Capítulo 4

CONCEPTO DE FUNCIÓN. VALOR LÍMITE DE LA FUNCIÓN. CONTINUIDAD

Comencemos este capítulo precisando el concepto más importante del análisis matemático, concepto de función. Basándose en el concepto de límite de una sucesión numérica, introducimos una nueva forma de operación del paso al límite que se fundamenta en el concepto de valor límite (o límite) de la función. En el presente capítulo se introduce también otro concepto matemático importante de continuidad de la función.

En el capítulo se presta especial atención para aclarar las propiedades de la continuidad y otras propiedades de las funciones elementales más simples.

El cálculo aproximado de los valores de funciones elementales se considera en el complemento del capítulo 8.

§ 1. Concepto de función

1. Magnitud variable y función. En el cap. 1 ya hemos notado que al menos dos magnitudes variables, cuya variación es mutuamente condicionada, están vinculados con todo proceso físico real.

Considerando magnitudes variables físicas reales llegamos a la conclusión de que estas magnitudes no siempre pueden tomar valores arbitrarios. Así, la temperatura de un cuerpo no puede ser menor que -273 °C, la velocidad de un punto material no puede ser mayor que $3\cdot 10^{10}$ cm/s (es decir, que la velocidad de la luz en el vacío), el desplazamiento de un punto material que realiza oscilaciones armónicas según la ley $y = A$ sen $(\omega t + \delta)$, puede variarse sólo entre los límites del segmento $[-A, +A]$.

En las matemáticas se abstraen de las propiedades físicas concretas de magnitudes variables que se observan en la naturaleza y se consideran magnitudes variables abstractas *) que se caracterizan solamente por valores numéricos que pueden tomar.

El conjunto $\{x\}$ de todos los valores que puede tomar la magnitud variable dada, se denomina *campo de variación* de esta magnitud variable. Una magnitud variable se considera dada si está prefijado el campo de su variación. Más adelante denotaremos magnitudes variables normalmente, con letras latinas minúsculas x, y, u, . . . y

*) Es conveniente notar que el concepto de magnitud se refiere a los conceptos matemáticos *iniciales* (véase la nota en la pág. 12).

los campos de variación de sus variables, con los símbolos $\{x\}$, $\{y\}$, $\{u\}$, . . .

Sea dada la magnitud variable x cuyo campo de variación es un conjunto $\{x\}$.

Si a todo valor de la variable x del conjunto $\{x\}$ se le pone en correspondencia por una ley conocida, un número y, entonces, se dice que la función $y = y(x)$ o $y = f(x)$ está prefijada en el conjunto $\{x\}$.

La variable x se denomina *argumento* y el conjunto $\{x\}$, *campo de definición de la función $y = f(x)$.*

El número y que corresponde al valor dado del argumento x se denomina *valor particular de la función* en el punto x. El conjunto de

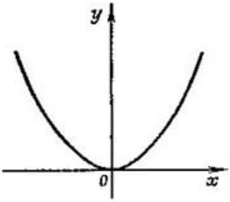

Fig. 4.1

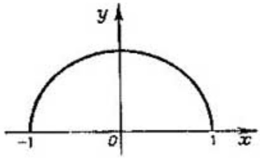

Fig. 4.2

todos los valores particulares de la función forma el conjunto bien determinado $\{y\}$ llamado *conjunto de todos los valores de la función.*

En la denotación $y = f(x)$ la letra f se denomina *característica* de la función. Para denotar el argumento, la función y sus características pueden emplearse diferentes letras.

Vamos a ofrecer algunos ejemplos de funciones:

1°. $y = x^2$. Esta función está prefijada sobre la recta infinita $-\infty < x < +\infty$. El conjunto de todos los valores de esta función es la semirrecta $0 \leqslant y < +\infty$ (fig. 4.1).

2°. $y = \sqrt{1 - x^2}$. La función está prefijada sobre el segmento $-1 \leqslant x \leqslant +1$. El conjunto de todos los valores de la función es el segmento $0 \leqslant y \leqslant 1$ (fig. 4.2).

3°. $y = n!$. Esta función está prefijada sobre el conjunto de los números naturales $n = 1, 2, \ldots$ El conjunto de todos los valores de tipo $n!$ (fig. 4.3).

4°. La función de Dirichlet *)

$$y = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional.} \end{cases}$$

Esta función está prefijada sobre la recta infinita $-\infty < x < + \infty$ y el conjunto de todos sus valores comprende dos puntos

*) Peter Gustav Dirichlet, matemático alemán (1805—1859).

0 y 1.

5°.

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(El término sgn proviene de la palabra latina *signum*, signo). Esta función está prefijada sobre toda la recta infinita $-\infty < x < +\infty$, y el conjunto de todos sus valores comprende tres puntos: -1, 0 y $+1$ (fig. 4.4).

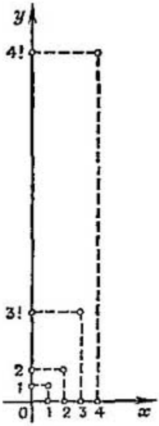

Fig. 4.3

6°. $y = [x]$, donde $[x]$ significa la parte entera del número real x, se lee "y es igual a la parte entera de x". Esta función está prefijada para todos los valores reales de x, y el conjunto de todos sus valores consta de números enteros (fig. 4.5).

2. Métodos de representación de la función. En este punto examinemos algunos métodos para representar la función.

Frecuentemente, la ley que establece la relación entre el argumento y la función, puede representarse por medio de fórmulas. Este método de expresar las funciones se denomina *analítico*. Vale subrayar que la función puede definirse por varias fórmulas en diferentes segmentos de su campo de definición.

Por ejemplo, la función

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

está representada por el método analítico sobre toda la recta infinita (fig. 4.6).

Un método bastante difundido para representar la función es el *de tabla* que consiste en confeccionar la tabla de algunos valores del argumento y valores correspondientes de la función. En este caso se puede calcular aproximadamente los valores de la función. En este caso se puede calcular aproximadamente los valores de la función no comprendidos en la tabla y que corresponden a los valores intermedios del argumento. Para hacerlo, se emplea el método de interpolación que consiste en sustituir la función en los puntos que no tienen valores de tabla por una función simple (por ejemplo, lineal o cuadrática). El horario de los trenes puede ser ejemplo del método de tabla para representar la función. El horario determina la posición del tren en ciertos momentos de tiempo. La interpolación permite calcular aproximadamente la posición del tren en cualquier momento intermedio de tiempo.

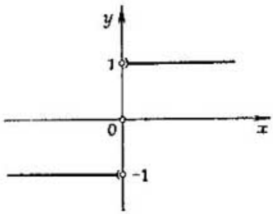

Fig. 4.4

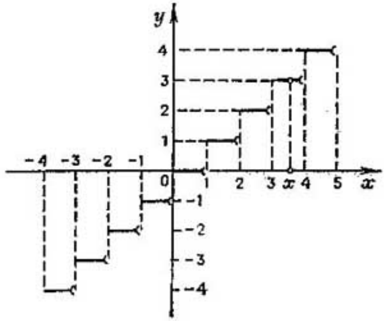

Fig. 4.5

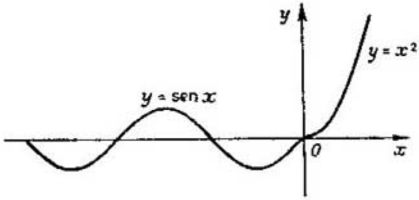

Fig. 4.6

En la práctica para mediciones físicas se usa otro método, el *gráfico*, en el cual la correspondencia entre el argumento y la función se representa por medio de la gráfica (que aparece, por ejemplo, en el oscilógrafo).

§ 2. Concepto de valor límite de una función

1. Definición del valor límite de una función. Consideremos la función $y = f(x)$ definida sobre un conjunto $\{x\}$ y un punto a, que tal vez no pertenezca al conjunto $\{x\}$ y que posee la propiedad de tener, en cualquier ε-entorno del punto a, puntos del conjunto

$\{x\}$, diferentes de a. Por ejemplo, el punto a puede ser punto de frontera del intervalo sobre el cual está definida la función.

***Definición* 1.** *El número b se denomina valor límite de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ (o bien límite de la función cuando $x \to a$) si para cualquier sucesión convergente a a $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ de valores del argumento x, los elementos x_n de la cual son diferentes de a *) ($x_n \neq a$), la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2) \ldots, f(x_n), \ldots$ de valores de la función converge a b.*

Para denotar el valor límite de la función se emplean los símbolos siguientes: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Notemos que, *en el punto a, la función $y = f(x)$ puede tener sólo un valor límite*. Esto se desprende del hecho de que la sucesión $\{f(x_n)\}$ puede tener sólo un límite.

Consideremos varios ejemplos.

1°. La función $f(x) = c$ tiene valor límite en todo punto a de la recta infinita. En efecto, si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es cualquier sucesión convergente a a de valores del argumento entonces la sucesión correspondiente de valores de la función tiene la forma $c, c, \ldots$ $\ldots, c, \ldots$ y, por eso, converge a c. De este modo, el valor límite de esta función es igual a c en todo punto $x = a$.

2°. En cualquier punto a de la recta infinita el valor límite de la función $f(x) = x$ es igual a a. En efecto, en este caso las sucesiones de valores del argumento y de la función son idénticos, y, por eso, si la sucesión $\{x_n\}$ converge a a, la sucesión $\{f(x_n)\}$ también converge a a.

3°. La función de Dirichlet, cuyos valores son iguales a uno en los puntos racionales y a cero, en los irracionales, no tiene valor límite en ningún punto a de la recta infinita. En efecto, para la sucesión convergente a a de valores racionales del argumento, el límite de la sucesión correspondiente de valores de la función es igual a la unidad mientras que para la sucesión de valores irracionales del argumento, convergente a a, el límite de la sucesión correspondiente de valores de la función es igual a cero.

A continuación vamos a emplear los conceptos de valores límite unilaterales de la función.

Consideremos que para cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x\}$ sobre el cual está prefijada la función $f(x)$ tiene, por lo menos, un elemento situado en el intervalo $(a, a + \varepsilon)$ (respectivamente, en el intervalo $(a - \varepsilon, a)$).

***Definición* 2.** *El número b se denomina* **valor límite derecho** (**izquierdo**) *de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, si para cualquier sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de valores del argumento x, que converge a a y*

---

*) En particular, este requerimiento puede explicarse por el hecho de que la función $f(x)$ puede ser indefinida en el punto a.

tiene elementos x_n superiores (inferiores) a a, la sucesión correspondiente $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... $f(x_n)$, ... de valores de la función converge a b.

Para el valor límite derecho de la función se usa la denotación

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \text{ o bien } f(a+0) = b.$$

Para el valor límite izquierdo se usa la denotación

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b \text{ o bien } f(a-0) = b.$$

Como ejemplo consideremos la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$*). En el cero esta función tiene valores límite derecho e izquierdo con tal que $\operatorname{sgn}(0+0) = 1$ y $\operatorname{sgn}(0-0) = -1$. En efecto, si $\{x_n\}$ es cualquier sucesión de valores del argumento de esta función y converge a cero, y los elementos x_n de esta sucesión son mayores de cero ($x_n > 0$), entonces $\operatorname{sgn} x_n = 1$ y por eso $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$. De este modo, la validez de la igualdad $\operatorname{sgn}(0+0) = 1$ queda demostrada. De manera análoga se demuestra que $\operatorname{sgn}(0-0) = -1$.

OBSERVACIÓN. *Si en el punto a los valores límite derecho e izquierdo de la función $f(x)$ son iguales, entonces en el punto a existe el valor límite de esta función igual a dichos valores unilaterales.* Demostremos este hecho evidente.

Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento de la función $f(x)$ que converge a a y tiene elementos no iguales a a. Sea $\{x_{k_m}\}$ una subsucesión de esta sucesión, compuesta de todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ mayores de a, y sea $\{x_{l_m}\}$ una subsucesión compuesta de todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ menores de a **). Puesto que en virtud del p. 1 del § 4 del cap. 3, las subsucesiones $\{x_{k_m}\}$ y $\{x_{l_m}\}$ convergen hacia a, entonces de la existencias de los valores límite derecho e izquierdo de la función $f(x)$ en el punto a se deduce que las sucesiones $\{f(x_{k_m})\}$ y $\{f(x_{l_m})\}$ tienen límites que son iguales de acuerdo con la condición. Sea b el límite de estas sucesiones. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un número N, tal que todos los elementos de las sucesiones $\{f(x_{k_m})\}$ y $\{f(x_{l_m})\}$ para los cuales $k_m \geqslant N$ y $l_m \geqslant N$, satisfacen las desigualdades $|f(x_{k_m}) - b| < \varepsilon$ y $|f(x_{l_m}) - b| < \varepsilon$. Por consiguiente, cuando $n \geqslant N$ se cumple la desigualdad $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia b. Por lo tanto, queda demostrado que el valor límite de la función $f(x)$ en el punto a existe y es igual a b.

---

*) La definición de la función $y = \operatorname{sgn} x$ se da en el p. 1 del § 1.

**) Excluimos de la consideración el caso cuando la sucesión $\{x_n\}$ tiene *sólo un número finito de elementos* situados a la derecha (izquierda) del punto a. En este caso la convergencia de $\{f(x_n)\}$ es evidente.

Enunciemos las definiciones del valor límite de la función cuando el argumento x tiende al infinito y al infinito de signo definido.

Consideremos que para cualquier $A > 0$ el conjunto $\{x\}$ sobre el cual está prefijada la función $f(x)$, tiene al menos un elemento situado fuera del segmento $[-A, +A]$.

Definición 3. *El número b se denomina* ***valor límite de la función*** *$f(x)$ cuando $x \to \infty$ (o* ***límite de la función cuando*** *$x \to \infty$) si, para cualquier sucesión infinita de valores del argumento, la sucesión correspondiente de valores de la función converge a b.*

Para denotar el valor límite de la función, cuando $x \to \infty$, se emplean los símbolos siguientes:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Por fin, consideremos que, para cualquier $A > 0$ el conjunto $\{x\}$ sobre el cual está prefijada la función $f(x)$ tiene al menos un elemento x que satisface la condición $x > A$ $(x < -A)$.

Definición 4. *El número b se denomina valor límite de la función $f(x)$ cuando el argumento x tiende al infinito positivo (negativo) si para cualquier sucesión infinita de valores del argumento, cuyos elementos son positivos (negativos) partiendo de un número, la sucesión correspondiente de valores de la función converge a b.*

Las denotaciones simbólicas son:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \; (\lim_{x \to -\infty} f(x) = b).$$

Como ejemplo consideremos la función $f(x) = 1/x$. Esta función tiene el valor límite igual a cero, cuando $x \to \infty$. Efectivamente, si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es sucesión infinita de valores del argumento, entonces la sucesión $1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n, \ldots$ es infinitesimal y por eso tiene límite igual a cero.

2. Operaciones aritméticas sobre las funciones que tienen valor límite. Vamos a convencernos de que las operaciones aritméticas sobre las funciones que tienen valor límite en el punto a llevan a las funciones que también tienen valor límite en este punto. Es válido el siguiente teorema fundamental.

Teorema 4.1. *Sea que las funciones $f(x)$ y $g(x)$, prefijadas sobre un mismo conjunto, tienen los valores límite b y c en el punto a. Entonces las funciones $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ tienen en el punto a los valores límite (para el cociente debe cumplirse la condición $c \neq 0$) iguales $ab + c$, $b - c$, $b \cdot c$ y $\frac{b}{c}$, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_n \neq a)$ sucesión arbitraria, convergente a a, de valores del argumento de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Las sucesiones correspondientes $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ y $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n), \ldots$ de valores de estas funciones tienen límites b y c. Pero entonces, conforme a los teoremas 3.9—3.12, las sucesiones $\{f(x_n) + g(x_n)\}$, $\{f(x_n) - g(x_n)\}$, $\{f(x_n) \cdot g(x_n)\}$ y $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ tienen límites iguales a $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$ y $\frac{b}{c}$, respectivamente. En virtud de la arbitrariedad de la sucesión $\{x_n\}$, esto significa que $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = b + c$, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = b - c$, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$. El teorema queda demostrado.

Apliquemos el teorema demostrado para hallar los valores límite de los polinomios y las fracciones algebraicas irreducibles *). Tiene lugar la siguiente afirmación.

En todo punto a de la recta infinita los valores límite de los polinomios y las fracciones algebraicas irreducibles existen y son iguales a los valores particulares de estas funciones en dicho punto (en caso de la fracción algebraica, a no debe ser la raíz del denominador).

Efectivamente, en virtud del teorema 4.1,

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} x \cdot x = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a^2.$$

Análogamente, podemos convencernos de que

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n.$$

Por consiguiente, para el polinomio $b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$ obtenemos (empleando el teorema 4.1 para el producto y la suma)

$$\lim_{x \to a} (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n) = \\ = b_0 a^n + b_1 a^{n-1} + \ldots + b_{n-1} a + b_n.$$

En caso de la fracción algebraica irreducible, si a no es raíz del denominador, obtenemos (aplicando el teorema 4.1 para el cociente)

$$\lim_{x \to a} \frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n}{c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_{m-1} x + c_m} = \frac{b_0 a^n + b_1 a^{n-1} + \ldots + b_{n-1} a + b_n}{c_0 a^m + c_1 a^{m-1} + \ldots + c_{m-1} a + c_m}.$$

3. Comparación de funciones infinitesimales e infinitas. La función $y = f(x)$ *se denomina infinitesimal en el punto* $x = a$ (*cuando* $x \to a$) *si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Por ejemplo, es fácil convencerse de que la función $f(x) = (x - a)^m$) es infinitesimal en el punto $x = a$, siendo m un número positivo entero. Efectivamente, en el punto anterior hemos demostrado que, en cualquier punto de la recta infinita, el valor

*) La fracción algebraica irreducible es el cociente de dos polinomios que no tiene factores comunes diferentes de la constante.

límite del polinomio $f(x) = (x - a)^m$ existe y es igual al valor particular del polinomio en este punto. Por eso, $\lim\limits_{x\to a} (x - a)^m = 0$.

Notemos que *si la función $y = f(x)$ tiene el valor límite igual a b en el punto a, entonces la función $\alpha(x) = f(x) - b$ es infinitesimal en el punto a.* En efecto, los valores límite de cada una de las funciones $f(x)$ y b son iguales a b en el punto a, y, por eso, en virtud del teorema 4.1,

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} (f(x) - b) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} b = 0.$$

Empleando el resultado obtenido, obtenemos una representación especial de la función que tiene el valor límite igual a b en el punto $x = a$:

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad \text{donde} \quad \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0. \tag{4.1}$$

La representación (4.1) resulta ser muy cómoda para demostrar distintas proposiciones. A continuación vamos a emplearla muchas veces.

A la par con el concepto de la función infinitesimal se usa frecuentemente el concepto de función, infinita por la derecha en el punto a o por la izquierda en el punto a. A saber, *la función $f(x)$ se denomina infinita por la derecha (por la izquierda) en el punto a si para cualquier sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ convergente a a de valores del argumento x, cuyos elementos x_n son superiores a a (inferiores a a), la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$ de valores de la función es sucesión infinita de signo definido.*

Para las funciones infinitas se usan las denotaciones siguientes:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad f(a+0) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty \quad \text{o} \quad f(a-0) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty \quad \text{o} \quad f(a+0) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty \quad \text{o} \quad f(a-0) = -\infty.$$

Vamos a familiarizarnos con los métodos de comparar funciones infinitesimales y los términos usados.

Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ dos funciones prefijadas sobre un mismo conjunto e infinitesimales en el punto $x = a$.

1) La función $\alpha(x)$ se denomina *infinitesimal de orden superior que* $\beta(x)$ (tiene orden superior de pequeñez) si el valor límite de la función $\alpha(x)/\beta(x)$ es igual a cero en el punto a.

2) Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *infinitesimales de un mismo orden* (tienen un mismo orden de pequeñez) si el valor límite de la función $\alpha(x)/\beta(x)$ en el punto a existe y es diferente de cero.

3) Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se denominan *infinitesimales equivalentes* si el valor límite de la función $\alpha(x)/\beta(x)$ en el punto a es igual a uno.

Frecuentemente las funciones infinitesimales se comparan con algunas funciones infinitesimales estándar. Como la función de comparación se suele tomar la función $(x-a)^m$ donde m es número positivo entero. En este caso, se emplean los términos siguientes: la función $\alpha(x)$ infinitesimal en el punto a tiene *orden de pequeñez m* si el valor límite de la función $\alpha(x)/(x-a)^m$, en el punto a, es diferente de cero.

Para comparar funciones infinitesimales suele usarse el símbolo o (o minúscula). A saber, si la función $\alpha = \alpha(x)$ es función infinitesimal en el punto a de orden superior que la función $\beta = \beta(x)$, infinitesimal en el mismo punto, entonces se escribe convencionalmente del modo siguiente:

$$\alpha = o(\beta)$$

(se lee «α es o minúscula de β»). De esta manera, el símbolo $o(\beta)$ significa *cualquier* función infinitesimal que en el punto a tiene orden de pequeñez superior que la función $\beta = \beta(x)$ infinitesimal en el mismo punto.

Notemos las siguientes propiedades evidentes del símbolo o: si $\gamma = o(\beta)$, entonces $o(\beta) \pm o(\gamma) = o(\beta)$, $o(\beta) \pm o(\beta) = o(\beta)$.

Observemos también que si α y β son funciones infinitesimales en el punto a, entonces la función $\alpha\beta$ tiene orden de pequeñez superior que cada uno de los factores, y por eso

$$\alpha\beta = o(\alpha), \quad \alpha\beta = o(\beta)$$

Para las funciones infinitas a la derecha (o a la izquierda) del punto a se usan los métodos análogos de comparación.

Sean $A(x)$ y $B(x)$ funciones infinitas a la derecha del punto a y sean, por ejemplo, las dos de signo positivo, es decir,

$$\lim_{x\to a+0} A(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a+0} B(x) = +\infty.$$

Diremos que la función $A(x)$ tiene, a la derecha del punto a, *orden de crecimiento superior* que la función $B(x)$ si la función $\frac{A(x)}{B(x)}$ es infinita por la derecha en el punto a. Si el valor límite derecho de la función $\frac{A(x)}{B(x)}$ en el punto a es finito y diferente de cero, entonces, en este caso, diremos que $A(x)$ y $B(x)$ tienen a la derecha del punto *a un mismo orden de crecimiento.*

Consideremos algunos ejemplos.

1°. Las funciones $\alpha(x) = 3x^2 + x^3$ y $\beta(x) = 2x^2$ son infinitesimales de un mismo orden en el punto $x = 0$. En efecto, si $x \neq 0$,

$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x$. Ya que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x=0$, en virtud del teorema 4.1, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{3}{2}$. Esto significa que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitesimales de un mismo orden.

2°. Las funciones $\alpha(x)=x^2-6x^3$ y $\beta(x)=x^2$ son infinitesimales equivalentes en el punto $x=0$. En efecto, $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1-6x$. Ya que $\lim\limits_{x\to 0}6x=0$, en virtud del teorema 4.1, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, lo que significa la equivalencia de las infinitesimales $\alpha(x)$ y $\beta(x)$.

3°. Las funciones $A(x)=\frac{1+x}{x}$ y $B(x)=\frac{1}{x}$ son de un mismo orden de crecimiento a la derecha y a la izquierda del punto $x=0$. Esto se desprende de que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{A(x)}{B(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1$.

§ 3. Concepto de continuidad de una función

1. Definición de la continuidad de una función. Sea que el punto a pertenece al campo de definición de la función $f(x)$ y cualquier ε-entorno del punto a comprende puntos, diferentes de a, del campo de definición de esta función.

Definición* 1.** *La función $f(x)$ se denomina* ***continua *en el punto a si, en el punto a, el valor límite de esta función existe y es igual al valor particular $f(a)$.*

De este modo, la condición de continuidad de la función $f(x)$ en el punto a puede expresarse simbólicamente de modo siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Ya que $a=\lim\limits_{x\to a}x$, entonces la igualdad anterior puede tomar la forma siguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Por consiguiente, para la función continua, el símbolo «lím» del paso al límite y el «f» de la característica de la función pueden cambiarse de lugar.

Empleando la definición 1 del valor límite de la función $f(x)$ en el punto a (véase el p. 1 del § 2 en el presente capítulo) podemos parafrasear la definición 1 de la continuidad de la función en el punto a del modo siguiente.

Definición* 1*.** *La función $f(x)$ se denomina* ***continua *en el punto a si, para cualquier sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ convergente a a de valores del argumento x, la sucesión correspondiente $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ de valores de esta función converge al número $f(a)$.*

Observemos que, en comparación con la definición 1 del p. 1 en el § 2. del valor límite de $f(x)$ en el punto a, en la definición 1* hemos omitido la exigencia de que todos los elementos de la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sean diferentes de a. Se puede hacerlo en virtud de que, después de añadir cualquier número de nuevos elementos iguales a $f(a)$ a los elementos de la sucesión $\{f(x_n)\}$ convergente a $f(a)$, no se infringe la convergencia hacia $f(a)$ de la sucesión obtenida.

Supongamos que el conjunto $\{x\}$, sobre el cual está prefijada la función $f(x)$, comprende el punto a y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe al menos un elemento de este conjunto que se encuentra en el intervalo $(a, a+\varepsilon)$ (en el intervalo $(a-\varepsilon, a)$).

Definición 2. *La función $f(x)$ se denomina* ***continua por la derecha (por la izquierda)*** *en el punto a si el valor límite derecho (izquierdo) de esta función en el punto a existe y es igual al valor particular $f(a)$.*

Las denotaciones simbólicas de la continuidad por la derecha (por la izquierda) serán:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{o} \quad f(a+0) = f(a)$$

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \quad \text{o} \quad f(a-0) = f(a)\right).$$

OBSERVACIÓN. *Si la función $f(x)$ es continua tanto por la izquierda como por la derecha en el punto a, entonces es continua en este punto.* Efectivamente, en virtud de la observación (p. 1 del § 2 de este capítulo), en este caso existe un valor límite de la función en el punto a que es igual al valor particular de esta función en el punto a.

Consideremos ejemplos.

1°. La función potencial $f(x) = x^n$ con el exponente positivo en números enteros n es continua en todo punto de la recta infinita. En efecto, en el p. 2 del § 2 hemos demostrado que el valor límite de esta función en cualquier punto de la recta infinita es igual al valor particular a^n.

2°. Debido a que los polinomios y las fracciones algebraicas irreducibles tienen, en todo punto de su campo de definición, el valor límite igual al valor particular (véase el p. 2 del § 2), entonces son funciones continuas.

Los puntos, en los cuales la función no posee la propiedad de continuidad, se denominan *puntos de discontinuidad* de la función *). Por ejemplo, la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ tiene discontinuidad en el punto $x = 0$ (en el p. 1 del § 2 hemos demostrado que los valores límite derecho e izquierdo de esta función en el punto $x = 0$ existen, pero no son iguales uno a otro y, por eso, en este punto no existe el valor límite de la función). La función de Dirichlet es discontinua en todo punto de la recta infinita, puesto que no tiene valor límite en ningún punto de esta recta (véase el p. 1 del § 2).

*) En el § 8 daremos la clasificación de los puntos de discontinuidad.

Diremos que la función $f(x)$ es *continua sobre el conjunto* $\{x\}$ si es continua en todo punto de este conjunto. Si la función es continua en todo punto de un intervalo, se dice que es continua sobre el intervalo. Si la función es continua en todo punto interior del segmento $[a, b]$ y, además, es continua por la derecha en el punto a y por la izquierda en el punto b, entonces se dice que es continua sobre el segmento $[a, b]$.

2. Operaciones aritméticas sobre las funciones continuas. Vamos a convencernos de que las operaciones aritméticas sobre las funciones continuas llevan a funciones continuas.

Demostremos el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 4.2. *Sea que las funciones $f(x)$ y $g(x)$, prefijadas sobre un mismo conjunto, son continuas en el punto a. Entonces, las funciones $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ son continuas en el punto a (para el cociente debe cumplirse la condición $g(a)\neq 0$).*

DEMOSTRACIÓN. Ya que las funciones $f(x)$ y $g(x)$, continuas en el punto a, tienen en este punto los valores límite $f(a)$ y $g(a)$, entonces, de acuerdo con el teorema 4.1, los valores límite de las funciones $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ existen y son iguales a $f(a)+g(a)$, $f(a)-g(a)$, $f(a)\cdot g(a)$, $\frac{f(a)}{g(a)}$, respectivamente. Pero estos valores son precisamente iguales a los valores particulares de dichas funciones en el punto a. El teorema queda demostrado.

3. Función compuesta y su continuidad. Las funciones que se forman haciendo la superposición (es decir, la aplicación sucesiva) de dos o varias funciones se denominan *compuestas*.

Es suficiente definir la función compuesta formada por la superposición de dos funciones.

Sea la función $x=\varphi(t)$ prefijada sobre un conjunto $\{t\}$ y sea $\{x\}$ el conjunto de los valores de esta función.

Luego supongamos que sobre dicho conjunto $\{x\}$ está definida otra función $y=f(x)$. Entonces se dice que sobre el conjunto $\{t\}$ está prefijada la función compuesta

$$y=f(x),\ \text{donde}\ x=\varphi(t),$$

o

$$y=f[\varphi(t)]=F(t).$$

Es válido el siguiente teorema *fundamental*.

Teorema 4.3. *Si la función $x=\varphi(t)$ es continua en el punto a, y la función $y=f(x)$ es continua en el punto correspondiente $b=\varphi(a)$, entonces la función compuesta $y=f[\varphi(t)]=F(t)$ es continua en el punto a.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{t_n\}$ sucesión arbitraria de valores del argumento de la función compuesta convergente a a. Debido a que la función $x = \varphi(t)$ es continua en el punto a, entonces (en virtud de la definición 1* del p. 1), la sucesión correspondiente de valores de esta función $x_n = \varphi(t_n)$ converge al valor particular de esta función en el punto a, es decir, al número $b = \varphi(a)$. Luego, puesto que la función $y = f(x)$ es continua en el punto $b = \varphi(a)$, y, para ella, dicha sucesión $\{x_n\}$ convergente a $b = \varphi(a)$ es sucesión de valores del argumento, (entonces, en virtud de la misma definición 1* del p. 1) la sucesión correspondiente de valores de la función $f(x_n) = f[\varphi(t_n)] = F(t_n)$ converge al número $f(b) = f[\varphi, (a)] = F(a)$.

Pues, obtenemos que, para cualquier sucesión $\{t_n\}$ de valores del argumento de la función compuesta convergente a a, la sucesión correspondiente de valores de la propia función compuesta $\{f[\varphi(t_n)]\} \equiv \{F(t_n)\}$ converge al número $f[\varphi(a)] = F(a)$, que es valor particular de la función compuesta en el punto a. En virtud de la misma definición 1* del p. 1, esto significa que la función compuesta $f[\varphi(t)] = F(t)$ es continua en el punto a. El teorema queda demostrado.

§ 4. Algunas propiedades de las funciones monótonas

1. Definición y ejemplos de funciones monótonas.

Definición. *La función $y = f(x)$ se denomina* ***no decreciente (no creciente) sobre un conjunto*** *$\{x\}$ si para cualesquiera x_1 y x_2 de este conjunto que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.*

Las funciones no decrecientes y no crecientes se agrupan en una clase llamada *funciones monótonas.*

Si para cualesquiera x_1 y x_2 del conjunto $\{x\}$ que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, entonces la función $y = f(x)$ se denomina *creciente (decreciente)* sobre el conjunto $\{x\}$. Las funciones crecientes y decrecientes se denominan también *estrictamente monótonas.*

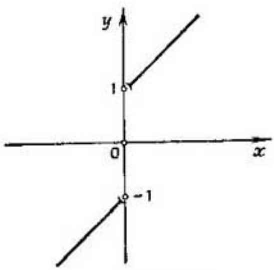

Fig. 4.7

Aducimos ejemplos de funciones monótonas.

1. La función $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$ crece sobre toda la recta numérica (fig. 4.7).

2. La función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ es no decreciente sobre toda la recta numérica (véase fig. 4.4).

2. Concepto de función inversa. Funciones monótonas que tienen la inversa. En este punto enunciamos el concepto de la función inversa y determinamos las condiciones de la existencia de la función inversa para la función monótona.

Sea la función $y = f(x)$ dada sobre el segmento $[a, b]$ y sea su campo de valores el segmento $[\alpha, \beta]$. Luego, sea que a todo y del segmento $[\alpha, \beta]$ le corresponde un solo valor x del segmento $[a, b]$, para el cual $f(x) = y$. Entonces, en el segmento $[\alpha, \beta]$ se puede definir la función $x = f^{-1}(y)$, poniendo en correspondencia a todo y de $[\alpha, \beta]$, el valor x de $[a, b]$ para el cual $f(x) = y$. La función $x = f^{-1}(y)$ se denomina inversa de la función $y = f(x)$.

En la definición mencionada *en vez de los segmentos* $[a, b]$ *y* $[\alpha, \beta]$ se podría considerar los *intervalos* (a, b) *y* (α, β). Se puede admitir también que uno o los dos intervalos (a, b) y (α, β) se convierten en una recta infinita o en una semirrecta abierta.

Notemos que si $x = f^{-1}(y)$ es la función inversa de $y = f(x)$, entonces la función $y = f(x)$ es obviamente inversa de la función $x = f^{-1}(y)$. Por eso las funciones $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ se denominan también *mutuamente inversas*.

Las funciones mutuamente inversas poseen las siguientes propiedades evidentes:

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Consideremos ejemplos de funciones mutuamente inversas.

1°. Sea que sobre el segmento $[0, 1]$ está dada la función $f(x) = 3x$. El conjunto de los valores de esta función será el segmento $[0, 3]$. La función $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y$ definida sobre el segmento $[0, 3]$ es inversa de la función dada $f(x) = 3x$.

2°. En el segmento $[0, 1]$ consideremos la función definida de la manera siguiente:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es número racional,} \\ 1 - x, & \text{si } x \text{ es número irracional.} \end{cases}$$

La función $x = f^{-1}(y)$ prefijada sobre el segmento $[0, 1]$ y definida por las igualdades

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{si } y \text{ es un número racional,} \\ 1 - y, & \text{si } y \text{ es un número irracional} \end{cases}$$

será inversa de la dada. No es difícil cerciorarse de eso comprobando directamente.

OBSERVACION 1. Sea que en el segmento $[a, b]$ está prefijada una función escrictamente monótona $y = f(x)$ y sea el segmento $[\alpha, \beta]$ su conjunto de valores. Entonces, de acuerdo con la monotonía estricta de la función $y = f(x)$, a todo y de $[\alpha, \beta]$ le corresponde *un solo* valor x de $[a, b]$, para el cual $f(x) = y$, por eso en el segmento $[\alpha, \beta]$ existe la función $x = f^{-1}(y)$ inversa de la función $y = f(x)$. Más que eso, si la función $y = f(x)$ es creciente en el segmento $[a, b]$, entonces la función $x = f^{-1}(y)$ es también creciente en el segmento $[\alpha, \beta]$, si $y = f(x)$ es función decreciente en el segmento $[a, b]$ entonces $x = f^{-1}(y)$ decreciente en $[\beta, \alpha]$. Vamos a convencernos, por ejemplo, de que si $y = f(x)$ es función creciente, entonces $x = f^{-1}(y)$ es también creciente. Efectivamente, si $y_1 < y_2$, entonces $x_1 < x_2$ ($x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$), ya que de la desigualdad $x_1 \geqslant x_2$ y del crecimiento de la función $y = f(x)$ se deduciría que $y_1 \geqslant y_2$, lo que contradice la desigualdad $y_1 < y_2$.

Lema 1. *Para que la función $y = f(x)$ estrictamente monotóna en el segmento $[a, b]$ sea continua en este segmento, es necesario y suficiente que cualquier número γ comprendido entre los números $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$ sea valor de esta función.* En otras palabras, para que la función estrictamente monótona $y = f(x)$ sea continua en el segmento $[a, b]$ es necesario y suficiente que el conjunto de sus valores sea el segmento $[\alpha, \beta]$ (o $[\beta, \alpha]$, cuando $\beta < \alpha$), donde $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$.

DEMOSTRACION. 1) NECESIDAD. Para mayor precisión, consideremos la función creciente $y = f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$ (para la función decreciente la demostración es análoga). Mostremos que si $\alpha < \gamma < \beta$, entonces existe un punto interior c del segmento $[a,b]$ en el que $f(c) = \gamma$ (en virtud del crecimiento de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ este punto c será único). Denotemos mediante $\{x\}$ el conjunto de puntos del segmento $[a, b]$, para los cuales $f(x) \leqslant \gamma$ este conjunto comprende, por ejemplo, el punto a, ya que $f(a) = a < \gamma$). El conjunto $\{x\}$ es superiormente acotado y, por eso, tiene la cota superior exacta c. Demostremos que $f(c) = \gamma$. Notemos que cualquier número del segmento $[a, b]$, inferior a c, pertenece al conjunto $\{x\}$ *) mientras que cualquier número superior a c no le pertenece **). Mostremos que c es punto interior del segmento $[a, b]$. En efecto, sea, por ejemplo, $c = b$. Consideremos una sucesión creciente $\{x_n\}$ de valores del argumento de la función $y = f(x)$ que converge hacia b. Ya que $f(x)$ es continua en el punto b por la izquierda, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$. Por otra parte, $f(x_n) \leqslant \gamma$***), y, por eso, en virtud del teorema 3.13, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \gamma$. De este modo, $\beta \leqslant \gamma$ que contradice la condicion $\gamma < \beta$. La contradicción obtenida demuestra que $c < b$. De manera análoga podemos cerciorarnos de que $a < c$. Puesto que c es punto interior del segmento $[a, b]$, existen

*) Ya que, según la definición de la cota superior exacta, para cualquier x menor de c existe un x' tal que $x < x'$ y $f(x') \leqslant \gamma$. Pero entonces del crecimiento de $f(x)$ se desprende que también $f(x) \leqslant \gamma$, es decir, x pertenece a $\{x\}$.

**) En virtud de la definición de la cota superior exacta.

***) Ya que todos los x_n son menores de c y, por tanto, pertenecen a $\{x\}$.

$\{x'_n\}$ y $\{x''_n\}$, sucesiones creciente y decreciente de valores del argumento x que convergen hacia c. Debido a que $f(x)$ es continua en el punto, c, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = f(c)$. Pero $f(x'_n) \leqslant \gamma$ y $f(x''_n) > \gamma$ *). Por eso, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \leqslant \gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) \geqslant \gamma$, de donde se desprende que $f(c) = \gamma$.

2) SUFICIENCIA. Realicemos la demostración para la función $y = f(x)$, creciente sobre el segmento $[a, b]$ (para la función decreciente los razonamientos son análogos). Sean c cualquier punto del segmento $[a, b]$ y $\gamma = f(c)$ el valor de la función $y = f(x)$ en este punto. Vamos a convencernos de que el número γ es valor límite derecho e izquierdo de la función $f(x)$ en el punto c (si c es punto de frontera del segmento $[a, b]$, entonces γ es valor límite unilateral correspondiente en este punto de frontera). Sea que $a < c \leqslant b$; demostremos que γ es valor límite izquierdo de la función en el punto c. Sea ε un número positivo tan pequeño que $\alpha < \gamma - \varepsilon$ (fig. 4.8). Ya que según la condición del lema el número $\gamma - \varepsilon$ es valor de la función $f(x)$, en el segmento $[a, b]$ se puede indicar un punto d tal que $f(d) = \gamma - \varepsilon$. Puesto que la función $f(x)$ crece, $d < c$. Consideremos ahora cualquier sucesión $\{x_n\}$ de valores del argumento x que converge hacia c y cuyos elementos son menores de c. A partir de cierto número N, todos los elementos x_n de esta sucesión satisfacen las desigualdades $d < x_n < c$ (un elemento de este tipo está representado en la fig. 4.8) así que, en virtud del crecimiento de $f(x)$ para $n \geqslant N$ son válidas las desigualdades $f(d) < f(x_n) \leqslant f(c)$. Como $f(d) = \gamma - \varepsilon$ y $f(c) = \gamma$, se desprende de las últimas desigualdades que para $n \geqslant N$

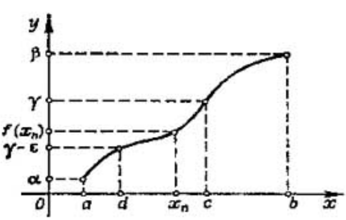

Fig. 4.8

$$0 < \gamma - f(x_n) < \varepsilon,$$

es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia γ. Ya que $\{x_n\}$ es sucesión arbitraria de valores del argumento que converge hacia c por la izquierda, por eso queda demostrado que en el punto c existe el valor límite izquierdo igual a $\gamma = f(c)$ **). Si $a \leqslant c < b$, entonces, realizando los razonamientos análogos, se puede demostrar que $\gamma =$

*) Hemos demostrado el caso de un $\varepsilon > 0$ tan pequeño que $\alpha < \gamma - \varepsilon$. Si $\alpha \geqslant \gamma - \varepsilon$, baste tomar $d = a$ y repetir los razonamientos realizados empleados, empleando la desigualdad evidente $\gamma - \varepsilon \leqslant f(d)$.

**) Debido a que $x'_n < c < x''_n$ para cualquier número n.

$= f(c)$ es el valor límite derecho de la función en el punto c. Hemos demostrado que los valores límite derecho e izquierdo de la función $y = f(x)$ en todo punto interior c son iguales a su valor particular $f(c)$ lo que, en virtud de la observación del p. 1 del § 2, significa la continuidad de $f(x)$ en los puntos interiores del segmento. La continuidad de esta función en los puntos de frontera del segmento se deduce de que los valores límite unilaterales correspondientes de $f(x)$ en los puntos de frontera del segmento son iguales a los valores particulares de la función. El lema queda completamente demostrado.

Corolario. *Sea que sobre el segmento* $[a, b]$ *está prefijada una función estrictamente monótona* $y = f(x)$ *y sea que* $\alpha = f(a)$ *y* $\beta = f(b)$. *Entonces esta función tiene la inversa* $x = f^{-1}(y)$, *estrictamente monótona y continua sobre el segmento* $[\alpha, \beta]$ (*o* $[\beta, \alpha]$ *si* $\beta < \alpha$).

DEMOSTRACIÓN. En virtud del lema que acabamos de demostrar, el conjunto de los valores de la función $y = f(x)$ es el segmento $[\alpha, \beta]$. Entonces, según la observación 1 de este punto, en el segmento $[\alpha, \beta]$ existe la función inversa $x = f^{-1}(y)$, estrictamente monótona, cuyo conjunto de valores es el segmento $[a, b]$ y que por eso, en virtud del mismo lema, es continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$.

OBSERVACIÓN 2. Notemos que las funciones monótonas tienen valores límite derecho e izquierdo en todo punto interior del campo de definición. La demostración de esta proposición queda a cargo del lector.

§ 5. Funciones elementales más simples

Suelen llamarse funciones elementales más simples las siguientes funciones: $y = x^{\alpha}$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

El lector tiene ciertos conocimientos de estas funciones y sus gráficas de las matemáticas elementales. Algunas de estas funciones, por ejemplo, $y = a^x$, se definen fácilmente para los valores racionales del argumento x. Vamos a aclarar el problema de la definición de las funciones elementales más simples para todos los valores reales posibles de sus argumentos. Este problema no es sencillo: por ejemplo, no está claro cómo se puede elevar un número real arbitrario x a una potencia real arbitraria α.

Examinaremos también el problema de la continuidad de las funciones elementales más simples en todos los puntos de su campo de definición. Argumentaremos aquel comportamiento de las funciones elementales más simples que se desprende de la consideración de sus gráficas.

En el Complemento del cap. 8 se dan algoritmos para calcular valores de las funciones elementales más simples.

1. Potencias racionales de los números positivos. La elevación de cualquier número real x a *una potencia positiva entera* n se define como la multiplicación n-tuple del número x por sí mismo. Por consiguiente, siendo n entero, podemos considerar definida la función $y = x^n$ para todos los números reales x. Vamos a utilizar algunas propiedades de esta función para definir potencias racionales de los números positivos.

Demostremos el lema siguiente.

Lema 2. *Para $x \geqslant 0$ y un n positivo entero, la función potencial $y = x^n$ crece y es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos el crecimiento de esta función. Sea $0 \leqslant x_1 < x_2$. Como $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1})$, $x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1} > 0$ se tiene $x_2^n > x_1^n$. La continuidad de esta función fue determinada anteriormente (véase el ejemplo 1 del p. 1 en el § 3).

Corolario. Consideremos la función potencial $y = x^n$ en el segmento $[0, N]$, donde N es número positivo cualquiera. Puesto que esta función es continua y creciente en dicho segmento, en virtud del corolario del lema 1 de este capítulo, ella tiene la función inversa creciente y continua en el segmento $[0, N^n]$ que se denotará por $y^{1/n}$.

Ya que se puede escoger N cualquier grande que sea, N^n también lo será. Por consiguiente, la función $x = y^{1/n}$ está definida para todos los valores no negativos de y. Cambiando para esta función la denotación del argumento y por x y la de la función x por y, obtenemos la función potencial $y = x^{1/n}$ definida para todos los valores no negativos de x.

Definimos $a^{1/n}$ como el número b igual al valor de la función $y = x^{1/n}$ en el punto a. Ahora podemos definir cualquier potencia racional r del número positivo a. A saber, si $r = m/n$, donde m y n son números positivos enteros, pongamos

$$a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m.$$

Además nos ponemos de acuerdo que

$$a^0 = 1, \quad a^{-r} = (1/a)^r.$$

No es difícil cerciorarse de la validez de las siguientes propiedades de la potencia racional de los números positivos:

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}, \ a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r, \ a^r \cdot a^s = a^{r+s}. \tag{*}$$

En primer lugar, demostremos la validez de la primera propiedad (*). Observemos que, para un p positivo entero, la igualdad $(a^{m/n})^p = a^{m \cdot p/n}$, donde m y n son cualesquiera números positivos enteros, es válida a ciencia cierta, puesto que tanto el miembro izquierdo como el derecho de esta igualdad son iguales al producto del número $a^{1/n}$ por sí mismo $m \cdot p$ veces.

Haciendo $r = \frac{m_1}{n_1}$, $s = \frac{m_2}{n_2}$, demostremos la igualdad $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ para cualesquiera r y s racionales positivos. Pongamos $c_1 = \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}$, $c_2 = a^{\frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}}$. Si

c_1 fuera distinto de c_2, entonces del crecimiento de la función potencial $y=x^{n_1}$ se desprendería que $c_2^{n_1} \neq c_1^{n_1}$, y, en virtud de la validez ya demostrada de la igualdad $(a^{m/n})^p = a^{m\cdot p/n}$ para p entero, la última relación significaría que $(a^{m_1/n_2})^{m_2} \neq a^{m_1\cdot m_2/n_1}$. La relación obtenida contradice la igualdad $(a^{m_1/n_1})^{m_2} = a^{m_1\cdot m_2/n_1}$ ya demostrada para m_1, n_1 y m_2 positivos enteros. Por lo tanto, $c_1=c_2$ y la primera igualdad (*) queda demostrada para cualesquiera r y s racionales positivos.

No es difícil extender esta igualdad para r y s no positivos, puesto que nos hemos puesto de acuerdo que

$$a^0=1, \quad a^{-r}=\left(\frac{1}{a}\right)^r \text{ para } r>0.$$

Es también suficiente demostrar la segunda igualdad (*) para un r racional *positivo*. Haciéndolo igual a m/n, donde m y n son números positivos enteros, observemos que baste demostrar la igualdad $a^{1/n}\cdot b^{1/n} = (a\cdot b)^{1/n}$, ya que, al multiplicar m igualdades de este tipo, quedará demostrada la relación general $a^r\cdot b^r = (a\cdot b)^r$.

Para demostrar la igualdad $a^{1/n}\cdot b^{1/n} = (a\cdot b)^{1/n}$, observemos que, en virtud de las propiedades de funciones inversas mutuamente $y=x^{1/n}$ y $x=y^n$, se puede afirmar que $(b^{1/n})^n = b$, $(a^{1/n})^n = a$, $((a\cdot b)^{1/n})^n = a\cdot b$. Por eso, haciendo $c_1 = a^{1/n}\cdot b^{1/n}$, $c_2 = (a\cdot b)^{1/n}$ y suponiendo que $c_1 \neq c_2$, obtendríamos que $c_1^n \neq c_2^n$ lo que contradice la igualdad $a\cdot b = ab$.

Demostremos ahora la última propiedad (*) teniendo en cuenta que las dos primeras ya quedan demostradas. Sean $r=m_1/n_1$, $s=m_2/n_2$, entonces $r = m_1n_2/(n_1n_2)$, $s = m_2\cdot n_1/(n_2\cdot n_1)$, y llegamos a la siguiente igualdad:

$$a^r\cdot a^s = \left(a^{\frac{1}{n_1n_2}}\right)^{m_1\cdot n_2}\cdot\left(a^{\frac{1}{n_1n_2}}\right)^{m_2\cdot n_1} = \left(a^{\frac{1}{n_1n_2}}\right)^{m_1n_2+m_2n_1}$$

La última igualdad es válida puesto que $m_1\cdot n_2$ y $m_2\cdot n_1$ son números enteros.

De este modo,

$$a^r\cdot a^s = a^{\frac{(m_1n_2+m_2n_1)}{(n_1n_2)}} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}} = a^{r+s},$$

lo que se necesita.

Demostremos que, para $a>1$ y $r>0$ racional, es válida la desigualdad $a^r>1$. En efecto, sea $r=m/n$ y $a^r = a^{m/n} \leqslant 1$. Multiplicando término a término n desigualdades mencionadas, obtenemos $a^m \leqslant 1$. La última desigualdad contradice la desigualdad $a^m>1$ obtenida después de multiplicar término a término m desigualdades de tipo $a>1$. En fin, notemos que si la fracción racional $r=m/n$ tiene denominador impar n, la definición de la potencia racional puede extenderse también para los números negativos si se supone

$$(-a)^r = a^r, \text{ si } m \text{ es par},$$

$$(-a)^r = -a^r, \text{ si } m \text{ es impar}.$$

2. Función exponencial. Se desprende de los razonamientos del punto anterior que si a es número positivo, entonces la función $y=a^x$ está definida para todos los x racionales.

Es fácil convencerse de que la función $y = a^x$, $a > 1$, definida sobre el conjunto $\{x\}$ de todos los números racionales, crece monótonamente en este conjunto.

En efecto, sean x_1 y x_2 cualesquiera dos número racionales que satisfacen la condición $x_2 > x_1$. Entonces,

$$a^{x_2}a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2-x_1} - 1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$ y $a > 1$, se tiene $a^{x_2-x_1} > 1$, o sea, el miembro derecho de la última igualdad es positivo y, por eso $a^{x_2} > a^{x_1}$. El crecimiento de la función a^x sobre el conjunto de los números racionales está demostrado.

Pasamos a la definición de la función a^{x_2} *sobre el conjunto de todos los números reales.*

Fijemos un *número real arbitrario* x y consideremos todos los números racionales posibles α y β que satisfacen las desigualdades

$$\alpha < x < \alpha. \tag{4.2}$$

Definemos a^x, para $a > 1$, como un número real y que satisface las desigualdades

$$a^\alpha \leqslant y \leqslant a^\beta. \tag{4.3}$$

Más adelante demostremos que este número *y existe y, además, es único.* Demostremos también que la función definida $y = a^x$ posee las siguientes propiedades importantes: 1) *crece sobre toda la recta infinita*, 2) *es continua en cualquier punto x de esta recta.*

1°. Ante todo demostremos que para cualquier x fijado y cualesquiera números racionales α y β que satisfacen las desigualdades (4.2) *existe un número real y que satisface las desigualdades* (4.3).

Fijemos un número racional arbitrario β que satisface el miembro derecho de (4.2) y consideremos todos los números racionales posibles α que satisfacen la desigualdad izquierda de (4.2).

Ya que $\alpha < \beta$ y la función exponencial definida sobre el conjunto de los números racionales crece, entonces, $a^\alpha < a^\beta$. De este modo, el conjunto $\{a^\alpha\}$ es superiormente acotado y el número a^β es una de las cotas superiores de este conjunto. Por lo tanto, este conjunto tiene cota superior exacta que se denotará mediante y. Queda por demostrar que y satisface las desigualdades (4.3). De la definición de la cota superior exacta se desprende la validez de la desigualdad izquierda de (4.3), la validez de la derecha, de (4.3) se deduce de que a^β es una de las cotas superiores e y, cota superior exacta del conjunto $\{a^\alpha\}$.

2°. Ahora determinemos que existe *un solo número real y que satisface las desigualdades* (4.3).

Basta demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existen números racionales α y β tales que, verificando las desigualdades (4.2), satisfacen la desigualdad $a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$. En efecto, entonces cualesquiera dos números y_1 e y_2, que satisfacen las desigualdades (4.3), tienen que coincidir, puesto que su diferencia por módulo es menor que cualquier número positivo ε anticipadamente tomado.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y un β_0 racional que satisface la desigualdad derecha (4.2). Entonces, como $a^\alpha < a^{\beta_0}$, se obtiene

$$a^\beta - a^\alpha = a^\alpha (a^{\beta-\alpha} - 1) < a^{\beta_0} (a^{\beta-\alpha} - 1).$$

La desigualdad $a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$ se demostrará si determinamos la posibilidad de elegir α y β tales que $a^{\beta-\alpha} - 1 < \dfrac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$.

Del capítulo 2 se desprende que para cualquier n natural se puede escoger números racionales α y β que satisfacen las desigualdades (4.2), de tal modo que la diferencia $\beta - \alpha$ sea menor que $1/n$. De este modo, es suficiente demostrar la existencia de un n natural para el cual

$$a^{1/n} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}. \tag{4.4}$$

Vamos a convencernos de que es posible elegir este n natural. Sea

$$a^{1/n} = 1 + \delta_n.$$

Puesto que $a^{1/n} > 1$, δ_n es positivo. Empleando la fórmula del binomio de Newton, tendremos $a = (a^{1/n})^n = (1+\delta_n)^n = 1 + n\delta_n +$ (los términos positivos) $> 1 + n\delta_n$. De aquí $a - 1 > n\delta_n$ y $0 < \delta_n < \dfrac{a-1}{n}$. Por lo tanto, $a^{1/n} - 1 = \delta_n < \dfrac{a-1}{n}$. La desigualdad (4.4) será válida si elegimos n de tal modo que n satisfaga la exigencia $\dfrac{a-1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{a^{\beta_0}}$ o $n > \dfrac{(a-1)\, a^{\beta_0}}{\varepsilon}$. Acabamos de demostrar la definición unívoca del número y que satisface las desigualdades (4.3).

Observemos que si x es número racional y a^x, el valor de la función exponencial, en el punto x inicialmente definida solamente sobre el conjunto de los números racionales, entonces a^x es aquel número real único y que satisface las desigualdades (4.3).

3°. Demostremos ahora que la función construida a^x (para $a > 1$) *crece en toda la recta infinita.*

Sean x_1 y x_2 cualesquiera números reales que satisfacen la desigualdad $x_1 < x_2$. Obviamente, existen números racionales α y β que satisfacen las desigualdades $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ (véase la afirmación demostrada en la parte final del p.1 del § 2 del cap. 2). De la definición de la función exponencial y de su crecimiento sobre el conjunto de los números racionales se desprenden las desigualdades $a^{x_1} \leqslant a^\alpha < a^\beta \leqslant a^{x_2}$, es decir, $a^{x_1} < a^{x_2}$. El crecimiento de la función a^x queda demostrado.

4°. Queda por demostrar la continuidad de la función construida a^x *en cualquier punto* x de la recta infinita.

Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de números reales, convergente a x. Basta demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para $n \geqslant N$ es válida la desigualdad $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$.

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y escojamos números racionales α y β que satisfacen las desigualdades (4.2) de tal modo que sea válida la desigualdad $a^\beta - a^\alpha < \varepsilon$ (la posibilidad de escoger estos α y β fue demostrada en 2°). Puesto que la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia x y $\alpha < x < \beta$, entonces existe un número N tal que para $n \geqslant N$ son válidas las desigualdades $\alpha < x_n < \beta$. De las desigualdades $\alpha < x < \beta$ y $\alpha < x_n < \beta$ y de la monotonía de la función exponencial se desprende que $a^{\alpha} < a^{x_n} < a^{\beta}$ y $a^{\alpha} < a^{x} < a^{\beta}$ (para $n \geqslant N$). Ya que la diferencia entre los números a^{β} y a^{α} es menor que ε y ambos números a^{x} y a^{x_n} se comprenden entre a^{α} y a^{β}, entonces $|a^{x_n} - a^{x}| < \varepsilon$ (para $n \geqslant N$). La demostración de la continuidad está terminada.

OBSERVACIÓN 1. Si $0 < a < 1$, entonces $a = 1/b$, donde $b > 1$. Pero eso, para $0 < a < 1$, la función $y = a$ puede definirse como la función $y = b^{-x}$, $b > 1$.

Determinemos algunas propiedades de la función exponencial $y = a^{x}$, $a > 1$.

1) Todos los valores de la función exponencial son positivos. En realidad, sea x un punto arbitrario de la recta numérica y sea que x' es un punto racional tal que $x' < x$. Ya que, por definición, $a^{x'} > 0$ y $a^{x'} < a^{x}$, se tiene $a^{x} > 0$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = +\infty$. En efecto, como $a > 1$, tenemos $a = 1 + \alpha$, donde $\alpha > 0$ y $a^{n} = (1+\alpha)^{n} > 1 + n\alpha$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n} = +\infty$. En virtud de la monotonía de la función $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x} = +\infty$. Ya que $a^{-n} = 1/a^{n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, y, por eso $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x} = 0$.

3) De las propiedades 1) y 2), así como de la monotonía y la continuidad de la función $y = a^{x}$ se desprende, conforme al lema 1, que *los valores y de esta función llenan toda la semirrecta positiva* $y > 0$.

4) Para cualesquiera números reales x_1 y x_2 son válidas las relaciones

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}, \quad a^{x_1} b^{x_1} = (a \cdot b)^{x_1}, \quad a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

Efectivamente, ya hemos notado la validez de estas relaciones para los exponentes racionales. Para cerciorarse de la validez de estas relaciones para cualesquiera exponentes, basta considerar las sucesiones $\{x_n'\}$ y $\{x_n''\}$ de números racionales que convergen hacia x_1 y x_2, respectivamente. Entonces, por ejemplo, $a^{x_n'} a^{x_n''} = a^{x_n' + x_n''}$. Pasando al límite, cuando $n \to \infty$, y empleando la propiedad de la continuidad de la función exponencial obtenemos $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$. De manera análoga, podemos cerciorarnos de la validez de otras relaciones enumeradas anteriormente.

OBSERVACIÓN 2. Hemos determinado las propiedades 1) —4) de la función exponencial $y = a^{x}$ así como su continuidad y crecimiento monótono sobre la recta infinita para el caso de $a > 1$. Notemos que para $0 < a < 1$, en virtud de la observación 1, la función $y = a^{x}$ es continua y monótonamente decreciente sobre la recta infinita. Además, para esta función se conservan las propiedades 1), 3) y 4), mientras la propiedad 2) se modifica del modo siguiente:

$$\lim_{x\to-\infty} a^{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} a^{x} = 0.$$

En las figs. 4.9 y 4.10 están representadas las gráficas de la función exponencial $y = a^x$ para los casos de $a > 1$ y $0 < a < 1$.

OBSERVACIÓN 3. La propiedad $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$ puede servir para la definición funcional de la función exponencial $y = a^x$. Se puede demostrar que existe y, además, es única, la función $f(x)$ definida

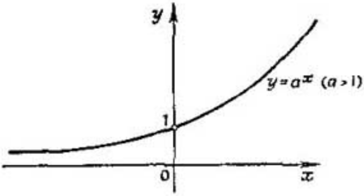

Fig. 4.9

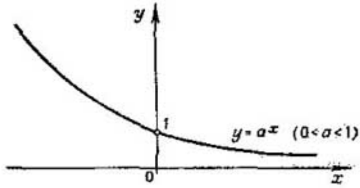

Fig. 4.10

sobre toda la recta infinita y satisface las tres exigencias siguientes:

1) para cualesquiera x_1 y x_2 reales se verifica la relación $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$;

2) se verifican las relaciones $f(0) = 1$, $f(1) = a$, donde $a > 0$;

3) es continua cuando $x = 0$.

Esta es la función construida anteriormente a^x.

3. Función logarítmica. Consideremos un **segmento arbitrario** $[c, d]$ de la recta infinita. En este segmento la función $y = a^x$ es estrictamente monótona y continua. Por eso, en virtud del lema 1, la función $y = f(x) = a^x$ tiene, en el segmento $[\alpha, \beta]$ donde $\alpha = a^c$, $\beta = a^d$, la función inversa $x = f^{-1}(y)$ que se denomina *logarítmica*. La función logarítmica se denota de la manera siguiente:

$$x = \log_a y.$$

Cambiando, para esta función, la denotación del argumento y por x y la denotación de la función x por y, obtenemos la función

$$y = \log_a x.$$

Notemos las siguientes propiedades de la función logarítmica que se desprenden directamente de su definición:

1°. La función logarítmica está definida para todos los valores positivos de x. Esto se desprende de lo que su argumento son valores de la función exponencial que, en virtud de las propiedades 1) y 3) de esta función (véase el punto anterior), pueden ser positivos y ocupan toda la semirrecta positiva $x > 0$.

2°. La función logarítmica es continua y crece sobre toda la semirrecta abierta $x > 0$ cuando $a > 1$ (decrece cuando $a < 1$), con tal que para $a > 1$

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty.$$

La validez de esta propiedad se desprende de las propiedades de la función exponencial y de la observación 1 del p. 2 del § 4.

3°. Para cualesquiera x_1 y x_2 positivos

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Esta propiedad se desprende también de las propiedades de la función exponencial.

OBSERVACIÓN. Vale notar especialmente la función logarítmica $y = \log_e x$, donde $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Para esta función emplea-

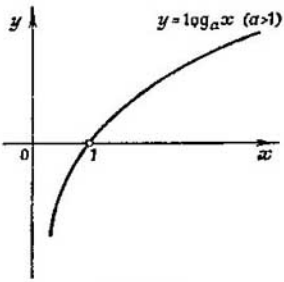

Fig. 4.11

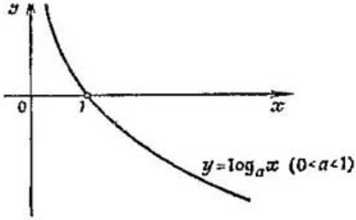

Fig. 4.12

mos la denotación $y = \ln x$. La función logarítmica $y = \ln x$ desempeña importante papel en las matemáticas y sus aplicaciones. Los logaritmos de base e suelen llamarse *naturales*.

En las figs. 4.11 y 4.12 están representadas las gráficas de la función logarítmica $y = \log_a x$ para los casos de $a > 1$ y $0 < a < 1$.

4. Funciones hiperbólicas. Se denominan funciones hiperbólicas las siguientes funciones *):

1°. Seno hiperbólico

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2°. Coseno hiperbólico

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

*) La denominación «funciones hiperbólicas» se debe a que las funciones $y = \operatorname{sh} x$ e $y = \operatorname{ch} x$ pueden definirse geométricamente, al considerar una hipérbola isósceles según las mismas reglas que sirven para definir las funciones $y = \operatorname{sen}\ x$ o $y = \cos x$ considerando una circunferencia unitaria.

3°. Tangente hiperbólica

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

4°. Cotangente hiperbólica

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

De las definiciones de las funciones hiperbólicas se desprende que el seno hiperbólico, el coseno hiperbólico y la tangente hiperbó-

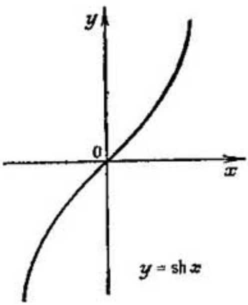

Fig.4.13

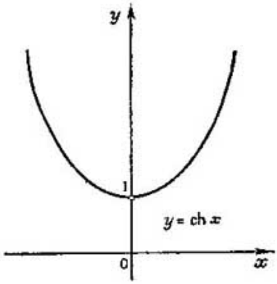

Fig. 4.14

lica están definidas sobre toda la recta numérica. La cotangente hiperbólica está definida en todos los puntos de la recta numérica, excepto el punto $x = 0$.

Las funciones hiperbólicas son continuas en todo punto del campo de definición (éste se desprende de la continuidad de la función exponencial y del teorema 4.2).

Las funciones hiperbólicas poseen una serie de propiedades análogas a las de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, para las funciones hiperbólicas sirven los teoremas de adición análogos a los de las funciones trigonométricas. A saber:

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

En las figs. 4.13—4.16 están representadas las gráficas de las funciones hiperbólicas.

5. Función potencial con cualquier exponente real α. Sea α número real arbitrario. Definemos la *función potencial* general $y = x^{\alpha}$,

$x > 0$, de la manera siguiente:

$$y = x^{\alpha}(a^{\log_a x})^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x} \quad (a > 1).$$

De la definición de la función potencial se desprende que para $\alpha > 0$ ella es creciente y, para $\alpha < 0$, decreciente.

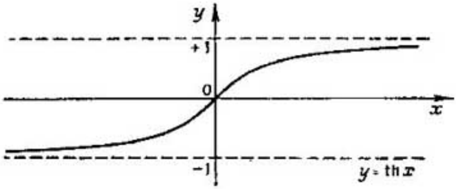

Fig. 4.15

Consideremos el valor límite de la función potencial cuando $x \to 0 + 0$. Demostremos que

$$\lim_{x \to 0+0} x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

En efecto, sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento x, convergente a cero por la derecha. Ya que $\lim_{n \to \infty} \log_a x_n = -\infty$, entonces de las propiedades de la función exponencial se desprende que $\lim_{n \to \infty} a^{\alpha \log_a x_n} = 0$, cuando $\alpha > 0$, y $\lim_{n \to \infty} a^{\alpha \log_a x_n} = +\infty$, cuando $\alpha < 0$. Ahora es lógico tomar $0^{\alpha} = 0$ para $\alpha > 0$ y considerar indeterminada esta expresión para $\alpha \leqslant 0$.

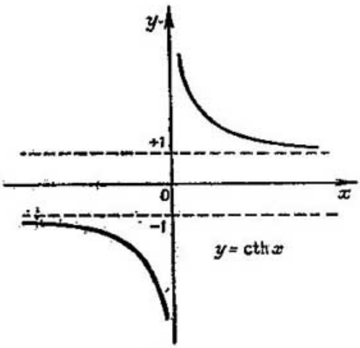

Fig. 4.16

Demostremos la *continuidad* de la función potencial en cualquier punto x de la semirrecta infinita positiva ($x > 0$). Para hacerlo, es suficiente argumentar que esta función es continua por la derecha y por la izquierda en todo punto x de dicha semirrecta (véase la observación en el p. 1 del § 3). Por ejemplo, demostremos que esta función es continua por la izquierda en el punto x (la continuidad por la derecha se demuestra análogamente). Al mismo tiempo, para mayor precisión, tomaremos $\alpha > 0$. Vamos a emplear la fórmula $y = x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$, $a > 1$. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión, convergente por la izquierda hacia x, de valores del argumento de la función potencial, así que $x_n < x$. Puesto que la función logarítmica es continua, la sucesión $\{u_n\}$, donde $u_n = \alpha \log_a x_n$, converge hacia $u = \alpha \log_a x$ con tal que todos los elementos u_n son diferentes de u (en efecto,

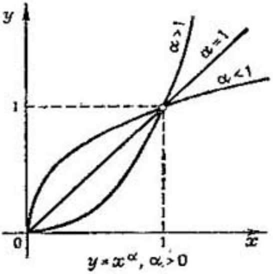

Fig. 4.17

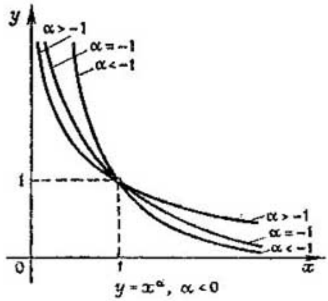

Fig. 4.18

ya que para $a > 1$ la función logarítmica crece, entonces es válida la desigualdad $u_n < u$). En virtud de la continuidad de la función exponencial, la sucesión $\{a^{u_n}\}$ converge hacia a^u. En otras palabras, la sucesión $\{a^{\alpha \log_a x_n}\}$, que representa la sucesión $\{x_n^\alpha\}$, correspondiente a la $\{x_n\}$, de valores de la función potencial, converge hacia $a^{\alpha \log_a x_n}$, es decir, hacia x^α. La continuidad de la función potencial por la izquierda en el punto $x > 0$ queda demostrada. De manera análoga se demuestra su continuidad por la derecha en el punto $x > 0$. Pero la continuidad por la derecha y por la izquierda de una funcion en un punto x significa que la función es continua en este punto. Notemos que si $\alpha > 0$, entonces la función potencial $y = x^\alpha$ es también continua en el punto $x = 0$.

OBSERVACIÓN. Observemos que si el exponente α de una función potencial es un número racional m/n, siendo n un número entero impar, entonces la función potencial $y = x^\alpha$ puede definirse sobre todo el eje numérico, poniendo para $x < 0$

$$y = |x|^\alpha, \text{ si } \alpha = m/n \text{ y } m \text{ es par,}$$
$$y = -|x|^\alpha, \text{ si } \alpha = m/n \text{ y } m \text{ es impar.}$$

En las figs. 4.17—4.20 están representadas las gráficas de la función potencial $y = x^\alpha$ para varios valores de α.

6. Funciones trigonométricas. En las matemáticas elementales, haciendo razonamientos geométricos demostrativos, fueron introducidas las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ *).

Enumeremos algunas propiedades de las funciones trigonométricas que tienen importancia para análisis ulterior:

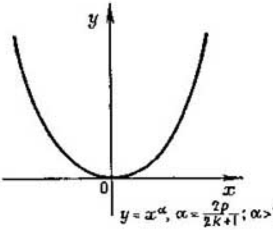

Fig. 4.19

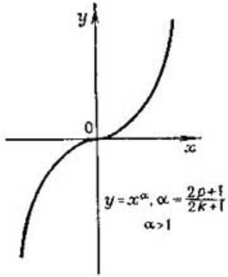

Fig. 4.20

1°. Para cualesquiera x', x'' y x reales son válidas las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}(x'+x'') = \operatorname{sen} x' \cos x'' + \cos x' \operatorname{sen} x'', \\ &\cos(x'+x'') = \cos x' \cos x'' - \operatorname{sen} x' \operatorname{sen} x'', \\ &\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

2°.

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen} 0 = 0; \quad \cos 0 = 1, \\ &\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1; \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

3°. Si $0 < x < \pi/2$, entonces

$$0 < \operatorname{sen} x < x. \tag{4.7}$$

---

*) Las demás funciones trigonométricas $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ e $y = \operatorname{cosec} x$ se definen por medio de las fórmulas mencionadas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Notemos que la definición de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ empleando razonamientos geométricos demostrativos no es irreprochable lógicamente puesto que la posibilidad de definir estas funciones para todos los valores reales del argumento x se reduce a la posibilidad de establecer la correspondencia biunívoca entre todos los puntos de la circunferencia unitaria y todos los números reales del segmento $[0, 2\pi]$.

Las propiedades mencionadas se argumentan haciendo razonamientos geométricos. Aquí no daremos las deducciones geométricas de las propiedades 1° y 2° conocidas del curso de las matemáticas elementales. Detengámonos solamente en la deducción geométrica de las desigualdades (4.7). Además de (4.7), demostremos la desigualdad $x < \operatorname{tg} x$ (cuando $0 < x < \pi/2$).

Consideremos la circunferencia de radio 1 con centro en el punto O y el punto A de esta circunferencia (fig. 4.21). Partiendo del punto A, en sentido contrario al de las agujas del reloj, marcaremos arcos de la circunferencia. Sea M punto de la circunferencia que está en el primer cuadrante, x, la longitud del arco $\overset{\smile}{AM}$, $0 < x < \pi/2$ (x es medida en radianes del ángulo AOM), N, la base de la perpendicular bajada desde M hasta OA, B, el punto de intersección de la perpendicular OA trazada desde el punto A y la prolongación del segmento OM. Entonces $MN = \operatorname{sen} x$, $ON = \cos x$, $AB = \operatorname{tg} x$. Ya que el triángulo OMA se comprende en el sector OMA que, a su vez, se comprende en el triángulo OBA y las áreas de dichas figuras son iguales a $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$, $\frac{x}{2}$ y $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, respectivamente, entonces tienen lugar las desigualdades $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$, $0 < x < \pi/2$. Para dichos valores de x tenemos $\operatorname{sen} x > 0$. De este modo, la validez de las desigualdades $0 \leqslant \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ (cuando $0 < x < \pi/2$) queda establecida.

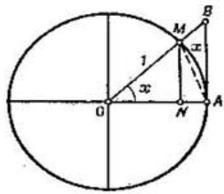

Fig. 4.21

Las propiedades 1°, 2° y 3° pueden servir para la definición de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Se puede demostrar que *existe y, además, un solo par de funciones definidas para todos los valores reales del argumento — la primera denominada* $\operatorname{sen} x$ *y la segunda* $\cos x$ *— que satisfacen las exigencias* 1°, 2°, 3°.

La demostración de esta afirmación se da en el Complemento de este capítulo.

Notemos que de las propiedades 1°, 2° y 3° de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se puede deducir todas las propiedades conocidas de las matemáticas elementales *).

Demostremos la *continuidad* de las funciones trigonométricas en todo punto de su campo de definición. Primeramente argumentamos la continuidad de la función $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = 0$. Sea $\{x_n\}$ sucesión arbitraria convergente por la derecha al punto $x = 0$ de valores del argumento x. De las desigualdades (4.7) tenemos $0 <$

*) Por ejemplo, las igualdades $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, $\cos(-x) = \cos x$.

$<$ sen $x_n < x_n$. De aquí, en virtud del teorema 3.14. se desprende que la sucesión {sen x_n} tiene límite igual a cero. De este modo, $\lim\limits_{x\to 0+0}$ sen x = sen $0 = 0$. Puesto que para $(-\pi/2) < x < 0$ son válidas las desigualdades $x <$ sen $x < 0$ *), entonces, empleando los mismos razonamientos, obtenemos $\lim\limits_{x\to 0-0}$ sen x = sen 0. Hemos establecido que en el punto $x = 0$ función y = sen x es continua por la derecha y por la izquierda, o sea, es continua en dicho punto. Para demostrar la continuidad de la función y = sen x en cualquier punto x de la recta infinita, empleamos la fórmula sen x'' − sen $x' = 2\cos\frac{x''+x'}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x''-x'}{2}$ que puede obtenerse de las fórmulas (4.5). Sea $\{x_n\}$ sucesión arbitraria de valores del argumento convergente a x. Suponiendo $x'' = x_n$ y $x' = x$ en la última fórmula, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{sen}\,x_n - \mathrm{sen}\,x) = 2\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x_n+x}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x_n-x}{2} = 0.$$

La validez de esta conclusión se desprende de que la sucesión $\left\{\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$ es acotada **) y la sucesión $\left\{\mathrm{sen}\,\frac{x_n-x}{2}\right\}$, infinitesimal, en virtud de lo demostrado anteriormente.

La continuidad de la función $y = \cos x$ se demuestra, empleando los razonamientos análogos y la fórmula

$$\cos x'' - \cos x' = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{x''+x'}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x''-x'}{2}.$$

La continuidad de las demás funciones trigonométricas (tg x, ctg x, sec x, cosec x) en todo punto de su campo de definición se desprende del teorema 4.2.

El campo de definición de toda función trigonométrica se divide en segmentos de monotonía de la función ***). La función y = sen x crece en todo segmento $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ****) y decrece en

---

*) Estas desigualdades se obtienen de las desigualdades (4.7) cambiando x por $-x$ y tomando en consideración la fórmula sen $(-x) = -$ sen x.

**) La tercera fórmula de las (4.5) permite concluir que $|\cos x| \leqslant 1$ y $|\mathrm{sen}\,x| \leqslant 1$. De aquí es obvia la acotación de la sucesión $\left\{\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$.

***) La monotonía de las funciones sen x y cos x sobre los segmentos correspondientes se determina fácilmente de las fórmulas

$$\mathrm{sen}\,x'' - \mathrm{sen}\,x' = 2\cos\frac{x''+x'}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x''-x'}{2}$$

y

$$\cos x'' - \cos x' = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{x''+x'}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{x''-x'}{2}.$$

****) Aquí, por k se toma cualquier número entero.

todo segmento $\left[(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right]$. La función $y=\cos x$ crece en todo segmento $[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$ y decrece en todo segmento $[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$. La función $y=\operatorname{tg} x$ crece en todo

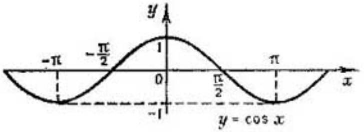

Fig. 4.22

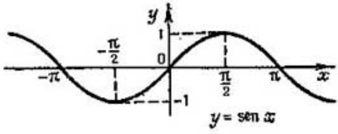

Fig. 4.23

intervalo $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$. La función $y=\operatorname{ctg} x$ decrece en todo intervalo $((k-1)\pi,\ k\pi)$. Para las funciones $y=\sec x$ e $y=$ $=\operatorname{cosec} x$ el lector puede determinar fácilmente sus campos de crecimiento y decrecimiento.

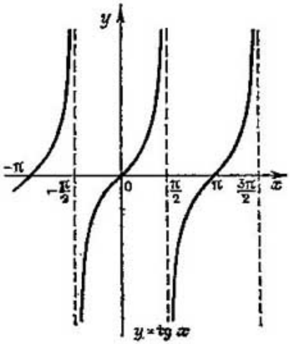

Fig. 4.24

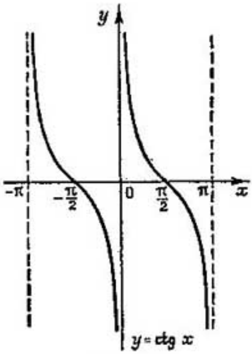

Fig. 4.25

En las figs. 4.22—4.27 están representadas las gráficas de las funciones trigonométricas.

7. Funciones trigonométricas inversas. La función $y=\arcsin x$ se define del modo siguiente. Consideremos la función $y=\operatorname{sen} x$ en el segmento $[-\pi/2,\ \pi/2]$. En el punto anterior hemos señalado que en este segmento la función $y=\operatorname{sen} x$ crece, es continua y tiene el segmento $[-1,\ 1]$ como el conjunto de sus valores. En virtud del corolario del lema 1 para la función $y=\operatorname{sen} x$ existe función inversa y continua sobre el segmento $[-1,\ 1]$. La denotaremos $x=\arcsin y$.

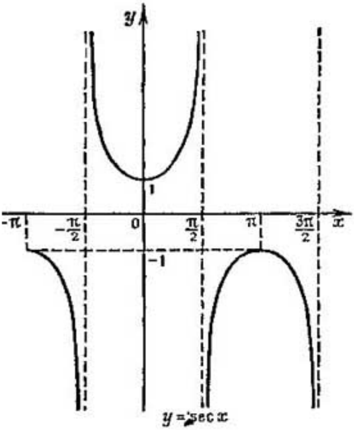

Fig. 4.26

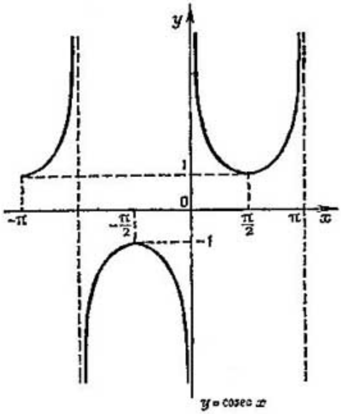

Fig. 4.27

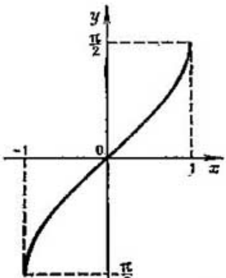

Fig. 4.28

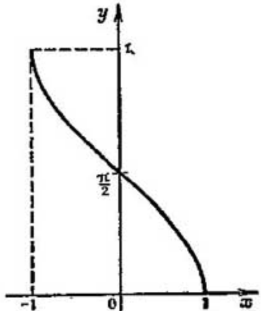

Fig. 4.29

Cambiando para esta función la denotación del argumento y por x. y la denotación x para la función por y, obtenemos la función $y = \operatorname{arcsen} x$. En la fig. 4.28 está representada la gráfica de esta función.

De modo completamente análogo se define la función $y = \arccos x$. El segmento $[-1, 1]$ es su campo de definición y el segmento $[0, \pi]$, conjunto de sus valores. La función mencionada decrece y es continua sobre el segmento $[-1, 1]$. En la fig. 4.29 está representada la gráfica de la función $y = \arccos x$.

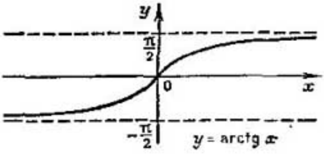

Fig. 4.30

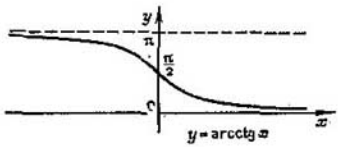

Fig. 4.31

Las funciones $y = \mathrm{arctg}\, x$ e $y = \mathrm{arcctg}\, x$ se definen como las inversas de la tangente y la cotangente. Estas funciones están definidas, son monótonas y continuas en la recta infinita. En las figs. 4.30 y 4.31 están representadas las gráficas de estas funciones.

§ 6. Valores límite de algunas funciones

1. Notas preliminares. En el capítulo 1 hemos dicho que para calcular las derivadas de las funciones $y = \mathrm{sen}\, x$ e $y = \log_a x$ hay que demostrar la existencia de los valores límite (o los límites) de la función $\dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}$, cuando $\Delta x \to 0$ y de la función $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$, cuando $\Delta x \to 0$ y $x > 0$ está fijado. En el párrafo presente vamos a resolver este problema. Necesitamos demostrar la proposición sobre el valor límite de la función comprendida entre dos funciones que tienen valor límite común en un punto dado. Esta proposición es analogía funcional del teorema 3.14.

Lema 3. *Sea que en cierto δ-entorno del punto a (excepto, tal vez, el propio punto a) están dadas funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ con tal que en el punto a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen un mismo valor límite igual a b. Si en dicho entorno del punto a (excepto, tal vez, el propio punto a) se cumplen las desigualdades $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, entonces en el punto a existe el valor límite de la función $h(x)$ y es igual a b.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ sucesión arbitraria de valores del argumento x convergente hacia a cuyos elementos x_n se encuentran en dicho δ-entorno del punto a y no son iguales a a; sean $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ y $\{h(x_n)\}$ sucesiones correspondientes de valores de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Según la condición

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = b \quad \text{y} \quad f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n).$$

Pero, entonces, en virtud del teorema 3.14, $\lim\limits_{n \to \infty} h(x_n) = b$. Ya que $\{x_n\}$ es sucesión arbitraria de valores del argumento convergente hacia a, entonces la última igualdad significa que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$. El lema queda demostrado.

2. Valor límite de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *) en el punto $x = 0$ (primer límite notable). Demostremos el teorema siguiente.

Teorema 4.4. *En el punto $x = 0$, el valor límite de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ existe y es igual a la unidad:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{4.8}$$

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos notado que para $0 < x < \pi/2$ son válidas las desigualdades $0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ (véase el p. 6 del párrafo anterior). Dividiendo estas igualdades término a término por $\operatorname{sen} x$, obtenemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{o} \quad \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Las últimas desigualdades son también válidas para los valores de x que satisfacen las condiciones $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Para convencerse de esto, basta observar que $\cos x = \cos(-x)$ y $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}$. Ya que $\cos x$ es función continua, entonces $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. De este modo, en cierto δ-entorno del punto $x = 0$ para las funciones $\cos x$, 1 y $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se cumplen todas las condiciones del lema 3 (para cerciorarnos de esto, denotemos $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1$ y $h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y tomemos $\delta = \pi/2$). Por consiguiente, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. El teorema queda demostrado.

---

*) Anteriormente hablamos de la función $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$. Si $\frac{\Delta x}{2}$ se denota mediante x, obtenemos la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. En este caso la condición $\Delta x \to 0$ se reduce a la condición $x \to 0$.

3. Valor límite de la función $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, cuando $x\to\infty$ (segundo límite notable) *). Demostremos el teorema siguiente.

Teorema 4.5. *El valor límite de la función $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ existe y es igual a e, cuando $x\to\infty$:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{4.9}$$

DEMOSTRACIÓN. Hay que demostrar que cualquiera que sea la sucesión infinita $\{x_k\}$ de valores del argumento de la función $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, la sucesión correspondiente $\{f(x_k)\}$ de valores de esta función tiene el número e por su límite. Consideremos cuatro grupos siguientes de sucesiones infinitas del argumento x:

1°. Sucesiones infinitas $\{n_k\}$ cuyos elementos son números positivos enteros. Por ejemplo, dicho grupo incluye la sucesión

$$2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ \ldots,\ n+1,\ n+1,\ n,\ n,\ \ldots.$$

2°. Sucesiones infinitas cuyos elementos a partir de cierto número consisten de números reales positivos.

3°. Sucesiones infinitas cuyos elementos a partir de cierto número se componen de números reales negativos.

4°. Sucesiones infinitas que contienen un número infinito de números reales tanto positivos como negativos **).

Observemos que una sucesión infinita completamente arbitraria de valores del argumento se refiere a uno de los grupos 1°, 2°, 3°, 4°. Por eso el teorema será demostrado si demostramos cada uno de los grupos 1°, 2°, 3° y 4°. (Al mismo tiempo, las sucesiones del grupo 1° son de carácter auxiliar). Sea $\{n_k\}$ alguna sucesión del primer grupo.

---

*) El problema mencionado anteriormente del valor límite de la función $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$, para $\Delta x\to 0$ y un $x>0$ fijado, se reduce a dicho problema. En efecto, si tomamos $\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{u}$, entonces, cuando $\Delta x\to 0$, $u\to\infty$ y $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$; esta función se diferencia de la función $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ solamente por la denotación del argumento.

**) Ya que la función $\left(1+\frac{1}{x}\right)$ no está definida sobre el segmento $[-1,\ 0]$ (puesto que para los valores de x de este segmento la expresión $\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ora es negativa ora no tiene sentido), entonces, es lógico considerar que los elementos de las sucesiones 2°, 3° y 4° no pertenecen al segmento $[-1,\ 0]$.

Demostremos que $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e$. Sea ε cualquier número positivo. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ (véase el p. 4 del § 3 del cap 3), entonces se puede indicar un número N^* tal que, para $n\geqslant N^*$, se cumple la desigualdad

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e\right|<\varepsilon.$$

Puesto que la sucesión $\{n_k\}$ es infinita y sus elementos son números positivos enteros, para el número positivo N^* se puede indicar un número N tal que, para $k\geqslant N$, se cumple la condicion $n_k\geqslant N^*$. Pero, como ya hemos dicho, para tales n_k enteros se cumple la desigualdad

$$\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-e\right|<\varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e.$$

Ahora pasamos a las sucesiones del segundo grupo. Sea $\{x_k\}$ cualquier sucesión del segundo grupo y sea N número, partiendo del cual todos los elementos de esta sucesión son mayores que la unidad. Tomando $k\geqslant N$, denotemos mediante n_k la *parte entera de* x_k, $n_k=[x_k]$. Entonces,

$$n_k\leqslant x_k<n_k+1. \qquad (4.10)$$

Notemos que las sucesiones $\{n_k\}$ y $\{n_k+1\}$ son sucesiones del primer grupo. De las desigualdades (4.10) tenemos

$$\frac{1}{n_k+1}<\frac{1}{x_k}\leqslant\frac{1}{n_k}$$

o

$$1+\frac{1}{n_k+1}<1+\frac{1}{x_k}\leqslant 1+\frac{1}{n_k}.$$

De aquí, empleando otra vez las desigualdades (4.10), obtenemos

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \qquad (4.11)$$

Los límites de las sucesiones $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}\right\}$ y $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}\right\}$ son iguales a e. En efecto, la primera sucesión puede representarse como el producto de las sucesiones $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\right\}$ y $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}\right\}$ cuyos límites son iguales a e y 1, respectivamente *). La segunda sucesión es el producto de las sucesiones $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ y $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right\}$ cuyos límites son, respectivamente, iguales a e y 1. En virtud de las desigualdades (4.11), según el teorema 3.14 tenemos

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Consideremos las sucesiones del tercer grupo. Si $\{x_k\}$ es una sucesión infinita cuyos elementos, partiendo de cierto número, son negativos, entonces la sucesión $\{z_k\}$, donde $z_k=-1-x_k$, es infinita y sus elementos, partiendo de cierto número, se componen de números reales positivos. Por eso $\{z_k\}$ es sucesión del segundo grupo. Como

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{z_k+1}$$

y

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{z_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)^{z_k}\left(1+\frac{1}{z_k}\right)=e,$$

se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

Para terminar la demostración, hace falta considerar las sucesiones del cuarto grupo. Sea $\{x_k\}$ dicha sucesión. Mediante $\{x'_k\}$ denotemos la subsucesión de esta sucesión que se compone de todos los elementos no negativos **) de la sucesión $\{x_k\}$ y mediante $\{x''_k\}$, la subsucesión compuesta de todos los elementos negativos de la sucesión $\{x_k\}$***). Ya que, según lo demostrado

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x'_k}\right)^{x'_k}=e \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x''_k}\right)^{x''_k}=e,$$

entonces, para cualquier $\varepsilon>0$ se puede indicar un elemento N tal que para $k\geqslant N$

$$\left|\left(1+\frac{1}{x'_k}\right)^{x'_k}-e\right|<\varepsilon \quad \text{y} \quad \left|\left(1+\frac{1}{x''_k}\right)^{x''_k}-e\right|<\varepsilon$$

es decir, para $k\geqslant N$

$$\left|\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}-e\right|<\varepsilon.$$

*) Al mismo tiempo, se toma en consideración que $\{n_k\}$ pertenece al primer grupo.

**) Estos elementos, partiendo de cierto número, son estrictamente positivos.

***) Marcamos aquí, a diferencia del capítulo 3, las subsucesiones elegidas mediante los signos ′ y ″ dejando, al mismo tiempo, para un elemento de la subsucesión el mismo número que él tenía en la sucesión $\{x_k\}$.

Por consiguiente,

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e.$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Del teorema demostrado se desprende que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

En efecto, sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión, convergente a cero, de valores del argumento de la función $(1+x)^{1/x}$ cuyos elementos x_n son distintos de cero. Entonces, la sucesión $\{z_n\}$, donde $z_n = 1/x_n$, es infinita (véase el teorema 3.6). Como

$$(1+x_n)^{1/x_n}=\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{z_n}\right)^{z_n}=e,$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=e,$$

y, por eso,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

§ 7. Continuidad y valores límite de algunas funciones compuestas

1. Continuidad y valores límite de algunas funciones compuestas. Demostremos la continuidad de algunas funciones compuestas.

1°. Sean $x = \varphi(t)$ e $y = f(x)$ funciones elementales más simples (vease el § 5) con tal que el conjunto de los valores $\{x\}$ de la función $x=\varphi(t)$ es el campo de definición de la función $y=f(x)$. De los resultados del § 5 se desprende que las funciones elementales más simples son continuas en todo punto del campo de definición. Por eso, en virtud del teorema 4.3, la función compuesta $y = f(\varphi(t))$ o sea, la superposición de dos funciones elementales, es continua. Por ejemplo, la función $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ es continua en cualquier punto $x\neq 0$. Para convencerse de esto, baste considerar las funciones $x = t^{-1}$ e $y = \operatorname{sen} x$. La función compuesta $y = \operatorname{sen} t^{-1}$ se diferencia de la función $y=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ solamente por la denotación del argumento y, en virtud de lo dicho anteriormente, es continua en cualquier punto $t\neq 0$. Realizando los razonamientos análogos, es fácil cerciorarse de que la función $y=\ln\operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto de todo intervalo $(2k\pi, (2k+1), \pi)$ *).

*) Donde $\operatorname{sen} x > 0$.

2°. EXPRESIONES POTENCIAL-EXPONENCIALES $u(x)^{v(x)}$.

Es obvio que tiene sentido solamente el caso de $u(x) > 0$. Es fácil de convencerse de que si $u(x)$ y $v(x)$ son continuas en el punto a y $u(x) > 0$ en el entorno del punto a, entonces la función $u(x)^{v(x)}$ es también continua en el punto a.

En efecto, $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$. Ya que $\ln u(x)$ es función continua en el punto a, entonces la función $v(x) \ln u(x)$ es también continua en el punto a. Pero, entonces la función $e^{v(x) \ln (u(x)}$ es continua en el punto a. Notemos que la propiedad de la continuidad que hemos demostrado permite comprobar que, para las suposiciones hechas $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = u(a)^{v(a)}$.

3°. Valores límite de expresiones potencial-exponenciales.

Examinemos el problema de los valores límite de las expresiones potencial-exponenciales $u(x)^{v(x)}$ cuando $x \to a$. Además, suponemos que $u(x) > 0$ en entorno del punto a.

De la relación $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$ se deduce, que, cuando $x \to a$, el valor límite de la expresión $u(x)^{v(x)}$ depende del valor límite de la expresión $v(x) \ln u(x)$.

I. Sea $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x) = b$.

Vamos a convencernos de que en este caso $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = e^b$.

En efecto, la función

$$w(x) = \begin{cases} v(x) \ln u(x), & \text{si } x \neq a, \\ b, & \text{si } x = a \end{cases}$$

es continua en el punto $x = a$. Por eso, la función compuesta $e^{w(x)}$ es también continua en este punto. Por consiguiente, $\lim\limits_{x \to a} e^{w(x)} = e^{w(a)} = e^b$. Ya que $\lim\limits_{x \to a} e^{w(x)} = \lim\limits_{x \to a} e^{v(x) \ln u(x)}$, entonces $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)}$ existe y es igual a e^b.

Empleando los datos referentes a los valores límite de e^w cuando $w \to -\infty$ y $w \to +\infty$, es fácil de cerciorarse de que

II. Si $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = 0$.

III. Si $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$.

La relación establecida entre los valores límite de las expresiones $u(x)^{v(x)}$ y $v(x) \ln u(x)$ permite, en algunos casos, hallar fácilmente el valor límite de la función $u(x)^{v(x)}$ si se conocen los valores límite de las funciones $u(x)$ y $v(x)$. Consideremos, por ejemplo, los casos siguientes:

1) Existen $\lim\limits_{x \to a} u(x) > 0$ y $\lim\limits_{x \to a} v(x)$.

2) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$, $b > 1$, $\lim\limits_{x \to a} v(x) = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$, $b > 1$, $\lim\limits_{x \to a} v(x) = -\infty$

Cerciorémonos de que en el caso 1) $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = [\lim\limits_{x \to a} u(x)]^{\lim\limits_{x \to a} v(x)}$.

En efecto, ya que $\lim\limits_{x \to a} u(x) > 0$, entonces, conforme a la continuidad de la función logarítmica, $\lim\limits_{x \to a} \ln (u(x)$ existe y es igual a $\ln [\lim\limits_{x \to a} u(x)]$.

Por eso existe $\lim\limits_{x \to a} v(x) \ln u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) \ln [\lim\limits_{x \to a} u(x)]$.

Según I, de aquí se desprende que

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln [\lim\limits_{x\to a} v(x)]} = [\lim_{x\to a} u(x)]^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$

En el caso 2) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = +\infty$, y, por eso, según III, $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$.

En el caso 3) $\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x) = -\infty$, y, por eso, según II, $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = 0$.

Para concluir, mencionemos tres casos cuando se necesita el estudio para hallar el valor límite de $u(x)^{v(x)}$.

1. *Indeterminación de forma* 1^∞:

$$\lim_{x\to u} u(x) = 1, \quad \lim_{x\to a} v(x) = \infty.$$

2. *Indeterminación de forma* 0^0:

$$\lim_{x\to a} u(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} v(x) = 0.$$

3. *Indeterminación de forma* ∞^0.

$$\lim_{x\to a} u(x) - +\infty, \quad \lim_{x\to a} v(x) = 0.$$

Para el primero de estos casos aducimos la fórmula, cómoda para las aplicaciones prácticas.

Transformemos la expresión $u(x)^{v(x)}$ del modo siguiente:

$$u(x)^{v(x)} = \left\{[1+(u(x)-1]^{\frac{1}{u(x)-1}}\right\}^{[u(x)-1]\,v(x)}.$$

Luego, tomemos

$$U(x) = [1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}} \text{ y } V(x) = [u(x)-1]\,v(x),$$

así que

$$u(x)^{v(x)} = U(x)^{V(x)}.$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to a} U(x) = e$ (véase la observación del teorema 4.5) y $e > 1$, entonces el valor $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} U(x)^{V(x)}$ *depende* del valor límite de la función $V(x)$ en el punto a, es decir, de $\lim\limits_{x\to a} [u(x)-1]\,v(x)$. A saber, si $\lim\limits_{x\to a} u(x)-1]\,v(x) = \lim\limits_{x\to a} V(x) = c$, entonces $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} U(x)^{V(x)} = e^c$ (véase el caso 1)); si $\lim\limits_{x\to a} [u(x)-1]\,v(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = +\infty$

(el caso 2)); si $\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x)=-\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}=0$ (véase el caso 3)). De este modo, obtenemos la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x)}$$

Las indeterminaciones de tipo 2 y 3 se reducen a la indeterminación de tipo 1 de la manera siguiente.

Hagamos

$$U(x)=e^{v(x)},\quad V(x)=\ln u(x).$$

Es evidente que $\lim\limits_{x\to a} U(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to a} V(x)=\pm\infty$. Además,

$$u(x)^{v(x)}=[e^{V(x)}]^{\ln U(x)}=e^{\ln U(x)^{V(x)}}=U(x)^{V(x)}.$$

EJEMPLO. Hallemos $\lim\limits_{x\to 0}[\cos x]^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$. Ya que $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=$ $=\infty$, entonces tenemos la indeterminación de forma 1^∞.

Empleemos la fórmula $\lim\limits_{x\to 0} u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}[u(x)-1]v(x)}$ obtenida anteriormente. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}[u(x)-1]v(x)=$$
$$=\lim_{x\to 0}[\cos x-1]\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\left[-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

Por eso,

$$\lim_{x\to 0}[\cos x]^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

4°. VALORES LÍMITE DE ALGUNAS FUNCIONES COMPUESTAS. Demostremos la validez de las igualdades siguientes:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\\&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(4.12)$$

1) Consideremos el primero de estos límites. Tenemos

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)^{1/n}-1}{x}=$$
$$=\frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\right]\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]}{x\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x)^{\frac{n-2}{n}}+\ldots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]}=$$

$$= \frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{n}}\right]^n}{x\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x)^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + (1+x)^{\frac{1}{n}} + 1\right]} =$$

$$= \frac{1}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}} + (1+x)^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + (1+x)^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

Puesto que, para $x \to 0$, el denominador de la última expresión tiene límite igual a n (la función $(1+x)^{k/n}$ es continua en el punto $x=0$ y por eso $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{k/n} = 1$), entonces $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{n}$.

2) Pasamos a la demostración de la segunda igualdad (4.12). Tenemos $\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{1/x}$. Continuemos definiendo la función $f(x) = (1+x)^{1/x}$, poniendo $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$. Como resultado, obtenemos la función $f(x)$ continua en el punto $x=0$. Entonces, la función $\ln f(x)$ será también continua en el punto nulo y por eso $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln f(0) = \ln e = 1$. Así pues, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

3) Demostremos la validez de la tercera igualdad (4.12). Hagamos $x = \ln(1+u)$ y observemos que para $x \to 0$ la variable u tiende a cero. Tenemos $\frac{e^x-1}{x} = \frac{u}{\ln(1+u)}$. De aquí se desprende que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = 1.$$

4) Demostremos la validez de la última igualdad (4.12). Tenemos $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\,\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$. Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1$ (véase (4.8)), se tiene $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Empleando las relaciones (4.8), (4.12), la igualdad (4.1) y el símbolo $o(x)$ (véase el p. 3 del § 2), es fácil convencerse de la validez de las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{sen}\, x = x + o(x), \\ &\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + o(x), \\ &\ln(1+x) = x + o(x), \\ &e^x = 1 + x + o(x), \\ &\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Demostremos, por ejemplo, la validez de la primera fórmula. Ya que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, entonces, en virtud de (4.1), $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + \alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es función infinitesimal en el punto $x = 0$. De la última fórmula se desprende que $\operatorname{sen} x = x + x\alpha(x)$. Como $x\alpha(x) = o(x)$, se tiene $\operatorname{sen} x = x + o(x)$.

2. Concepto de función elemental. Clase de funciones elementales. En las matemáticas aplicadas desempeña importante papel la clase de funciones que se obtienen haciendo un número finito de operaciones aritméticas sobre funciones elementales más simples, así como efectuando superposiciones de estas funciones. Por ejemplo, las funciones $x^3 + 3\cos 2x$, $\ln|\operatorname{sen} 3x| - e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$ pertenecen a dicha clase. Esta clase de funciones se llama *clase de funciones elementales* y toda funcion de ésta, *elemental.*

Notemos la siguiente propiedad de las funciones elementales: *son continuas en todo punto del campo de definición* *).

Esta propiedad se desprende directamente de los teoremas 4.2 y 4.3 y la continuidad de las funciones elementales más simples en todo punto del campo de definición.

§ 8. Clasificación de los puntos de discontinuidad de la función

1. Puntos de discontinuidad de la función y su clasificación. En el p. 1 del. § 3 hemos definido los puntos de discontinuidad de la función como puntos en los cuales la función no posee la propiedad de continuidad. Denominaremos también puntos de discontinuidad de la función los puntos en los cuales la función no es definida, pero en cuyo ε-entorno cualquiera existen puntos del campo de definición de la función.

Consideremos los tipos posibles de los puntos de discontinuidad de la función.

1°. ***Discontinuidad evitable.*** *El punto a se denomina punto de discontinuidad evitable de una función $y = f(x)$ si el valor límite de la función en este punto existe, pero, en el punto a, la función $f(x)$ ora no es definida ora su valor particular $f(a)$ en el punto a no es igual al valor límite.*

Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

*) Si, además, el campo de definición de la función se compone de algunos puntos aislados, es lógico considerar que, por definición, la función es continua en cada uno de estos puntos.

tiene, en el punto cero, discontinuidad evitable, puesto que su valor límite en el punto $x = 0$ es igual a 1 y el particular, a 2. Si, en el punto a, la función $f(x)$ tiene discontinuidad del tipo mencionado, *es posible evitarla* sin cambiar, al mismo tiempo, los valores de la función en los puntos distintos de a. Para hacerlo, es suficiente definir el valor de la función en el punto a igual a su valor límite en este punto. Así pues, si en el ejemplo considerado tomamos $f(0) = 1$ entonces, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ y la función será continua en el punto $x = 0$.

OBSERVACIÓN. En la práctica, los puntos de discontinuidad evitable se encuentran en distribuciones concentradas de magnitudes físicas.

2°. ***Discontinuidad de primer género.*** *El punto a se denomina punto de discontinuidad de primer género si en este punto la función $f(x)$ tiene valores límite derecho e izquierdo finitos pero no iguales uno a otro:*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x) \text{ (o } f(a+0) \neq f(a-0))$$

1. Para la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ el punto $x = 0$ es punto de discontinuidad de primer género (véase la fig. 4.4). En efecto, ya que

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

se tiene

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x \to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1.$$

2. La función $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{1/x}}$, definida en todos los puntos excepto el punto $x = 0$, tiene, en el punto $x = 0$, la discontinuidad de primer género (fig. 4.32). En efecto si $\{x_n\}$ es sucesión convergente a cero, cuyos elementos son positivos, entonces $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ es sucesión infinita con elementos positivos y, por eso, $\{1 + 2^{1/x_n}\}$ es también sucesión infinita. Pero, entonces la sucesión $\left\{\dfrac{1}{1+2^{1/x_n}}\right\}$ es infinitesimal y por eso $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 0$. Si $\{x_n\}$ es sucesión convergente a cero cuyos elementos son negativos, entonces $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ es sucesión infinita de términos negativos y por eso $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{1/x_n} = 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 1$.

3°. ***Discontinuidad de segundo género.*** *El punto a se denomina punto de discontinuidad de segundo género si en este punto la función $f(x)$ no tiene al menos uno de los valores límite unilaterales o si al menos uno de los valores límite unilaterales es infinito.*

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ (fig. 4.33)*. En el punto $x = 0$ esta función no tiene valor límite derecho ni

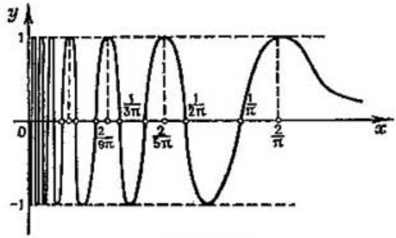

Fig. 4.32

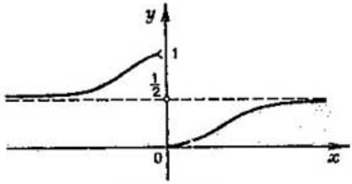

Fig. 4.33

izquierdo. En efecto, consideremos las siguientes sucesiones de valores del argumento convergentes a cero por la derecha:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{(4n-3)\pi}, \ldots$$

y

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{n\pi}, \ldots$$

Las sucesiones correspondientes de valores de la función $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ tienen la forma siguiente:

$$1, 1, 1, \ldots, 1, 1 \ldots$$
$$0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

La primera de estas sucesiones tiene límite igual a la unidad y la segunda, igual a cero. Por consiguiente, en el punto $x = 0$, la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no tiene valor límite derecho. Ya que $\operatorname{sen}\frac{1}{-x} = -\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, entonces esta función tampoco tiene valor límite izquierdo en este punto.

La función $y = \operatorname{ctg} x$ es otro ejemplo de la función que tiene puntos de discontinuidad de segundo género (véase la fig. 4.25). Esta

*) La fig. 4.33 es de carácter puramente ilustrativo.

función tiene discontinuidad de segundo género en cada uno de los puntos πn, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Funciones continuas a trozos. Una función $y = f(x)$ se denomina *continua a trozos* en el segmento $[a, b]$ si es continua en todos los puntos interiores de $[a, b]$, excepto, tal vez, un número finito de puntos en los que tiene discontinuidad de primer género y, además, tiene valores límite unilaterales en los puntos a y b. La función se denomina continua a trozos en un intervalo o en la recta infinita si es continua a trozos en cualquier segmento que les pertenece. Por ejemplo, la función $f(x) = [x]$*) es continua a trozos tanto en cualquier segmento como en la recta infinita.

Complemento

Demostración de la afirmación del p. 6 del § 5

En el presente complemento se da la demostración de la afirmación del p. 6 del § 5. Para mayor comodidad, enunciemos aquí esta afirmación en la forma siguiente.

Existe y, además, es único un par de funciones $S(x)$ y $C(x)$ definidas sobre toda la recta infinita y que satisfacen las tres exigencias siguientes:

1°. *Para cualesquiera números reales x', x'' y x se cumplen las relaciones*

$$\left.\begin{aligned} S(x' + x'') &= S(x')\,C(x'') + C(x')\,S(x''),\\ C(x' + x'') &= C(x')\,C(x'') - S(x')\,S(x''),\\ S^2(x) &+ C^2(x) = 1. \end{aligned}\right. \tag{4.5'**)}$$

2°.

$$\left.\begin{aligned} S(0) = 0, \qquad & C(0) = 1,\\ S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad & C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.6'}$$

3° *Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ son válidas las desigualdades*

$$0 < S(x) < x. \tag{4.7'}$$

Dividimos la demostración de esta afirmación en dos partes, a saber, en primer lugar, demostremos la *unicidad* y después, la *existencia* de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ que satisfacen las exigencias 1°, 2° y 3°.

1. Demostración de la unicidad. Para demostrar la unicidad es suficiente cerciorarse de la validez de las dos afirmaciones siguientes:

1) *Las funciones $S(x)$ y $C(x)$ que poseen las propiedades enumeradas son continuas sobre toda la recta numérica.*

2) *Los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ se determinan de un solo modo sobre cierto conjunto siempre denso de puntos de la recta infinita* ***).

En efecto, en virtud de la continuidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$, sus valores particulares en todo punto x de la recta infinita son iguales a sus valores

*) Recordemos que el símbolo $[x]$ significa la parte entera del número x.

**) Las fórmulas (4.5')— (4.7') se obtienen de las fórmulas (4.5) — (4.7) del p. 6 del § 5 cambiando las denotaciones de las funciones sen x y cos x por $S(x)$ y $C(x)$, respectivamente.

***) Un conjunto $\{x\}$ de puntos de la recta infinita se denomina *siempre denso* en la recta infinita si en cualquier e-entorno de cada punto de esta recta existe un número infinito de puntos del conjunto $\{x\}$.

límite en este punto. Si consideramos una sucesión de valores del argumento convergente a x cuyos elementos pertenecen a dicho conjunto siempre denso de puntos, entonces las sucesiones correspondientes de valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$, conforme a la afirmación 2) enunciada anteriormente, se determinan de un solo modo, por lo que los límites de estas sucesiones también se determinan de un solo modo. Pero estos límites son exactamente los valores particulares de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en el punto x. Por consiguiente, las funciones $S(x)$ y $C(x)$ se determinan de un solo modo sobre toda la recta infinita.

1) Antes de pasar a la demostración de la continuidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ deducimos algunas fórmulas.

Poniendo $x' = x$, $x'' = -x$ en las dos primeras relaciones de (4.5′) y teniendo en cuenta que $S(0) = 0$, $C(0) = 1$, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} 0 &= S(x)\cdot C(-x) + C(x)\cdot S(-x), \\ 1 &= C(x)\cdot C(-x) - S(x)\cdot S(-x). \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Multipliquemos las relaciones (4.14) por $S(x)$ y $C(x)$, respectivamente, y sumamos las relaciones obtenidas. Tomado en consideración que $S^2(x) + C^2(x) = 1$, obtenemos $C(-x) = C(x)$.

De manera completamente análoga, multiplicando las relaciones (4.14) por $C(x)$ y $-S(x)$, respectivamente, y sumándolas, obtenemos $S(-x) = -S(x)$. De este modo, $C(x)$ es función *par* y $S(x)$, *impar* *).

Pero entonces, empleando la primera fórmula de (4.5′), obtenemos

$$S(x'') = S\left(\frac{x'+x''}{2} + \frac{x''-x'}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) C\left(\frac{x''-x'}{2}\right) + \\ + C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right)$$

y, análogamente,

$$S(x') = S\left(\frac{x'+x''}{2} + \frac{x'-x''}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) C\left(-\frac{x''-x'}{2}\right) + \\ + C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(-\frac{x''-x'}{2}\right) = S\left(\frac{x'+x''}{2}\right) \times \\ \times C\left(\frac{x''-x'}{2}\right) - C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

Restando término a término las dos últimas fórmulas, obtenemos

$$S(x'') - S(x') = 2C\left(\frac{x'+x''}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right). \tag{4.15}$$

Demostremos ahora la continuidad de las funciones $C(x)$ y $S(x)$ en cualquier punto x de la recta infinita. Observemos que la continuidad de la función $S(x)$ *por la derecha en el punto* $x = 0$ se desprende directamente de la relación (4.7′) y de la igualdad $S(0) = 0$. En efecto, si $\{x_n\}$ es sucesión arbitraria de valores del argumento convergente a cero por la derecha, entonces de la relación $0 < S(x_n) < x_n$ deducimos que la sucesión correspondiente de valores de la función $\{S(x_n)\}$ también converge a cero, es decir, al valor particular $S(0)$.

Del *carácter impar* de la función $S(x)$ se desprende la continuidad de esta función *por la izquierda en el punto* $x = 0$. De este modo, la función $S(x)$ es *continua en el punto* $x = 0$.

*) La función $f(x)$ definida sobre la recta infinita se denomina *impar* si $f(-x) = -f(x)$ y *par*, si $f(-x) = f(x)$.

La continuidad de $S(x)$ *en cualquier punto* x se desprende de la relación (4.15). En efecto, sea x *cualquier punto de la recta infinita*, y $\{x_n\}$ *sucesión arbitraria de valores del argumento convergente a* x. Haciendo $x' = x$, $x'' = x_n$ en (4.15), tendremos

$$S(x_n) - S(x) = 2C\left(\frac{x+x_n}{2}\right) S\left(\frac{x_n-x}{2}\right). \tag{4.16}$$

En virtud de que $S(x)$ es continua en el cero y $S(0)=0$, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} S\left(\frac{x_n-x}{2}\right)=0$. Puesto que la sucesión $\left\{C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)\right\}$ es *acotada* *), el miembro derecho (y, por lo tanto, el izquierdo) de (4.16) tiene por su límite el cero. Pero esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n)=S(x)$, o sea, la función $S(x)$ es continua en el punto x.

De manera análoga se demuestra la continuidad de la función $C(x)$. Para hacerlo, en vez de (4.15) hay que deducir la fórmula

$$C(x'') - C(x') = -2S\left(\frac{x''+x'}{2}\right) S\left(\frac{x''-x'}{2}\right).$$

2) Demostremos que los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ se determinan de un solo modo en los puntos $p\frac{\pi}{2^n}$, donde p es número entero positivo o negativo y n es número entero positivo. Notemos que estos puntos forman un conjunto siempre denso de puntos de la recta numérica. Demostremos algunas propiedades de las funciones $S(x)$ y $C(x)$. En primer lugar, demostremos que estas funciones son *periódicas y tienen el período* 2π**). En efecto, poniendo $x'' = x + 2\pi$ y $x' = x$ en (4.15), obtenemos

$$S(x+2\pi) - S(x) = 2\,C(x+\pi)\,S(\pi).$$

Ya que $S(\pi) = S\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2S\left(\frac{\pi}{2}\right) C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, de la ultima relación se desprende que

$$S(x+2\pi) = S(x),$$

o sea, la función $S(x)$ es periódica y tiene el período 2π. En particular, de aquí se desprende que $S(2\pi) = 0$.

Poniendo $x' = x$ y $x'' = 2\pi$ en la segunda fórmula de (4.5′), y teniendo en cuenta que $S(2\pi) = 0$, hallamos

$$C(x+2\pi) = C(x)\,C(2\pi).$$

Como $C(2\pi) = 1$ (es fácil convencerse de esto aplicando las fórmulas (4.5′) primero para $x' = \pi/2$ y $x'' = \pi/2$, y, después, para $x' = \pi$ y $x'' = \pi$), se tiene

$$C(x+2\pi) = C(x).$$

De este modo, la periodicidad de $C(x)$ queda también establecida.

La propiedad de periodicidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ permite limitarnos, en nuestros razonamientos, al segmento $[0, 2\pi]$. Determinemos ahora qué

---

*) De la relación $S^2(x) + C^2(x) = 1$ se desprende que $|C(x)| \leqslant 1$ para todos los x, de donde se deduce la acotación de la sucesión $\left\{C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)\right\}$.

**) La funcion $f(x)$ se denomina *periódica de período* $a > 0$ si para cualquier x es válida la relación $f(x+a) = f(x)$.

signos tienen los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en distintos puntos de este segmento. De (4.6'), (4.7') y la continuidad de $S(x)$ se desprende que en el segmento $[0, \pi/2]$ los valores de la función $S(x)$ son no negativos con tal que en este segmento la función $S(x)$ se anula solamente en el punto $x = 0$. Como $S(\pi - x) = S(\pi)\, C(-x) - C(\pi)\, S(x)$ *) y $S(\pi) = 0$, $C(\pi) = -1$, se tiene $S(\pi - x) = S(x)$. Por eso, en el segmento $[\pi/2, \pi]$ los valores de la función $S(x)$ son no negativos con tal que en este segmento la función $S(x)$ se anula solamente en el punto $x = \pi$. De la fórmula $S(2\pi - x) = -S(x)$, que se obtiene análogamente a la fórmula $S(\pi - x) = S(x)$, se desprende que en el segmento $[\pi, 2\pi]$ los valores de la función $S(x)$ son no positivos con tal que la función $S(x)$ se anula solamente en los extremos de este segmento. Realizando razonamientos completamente análogos podemos convencernos de que la función $C(x)$ es no negativa en los segmentos $[0, \pi/2]$ y $[3\pi/2, 2\pi]$ y no positiva en el segmento $[\pi/2, 3\pi/2]$, y se anula solamente en los puntos $\pi/2$ y $3\pi/2$.

Para terminar de demostrar la unicidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ necesitaremos algunas fórmulas. Pasamos a su deducción. En primer lugar, notemos que de (4.5') se desprenden las fórmulas siguientes **):

$$S^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - C(x)}{2}, \quad C^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + C(x)}{2}. \tag{4.17}$$

Poniendo en estas fórmulas $x = x' + x''$ y aplicando otra vez las fórmulas (4.5'), obtenemos las relaciones que nos interesan

$$S^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 - C(x')\, C(x'') + S(x')\, S(x'')}{2},$$

$$C^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) = \frac{1 + C(x')\, C(x'') - S(x')\, S(x'')}{2}.$$

Estas fórmulas muestran que si son conocidos los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en los puntos x' y x'', entonces los valores de estas funciones en el punto $\frac{x' + x''}{2}$ se determinan de un solo modo puesto que de los razonamientos aducidos anteriormente se desprende que sabemos los signos de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en todo punto del segmento $[0, 2\pi]$ y, por consiguiente, en cualquier punto x de la recta numérica en virtud de su periodicidad de 2π. Partiendo de los valores de $S(x)$ y $C(x)$ conocidos y determinados de un solo modo en los puntos $0, \pi/2, \pi, 2\pi$ del segmento $[0, 2\pi]$ y aplicando las fórmulas que acabamos de obtener, podemos calcular de un solo modo los valores de estas funciones en todos los puntos de tipo $p\pi/2n$ del segmento $[0, 2\pi]$ (p y n son números enteros no negativos con tal que $p \leqslant 2^{n+1}$). Puesto que el conjunto de puntos de tipo $p\pi/2^n$ es denso en el segmento $[0, 2\pi]$, entonces, en virtud de lo que hemos dicho al empezar la demostración de la unicidad, las funciones $S(x)$ y $C(x)$ están definidas sobre toda la recta numérica de un solo modo.

2. **Demostración de la existencia.** Demostremos la afirmación más general. *Existen las funciones $S(x)$ y $C(x)$ definidas y continuas sobre toda la recta numérica que satisfacen las exigencias:*

---

*) Esta fórmula se desprende de la primera fórmula de (4.5') y del carácter impar de la función $S(x)$.

**) Baste tomar $x' = x'' = x/2$ en la segunda fórmula de (4.5') y $x/2$ en vez de x en la tercera.

1°. *Para cualesquiera números reales x', x'' y x se cumplen las relaciones*

2°.
$$\left.\begin{aligned} S(x'+x'') &= S(x')\,C(x'')+C(x')\,S(x''),\\ C(x'+x'') &= C(x')\,C(x'')-S(x')\,S(x''),\\ S^2(x)+C^2(x) &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4.5^1)$$

$$\left.\begin{aligned} S(0)=0,\ C(0)=1,\\ S(d)=1,\ C(d)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (4.6^1)$$

donde d es cierto número positivo dado.

3°. *Existe un número positivo L tal que, para $0<x<d$, son válidas las desigualdades*

$$0<S(x)<Lx \qquad (4.7^1)$$

con tal que si $d=\pi/2$, entonces $L=1$.

DEMOSTRACIÓN. Primero, determinemos los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ sobre el conjunto $\{s\}$ de puntos del segmento $[0, d]$, cada uno de los cuales puede representarse en forma de $s=\frac{pd}{2^n}$, donde p y n son números enteros no negativos con tal que $p<2^n$. Determinemos de antemano los valores de estas funciones en los puntos $s_n=\frac{d}{2^n}$, $n=0, 1, \ldots$ Ya que $s_{n+1}=\frac{s_n}{2}$, entonces, empleando las fórmulas (4.17), se puede poner

$$\begin{aligned} S(s_{n+1}) &= S\left(\frac{s_n}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-C(s_n)}{2}},\\ C(s_{n+1}) &= C\left(\frac{s_n}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+C(s_n)}{2}}. \end{aligned} \qquad (4.18)$$

Empleando las fórmulas recurrentes (4.18), de la relación $C(d)=C\left(\frac{d}{2^0}\right)=$ $=C(s_0)=0$ se determinan los valores de $S(x)$ y $C(x)$ en todos los puntos $s_n=d/2^n$. Adicionalmente a dichos valores de $S(x)$ y $C(x)$ en los puntos s_n determinemos los valores de estas funciones en los puntos 0 y d de la misma manera como se hace en (4.6¹).

Ahora pasamos a determinar los valores de $S(x)$ y $C(x)$ en todos los puntos del conjunto $\{s\}$, $s=\frac{pd}{2^n}$, p y n son números enteros no negativos, $p<2^n$. Se sabe que cualquier número positivo entero puede representarse de un solo modo en forma de la suma de potencias enteras del número 2*):

$$p=\sum_{i=1}^{n} a_i 2^{n-i}\ {}^{**)},$$

donde a_i es igual ora a cero ora a la unidad. Por eso,

$$s=\frac{pd}{2^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i d}{2^i}=\sum_{i=1}^{n} a_i s_i. \qquad (4.19)$$

*) En el sistema de numeración binario el número entero p se representa de un solo modo como símbolo compuesto de ceros y unidades. Este símbolo es denotación breve del número p en forma de la suma de potencias del número 2.

**) Véase la nota en la pág. 50.

De este modo, todo valor de s es representable en forma de la suma finita de los números s_i, para cada uno de los cuales los valores $S(s_i)$ y $C(s_i)$ fueron determinados anteriormente. Ahora, empleando las fórmulas (4.5[1]), podemos determinar los valores de $S(x)$ y $C(x)$ en los puntos del conjunto $\{s\}$. Además, debemos cerciorarnos de que, aplicando sucesivamente esas fórmulas, llegamos al mismo resultado independientemente del modo de agrupar los sumandos s_i en la fórmula (4.19).

Por ejemplo, podemos tomar $s = x' + x''$, donde $x' = a_1 s_1$ y $x'' = \sum_{i=2}^{n} a_i s_i$, y después calcular $S(s)$ por la primera fórmula de (4.5[1]). Pero se puede tomar también $x' = a_1 s_1 + a_2 s_2$ y $x'' = \sum_{i=3}^{n} a_i s_i$. Para cerciorarse de que la aplicación sucesiva de las fórmulas (4.5[1]) produce un mismo resultado independientemente del modo de agrupar los sumandos s_i en la suma (4.19), es suficiente que tengan lugar las relaciones

$$S[(x' + x'') + x'''] = S[x' + (x'' + x''')]$$

y

$$C[(x' + x'') + x'''] = C[x' + (x'' + x''')].$$

La validez de estas relaciones se demuestra directamente por medio de la doble aplicación de las fórmulas (4.5[1]).

Ahora cerciorémonos de que las funciones $S(s)$ y $C(s)$ definidas sobre el conjunto $\{s\}$ poseen la propiedad 1° en este conjunto. Sea que s', s'' y $s' + s''$ pertenecen a dicho conjunto. Representemos s', s'' y $s' + s''$ en forma de las sumas (4.19). Agrupando los números s_n (que integran s' y s'') de n iguales hasta que los s_n restantes tengan índices diferentes, llegamos al grupo de los sumandos s_n que tiene la forma de (4.19) para el número $s' + s''$. Anteriormente hemos demostrado que el resultado del cálculo de $S(s)$ o $C(s)$ de la suma de varios argumentos no depende del modo de agrupar sumandos de esta suma. Por consiguiente, si s', s'' y $s' + s''$ pertenecen al conjunto $\{s\}$, entonces los valores de $S(s)$ y $C(s)$ calculados en estos puntos satisfacen las dos primeras relaciones (4.5[1]). No es difícil convencerse de la validez de la tercera relación de (4.5[1]) para los valores mencionados del argumento. En efecto, de la definición de $S(x)$ y $C(x)$ en los puntos 0 y d se desprende que $S^2(0) + C^2(0) = 1$ y $S^2(d) + C^2(d) = 1$. De las fórmulas recurrentes (4.18) se desprende la validez de la relación $S^2(s_n) + C^2(s_n) = 1$ para todos los s_n y de la fórmula que se demuestra directamente

$$S^2(x' + x'') + C^2(x' + x'') = (S^2(x') + C^2(x'))(S^2(x'') + C^2(x''))$$

se desprende la validez de la relación $S^2(s) + C^2(s) = 1$ para todos los puntos del conjunto $\{s\}$.

Mostremos ahora que para todos los puntos del conjunto $\{s\}$ diferentes de 0 y d son válidas las desigualdades

$$0 < S(s) < 1, \quad 0 < C(s) < 1^{*)}. \tag{4.20}$$

Valiéndose de la inducción demostremos la validez de las desigualdades (4.20). Para hacerlo, a todo n le ponemos en correspondencia un grupo de elementos del conjunto $\{s\}$, incluyendo en este grupo todos los elementos de $\{s\}$ que pueden representarse en la forma $\frac{pd}{2^n}$, donde $0 < p < 2^n$ y p es nú-

*) Recordemos que en los puntos 0 y d los valores de $S(s)$ y $C(s)$ se definen por las fórmulas (4.6[1]).

mero impar. Los elementos de este grupo se denominarán elementos de orden n. Todo elemento de orden $n+1$ está situado entre dos elementos consecuentes cuyo orden no es mayor de n y que se diferencian uno de otro en $\frac{d}{2^n}$, o sea, en s_n. El primer elemento de orden $n+1$ es igual a s_{n+1}. Todos los demás elementos de orden $n+1$ pueden obtenerse al sumar diferentes s de orden n a s_{n+1}. Calculemos los valores $S(s_1)$ y $C(s_1)$ (s_1 es el único valor de s de orden 1). De (4.18) tenemos $S(s_1)=\sqrt{1/2}$ y $C(s_1)=\sqrt{1/2}$. De este modo, para los elementos del primer grupo las desigualdades (4.20) tienen lugar. Ahora admitamos que las desigualdades (4.20) tienen lugar para todos los elementos de orden no superior a n.

Entonces, en virtud de la primera fórmula de (4.5^1), en todos los puntos de orden $n+1$ los valores de $S(s)$ son positivos, y, en virtud de la tercera fórmula de (4.5^1), estos valores no son mayores de la unidad. Tomando $x''=d$, $x'=-s$ en la primera fórmula de (4.5^1), y teniendo en cuenta el carácter par de la función $C(s)$, hallamos que $C(s)=S(d-s)$, y, por eso, para $C(s)$ son válidas las desigualdades (4.20) para los valores s de orden $n+1$, puesto que si s tiene orden $n+1$, entonces $d-s$ tiene también orden $n+1$. Empleando la inducción, de aquí se desprende que para todos los puntos del conjunto $\{s\}$ diferentes de 0 y d son válidas las desigualdades (4.20).

Demostremos que las funciones $S(s)$ y $C(s)$ definidas sobre el conjunto $\{s\}$ son monótonas sobre este conjunto. A saber, mostremos que $S(s)$ es función creciente y $C(s)$, decreciente. Sea $0\leqslant s'<s''<d$. Entonces $\frac{s'+s''}{2}$ y $\frac{s''-s'}{2}$ se comprenden estrictamente entre 0 y d. De la fórmula (4.15) y de las desigualdades (4.20) se desprende que $S(s'')>S(s')$. Por consiguiente, $S(s)$ es función creciente. De la relación $C(s)=S(d-s)$ se deduce que $C(s)$ es función decreciente sobre el conjunto $\{s\}$.

Demostremos ahora que las funciones $S(s)$ y $C(s)$ definidas sobre el conjunto siempre denso $\{s\}$ de puntos del segmento $[0, d]$ tienen valor límite en todo punto del segmento $[0, d]$.

En primer lugar, consideremos la sucesión $\{s_n\}$ y mostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n)=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} C(s_n)=1$ (la existencia de estos límites se desprende de la monotonía y la acotación de $S(s)$ y $C(s)$ sobre el conjunto $\{s\}$). Para demostrar consideremos la sucesión $\left\{\frac{t(s_n)}{s_n}\right\}$, donde $t(s_n)=\frac{S(s_n)}{C(s_n)}$. De (4.18) tenemos

$$2S(s_{n+1})\,C(s_{n+1})=\sqrt{1-C^2(s_n)}=S(s_n)$$

y

$$C(s_n)=C^2(s_{n+1})-S^2(s_{n+1})<C^2(s_{n+1}).$$

Por eso,

$$\frac{t(s_n)}{s_n}=\frac{S(s_n)}{s_nC(s_n)}=\frac{2S(s_{n+1})\,C(s_{n+1})}{2s_{n+1}C(s_n)}=\frac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}\;\frac{C^2(s_{n+1})}{C(s_n)}>\frac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}.$$

Así pues, $\frac{t(s_n)}{s_n}>\frac{t(s_{n+1})}{s_{n+1}}$ y $\frac{t(s_n)}{s_n}>0$ para cualquier n, o sea, la sucesión $\left\{\frac{t(s_n)}{s_n}\right\}$ es decreciente y acotada. Según el teorema 3.15, tiene límite que se denotará mediante L:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t(s_n)}{s_n}=L. \tag{4.21}$$

Ya que $s_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} t(s_n)=0$, y, por eso, en virtud del carácter acotado de la función $C(s)$ véase (4.20))

$$\lim_{n\to\infty} S(s_n) = \lim_{n\to\infty} (t(s_n)\, C(s_n)) = 0. \tag{4.22}$$

Puesto que $C(s) > 0$, de (4.22) y la relación $S^2(s_n)+C^2(s_n)=1$ se desprende que

$$\lim_{n\to\infty} C(s_n) = 1. \tag{4.23}$$

Notemos que de (4.21) y (4.23) se desprende que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(s_n)}{s_n} = L. \tag{4.24}$$

Ya que $\dfrac{S(s_n)}{s_n} = \dfrac{2S(s_{n+1})\, C(s_{n+1})}{2s_{n+1}} < \dfrac{S(s_{n+1})}{s_{n+1}}$, entonces la sucesión $\left\{\dfrac{S(s_n)}{s_n}\right\}$ crece. Por eso, de (4.21), y (4.24) tenemos

$$\frac{S(s_n)}{s_n} < L < \frac{t(s_n)}{s_n}$$

o

$$S(s_n) < L\cdot s_n < t(s_n). \tag{4.25}$$

Sea $\{s_n^*\}$ cualquier sucesión convergente a cero de valores s del conjunto $\{s\}$. Es obvio que para cualquier n se puede indicar un número k tal que $0 < s_n^* < s_k$. De aquí, en virtud de la monotonía de $S(s)$ en el conjunto $\{s\}$, tenemos $0 < S(s_n^*) < S(s_k)$. Por eso, de (4.22) se desprende que $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n^*) = 0$.

Demostremos ahora que la función $S(s)$ definida sobre el conjunto $\{s\}$ *) tiene valor límite en cualquier punto x del segmento $[0, d]$. Sea $\{s'_n\}$ sucesión monótonamente creciente convergente a x de elementos del conjunto $\{s\}$. Ya que $\{S(s'_n)\}$ es sucesión acotada creciente, entonces existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} S(s'_n)$ que se denotará por $S(x)$. Sea $\{s''_n\}$ cualquier sucesión convergente a x de elementos del conjunto $\{s\}$ $(s''_n \neq x)$. Entonces la sucesión $\left\{\left|\dfrac{s''_n - s'_n}{2}\right|\right\}$ tiene límite igual a cero. Según lo demostrado, $\lim\limits_{n\to\infty} S\left\{\left|\dfrac{s''_n - s'_n}{2}\right|\right\} = 0$. De (4.15) y la acotación de la función $C(s)$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} |S(s''_n) - S(s'_n)| = \lim_{n\to\infty} C\left(\frac{s''_n + s'_n}{2}\right) S\left(\left|\frac{s''_n - s'_n}{2}\right|\right) = 0.$$

En otras palabras, $\lim\limits_{n\to\infty} S(s''_n) = S(x)$. En virtud de la arbitrariedad de la sucesión $\{s''_n\}$, esto significa la existencia del valor límite de la función $S(s)$, definida sobre $\{s\}$, en todo punto x del segmento $[0, d]$:

$$\lim_{s\to x} S(s) = S(x).$$

*) Recordemos que $\{s\}$ es conjunto siempre denso de los puntos del segmento $[0, d]$.

De la relación $S^2(s) + C^2(s) = 1$ y del carácter no negativo de la función $C(s)$ sobre el conjunto $\{s\}$ se desprende la existencia del valor límite de la función $C(s)$ en todo punto del segmento $[0, d]$. Denotaremos el valor límite de esta función en el punto x mediante el símbolo $C(x)$.

Definemos ahora los valores de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en todo punto del segmento $[0, d]$ como valores límite en el punto x de las funciones $S(s)$ y $C(s)$ definidas sobre el conjunto $\{s\}$. Demostremos que las funciones $S(x)$ y $C(x)$ así definidas poseen las propiedades 1° y 2° de la afirmación enunciada al comenzar la *demostración de la existencia de las funciones $S(x)$ y $C(x)$*. Primero, argumentemos que las *funciones* $S(x)$ y $C(x)$ definidas del modo mencionado anteriormente en el segmento $[0, d]$ *son monótonas y continuas* sobre este segmento. En primer lugar, demostremos que si x es cualquier número del segmento $[0, d]$ y s', s'' son cualesquiera números del conjunto $\{s\}$ que satisfacen la desigualdad $s' < x < s''$, entonces $S(s') < S(x) < S(s'')$, $C(s') > C(x) > C(s'')$. Argumentemos, por ejemplo, que $S(s') < S(x)$ (las desigualdades $S(x) < S(s'')$ y $C(s') > > C(x) > C(s'')$ se demuestran análogamente). Sea $\{s_n'\}$ sucesión creciente (y convergente a x) de valores del conjunto $\{s\}$, todos elementos s_n' de la cual satisfacen las desigualdades $s' < s_n' < x$. Ya que sobre el conjunto $\{s\}$ la función $S(s)$ crece, la sucesión $\{S(s_n') - S(s')\}$ crece y tiene elementos positivos. Por eso el límite $S(x) - S(s')$*) de esta sucesión es positivo. De este modo, $S(s') < < S(x)$. Demostremos ahora que *la función $S(x)$ crece en el segmento* $[0, d]$ (de manera análoga se demuestra *el decrecimiento de la función $C(x)$ en este segmento*). Sean x' y x'' cualesquiera dos números del segmento $[0, d]$ que satisfacen la desigualdad $x' < x''$. Si s' es cierto número del conjunto $\{s\}$ comprendido entre x' y x'', $x' < s' < x''$, entonces, según lo demostrado, $S(x') < S(s')$ y $S(s') < S(x'')$, o sea $S(x') < S(x'')$. La monotonía de la función $S(x)$ sobre $[0, d]$ queda demostrada. *Antes de pasar a demostrar la continuidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ argumentemos que los valores límite de las funciones $S(s)$ y $C(s)$ en los puntos del conjunto $\{s\}$ coinciden con los valores de estas funciones en los puntos correspondientes del conjunto $\{s\}$.*

Consideremos un número arbitrario s del conjunto $\{s\}$ y dos sucesiones convergentes a s $\{s_n'\}$ y $\{s_n''\}$ de elementos del conjunto $\{s\}$ tales que $s_n' < s < s_n''$. En virtud de la monotonía de la función $S(s)$ sobre el conjunto $\{s\}$, son válidas las desigualdades $S(s_n') < S(s) < S(s_n'')$**). Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n') = = \lim\limits_{n\to\infty} S(s_n'')$ y dichos límites son iguales al valor límite de la función $S(s)$ en el punto s, entonces la afirmación que acabamos de enunciar queda demostrada. Ahora, cerciorémonos de que las funciones $S(x)$ y $C(x)$ *son continuas en todo punto del segmento* $[0, d]$. Para ello, baste argumentar que estas funciones son continuas en todo punto x de dicho segmento por la izquierda y por la derecha, son continuas por la derecha en el punto 0 y por la izquierda en el punto d (véase la observación del p. 1 del § 3). Para mayor precisión, demostremos la continuidad por la izquierda de la función $S(x)$ en el punto x del segmento $[0, d]$ (la continuidad por la derecha y la continuidad de $C(x)$ se demuestran análogamente).

Sea $\{s_k'\}$ cierta sucesión (convergente a x por la izquierda) de números del conjunto $\{s\}$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} S(s_k') = S(x)$, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar un elemento s_k' de esta sucesión tal que, para él, $0 < S(x) - S(s_k') < \varepsilon$. Consideremos ahora una sucesión arbitraria $\{x_n\}$ convergente a x por la izquierda.

Sea N número partiendo del cual se cumplen las desigualdades $s_k' < x_n < x$.

---

*) Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} S(s_n') = S(x)$, y $S(s')$ es número fijado, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} [S(s_n') - S(s')] = S(x) - S(s')$.

**) Para precisión demostramos esta afirmación para la función $S(x)$.

En virtud del crecimiento de la función, para $n \geqslant N$ se cumplen las desigualdades $S(s'_k) < S(x_n) < S(x)$. Poniéndolas en correspondencia a las desigualdades $0 < S(x) - S(s'_k) < \varepsilon$, obtenemos que, para $n \geqslant N$, son válidas las desigualdades $0 < S(x) - S(x_n) < \varepsilon$. En otras palabras, el valor límite de la función $S(x)$ en el punto x por la izquierda es igual a su valor particular en este punto. De este modo, la continuidad por la izquierda de $S(x)$ en el punto x queda demostrada.

Definemos ahora las funciones $S(x)$ y $C(x)$ en el segmento $[d, 2d]$, empleando las relaciones $S(x+d) = C(x)$ y $C(x+d) = -S(x)$. Volviendo a aplicar estas fórmulas, extendamos las funciones para el segmento $[2d, 4d]$. Repitiendo estos razonamientos, definemos las funciones para todos los valores positivos x. Para los valores negativos x definemos estas funciones empleando las relaciones $S(x) = -S(-x)$ y $C(x) = C(-x)$. Es fácil convencerse de que obtenemos como resultado las funciones continuas sobre toda la recta infinita.

Demostremos que las funciones $S(x)$ y $C(x)$ satisfacen las exigencias 1°, 2° y 3° de la afirmación enunciada al comenzar la *demostración de la existencia*. Observemos que si s', s'', $s' + s''$ y s pertenecen al conjunto $\{s\}$ del segmento $[0, d]$, entonces para estos valores del argumento las fórmulas (4.5¹) tienen lugar. Empleando el procedimiento de prolongación de las funciones $S(x)$ y $C(x)$ mencionado anteriormente se desprende la validez de estas fórmulas para los valores del argumento $d + s'$, s'', donde s' y s'' pertenecen al segmento $[0, d]$. Repitiendo estos razonamientos demostremos que las relaciones (4.5¹) son válidas para todos los valores del argumento de la recta infinita que tienen la forma de $pd/2^n$ donde p y n, son cualesquiera números enteros. Puesto que estos valores del argumento forman un conjunto siempre denso de puntos de la recta infinita*), en virtud de la continuidad de las funciones $S(x)$ y $C(x)$, las relaciones (4.5¹) serán válidas para todos los valores x.

Ya que la exigencia 2° resulta cumplida después de construir las funciones $S(x)$ y $C(x)$, queda por cerciorarse de la validez de la exigencia 3°. Notemos que si s', s'' y $s' + s''$ son elementos del conjunto $\{s\}$ del segmento $[0, d]$ y son válidas las desigualdades $0 < S(s') < Ls'$ y $0 < S(s'') < Ls''$, entonces en virtud de la primera fórmula de (4.5¹) y las desigualdades (4.20), se cumplen también las desigualdades $0 < S(s' + s'') < Ls' + Ls'' = L(s' + s'')$. Empleando esta observación, la fórmula (4.19) y las desigualdades (4.20) y (4.25), es fácil cerciorarse de que las desigualdades $0 < S(s) < Ls$ son válidas para todos los s del conjunto $\{s\}$ del segmento $[0, d]$. Ya que este conjunto es siempre denso sobre $[0, d]$, y $S(x)$ es función continua, entonces para todos los x de $[0, d]$ tienen lugar las desigualdades $0 < S(x) < Lx$. La validez de la exigencia 3° queda argumentada.

Observemos ahora que el número L depende del modo de escoger d. A saber, si en vez de d escogemos el número $d^* = d/k$, entonces $s_n^* = s_n/k$. Según la construcción $S(s_n^*) = S(s_n)$, y, por eso, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S(s_n^*)}{s_n^*} = \lim\limits_{n\to\infty} k\dfrac{S(s_n)}{s_n} = kL$ (véase (4.24)). Eligiendo $k = 1/L$, sobre el segmento $[0, d^*]$ definemos las funciones $S(x)$ y $C(x)$ de tal modo que se cumplan las desigualdades $0 < S(x) < x$.

Los razonamientos geométricos muestran que si $d = \pi/2$, entonces $2S(s_n)$ es la longitud de un lado del 2^n-ágono regular inscrito en la circunferencia de radio 1, $2s_n$ es la longitud de un arco de la circunferencia subtendida por la cuerda de longitud $2S(s_n)$, y $2t(s\ )$, la longitud de un lado del 2^n-ágono regular circunscrito alrededor de esta circunferencia. En este caso, las desigualdades (4.25) tienen la forma $S(s_n) < s_n < t(s_n)$. Por eso, en dicho caso, $L = 1$. La afirmación queda completamente demostrada.

---

*) Véase la nota en la pág. 135.

Capítulo 5

FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

En este capítulo introducimos los conceptos de derivada y de diferencial, se definen las reglas de diferenciación, se calculan las derivadas de todas las funciones elementales más simples que hemos dado a conocer en el cap. 1. Después se consideran las derivadas y las diferenciales de órdenes superiores.

§ 1. Derivada. Sus interpretaciones física y geométrica

1. Incremento del argumento y de la función. Forma de diferencias de la condición de continuidad. Sea una función $y=f(x)$ definida sobre cierto intervalo *) (a, b). Fijemos cualquier valor x de dicho intervalo y, en el punto x, demos al argumento un incremento Δx tal que el valor $x+\Delta x$ pertenezca también al intervalo (a, b). *Se denominará incremento de la función $y=f(x)$ en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, el número*

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x). \tag{5.1}$$

Así, el incremento de la función $y=\operatorname{sen} x$ en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, es igual a

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}. \tag{5.2}$$

Tiene lugar la siguiente afirmación: *para que la función $y=f(x)$ sea continua en el punto x es necesario y suficiente que el incremento Δy de esta función en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, sea infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$.*

En efecto, por definición, la función $y=f(x)$ es continua en el punto x si existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x). \tag{5.3}$$

En virtud del p. 3 del § 2 del cap. 4, la existencia del valor límite (5.3) es equivalente a que la función $[f(x+\Delta x)-f(x)]$ del argumento Δx es infinitesimal cuando $\Delta x\to 0$.

La afirmación demostrada permite expresar la condición de continuidad de la función $y=f(x)$ en el punto x en forma nueva,

*) En vez del intervalo (a, b) se puede considerar el segmento $[a, b]$, semirrecta, toda la recta infinita y, en general, cualquier conjunto $\{x\}$ *denso en sí*. La definición del conjunto $\{x\}$ denso en sí se da a conocer en el § 3 del cap. 2.

a saber: *la función $y = f(x)$ es continua en el punto x si el incremento Δy de esta función en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, es infinitesimal para $\Delta x \to 0$*, o sea, si

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0. \tag{5.4}$$

La condición (5.4) se denominará *forma de diferencias de la condición de continuidad de la función $y = f(x)$ en el punto x.* Esta condición se emplea mucho a continuación.

Valiéndose de la condición (5.4) volvamos a cerciorarnos de que la función $y = \operatorname{sen} x$ es continua en todo punto x de la recta infinita. En efecto, de la fórmula (5.2), la condición $\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1$ y la igualdad $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} = 0$ se desprende directamente que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

2. Definición de la derivada. Continuemos empleando para la función $y = f(x)$ las suposiciones y designaciones enunciadas en el punto anterior.

Teniendo en cuenta que $\Delta x \neq 0$, consideremos, en un punto *fijado* x, la razón entre el incremento Δy de la función en este punto y el incremento correspondiente del argumento Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.5}$$

La razón (5.5) se denominará *relación de diferencias* (en el punto dado x). Puesto que el valor x se cree *fijado*, la relación de diferencias (5.5) es *función del argumento* Δx. Esta función está definida para todos los valores del argumento Δx pertenecientes a cierto entorno bastante pequeño del punto $\Delta x = 0$, excepto el propio punto $\Delta x = 0$. De este modo, tenemos derecho de considerar el problema de la existencia del límite de dicha función cuando $\Delta x \to 0$.

Definición. *Se denomina* ***derivada*** *de la función $y = f(x)$ en el punto fijado x el límite de la relación de diferencias para $\Delta x \to 0$,* (5.5) *(observando la condición de que este límite exista).*

La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x se denotará por el símbolo $y'(x)$ o $f'(x)$. Así pues, por definición,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.6}$$

Notemos que si la función $y = f(x)$ está definida y tiene derivada para todos los x del intervalo (a, b), esta derivada será función de la variable x también definida sobre el intervalo (a, b).

3. Derivada desde el punto de vista físico. Ya en el cap. 1 hemos introducido el concepto de derivada, partiendo de los razonamientos físicos. Aquí volvemos a estudiar las aplicaciones físicas del concepto de derivada.

Ante todo, supongamos que la función $y = f(x)$ describe la *ley del movimiento del punto material por la línea recta* (es decir, cómo depende el camino y, recorrido por el punto material del origen de referencia, respecto del tiempo x). Entonces, como se sabe, la relación de diferencias (5.5) define la velocidad media del punto en el intervalo de tiempo de x a $x + \Delta x$. En este caso, la derivada $f'(x)$, es decir, el límite de la relación de diferencias (5.5) para $\Delta x \to 0$, define la *velocidad instantánea del punto en el momento de tiempo x*. Así pues, la derivada de la función que describe la ley de movimiento define la velocidad instantánea del punto.

Para que uno no tenga la idea de que el concepto de derivada se usa ampliamente sólo en la mecánica, daremos ejemplos de aplicación del concepto de derivada en otras ramas de la física.

Sea que la función $y = f(x)$ determina la cantidad de electricidad y que pasa por la sección transversal de un conductor en el tiempo x. (El momento de tiempo $x = 0$ se toma por el origen de referencia). En este caso, la derivada $f'(x)$ determinará la *intensidad de la corriente* que pasa a través de la sección transversal del conductor en el momento de tiempo x.

Luego, consideremos el proceso de calentamiento de un cuerpo. Supongamos que la función $y = f(x)$ determina la cantidad de calor *) y que hay que comunicar al cuerpo para calentarlo de 0° a x°. Entonces, como se sabe del curso de la física elemental, la relación de diferencias (5.5) determina la *capacidad calorífica media* del cuerpo al calentarlo de x° a $(x + \Delta x)^\circ$. En este caso, la derivada $f'(x)$, o sea, el valor límite de la relación de diferencias (5.5) cuando $\Delta x \to 0$, determina la *capacidad calorífica del cuerpo para la temperatura dada x*. Notemos que, hablando en general, esta capacidad calorífica cambia al variar la temperatura x.

Hemos considerado ejemplos cómo se aplican los conceptos de derivada en tres distintas ramas de la física. Al estudiar el curso de la física general el lector encontrará numerosos ejemplos de aplicaciones del concepto de derivada.

4. Derivada desde el punto de vista geométrico. En el § 2 del cap. 1 hemos considerado el problema de hallar la tangente a la curva que es la gráfica de la función $y = f(x)$ (en un intervalo (a, b)). Allí hemos dado la definición de la tangente a la curva en el punto $M(x, f(x))$ de esta curva. (Aquí x es un valor del argumento en el intervalo (a, b). Véase la fig. 5.1). Si mediante Δx denotamos un incremento arbitrario del argumento y mediante P, el punto de la curva con las coordenadas $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, entonces, la tangente que pasa por el punto M de la curva dada se define como la posición límite de la secante MP cuando $\Delta x \to 0$. En la fig. 5.1 podemos ver que el coeficiente angular de la secante MP (o sea, la

*) Expresada, por ejemplo, en calorías.

tangente del ángulo de inclinación de esta secante al eje Ox) es igual a la relación de diferencias (5.5). Empleando este dato y el hecho de que, pasando al límite para $\Delta x \to 0$, el ángulo de inclinación de la secante debe transformarse en el ángulo de la tangente, en el § 2 del cap. 1 hemos deducido basándose en razonamientos demostrativos que la *derivada* $f'(x)$ *es igual al coeficiente angular de la tangente al gráfico de la función* $y = f(x)$ *en el punto* M.

En el presente punto precisemos los razonamientos demostrativos mencionados. Al suponer que la función $y = f(x)$ tiene la derivada

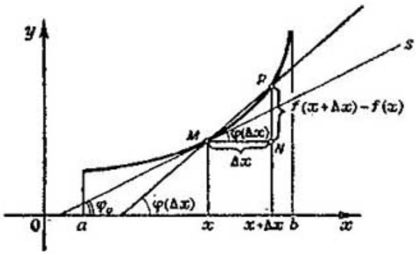

Fig. 5.1

en el punto dado x, demostremos: 1) que el gráfico de la función $y = f(x)$ tiene la tangente en el punto dado $M(x, f(x))$, 2) que el coeficiente angular de dicha tangente es igual a $f'(x)$.

Demostremos las afirmaciones 1) y 2) simultáneamente. Denotemos el ángulo de inclinación de la secante MP al eje Ox por el símbolo $\varphi(\Delta x)$. Como el coeficiente angular de la secante MP (o sea, $\operatorname{tg} \varphi(\Delta x)$) es igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, se tiene

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{5.7}$$

para cualquier Δx bastante pequeño y distinto de cero. De la existencia de la derivada $f'(x)$, es decir, de la existencia del valor límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, y de la continuidad de la función $u = \operatorname{arctg} x$ para todos los valores del argumento se desprende la existencia del valor límite de la función (5.7) en el punto $\Delta x = 0$ y la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x). \tag{5.8}$$

La igualdad (5.8) demuestra la existencia del valor límite del ángulo de inclinación de la secante MP (para $\Delta x \to 0$), o sea, demuestra la existencia de la tangente en el punto M. Además, de la igualdad (5.8) se desprende que si denotamos el ángulo de inclinación de la tangente por φ_0, entonces $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x)$, es decir, $\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x)$.

5. Derivadas derecha e izquierda. Observando la completa analogía con los conceptos de valores límite derecho e izquierdo de una función se introducen los conceptos de *derivadas derecha* e *izquierda* de la función $y = f(x)$ (en el punto dado x).

Definición. *Se denomina* ***derivada derecha (izquierda)*** *de la función $y = f(x)$ en el punto fijado x el valor límite derecho (izquierdo) de la relación de diferencias* (5.5) *en el punto* $\Delta x = 0$ *(observando la condición de que este valor límite exista).*

La derivada derecha de la función $y = f(x)$ en el punto x suele denotarse por el símbolo $f'(x+0)$ y la izquierda, por el símbolo $f'(x-0)$.

Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x, ella tiene en este punto las derivadas derecha e izquierda coincidentes entre sí. Si la función $y = f(x)$ tiene derivada tanto derecha como izquierda en el punto x, y si dichas derivadas coinciden entre sí, entonces la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x *). Al mismo tiempo, existen las funciones que, en el punto dado x, tienen la derivada, tanto derecha como izquierda, pero no la tienen en dicho punto. Puede servir de ejemplo la función

$$f(x) = |x| = \begin{cases} +x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En el punto $x = 0$ esta función tiene la derivada derecha igual a $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ y la izquierda igual a $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, pero no tiene derivada en el punto $x = 0$.

6. Concepto de derivada de la función vectorial. En el análisis matemático y sus aplicaciones se encuentran con frecuencia los conceptos de la función vectorial y de su derivada.

Si a todo valor de la variable t de cierto conjunto $\{t\}$ se le pone en correspondencia, según una ley conocida, un vector determinado $\mathbf{a}$, *entonces se dice que sobre el conjunto $\{t\}$ está prefijada función vectorial* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.

Ya que en el sistema rectangular cartesiano dado todo vector $\mathbf{a}$ se determina unívocamente por tres coordenadas x, y y z, entonces la definición de la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ equivale al definir tres funciones escalares $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$.

El concepto de función vectorial se hace especialmente demostrativo si examinamos el llamado *hodógrafo* de esta función.

Se denomina hodógrafo el lugar geométrico de los extremos de todos los vectores $\mathbf{a}(t)$ que parten del origen de coordenadas O. En la fig. 5.2, la curva L es hodógrafo de la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.

*) Esta afirmación se desprende de la afirmación correspondiente para los valores límite derecho e izquierdo de la función (véase la observación del p. 1 del § 2 en el cap. 4).

El concepto de hodógrafo de la función vectorial es la generalización del concepto de la gráfica de la función escalar.

Introduzcamos el concepto de derivada de la función vectorial **a** (t) en el punto fijado t. Con este fin demos al argumento t un incremento arbitrario $\Delta t \neq 0$ y consideremos el vector $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)$ (en la fig. 5.2 el vector mencionado coincide con el vector $\overrightarrow{MP}$). Multiplicando dicho vector por el número $1/\Delta t$, obtenemos nuevo vector

$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)\right], \qquad (5.5^*)$$

colineal al anterior. El vector (5.5*) es análogo a la relación de diferencias (5.5). Notemos que el vector (5.5*) es la velocidad media de variación de la función vectorial en el segmento $[t,\ t + \Delta t]$.

Se llama derivada de la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ *en un punto fijado* t *el límite de la relación de diferencias* (5.5*) *cuando* $\Delta t \to 0$.

La derivada de la función vectorial **a** (t) se denota por el símbolo $\mathbf{a}'(t)$ o $\dfrac{d\mathbf{a}}{dt}$.

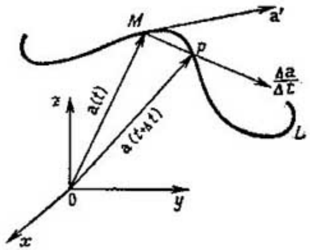

Fig. 5.2

Empleando razonamientos geométricos es obvio que la derivada de la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ es vector tangente al hodógrafo de esta función.

Puesto que las coordenadas de la relación de diferencias (5.5*) son, respectivamente, iguales a

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t},$$

está claro que las coordenadas de la derivada $\mathbf{a}'(t)$ son iguales a las derivadas de las funciones $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$. De este modo, el cálculo de la derivada de la función vectorial se reduce al cálculo de las derivadas de sus coordenadas.

OBSERVACIÓN 1. Puesto que la función vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ determina la ley del movimiento del punto material por la curva L que es hodógrafo de esta función, la derivada $\mathbf{a}'(t)$ es igual a la velocidad del movimiento por dicha curva.

OBSERVACIÓN 2. Sabemos que en la geometría analítica hay varios tipos de productos de vectores (producto escalar, producto vectorial y producto mixto). Empleando la representación en coordenadas de todos estos productos se hace posible formular reglas para calcular las derivadas de los productos correspondientes de las funciones vectoriales. A título de ejemplo, aducimos la regla para calcular la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales $\mathbf{a}(t) = \{a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t)\}$ y $\mathbf{b}(t) = \{b_1(t),\ b_2(t),\ b_3(t)\}$:

$$\{\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t)\}' = \mathbf{a}'(t)\,\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}'(t) = \{a_1'(t)\,b_1(t) + a_2'(t)\,b_2(t) + a_3'(t)\,b_3(t)\} + \{a_1(t)\,b_1'(t) + a_2(t)\,b_2'(t) + a_3(t)\,b_3'(t)\}.$$

La regla análoga es también válida para el producto vectorial de dos funciones vectoriales:

$$[\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t)]' = [\mathbf{a}'(t)\,\mathbf{b}(t)] + [\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}'(t)].$$

§ 2. Concepto de diferenciabilidad de la función

1. Concepto de diferenciabilidad de la función en un punto dado. Sea la función $y = f(x)$ definida sobre un intervalo (a, b) como en los pp. 1, 2 del párrafo anterior y sea que mediante el símbolo x se denota cierto valor fijado del argumento de dicho intervalo y mediante el símbolo Δx, cualquier incremento del argumento tal que el valor del argumento $x + \Delta x$ pertenece también a (a, b).

Definición. *La función $y = f(x)$ se denomina **diferenciable** en el punto dado x si el incremento Δy de esta función en el punto x, correspondiente al incremento del argumento Δx, puede representarse en la forma*

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\Delta x, \tag{5.9}$$

donde A es un número independiente de Δx y α, función del argumento Δx que es infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$.

Observemos que la función $\alpha(\Delta x)$ puede tomar un valor, *cualquiera que sea*, en el punto $\Delta x = 0$ (además, en este punto sigue siendo válida la representación (5.9)). Para la precisión, se puede hacer $\alpha(0) = 0$*).

Ya que el producto de dos infinitesimales $\alpha\,\Delta x$ es infinitesimal de orden superior que Δx (véase el p. 3 del § 2 del cap. 4), es decir, $\alpha\,\Delta x = o(\Delta x)$, la fórmula (5.9) puede escribirse en la forma

$$\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x).$$

Teorema 5.1. *Para que la función $y = f(x)$ sea diferenciable en el punto dado x es necesario y suficiente que tenga derivada finita en este punto.*

DEMOSTRACIÓN. 1) NECESIDAD. Sea la función $y = f(x)$ diferenciable en el punto dado x, o sea su incremento Δy representable en este punto en forma (5.9). Al suponer que $\Delta x \neq 0$ y al dividir la igualdad (5.9) en Δx, obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha. \tag{5.10}$$

De la igualdad (5.10) se desprende la existencia de la derivada, es decir, del valor límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$.

2) SUFICIENCIA. Sea que la función $y = f(x)$ tiene derivada finita en el punto dado x, es decir, existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \tag{5.11}$$

*) Además, el valor particular de la función $\alpha(\Delta x)$ en el punto $\Delta x = 0$ coincidirá con su valor límite en este punto.

En virtud de la definición del valor límite, la función $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ del argumento Δx es infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$, o sea,

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \tag{5.12}$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. La representación (5.12) coincide con la (5.9) si mediante A denotamos el número $f'(x)$ independiente de Δx. Por lo tanto, queda demostrado que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x.

El teorema demostrado nos permite identificar a continuación *el concepto de diferenciabilidad de la función en un punto dado y el de la existencia de derivada en el punto dado de la función.*

En el estudio ulterior nos ponemos de acuerdo llamar *diferenciación* la operación de hallar la derivada.

2. Relación entre los conceptos de diferenciabilidad y de continuidad de una función. Tiene lugar la siguiente afirmación elemental.

***Teorema* 5.2.** *Si la función $y = f(x)$ es diferenciable en un punto dado x, es también continua en este punto.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x, entonces su incremento Δy en este punto puede representarse en la forma (5.9). Pero, de la fórmula (5.9) se desprende que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, o sea, la función $y = f(x)$ es continua en el punto x, conforme a la forma de diferencias de la condición de continuidad (véase el p. 1 del § 1). El teorema queda demostrado.

Lógicamente, surge la pregunta de si es válida o no la afirmación inversa del teorema 5.2, o sea, si se desprende de la continuidad de la función en un punto dado su diferenciabilidad en este punto. La respuesta debe ser negativa, puesto que existen funciones que son continuas en cierto punto y no son diferenciables en este punto. Como ejemplo de tal función puede servir la función $y = |x|$. Obviamente, esta función es continua en el punto $x = 0$, pero (como se ha mostrado al final del p. 5 del § 1) ella no es diferenciable en este punto. Notemos que existen funciones continuas sobre cierto segmento que no tienen derivada en ningún punto de este segmento*).

3. Concepto de diferencial de una función. Sea que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x, es decir, el incremento Δy de esta función en el punto x puede escribirse en la forma (5.9). Analizando la fórmula (5.9), deducimos que el incremento Δy de la función diferenciable es la *suma de dos sumandos*: el primero de los sumandos $A\,\Delta x$, para $A \neq 0$, es función del incremento del argumento

*) El primer ejemplo de esta función fue publicado por Weierstrass. Antes, independientemente de él, el matemático checo Bolzano construyó una función análoga, pero no la publicó. En el Complemento del cap. 2 del tomo 2 daremos un ejemplo de la función de este tipo.

Δx, *lineal y homogénea**) *respecto a* Δx; cuando $\Delta x \to 0$ este sumando es *infinitesimal del mismo orden que* Δx y el *segundo* sumando $\alpha\,\Delta x$ es *infinitesimal de orden superior a* Δx, puesto que cuando $\Delta x \to 0$ la razón $\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \alpha$ tiende a cero. De este modo, para $A \neq 0$ el primer sumando $A\,\Delta x$ es la *parte principal* del incremento de la función diferenciable que se llama diferencial de la función en el punto x correspondiente al incremento del argumento Δx.

Así pues, en el caso de $A \neq 0$, se denomina *diferencial de la función* $y = f(x)$ *en el punto dado* x, *correspondiente al incremento del argumento* Δx, *la parte principal*, *lineal respecto a* Δx, *del incremento de la función en el punto* x. La diferencial de la función $y = f(x)$ suele denotarse por dy. Si para el incremento de la función Δy es válida la representación (5.9), entonces, la diferencial de esta función es, por definición, igual a

$$dy = A \cdot \Delta x. \tag{5.13}$$

En el caso de $A = 0$ el sumando $A \cdot \Delta x$ deja de ser parte principal del incremento Δy de la función diferenciable (puesto que este sumando es igual a cero mientras el sumando $\alpha \cdot \Delta x$, hablando en general, es diferente de cero). Sin embargo, nos ponemos de acuerdo que en el caso de $A = 0$ la diferencial de la función se define también por la fórmula (5.13), es decir, en este caso la diferencial se toma igual a cero.

Si tomamos en consideración el teorema 5.1, o sea, que $A = f'(x)$, entonces la fórmula (5.13) puede escribirse en la forma

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{5.14}$$

La fórmula (5.14) expresa la diferencial de la función en el punto x que corresponde al incremento del argumento Δx. Vale subrayar que, hablando en general, la diferencial de la función dy en el punto dado x no es igual al incremento de la función Δy en este punto. Es fácil comprenderlo, considerando la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 5.3). Sea que en la curva $y = f(x)$ el punto M corresponde al valor del argumento x, el punto P de la misma curva, al valor del argumento $x + \Delta x$, MS es la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto M. Luego, sea que $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$, Q es punto de intersección de la tangente MS y la recta PN. Entonces el incremento de la función Δy es igual a la magnitud del segmento NP. Al mismo tiempo, del triángulo rectangular MQN y de la fórmula (5.14) está claro que la diferencial de la función dy es igual a la magnitud del segmento NQ, puesto que la magnitud del segmento MN es igual a Δx, y la tangente del ángulo $\angle QMN$ es igual a $f'(x)$. Es obvio que,

*) Recordemos que se denomina *función lineal* del argumento x la función de tipo $y = Ax + B$, donde A y B son constantes. En el caso de $B = 0$ la función lineal se denomina *homogénea*.

hablando en general, las magnitudes de los segmentos NP y NQ son diferentes.

Para concluir este punto, establecemos la expresión para la diferencial de la función $y = f(x)$ cuyo argumento x es *variable independiente**).

Introduzcamos el concepto de *diferencial* dx *de la variable independiente* x. Como diferencial dx de la variable independiente x puede entenderse cualquier número (independiente de x). Nos ponemos de acuerdo tomar en adelante este número igual al incremento Δx de la variable independiente**). Este acuerdo nos permite escribir la fórmula (5.14) en la forma

$$dy = f'(x)\,dx. \qquad (5.15)$$

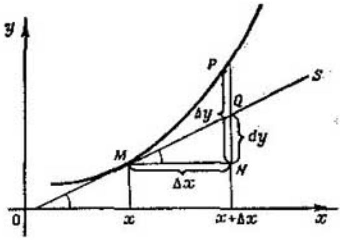

Fig. 5.3

Notemos que hasta ahora la fórmula (5.15) fue argumentada sólo para el caso cuando el argumento x es variable independiente. Sin embargo, a continuación, en el § 9, demostremos que la fórmula (5.15) queda también válida para el caso cuando el argumento x no es variable independiente, sino es función diferenciable de una variable nueva.

Mientras tanto, podemos deducir de la fórmula (5.15) lo siguiente: cuando el argumento x de la función $y = f(x)$ es variable independiente, la derivada $f'(x)$ de esta función es igual a la razón de la diferencial de la función dy a la diferencial del argumento dx, es decir,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

En el § 9 demostremos que esta relación es también válida si el propio argumento x es función diferenciable de una variable nueva.

§ 3. Reglas de diferenciación de la suma, la diferencia, el producto y el cociente

Teorema 5.3. *Si cada una de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ es diferenciable en un punto dado x, entonces la suma, la diferencia, el producto y el cociente de estas funciones (el cociente, observando la condición de*

*) Notemos que, hablando en general, el propio argumento x de la función $y = f(x)$ puede ser función de una variable.

**) Este acuerdo se verifica al considerar la variable independiente x como la función de tipo $y = x$, para la cual $dy = dx = \Delta x$.

que $v(x) \neq 0$) *son también diferenciables en este punto con tal que tienen lugar las fórmulas*

$$\begin{gathered}
[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x), \\
[u(x)\,v(x)]' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x), \\
\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.
\end{gathered} \tag{5.16}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos por separado los casos de la suma (diferencia), el producto y el cociente.

1°. Sea $y(x) = u(x) \pm v(x)$. Mediante los símbolos Δu, Δv y Δy denotemos los incrementos de las funciones $u(x)$, $v(x)$ e $y(x)$ en el punto dado x correspondientes al incremento del argumento Δx. Entonces, es obvio que

$$\begin{aligned}
\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) &= \\
&= [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = \\
&= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \\
&= \Delta u \pm \Delta v.
\end{aligned}$$

De este modo, si $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{5.17}$$

Sea que ahora $\Delta x \to 0$. Entonces, en virtud de la existencia de las derivadas de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ en el punto x existe el valor límite del miembro derecho de (5.17) que es igual a $u'(x) \pm v'(x)$. Por lo tanto, existe también el valor límite del miembro izquierdo de (5.17) (cuando $\Delta x \to 0$). Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a $y'(x)$. Llegamos a la igualdad exigida

$$y'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

2°. Luego, sea $y(x) = u(x)\,v(x)$. Manteniendo para Δu, Δv y Δy el mismo sentido que anteriormente, tendremos

$$\begin{aligned}
\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)\,v(x + \Delta x) &- \\
- u(x)\,v(x) = [u(x + \Delta x)\,v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)\,v(x)] &+ \\
+ [u(x + \Delta x)\,v(x) - u(x)\,v(x)]&
\end{aligned}$$

(hemos adicionado y restado el sumando $u(x + \Delta x)\,v(x)$). Luego, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\Delta y = u(x + \Delta x)\,[v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)\,[u(x + \Delta x) &- \\
- u(x)] = u(x + \Delta x)\,\Delta v + v(x)\,\Delta u&.
\end{aligned}$$

De este modo, si $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x)\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\,\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{5.18}$$

Sea que ahora $\Delta x \to 0$. Entonces, en virtud de la diferenciabilidad de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ en el punto x existen los valores límite de las razones $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ y $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ iguales a $u'(x)$ y $v'(x)$, respectivamente. Luego, en virtud del teorema 5.2, de la diferenciabilidad de $u(x)$ en el punto x se desprende la continuidad de $u(x)$ en este punto. Por tanto, existe el valor límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x)$, igual a $u(x)$. De este modo, para $\Delta x \to 0$ existe el valor límite del miembro derecho de (5.18), igual a $u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x)$. Por lo tanto, cuando $\Delta x \to 0$, existe también el valor límite del miembro izquierdo de (5.18). Por definición de la derivada dicho valor límite es igual a $y'(x)$. Llegamos a la fórmula exigida

$$y'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x).$$

3°. En fin, sea $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Entonces *),

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\ = \frac{u(x+\Delta x)\, v(x) - v(x+\Delta x)\, u(x)}{v(x)\, v(x+\Delta x)}.$$

Adicionando y restando en el numerador el sumando $u(x)\, v(x)$, tendremos:

$$\Delta y = \frac{[u(x+\Delta x)\, v(x) - u(x)\, v(x)] - [v(x+\Delta x)\, u(x) - u(x)\, v(x)]}{v(x)\, v(x+\Delta x)} = \\ = \frac{v(x)\,[u(x+\Delta x) - u(x)] - u(x)\,[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x)\, v(x+\Delta x)} = \\ = \frac{v(x)\,\Delta u - u(x)\,\Delta v}{v(x)\, v(x+\Delta x)}.$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\, v(x+\Delta x)}. \tag{5.19}$$

Sea que ahora $\Delta x \to 0$. En virtud de la diferenciabilidad (así como de la continuidad que se desprende de ella) de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ en el punto x, existen los valores límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) = v(x).$$

*) Puesto que a continuación en el denominador figura el valor $v(x + \Delta x)$, se debe demostrar que este valor es diferente de cero *para todos los Δx bastante pequeños*. En efecto, si no fuera así, se encontraría una *sucesión infinitesimal* de valores Δx_n tal que $v(x + \Delta x_n) = 0$. Pero, ya que la función $v(x)$ es continua para el valor del argumento x, entonces de la condición $v(x + \Delta x_n) = 0$ obtendríamos que $v(x) = 0$, lo que contradice la condición del teorema.

De este modo, puesto que $v(x) \neq 0$, existe, para $\Delta x \to 0$, el valor límite del miembro derecho de (5.19) igual a

$$\frac{v(x)\,u'(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}.$$

Por lo tanto, cuando $\Delta x \to 0$ existe también el valor límite del miembro izquierdo de (5.19). Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a $y'(x)$. Obtenemos la fórmula exigida

$$y'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}.$$

El teorema 5.3 queda completamente demostrado.

§ 4. Cálculo de las derivadas de la función potencial, de las funciones trigonométricas y de la función logarítmica

En este párrafo vamos a calcular las derivadas de las funciones elementales más simples.

1. Derivada de la función potencial con el exponente entero. Comencemos por calcular la derivada de la función potencial $y = x^n$ cuyo exponente n es número positivo *entero**). El caso de la función potencial cuyo exponente es *cualquier número real* (no es obligatoriamente entero) vamos a estudiar en el § 8.

Empleando la fórmula del binomio de Newton, podemos escribir

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$
$$= \left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n\right] - x^n =$$
$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}. \quad (5.20)$$

Ya que en el miembro derecho de (5.20) todos los sumandos, partiendo del segundo, comprenden, en calidad del factor, Δx en potencias positivas, entonces para $\Delta x \to 0$, existe el valor límite de los sumandos mencionados igual a cero. El primer sumando del miembro derecho de (5.20) no depende de Δx. Por lo tanto, existe (cuando $\Delta x \to 0$) el valor límite del miembro derecho de (5.20) que es igual a nx^{n-1}. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a la derivada de la función $y = x^n$, o sea,

$$(x^n) = nx^{n-1}.$$

*) En el cap. 1 ya hemos considerado esta derivada, empleando el concepto intuitivo del límite.

Los razonamientos realizados son válidos para cualquier punto x de la recta infinita.

2. Derivada de la función y sen x. Empleando la fórmula de reducir la diferencia de senos a la forma conveniente para determinar logaritmos, podemos escribir:

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}.$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}. \tag{5.21}$$

Ya que la función $y = \cos x$ es *continua* en cualquier punto x de la recta infinita*), entonces existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x. \tag{5.22}$$

Luego, en virtud del resultado principal del p. 2 del § 6 del cap. 4, existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1. \tag{5.23}$$

De este modo, para $\Delta x \to 0$ existe el valor límite del miembro derecho (5.21) igual al producto de los valores límite (5.22) y (5.23), es decir, igual a $\cos x$. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$, o sea,

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x.$$

Los razonamientos realizados son válidos para cualquier punto x de la recta infinita.

3. Derivada de la función $y = \cos x$. Empleando la fórmula de reducir la diferencia de cosenos a la forma conveniente para determinar logaritmos, podemos escribir:

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}.$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}. \tag{5.24}$$

---

*) Esto fue demostrado en el p. 6 del § 5 del cap. 4. Por otra parte, es fácil demostrar la continuidad de la función $y = \cos x$ empleando la *forma de diferencias* de la condición de continuidad.

Ya que la función $y = \operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto x de la recta infinita, entonces existe el valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \operatorname{sen} x. \tag{5.25}$$

De la existencia de los valores límite (5.23) y (5.25) se desprende la existencia del valor límite del miembro derecho de (5.24) igual a $(-\operatorname{sen} x)$ cuando $\Delta x \to 0$. Según la definición de la derivada, el último valor límite es igual a la derivada de la función $y = \cos x$, o sea,

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.$$

Los razonamientos realizados son válidos para cualquier punto x de la recta infinita.

4. Derivadas de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{ctg} x$. Ya que hemos calculado las derivadas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ y como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

entonces, para calcular las derivadas de las funciones $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{ctg} x$ se puede emplear el teorema 5.3 (con mayor precisión, la fórmula que expresa la derivada del cociente, o sea, la tercera fórmula de las (5.16)).

Resulta que en todos los puntos, excepto los que tienen $\cos x = 0$,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Así pues,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

(para todos los valores de x, excepto $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \ldots$). De manera análoga, en todos los puntos excepto los que tienen $\operatorname{sen} x = 0$,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} x)' \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Así pues,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$$

(para todos los valores x, excepto $x = \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \ldots$).

5. Derivada de la función $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$. Tomando, en calidad de x, cualquier punto de la semirrecta $x > 0$ y teniendo en cuenta que $|\Delta x| < x$, podemos escribir

$$\Delta y = \log_a (x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

De este modo, cuando $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right]. \qquad (5.26)$$

En virtud del resultado principal del p. 3 del § 6 del cap. 4, cuando $\Delta x \to 0$, la expresión entre corchetes tiene (para cualquier x fijado) el valor límite igual a e. Entonces, basándose en la continuidad de la función $y = \log_a x$, en el punto $x = e$ existe (cuando $\Delta x \to 0$) el valor límite del miembro derecho de (5.26) igual a $\frac{1}{x} \log_a e$. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a la derivada de la función $y = \log_a x$, o sea,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

(para todos los valores x pertenecientes a la semirrecta $x > 0$). En el caso particular de $a = e$ obtenemos

$$(\ln x)' = 1/x.$$

§ 5. Teorema de la derivada de la función inversa

***Teorema* 5.4.** *Sea que la función $y = f(x)$ crece (o decrece) y es continua en cierto entorno del punto x_0. Sea que, además, la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x_0 y la derivada $f'(x_0)$ es diferente de cero. Entonces, existe la función inversa $x = f^{-1}(y)$ que está definida en cierto entorno del punto correspondiente $y_0 = f(x_0)$, es diferenciable en este punto y tiene en él la derivada igual a $1/f'(x_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, observemos que para la función $y = f(x)$ en el entorno del punto x_0 se cumplen todas las condiciones del corolario del lema 1 en el § 4 del cap. 4. Conforme a este corolario, existe la función inversa $x = f^{-1}(y)$ definida en un entorno del punto $y_0 = f(x_0)$ y continua en este entorno. Demos al argumento y de la función inversa en el punto y_0 un incremento arbitrario Δy y *diferente de cero*. Le corresponde el incremento Δx de la función inversa con tal que, en virtud del crecimiento (o el decrecimiento) de la función, $\Delta x \neq 0$. De esta manera, tenemos derecho de escribir la siguiente identidad:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 \Big/ \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (5.27)$$

Sea que ahora en la identidad (5.27) $\Delta y \to 0$. Entonces, en virtud de la continuidad de la función inversa $x = f^{-1}(y)$ en el punto y_0 y conforme a la forma de diferencias de la condición de continuidad, se tiene también $\Delta x \to 0$.

Pero, cuando $\Delta x \to 0$, el denominador de la fracción en el miembro derecho de (5.27) tiene, por la definición de derivada, el valor límite igual a $f'(x) \neq 0$. Por lo tanto, si $\Delta y \to 0$, el miembro derecho de (5.27) tiene el valor límite igual a $\frac{1}{f'(x_0)}$. Pero entonces, el miembro izquierdo de (5.27) tiene también valor límite para $\Delta y \to 0$. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual*) a $\{f^{-1}(y_0)\}'$. De este modo, hemos demostrado la diferenciabilidad de la función inversa en el punto y_0 y para su derivada hemos obtenido la relación

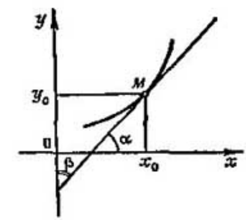

Fig. 5.4

$$\{f^{-1}(y_0)\}' = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (5.28)$$

El teorema 5.4 queda demostrado.

El teorema demostrado tiene el sentido geométrico sencillo. En el entorno del punto x_0 consideramos la gráfica de la función $y = f(x)$ (o de la función inversa). Supongamos que al punto x_0 le corresponde el punto M de esta gráfica (fig. 5.4). Entonces, obviamente, la derivada $f'(x_0)$ es igual a la tg del ángulo de inclinación α formado por la tangente, que pasa por el punto M, y el eje Ox. La derivada de la función inversa $\{f^{-1}(y_0)\}'$ es igual a la tg del ángulo de inclinación β formado por la misma tangente y el eje Oy. Puesto que la suma de los ángulos α y β es $\pi/2$, la fórmula (5.28) expresa el hecho evidente de que

$$\operatorname{tg} \beta = 1/\operatorname{tg} \alpha.$$

§ 6. Cálculo de las derivadas de la función exponencial y de las funciones trigonométricas inversas

En este párrafo, basándose en el teorema 5.4 demostrado anteriormente, continuaremos calculando las derivadas de las funciones elementales más simples.

1. Derivada de la función exponencial $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. La función exponencial $y = a^x$ es la función inversa de la logarít-

*) Mediante el símbolo $\{f^{-1}(y_0)\}'$ denotamos la derivada de la función inversa en el punto y_0.

mica $x = \log_a y$, definida sobre la semirrecta $y > 0$. Ya que para la función logarítmica, en el entorno de cualquier punto y de la semirrecta $y > 0$, se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, de acuerdo con este teorema, la función $y = a^x$ es diferenciable en cualquier punto $x = \log_a y$, y para su derivada es válida la fórmula

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{1/y \log_a e} = \frac{y}{\log_a e}.$$

Empleando esta fórmula y la relación conocida del curso elemental $\log_a b = 1/\log_b a$ y teniendo en cuenta que $y = a^x$, obtenemos definitivamente

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

La fórmula obtenida es válida para todos los puntos x de la recta infinita. En el caso particular de $a = e$ esta fórmula toma la forma

$$(e^x)' = e^x.$$

2. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas. Comencemos calculando la derivada de la función $y = \operatorname{arcsen} x$. Siendo definida sobre el intervalo $-1 < x < +1$, esta función es la inversa de la función $x = \operatorname{sen} y$ definida sobre el intervalo $-\pi/2 < y < +\pi/2$. Ya que para la función $x = \operatorname{sen} y$, en el entorno de cualquier punto y del intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$, se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, según este teorema, la función $y = \operatorname{arcsen} x$ es diferenciable en cualquier punto $x = \operatorname{sen} y$, y para su derivada es válida la fórmula

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}}. \tag{5.29}$$

Hemos puesto el signo $+$ delante de la raíz porque $\cos y$ es positivo en todo el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} y = x$, de la fórmula (5.29) obtenemos definitivamente

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Como ya hemos notado en el proceso de la deducción, la fórmula obtenida es válida para todos los x del intervalo $-1 < x < +1$. De la manera análoga se calcula la derivada de la función $y = \arccos x$. Esta función, siendo definida sobre el intervalo $-1 < x < +1$, es la inversa de la función $x = \cos y$ definida sobre el intervalo $0 < y < \pi$. Puesto que para la función $x = \cos y$, en el entorno de cualquier punto y del intervalo $0 < y < \pi$, se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, según este teorema, la función $y = \arccos x$ es diferenciable en cualquier punto $x =$

$= \cos y$, y para su derivada es válida la fórmula

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}. \qquad (5.30)$$

Hemos tomado en consideración que $\operatorname{sen} y = +\sqrt{1-\cos^2 y}$, ya que $\operatorname{sen} y > 0$ en todo el intervalo $0 < y < \pi$. Teniendo en cuenta que $\cos y = x$, de la fórmula (5.30) obtenemos definitivamente

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Como ya hemos notado en el proceso de la deducción, la fórmula obtenida es válida para todos los valores x del intervalo $-1 < x < < 1$.

Pasamos a calcular la derivada de la función $y = \operatorname{arctg} x$. Siendo definida sobre toda la recta infinita $-\infty < x < +\infty$, dicha función es la función inversa de la $x = \operatorname{tg} y$, definida sobre el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$. Ya que para la función $x = \operatorname{tg} y$ en el entorno de cualquier punto y del intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$ se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, según este teorema, la función $y = \operatorname{arctg} x$ es diferenciable en cualquier punto $x = \operatorname{tg} y$ y para su derivada es válida la fórmula

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}.$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} y = x$, obtenemos definitivamente

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

La fórmula obtenida es válida para todos los puntos x de la recta infinita.

Queda por calcular la derivada de la función $y = \operatorname{arcctg} x$. Siendo definida sobre la recta infinita $-\infty < x < +\infty$, esta función es la función inversa de la $x = \operatorname{ctg} y$, definida sobre el intervalo $0 < < y < \pi$. Ya que para la función $x = \operatorname{ctg} y$ en el entorno de cualquier punto y del intervalo $0 < y < \pi$ se cumplen todas las condiciones del teorema 5.4, entonces, según este teorema, la función $y = \operatorname{arcctg} x$ es diferenciable en cualquier punto $x = \operatorname{ctg} y$ y para su derivada es válida la fórmula

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}.$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{ctg} y = x$, obtenemos definitivamente

$$(\operatorname{arccrg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Esta fórmula es válida para todos los puntos x de la recta infinita.

De este modo, hemos calculado las derivadas de todas las funciones elementales más simples, excepto la función potencial de cualquier exponente real.

Calculamos la derivada de la última función en el § 8 y ahora argumentemos las reglas de diferenciación de la función compuesta.

§ 7. Regla de diferenciación de la función compuesta

En el presente párrafo planteamos el objetivo de establecer la regla que permite hallar la derivada de la función $y = f[\varphi(t)]$ si se conocen las derivadas de las funciones que la integran $y = f(x)$ y $x = \varphi(t)$.

Teorema 5.5. *Sea que la función $x = \varphi(t)$ es diferenciable en un punto t_0 y la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto correspondiente $x_0 = \varphi(t_0)$. Entonces, la función compuesta $f[\varphi(t)]$ es diferenciable en dicho punto t_0 con tal que para la derivada de esta función es válida la siguiente fórmula*)*:

$$\{f[\varphi(t_0)]\}' = f'(x_0)\,\varphi'(t_0). \tag{5.31}$$

DEMOSTRACION. Demos al argumento t, en el punto t_0, un incremento arbitrario Δt *diferente de cero*. Le corresponde un incremento Δx de la función $x = \varphi(t)$. A su vez, al incremento Δx le corresponde el incremento Δy de la función $y = f(x)$ en el punto x_0. Ya que se supone que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x_0, el incremento de esta función en el punto x_0 puede escribirse en la forma (véase el § 2)

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \tag{5.32}$$

donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Al dividir la igualdad (5.32) por Δt, tendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{5.33}$$

Sea ahora que en la igualdad (5.33) $\Delta t \to 0$. Ya que de la diferenciabilidad de la función $x = \varphi(t)$ en el punto t_0 se desprende su continuidad en este punto, entonces, en virtud de la forma de diferencias de la condición de continuidad, $\Delta x \to 0$ (para $\Delta t \to 0$). Por eso se puede afirmar que existe valor límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha = 0. \tag{5.34}$$

*) Mediante $\{f[\varphi(t_0)]\}'$ denotamos la derivada de la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$ en el punto $t = t_0$.

Además, conforme a la exigencia de la diferenciabilidad de la función $x = \varphi(t)$ en el punto t_0, existe el valor límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0). \tag{5.35}$$

La existencia de los valores límite (5.34) y (5.35) asegura la existencia del valor límite del miembro derecho de (5.33), igual a $f'(x_0) \times \times \varphi'(t_0)$ cuando $\Delta t \to 0$. Por lo tanto, existe también el valor límite del miembro izquierdo de (5.33) para $\Delta t \to 0$. Según la definición de la derivada, dicho valor límite es igual a la derivada de la función compuesta $f[\varphi(t)]$ en el punto t_0. Por tanto, hemos demostrado la diferenciabilidad de la función compuesta en el punto t_0 y la fórmula (5.31).

El teorema 5.5 queda demostrado.

OBSERVACION. Consideramos la función compuesta $y = f(x)$, donde $x = \varphi(t)$, es decir, tomamos x como el argumento intermedio y t, como el argumento final. Por supuesto, se puede cambiar estas denotaciones. Frecuentemente, es más conveniente considerar la función compuesta de tipo $y = f(u)$, donde $u = \varphi(x)$, o sea, tomar x como el argumento final y una variable u, como el intermedio. Para esta función la fórmula de diferenciación (5.31) toma la forma

$$y' = \{f[\varphi(x)]\}' = f'(u)\,\varphi'(x) \tag{5.36}$$

(para los valores correspondientes de los argumentos x y u hemos omitido los ceros que son de carácter auxiliar).

Daremos ejemplos para emplear la regla de diferenciación de la función compuesta que acabamos de demostrar.

1°. Calcúlese la derivada de la función $y = e$ arctg x. Consideraremos esta función como la compuesta de tipo $y = e^u$, cuando $u = \operatorname{arctg} x$. Empleando la fórmula (5.36), obtenemos

$$y' = (e^u)'(\operatorname{arctg} x)' = e^u \frac{1}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}.$$

2°. Calcúlese la derivada de la función $y = 2^{x^2}$. Consideraremos esta función como la compuesta de tipo $y = 2^u$, donde $u = x^2$. Empleando la fórmula (5.36), obtenemos

$$y' = (2^u)'(x^2)' = (2^u \ln 2)\, 2x = 2^{x^2+1} x \ln 2.$$

3°. Considerando los dos ejemplos mencionados, escribimos por separado las funciones que integran la función compuesta. Naturalmente, no es necesario hacerlo. En la práctica la diferenciación de la función compuesta se hace inmediatamente sin separarla en las funciones integrantes. Por ejemplo,

$$y = \operatorname{arcsen} 75x; \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-(75x)^2}}(75x)' = \frac{75}{\sqrt{1-(75x)^2}} \text{ (aquí } |x| < 1/75).$$

4°. El teorema 5.5 y la regla contenida en él puede transferirse consecuentemente para el caso de la función compuesta que es la superposición de tres y más funciones.

Consideremos un ejemplo de tal función. Sea que se exige calcular la derivada de la función $y = 5^{\operatorname{arcctg}(x^8)}$. Aplicando sucesivamente la regla de diferenciación de la función, obtenemos

$$y = (5^{\operatorname{arcctg}(x^8)} \ln 5) \frac{(-1)}{1+x^{16}} 8x^7.$$

§ 8. Derivada logarítmica. Derivada de una función potencial con cualquier exponente real. Tabla de derivadas de las funciones elementales más simples

1. Concepto de derivada logarítmica de una función. Sea que una función $y = f(x)$ es *positiva* y diferenciable en un punto dado x. Entonces, en este punto existe $\ln y = \ln f(x)$. Considerando $\ln f(x)$ como la función compuesta del argumento x, podemos calcular la derivada de esta función en el punto dado x, tomando $y = f(x)$ por el argumento intermedio. Obtenemos

$$[\ln f(x)]' = y'/y. \tag{5.37}$$

La magnitud definida por la fórmula (5.37) se denomina *derivada logarítmica* de la función $y = f(x)$ en el punto dado x. A título de ejemplo, calculemos la derivada logarítmica de la llamada función potencial-exponencial $y = u(x)^{v(x)}$. Del p. 2 del § 7 cap. 4, sabemos que esta función está definida y es continua para todos los valores x, para los cuales $u(x)$ y $v(x)$ son continuas y $u(x) > 0$. Ahora planteamos adicionalmente que $u(x)$ y $v(x)$ sean diferenciables para los valores considerados x. Entonces, ya que $\ln y = v(x) \ln u(x)$, obtenemos que la derivada logarítmica de la función considerada es igual a

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}. \tag{5.38}$$

De la igualdad (5.38), teniendo en cuenta que $y = u(x)^{v(x)}$, obtenemos la siguiente fórmula para la derivada de la función potencial-exponencial:

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

2. Derivada de una función potencial de cualquier exponente real. Ahora vamos a calcular la derivada de la función potencial $y = x^\alpha$ de exponente real arbitrario α. Calculamos la derivada de esta función para los valores x, para los cuales la función está definida para cualquier α, a saber, para los valores x pertenecientes a la semirrecta*) $x > 0$. Teniendo en cuenta que en toda la semirrecta $x > 0$ la función $y = x^\alpha$ es *positiva*, calculemos la derivada logarítmica de esta función. Puesto que $\ln y = \alpha \ln x$, la derivada logarítmica es igual a

$$\frac{y'}{y} = [\alpha \ln x]' = \frac{\alpha}{x}.$$

De aquí, tomando en consideración que $y = x^\alpha$, obtenemos la fórmula para una función potencial arbitraria

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

De este modo, hemos calculado las derivadas de todas las funciones elementales más simples. Agrupando todas las derivadas calculadas, obtenemos la siguiente tabla que ya hemos reproducido en el cap. 1.

3. Tabla de las derivadas de las funciones elementales más simples.

1°. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. En particular, $(1/x)' = -1/x^2$, $(\sqrt{x})' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

2°. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \ (x > 0,\ 0 < a = 1)$.

En particular, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3°. $(a^x)' = a^x \ln a \ (0 < a \neq 1)$. En particular, $(e^x)' = e^x$.

4°. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

5°. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\right.$ donde $n = 0, \left.\pm 1, \ldots\right)$.

7°. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \ (x \neq \pi n,$ donde $n = 0, \pm 1, \ldots)$.

8°. $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1)$.

9°. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1)$.

10°. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

11°. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

---

*) En el caso de $\alpha = 1/m$, donde m es número impar entero, la función $y = x^\alpha$ está definida *sobre toda la recta infinita*. Sin embargo, en este caso es también suficiente calcular la derivada de la función mencionada solamente para los valores $x > 0$, puesto que dicha función es *impar* y haciendo este razonamiento es fácil obtener su derivada para los valores $x < 0$.

En el § 4 del cap. 4 hemos introducido las funciones hiperbólicas $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ e $y = \operatorname{cth} x$ que son combinaciones simples de funciones exponenciales. De la definición de estas funciones se desprenden fácilmente las siguientes expresiones para sus derivadas:

12°. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

13°. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

14°. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

15°. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$.

Las reglas de diferenciación de la suma, la diferencia, el producto y el cociente (es decir, con las fórmulas (5.16)) la regla de diferenciación de la función compuesta y la tabla mencionada son la base del cálculo diferencial.

Las reglas establecidas y las fórmulas de diferenciación permiten hacer una deducción importante.

En el § 7 del cap. 4 hemos introducido el concepto de la *función elemental* como una función que se representa por las funciones elementales más simples haciendo las cuatro operaciones aritméticas y las superposiciones aplicadas sucesivamente un número finito de veces. Ahora podemos afirmar que la *derivada de cualquier función elemental es también función elemental*. De este modo, *la operación de diferenciación no nos deja salir de la clase de las funciones elementales.*

§ 9. Invariación de la forma de la primera diferencial. Algunas aplicaciones de la diferencial

1. Invariación de la forma de la primera diferencial. En la parte final del § 2 hemos establecido que para el caso cuando el argumento x es *variable independiente*, la diferencial de la función $y = f(x)$ se determina por la fórmula

$$dy = f'(x)\, dx. \tag{5.39}$$

En este punto demostremos que la fórmula (5.39) es universal y válida no sólo en el caso cuando el argumento x es variable independiente sino también cuando el mismo argumento x es función diferenciable de una nueva variable t. La propiedad mencionada de la diferencial de la función suele llamarse *invariación de su forma.*

Así pues, sea dada una función $y = f(x)$ diferenciable en un punto x cuyo argumento x es función diferenciable $x = \varphi(t)$ del argumento t. En este caso, podemos considerar *y como la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$* del argumento t y x, como el argumento intermedio. En virtud del teorema 5.5 la derivada de y respecto a t se determina por la fórmula

$$y' = f'(x)\, \varphi'(t). \tag{5.40}$$

Puesto que la variable t puede considerarse como *independiente*, las derivadas de las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = f[\varphi(t)]$ respecto al argumento t son iguales a las razones de las diferenciales de estas funciones y dt (según lo establecido al final del § 2), o sea,

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt},\ y' = \{f[\varphi(t)]\}' = \frac{dy}{dt}.$$

Poniendo estos valores de las derivadas en la fórmula (5.40), le daremos la forma de

$$\frac{dy}{dt} = f'(x)\,\frac{dx}{dt}. \tag{5.41}$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad (5.41) por dt, para dy obtenemos la expresión (5.39). Por tanto, queda demostrada la invariación de la forma de la primera diferencial de la función, es decir, queda demostrado que, *tanto en el caso cuando el argumento x es variable independiente, como en el caso cuando el propio x es función diferenciable de otra variable, la diferencial dy de la función $y = f(x)$ es igual a la derivada de esta función multiplicada por la diferencial del argumento dx.*

En otras palabras, la propiedad de la invariación de la diferencial puede enunciarse del modo siguiente: *la derivada de la función $y = f(x)$ es siempre*) igual a la razón de la diferencial de esta función dy y la diferencial del argumento dx, o sea,*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{5.42}$$

La igualdad demostrada (5.42) nos permite emplear a continuación la razón dy/dx para designar la derivada de la función $y = f(x)$ respecto al argumento x.

Para concluir, observemos que después de haber demostrado la igualdad (5.42), la regla de diferenciación de la función compuesta toma la forma de la identidad simple:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}. \tag{5.43}$$

La forma sencilla adquiere también la regla de diferenciación de la función inversa:

$$\frac{dy}{dx} = 1\Big/\frac{dx}{dy}. \tag{5.44}$$

Sin embargo, subrayemos que las igualdades (5.43) y (5.44) no pueden considerarse como nuevos métodos para demostrar los teoremas 5.5

*) Es decir, tanto en el caso cuando el argumento x es variable independiente como en el caso cuando el propio x es función diferenciable de alguna otra variable.

y 5.4, puesto que en las fórmulas (5.43) y (5.44) se emplea esencialmente la invariación de la primera diferencial que fue establecida precisamente valiéndose del teorema 5.5.

2. Fórmulas y reglas de cálculo de las diferenciales. Hemos demostrado que la diferencial dy de la función $y = f(x)$ es siempre igual a la derivada de esta función $f'(x)$ multiplicada por la diferencial del argumento dx. De este modo, la tabla de las derivadas del p. 3 del § 8 nos permite confeccionar la correspondiente tabla de las diferenciales:

1°. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,dx$. En particular, $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$, $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

2°. $d(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}\,dx \quad (x > 0,\ 0 < a \neq 1)$.

En particular, $d(\ln x) = dx/x$.

3°. $d(a^x) = a^x \ln a\,dx\ (0 < a + 1)$. En particular, $d(e^x) = e^x\,dx$.

4°. $d(\operatorname{sen} x) = \cos x\,dx$.

5°. $d(\cos x) = -\operatorname{sen} x\,dx$.

6°. $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx\ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \text{donde } n = 0, \pm 1, \ldots\right)$.

7°. $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx\ (x \neq \pi n,\ \text{donde } n = 0, \pm 1, \ldots)$.

8°. $d(\operatorname{arcsen} x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1)$.

9°. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1)$.

10°. $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$.

11°. $d(\operatorname{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Valiéndose de las fórmulas (5.16) y de la relación (5.39) se deducen directamente las siguientes reglas para calcular la diferencial de la suma, la diferencia, el producto y el cociente:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,\ d(uv) = v\,du + u\,dv,\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

3. Empleo de la diferencial para deducir fórmulas aproximadas. Aunque, como hemos visto en el § 2, la diferencial dy de la función $y = f(x)$ no es igual al incremento Δy de esta función, pero, con exactitud de hasta una infinitesimal de orden superior que Δx, es válida la igualdad aproximada

$$\Delta y \approx dy. \tag{5.45}$$

El error relativo*) de esta igualdad se hace cualquier pequeño que sea para Δx bastante pequeño. La fórmula (5.45) permite sustituir aproximadamente el incremento Δy de la función $y = f(x)$ por su diferencial dy. La ventaja de esta sustitución consiste en que la diferencial dy depende linealmente de Δx mientras, hablando en general, el incremento Δy es función más compleja de Δx.

Teniendo en cuenta que el incremento de la función Δy se determina por la fórmula (5.1) y la diferencial dy, por la fórmula (5.14), daremos a la igualdad aproximada (5.45) la forma siguiente:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x$$

ó

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{5.46}$$

Según la fórmula (5.46), para los valores del argumento próximos a x (o sea, para Δx pequeños) la función f se sustituye aproximadamente por una función lineal.

En particular, de la fórmula (5.46) se puede obtener una serie de fórmulas aproximadas ya conocidas (véase el § 4). Así, poniendo $f(x) = (1 + x)^{1/n}$, $x = 0$, obtenemos que

$$(1 + \Delta x)^{1/n} \approx 1 + \Delta x/n. \tag{5.47}$$

Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x = 0$, obtenemos

$$\operatorname{sen} \Delta x \approx \Delta x. \tag{5.48}$$

Haciendo $f(x) = e^x$, $x = 0$, obtenemos

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x. \tag{5.49}$$

Tomando $f(x) = \ln(1 + x)$, $x = 0$, obtenemos

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x. \tag{5.50}$$

Cada una de las igualdades (5.47)—(5.50) es válida con exactitud de hasta una infinitesimal de orden superior que Δx.

Las igualdades (5.47)—(5.50) en la forma de estimaciones exactas ya fueron establecidas en la parte final del § 7 del cap. 4.

---

*) El error relativo de la igualdad (5.45) se determina por la razón $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$. Notemos que, según la definición de la diferencial, $\Delta y - dy = O(\Delta x)$.

§ 10. Derivadas y diferenciales de órdenes superiores

1. Concepto de derivada de n-ésimo orden. Como hemos notado en el p. 2 del § 1, la derivada $f'(x)$ de la función $y = f(x)$, definida y diferenciable sobre el intervalo (a, b), es *también función definida sobre el intervalo* (a, b). Puede ocurrir que la propia función $f'(x)$ es diferenciable en cierto punto del intervalo (a, b), o sea, tiene derivada en este punto. Entonces, la derivada mencionada se denomina *segunda derivada* (o derivada de segundo orden) de la función $y = f(x)$ en el punto x y se denota por el símbolo $f^{(2)}(x)$ ó $y^{(2)}(x)$*).

Después de haber introducido el concepto de segunda derivada se puede introducir sucesivamente el concepto de tercera derivada, luego, de cuarta derivada, etc. Si suponemos que ya hemos introducido el concepto de $(n-1)$-ésima derivada y que esta última es diferenciable en cierto punto x del intervalo (a, b), o sea, tiene derivada en este punto, entonces, la derivada mencionada se denomina *n-ésima derivada* (o *derivada de n-ésimo orden*) de la función $y = f(x)$ en el punto x y se denota por el símbolo $f^{(n)}(x)$ ó $y^{(n)}(x)$.

De este modo, introducimos el concepto de n-ésima derivada por inducción, pasando de la primera derivada a las sucesivas. La relación que determina la n-ésima derivada tiene la forma

$$y^{n} = [y^{n-1}]'. \qquad (5.51)$$

La función que sobre el conjunto dado $\{x\}$ tiene derivada finita de orden n suele llamarse n veces diferenciable sobre este conjunto. En la física, el concepto de las derivadas de órdenes superiores se aplica en muchos casos. Aquí nos limitemos a señalar el sentido mecánico de la segunda derivada. Si la función $y = f(x)$ describe la ley del movimiento del punto material por la línea recta, entonces, como ya lo sabemos, la primera derivada $f'(x)$ es la velocidad instantánea del punto móvil en el momento del tiempo x. En este caso, la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ es igual a la *velocidad de variación de velocidad*, o sea, es igual a la *aceleración* del punto móvil en el momento de tiempo x.

Observemos que los métodos de calcular derivadas de órdenes superiores presuponen los hábitos para calcular *solamente derivadas de primer orden*. Como ejemplo calculemos las derivadas de n-ésima orden de algunas funciones elementales más simples.

2. n-ésimas derivadas de algunas funciones. 1°. Calculemos la n-ésima derivada de la función potencial $y = x^{\alpha}$ ($x > 0$, α es cualquier número real). Diferenciando sucesivamente, tendremos

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2},$$
$$y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,x^{\alpha-3},\ \ldots$$

---

*) La segunda derivada de la función $y = f(x)$ se denota también por el símbolo $f''(x)$ o $y''(x)$.

De aquí, es fácil entender la ley general

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}.$$

La demostración estricta de esta ley se realiza fácilmente por el método de inducción.

En caso particular, $\alpha = m$, donde m es número natural, obtenemos

$$(x^m)^{(m)} = m!, \quad (x^m)^{(n)} = 0, \text{ si } n > m.$$

De este modo, la n-ésima derivada del polinomio de orden m es igual a cero cuando $n > m$*).

2°. Luego, calculemos la n-ésima derivada de la función exponencial $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. Diferenciando sucesivamente, tendremos

$$y' = a^x \ln a,\ y^{(2)} = a^x \ln^2 a,\ y^{(3)} = a^x \ln^3 a,\ \ldots$$

La fórmula general que se establece fácilmente por el método de inducción, tiene la forma

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

En particular,

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

3°. Calculemos la n-ésima derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$. La primera derivada de esta función puede escribirse en la forma $y' = \cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$. De este modo, la *diferenciación de la función* $y = \operatorname{sen} x$ *suma al argumento de esta función el valor* $\pi/2$. De aquí obtenemos la fórmula

$$(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}(x + n\pi/2).$$

4°. De manera completamente análoga se deduce la fórmula

$$(\cos x)^{m} = \cos(x + n\pi/2).$$

5°. Para concluir, calculemos la n-ésima derivada de la llamada *función lineal fraccional* $y = ax + b/cx + d$, donde a, b, e y d son ciertas constantes. Diferenciando sucesivamente esta función, tendremos

$$y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = (ad - bc)(cx+d)^{-2},$$

$$y^{(2)} = (ad - bc)(-2)(cx+d)^{-3}c,$$

$$y^{(3)} = (ad - bc)(-2)(-3)(cx+d)^{4}c^2,\ \ldots$$

*) Al mismo tiempo, empleamos también la siguiente fórmula evidente $[Au(x) + Bv(x)]^{(n)} = Au^{(n)}(x) + Bv^{(n)}(x)$, donde A y B son constantes.

Es también fácil establecer la ley general

$$y^{(n)}=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)}=(ad-bc)(-1)^{n-1}\,n!\,(cx+d)^{-(n+1)}\,c^{n-1}$$

que puede argumentarse por el método de inducción.

3. Fórmula de Leibniz para la n-ésima derivada del producto de dos funciones. Mientras la regla establecida anteriormente para calcular la primera derivada de la suma o la diferencia de dos funciones $(u\pm v)'=u'\pm v'$ se transfiere fácilmente (por ejemplo, por el método de inducción) al caso de la n-ésima derivada $(u\pm v)^{(n)}=$ $=u^{(n)}\pm v^{(n)}$, surgen grandes dificultades para calcular la n-ésima derivada del producto de dos funciones uv.

La regla correspondiente se llama *fórmula de Leibniz* y tiene la forma siguiente:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n u^{n-1}v'+C_n^2u^{(n-2)}v^{(2)}+ \\ +C_n^3u^{(n-3)}v^{(3)}+\ldots+uv^{(n)}. \quad (5.52)$$

Es fácil darse cuenta de la ley según la cual se construye el miembro derecho de la fórmula de Leibniz (5.52): *éste coincide con la fórmula del desarrollo del binomio $(u+v)^n$ con la particularidad de que en vez de las potencias de u y v se ponen las derivadas de órdenes correspondientes.* Se hacen más parecidos si en lugar de las propias funciones u y v se escriben respectivamente $u^{(0)}$ y $v^{(0)}$ (o sea, si la propia función se considera como la derivada de orden nulo).

Demostremos la fórmula de Leibniz por el método de inducción. Si $n=1$, la fórmula toma la forma $(uv)'=u'v+uv'$, lo que coincide con la regla de diferenciación del producto de dos funciones establecida anteriormente (en el § 3). Por eso, al suponer la validez de la fórmula (5.52) para cierto número n, basta demostrar su validez para el número siguiente $n+1$. Así pues, sea que para un número n la fórmula (5.52) es válida. Diferenciemos esta fórmula y unamos los sumandos situados en el miembro derecho de tal modo como se da a continuación:

$$(uv)^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+[C_n^0u^{(n)}v'+C_n^1u^{(n)}v']+ \\ +[C_n^1u^{(n-1)}v^{(2)}+C_n^2u^{(n-1)}v^{(2)}]+ \\ +[C_n^2u^{(n-2)}v^{(3)}+C_n^3u^{(n-2)}v^{(3)}]+\ldots+uv^{(n+1)}. \quad (5.53)$$

(Hemos empleado el hecho de que $1=C_n^0$.) De las matemáticas elementales sabemos que para cualquier número k no superior a n es válida la fórmula*)

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k.$$

*) Además, la fórmula se verifica elementalmente.

Empleando esta fórmula, podemos escribir la igualdad (5.53) del modo siguiente:

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + C_{n+1}^{1}u^{(n)}v' + C_{n+1}^{2}u^{(n-1)}v^{(2)} + \ldots uv^{(n+1)}.$$

Por lo tanto queda demostrada la validez de la fórmula (5.52) para el número $(n + 1)$. La deducción de la fórmula de Leibniz ha terminado.

EJEMPLO 1. Calculemos la n-ésima derivada de la función $y = x^2 \cos x$. Empleemos la fórmula de Leibniz, poniendo $u = \cos x$, $v = x^2$. En este caso, para cualquier número k, $u^{(k)} = \cos (x + k\pi/2)$, $v' = 2x$, $v^{(2)} = 2$, $v^{(3)} = v^{(4)} = \ldots = 0$. Obtenemos

$$y^n = x^2 \cos (x + n\pi/2) + 2nx \cos [x + (n - 1)\pi/2] + n(n - 1) \cos [x + (n - 2)\pi/2].$$

EJEMPLO 2. Calculemos la n-ésima derivada de la función $y = x^3 e^x$. Empleemos la fórmula de Leibniz, poniendo $u = e^x$, $v = x^3$. Entonces, para cualquier número k, $u^{(k)} = e^x$, $v' = 3x^2$, $v^{(2)} = 6x$, $v^{3} = 6$, $v^{(4)} = v^{(5)} = \ldots = 0$. Obtenemos

$$y^n = (x^3 + 3nx^2 + 3n(n - 1)x + n(n - 1)(n - 2))e^x.$$

Los ejemplos considerados muestran que la fórmula de Leibniz es especialmente eficaz en el caso cuando una de las dos funciones multiplicadas tiene *solamente un número finito de derivadas diferentes de cero.*

4. Diferenciales de órdenes superiores. En los razonamientos del presente punto empleamos el símbolo δ a la par con el símbolo d para designar la diferencial (es decir, escribiremos los símbolos δx y δy en vez de dx y dy donde es conveniente).

Supongamos que la función $y = f(x)$ es diferenciable en cierto entorno del punto x_0. Entonces, la primera diferencial dy de esta función tiene la forma*) $dy = f'(x)\,dx$ y es función de dos variables: del punto x y de la magnitud dx.

Supongamos adicionalmente que la función $f'(x)$ es también diferenciable en el punto x_0 y que la magnitud dx tiene un mismo valor fijado para todos los puntos x en el entorno considerado del punto x_0.

Haciendo estas suposiciones existe la diferencial de la función $dy = f'(x)\,dx$ en el punto x_0 que se denotará por el símbolo $\delta(dy)$ con tal que la última diferencial se determina por la fórmula

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)\,dx]|_{x=x_0} = [f'(x)\,dx]'|_{x=x_0} = \delta x = f''(x_0)\,dx\,\delta x. \quad (5.54)$$

Definición. *El valor $\delta(dy)$ de la diferencial de la primera diferencial dy tomando para $\delta x = dx$ se denomina* ***segunda diferencial*** *de la función $y = f(x)$ (en el punto x_0) y se denota por el símbolo $d^2 y$.*

*) Véase el p. 1 del § 9, la fórmula (5.39).

De la fórmula (5.54) y de la definición de la segunda diferencial se desprende que

$$d^2y = f''(x_0)(dx)^2. \tag{5.55}$$

Observemos que como consideramos fijada la magnitud dx, de la definición de la segunda diferencial se desprende directamente que la segunda diferencial de la variable independiente d^2x es igual a cero.

De manera completamente análoga, se defínen sucesivamente las diferenciales de órdenes superiores. Suponiendo que la derivada de orden $(n-1)$ de la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x_0 (es decir, suponiendo que la función $y = f(x)$ tiene derivada de orden n en el punto x_0) definemos la *diferencial de n-ésimo orden* $d^n y$ de la función $y = f(x)$ (en el punto x_0) como la diferencial $\delta(d^{n-1}y)$ de la diferencial de $(n-1)$-ésimo orden $d^{n-1}y$ tomada para $\delta x = dx$.

Para la diferencial de n-ésimo orden $d^n y$, por el método de inducción se establece fácilmente la fórmula

$$d^ny = f^{(n)}(x_0)(dx)^n. \tag{5.56}$$

En efecto, para $n = 1$ y $n = 2$, la fórmula (5.56) es válida. Supongamos que es también válida para un número $(n-1)$, o sea, supongamos que $d^{n-1}y = f^{n-1}(x)(dx)^{n-1}$.

Entonces, según la definición de d^n, obtenemos*)

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x=dx} = \delta[f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}]|_{\delta x=dx} =$$
$$= f^{(n)}(x)(dx)^{n-1}\delta x|_{\delta x=dx} = f^{(n)}(x)(dx)^n,$$

es decir, la validez de la fórmula (5.56) queda establecida.

De la fórmula (5.58) se desprende la siguiente expresión para la derivada de orden n:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{(dx)^n}. \tag{5.56'}$$

Es muy importante notar que, para $n > 1$, las fórmulas (5.56) y (5.56′) son válidas, hablando en general, si, y sólo si, x es *variable independiente* (es decir, la segunda y las siguientes diferenciales no poseen la propiedad de invariación de la forma).

Para cerciorarse de esto, consideremos el cálculo de la segunda diferencial de una función (dos veces diferenciable) $y = f(x)$, suponiendo que la variable x es función dos veces diferenciable de un argumento t. Empleando la igualdad (5.39) y la fórmula $\delta(uv) =$

*) Omitimos el índice 0 del punto x.

$= v\delta u + u\delta v$, obtenemos:

$$d^2y = \delta(dy)|_{\delta x = dx} = \delta[f'(x)\,dx]|_{\delta x = dx} =$$
$$= \{dx\,\delta[f'(x)] + f'(x)\,\delta(dx)\}|_{\delta x = dx} = [dx \cdot f''(x)\,\delta x]|_{\delta x = dx} + f'(x)\,d^2x.$$

Así pues, $d^2y = f''(x)\,(dx)^2 + f'(x)\,d^2x$.

La última fórmula se diferencia de (5.55) en el término adicional $f'(x)\,d^2x$ que, hablando en general, no es igual a cero.

§ 11. Diferenciación de una función dada en forma paramétrica

En este párrafo examinemos los métodos para calcular las derivadas de las funciones dadas en forma paramétrica.

Sean x e y dadas como funciones de un parámetro t: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Además, suponemos que las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen número necesario de derivadas respecto a la variable t en el campo considerado de variación de esta variable. Suponemos también que en el entorno del punto considerado la función $x = \varphi(t)$ tiene la función inversa $t = \varphi^{-1}(x)$*). La última suposición da la posibilidad de considerar y como la función del argumento x.

Planteemos el problema de calcular las derivadas de y respecto al argumento x. Nos ponemos de acuerdo denotar estas derivadas por los símbolos

$$x'_x,\ y^{(2)}_{x^2},\ y^{(3)}_{x^3},\ \ldots$$

En virtud de la propiedad de invariación de la primera diferencial podemos escribir**)

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad dy = \psi'(t)\,dt, \quad dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{5.57}$$

De estas fórmulas obtenemos la siguiente expresión para la primera derivada:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{5.58}$$

De manera análoga se calculan las derivadas de órdenes superiores. Así, para calcular la segunda derivada $y^{(2)}x^2$ es suficiente representarla en la forma

$$y^{(2)}_{x^2} = \frac{d\,(y'_x)}{dx}$$

---

*) Eso se garantiza por la existencia de la primera derivada $\varphi'(t)$ diferente de cero en un entorno del punto considerado t (véase el p. 4 del § 2 del cap. 6, tomo 2).

**) En este caso tomamos dy y dx en un mismo punto t para un mismo dt.

y emplear la fórmula (5.58), la tercera fórmula de (5.57) y la regla de diferenciación del cociente.

EJEMPLO. Calcúlese la primera y la segunda derivadas de la función dada paramétricamente:

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t), \quad -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

La curva determinada por estas ecuaciones se denomina *cicloide**).

Obtenemos

$$y'_x = \frac{a \operatorname{sen} t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \ (t \neq 2\pi k, \text{ donde } k \text{ es entero}),$$

$$y^{(2)}_{x^2} = \frac{[\operatorname{ctg} t/2]'}{a(1-\cos t)} = \frac{-1}{4a \operatorname{sen}^4 t/2}.$$

*) La cicloide es la trayectoria de un punto fijo de la circunferencia que rueda sin deslizar por la línea recta.

Capítulo 6

INTEGRAL INDEFINIDA

En este capítulo consideremos el problema de cómo se reconstruye la función por su derivada conocida. La importancia de este problema fue analizada en el cap. 1.

§ 1. Concepto de función primitiva e integral indefinida

1. Concepto de función primitiva. Entre importantes problemas de la mecánica figuran dos problemas, en el primero de los cuales se determina la ley del movimiento del punto material por su velocidad dada, y en el segundo, la ley del movimiento y la velocidad del punto material por su aceleración dada*).

Estos problemas llevan al problema matemático de *hallar la función por su derivada dada.*

Pasemos a la consideración de este problema.

Definición. *Una función $F(x)$ se denomina* ***función primitiva*** *(o simplemente* ***primitiva****) de una función $f(x)$ sobre un intervalo (a, b) si en cualquier punto x del intervalo (a, b), la función $F(x)$ es diferenciable y tiene la derivada $F'(x)$ igual a $f(x)$.*

OBSERVACIÓN. Se define análogamente la primitiva de la función $f(x)$ *sobre la recta infinita y una semirrecta abierta***).

EJEMPLOS. 1) La función $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ es primitiva de la función $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sobre el intervalo $(-1, +1)$, puesto que en cualquier punto x de este intervalo $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) La función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es primitiva de la función $f(x) = \cos x$ sobre la recta infinita $(-\infty, +\infty)$, puesto que en todo punto x de la recta infinita $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

3) La función $F(x) = \ln x$ es primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ sobre la semirrecta abierta $x > 0$, puesto que en todo punto x de esta semirrecta $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

---

*) En vez de la aceleración del punto material puede prefijarse la fuerza que actúa sobre este punto (puesto que, según la segunda ley de Newton, la fuerza determina la aceleración de este punto).

**) En general, sobre cualquier conjunto $\{x\}$ *denso en sí*. Véase la definición del conjunto denso en sí en el § 3 del cap. 2.

Si $F(x)$ es primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b), entonces, obviamente, la función $F(x) + C$, donde C es una constante cualquiera, es también primitiva de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b).

Lógicamente, surge la pregunta, cómo están relacionadas entre sí varias primitivas de una misma función $f(x)$. Es válido el siguiente teorema *fundamental*.

***Teorema* 6.1.** *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son cualesquiera primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b), entonces, en todo este intervalo $F_1(x) - F_2(x) = C$, donde C es una constante.*

En otras palabras, cualesquiera dos primitivas de una misma función pueden diferenciarse solamente en una constante.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Ya que cada una de las funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$ es diferenciable sobre el intervalo (a, b), entonces, en virtud del teorema 5.3, la función $\Phi(x)$ es también diferenciable sobre el intervalo (a, b) con tal que en todo este intervalo $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

En el § 10 del cap. 8, demostremos, sin emplear los resultados del presente capítulo*) el siguiente teorema 8.13: si la función $\Phi(x)$ es diferenciable en todo el intervalo (a, b) y si en todo el intervalo $\Phi'(x) = 0$, entonces la función $\Phi(x)$ es constante sobre el intervalo (a, b).

Valiéndose de este teorema obtenemos que $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$ lo que se requería demostrar.

Corolario. *Si (x) es **una** de las funciones primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b), entonces **cualquier** primitiva $\Phi(x)$ de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b) tiene la forma $\Phi(x) = F(x) + C$, donde C es una constante.*

2. Integral indefinida.

Definición. *El conjunto de todas las primitivas de la función dada $f(x)$ sobre el intervalo (a, b) se denomina **integral indefinida** de la función $f(x)$ (en este intervalo) y se denota por el símbolo*

$$\int f(x)\,dx. \tag{6.1}$$

El signo $\int$ se denomina *signo de integral*, la expresión $f(x)\,dx$ se llama *expresión subintegral* (*integrando*) y la propia función $f(x)$, *función subintegral* (*integrando*).

Si $F(x)$ es una de las funciones primitivas de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b), entonces, en virtud del corolario del teorema 6.1,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{6.2}$$

donde C es una constante cualquiera.

*) Observemos que, sin perjudicar la comprensión de este libro, se puede leer los capítulos 6 y 7 después del cap. 8. Adelantamos los capítulos 6 y 7 para que el lector conozca más rápido posible la técnica de integración.

Subrayemos que *si la primitiva (y, por tanto, la integral indefinida) de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b) existe, entonces la expresión subintegral de la fórmula* (6.1) *es la diferencial de cualquiera de estas primitivas.* En efecto, sea $F(x)$ cualquiera de las primitivas de la función $f(x)$ sobre el intervalo (a, b), es decir, para todos los x del intervalo (a, b) $F'(x) = f(x)$. Entonces $f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF$.

EJEMPLOS. 1) $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C$ en el intervalo $-1 < x < 1$, puesto que la función $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ es una de las primitivas de la función $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ sobre dicho intervalo.

2) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ sobre toda la recta $-\infty < x < \infty$, puesto que la función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una de las primitivas de la función $f(x) = \cos x$ sobre toda la recta infinita.

En este capítulo no vamos a examinar el problema de la *existencia* de primitivas (o integrales indefinidas) para amplias clases de funciones. Sólo notemos aquí que en el § 7 del cap. 1 del tomo 2 demostraremos que *para cualquier función $f(x)$ continua sobre el intervalo (a, b) existe función primitiva (así como la integral indefinida) en este intervalo.*

La operación de hallar la primitiva o la integral indefinida (de la función $f(x)$ suele llamarse *integración* (de la función $f(x)$).

3. Propiedades fundamentales de la integral indefinida. Ante todo señalemos dos propiedades que se desprenden directamente de la definición de la integral indefinida:

1°. $d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

La propiedad 1° significa que los símbolos d y $\int$ se reducen mutuamente si el símbolo de la diferencial está delante del símbolo de la integral.

La propiedad 2° significa que los símbolos $\int$ y d se reducen mutuamente si el símbolo de la integral está delante del símbolo de la diferencial, pero, en este caso, hay que adicionar a $F(x)$ una constante arbitraria C.

Para establecer la propiedad 1° baste tomar la diferencial de ambos miembros de la fórmula (6.2) y tener en cuenta que $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Para establecer la propiedad 2° es suficiente emplear la igualdad $dF(x) = f(x)\,dx$ en el miembro izquierdo de (6.2).

Las dos propiedades siguientes suelen denominarse *propiedades lineales* de la integral:

3°. $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$

4°. $\int [Af(x)]\, dx = A \int f(x)\, dx \quad (A = \text{const}).$

Subrayemos que en las fórmulas 3° y 4° la igualdad tiene carácter convencional: ésta debe comprenderse como la igualdad de los miembros derecho e izquierdo con exactitud de hasta un sumando constante arbitrario (lo que se comprende, ya que cada una de las integrales de las fórmulas 3° y 4° se determina con exactitud de hasta un sumando constante arbitrario).

Ya que dos primitivas de una misma función pueden diferenciarse solamente en una constante, entonces, para demostrar la propiedad 3°, basta demostrar que si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ y $G(x)$, primitiva de $g(x)$, entonces, la función $[F(x) \pm G(x)]$ es primitiva de la función $f(x) \pm g(x)$. Lo último se desprende directamente de que la derivada de la suma (algebraica) de funciones es igual a la suma de las derivadas de estas funciones, es decir, $[F(x) - G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$. Análogamente se demuestra la propiedad 4°. En este caso se emplea la igualdad $[AF(x)'] = AF'(x) = Af(x)$.

4. Tabla de las integrales indefinidas fundamentales. En el cap. 5 hemos obtenido la tabla de las derivadas de las funciones elementales más simples (véase el § 8 del cap. 5) que es el aparato de cálculo para el cálculo diferencial. Toda fórmula de esta tabla, en la cual una u otra función $F(x)$ tiene derivada igual a $f(x)$, nos lleva en virtud de la definición de la integral indefinida, a la fórmula correspondiente del cálculo integral

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

De este modo, confeccionamos la siguiente tabla de las integrales indefinidas fundamentales:

1°. $\int 0 \cdot dx = C.$

2°. $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3°. $x^{\alpha}\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

4°. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$

5°. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \; \int e^x\, dx = e^x + C.$

6°. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C.$

7°. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

8°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\right.$ donde $\left. n = 0, \pm 1, \ldots\right).$

9°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$ ($x \neq \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \ldots$).

10°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$ $(-1 < x < 1)$.

11°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

12°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$ (si el signo es $-$, $|x| > 1$).

13°. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad (|x| \neq 1).$

A estas fórmulas pueden también agregarse las fórmulas correspondientes para las funciones hiperbólicas:

14°. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

15°. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

16°. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

17°. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$

Hagamos observaciones respecto a las fórmulas 4, 12 y 13. La fórmula 4 es válida para cualquier intervalo que no comprende $x = 0$. En efecto, si $x > 0$, entonces, de la fórmula $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ deducimos que $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, y si $x < 0$, entonces, de la fórmula $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$ deducimos que $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$. Por lo tanto, la fórmula 4 se verifica para cualquier $x \neq 0$.

Las fórmulas 12 y 13 ocupan posición exclusiva en nuestra tabla puesto que no tienen fórmulas análogas entre las fórmulas de la tabla de las derivadas.

Sin embargo, para comprobar las fórmulas 12 y 13 basta cerciorarse de que las derivadas de las expresiones de los miembros derechos de estas fórmulas coinciden con las funciones subintegrales correspondientes.

Nuestro objetivo es completar la tabla de las integrales indefinidas con los procedimientos y métodos de integración. Pero antes de realizarlo, hagamos una observación importante.

En el § 7 del cap. 4 hemos introducido el concepto de la *función elemental* y en el p. 3 del § 8 en el cap. 5 hemos establecido que la derivada de cualquier función elemental es también función elemental. En otras palabras, hemos establecido que *la operación de diferenciación no nos deja salir de la clase de funciones elementales.*

Notemos en seguida que con la operación de integración no pasa lo mismo. Se puede demostrar que las integrales de algunas funciones elementales ya no son funciones elementales. Pueden servir de ejemplo las siguientes integrales:

1°. $\int e^{-x^2}\,dx.$

2°. $\int \cos(x^2)\,dx.$

3°. $\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx.$

4°. $\int \frac{dx}{\ln x}\quad (0<x\neq 1).$

5°. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx\quad (x\neq 0).$

6°. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$

Cada una de las integrales mencionadas *no es función elemental.* Dichas funciones no sólo existen en realidad*), sino desempeñan gran papel en varios problemas de la física. Así, por ejemplo, la integral 1, llamada *integral de Poisson* o *integral de errores*, se usa ampliamente en la física estadística, en la teoría de la conductibilidad calorífica y la difusión, las integrales 2 y 3, llamadas *integrales de Frenel*, se emplean ampliamente en la óptica. En las aplicaciones se encuentran también con frecuencia las integrales 4—6, la primera de las cuales se denomina *logaritmo integral* y las dos últimas, *coseno y seno integrales.*

Para todas nuevas funciones enumeradas (integral de Poisson, integrales de Frenel, logaritmo integral, coseno y seno integrales) están hechas las tablas y gráficos.

Ya que estas funciones tienen importancia en las aplicaciones, fueron examinadas tan completamente como las funciones elementales más simples. En general, cabe subrayar que el concepto de la función elemental más simple es de carácter convencional.

---

*) Ya hemos notado que en el § 7 del cap. 1 del tomo 2 demostraremos la existencia de la integral indefinida para cualquier función continua. La existencia de las integrales 1—6 se garantiza por la continuidad de las funciones subintegrales.

§ 2. Métodos fundamentales de integración

1. Integración por cambio de variable (por sustitución). El cambio de variable es uno de los procedimientos más eficaces de integración. Se basa en la siguiente afirmación elemental.

Sea que la función $t = \varphi(x)$ está definida y es diferenciable sobre cierto conjunto $\{x\}$) y sea $\{t\}$ conjunto de los valores de esta función. Luego, sea que para la función $g(t)$ existe la función primitiva $G(t)$ sobre el conjunto $\{t\}$, es decir,*

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C. \tag{6.3}$$

Entonces, sobre todo el conjunto $\{x\}$, para la función $g[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$ existe la función primitiva igual a $G[\varphi(x)]$ es decir,

$$\int g[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C. \tag{6.4}$$

Para demostrar esta afirmación es suficiente emplear la regla de diferenciación de la función compuesta**)

$$\frac{d}{dx}\{G[\varphi(x)]\} = G'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$$

y tener en cuenta que, según la definición de la primitiva, $G'(t) = g(t)$. Ahora, supongamos que se necesita calcular la integral

$$\int f(x)\,dx. \tag{6.5}$$

En algunos casos se logra escoger, como nueva variable, una función diferenciable $t = \varphi(x)$ tal que tiene lugar la igualdad

$$f(x) = g[\varphi(x)]\,\varphi'(x) \tag{6.6}$$

con tal que es fácil integrar la función $g(t)$, es decir, calcular la integral

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C.$$

La afirmación demostrada anteriormente permite escribir la siguiente fórmula para la integral (6.5):

$$\int f(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C. \tag{6.7}$$

Este procedimiento de calcular la integral (6.5) se denomina *integración por cambio de variable.*

Naturalmente, este procedimiento no se aplica a toda integral. Además, cabe subrayar que la elección correcta de la sustitución

---

*) Este conjunto es intervalo o segmento, o bien semirrecta o recta infinita.
**) Véase el § 7 del cap. 5.

depende, en modo considerable, de la habilidad del que calcula. Aducimos algunos ejemplos que ilustran el método expuesto.

1°. Calcúlese $\int \cos 2x\,dx$. Para calcular esta integral, debemos hacer la sustitución más simple $t = 2x$, $dt = 2dx$. Como resultado de este cambio, obtenemos

$$\int \cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C.$$

2°. Calcúlese $\int \frac{dx}{x+a}$. Esta integral se calcula empleando la sustitución $t = x + a$, $dt = dx$.

En este caso obtenemos

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C \quad (x \neq -a).$$

3°. Calcúlese $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$. Es fácil ver que esta integral se calcula haciendo la sustitución $t = \cos x$.

En efecto, en este caso $dt = -\operatorname{sen} x\,dx$ y

$$\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx = -\int e^t\,dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C.$$

4°. Calcúlese $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx$. Para calcular esta integral es conveniente hacer la sustitución $t = \operatorname{arctg} x$. En efecto, con esta sustitución $dt = \frac{dx}{1+x^2}$ y $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx = \int t^{100}\,dt = \frac{t^{101}}{101} + C =$ $= \frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101} + C$.

5°. Calcúlese $\int (7x-9)^{2999}\,dx$. Naturalmente, se puede reducir esta integral a la suma de tres mil integrales de tabla escribiendo la función subintegral según la fórmula del binomio de Newton. Es incomparablemente más simple hacer la sustitución $t = 7x - 9$, $dt = 7dx$. Como resultado, obtenemos

$$\int (7x-9)^{2999}\,dx = \frac{1}{7}\int t^{2999}\,dt = \frac{t^{3000}}{21\,000} + C = \frac{(7x-9)^{3000}}{21\,000} + C.$$

6°. Calcúlese $\int \frac{dx}{\cos x}$. Para hallar la sustitución que permite calcular esta integral, la escribimos en la forma

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\operatorname{sen}^2 x}.$$

Está claro que luego debemos poner $t=\operatorname{sen} x$, $dt=\cos x\,dx$. Como resultado, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

7°. Calcúlese $\int \frac{x^3\,dx}{(2x)^6+1}$. Es conveniente hacer la sustitución $t=(2x)^4$, $dt=64x^3\,dx$. En este caso

$$\int \frac{x^3\,dx}{(2x)^8+1}=\frac{1}{64}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\operatorname{arctg} t}{64}+C=\frac{\operatorname{arctg}(2x)^4}{64}+C.$$

8°. Calcúlese $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. Para calcular esta integral, es conveniente hacer la sustitución trigonométrica $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, $x=a\operatorname{tg} t$, $dx=a\frac{dt}{\cos^2 t}$.

Después de realizarla, la integral toma la forma

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt=\frac{\operatorname{sen} t}{a^2}+C=$$
$$=\frac{\operatorname{tg} t}{a^2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

9°. Calcúlese $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. Aquí es conveniente hacer la sustitución $t=\operatorname{arcsen} x/a$, $x=a\operatorname{sen} t$, $dx=a\cos t\,dt$. En este caso

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{\operatorname{tg} t}{a^2}+C=$$
$$=\frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

10°. Calcúlese $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$. Para calcular esta integral es conveniente hacer la sustitución $2t=\arccos\frac{x}{a}$, $x=a\cos 2t$, $dx=-2\,a\operatorname{sen} 2t\,dt$. Obtenemos

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=-4a\int \cos^2 t\,dt=$$
$$=-4a\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=-2at-2a\int \cos 2t\,dt=$$
$$=-2at-a\operatorname{sen} 2t+C=-a\left[\arccos\frac{x}{a}+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]+C.$$

2. Integración por partes. Entre los métodos muy eficaces de integración figura el *método de integración por partes*. Se basa en la siguiente afirmación.

Sea que cada una de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ es diferenciable sobre un conjunto $\{x\}$ y, además, existe la primitiva de la función $v(x)u'(x)$ sobre este conjunto. Entonces, sobre el conjunto $\{x\}$ existe también la primitiva de la función $u(x)v'(x)$ con tal que es válida la fórmula

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx. \tag{6.8}$$

OBSERVACIÓN. La definición de la diferencial y la propiedad de invariación de su forma permiten escribir la fórmula (6.8) en la forma

$$\int u\, dv = u(x)\, v(x) - \int v\, du. \tag{6.9}$$

Para demostrar la afirmación enunciada, escribamos la fórmula para la derivada del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$

$$[u(x)\, v(x)]' = u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x). \tag{6.10}$$

Multipliquemos la igualdad (6.10) por dx y tomemos la integral de ambos miembros de la igualdad obtenida. Ya que, según la condición, para todos los x del conjunto $\{x\}$ existe $\int v(x)\, u'(x)\, dx$ y $\int [u(x)\, v(x)]'\, dx = u(x)\, v(x) + C$ (véase la propiedad 2° del p. 3 del § 1), entonces, para todos los x del conjunto $\{x\}$ existe también la integral $\int u(x)\, v'(x)\, dx$ con tal que es válida la fórmula (6.8) (ó (6.9)).

La fórmula (6.9) *permite sustituir el problema de calcular la integral* $\int u\, dv$ por el de calcular la integral $\int v\, du$. En algunos casos concretos esta integral se calcula sin dificultad.

El cálculo de la integral $\int u\, dv$ aplicando la fórmula (6.9) se denomina *integración por partes*. Observemos que para aplicación concreta de la fórmula de integración por partes (6.9) es muy cómodo usar la tabla de las diferenciales escrita en el p. 2 del § 9 del cap. 5.

Pasamos a considerar ejemplos.

1°. Calculemos la integral $I = \int x^n \ln x\, dx$ $(n \neq -1)$. Poniendo $u = \ln x$, $dv = x^n\, dx$ y empleando la fórmula (6.9) obtenemos $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)} \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

2°. Luego calculemos la integral $I = \int x \operatorname{arctg} x\, dx$. Poniendo $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\, dx$ y empleando la fórmula (6.9), tendremos

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2},$$

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{[(1+x^2)-1]}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

3°. Calculemos la integral $I = \int x^2 \cos x\, dx$. Primero apliquemos la fórmula (6.9) poniendo $u = x^2$, $dv = \cos x\, dx$. Obtenemos $du = 2x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, $I = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\, dx$. Para calcular la última integral volvamos a aplicar la fórmula (6.9) poniendo esta vez $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\, dx$. Obtenemos $du = dx$, $v = -\cos x$, $I = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \int \cos x\, dx = (x^2 - 2) \operatorname{sen} x + 2x \cos x + C$. De este modo, hemos calculado la integral $\int x^2 \cos x\, dx$ haciendo doble integración por partes. Es fácil comprender que la integral $\int x^n \cos x\, dx$ (donde n es cualquier número positivo entero) puede calcularse según el método análogo, integrando n veces por partes.

4°. Calculemos ahora la integral $I = \int e^{ax} \cos bx\, dx$ ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$). Primeramente, apliquemos la fórmula (6.9), poniendo $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\, dx$. Obtenemos $du = ae^{ax}\, dx$, $v = \frac{\operatorname{sen} bx}{b}$,

$$I = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx.$$

Para calcular la última integral, volvamos a aplicar la fórmula (6.9) poniendo esta vez $u = e^{ax}$, $dv = \operatorname{sen} bx\, dx$. Obtenemos $du = ae^{ax}\, dx$, $v = -\frac{\cos bx}{b}$,

$$I = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I. \tag{6.11}$$

De este modo, integrando I dos veces por partes hemos obtenido, para la integral I, la ecuación de primer orden (6.11). De esta ecuación hallamos

$$I = \frac{a \cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

La práctica muestra que la mayoría de las integrales que se calculan mediante la integración por partes puede dividirse en *tres grupos* siguientes:

1) El *primer* grupo incluye las integrales cuya función subintegral comprende, como factor, una de las funciones siguientes: $\ln x$,

arcsen x, arccos x, arctg x, $(\operatorname{arctg} x)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln \varphi(x)$, . . . (véase los ejemplos 1° y 2° anteriormente considerados). Para calcular las integrales del primer grupo, hace falta emplear la fórmula (6.9) poniendo, en ella, $u(x)$ igual a una de las funciones anteriormente mencionadas*).

2) El *segundo* grupo incluye las integrales de tipo

$$\int (ax+b)^n \cos(cx)\,dx, \quad \int (ax+b)^n \operatorname{sen}(cx)\,dx, \quad \int (ax+b)^n e^{cx}\,dx,$$

donde a, b, c son ciertas constantes, n es cualquier número positivo entero (véase anteriormente el ejemplo 3°). Las integrales del *segundo* grupo se toman aplicando n veces la fórmula de integración por partes (6.9) con tal que en calidad de $u(x)$ hay que tomar cada vez $(ax+b)$ en potencia correspondiente. Después de toda integración por partes esta potencia disminuye en la unidad.

3) El *tercer* grupo incluye las integrales de tipo $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$, $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$, . . . (véase el ejemplo 4° anteriormente considerado). Al denotar cualquiera de las integrales de este grupo por I realizando dos veces la integración por partes, componemos la ecuación del primer orden para I.

Naturalmente, los tres grupos mencionados no incluyen todas las integrales, sin excepción, que se toman mediante la integración por partes. Aduzcamos los ejemplos de integrales que no entran en ninguno de los tres grupos enumerados, pero se calculan empleando la fórmula (6.9).

5°. Calculemos la integral $I=\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. Esta integral no figura en ninguno de los tres grupos mencionados. Sin embargo, empleando la fórmula (6.9) y poniendo en ella $u=x$, $dv=\frac{dx}{\cos^2 x}$, obtenemos $du=dx$, $v=\operatorname{tg} x$,

$$I=x\operatorname{tg} x-\int \operatorname{tg} x\,dx=x\operatorname{tg} x-\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x}=$$
$$=x\operatorname{tg} x+\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}=x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C.$$

6°. En fin, calculemos una integral muy importante para la exposición sucesiva $K_\lambda=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^\lambda}$, donde $a=\text{const}$, $\lambda=1, 2, \ldots$. Esta integral tampoco figura en ninguno de los tres grupos anterior-

*) Si la función subintegral comprende, en calidad del factor, $(\operatorname{arctg} x)^2$ $(\arccos x)^2$, . . ., hay que aplicar dos veces la fórmula de integración por partes (6.9).

mente mencionados. Para calcular esta integral, establecemos para ella la fórmula recurrente que sustituye el problema de calcular K_λ por el de calcular $K_{\lambda-1}$.

Se puede escribir (cuando $\lambda \neq 1$)

$$K_\lambda = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2\,dt}{(t^2+a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} \int \frac{[(t^2+a^2)-t^2]\,dt}{(t^2+a^2)^\lambda} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2} \int t \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)} =$$

$$= \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2} \int t \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda}.$$

Para calcular la última integral, apliquemos la fórmula de integración por partes (6.9) poniendo en ella $u = t$, $dv = \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^\lambda}$.

Obtenemos $du = dt$, $v = \frac{-1}{(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}}$,

$$K_\lambda = \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} + \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2(\lambda-1)} K_{\lambda-1}.$$

De la última igualdad obtenemos la fórmula recurrente

$$K_\lambda = \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2+a^2)^{\lambda-1}} + \frac{1}{a^2} \frac{(2\lambda-3)}{(2\lambda-2)} K_{\lambda-1}. \tag{6.12}$$

Cerciorémonos de que la fórmula recurrente (6.12) permite calcular la integral K_λ para cualquier $\lambda = 2, 3, \ldots$. En efecto, la integral K_1 se calcula de modo elemental

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Después de haber calculado la integral K_1, poniendo en la fórmula (6.12) $\lambda = 2$, calculamos K_2 sin dificultad alguna. A su lugar, conociendo K_2 y poniendo, en la fórmula (6.12), $\lambda = 3$, calculamos sin dificultad K_3. Si seguimos haciendo de este modo, calculamos la integral K_λ para cualquier λ natural.

Capítulo 7

NÚMEROS COMPLEJOS. ÁLGEBRA DE POLINOMIOS. INTEGRACIÓN EN FUNCIONES ELEMENTALES

En el capítulo anterior hemos notado que, hablando en general, la integral indefinida de la función elemental no es función elemental. No obstante, existen clases bastante amplias de funciones cuyas integrales son funciones elementales. (Estas clases de funciones se denominan *integrables en funciones elementales*.) El presente capítulo tiene por objeto examinar dichas clases de funciones. Puesto que entre clases de funciones mencionadas una de las fundamentales es la *clase de las funciones racionales*, ante todo debemos precisar nuestros conocimientos sobre los polinomios y las funciones racionales. Para eso, a su vez, es necesario precisar nociones de los números complejos.

§ 1. Nociones de los números complejos

Dos números reales x e y se denominan par ordenado si se indica cuál de estos números es primero y cuál, segundo. El par ordenado de los números reales x e y se denota por el símbolo (x, y). En primer lugar se escribe el primer elemento del par x.

Se denomina número complejo el par ordenado (x, y) de números reales, el primero de los cuales x se llama parte real del número complejo, y el segundo y, parte imaginaria.

Si la parte imaginaria y es igual a cero, nos ponemos de acuerdo identificar el par correspondiente $(x, 0)$ con el número real x. Esto permite considerar el conjunto de todos los números reales como parte del conjunto de los números complejos.

Dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se llaman iguales si $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Se dice que el *número complejo $z = (x, y)$ es igual a cero si $x = 0$ e $y = 0$.*

Definemos las operaciones de adición y multiplicación de los números complejos. Ya que los números reales son parte del conjunto de los números complejos, estas operaciones deben ser definidas de tal modo que, siendo aplicadas a dos números reales, lleven a definiciones de la suma y el producto de números reales ya conocidas del § 2 del cap. 2.

Se denomina suma de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ el número complejo z de tipo

$$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{7.1}$$

Se denomina producto de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$ *el número complejo* z *de tipo*

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1). \tag{7.2}$$

Es fácil verificar que la suma y el producto de números complejos poseen las mismas propiedades que la suma y el producto de números reales. A saber, son válidas las siguientes propiedades:

1°. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (la propiedad conmutativa de la suma).

2°. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (la propiedad asociativa de la suma).

3°. $z + (0, 0) = z$ (el papel especial del número $(0, 0)$).

4°. Para todo número $z = (x, y)$ existe un número opuesto $z' = (-x, -y)$ tal que $z + z' = (0, 0)$.

5°. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (la propiedad conmutativa del producto).

6°. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (la propiedad asociativa del producto).

7°. $z \cdot (1, 0) = z$ (el papel especial del número $(1, 0)$).

8°. Para cualquier número complejo $z = (x, y)$ no igual a cero existe un número inverso $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ tal que $z \cdot \frac{1}{z} = (1, 0)$.

9°. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (la propiedad distribuitiva del producto respecto a la suma).

Las propiedades 1°—9° permiten comprobar que para los números complejos se mantienen completamente todas las reglas del álgebra elemental que se refieren a las operaciones aritméticas y a la combinación de las igualdades.

Además, estas propiedades resuelven completamente el problema de la *sustracción de números complejos* que se considera como una operación inversa de la adición, y de la *división de números complejos* como una operación inversa de la multiplicación.

Se denomina *diferencia de dos números complejos* $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$ *un número complejo* z *tal que, sumándose a* z_2, *da* z_1. Empleando las propiedades 1°—4° establecemos fácilmente la existencia y la unicidad de la diferencia de cualesquiera dos números complejos*).

Es fácil verificar que la diferencia de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ es el número complejo z de tipo

$$z = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2). \tag{7.3}$$

Se denomina cociente de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$, *el segundo de los cuales no es igual a cero, un número complejo* z *tal que, siendo multiplicado por* z_2, *da* z_1. Empleando las propiedades 5°—8°, establecemos fácilmente que el único cociente de

*) Esto se hace de modo igual que para los números reales (véase el p. 3 del § 2 del cap. 2).

dos números complejos mencionados es el número complejo z de tipo

$$z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \tag{7.4}$$

En las operaciones con los números complejos desempeña un papel especial el número representable por el par $(0, 1)$ y denotado mediante la letra i. Multiplicando este par por sí mismo (o sea, elevándolo al cuadrado), obtenemos, en virtud de la definición del producto de números complejos:

$$(0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0) = -1, \text{ o sea, } i^2 = -1.$$

Observando eso, podemos representar cualquier número complejo $z = (x, y)$ en la forma

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)\cdot(0, 1) = x + iy.$$

A continuación, para el número complejo $z = (x, y)$ usamos ampliamente la representación $z = x + iy$. Al representar así este número y al considerar i como el factor cuyo cuadrado es igual a -1 podemos realizar las operaciones con los números complejos de modo igual que se realizan con los polinomios algebraicos.

El número complejo $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ suele llamarse *conjugado respecto al número complejo* $z = (x, y) = x + iy$.

Es obvio que *el número complejo es igual a cero si, y solo si, es igual a cero su número conjugado* puesto que las igualdades $x = 0$, $y = 0$ son equivalentes a las igualdades $x = 0$, $-y = 0$.

Para representar geométricamente los números complejos es conveniente usar el sistema cartesiano rectangular de coordenadas. En este caso el número complejo $z = (x, y)$ se representa por el punto M de coordenadas (x, y) o el vector $\overrightarrow{OM}$ que va del origen de coordenadas al punto M.

Si los números están representados de esta forma, la adición y la sustracción de los números complejos se reduce a la adición y la sustracción de sus vectores correspondientes (lo que se comprende por las fórmulas (7.1) y (7.3)).

Si a la par con el sistema cartesiano de coordenadas introducimos el sistema polar de coordenadas de tal modo que el polo esté en el origen O del sistema cartesiano y el eje polar sea dirigido a lo largo del sentido positivo del eje Ox, entonces, como se sabe, las coordenadas cartesianas (x, y) y las polares (ρ, θ) de cualquier punto M se relacionan por las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi \operatorname{sgn} y & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{7.5}$$

Las fórmulas (7.5) llevan a la *forma trigonométrica* de representación del número complejo $z = (x, y)$

$$z = (x, y) = x + iy = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (7.6)$$

En la forma trigonométrica de representación (7.6) el número ρ se denomina *módulo* y el ángulo θ, *argumento* del número complejo. El argumento θ no está definido unívocamente: en vez del valor θ se puede tomar el valor $\theta + 2\pi n$ (donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Empleando la forma trigonométrica es cómodo realizar las operaciones de multiplicación y división de los números complejos.

Sean dados dos números complejos arbitrarios

$$z_1 = (x_1, y_1) = (\rho_1 \cos \theta_1, \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1) \text{ y}$$

$$z_2 = (x_2, y_2) = (\rho_2 \cos \theta_2, \rho_2 \operatorname{sen} \theta_2).$$

Entonces, según la definición de la multiplicación (en virtud de la fórmula (7.2)), el producto de estos números tiene la forma

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, \ x_1y_2 + x_2y_1) = \\ = (\rho_1\rho_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \rho_1\rho_2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2, \\ \rho_1\rho_2 \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \rho_1\rho_2 \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2) = \\ = [(\rho_1\rho_2) \cos (\theta_1 + \theta_2), \ (\rho_1\rho_2) \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)]. \quad (7.7) \end{aligned}$$

De la fórmula (4.7) deducimos de manera análoga que el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1) = (\rho_1 \cos \theta_1, \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2) = (\rho_2 \cos \theta_2, \rho_2 \operatorname{sen} \theta_2)$ tiene la forma*)

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \cos (\theta_1 - \theta_2), \ \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2) \right]. \quad (7.8)$$

De las fórmulas (7.7) y (7.8) deducimos que, *al multiplicar dos números complejos, sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman* (*al dividir dos números complejos, sus módulos se dividen y sus argumentos se restan*). Esta propiedad se transfiere sucesivamente al caso del producto de cualquier número finito de números complejos. En particular, si se multiplican n números complejos iguales (es decir, si el número complejo se eleva a la potencia n), entonces

$$(\rho \cos \theta, \ \rho \operatorname{sen} \theta)^n = (\rho^n \cos \theta n, \ \rho^n \operatorname{sen} \theta n). \quad (7.9)$$

De la fórmula (7.9), cuando $\rho = 1$, obtenemos la llamada *fórmula de Moivre***)

$$(\cos \theta, \ \operatorname{sen} \theta)^n = (\cos \theta n, \ \operatorname{sen} \theta n). \quad (7.10)$$

---

*) Al mismo tiempo se supone que el número complejo z_2 no es igual a cero, es decir, $\rho_2 \neq 0$.

**) A. De Moivre, matemático inglés de origen francés (1667—1754).

La fórmula (7.10) puede también escribirse de otra forma

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos\theta n + i \operatorname{sen}\theta n. \qquad (7.11)$$

Para concluir, observemos que el número complejo escrito en forma trigonométrica es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero su módulo. De aquí y de que al multiplicar números complejos sus módulos se multiplican se desprende que *el producto de varios números complejos es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero por lo menos uno de los factores.*

§ 2. Polinomios algebraicos

1. Se denomina *polinomio algebraico* de grado n la expresión de tipo

$$f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n, \qquad (7.12)$$

donde $z = (x, y) = x + iy$ es número complejo variable y $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son ciertos números complejos constantes, el primero de los cuales es diferente de cero. Como se sabe, cualquier polinomio algebraico de grado n puede dividirse «en columna» por otro polinomio algebraico de grado no superior a n. De este modo llegamos a la siguiente afirmación: *cualesquiera que sean dos polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ tales que el grado de $\varphi(z)$ no es superior al de $f(z)$, es válida la igualdad*

$$f(z) = \varphi(z) \cdot q(z) + r(z), \qquad (7.13)$$

donde $q(z)$ y $r(z)$ son ciertos polinomios con tal que el grado de $q(z)$ es igual a la diferencia de los grados de los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$, y el grado de $r(z)$ es inferior al de $\varphi(z)$.

Al respecto de los polinomios $f(z)$, $\varphi(z)$, $q(z)$ y $r(z)$ que figuran en la igualdad (7.13) suelen aplicarse los términos bien comprensibles «dividendo», «divisor», «cociente» y «resto».

Se dice que el polinomio $f(z)$ se divide por el polinomio $\varphi(z)$ si en la fórmula (7.13) obtenida por la división «en columna», el resto $r(z) = 0$.

Nos ponemos de acuerdo llamar polinomio de grado nulo cualquier constante compleja. Entonces, está completamente claro *que cualquier polinomio se divide por un polinomio diferente de cero de grado nulo.* Examinemos el problema de divisibilidad del polinomio $f(z)$ por el polinomio de primer grado $(z - b)$.

Definición. *El número complejo b se denomina* ***raíz del polinomio*** *$f(z)$ si $f(b)$ es igual a cero.*

Teorema 7.1. *El polinomio de grado nulo $f(z)$ se divide por el binomio $(z - b)$ si, y sólo si, b es raíz del polinomio $f(z)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z) = (z - b)$ escribamos la fórmula (7.13). Puesto que en esta fórmula el grado del resto $r(z)$ *debe ser inferior* al grado del divisor $\varphi(z) = z - b$, entonces

$r(z)$ es *polinomio de grado nulo*, o sea, $r(z) = e = \text{const}$. De este modo, la fórmula (7.13) toma la forma

$$f(z) = (z - b)\cdot q(z) + e. \tag{7.14}$$

Poniendo, en la fórmula (7.14), $z = b$, hallemos que $c = f(b)$. Por definición, $f(z)$ se divide por $z - b$ si, y sólo si, el resto de la fórmula (7.14) $c = f(b)$ es igual a cero, o sea, si, y sólo si, b es raíz de $f(z)$. El teorema queda demostrado.

2. Lógicamente, surge la pregunta, si tiene raíces todo polinomio algebraico. La respuesta da el *teorema fundamental del álgebra**): *todo polinomio de grado no nulo tiene al menos una raíz.*

Basándonos en este teorema, demostremos que el polinomio algebraico de grado n tiene exactamente n raíces**). En efecto, sea $f(z)$ polinomio de grado n. Según el teorema fundamental del álgebra, $f(z)$ tiene al menos una raíz b_1, o sea, para $f(z)$ es válida la fórmula

$$f(z) = (z - b_1)\, f_1(z), \tag{7.15^1}$$

donde mediante $f_1(z)$ se denota cierto polinomio de grado $(n - 1)$. Si $n \neq 1$, entonces, según el teorema fundamental del álgebra, $f_1(z)$ tiene al menos una raíz b_2, o sea, para $f_1(z)$ es válida la fórmula

$$f_1(z) = (z - b_2)\, f_2(z), \tag{7.15^2}$$

donde mediante $f_2(z)$ se denota cierto polinomio de grado $(n - 2)$. Luego, repitiendo dichos razonamientos, obtenemos las fórmulas

$$f_2(z) = (z - b_3)\, f_3(z), \tag{7.15^3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_{n-1}(z) = (z - b_n)\, f_n(z). \tag{7.15^n}$$

En la última de estas fórmulas mediante $f_n(z)$ se denota cierto polinomio de grado nulo, o sea, $f_n(z) = c = \text{const}$. Poniendo en correspondencia las igualdades (7.15^1)—(7.15^n) y teniendo en cuenta que $f_n(z) = c$, tendremos

$$f(z) = (z - b_1)(z - b_2)\dots(z - b_n)\, c. \tag{7.16}$$

Notemos que la variable compleja c no es igual a cero puesto que, en caso contrario, el polinomio $f(z)$ sea idénticamente igual a cero y no sea polinomio de grado n***).

*) Véase la demostración de este teorema en el curso «Funciones de variable compleja».

**) Al mismo tiempo, tomamos, naturalmente, $n > 0$.

***) Aquí empleamos la siguiente afirmación: *si el polinomio $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ es idénticamente igual a cero, todos sus coeficientes son iguales a cero.* En efecto, si $f(z) \equiv 0$, entonces para $z = 0$, obtenemos $a_n = 0$. Pero, entonces $f(z) \equiv z\,[a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1}] \equiv 0$. Ya que $z \not\equiv 0$, entonces la expresión entre corchetes es idénticamente igual a cero, de donde, para $z = 0$, obtenemos $a_{n-1} = 0$. Luego, continuando los razonamientos análogos, demostremos que todos los coeficientes son iguales a cero.

De la igualdad (7.16) se deduce evidentemente que $f(b_1) = f(b_2) = \ldots = f(b_n) = 0$, o sea, que cada uno de los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es raíz del polinomio $f(z)$. Además, de (7.16) es evidente que, cualquiera que sea el número complejo b diferente de $b_1, b_2, \ldots, b_n$, el número complejo $f(b)$ no es igual a cero, puesto que el producto de varios números complejos es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero al menos uno de los factores (véase el § 1). De este modo, el polinomio $f(z)$ tiene exactamente n raíces: $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

La igualdad (7.16) permite descomponer el polinomio $f(z)$ en factores. Si conocemos el tipo del polinomio $f(z)$ (7.12), podemos determinar la constante c en la igualdad (7.16). Comparando, en las igualdades (7.16) y (7.12), los coeficientes de z^n, obtenemos $c = c_0$*).

El polinomio (7.12) que tiene $c_0 = 1$ se denomina *reducido*. Para el polinomio reducido la fórmula de descomposición (7.16) toma la forma

$$f(z) = (z - b_1)(z - b_2) \ldots (z - b_n). \tag{7.17}$$

Comparando la fórmula (7.17) con la (7.12) (cuando $c_0 = 1$), obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{gathered} c_1 = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_n), \\ c_2 = +(b_1 b_2 + b_1 b_3 + \ldots + b_{n-1} b_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n = (-1)^n b_1 b_2 \ldots b_n. \end{gathered}$$

A continuación, consideraremos *polinomios reducidos*, si no se especifica lo contrario.

§ 3. Raíces múltiples de un polinomio. Criterio de multiplicidad de una raíz

Entre las raíces del polinomio $f(z)$ pueden haber *raíces coincidentes*. Sean $a, b, \ldots, c$ raíces *diferentes* del polinomio reducido $f(z)$. Entonces, en virtud de los resultados del párrafo anterior, para $f(z)$ es válida la descomposición

$$f(z) = (z - a)^{\alpha} (z - b)^{\beta} \ldots (z - c)^{\gamma}. \tag{7.18}$$

En esta descomposición $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ son ciertos números enteros, cada uno de los cuales no es menor que la unidad con tal que $\alpha + \beta + \ldots + \gamma = n$, donde n es el grado del polinomio $f(z)$.

*) Aquí empleamos la afirmación: *si dos polinomios $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ y $b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n$ son idénticamente iguales uno a otro, entonces, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_n = b_n$.* Para demostrarlo, es suficiente aplicar a la diferencia de dichos polinomios la afirmación mencionada en la nota ***) de la página 196.

Si para el polinomio $f(z)$ es válida la descomposición (7.18), *entonces se dice que el número complejo a es raíz de $f(z)$ de multiplicidad α, el número complejo b es raíz de $f(z)$ de multiplicidad β, el número complejo c es raíz de $f(z)$ de multiplicidad γ.*

La raíz de multiplicidad igual a la unidad suele llamarse *de multiplicidad 1* y la raíz de multiplicidad superior a la unidad, *múltiple.*

Se puede dar otra definición equivalente de la raíz de multiplicidad dada: *el número complejo a se denomina raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$ si para $f(z)$ es válida la representación*

$$f(z) = (z - a)^{\alpha}\varphi(z), \text{ donde } \varphi(a) \neq 0. \tag{7.19}$$

Nuestro objetivo es formular la condición necesaria y suficiente de que el número complejo a sea raíz del polinomio $f(z)$ de multiplicidad α.

Denominamos derivada del polinomio $f(z)$ el polinomio $f'(z)$ obtenido por la diferenciación formal) de $f(z)$ respecto a z.* Ante todo demostremos la afirmación siguiente.

Lema 1. *Si el número complejo a es raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$, entonces este número a es raíz de multiplicidad $(\alpha - 1)$ del polinomio $f'(z)$.*

OBSERVACIÓN. En particular, cuando $\alpha = 1$, el número a, siendo raíz de multiplicidad 1 de $f(z)$, no es raíz de $f'(z)$.

DEMOSTRACIÓN. Por la condición, para $f(z)$ es válida la representación (7.19). Diferenciando la fórmula (7.19), tendremos

$$f'(z) = \alpha(z - a)^{\alpha-1}\varphi(z) + (z - a)^{\alpha}\varphi'(z),$$

o

$$f'(z) = (z - a)^{\alpha-1}\varphi_1(z), \tag{7.20}$$

donde

$$\varphi_1(z) = \alpha\varphi(z) + (z - a)\varphi'(z).$$

Puesto que $\varphi_1(a) = \alpha\varphi(a) \neq 0$, la fórmula (7.20) significa que el número a es raíz de multiplicidad $(\alpha - 1)$ del polinomio $f'(z)$. El lema queda demostrado.

Teorema 7.2. *Para que el número complejo a sea raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$ es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones siguientes:*

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(\alpha-1)}(a) = 0, \quad f^{(\alpha)}(a) \neq 0. \tag{7.21}$$

DEMOSTRACIÓN. 1) NECESIDAD. Sea a raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$. Entonces, según el lema 1, el mismo número a es raíz de multiplicidad $(\alpha - 1)$ del polinomio $f'(z)$, es también raíz de multiplicidad $(\alpha - 2)$ del polinomio $f^{(2)}(z)$, . . ., raíz de mul-

*) La diferenciación de $f(z)$ respecto a z se realiza de tal modo como si z fuera variable real.

tiplicidad 1 del polinomio $f^{(\alpha-1)}(z)$, es decir,

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(\alpha-1)}(a)=0.$$

Según la observación del lema 1, el número a no es raíz del polinomio $f^{(\alpha)}(z)$, o sea, $f^{(\alpha)}(a)\neq 0$. Las condiciones (7.21) se cumplen, lo que queda demostrado.

2) SUFICIENCIA. Sean cumplidas las condiciones (7.21). Es necesario demostrar que el número a es raíz de multiplicidad α del polinomio $f(z)$. Ya que $f^{(\alpha-1)}(a)=0$, el número a es raíz del polinomio $f^{(\alpha-1)}(z)$ *de multiplicidad no inferior a la unidad*. Por lo tanto, basándose en el lema 1, el número a es raíz del polinomio $f^{(\alpha-2)}(z)$ *de multiplicidad no inferior a dos*, es raíz del polinomio $f^{(\alpha-3)}(z)$ *de multiplicidad no inferior a tres* y raíz del polinomio $f(z)$ *de multiplicidad no inferior a* α.

Queda por demostrar que la multiplicidad de la raíz a del polinomio $f(z)$ *no es superior a* α. Si esta multiplicidad fuera superior a α, entonces, según el lema 1, la multiplicidad de la raíz a del polinomio $f^{(\alpha-1)}(z)$ sería superior a 1, de donde se desprendería que a es raíz de $f^{(\alpha)}(z)$, o sea, $f^{(\alpha)}(a)=0$, lo que contradice la última de las condiciones (7.21). El teorema queda demostrado.

§ 4. Principio de la separación de raíces múltiples. Algoritmo de Euclides

1. Principio de la separación de raíces múltiples. Planteemos la tarea: para un polinomio dado $f(z)$ que tiene, hablando en general, raíces múltiples, hallar un polinomio $F(z)$ que *tiene las mismas raíces que* $f(z)$, *pero de multiplicidad* 1. Para lograr este fin introduzcamos algunos conceptos nuevos.

Definición 1. *Denominamos* ***divisor*** *de dos polinomios* $f(z)$ *y* $\varphi(z)$ *cualquier polinomio que divide ambos polinomios* $f(z)$ *y* $\varphi(z)$.

Definición 2. *Denominamos* ***máximo común divisor*** *de dos polinomios* $f(z)$ *y* $\varphi(z)$ *un divisor de éstos tal que se divide por cualquier otro divisor de estos dos polinomios.*

Nos ponemos de acuerdo designar el máximo común divisor de dos polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ por el símbolo $D\{f(z),\ \varphi(z)\}$.

Observemos que de la definición del máximo común divisor se desprende que él está definido con exactitud de hasta un factor arbitrario constante.

Volviendo a la tarea enunciada al comienzo del presente párrafo, podemos ahora verificar fácilmente que el polinomio buscado $F(z)$ tiene la forma

$$F(z)=\frac{f(z)}{D\,[f(z),\ f'(z)]}. \tag{7.22}$$

En efecto, sea

$$f(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots(z-c)^{\gamma}, \tag{7.23}$$

donde $a, b, \ldots, c$ son raíces *diferentes*. Entonces, según el teorema 7.2, para el polinomio $f'(z)$ es válida la representación

$$f'(z) = (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots(z-c)^{\gamma-1}\psi(z), \qquad (7.24)$$

donde $\psi(z)$ no comprende factores $(z-a)$, $(z-b)$, $\ldots$, $(z-c)$.

Comparando las fórmulas (7.23) y (7.24) es evidente que

$$D[f(z),\ f'(z)] = (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots(z-c)^{\gamma-1}. \qquad (7.25)$$

A su vez, comparando las fórmulas (7.23) y (7.25) es evidente que el polinomio $F(z)$ definido por la fórmula (7.22) tiene la forma

$$F(z) = (z-a)(z-b)\ldots(z-c). \qquad (7.26)$$

Por lo tanto, queda demostrado que el polinomio $F(z)$ definido por la fórmula (7.22) tiene las mismas raíces que el polinomio $f(z)$ pero todas las raíces son de multiplicidad 1.

De este modo, la tarea de separar raíces múltiples se reduce a la de construir el polinomio $F(z)$ definido por la fórmula (7.22), valiéndose del polinomio dado $f(z)$.

Ya que el denominador de la fórmula (7.22) comprende el máximo común divisor de dos polinomios $f(z)$ y $f'(z)$, surge el problema de hallar el máximo común divisor de dos polinomios. Pasamos a resolver este problema.

2. Búsqueda del máximo común divisor de dos polinomios (algoritmo de Euclides). Sean dados dos polinomios completamente arbitrarios $f(z)$ y $\varphi(z)$. Se exige hallar su máximo común divisor. Sin limitar la generalidad, consideremos que el grado de $\varphi(z)$ no es superior al grado de $f(z)$. Entonces, al dividir $f(z)$ por $\varphi(z)$ en columna, llegamos a la fórmula (7.13), (véase el § 2)

$$f(z) = \varphi(z)\,q(z) + r_1(z), \qquad (7.27^1)$$

en la cual, como se demuestra en el § 2, el grado del resto $r_1(z)$ es menor que el grado del divisor $\varphi(z)$. Esto nos permite dividir en columna nuevamente $\varphi(z)$ por $r_1(z)$. Como resultado de la división, obtenemos la fórmula análoga a la (7.13):

$$\varphi(z) = r_1(z)\,q_1(z) + r_2(z), \qquad (7.27^2)$$

en la cual el grado del resto $r_2(z)$ es inferior al grado del divisor $r_1(z)$.

Luego, dividimos en columna $r_1(z)$ por $r_2(z)$, etc. Como resultado obtenemos

$$r_1(z) = r_2(z)\,q_2(z) + r_3(z). \qquad (7.27^3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_{k-2}(z) = r_{k-1}(z)\,q_{k-1}(z) + r_k(z). \qquad (7.27^k)$$

Ya que en toda división en columna el grado del resto disminuirá *al menos en la unidad*, al repetir el proceso descrito un número bastante grande k veces, obtenemos, que a $(k+1)$-ésimo paso, el resto será igual a cero*), es decir

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\, q_k(z). \qquad (7.27^{k+1})$$

Demostremos que el último resto $r_k(z)$ diferente de cero es el *máximo común divisor de los polinomios* $f(z)$ y $\varphi(z)$.

Basta demostrar dos afirmaciones:

1) los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ se dividen por $r_k(z)$ (esto significa que $r_k(z)$ es uno de los divisores de $f(z)$ y $\varphi(z)$);

2) el polinomio $r_k(z)$ se divide por cualquier divisor $r_0(z)$ de los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ (esto significa que $r_k(z)$ es el *máximo común divisor* de dichos polinomios).

Para demostrar la afirmación 1), observemos que, en virtud de (7.27^{k+1}), $r_{k-1}(z)$ se divide por $r_k(z)$, y, entonces, conforme a (7.27^k), $r_{k-2}(z)$ se divide por $r_k(z)$ . . . Pasando de esta forma de una igualdad para otra en (7.27^k)—(7.27^1), demostremos, por fin, que $\varphi(z)$ y $f(z)$ se dividen por $r_k(z)$.

Ahora, demostremos la afirmación 2). Sea $r_0(z)$ cualquier divisor de los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$. En virtud de la igualdad (7.27^1), $r_1(z)$ se divide por $r_0(z)$, y, entonces, conforme a la igualdad (7.27^2), $r_2(z)$ se divide por $r_0(z)$, en virtud de la igualdad (7.27^3), $r_3(z)$ se divide por $r_0(z)$ . . . Pasando de una igualdad para otra en (7.27^1)—(7.27^k), demostremos, en fin, que $r_k(z)$ se divide por $r_0(z)$.

Por lo tanto, hemos argumentado completamente el proceso anteriormente descrito de búsqueda del máximo común divisor de dos polinomios. Este proceso suele llamarse *algoritmo de Euclides*.

EJEMPLO. Hallemos el máximo común divisor de dos polinomios**)

$$f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \quad \text{y} \quad \varphi(z) = 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2.$$

Al dividir $f(z)$ por $\varphi(z)$ en columna, tendremos

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r} z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1 \\ z^4 - \frac{3}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}z \qquad \end{array} & \begin{array}{|l} 4z^3 - 6z^2 + 6z - 2 \\ \hline \frac{1}{4}z - \frac{1}{8} \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} -\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{2}z^2 - \frac{3}{2}z + 1 \\ -\frac{1}{2}z^3 + \frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{4} \end{array} & \\
\hline
\boxed{\frac{3}{4}z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{3}{4}} &
\end{array}$$

*) Si el resto no se anula a algún paso intermedio del proceso descrito, entonces, después de un número k de pasos obtenemos el resto $r_k(z)$ de grado nulo. Entonces, el siguiente resto $r_{k+1}(z)$ es anticipadamente igual a cero (ya que cualquier polinomio se divide por el polinomio de grado nulo).

**) Es fácil ver que $\varphi(z) = f'(z)$.

Después deberíamos dividir $\varphi(z)$ por el polinomio contorneado por la línea punteada. Sin embargo, puesto que el máximo común divisor *se define con exactitud de hasta un factor constante arbitrario*, es conveniente multiplicar el resto contorneado por la línea punteada por 4/3 y dividir $\varphi(z)$ por el polinomio $z^2 - z + 1$. Como resultado, obtenemos

$$\begin{array}{r|l} -\,4z^3-6z^2+6z-2 & z^2-z+1 \\ \underline{4z^3-4z^2+4z\phantom{{}-2}} & \overline{4z-2} \\ -\,-2z^2+2z-2 & \\ \underline{-2z^2+2z-2} & \end{array}$$

el resto es igual a cero.

De este modo, el máximo común divisor de los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ es igual a $z^2 - z + 1$, es decir,

$$D[f(z),\ \varphi(z)] = z^2 - z + 1.$$

OBSERVACIÓN 1. En el ejemplo anteriormente aducido, para que sea más sencillo hemos tomado los polinomios $f(z)$ y $\varphi(z)$ con coeficientes *reales*. Los mismos métodos quedan también en vigor para los polinomios con coeficientes complejos.

OBSERVACIÓN 2. Cabe notar que hasta el presente no tenemos prácticamente métodos numéricos estables para calcular las raíces de polinomios arbitrarios con exactitud dada. Sin embargo, teniendo la información anticipada sobre la posición de la raíz buscada del polinomio en cierto segmento del eje numérico, podemos calcular esta raíz con la exactitud que nos interesa empleando los métodos expuestos en el § 1 del cap. 3 del tomo 2.

§ 5. Desarrollo de la fracción racional propia con coeficientes complejos en la suma de fracciones simples

Se denomina *fracción racional* la razón de dos polinomios algebraicos. La fracción racional se denomina *propia* si el grado del polinomio situado en el numerador es menor que el del polinomio situado en el denominador. En caso contrario, la fracción racional se denomina *impropia*. Como regla, denotamos la fracción racional por el símbolo $\frac{P(z)}{Q(z)}$, tomando $P(z)$ y $Q(z)$ por polinomios algebraicos.

Lema 2. *Sea $\frac{P(z)}{Q(z)}$ fracción racional propia cuyo denominador tiene el número complejo a como la raíz de multiplicidad α, es decir,*

$$Q(z) = (z-a)^{\alpha}\varphi(z),\ \textit{donde}\ \varphi(a) \neq 0. \tag{7.28}$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente fórmula:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A}{(z-a)^{\alpha}}+\frac{\psi(z)}{(z-a)^{\alpha-k}\varphi(z)}, \tag{7.29}$$

donde A es constante compleja igual a $\frac{P(a)}{\varphi(a)}$; *k, número entero* $\geqslant 1$, y $\psi(z)$, *cierto polinomio. Además, la última fracción en el miembro derecho de* (7.29) *es propia.*

DEMOSTRACION. Denotemos mediante A el número constante de tipo $A=\frac{P(a)}{\varphi(a)}$*) y consideremos la diferencia

$$\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{A}{(z-a)^{\alpha}}.$$

Reduciendo dicha diferencia al denominador común, tendremos

$$\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{A}{(z-a)^{\alpha}}=\frac{P(z)-A\varphi(z)}{(z-a)^{\alpha}\varphi(z)}=\frac{\Phi(z)}{(z-a)^{\alpha}\varphi(z)}, \tag{7.30}$$

donde se denota mediante $\Phi(z)$ el polinomio de tipo $\Phi(z)=P(z)-A\varphi(z)$. Ya que $\Phi(a)=P(a)-A\varphi(a)=0$, el número complejo a es *raíz del polinomio* $\Phi(z)$ de cierta multiplicidad $k\geqslant 1$, o sea,

$$\Phi(z)=(z-a)^{k}\psi(z),\ \text{donde}\ \psi(a)\neq 0. \tag{7.31}$$

Poniendo la expresión (7.31) en la fórmula (7.30), tendremos

$$\frac{P(z)}{Q(z)}-\frac{A}{(z-a)^{\alpha}}=\frac{\psi(z)}{(z-a)^{\alpha-k}\varphi(z)}. \tag{7.32}$$

Por lo tanto, la fórmula (7.29) queda demostrada. Falta sólo cerciorarse de que la fracción situada en el miembro derecho de (7.32) es propia. Esto se desprende directamente de que *la diferencia de dos fracciones propias es fracción propia***).

El lema 2 queda demostrado.

Del lema 2 se desprende directamente el siguiente teorema notable que demuestra la posibilidad de desarrollar la fracción racional propia en la suma de fracciones simples.

Teorema 7.3. *Sea* $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *fracción racional propia cuyo denominador tiene la forma*

$$Q(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots(z-c)^{\gamma}. \tag{7.33}$$

---

*) El número A tiene sentido, ya que $\varphi(a)\neq 0$ en virtud de (7.28).

**) Es fácil cerciorarse de esto reduciendo la diferencia de fracciones propias al denominador común.

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente expresión:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1}{(z-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(z-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(z-a)}+$$
$$+\frac{B_1}{(z-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(z-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_\beta}{(z-b)}+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\frac{C_1}{(z-c)^{\gamma}}+\frac{C_2}{(z-c)^{\gamma-1}}+\ldots+\frac{C_\gamma}{(z-c)}. \quad (7.34)$$

En esta expresión $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_\gamma$ *son ciertos números complejos constantes, algunos de los cuales pueden ser iguales a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, apliquemos el lema 2 a la fracción $\frac{P(z)}{Q(z)}$, teniendo en cuenta que el número complejo a es raíz de $Q(z)$ de multiplicidad α. Con esto, obtenemos la igualdad (7.32). Al miembro derecho de esta igualdad volvamos a aplicar el lema 2, teniendo en cuenta que el número complejo a es raíz de multiplicidad $\alpha - k$ (para $\alpha - k > 0$) del denominador de dicho miembro derecho o, en virtud de la descomposición (7.33), el número complejo b es raíz de multiplicidad β (para $\alpha - k = 0$) de este denominador. Como resultado, obtenemos la igualdad análoga a (7.32). A su miembro derecho puede aplicarse nuevamente el lema 2. Continuando los razonamientos análogos (o sea, aplicando sucesivamente el lema 2 respecto a todas las raíces de $Q(z)$), obtenemos, para la fracción $\frac{P(z)}{Q(z)}$, la expresión (7.34). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Ya que en el lema 2 el número k puede ser mayor que la unidad y el polinomio $P(z)$ puede tener raíces coincidentes con las de $Q(z)$, entonces, en la fórmula (7.34), algunos de los coeficientes $A_1, \ldots, A_\alpha, B_1, \ldots, B_\beta, \ldots, C_1, \ldots, C_\gamma$ pueden ser iguales a cero.

§ 6. Descomposición del polinomio algebraico con coeficientes reales en un producto de factores reales irreductibles

Hemos examinado anteriormente el desarrollo de una fracción racional con coeficientes *complejos* en una suma de fracciones simples. Ahora nuestro objetivo es hallar el desarrollo de la fracción racional con coeficientes *reales* en una suma de fracciones simples con coeficientes *reales*.

Para lograr esto, ante todo debemos hallar la descomposición del polinomio algebraico con coeficientes reales en un producto de factores reales irreductibles. Este problema se examina en el presente párrafo.

Sea

$$f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\ldots+c_n \tag{7.35}$$

polinomio algebraico reducido con coeficientes *reales* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Ante todo, demostremos el siguiente teorema.

Teorema 7.4. *Si el número complejo a es raíz del polinomio algebraico con coeficientes reales* (7.35), *entonces, el número complejo conjugado de él**) $\bar{a}$ *es también raíz del polinomio* (7.35). *Además, si la raíz compleja a es de multiplicidad λ, entonces, la raíz $\bar{a}$ también es, de la misma multiplicidad.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos, ante todo la siguiente afirmación auxiliar: si $f(z)$ es polinomio con coeficientes reales, entonces la magnitud compleja $f(\bar{z})$ es conjugada respecto a la magnitud $f(z)$. Baste demostrar que, para cualquier número n, la magnitud $(\bar{z})^n$ es conjugada respecto a la magnitud z^n. Lo último se desprende inmediatamente de la forma trigonométrica del número complejo. En efecto, sea

$$z=\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta).$$

Entonces

$$\bar{z}=\rho[\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta)].$$

En virtud de la fórmula de Moivre (7.11),

$$z^n=\rho^n(\cos\theta n+i\operatorname{sen}\theta n),$$
$$(\bar{z})^n=\rho^n[\cos(-\theta n)+i\operatorname{sen}(-\theta n)]=\rho^n(\cos\theta n-i\operatorname{sen}\theta n).$$

Comparando dos últimas fórmulas se desprende que $(\bar{z})^n$ es magnitud conjugada respecto a z^n. La afirmación auxiliar queda demostrada.

Sea ahora que el número complejo a es raíz del polinomio $f(z)$, o sea, $f(a)=0$. En el § 1 de este capítulo hemos deducido que el número complejo es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero el número conjugado de él. Por lo tanto, se desprende de la igualdad $f(a)=0$ y de la afirmación auxiliar anteriormente demostrada que $f(\bar{a})=0$, ó sea, el número $\bar{a}$ es raíz de $f(z)$.

Sea dado que la multiplicidad de la raíz a es igual a λ. Entonces, en virtud del teorema 7.2,

$$f(a)=f'(a)=f^{(2)}(a)=\ldots=f^{(\lambda-1)}(a)=0;\ f^{(\lambda)}(a)\neq 0. \tag{7.36}$$

Ya que el número complejo es igual a cero si, y sólo si, es igual a cero el número conjugado de él, entonces, de la afirmación auxiliar anteriormente demostrada y de las relaciones (7.36) se desprenden las

*) A continuación, siempre denotaremos el número complejo conjugado por el mismo símbolo que el número dado, pero con una raya por arriba de éste.

relaciones siguientes*):

$$f(\bar{a})=f'(\bar{a})=f^{(2)}(\bar{a})=\ldots=f^{(\lambda-1)}(\bar{a})=0,\ f^{(\lambda)}(\bar{a})\neq 0. \qquad (7.37)$$

En virtud del teorema 7.2, las relaciones (7.37) significan que el número $\bar{a}$ es raíz de $f(z)$ de multiplicidad λ. El teorema 7.4 queda demostrado.

Empleando el teorema 7.4, hallemos la descomposición del polinomio $f(x)$ con coeficientes reales**) en un producto de factores reales irreductibles. Sea que el polinomio $f(x)$ tiene raíces reales $b_1, b_2, \ldots, b_m$ de multiplicidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, respectivamente, y pares de raíces complejos conjugados a_1 y $\bar{a}_1$, a_2 y $\bar{a}_2$, ..., a_m y $\bar{a}_n$ de multiplicidades $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ para todo par respectivamente.

Entonces, según los resultados del § 3, el polinomio $f(x)$ puede representarse en la forma

$$f(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}(x-\bar{a}_1)^{\lambda_1}\times$$
$$\times(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}(x-\bar{a}_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}(x-\bar{a}_n)^{\lambda_n}. \qquad (7.38)$$

Denotemos las partes real e imaginaria de la raíz a_k ($k=1, 2, \ldots, n$) por u_k y v_k, respectivamente, es decir, sea que $a_k = u_k + iv_k$. Entonces, $\bar{a}_k = u_k - iv_k$. Para cualquier $k = 1, 2, \ldots, n$, transformemos la expresión

$$(x-a_k)^{\lambda_k}(x-a_k)^{\lambda_k}=[(x-a_k)(x-\bar{a}_k)]^{\lambda_k}=$$
$$=[(x-u_k-iv_k)(x-u_k+iv_k)]^{\lambda_k}=$$
$$=[(x-u_k)^2+v_k^2]^{\lambda_k}=(x^2+p_kx+q_k)^{\lambda_k}, \qquad (7.39)$$

donde

$$p_k=-2u_k,\quad q_k=u_k^2+v_k^2.$$

Poniendo (7.39) en (7.38), obtenemos definitivamente la siguiente descomposición del polinomio $f(x)$ en el producto de factores reales irreductibles:

$$f(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}. \qquad (7.40)$$

Llegamos a la conclusión de que el polinomio $f(x)$ con coeficientes reales se descompone en el producto (7.40) de factores irreductibles con tal que los factores correspondientes a las raíces reales tienen

*) Además, tomamos en consideración que la derivada del polinomio con coeficientes reales es también polinomio con coeficientes reales.

**) A continuación, tendremos que tratar con polinomios de la variable que toma *solamente valores reales*. Por eso, para designarla es más conveniente emplear la letra x y no z.

forma de binomios en potencias iguales a la multiplicidad de raíces, y los factores correspondientes a los pares de raíces complejos tienen forma de trinomios cuadrados en potencias iguales a la multiplicidad de estos pares de raíces.

§ 7. Desarrollo de la fracción racional propia con coeficientes reales en una suma de fracciones simples con coeficientes reales

Tienen lugar dos afirmaciones siguientes.

Lema 3. *Sea* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *fracción racional propia con coeficientes reales cuyo denominador tiene el número real* a *como raíz de multiplicidad* α, *es decir,*

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\varphi(x), \text{ donde } \varphi(a)\neq 0.$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente expresión:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}. \tag{7.41}$$

En esta expresión, A *es número real igual a* $A=\frac{P(a)}{\varphi(a)}$, k *es número entero* $\geqslant 1$, *y* $\psi(x)$, *cierto polinomio con coeficientes reales con tal que la última fracción en el miembro derecho de* (7.41) *es propia.* El lema 3 no necesita demostración, puesto que se desprende inmediatamente del lema 2. Hay que solamente tener en cuenta que, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios con coeficientes reales y a, raíz real, los polinomios $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ también tienen coeficientes reales y, por tanto, la constante $A=\frac{P(a)}{\varphi(a)}$ es real.

Lema 4. *Sea* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *fracción racional propia con coeficientes reales cuyo denominador* $Q(x)$ *tiene los números complejos* $a=u+iv$ y $\overline{a}=u-iv$ *como raíces de multiplicidad* λ, *es decir,*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x), \text{ donde } \varphi(a)\neq 0,$$
$$\varphi(\overline{a})\neq 0, \; p=-2u, \; q=u^2+v^2. \tag{7.42}$$

Entonces, para esta fracción es válida la siguiente representación:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-k}\varphi(x)}. \tag{7.43}$$

En esta expresión M *y* N *son ciertas constantes reales,* k *es número entero* $\geqslant 1$, *y* $\psi(x)$ *es un polinomio con coeficientes reales con tal que la última fracción en el miembro derecho de* (7.43) *es propia.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4. Nos ponemos de acuerdo designar la parte real de la magnitud compleja A por el símbolo $\operatorname{Re}[A]$, la parte imaginaria, por el símbolo Im $[A]$. Pongamos*)

$$M=\frac{1}{v}\operatorname{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right],\quad N=\operatorname{Re}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right]-\frac{u}{v}\operatorname{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right].$$

No es difícil verificar que dichas M y N son la solución de la siguiente ecuación:

$$P(a)-(Ma+N)\,\varphi(a)=0. \tag{7.44}$$

En efecto, al dividir esta ecuación por $\varphi(a)$ y al igualar a cero las partes reales e imaginarias, obtenemos dos igualdades

$$\left.\begin{aligned} Mu+N&=\operatorname{Re}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right],\\ Mv&=\operatorname{Im}\left[\frac{P(a)}{\varphi(a)}\right],\end{aligned}\right\}$$

empleando las cuales determinamos M y N, anteriormente puestos. Ahora consideremos la diferencia

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}.$$

Reduciendo dicha diferencia al denominador común, tendremos

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}=\frac{P(x)-(Mx+N)\,\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\,\varphi(x)}=$$

$$=\frac{\Phi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\,\varphi(x)}. \tag{7.45}$$

Aquí, mediante $\Phi(x)$ se denota el polinomio con coeficientes reales de tipo $\Phi(x)=P(x)-(Mx+N)\,\varphi(x)$. La igualdad (7.44) permite afirmar que el número complejo a, y, por lo tanto, en virtud del teorema 7.4, el número $\bar{a}$ conjugado de él son raíces del polinomio $\Phi(x)$ de cierta multiplicidad $k\geqslant 1$. En este caso, para el polinomio $\Phi(x)$ es válida la representación

$$\Phi(x)=(x^2+px+q)^k\,\psi(x), \tag{7.46}$$

donde $\psi(x)$ es cierto polinomio con coeficientes reales que no tiene los números a y $\bar{a}$ como raíces. Poniendo la expresión (7.46) en la fórmula (7.45), obtenemos la expresión (7.43). La última fracción situada en el miembro derecho de (7.43) es propia lo que se desprende de que esta fracción es igual a la diferencia de dos fracciones propias.

El lema 4 queda demostrado.

---

*) En virtud de (7.42), $\varphi(a)\neq 0$, así que se puede considerar la relación $P(a)/\varphi(a)$.

La aplicación sucesiva de los lemas 3 y 4 a la fracción $P(x)/Q(x)$ respecto a todas las raíces del denominador nos lleva a la siguiente afirmación notable.

Teorema 7.5. *Sea* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *fracción racional propia con coeficientes reales cuyo denominador tiene la forma*

$$Q(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}.$$

Entonces, para esta fracción es válido el siguiente desarrollo en la suma de fracciones simples:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_1^{(1)}}{(x-b_1)}+\frac{B_2^{(1)}}{(x-b_1)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x-b_1)^{\beta_1}}+\ldots\\ \ldots+\frac{B_1^{(m)}}{(x-b_m)}+\frac{B_2^{(m)}}{(x-b_m)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta m}^{(m)}}{(x-b_m)^{\beta m}}+\\ +\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\\ +\frac{M_{\lambda_1}^{(1)}+N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}}+\ldots+\frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)}+\\ +\frac{M_2^{(n)}x+N_2^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^2}+\ldots+\frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x+N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}}.\end{aligned}\qquad(7.47)$$

En este desarrollo $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \ldots, B_{\beta_m}^{(m)}, M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \ldots, M_{\lambda_n}^{(n)}, N_{\lambda_n}^{(n)}$ *son ciertas constantes reales, una parte de las cuales pueden ser iguales a cero.*

OBSERVACIÓN. Para determinar concretamente las constantes que acabamos de mencionar, hay que reducir la igualdad (7.47) al denominador común y, después, comparar los coeficientes de potencias iguales de x en los numeradores.

EJEMPLOS Y EXPLICACIONES.

1°. Desarróllense la fracción propia

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

en la suma de fracciones simples.

Al cerciorarse de que el trinomio cuadrático x^2+x+1 tiene raíces complejas, buscamos, según el teorema 7.5, el desarrollo en la forma

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2((x^2+x+1)}=\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Reduciendo la igualdad (7.48) al denominador común, obtenemos

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)}=\frac{B_1\,(x^3-1)+B_2\,(x^2+x+1)+(Mx+N)\,(x^2-2x+1)}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)}.$$

Comparando los coeficientes de x^0, x^1, x^2 y x^3 en los numeradores, llegamos al sistema de ecuaciones*)

$$\begin{aligned} B_1+M&=2,\\ \left.\begin{aligned} B_2+N-2M&=4,\\ B_2+M-2N&=1,\end{aligned}\right\}\\ -B_1+B_2+N&=2.\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, hallemos $B_1=2$, $B_2=3$, $M=0$, $N=1$. Definitivamente, obtenemos

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2+x+1}. \qquad (7.49)$$

El método para hallar el desarrollo de la fracción racional propia que acabamos de ilustrar se denomina *método de coeficientes indeterminados*. Siempre lleva el objetivo; no es necesario demostrar la resolubilidad del sistema de ecuaciones obtenido después de aplicar este método. La resolubilidad se desprende del teorema 7.5.

2°. Ilustremos el método de coeficientes indeterminados con otro ejemplo. Se necesita hallar el desarrollo de la fracción propia

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)\,(x^2+1)^2}.$$

Ya que el trinomio cuadrado x^2+1 tiene raíces complejas, buscamos, según el teorema 7.5, el desarrollo en la forma

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)\,(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Reducimos la última igualdad al denominador común y después comparamos sus numeradores. Obtenemos

$$\begin{aligned}3x^4+2x^3+3x^2-1=B\,(x^4+2x^2+1)&+\\ +(M_1x+N_1)\,(x^3-2x^2+x-2)&+(M_2x+N_2)\,(x-2).\end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de x^0, x^1, x^2, x^3 y x^4, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} B+M_1&=3,\\ \left.\begin{aligned} N_1-2M_1&=2,\\ 2B+M_1-2N_1+M_2&=3,\end{aligned}\right\}\\ N_1-2M_1+N_2-2M_2&=0,\\ B-2N_1-2N_2&=-1.\end{aligned}$$

*) Al mismo tiempo, usamos la afirmación enunciada en la nota de la pág. 196.

Resolviendo este sistema, hallemos $B = 3$, $M_1 = 0$, $N_1 = 2$, $M_2 = 1$ y $N_2 = 0$. En definitiva, obtenemos

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}. \qquad (7.50)$$

3°. Como se desprende de los ejemplos considerados, el método de coeficientes indeterminados es bastante laborioso. Por eso cuando es posible, es lógico hallar otro método más simple para buscar coeficientes en el desarrollo de la fracción racional propia en la suma de las fracciones simples. Sea que el denominador $Q(x)$ de la fracción racional propia $P(x)/Q(x)$ tiene el número real a como la raíz de multiplicidad α. Entonces, entre las fracciones simples que integran la suma del desarrollo de la fracción $P(x)/Q(x)$ habrá la fracción

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}. \qquad (7.51)$$

Señalemos un método muy simple para calcular el coeficiente A de esta fracción simple. Empleando el lema 3 y la fórmula (7.41), nos cercioramos de que el coeficiente A es igual a

$$A = P(a)/\varphi(a), \quad \text{donde } \varphi(x) = Q(x)/(x-a)^{\alpha}.$$

Llegamos a la regla siguiente: *para calcular el coeficiente A de la fracción simple* (7.51) *correspondiente a la raíz real a de multiplicidad α del polinomio $Q(x)$, hay que eliminar el factor $(x-a)^{\alpha}$ en el denominador de la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y en la expresión restante tomar $x = a$.*

Dicho procedimiento de buscar el coeficiente A suele llamarse *método de eliminación*. Señalemos que este procedimiento es aplicable solamente a los cálculos de coeficientes de *potencias superiores de fracciones simples correspondientes a las raíces de $Q(x)$.*

El método de eliminación es especialmente eficaz si el denominador $Q(x)$ *tiene solamente raíces reales de multiplicidad* 1, es decir, si $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Entonces, como sabemos, es válido el desarrollo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_k}{x-a_k} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

cuyos coeficientes pueden calcularse por el método de eliminación. Para calcular el coeficiente A_k debemos eliminar el factor $(x-a_k)$ en el denominador de la fracción $P(x)/Q(x)$ y en la expresión restante tomar $x = a_k$.

EJEMPLO. Hállese el desarrollo de la fracción

$$\frac{x+1}{(x-1)x(x-2)}. \qquad (7.52)$$

Según el teorema 7.5, ponemos

$$\frac{x+1}{(x-1)\,x\,(x-2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x-2}.$$

Para hallar A_1, eliminamos, en la expresión (7.52), el factor $(x-1)$ y en la expresión restante tomamos $x=1$. Obtenemos $A_1=-2$. De modo análogo, hallamos $A_2=1/2$, $A_3=3/2$.

En definitiva, obtenemos

$$\frac{x+1}{(x-1)\,x\,(x-2)}=\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2\,(x-2)}. \tag{7.53}$$

§ 8. Problema de integración de la fracción racional

Ahora estamos preparados para resolver, en forma general, el problema de integración de la fracción racional con coeficientes rêales.

Ante todo, notemos que este problema se reduce al problema de integración *solamente de la fracción racional propia* puesto que toda fracción racional impropia puede representarse (mediante la división del numerador por el denominador «en columna») en forma de la suma del polinomio algebraico y la fracción racional propia.

EJEMPLO.

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^3+x+2}=(x^2-2x)+\frac{4x+1}{x^2+x+2},$$

ya que

$$\begin{array}{rl|l}
- & x^4-x^3+1 & x^2+x+2 \\
 & x^4+x^3+2x^2 & \overline{x^2-2x} \\ \cline{2-2}
- & -2x^3-2x^2+1 & \\
 & -2x^3-2x^2-4x & \\ \cline{2-2}
 & \text{el resto}\quad 1+4x &
\end{array}$$

Sabemos integrar el polinomio (recordemos que la integral indefinida del polinomio es cierto polinomio de potencia que es más alta en una unidad). Queda por aprender a integrar la fracción racional *propia*. En virtud del teorema 7.5, el problema de integración de la fracción racional propia se reduce a la integración de fracciones simples de *cuatro tipos siguientes*:

$$\text{I. } \frac{B}{x-b},\quad \text{II. } \frac{B}{(x-b)^{\beta}},\quad \text{III. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)},\quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x+px+q)^{\lambda}}. \tag{7.54}$$

Aquí $\beta=2, 3, \ldots$; $\lambda=2, 3, \ldots$; B, M, N, b, p y q son ciertos números reales con tal que el trinomio x^2+px+q no tiene raíces reales, es decir, $q=\frac{p^2}{4}>0$.

Demostremos que cada una de las cuatro fracciones mencionadas es integrable en funciones elementales.

Las fracciones de tipo I y II se integran fácilmente empleando la sustitución $t = x - b$. Obtenemos

$$\int \frac{B}{x-b}\,dx = B\int \frac{\partial t}{t} = B\ln|t| + C = B\ln|x-b| + C, \qquad (7.55)$$

$$\int \frac{B}{(x-b)^{\beta}}\,dx = B\int \frac{dt}{t^{\beta}} = -\frac{B}{(\beta-1)}\,\frac{1}{t^{\beta-1}} + C = \\ = \frac{-B}{(\beta-1)}\,\frac{1}{(x-b)^{\beta-1}} + C. \qquad (7.56)$$

Para calcular la integral de la fracción de tipo III, representemos el trinomio cuadrático en la forma $(x^2+px+q) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ y, teniendo en cuenta que $q-\frac{p^2}{4} > 0$, introduzcamos en consideración la constante real $a = +\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Haciendo la sustitución $t = x+\frac{p}{2}$, tendremos

$$\int \frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)}\,dx = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt = \\ = \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \\ = \frac{M}{2}\int \frac{d\,(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} = \\ = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \\ = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p}{4}}} + C. \qquad (7.57)$$

Queda por calcular la integral de la fracción de tipo IV. Empleando las denotaciones anteriormente introducidas $t = x+\frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, obtenemos

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}\,dx = \int \frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^{\lambda}}\,dt = \\ = \frac{M}{2}\int \frac{d\,(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}\,.$$

La integral que nos interesa será calculada si se calculan las integrales

$$I=\int \frac{d\,(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}}, \quad K_{\lambda}=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}.$$

La integral I se toma elementalmente:

$$I=-\frac{1}{(\lambda-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{\lambda-1}}+C=-\frac{1}{(\lambda-1)}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+C.$$

La integral K_{λ} fue calculada en el ejemplo 6 al final del § 2 del cap. 6. Allí, hemos obtenido para esta integral, la fórmula recurrente (6.12) que permite calcular sucesivamente K_{λ} para cualquier $\lambda=2, 3, \ldots$ basándose en que

$$K_1=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Así pues, hemos calculado las integrales de todas las cuatro fracciones simples (7.54) y hemos demostrado que cada una de estas integrales es *función elemental**). Por lo tanto, llegamos al siguiente teorema que resuelve el problema de integración de la fracción racional.

Teorema 7.6. *Toda fracción racional es integrable en funciones elementales.*

Para concluir este párrafo, examinemos ejemplos para calcular las integrales indefinidas de fracciones racionales. Calculemos las integrales indefinidas de tres fracciones consideradas en el párrafo anterior (7.49), (7.50) y (7.53). Empleando tres fórmulas mencionadas, así como las fórmulas (7.55), (7.56) y (7.57), tendremos:

1. $$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx=\int \frac{2}{x-1}\,dx+\int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx+\int \frac{dx}{x^2+x+1}=2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2. $$\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{3}{x-2}dx+\int \frac{2dx}{x^2+1}+\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=3\ln|x-2|+2\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=3\ln|x-2|+2\operatorname{arctg}x-\frac{2}{(x^2+1)}+C.$$

*) Se expresa más exacto por el logaritmo, arco tangente, y la función racional.

$$\text{›.}\ \int \frac{x+1}{(x-1)\,x\,(x-2)}\,dx=\int \frac{-2}{x-1}\,dx+\int \frac{dx}{2x}+$$
$$+\int \frac{3}{2\,(x-2)}\,dx=-2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x|+$$
$$\frac{3}{2}\ln|x-2|+C.$$

§ 9. Método de Ostrogradski

M. V. Ostrogradski*) propuso un método ingenioso de separar la *parte racional* de la integral de la fracción racional propia $P(x)/$ $/Q(x)$.

Analizando la forma de las integrales de cuatro fracciones simles (7.54), se puede hacer las deducciones siguientes:

1) Las integrales de las fracciones de tipo I y III cuyos denominadores comprenden binomio o trinomio en primera potencia, respectivamente, *son funciones trascendentes* (son iguales al logaritmo o al arco tangente).

2) La integral de la fracción de tipo II cuyo denominador comprende un binomio en potencia $\beta>1$ *es fracción racional propia con el denominador igual al mismo binomio en potencia* $\beta-1$.

3) La integral de tipo IV cuyo integrando comprende en el denominador un trinomio en potencia λ resulta**) ser *igual a la suma de la fracción racional propia con el denominador igual al mismo trinomio en potencia* $\lambda-1$ *y la integral que se reduce al arco tangente* const $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)}$.

Las deducciones 1), 2), 3) permiten concluir a qué es igual la parte racional de toda la integral de la fracción propia $P(x)/Q(x)$ que, además, se considera *irreducible*. Sea que el denominador $Q(x)$ tiene la forma

$$Q(x)=(x-b_1)^{\beta_1}\ldots(x-b_m)^{\beta m}(x^2+p_1x+$$
$$+q_1)^{\lambda_1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}. \qquad (7.58)$$

Entonces, la parte racional de la integral de la fracción racional propia $P(x)/Q(x)$ es igual a la suma de fracciones racionales propias cuyos denominadores son respectivamente iguales a

$$(x-b_1)^{\beta_1-1},\ \ldots,\ (x-b_m)^{\beta m-1},$$
$$(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1},\ \ldots,\ (x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1}.$$

La parte racional de la integral de la fracción $P(x)/Q(x)$ es, obviamente, la fracción racional propia $P_1(x)/Q_1(x)$ cuyo denominador

*) M. V. Ostrogradski, matemático ruso (1801—1861).

**) Tomando en consideración la fórmula recurrente (6.12) obtenida en la parte final del § 2 del cap. 6.

$Q_1(x)$ tiene la forma

$$Q_1(x)=(x-b_1)^{\beta_1-1}\ldots(x-b_m)^{\beta m-1}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1}. \qquad (7.59)$$

Calculemos ahora la suma de las fracciones simples cuyas integrales son funciones trascendentes. De las deducciones 1) y 3) se deduce que esta suma es igual a la fracción racional propia $P_2(x)/Q_2(x)$ cuyo denominador $Q_2(x)$ es igual a

$$Q_2(x)=(x-b_1)\ldots(x-b_m)(x^2+p_1x+q_1)\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_nx+q_n). \qquad (7.60)$$

De este modo, llegamos a la siguiente fórmula que fue obtenida por primera vez por M. V. Ostrogradski:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \qquad (7.61)$$

En la fórmula de Ostrogradski los polinomios $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ se determinan por las fórmulas (7.59) y (7.60) y pueden calcularse sin *descomponer el polinomio $Q(x)$ en el producto de factores irreductibles.*

En efecto, conforme a los resultados del § 4 (véase la fórmula (7.25)), el polinomio $Q_1(x)$ es el máximo común divisor de dos polinomios $Q(x)$ y $Q'(x)$ y puede calcularse valiéndose del algoritmo de Euclides (véase el § 4).

En virtud de las fórmulas (7.58), (7.59) y (7.60), el polinomio $Q_2(x)$ es el cociente $Q(x)/Q_1(x)$ y puede calcularse dividiendo $Q(x)$ por $Q_1(x)$ «en columna».

Queda por calcular los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$. Puesto que las fracciones $P_1(x)/Q_1(x)$ y $P_2(x)/Q_2(x)$ son propias, es lógico prefijar el polinomio $P_1(x)$ como polinomio con coeficientes indeterminados de grado inferior en una unidad que $Q_1(x)$, y $P_2(x)$, como polinomio con coeficientes indeterminados de grado inferior en una unidad que $Q_2(x)$. Para calcular dichos coeficientes indeterminados se debe diferenciar la fórmula de Ostrogradski (7.61), reducir el resultado al denominador común y comparar los coeficientes de potencias iguales de x en el numerador.

De este modo, el método de Ostrogradski es un procedimiento ingenioso para integrar una fracción racional sin desarrollarla anticipadamente en la suma de las simples. Este procedimiento es especialmente eficaz si las raíces de $Q(x)$ son, en la mayoría, múltiples o si es difícil hallar las raíces de $Q(x)$.

EJEMPLO. Calcular por el método de Ostrogradski

$$\int\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx.$$

Tenemos

$$Q(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$$
$$Q'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2.$$

Buscamos $Q_1(x)$ como el máximo común divisor de los polinomios $Q(x)$ y $Q'(x)$. Observemos que el máximo común divisor precisamente de estos dos polinomios ya fue hallado en el ejemplo considerado en la parte final del § 4. Es igual a

$$Q_1(x) = x^2 - x + 1.$$

Al dividir $Q(x)$ por $Q_1(x)$ «en columna», hallamos

$$Q_2(x) = x^2 - x + 1.$$

Prefijamos $P_1(x)$ y $P_2(x)$ como polinomios de primer grado con coeficientes indeterminados.

La fórmula de Ostrogradski (7.61) toma la forma

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2-x+1}\,dx. \qquad (7.62)$$

Para determinar los coeficientes A, B, C, D diferenciemos la fórmula (7.62). Obtenemos

$$\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} = \frac{A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2-x+1)}.$$

El resultado de diferenciación se reduce al denominador común después de que se comparan los numeradores. Obtenemos

$$6 - 7x - x^2 = A(x^2 - x + 1) - (Ax + B)(2x - 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1).$$

Comparando los coeficientes de x^0, x^1, x^2, y x^3, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} C=0, \\ -A+D-C=-1, \\ -2B-D+C=-7, \\ A+B+D=6. \end{gathered}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $A = 2$, $B = 3$, $C = 0$, $D = 1$. De este modo, la fórmula (7.62) toma la forma

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \int \frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Al calcular la integral en el miembro derecho, hallamos definitivamente

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}\,dx = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

§ 10. Integración de algunas expresiones irracionales y trascendentes

En los párrafos anteriores hemos establecido que la integral de cualquier fracción racional es función elemental. En el párrafo presente consideremos *otras clases de funciones integrables en funciones elementales.* Como regla, haciendo cierta sustitución reduciremos la integral de la función considerada a la integral de la fracción racional. En cuanto a dicha sustitución, decimos que ella racionaliza la integral de la función considerada.

1. Integración de algunas expresiones trigonométricas. Nos ponemos de acuerdo que en adelante siempre designaremos cualquier función racional de dos argumentos x e y *) por el símbolo $R(x, y)$.

En este punto demostremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de tipo

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x). \tag{7.63}$$

Demostremos que la integral de esta función se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. En efecto,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

así que

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Puesto que la función racional de la función racional es también función racional, entonces la integral del miembro derecho de la última igualdad es integral de la fracción racional.

Siendo universal, la sustitución $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ que racionaliza la integral de la función (7.63), lleva, con frecuencia, a cálculos voluminosos. En relación con esto, señalaremos varios casos particulares en los que se puede racionalizar la integral de la función (7.63) empleando otras sustituciones más simples.

---

*) La función racional de dos argumentos se define del modo siguiente. Se denomina polinomio de grado n de dos argumentos x e y la expresión de forma $P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots + a_{0n}y^n$, donde $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$ son ciertos números constantes. Se denomina función racional de dos argumentos la expresión de forma $P_n(x, y)/Q_m(x, y)$, donde $P_n(x, y)$ es polinomio arbitrario de dos argumentos de grado n, y $Q_m(x, y)$, polinomio arbitrario de dos argumentos de grado m.

Ante todo, notemos dos propiedades elementales de la función racional de dos argumentos $R(u, v)$:

1°. Si la función racional $R(u, v)$ no cambia su valor al variar el signo de uno de sus argumentos (por ejemplo, u), es decir, si $R(-u, v) = R(u, v)$, entonces, esta función racional puede reducirse a la forma $R(u, v) = R_1(u^2, v)$, donde R_1 es cierta función racional de sus dos argumentos. (Esta función comprende solamente potencias *pares* de u.)

2°. Si, al variar el signo de u, la función $R(u, v)$ también cambia de signo, es decir, $R(-u, v) = -R(u, v)$, entonces, ella se reduce a la forma $R(u, v) = R_2(u^2, v)\,u$. (La propiedad 2° se desprende directamente de la propiedad 1° si la aplicamos a la función $R(u, v)/u$.)

Consideremos ahora el problema de la racionalización de la integral de la función (7.63) para varios casos particulares.

I. Sea que $R(u, v)$ *cambia de signo al variar el signo de u*. Entonces, según la propiedad 2°,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R_2(\operatorname{sen}^2 x, \cos x) \operatorname{sen} x\,dx =$$
$$= -\int R_2(1 - \cos^2 x, \cos x)\,d(\cos x).$$

De este modo, la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \cos x$.

II. Luego, sea que la función $R(u, v)$ *cambia de signo al variar el signo de v*. Entonces, según la misma propiedad 2°,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R_3(\operatorname{sen} x, \cos^2 x) \cos x\,dx =$$
$$= \int R_3(\operatorname{sen} x, 1 - \operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen} x),$$

es decir, la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{sen} x$.

III. En fin, sea que la función $R(u, v)$ *no cambia su valor si los signos de u y v varían simultáneamente*, es decir,

$$R(-u, v) = R(u, v).$$

Demostremos que en este caso la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{tg} x$. En efecto, en este caso,

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

$$R(-u, -v) = R\left(\frac{u}{v}(-v), -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right).$$

De este modo,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Pero, entonces, según la propiedad 1°,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

En definitiva, obtenemos

$$R(u, v) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

De aquí,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)\,dx =$$
$$= \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) dx = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

donde $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

EJEMPLOS. 1) Calcúlese la integral $I_1 = \int \dfrac{dx}{1+a\cos x}$, donde $a > 0$, $a \neq 1$. Aplicando la sustitución trigonométrica universal $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, obtenemos

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$I_1 = 2\int \frac{dt}{(a+1)+t^2(1-a)} = \frac{2}{a+1}\int \frac{dt}{1+\frac{1-a}{1+a}t^2}.$$

Luego, es necesario considerar dos casos por separado: 1) $0 < a < 1$, 2) $a > 1$. En el caso de que $0 < a < 1$,

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

En el caso de que $a > 1$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}{1-t\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

2) Calcúlese la integral $I_2 = \int \dfrac{\operatorname{sen} x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x+1}$.

Ya que el integrando cambia de signo al variar el signo de sen x, entonces, según I, hay que hacer la sustitución $t = \cos x$. Como resultado, obtenemos

$$I_2 = -\int \frac{dt}{1-t^2+1} = \int \frac{dt}{t^2-2} =$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x+\sqrt{2}}{\cos x-\sqrt{2}}\right| + C.$$

3) Calcúlese la integral $I_3 = \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x} dx$.

Ya que el integrando conserva el valor si los signos de sen x y cos x varían simultáneamente, entonces, según III, hay que hacer la sustitución $t = \operatorname{tg} x$. Como resultado, obtenemos

$$I_3 = \int \frac{t\,dt}{t^4+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2)}{(t^2)^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t^2) + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C.$$

2. Integración de irracionalidades fraccionales lineales. En este punto demostraremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de tipo

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \tag{7.64}$$

donde a, b, c y d son ciertas constantes, n es cualquier número positivo entero. La función de este tipo se denomina *irracionalidad fraccional lineal*.

Demostremos que si $ad - bc \neq 0$ la sustitución $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ racionaliza la integral de la función (7.64). En efecto,

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - c\cdot t^n}, \quad dx = \frac{(ad-bc)\,nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt,$$

así que

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right) \frac{(ad-bc)\,nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Ya que la función racional de una función racional es también función racional, entonces, la integral del miembro derecho de la última igualdad es integral de la fracción racional. Por lo tanto, queda demostrado que la integral de la irracionalidad fraccional lineal (7.64) se racionaliza por la sustitución

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

EJEMPLO. Calcúlese la integral $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}$. Haciendo la sustitución

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad t^2 = \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

obtenemos

$$I = 2\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

3. Integración de diferenciales binomiales. Se denomina *diferencial binomial* la expresión de forma

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

donde a y b son constantes cualesquiera, y los exponentes de las potencias m, n y p, ciertos números racionales. Examinemos el problema de la integrabilidad en funciones elementales de las diferenciales binomiales.

Ante todo, señalemos *tres casos* cuando la integral de una diferencial binomial admite sustitución que racionaliza.

1°. El primer caso corresponde a *p entero*. La diferencial binomial es irracionalidad fraccional lineal de tipo $R(x, \sqrt[r]{x})\, dx$, donde r es el mínimo común múltiplo de los números racionales m y n. Por lo tanto, en este caso, la sustitución $t = \sqrt[r]{x}$ racionaliza la integral de la diferencial binomial.

2°. El segundo caso corresponde al *número entero* $\frac{m+1}{n}$. Haciendo la sustitución $z = x^n$ y poniendo, para abreviar, $q = \frac{m+1}{n} - 1$, tendremos

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int (a+bz)^p z^q \, dz. \tag{7.65}$$

La función subintegral en el miembro derecho de (7.65) es irracionalidad fraccional lineal de forma $R(z, \sqrt[s]{a + bz})$, donde s es el denominador del número racional p.

De este modo, en el segundo caso la diferencial bonomial se racionaliza por la sustitución

$$t = \sqrt[s]{a+bz} = \sqrt[s]{a+bx^n}.$$

3°. El tercer caso corresponde al *número entero* $\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$. La función subintegral en el miembro derecho de (7.65) es irracionalidad lineal fraccional de forma $R\left(z, \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}\right)$, así que la integral de la diferencial binomial se racionaliza por la sustitución de forma

$$t = \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[s]{\frac{a}{x^n} + b}.$$

A mediados del siglo pasado P. L. Chebishov *) demostró que *tres casos anteriormente mencionados agotan todos los casos cuando la diferencial binomial se integra en funciones elementales.*

EJEMPLOS. 1). Calcúlese la integral $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}} = \int x^{-2} \times \times (a+bx^2)^{-1/2}\, dx$. Aquí $m = -2$, $n = 2$, $p = -1/2$, así que $\frac{m+1}{n} + p = -1$ (el tercer caso). Haciendo la sustitución

$$t = \sqrt{\frac{a}{x^2} + b}, \quad x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t^2-b}}, \quad dx = -\frac{\sqrt{a}\, t\, dt}{\sqrt{(t^2-b)^3}},$$

tendremos

$$I = \int \left(-\frac{dt}{a}\right) = -\frac{t}{a} + C = -\frac{\sqrt{\frac{a}{x^2}+1}}{a} + C.$$

*) P. L. Chebishov, gran matemático ruso (1821—1894).

2) Calcúlese la integral $I = \int x^5 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$. En este caso $m=5$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, así que $\frac{m+1}{n} = 3$ (el segundo caso). Haciendo la sustitución

$$t=\sqrt{1-x^2},\quad x=\sqrt{1-t^2},\quad dx=-\frac{t\,dt}{1-t^2},$$

tendremos

$$I=-\int (1-t^2)^2\,dt=-\int dt+2\int t^2\,dt-\int t^4\,dt=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{t^5}{5}+C=$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5}+C.$$

4. Integración de irracionalidades cuadráticas por sustituciones de Euler. En este punto demostremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de forma

$$R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right), \tag{7.66}$$

donde a, b y c son ciertas constantes. La función de este tipo se denomina *irracionalidad cuadrática*. Naturalmente, consideremos que el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + e$ no tiene raíces *iguales* (de lo contrario, la raíz de este trinomio puede sustituirse por una expresión racional).

Demostremos que la integral de la función (7.66) siempre se racionaliza por una de las llamadas *sustituciones de Euler*.

En primer lugar, consideremos el caso cuando el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tiene raíces *complejas*. En este caso el signo del trinomio cuadrático coincide con el signo de a, y, debido a que el trinomio cuadrático (de que se extrae la raíz cuadrada) es *positivo* por el sentido, entonces, $a > 0$.

De este modo, tenemos derecho hacer la siguiente sustitución:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}. \tag{7.67}$$

La sustitución (7.67) suele llamarse *primera sustitución de Euler*. Demostremos que esta sustitución racionaliza la integral de la función (7.66) para el caso considerado. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$, obtenemos $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx$, así que

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$
$$dx=2\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$
$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\ \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)2\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt.$$

En el miembro derecho bajo el signo de la integral está la fracción racional.

Ahora, consideremos el caso cuando el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tiene raíces *reales* no coincidentes x_1 y x_2.

En este caso $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Demostremos que entonces la integral de la función (7.66) se racionaliza haciendo la sustitución

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}, \tag{7.68}$$

que suele llamarse *segunda sustitución de Euler*. En efecto, elevando al cuadrado la igualdad $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ y reduciendo la igualdad obtenida por $(x - x_1)$, obtenemos $a(x - x_2) = t^2(x - x_1)$, así que

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}\,t,$$
$$dx=\frac{2a(x_1-x_2)\,t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$
$$=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\ \frac{a(x_1-x_2)\,t}{t^2-a}\right)\frac{2a(x_1-x_2)\,t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

En el miembro derecho bajo el signo de la integral, está la fracción racional.

EJEMPLOS. 1) Calcúlese la integral $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Puesto que el trinomio cuadrático x^2+x+1 tiene raíces complejas, hagamos la primera sustitución de Euler

$$t=\sqrt{x^2+x+1}+x.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{x^2+x+1}= t - x$, obtenemos $x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$ o $x+1=t^2-2tx$ así que

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\quad dx=2\,\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$I=2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,dt=\int\left[\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\right]dt.$$

Los coeficientes indeterminados A, B y C se calculan fácilmente: $A=2$, $B=-3$, $C=-3$. En definitiva, obtenemos

$$I=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C=$$
$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{x^2+x+1}\right|\frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})}+C.$$

2) Calcúlese la integral $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. Puesto que el trinomio cuadrático $1-2x-x^2$ tiene raíces reales $x_1=-1+\sqrt{2}$ y $x_2=-1-\sqrt{2}$, hagamos la segunda sustitución de Euler (7.68)

$$t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{1-2x-x^2}=t(x+1+\sqrt{2})$, tendremos $(-1)(x+1-\sqrt{2})=t^2(x+1+\sqrt{2})$, así que

$$x=\frac{-t^2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1}{t^2+1},\quad \sqrt{1-2x-x^2}=\frac{2\sqrt{2}}{t^2+1}\,t,$$
$$1+\sqrt{1-2x-x^2}=\frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1},\quad dx=-\frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$I=-4\sqrt{2}\frac{t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}.$$

Obtenemos la integral de la fracción racional que puede calcularse por el lector.

5. Integración de irracionalidades cuadráticas mediante otros procedimientos. Aunque las sustituciones de Euler siempre racionalizan la integral de la función (7.66), ellas suelen llevar a cálculos muy voluminosos y complicados. Por eso, en la práctica se usan con frecuencia otros procedimientos de integración de la función (7.66). Estos procedimientos se examinan en el punto presente.

Introduciendo la designación $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ y teniendo en cuenta que y^2 es polinomio, podemos representar la función (7.66) en forma de la suma

$$R(x,\ y)=R_1(x)+R_2(x)/y,$$

donde $R_1(x)$ y $R_2(x)$ son ciertas funciones racionales de una variable. Ya que la integral de $R_1(x)$ se toma (en funciones elementales), es suficiente calcular la integral de la función $R_2(x)/y$.

Ya sabemos *) que toda fracción racional $R_2(x)$ puede representarse en forma de la suma de un polinomio $P(x)$ y la fracción *racional* propia $R_3(x)$. A su vez, la fracción racional propia $R_3(x)$ puede desarrollarse en la suma de fracciones simples. Tomándolo en consideración, podemos afirmar que el problema de integración de la función $R_2(x)/y$ se reduce al cálculo de las integrales de *tres tipos* siguientes:

I. $\int \frac{P(x)}{y}\,dx$, donde $P(x)$ es polinomio.

II. $\int \frac{B}{(x-A)^{\alpha}y}\,dx$, donde A y B son constantes, α es número natural.

III. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}y}\,dx$, donde M, N, p y q son constantes, λ es número natural con tal que $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Detengámonos en el cálculo de las integrales de tipo I, II *y* III *por separado.*

I. Para calcular la *integral de tipo* I, ante todo establecemos la fórmula recurrente para la integral

$$I_m=\int \frac{x^m\,dx}{y},\ \text{donde } m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Para hacerlo, suponiendo $m\geqslant 1$, integremos la siguiente identidad que se verifica por la diferenciación:

$$(x^{m-1}y)'=ma\,\frac{x^m}{y}+\left(m-\frac{1}{2}\right)b\,\frac{x^{m-1}}{x}+(m-1)\,c\,\frac{x^{m-2}}{y}.$$

Integrando esta identidad llegamos a la igualdad

$$x^{m-1}y=maI_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bI_{m-1}+(m-1)\,cI_{m-2}. \tag{7.69}$$

Tomando $m=1$ en la igualdad (7.69), hallamos

$$I_1=\frac{1}{a}\,y-\frac{b}{2a}\,I_0. \tag{7.70}$$

Luego, poniendo $m=2$ en la igualdad (7.69) y empleando el valor ya calculado I_1 (es decir, la fórmula (7.70)), hallamos

$$I_2=\frac{1}{4a^2}\,(2ax-3b)\,y+\frac{1}{8a^2}\,(3b^2-4ac)\,I_0.$$

Luego continuando los razonamientos análogos, llegamos a la siguiente fórmula común:

$$I_m=P_{m-1}(x)\,y+c_mI_0, \tag{7.71}$$

donde $P_{m-1}(x)$ es polinomio de grado $m-1$, y c_m, constante. Si en la integral de tipo I $P(x)$ es polinomio de grado n, entonces la integral de tipo I será igual a la suma de las integrales $I_0, I_1, \ldots, I_n$ con ciertos multiplicadores constantes

*) Véase el § 8.

(coeficientes del polinomio $P(x)$). Por lo tanto, en virtud de la igualdad (7.71), obtenemos definitivamente la siguiente fórmula para la integral de tipo I:

$$\int \frac{P(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)\,y + C_0 \int \frac{dx}{y}. \tag{7.72}$$

En esta fórmula $Q_{n-1}(x)$ es polinomio de grado $n-1$, y C_0, constante. Para determinar el polinomio $Q_{n-1}(x)$ y la constante C_0 se emplea el *método de coeficientes indeterminados*. El polinomio $Q_{n-1}(x)$ se escribe como polinomio con coeficientes literales

$$Q_{n-1}(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}.$$

Diferenciando la igualdad (7.72) y multiplicando el resultado de diferenciación por y, obtenemos

$$P(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + C_0. \tag{7.73}$$

En ambos miembros de la igualdad (7.73) hay polinomios de grado n. Igualando sus coeficientes, obtenemos el sistema de $n+1$ ecuaciones lineales, de la cuales se determinan $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ y C_0. La resolubilidad del sistema obtenido se desprende de la validez de la fórmula (7.72) demostrada anteriormente. Queda por agregar que la integral situada en el miembro derecho de (7.72) se reduce a la integral de tabla por el cambio lineal de la variable $t = x + \frac{b}{2a}$.

Empleando dicho cambio, la integral $\int \frac{dx}{y}$ se reduce, con exactitud de hasta factor constante, a una de las dos integrales siguientes:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + C \quad (k = \mathrm{const} > 0)$$

ó

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} = \arcsen \frac{t}{k} + C.$$

EJEMPLO. Calcúlese la integral

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$$

Para la integral considerada la fórmula (7.72) tiene la forma

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx = (A_0 + A_1x + A_2x^2)\sqrt{1+2x-x^2} + C_0 \int \frac{dx}{1+2x-x^2}. \tag{7.74}$$

Diferenciando esta fórmula y multiplicando el resultado de la diferenciación por $\sqrt{1+2x-x^2}$, obtenemos

$$x^3 = (A_1 + 2A_2x)(1+2x-x^2) + (A_0 + A_1x + A_2x^2)(1-x) + C_0.$$

Igualando los coeficientes de x^3, x^2, x^1, x^0 en los miembros derecho e izquierdo, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -3A_2 &= 1, \\ 5A_2 - 2A_1 &= 0, \\ 2A_2 + 3A_1 - A_0 &= 0, \\ A_1 + A_0 + C_0 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $A_2 = -1/3$, $A_1 = -5/6$, $A_0 = -19/6$, $C_0 = 4$. La integral en el miembro derecho de (7.74) se calcula haciendo la sustitución de la variable $t = x - 1$. Obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

En definitiva, tendremos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\, dx = \left(-\frac{19}{6} - \frac{5}{6}\, x - \frac{1}{3}\, x^2\right) \sqrt{1+2x-x^2} + 4 \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

II. Pasamos a calcular la *integral de tipo* II. Mostremos que esta integral se reduce a la integral de tipo I haciendo la sustitución $t = \frac{1}{x-A}$. En efecto, puesto que

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad ax^2 + bx + c = \frac{(A^2a + Ab + c)\, t^2 + (2aA + b)\, t + a}{t^2},$$

obtenemos

$$\int \frac{B}{(x-A)^{\alpha}\, y}\, dx = -\int \frac{Bt^{\alpha-1}\, dt}{\sqrt{A^2a + Ab + c)\, t^2 + (2aA + b)\, t + a}}.$$

III. Calculemos, por fin, la *integral de tipo* IIII, ante todo, *para el caso particular de* $p = 0$, $b = 0$, es decir, calculemos la integral

$$K = \int \frac{Mx + N}{(x^2+q)^{\lambda} \sqrt{ax^2+c}}\, dx.$$

Esta integral se descompone en la suma de dos integrales

$$K_1 = M \int \frac{x\, dx}{(x^2+q)^{\lambda} \sqrt{ax^2+c}} \quad \text{y} \quad K_2 = N \int \frac{dx}{(x^2+q)^{\lambda} \sqrt{ax^2+c}}.$$

La primera de estas integrales puede escribirse en la forma

$$K_1 = \frac{M}{2} \int \frac{d\,(x^2)}{(x^2+q)^{\lambda} \sqrt{ax^2+c}},$$

de la cual se desprende que la función subintegral es irracionalidad *lineal* (no cuadrática) respecto a x^2. En virtud de lo demostrado en el p. 2, la integral K_1 se racionaliza por la sustitución $t = \sqrt{ax^2+c}$. La integral K_2 puede escribirse en la forma *)

$$K_2 = N \int \frac{\frac{1}{x^{2\lambda-2}} \frac{dx}{x^3}}{\left(1 + q\, \frac{1}{x^2}\right)^{\lambda} \sqrt{a + c\, \frac{1}{x^2}}} = -\frac{N}{2} \int \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\lambda-1} d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left[1 + q\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\lambda} \sqrt{a + c\, \frac{1}{x^2}}},$$

*) Consideramos que $x \neq 0$.

de la cual se desprende que la función subintegral es irracionalidad lineal respecto a $1/x^2$. Por lo tanto, la sustitución $r=\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}$ racionaliza la integral K_2.

Así pues, para el caso particular cuando los dos trinomios cuadráticos *no tienen términos de primer grado*, la integral de tipo III fue racionalizada.

Consideremos ahora el *caso general* de la integral de tipo III y mostremos que puede reducirse a la integral de forma particular examinada anteriormente. Si los coeficientes de los trinomios cuadráticos satisfacen la relación

$$b = ap, \tag{7.75}$$

entonces para reducir la integral de tipo III a la integral de forma particular anteriormente examinada es suficiente hacer la sustitución $x=t-\frac{p}{q}$. En efecto, obtenemos

$$\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\int \frac{Mt+\left(\frac{Mp}{2}+N\right)}{\left[t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^{\lambda}\sqrt{at^2+\left(c-\frac{ap^2}{4}\right)}}\,dt.$$

Es más complicado reducir la integral de tipo III a la integral de forma particular anteriormente examinada si los coeficientes de los trinomios cuadráticos *no satisfacen* la relación (7.75). En este caso, primeramente hacemos la sustitución lineal fraccional

$$x=\frac{\mu t+\nu}{1+t}, \tag{7.76}$$

escogiendo las constantes μ y ν de tal modo que los trinomios cuadráticos *no comprendan términos de primer grado respecto a t*. Mostremos que se puede escoger tales μ y ν. En efecto, al hacer la sustitución (7.76), tendremos

$$x^2+px+q=\frac{(\mu^2+p\mu+q)\,t^2+[2\mu\nu+p\,(\mu+\nu)+2q]\,t+(\nu^2+p\nu+q)}{(1+t)^2},$$

$$ax^2+bx+c=\frac{(a\mu^2+b\mu+c)\,t^2+[2\mu\nu a+b\,(\mu+\nu)+2c]\,t+(a\nu^2+b\nu+c)}{(1+t)^2}.$$

De este modo, los coeficientes μ y ν se determinan valiéndose del sistema de ecuaciones

$$2\,\mu\nu+p\,(\mu+\nu)+2q=0, \quad 2\mu\nu a+b\,(\mu+\nu)+2c=0$$

o del sistema de ecuaciones equivalentes

$$\mu+\nu=-\frac{2\,(c-aq)}{b-ap}, \quad \mu\cdot\nu=\frac{cp-bq}{b-ap}.$$

Por lo tanto, μ y ν son raíces de la ecuación cuadrática

$$z^2+\frac{2\,(c-ap)}{b-ap}\,z+\frac{cp-bq}{b-ap}=0. \tag{7.77}$$

Queda por demostrar que la ecuación cuadrática (7.77) tiene raíces reales y diferentes. Para esto basta demostrar que el discriminante de esta ecuación es positivo, o sea, basta argumentar la desigualdad

$$(c-aq)^2>(cp-bq)\,(b-ap). \tag{7.78}$$

Es fácil convencerse de que la desigualdad (7.78) es equivalente a la siguiente desigualdad:

$$[2(c+aq)-bp]^2 > (4q-p^2)(4ac-b^2). \tag{7.79}$$

Puesto que el trinomio cuadrático (x^2+px+q) tiene raíces complejos, entonces $4q-p^2>0$.

A ciencia cierta, la desigualdad (7.79) tiene lugar si $4ac-b^2>0$. Demostremos que esta desigualdad es también válida si $4ac-b^2>0$. En este caso, $q>0$, $ac>0$ y $4\sqrt{acq}>pb$. Por eso, teniendo en cuenta que $\frac{c+aq}{2} \geqslant \sqrt{caq}$, tendremos

$$[2(c+aq)-bp]^2 \geqslant [4\sqrt{qac}-pb]^2 =$$
$$= (4q-p^2)(4ac-b^2)+4(p\sqrt{ac}-b\sqrt{q})^2 \geqslant (4q-p^2)(4ac-b^2)$$

Esta serie de desigualdades tiene al menos un símbolo de desigualdad estricta $>$ puesto que el primer símbolo $\geqslant$ se convierte en el símbolo $=$ sólo para $c=aq$, pero, si $c=aq$, en virtud de que $b\neq ap$, a ciencia cierta $(p\sqrt{ac}-b\sqrt{q})\neq 0$, y, por eso, el segundo símbolo $\geqslant$ no se convierte en el símbolo $=$. Así pues, hemos demostrado la desigualdad (7.79), es decir, la posibilidad de escoger μ y ν tales que los trinomios cuadráticos obtenidos no comprenden términos de primer grado respecto a t. Haciendo la sustitución (7.76) con dichos μ y ν, reducimos la integral de tipo III a la forma

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+q_1)^{\lambda}\sqrt{a_1t^2+c_1}}, \tag{7.80}$$

donde a_1, c_1 y q_1 son ciertas constantes, $P(t)$ es polinomio de grado $2\lambda-1$. Al desarrollar*) la fracción $\frac{P(t)}{(t^2+q_1)^{\lambda}}$ en la suma de las fracciones simples, reducimos el problema de calcular la integral (7.80) al de calcular la suma de integrales en la forma

$$\int \frac{M_kt+N_k}{(t^2+q_1)^k\sqrt{a_1t^2+c_1}}\,dt \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \lambda).$$

Cada una de estas integrales se refiere al tipo particular anteriormente examinado. Por lo tanto hemos demostrado la integrabilidad (en funciones elementales) de las integrales de todos los tres tipos I, II y III. De este modo, aparte de las sustituciones de Euler, hemos demostrado una vez más la integrabilidad de la función (7.66) en funciones elementales.

EJEMPLO. Calcúlese la integral $I=\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. Esta integral se refiere al tipo III. Ya que para ella ha sido infringida la relación (7.75), ante todo debemos hacer la sustitución (7.76). Como resultado de esta última, obtenemos

$$x^2+x+1=\frac{(\mu^2+\mu+1)\,t^2+[2\mu\nu+(\mu+\nu)+2]\,t+(\nu^2+\nu+1)}{(1+t)^2},$$
$$x^2-x+1=\frac{(\mu^2-\mu+1)\,t^2+[2\mu\nu-(\mu+\nu)+2]\,t+(\nu^2-\nu+1)}{(1+t)^2}$$

*) Cuando $\lambda>1$.

Las constantes μ y ν se hallan valiéndose del sistema de ecuaciones

$$2\mu\nu + (\mu + \nu) + 2 = 0, \quad 2\mu\nu - (\mu + \nu) + 2 = 0.$$

Es fácil convencerse de que *) $\mu = 1$, $\nu = -1$. De este modo, la sustitución (7.76) tiene la forma $x = \dfrac{t-1}{t+1}$ de manera que

$$t = \frac{x+1}{1-x}, \quad dx = \frac{2\,dt}{(1+t)^2}, \quad x^2+x+1 = \frac{3t^2+1}{(1+t)^2},$$
$$x^2-x+1 = \frac{t^3+3}{(1+t)^2}.$$

La integral considerada toma a forma

$$I = 2\int \frac{(1+t)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}} = I_1 + I_2,$$

donde

$$I_2 = 2\int \frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}, \quad I_2 = 2\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Para calcular la integral I_1, hagamos la sustitución $u = \sqrt{3t^2+1}$, para la integral I_2, la sustitución $v = \sqrt{3 + \frac{1}{t^2}}$. Como resultado, obtenemos

$$I_1 = 2\int \frac{du}{u^2+8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{8}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2+x+1}{2(1-x)^2}} + C,$$

$$I_2 = -2\int \frac{dv}{3v^2-8} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{v + \sqrt{\frac{8}{3}}}{v - \sqrt{\frac{8}{3}}} \right| + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}} + \sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}}\ \sqrt{\frac{8}{3}}} \right| + C.$$

§ 11. Integrales elípticas

Las integrales de irracionalidades cuadráticas lógicamente incluyen las siguientes integrales:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right) dx, \tag{7.81}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right) dx \tag{7.82}$$

cuyas funciones subintegrales comprenden la raíz cuadrada de polinomios de tercer o cuarto grado.

Estas integrales se encuentran con mucha frecuencia en aplicaciones. Notemos inmediatamente que las integrales (7.81) y (7.82), *no son, hablando en general, funciones elementales.*

*) Se podría tomar al contrario: $\mu = -1$, $\nu = 1$.

Las dos integrales suelen llamarse *elípticas* si no se expresan mediante funciones elementales, y *seudoelípticas* si se expresan mediante funciones elementales *).

Debido a que las integrales (7.81) y (7.82) tienen importancia en aplicaciones, surge la necesidad de confeccionar tablas y gráficas de las funciones que se determinan por estas integrales. Para los coeficientes a, b, c, d y e, que son arbitrarios, es muy difícil hacer las tablas y las gráficas. Por eso surgió el problema de reducir todas las integrales de tipo (7.81) y (7.82) a ciertos tipos de integrales que comprenden el menor número posible de coeficientes arbitrarios (o como se dice reducir las integrales (7.81) y (7.82) a *la forma canónica*).

Ante todo, notemos que la integral (7.81) se reduce a la integral (7.82). En efecto, el trinomio cúbico tiene, a ciencia cierta, al menos una raíz real x_0, por lo que puede representarse en la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_0)(x^2 + + px + q)$.

Haciendo la sustitución $x - x_0 = \pm t^2$, transformamos la integral (7.81) en la (7.82).

De este modo, es suficiente considerar solamente la integral (7.82).

En virtud de los resultados del § 6, el polinomio de cuarto grado puede descomponerse en el producto de dos trinomios cuadráticos con coeficientes reales

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q').$$

Siempre existe una sustitución lineal o lineal fraccional que elimina los términos lineales de ambos trinomios cuadráticos **). Haciendo la sustitución de este tipo, con exactitud de hasta el sumando que es función elemental, transformemos la integral (2.82) a la forma

$$\int \frac{R(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}, \tag{7.83}$$

donde R es cierta función racional. Luego, se puede mostrar que para cualesquiera combinaciones de valores absolutos y signos de las constantes A, m y m' existe una sustitución que reduce la integral (7.83) a la llamada integral canónica

$$\int \frac{R_1(z^2)\,dz}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \tag{7.84}$$

en la cual mediante k se denota una constante que satisface la condición $0 < k < < 1$.

Toda integral canónica (7.84) puede reducirse a tres integrales normales siguientes con exactitud de hasta un sumando que es función elemental:

$$\begin{gathered}\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2\,dz}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \\ \int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (0<k<1).\end{gathered} \tag{7.85}$$

Las integrales (7.85) suelen llamarse *integrales elípticas de primer, segundo y tercer género*, respectivamente. Como mostró Liouville ***), cada una de estas integrales es función *no elemental*. Las integrales elípticas de primer y segundo género comprenden solamente un parámetro k que toma valores reales del intervalo $0 < k < 1$, y, además, la integral elíptica de tercer género comprende el parámetro h que puede también tomar valores complejos.

---

*) Joseph Liouville, matemático francés (1809—1882).

**) Las denominaciones de estas integrales fueron dadas por primera vez cuando los matemáticos tropezaron con el problema de rectificar la elipse (véase el ejemplo 3 del p. 6 del § 1 del cap. 2, tomo 2).

***) Se demuestra de modo igual que en el p. 5 del § 10.

Legendre *) simplificó aun más las integrales (7.85) haciendo la sustitución $z = \operatorname{sen}\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.

Empleando esta sustitución, la primera de las integrales (7.85) se transforma en la forma

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}. \tag{7.86}$$

Con esta sustitución la segunda de las integrales (7.85) resulta ser igual, con exactitud de hasta factor constante, a la diferencia de la integral (7.86) y la siguiente integral:

$$\int \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi. \tag{7.87}$$

La tercera de las integrales (7.85) se reduce a la forma

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}\varphi}}. \tag{7.88}$$

Las integrales (7.86), (7.87) y (7.88) suelen llamarse *integrales elípticas de primer, segundo y tercer género*, respectivamente, *en forma de Legendre.*

En las aplicaciones desempeñan un papel especialmente importante las integrales (7.86) y (7.87). Si consideremos que ambas se anulan para $\varphi = 0$, entonces, obtenemos dos funciones bien determinadas que suelen denotarse por los símbolos $F(k, \varphi)$ y $E(k, \varphi)$. Legendre y otros matemáticos examinaron sus propiedades. Para estas integrales fue establecida una serie de fórmulas y confeccionadas tablas amplias y gráficas.

A la par con las funciones elementales, las funciones E y F fueron introducidas a la familia de las funciones que se usan con frecuencia en el análisis. Aquí vale notar otra vez que el concepto de función elemental es de carácter convencional. Además, debemos, subrayar que los problemas del cálculo integral no se limitan de ninguna manera a estudiar funciones integrables en funciones elementales.

*) Adrien Marie Legendre, matemático francés (1752—1833).