrica de Fourier) se encuentran frecuentemente en las matemáticas y en las aplicaciones, recibiendo el nombre de *problemas planteados de un modo incorrecto*.

Dicho de otro modo, el problema examinado sobre la sumación directa de una serie trigonométrica de Fourier está planteado de un modo incorrecto.

Un método general de resolución de una amplia clase de problemas planteados de un modo incorrecto está elaborado por un matemático soviético *A. N. Tíjonov* y lleva el nombre de *método de regularización* [1]).

Detengámonos aquí en el método de regularización sólo con arreglo al problema examinado sobre la sumación de la serie trigonométrica de Fourier.

2. Método de regularización para el problema de sumación de una serie trigonométrica de Fourier. Con arreglo al problema de sumación de una serie trigonométrica de Fourier con coeficientes de Fourier dados aproximadamente, el método de regularización conduce a un algoritmo que considera a título de un valor aproximado de la función $f(x)$ no la suma de la serie (A.3), sino la de una serie

$$\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{a}_k\cos kx+\tilde{b}_k\operatorname{sen} kx)\cdot\frac{1}{1+k^2\alpha}, \tag{A.4}$$

que se obtiene por multiplicación del k-ésimo término de la serie (A.3) por un factor «regularizador» $\frac{1}{1+k^2\alpha}$, en el cual el parámetro α es una magnitud del mismo orden de pequeñez que el error δ en la relación (A.2) que prefija la desviación de los coeficientes de Fourier.

Con el fin de argumentar el citado algoritmo, demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema de A. N. Tíjonov. *Supongamos que una función $f(x)$ pertenece a la clase $L^2[-\pi, \pi]$ y es continua en un punto dado fijo x sobre el segmento $[-\pi, \pi]$. Entonces, para todo $\delta > 0$ y para α, que tiene el mismo orden de pequeñez que δ, la suma de la serie* (A.4) *con los coeficientes $\tilde{a}_k$ y $\tilde{b}_k$ que satisfacen la relación* (A.2), *coincide en el punto dado fijo x con $f(x)$ con un error $\varepsilon(\delta)$, el cual tiende a cero cuando $\delta \to 0$* [2]).

DEMOSTRACIÓN. Convengamos en considerar, sin perder la generalidad de nuestros razonamientos, que $\alpha = \delta$ (pues, el caso de $\alpha = C(\delta)\cdot\delta$, donde $0 < C_1 \leqslant C(\delta) \leqslant C_2$ se examina de un modo sumamente análogo). Basta demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta_0(\varepsilon) > 0$, que en un punto fijo dado x se cumple, para todos los δ positivos que satisfacen la condición $\delta \leqslant \delta_0$, una desi-

---

[1]) Por un ciclo de obras dedicadas a la resolución de los problemas planteados de un modo incorrecto al académico A. N. Tíjonov le fue otorgado en el año 1966 el premio Lenin.

[2]) El teorema enunciado representa un caso particular de una afirmación mucho mas general demostrada por Tíjonov.

gualdad

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[\widetilde{a}_k\cos kx+\widetilde{b}_k\,\mathrm{sen}\,kx]\cdot\frac{1}{1+k^2\delta}-f(x)\right|\leqslant\varepsilon. \qquad (A.5)$$

Fijemos un $\varepsilon>0$ arbitrario. Cerciorémonos primero de lo que para ε fijo se encontrará un número $\delta_1(\varepsilon)>0$ tal que para todo δ positivo que satisface la condición de que $\delta\leqslant\delta_1(\varepsilon)$, se cumple una desigualdad

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0-a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[(\widetilde{a}_k-a_k)\cos kx+(\widetilde{b}_k-b_k)\,\mathrm{sen}\,kx]\frac{1}{1+k^2\delta}\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \qquad (A.6)$$

Para establecer (A.6), basta convencerse de que la suma que figura en el primer miembro de (A.6) tiende a cero, cuando $\delta\to 0+0$.

Al dividir la suma en el segundo miembro de (A.6) en dos sumas, en la primera de las cuales figuran los sumandos con números k que satisfacen la condición $k<1/\delta$, y en la segunda, todos los sumandos restantes, y al aplicar a cada una de estas dos sumas la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, tendremos [1])

$$\left|\frac{\widetilde{a}_0-a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[(\widetilde{a}_k-a_k)\cos kx+(\widetilde{b}_k-b_k)\,\mathrm{sen}\,kx]\frac{1}{1+k^2\delta}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\left\{\frac{(\widetilde{a}_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k<\frac{1}{\delta}}[(\widetilde{a}_k-a_k)^2+(\widetilde{b}_k-b_k)^2]\right\}O\left(\frac{1}{\delta}\right)}+$$

$$+\sqrt{\sum_{k\geqslant\frac{1}{\delta}}[(\widetilde{a}_k-a_k)^2+(\widetilde{b}_k-b_k)^2]\cdot\sum_{k\geqslant\frac{1}{\delta}}\frac{1}{k^4\delta^2}}. \qquad (A.7)$$

Teniendo presente (A.2) y tomando en consideración que

$$\sum_{k\geqslant 1/\delta}\frac{1}{k^4}=O(\delta^3)$$

(por ejemplo, en virtud del criterio integral de Cauchy—Maclaurin, véase la desiguadad (4.38) del cap. 4, v. II), resulta que en el segundo miembro de (A.7) figura una magnitud $O(\sqrt{\delta})+O(\delta^{3/2})$.

---

[1]) En este caso tenemos en cuenta también que $\frac{1}{1+k^2\delta}\leqslant 1$, $\frac{1}{1+k^2\delta}<$ $<\frac{1}{k^2\delta}$.

Podemos considerar, pues, que la desigualdad (A.6) está demostrada, y para establecer la desigualdad (A.5), basta probar que para $\varepsilon > 0$ fijo se encontrará un número $\delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que con todos los δ positivos que satisfacen la condición $\delta \leqslant \delta_2(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \frac{1}{1+k^2\delta} - f(x) \right| < \frac{3}{4} \varepsilon. \quad (A.8)$$

Puesto que, por hipótesis, la función $f(x)$ es continua en el punto dado fijo x, para $\varepsilon > 0$ fijo podemos fijar tal $\eta > 0$ que, cualesquiera que sean los valores de y que satisfacen la condición de que $|y - x| < \eta$, se cumplirá una desigualdad

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (A.9)$$

Pongamos ahora $\gamma = 1/\sqrt{\delta}$ y examinemos, para el punto fijo x y número fijo $\eta > 0$, una función $v_x(y)$, definida en el semisegmento $x - \eta < y \leqslant x - \eta + 2\pi$ mediante la igualdad [1])

$$v_x(y) = \begin{cases} \frac{\gamma\pi}{2} \cdot e^{-\gamma|x-y|} & \text{para } x-\eta < y < x+\eta, \\ 0 & \text{para } x+\eta \leqslant y \leqslant x-\eta+2\pi. \end{cases} \quad (A.10)$$

y prolongada periódicamente con un período de 2π a toda la recta infinita $-\infty < y < +\infty$.

Calculemos los coeficientes trigonométricos de Fourier A_k y B_k de la función $v_x(y)$.

De la igualdad (A.10) y de la condición de que $v_x(y)$ es periódica con el período de 2π, llegamos a que [2])

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{x-\eta}^{x+\eta} v_x(y) \cos ky\, dy = \frac{\gamma}{2} \int_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|} \cos ky\, dy =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos k(t+x)\, dt = \frac{\gamma}{2} \cos kx \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos kt\, dt -$$

$$- \frac{\gamma}{2} \operatorname{sen} kx \int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \operatorname{sen} kt\, dt = \gamma \cos kx \int_{0}^{\eta} e^{-\gamma t} \cos kt\, dt.$$

---

[1]) Sin perder la generalidad consideramos que $\eta < \pi$.

[2]) En este caso se toma en consideración que todas las integrales de una función periódica en los segmentos cuya longitud es igual a su período coinciden, realizamos una sustitución de la variable $y = t + x$, y tenemos presente que $\int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \cos kt\, dt = 2 \int_{0}^{\eta} e^{-\gamma t} \cos kt\, dt$, $\int_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|} \operatorname{sen} kt = 0$.

Luego, por cuanto

$$\int_0^\eta e^{-\gamma t}\cos kt\,dt=\left[\frac{e^{-\gamma t}(-\gamma\cos kt+k\,\mathrm{sen}\,kt)}{k^2+\gamma^2}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\eta}=\frac{\gamma}{k^2+\gamma^2}+e^{-\gamma\eta}\cdot\sigma_k,$$

donde

$$\sigma_k=\frac{-\gamma\cos k\eta+k\,\mathrm{sen}\,k\eta}{k^2+\gamma^2},\tag{A.11}$$

entonces, teniendo en cuenta que $\delta = 1/\gamma^2$, obtenemos la siguiente expresión para el coeficiente de Fourier A_k:

$$A_k=\frac{\cos kx}{1+k^2\delta}+e^{-\gamma\eta}\cos kx\cdot\gamma\cdot\sigma_k.\tag{A.12}$$

De un modo sumamente análogo se establece que

$$B_k=\frac{\mathrm{sen}\,kx}{1+k^2\delta}+e^{-\gamma\eta}\,\mathrm{sen}\,kx\cdot\gamma\cdot\sigma_k.\tag{A.13}$$

Dado que, por hipótesis, la función $f(y)$ pertenece a la clase $L^2[-\pi,\pi]$ y que la función $v_x(y)$ pertenece a la misma clase con $\delta=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}>0$ cualquiera, resulta ser válida la igualdad de Parseval (véase la igualdad (11.28))

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_x(y)\,f(y)\,dy=\frac{A_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cdot a_k+B_k\cdot b_k).\tag{A.14}$$

De las relaciones (A.12), (A.13) y (A.14) se deduce que con el fin de demostrar la desiguadad (A.8), basta establecer que para todos los δ suficientemente pequeños cumplen las desigualdades

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_x(y)\,f(y)\,dy-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{A.15}$$

$$\left|\frac{a_0}{2}e^{-\gamma\eta}\gamma\sigma_0+e^{-\gamma\eta}\gamma\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\,(a_k\cos kx+b_k\,\mathrm{sen}\,kx)\right|<\frac{\varepsilon}{4}.\tag{A.16}$$

Hagamos prolongar la función $f(y)$ periódicamente con el período de 2π a toda la recta infinita.

Para demostrar la desigualdad (A.15), notemos que en virtud de que las funciones $v_x(y)$ y $f(x)$ son 2π-periódicas y debido a la igualdad (A.10)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_x(y)\,f(y)\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{x-\eta}^{x-\eta+2\pi}v_x(y)\,f(y)\,dy=$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|} f(y)\, dy = f(x) \frac{\gamma}{2} \int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\, dy +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} [f(y) - f(x)]\, e^{-\gamma|x-y|}\, dy. \qquad (A.17)$$

Teniendo presente que [1])

$$\frac{\gamma}{2} \int\limits_{x-\eta}^{x+\eta} e^{-\gamma|x-y|}\, dy = \frac{\gamma}{2} \int\limits_{-\eta}^{\eta} e^{-\gamma|t|}\, dt = \gamma \int\limits_{0}^{\eta} e^{-\gamma t}\, dt = 1 - e^{-\gamma\eta},$$

y tomando en consideración que para todo y del segmento $[x - \eta, x + \eta]$ se cumple la desigualdad (A.9), llegamos, con auyda de las relaciones (A.17) a que

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} v_x(y)\, f(y)\, dy - f(x) \right| \leqslant e^{-\gamma\eta} \,|\, f(x) \,|\, + \frac{\varepsilon}{4} (1 - e^{-\gamma\eta}) \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\gamma\eta} \,|\, f(x) \,|\, + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por cuanto para todo punto fijo x y para todos los números fijos $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ es válida, con cualquier $\delta = 1/\gamma^2$ suficientemente pequeño, la desigualdad $e^{-\gamma\eta} \,|\, f(x) \,| < \varepsilon/4$, la relación (A.15) queda demostrada.

Resta por demostrar la desigualdad (A.16). De (A.11) resulta evidente que para las magnitudes σ_k con todo $k = 1, 2, \ldots$ es válida la estimación

$$|\, \sigma_k \,| \leqslant 2/k. \qquad (A.18)$$

Para la magnitud σ_0 de (A.11) obtenemos, para cualquier $\delta = 1/\gamma^2$ una estimación

$$|\, \sigma_0 \,| \leqslant 1/\gamma \leqslant 1. \qquad (A.19)$$

Aplicando a la suma que figura en el primer miembro de (A.16) la desigualdad de Cauchy—Biniakovski y aprovechando las estimaciones (A.18) y (A.19), obtendremos [2])

$$\left| \frac{a_0}{2} e^{-\gamma\eta}\gamma\sigma_0 + e^{-\gamma\eta}\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{-\gamma\eta}\gamma \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]^{1/2} \cdot \left[1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right]^{1/2}. \qquad (A.20)$$

[1]) Al calcular la integral mencionada cambiamos la variable $y = t + x$.
[2]) En este caso mayoramos por la unidad los módulos de las funciones $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$.

Ambas sumas que figuran entre corchetes del segundo miembro en (A.20) están acotadas por una constante (independiente de δ). El carácter acotado de la primera de las sumas citadas proviene en seguida de la desigualdad de Bessel y, de la segunda fue demostrado en el cap. 4, v. II.

Por cuanto, para todo $\eta > 0$ fijo, $\lim\limits_{\delta\to 0} e^{-\gamma\eta}\cdot\gamma = \lim\limits_{\delta\to 0} e^{-\frac{\eta}{\delta^2}}\frac{1}{\delta^2} = 0$, el segundo miembro de (A.20) es menor que el número $\varepsilon/4$ con todo $\varepsilon > 0$ fijo, cualquiera que sea δ positivo pequeño. El teorema está demostrado.

3. Observaciones conclusivas sobre el significado del método de regularización. El método de regularización propuesto por A.N. Tíjonov es de gran importancia científica.

Supongamos que con ayuda de algún aparato medimos las características frecuenciales de un proceso físico que se analiza. Por imperfección del aparato dichas características frecuenciales se miden con cierto error.

Surge, naturalmente, un problema de si hemos de perfeccionar indefinidamente la precisión del aparato con el fin de obtener una idea, exacta al máximo, del proceso físico que nos interesa, o bien el camino hacia el objetivo planteado radica en el desarrollo de tales métodos matemáticos de elaboración de los resultados de medición que nos permitan extraer la máxima información sobre el proceso en consideración, sirviéndonos de los aparatos de medición de las características frecuenciales que hoy día están en nuestra disposición.

El método de regularización indica una vía hacia tal elaboración matemática de los resultados de medición de las características de frecuencia (es decir, de los coeficientes de Fourier) que nos proporciona la información sobre un fenómeno físico estudiando (es decir, sobre la función buscada $f(x)$) con un error correspondiente al error en los resultados de medición de las características de frecuencia.

INDICE ALFABETICO

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, USSR.