Capítulo 8

TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LAS FUNCIONES CONTINUAS Y DIFERENCIABLES

Ya conocemos los conceptos de función continua y función diferenciable que fueron introducidos en los capítulos 4 y 5. En el presente capítulo establecemos una serie de propiedades importantes de funciones arbitrarias continuas y diferenciables. Para deducir estas propiedades introducimos una nueva definición del valor límite de la función y demostramos la equivalencia de esta definición a la anterior dada en el cap. 4.

§ 1. Nueva definición del valor límite de la función

1. Nueva definición del valor límite de la función. Su equivalencia a la definición anterior. Sea que, igual que en el § 2 del cap, 4, la función $y = f(x)$ está definida sobre un conjunto $\{x\}$ y sea a un punto que tal vez no pertenezca al conjunto $\{x\}$, pero posee la propiedad que en cualquier ε-entorno del punto a existen puntos del conjunto $\{x\}$.

Recordemos la *definición anterior* del valor límite de la función introducida en el cap. 4: *el número b se denomina valor límite de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ si, para cualquier sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de valores del argumento x convergente a a cuyos elementos son diferentes de a, la sucesión correspondiente $f\,x_1, fx_2, \ldots, (f(x_n), \ldots$ de valores de la función converge a b.*

Ahora enunciemos

Nueva definición del valor límite de la función. *El número b se denomina valor límite de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ si para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ *) tal que para todos los valores del argumento x que satisfacen la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$ es válida la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$* **).

OBSERVACIÓN 1. La limitación $0 < |x - a|$ significa que se consideran los valores del argumento x *diferentes de a*. La limitación se hace evidente si recordamos que la función examinada $f(x)$ *puede ser indefinida en el punto a*. Sin esta limitación sería imposible definir la derivada $f'(a)$ como valor límite de la función $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ en el punto a.

*) Ya que δ depende de ε, a veces se escribe $\delta = \delta(\varepsilon)$.

**) La definición anterior del valor límite de la función se denomina también definición del valor límite según Heine, y la definición nueva, según Cauchy.

OBSERVACIÓN 2. Desde el punto de vista lógico, lo principal en la definición nueva es lo que *para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número positivo* δ *que corresponde a esta* ε y garantiza la validez de la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todos los valores del argumento x que satisfacen la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$.

OBSERVACIÓN 3. Empleando el concepto de aproximación de la función $f(x)$ en el entorno del punto $x = a$ con exactitud fijada de antemano ε, podemos formular nueva definición del valor límite

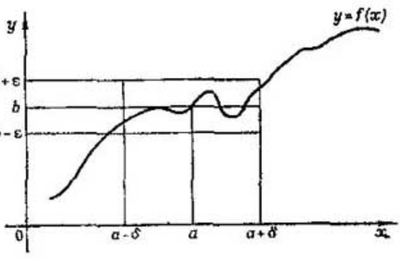

Fig. 8.1

de la función de otra manera: *el número b se denomina valor límite de la función f (x) en el punto a si para cualquier exactitud fijada de antemano ε se puede indicar un δ-entorno del punto a tal que para todos los valores del argumento x diferentes de a y pertenecientes a dicho δ-entorno, el número b aproxima el valor de la función f (x) con exactitud ε* (fig. 8.1).

Teorema 8.1. *Las definiciones nueva y vieja del valor límite de la función son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea, primero, que el número b es valor límite de la función $f(x)$ en el punto a *según la definición nueva*. Demostremos que *según la definición vieja* este mismo número b es también valor límite de la función $f(x)$ en el punto a. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento convergente al número a todos los elementos de la cual son diferentes de a. Hay que demostrar que la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de valores de la función converge al número b. Fijemos *cualquier* $\varepsilon > 0$. Según la nueva definición del valor límite de la función, para este ε existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para todos los valores del argumento x para los cuales $0 < |x - a| < \delta$. Ya que la sucesión $\{x_n\}$ converge al número N tal que $0 < |x_n - a| < \delta$ para $n \geqslant N$. Por lo tanto, $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, $n \geqslant N$, lo que significa la convergencia de la sucesión $\{f(x_n)\}$ al número b.

2) Sea, ahora, que *según la definición vieja* el número b es valor límite de la función $f(x)$ en el punto a. Demostremos que *según la definición nueva* este mismo número b es también valor límite de la $f(x)$ en el punto a. Supongamos que no es así. Entonces, para cierto número positivo ε *no existe* el número positivo garantizado δ indicado en la nueva definición, es decir, para este ε y para un δ *positivo, cualquier pequeño que sea*, existe al menos un valor del argumento x tal que $0 < |x - a| < \delta$, pero $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$.

Conforme a lo dicho, podemos tomar la sucesión $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) y comprobar que para cada uno de sus elementos $\delta_n = 1/n$ existe al menos un valor del argumento x_n tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}, \text{ pero } |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon. \tag{8.1}$$

La desigualdad izquierda de las desigualdades (8.1) significa que la sucesión $\{x_n\}$ converge al número a y se compone de elementos diferentes de a. Pero, entonces, según la vieja definición del valor límite de la función, la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de valores de la función converge al número b, lo que contradice la desigualdad derecha de las desigualdades (8.1) válida para todos los números n. La contradicción obtenida muestra que el teorema queda demostrado.

La nueva definición del valor límite de la función permite enunciar la

Nueva definición de la continuidad de la función en el punto $x = a$ *). La función $f(x)$ *se denomina continua en el punto $x = a$ si para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ tal que para todos los valores del argumento x que satisfacen la desigualdad* $|x - a| < \delta$ es válida la desigualdad

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{8.2}$$

OBSERVACIÓN 4. En esta definición no es necesario poner la limitación $0 < |x - a|$ puesto que para $x = a$ el miembro izquierdo de (8.2) se anula y la desigualdad (8.2) es a ciencia cierta válida.

Por analogía a lo expuesto anteriormente se enuncia la nueva definición del valor límite de la función y se demuestra su equivalencia a la vieja definición también *para el caso cuando uno o ambos números a y b se convierten en $+\infty$ o $-\infty$*. Limitémonos a enunciar la nueva definición del valor límite de la función para el caso cuando $a = +\infty$: *el número b se denomina valor límite de $f(x)$ para $x \to +\infty$ si para cualquier número positivo ε existe un número positivo A tal que para todos los valores del argumento x que satisfacen la desigualdad $x > A$ es válida la desigualdad* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

La fig. 8.2. explica la definición dada.

---

*) Naturalmente, al mismo tiempo se supone que la función $y = f(x)$ está también definida en el propio punto a.

Para concluir, enunciemos la nueva definición de los valores límite derecho e izquierdo de la función $f(x)$ en el punto a: *el número b se denomina valor límite derecho (izquierdo) de la función $f(x)$ en el punto a si para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ tal que para todos los valores del argumento x que satisfacen la desigualdad $0 < x - a < \delta$ $(0 < a - x < \delta)$ es válida la desigualdad $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

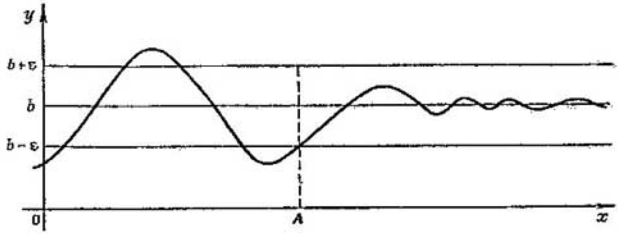

Fig. 8.2

La equivalencia de esta definición a la definición vieja del valor límite derecho (izquierdo) se demuestra de modo completamente análogo al teorema 8.1.

2. Condición necesaria y suficiente de la existencia del valor límite de la función (criterio de Cauchy). Empleando la equivalencia de las definiciones nueva y vieja del valor límite de la función, establecemos la condición necesaria y suficiente de la existencia del valor límite de la función $f(x)$ en el punto a.

Definición. *Diremos que en el punto $x = a$ la función $f(x)$ satisface la condición de Cauchy si para cualquier número positivo ε existe un número positivo δ tal que, cualesquiera que sean dos valores del argumento x' y x'' que satisfacen las desigualdades $0 < |x' - a| < \delta$ y $0 < |x'' - a| < \delta$, para los valores correspondientes de la función es válida la desigualdad*

$$|f(x') - f(x'') < \varepsilon.$$

Teorema 8.2 (criterio de Cauchy). *Para que la función $f(x)$ tenga valor límite finito en el punto $x = a$ es necesario y suficiente que la función $f(x)$ satisfaga, en este punto, la condición de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. 1) NECESIDAD. Sea que existe el valor límite finito $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Demostremos que en el punto $x = a$ la función $f(x)$ satisface la condición de Cauchy. Tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Según la nueva definición del valor límite de la función, para el número positivo $\varepsilon/2$ existe un número positivo δ tal que cualesquiera que sean los valores del argumento x' y x'' que satisfacen las desigualdades $0 < | x^1 - a | < \delta$ y $0 < | x'' - a | < \delta$, para los valores correspondientes de la función son válidas las desigualdades $| f(x') - b | < \varepsilon/2$ y $| f(x'') - b | < \varepsilon/2$. Ya que el módulo de la suma de dos magnitudes no supera la suma de sus módulos, entonces, de las últimas desigualdades obtenemos

$$| f(x') - f(x'') | = | [f(x') - b] - [f(x'') - b] | \leqslant$$
$$\leqslant | f(x') - b | + | f(x'') - b | < \varepsilon.$$

Por lo tanto, queda demostrado que la función $f(x)$ satisface la condición de Cauchy en el punto $x = a$.

2) SUFICIENCIA. Sea que la función $f(x)$ satisface, en el punto $x = a$, la condición de Cauchy. Demostremos que la función $f(x)$ tiene valor límite en el punto $x = a$. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento convergente a a, todos los elementos x_n de la cual son diferentes de a. En virtud de la vieja definición del valor límite de la función basta demostrar que la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de valores de la función converge a un número b con tal que este número b *es igual* para todas las sucesiones $\{x_n\}$ convergentes a a tales que $x_n \neq a$.

En primer lugar demostremos la *convergencia* de toda sucesión $\{f(x_n)\}$. Sea dado un $\varepsilon > 0$ *arbitrario*. Tomemos el número positivo δ que corresponde a este ε según la condición de Cauchy y, empleando la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ hacia a, para este σ escogemos un número N tal que

$$0 < | x_n - a | < \delta \text{ para } n \geqslant N.$$

Además, para cualquier p natural ($p = 1, 2, \ldots$), con tanta más razón.

$$0 < | x_{n+p} - a | < \delta \text{ para } n \geqslant N.$$

En virtud de la condición de Cauchy, las dos últimas desigualdades llevan a la desigualdad $| f(x_{n+p} - f(x_n) | < \varepsilon$ para $n \geqslant N$, es decir, demuestran el *carácter fundamental* de la sucesión $\{f(x_n)\}$. Conforme al criterio de Cauchy para la sucesión (es decir, conforme al teorema 3.19), la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a un número b.

Demostremos, ahora, que todas las sucesiones $\{f(x_n)\}$ correspondientes a todas las sucesiones posibles $\{x_n\}$, convergentes hacia a, *tienen un mismo límite b*.

Sean $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ cualesquiera dos sucesiones de valores del argumento convergentes hacia a, todos los elementos de las cuales son diferentes de a. En virtud de lo demostrado anteriormente, ambas sucesiones $\{f(x_n)\}$ y $\{f(x'_n)\}$ convergen. Denotemos el límite de la primera de estas sucesiones por b, y el de la segunda, por b'. Demostremos que $b = b'$. Consideremos la sucesión convergente a a

$$x_1,\ x'_1,\ x_2,\ x'_2,\ \ldots,\ x_n,\ x'_n,\ \ldots$$

En virtud de lo anteriormente demostrado, la sucesión correspondiente de valores de la función

$f(x_1),\ f(x_1'),\ f(x_2),\ f(x_2'),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(x_n'),\ \ldots$

es convergente. Pero, entonces, en virtud del p. 1 del § 4 del cap. 3, *todas las subsucesiones de esta sucesión*, incluso $\{f(x_n)\}$ y $\{f(x_n')\}$, *convergen a un mismo límite*, es decir, $b = b'$. El teorema 8.2 queda demostrado.

De manera análoga se enuncia la condición de Cauchy y se establece la condición necesaria y suficiente de la existencia del valor límite de la función $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Limitémonos a las formulaciones cuando $x \to +\infty$.

Diremos que la función $f(x)$ satisface la condición de Cauchy para $x \to +\infty$ si para cualquier número positivo ε existe un número positivo A tal que para cualesquiera dos valores del argumento x' y x'' superiores a A es válida la desigualdad $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

De la manera completamente análoga al teorema 8.2 se demuestra la siguiente afirmación: *para que la función $f(x)$ tenga valor límite finito cuando $x \to +\infty$, es necesario y suficiente que para $x \to +\infty$ satisfaga la condición de Cauchy.*

§ 2. El carácter acotado local de la función que tiene valor límite

En completa conformidad con la definición del conjunto de números reales superiormente (inferiormente) acotado *) introducimos el concepto de la *función superiormente* (*inferiormente*) *acotada sobre un conjunto dado.*

Definición 1. *La función $f(x)$ se denomina* ***superiormente (inferiormente) acotada*** *sobre un conjunto $\{x\}$ si existe un número real M (un número m) tal que para todos los valores del argumento x del conjunto $\{x\}$ es válida la desigualdad $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$).*

En este caso el número M (el número m) se denomina cota superior (inferior) de la función $f(x)$ en el conjunto $\{x\}$.

Definición 2. *La función $f(x)$ se denomina acotada por ambos lados o simplemente acotada sobre el conjunto $\{x\}$ si está acotada sobre este conjunto, tanto superior como inferiormente, es decir, si existen números reales m y M tales que para todos los valores del argumento x del conjunto $\{x\}$ son válidas las desigualdades $m \leqslant f(x) \leqslant M$.*

De este modo, la acotación de la función $f(x)$ sobre el conjunto $\{x\}$ significa la acotación del conjunto de todos los valores de esta función.

EJEMPLOS. 1) La función $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ no está acotada superiormente sobre el semisegmento $[0, \pi/2)$, pero está inferior-

*) Véase el p. 5 del § 1 en el cap. 2.

mente acotada (como la cota inferior se puede tomar cualquier número $m \leqslant 1$).

2) La función de Dirichlet *) está acotada por ambos lados sobre cualquier segmento $[a, b]$ (como la cota inferior se puede tomar cualquier número $m \leqslant 0$, y como la superior, cualquier número $M \geqslant 1$).

Teorema 8.3. *Si la función $f(x)$ tiene valor límite finito en el punto $x = a$, entonces existe un δ-entorno del punto a* **) *tal que para todos los valores del argumento de dicho δ-entorno la función $f(x)$ está acotada* ***).

DEMOSTRACIÓN. Sea $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Según la nueva definición del valor límite de la función, para cierto número positivo ε existe un número positivo δ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ cuando $0 \leqslant |x - a| < \delta$, o

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \text{ cuando } a - \delta < x < a + \delta \text{ y } x \neq a.$$

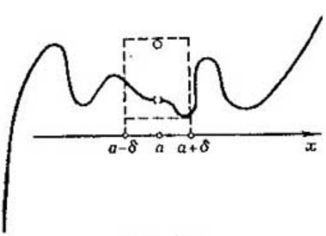

Fig. 8.3

Si el valor $x = a$ *no entra en el campo de definición de la función, el teorema queda demostrado* (*puesto que las desigualdades* (8.3) significan que *para todos* los valores del argumento x del δ-entorno del punto a, los valores de la función $f(x)$ se comprenden entre $b - \varepsilon$ y $b + \varepsilon$).

Si la función $f(x)$ *está también definida para* $x = a$ y en el punto a toma cierto valor $f(a)$, entonces, al designar mediante m el menor de dos números $(b - \varepsilon)$ y $f(a)$ y mediante M el mayor de dos números $(b + \varepsilon)$ y $f(a)$, se puede extraer de las desigualdades (8.3) las desigualdades siguientes:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ cuando } a - \delta < x < a + \delta.$$

Las últimas desigualdades significan que la función $f(x)$ está acotada en todos los puntos del δ-entorno del punto a. El teorema queda demostrado. La fig. 8.3 puede ilustrar el teorema 8.3.

OBSERVACIÓN. La propiedad de la función que se establece por el teorema 8.3 se denomina *acotación local de la función que tiene valor límite*.

---

*) Recordemos que se denomina *función de Dirichlet* la función igual a la unidad, para todos los valores racionales del argumento, y a cero, para todos los valores irracionales del argumento

**) Recordemos que se denomina *δ-entorno del punto a* el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ donde $\delta > 0$.

***) No excluimos el caso cuando la función $y = f(x)$ está dada sobre cierto conjunto $\{x\}$ que no llena completamente ningún δ-entorno del punto a.

Corolario del teorema 8.3. *Si la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, entonces esta función está acotada para todos los valores del argumento de cierto σ-entorno del punto a.* (La función continua en en el punto $x = a$ tiene valor límite finito en este punto).

§ 3. Teorema sobre la estabilidad del signo de una función continua

Teorema 8.4. *Si la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ y si $f(a) \neq 0$ entonces existe un δ-entorno del punto a tal que para todos los valores del argumento de dicho δ -entorno la función $f(x)$ no se anula y tiene el signo coincidente con el signo de $f(a)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función es continua en el punto a, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ con tal que $b = f(a) \neq 0$. Según la nueva definición del valor límite de la función, para *cualquier* $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \text{ cuando*)}$$
$$a - \delta < x < a + \delta. \quad (8.4)$$

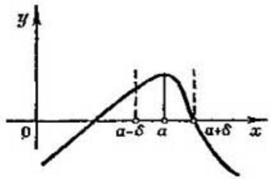

Fig. 8.4

Como tomemos un número positivo que satisface la exigencia $\varepsilon < |b|$. Al elegir ε de este modo, tenemos que $b - \varepsilon$, $b + \varepsilon$ y b son de *un mismo signo*. Por lo tanto, conforme a (8.4), en todos los puntos del δ-entorno del punto a, la función $f(x)$ conserva el signo del número $b = f(a)$. El teorema queda demostrado. La fig. 8.4 puede ilustrar el teorema 8.4.

OBSERVACIÓN PARA EL TEOREMA 8.4. El teorema 8.4 puede transferirse para el caso de la función $f(x)$ continua en el punto dado $x = a$ *por la derecha* (*izquierda*). Sea δ un número positivo. Pongámonos de acuerdo llamar *semientorno derecho del punto* $x = a$ el semisegmento $[a, a + \delta)$ y *semientorno izquierdo del punto* $x = a$ el semisegmento $(a - \delta, a]$. Tiene lugar la afirmación siguiente: *si la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ por la derecha (por la izquierda) y si $f(a) \neq 0$, entonces existe un semientorno derecho (izquierdo) del punto $x = a$ tal que para todos los valores del argumento de dicho semientorno la función $f(x)$ no se anula y tiene el signo coincidente con el signo de $f(a)$.*

La demostración de esta afirmación repite casi literalmente la demostración del teorema 8.4 con tal que en vez de las desigualdades derechas de (8.4) obtenemos las desigualdades $a \leqslant x < a + \delta$ ($a - \delta < x \leqslant a$).

*) Al mismo tiempo, no es necesario excluir el valor $x = a$ puesto que para la función continua $f(x)$ el valor $f(a) = b$ también satisface las desigualdades izquierdas de (8.4)

§ 4. Paso de una función continua por cualquier valor intermedio

1. Paso de una función continua por el cero cuando el signo cambia. **Teorema 8.5.** *Sea la función $f(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ y sea que en los extremos del segmento los valores de esta función $f(a)$ y $f(b)$ son números de signos diferentes. Entonces, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ, en el cual el valor de la función es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Para la precisión, supongamos que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Consideremos el conjunto $\{x\}$ *de todos los valores x del segmento $[a, b]$ para los cuales $f(x) < 0$.* Este conjunto tiene al menos un elemento $x = a$ (puesto que $f(a) < 0$) y está *superiormente acotado* (por ejemplo, por el valor $x = b$). Según el teorema 2.1, el conjunto $\{x\}$ tiene cota superior exacta que se denota mediante ξ.

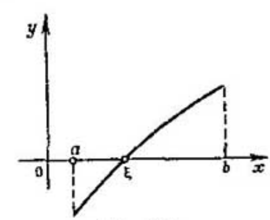

Fig. 8.5

Ante todo, observemos que el punto ξ es punto *interior* del segmento $[a, b]$ puesto que de la continuidad de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y de las condiciones $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, en virtud de la observación para el teorema 8.4, se desprende que existe un semientorno derecho del punto $x = a$ que comprende $f(x) < 0$ y un semientorno izquierdo del punto $x = b$ que comprende $f(x) > > 0$. Demostremos ahora que $f(\xi) = 0$. Si no fuera así, entonces, por el teorema 8.4, existiría un δ-entorno $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ del punto ξ *entre los límites de la cual la función $f(x)$ tendría un signo determinado.* Pero esto es imposible puesto que, según la definición de la cota superior exacta, existe al menos un valor x del semisegmento $\xi - \delta < x \leqslant \xi$ tal que $f(x) < 0$, y para todo valor x del intervalo $\xi < x < \xi + \delta$, $f(x) \geqslant 0$. Pues, $f(\xi) = 0$. El teorema queda demostrado. La fig. 8.5 puede ilustrar el teorema 8.5.

2. Paso de una función continua por cualquier valor intermedio.

Teorema 8.6. *Sea la función $f(x)$ continua sobre el segmento $[a, b]$ con tal que $f(a) = A$, $f(b) = B$. Sea, luego, C cualquier número comprendido entre A y B. Entonces, en el segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que $f(\xi) = C$.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos considerar solamente el caso cuando $A \neq B$ y C no coincide con ninguno de los números A y B. Sea, para la precisión, $A < B$ y $A < C < B$. Consideremos la función $\varphi(x) = f(x) - C$. Esta función es continua en el segmento $[a, b]$ (como la diferencia de las funciones continuas) y en los extremos de este segmento toma valores de signos diferentes

$$\varphi(a) = f(a) = C = A - C < 0, \ \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

Según el teorema 8.5, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que $\varphi(\xi) = f(\xi) = C - 0$. Por lo tanto, $f(\xi) = C$. El teorema queda demostrado.

§ 5. El carácter acotado de la función, continua en un segmento

Teorema 8.7 (primer teorema de Weierstrass). *Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ entonces está acotada sobre este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que la función $f(x)$ está superiormente acotada en el segmento $[a, b]$ (la acotación inferior se demuestra de modo completamente análogo).

Supongamos lo contrario, es decir, admitamos que la $f(x)$ no es acotada superiormente en el segmento $[a, b]$.

Entonces, para *cualquier* número natural n ($n = 1, 2, \ldots$) existe al menos un punto x_n del segmento $[a, b]$ tal que $f(x_n) > n$ (de otro modo, $f(x)$ sería superiormente acotada en el segmento $[a, b]$).

De este modo, existe una sucesión de valores x_n del segmento $[a, b]$ tal que la sucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_n)\}$ es infinita. En virtud del teorema de Bolzano — Weierstrass (véase el teorema 3.17 del p. 4 del § 4 del cap. 3), de la sucesión $\{x_n\}$ se puede separar una subsucesión convergente al punto ξ que, conforme a la observación 2 de dicho teorema, pertenece al segmento $[a, b]$. Denotemos esta subsucesión mediante el símbolo $\{x_{k_n}\}$ ($n = 1, 2, \ldots$). En virtud de la continuidad de la función $f(x)$ en el punto ξ la subsucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_{k_n})\}$ debe obligatoriamente convergir a $f(\xi)$. Pero esto es imposible puesto que, siendo separada de la sucesión infinita $\{f(x_n)\}$, la subsucesión $\{f(x_{k_n})\}$, la misma es infinita (véase el p. 1 del § 4 del cap 3). La contradicción obtenida muestra que el teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Para el intervalo (o el semisegmento), la afirmación análoga al teorema 8.7 ya no es válida, puesto que de la continuidad de la función en el intervalo (o en el semisegmento) ya no se desprende la acotación de esta función en dicho conjunto. Por ejemplo, consideremos la funcion $f(x) = 1/x$ sobre el intervalo $(0, 1)$ (o sobre el semisegmento $(0, 1]$). Esta función es continua sobre dicho intervalo (o semisegmento), pero no está acotada sobre él, puesto que existe una sucesión de puntos $x_n = 1/n$ ($n = 2, 3, \ldots$) pertenecientes a dicho intervalo (o semisegmento) tal que la sucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_n)\} = \{n\}$ es infinita.

§ 6. Cotas exactas de una función y cómo las alcanza una función, continua en un segmento

1. Concepto de cotas exactas superior e inferior de una función sobre un conjunto dado. Consideremos una función $f(x)$ superiormente (inferiormente) acotada sobre un conjunto dado $\{x\}$ *). Empleando, para el conjunto de todos los valores de esta función, el concepto de cota superior exacta (inferior exacta) introducido en el p. 5 del § 1 del cap. 2, llegamos a la siguiente definición. *El número M (el número m) se denomina **cota superior exacta (inferior exacta) de la función $f(x)$** sobre el conjunto $\{x\}$ si se cumplen dos exigencias siguientes:* 1) *para todo valor x del conjunto $\{x\}$ es válida la desigualdad $f(x) \leqslant M$ $(f(x) \geqslant m)$,* 2) *cualquiera que sea un número positivo ε, existe al menos un valor x del conjunto $\{x\}$ para el cual es válida la desigualdad*

$$f(x) > M - \varepsilon \; f(x) < m + \varepsilon.$$

En esta definición la exigencia 1) comprueba que el número M (el número m) es una de las cotas superiores (inferiores) de la función $f(x)$ sobre el conjunto $\{x\}$, y la exigencia 2) dice que esta cota es *la mínima* (*la máxima*) y no puede disminuirse (aumentarse). Para designar las cotas superior exacta e inferior exacta de la función $f(x)$ sobre el conjunto $\{x\}$ se usan los siguientes símbolos:

$$M = \sup_{\{x\}} \{f(x)\}, \quad m = \inf_{\{x\}} \{f(x)\}.$$

Del teorema 2.1 demostrado en el p. 5 del § 1 del cap. 2 se desprende directamente la siguiente afirmación: *si la función $f(x)$ está superiormente (inferiormente) acotada sobre el conjunto $\{x\}$, entonces, en este conjunto la función $f(x)$ tiene cota superior exacta (inferior exacta).*

Lógicamente, surge la pregunta de *si es alcanzable la cota superior exacta (inferior exacta) de la función*, es decir, si entre los puntos del conjunto $\{x\}$ existe un punto x tal que el valor de la función en este punto es igual a la cota. El siguiente ejemplo muestra que, *hablando en general*, las cotas superior exacta e inferior exacta *no son alcanzables.*

Consideremos en el segmento $[0, \pi/2]$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si} \quad 0 < x < \pi/2, \\ 1/2, & \text{si } x = 0 \text{ y } x = \pi/2. \end{cases}$$

Esta función está acotada en el segmento $[0, \pi/2]$, tanto superior como inferiormente, y tiene en este segmento la cota superior exacta $M = 1$ y la cota inferior exacta $m = 0$. Sin embargo, en ningún punto del segmento $[0, \pi/2]$ la función toma valores iguales a estas

*) La definición de la función superiormente (inferiormente) acotada sobre un conjunto prefijado se da al comenzar el § 2 del presente capítulo.

cotas (fig. 8.6). De este modo, la función considerada no tiene valores máximo ni mínimo en el segmento $[0, \pi/2)$.

Fijemos la atención en que la función considerada no es continua en el segmento $[0, \pi/2]$. Este hecho no es casual, puesto que, como lo demostraremos en el siguiente punto, la función, continua en un segmento, alcanza obligatoriamente sus cotas superiores e inferiores exactas en algunos puntos de este segmento.

2. Cómo una función, continua en un segmento, alcanza sus cotas exactas. Sea la función $f(x)$ continua en un segmento $[a, b]$. Entonces, en virtud del teorema 8.7, esta función es acotada, en este segmento, tanto superior como inferiormente. Por lo tanto, conforme a la afirmación enunciada en el punto anterior, en el segmento $[a, b]$ esta función tiene la cota superior exacta M y la cota inferior exacta m. Demostremos que estas cotas son alcanzables.

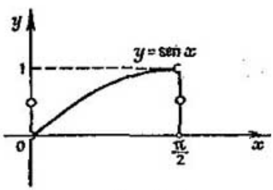

Fig. 8.6

Teorema 8.8 (segundo teorema de Weierstrass). *Si la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ alcanza sus cotas superior e inferior exactas en este segmento* (es decir, en el segmento $[a, b]$ existen puntos x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$).

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ alcanza su cota superior exacta M (para la cota inferior exacta la demostración es análoga).

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que en ningún punto del segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ toma valor igual a M. Entonces, *para todos* los puntos del segmento $[a, b]$ es válida la desigualdad $f(x) < M$ y en el segmento $[a, b]$ podemos considerar la función siempre positiva

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Ya que el denominador $M - f(x)$ no se anula y es continuo en el segmento $[a, b]$, entonces, según el teorema 4.2, la función $F(x)$ es también continua en el segmento $[a, b]$. En este caso, de acuerdo con el teorema 8.7., la función $F(x)$ está acotada en el $[a, b]$, o sea, existe un número positivo B tal que para todos los x del segmento $[a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant B.$$

La última desigualdad (teniendo en cuenta que $M - f(x) > 0$) puede escribirse en la forma

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{B}.$$

Dicha relación, válida *para todos* los puntos x del segmento $[a, b]$ contradice el hecho de que el número M es cota superior exacta (*la mínima entre todas las cotas superiores*) de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. La contradicción obtenida muestra que el teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. La afirmación análoga al teorema 8.8 no tiene lugar para el intervalo y el semisegmento. En efecto, en la observación del teorema 8.7 (véase el § 5) hemos dado el ejemplo de la función continua sobre el intervalo (semisegmento) y no acotada en éste (la cota superior (o inferior) exacta de esta función no sólo puede ser alcanzada sino no existe).

OBSERVACIÓN 2. Después de demostrar que la función, continua en un segmento, alcanza sus cotas superior e inferior exactas en este segmento, podemos llamar *valor máximo* a la cota superior exacta y *valor mínimo* de la función $f(x)$ en este segmento a la cota inferior exacta y enunciar el teorema 8.8 de otra forma: *la función, continua en un segmento, tiene en este segmento valores máximo y mínimo* *).

OBSERVACIÓN 3. Entre otras propiedades de la función, continua en un segmento, hay la propiedad llamada *continuidad uniforme*. La examinaremos en el § 4 del cap. 1 del tomo 2. Aquí solamente notemos que los pp. 1 y 2 del § 4 del cap. 1 del tomo 2 pueden leerse después del párrafo presente.

§ 7. Crecimiento (decrecimiento) de la función en un punto. Máximo (mínimo) local

1. Crecimiento (decrecimiento) de la función en un punto. Supongamos que la funcion $f(x)$ está definida siempre en un entorno del punto c.

Definición. *Se dice que la función* ($f(x)$ ***crece*** (***decrece***) ***en el punto*** c *si existe un entorno del punto* c, *entre los límites del cual* $f(x) > f(c)$ *para* $x > c$ y $f(x) < f(c)$ *para* $x < c$ ($f(x) < f(c)$ *para* $x > c$ y $f(x) > f(c)$ *para* $x < c$).

En la fig. 8.7 está representada la función creciente en el punto c y decreciente en el punto d.

Establecemos *la condición suficiente del crecimiento* (decrecimiento) de la función $f(x)$ en el punto c.

---

*) Notemos que las funciones, discontinuas en un segmento, pueden tener también valores máximo y mínimo en este segmento. Así, por ejemplo, la función de Dirichlet, ya conocida del § 1. del cap. 4,

$$y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es discontinua en todo punto de cualquier segmento $[a, b]$, pero en este segmento tiene el valor máximo igual a la unidad y el valor mínimo igual a cero.

Teorema 8.9. Si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto c y $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), *entonces esta función crece (decrece) en el punto c.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos el teorema para el caso de $f'(c) > 0$ (el caso de $f'(c) < 0$ se considera de modo completamente análogo). Ya que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

entonces, según nueva definición del valor límite de la función, *para cualquier* $\varepsilon > 0$ existe un δ positivo tal que

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - c| < \delta. \qquad (8.5)$$

Como ε tomemos un número positivo menor que $f'(c)$. Entonces, $f'(c) - \varepsilon > 0$ y, por lo tanto, de (8.5) obtenemos

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0, \quad \text{si} \ 0 < |x - c| < \delta. \qquad (8.6)$$

La expresión (8.6) significa que *en todos los puntos del δ-entorno del punto c* $f(x) > f(c)$ si $x > c$ y $f(x) < f(c)$ si $x < c$. El crecimiento de la función $f(x)$ en el punto c queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Subrayemos que *la positividad (la negatividad) de la derivada $f'(c)$ no es condición necesaria del crecimiento (decrecimiento) de la función $f(x)$ en el punto c.* A título de ejemplo, indiquemos la función $f(x) = x^3$ que crece en el punto $x = 0$ y, sin embargo, tiene en este punto la derivada $f'(0) = 0$ (la gráfica de esta función se representa en la fig. 8.8).

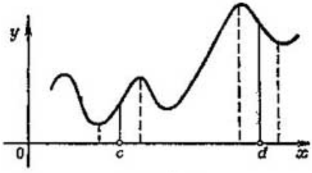

Fig. 8.7

2. Máximo local y mínimo local de la función. Sea, de nuevo, que la función $f(x)$ está siempre definida en un entorno del punto c.

Definición. *Se dice que la función $f(x)$ tiene en el punto c* ***máximo (mínimo) local*** *si existe un entorno del punto c entre los límites del cual el valor $f(c)$ es el máximo (mínimo) de todos los valores de esta función.*

En la fig. 8.9 está representada una función que tiene máximo local en el punto c.

El máximo local y el mínimo local se denominan comúnmente *extremo local.*

Establecemos la *condición necesaria de extremo* de la función diferenciable.

Teorema 8.10. *Si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto c y tiene extremo local en este punto, entonces $f'(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función $f(x)$ tiene extremo local en el punto c, entonces en este punto $f(x)$ no puede crecer ni decrecer. Por lo tanto, en virtud del teorema 8.9, la derivada $f'(c)$ no puede ser positiva ni negativa, es decir, $f'(c) = 0$.

El teorema 8.10 tiene sentido geométrico sencillo: comprueba que si en el punto de la curva $y = f(x)$ a que corresponde el extremo local de la función $f(x)$ existe la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$, entonces esta tangente es paralela al eje Ox (véase la fig. 8.9).

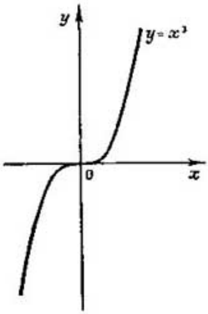

Fig. 8.8

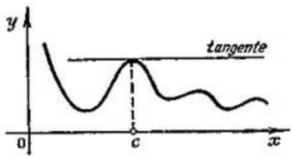

Fig. 8.9

§ 8. Teorema sobre el cero de la derivada

Teorema 8.11 (teorema de Rolle *). *Sea que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento. Además, sea que $f(a) = f(b)$. Entonces dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que el valor de la derivada en este punto $f'(\xi)$ es igual a cero.*

Se puede decir en breve que entre dos valores iguales de una función diferenciable tiene que estar el cero de la derivada de esta función.

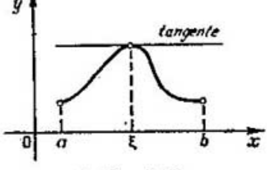

Fig. 8.10

DEMOSTRACIÓN. Ya que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, entonces, según el teorema 8.8 esta función *alcanza* su valor máximo M y su valor mínimo m en este segmento. Pueden tenerse dos casos: 1) $M = m$, 2) $M > m$. En el caso 1) $f(x) = M =$

*) Michel Rolle, matemático francés (1652—1719).

$= m =$ const. Por eso, la derivada $f'(x)$ *es igual a cero en cualquier punto del segmento* $[a, b]$. En el caso de $M > m$, debido a que $f(a) = f(b)$, se puede afirmar que la función alcanza *al menos uno* de los valores M o m en un punto *interior* ξ del segmento $[a, b]$. Pero entonces, en este punto ξ la función $f(x)$ tiene extremo local. Ya que la función $f(x)$ es diferenciable en el punto ξ, entonces, según el teorema 8.10, $f'(\xi) = 0$. El teorema queda completamente demostrado.

El teorema de Rolle tiene sentido geométrico sencillo: si las ordenadas extremas de la curva $y = f(x)$ son iguales, entonces, según el teorema de Rolle, en la curva $y = f(x)$ existe un punto en el cual la tangente a la curva es paralela al eje Ox (fig. 8.10).

Como veremos en adelante, muchas fórmulas y teoremas del análisis matemático se basan en el teorema de Rolle.

§ 9. Fórmula de los incrementos finitos (fórmula de Lagrange)

El siguiente teorema perteneciente a Lagrange *) tiene gran importancia en el análisis y sus aplicaciones.

Teorema 8.12 **(*teorema de Lagrange*)**. *Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento, entonces, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que es válida la fórmula*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{8.7}$$

La fórmula (8.7) se denomina *fórmula de Lagrange o fórmula de los incrementos finitos.*

DEMOSTRACIÓN. En el segmento $[a, b]$ consideremos la siguiente función auxiliar:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{8.8}$$

Verifiquemos que para la función $F(x)$ se cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle. En efecto, $F(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ (como la diferencia de la función $f(x)$ y la función lineal) y en todos los puntos interiores del segmento $[a, b]$ tiene la derivada igual a

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Valiéndose de la formula (8.8) es obvio que $F(a) = F(b) = 0$.

*) Joseph Louis Lagrange, gran matemático y mecánico francés (1763—1813).

Según el teorema de Rolle, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0. \tag{8.9}$$

De la igualdad (8.9) se desprende la fórmula de Lagrange (8.7). Subrayemos que no es necesario tomar $b > a$ en la fórmula (8.7).

OBSERVACIÓN. Hemos obtenido el teorema de Lagrange como el corolario del teorema de Rolle. Además, observemos que el propio teorema de Rolle es caso particular del teorema de Lagrange (para $f(a) = f(b)$).

Para aclarar el sentido geométrico del teorema de Lagrange, observemos que la magnitud $f\frac{(b)-f(a)}{b-a}$ es el coeficiente angular de la secante que pasa a través de los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ de la curva $y = f(x)$, y $f'((\xi)$ es el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $C(\xi, f(\xi))$. La fórmula de Lagrange (8.7) significa que en la curva $y = f(x)$ entre los puntos A y B existe un punto C tal que la tangente en este punto es paralela a la secante AB (fig. 8.11).

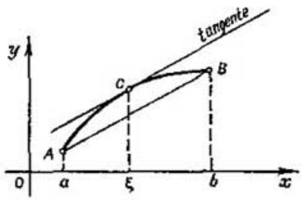

Fig. 8.11

Frecuentemente es conveniente escribir la fórmula de Lagrange en forma un poco diferente de (8.7). Sea que $f(x)$ satisface las condiciones del teorema 8.11. Fijemos cualquier x_0 del segmento $[a, b]$ y le demos un incremento arbitrario Δx, pero tal que el valor $(x_0 + \Delta x)$ también esté en el segmento $[a, b]$. Entonces, escribiendo la fórmula de Lagrange para el segmento $[x_0, x_0 + \Delta x]$, tendremos

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(\xi), \tag{8.10}$$

donde ξ es un punto situado entre x_0 y $x_0 + \Delta x$. Se puede afirmar que *existe un número* θ *(dependiente de* Δx*) del intervalo* $0 < \theta < 1$ tal que $\xi = x_0 + \theta\Delta x$. De este modo, la fórmula (8.10) puede tomar la forma

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta\Delta x), \tag{8.11}$$

donde θ es un número del intervalo $0 < \theta < 1$. La fórmula de Lagrange en la forma (8.11) de la expresión exacta para el incremento de la función utilizando un incremento finito arbitrario Δx del argumento que provoca este incremento de la función. Esta forma de la fórmula de Lagrange justifica el término «fórmula de los incrementos finitos».

§ 10. Algunos corolarios de la fórmula de Lagrange

1. Constancia de la función que en un intervalo tiene derivada igual a cero.

Teorema 8.13. *Si la función $f(x)$ es diferenciable en el intervalo (a, b) y si en todos los puntos de este intervalo $f'(x) = 0$, entonces la función $f(x)$ es constante en el intervalo (a, b).*

DEMOSTRACIÓN. Sea x_0 un punto *fijado* del intervalo (a, b), y x, cualquier punto de este intervalo.

El segmento $[x_0, x]$ pertenece por entero al intervalo (a, b). Por eso, la función $f(x)$ es diferenciable (y, por tanto, continua) en todos los puntos del segmento $[x_0, x]$. Esto permite aplicar el teorema de Lagrange, a la función $f(x)$ en el segmento $[x_0, x]$. Según este teorema, dentro del segmento $[x_0, x]$ existe un punto ξ tal que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi). \tag{8.12}$$

Por condición, la derivada de la función $f(x)$ es igual a cero en todos los puntos del intervalo (a, b). Por lo tanto, $f'(\xi) = 0$ y de la fórmula (8.12) obtenemos

$$f(x) = f(x_0). \tag{8.13}$$

La igualdad (8.13) comprueba que el valor de la función $f(x)$ en *cualquier* punto x del intervalo (a, b) es igual a su valor en el punto *fijado* x_0. Esto significa que la función $f(x)$ es *constante sobre todo el intervalo* (a, b). El teorema queda demostrado.

El teorema 8.13 tiene sentido geométrico sencillo: si en todo punto de un segmento de la curva $y = f(x)$ la tangente es paralela al eje Ox, entonces, dicho segmento de la curva $y = f(x)$ es segmento de la recta paralela al eje Ox.

OBSERVACIÓN. En el cap. 6 ya hemos empleado el teorema 8.13 para demostrar el teorema 6.1. Aquí volvemos a notar que en el presente capítulo (incluso en el teorema 8.13) no se utilizan completamente los resultados de los capítulos 6 y 7. Al leer este libro por segunda vez, se puede estudiar el cap. 8 inmediatamente después del cap. 5 y sólo después leer los capítulos 6 y 7.

2. Condiciones de monotonía de la función en un intervalo. Como el segundo corolario de la fórmula de Lagrange consideremos el problema de las condiciones que aseguran el no decrecimiento (no crecimiento) de la función en dicho intervalo.

Ante todo, recordemos las definiciones del no decrecimiento, no crecimiento, crecimiento y decrecimiento de la función en un intervalo dado.

1°. Se dice que la función $f(x)$ *no decrece* (*no crece*) *en el intervalo* (a, b) si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 del intervalo (a, b)

que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

2°. Se dice que la función $f(x)$ *crece* (*decrece en el intervalo* (a, b) si para cualesquiera puntos x_1 y x_2 del intervalo (a, b) relacionados por la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \, (f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Teorema 8.14. *Para que la función $f(x)$, diferenciable en el intervalo (a, b), no decrezca (no crezca) en este intervalo, es necesario y suficiente que la derivada de esta función sea no negativa (no positiva) en todos los puntos de este intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. 1) SUFICIENCIA. Sea $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) en todos los puntos del intervalo (a, b). Hay que demostrar que $f(x)$ no decrece (no crece) en el intervalo (a, b). Sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos del intervalo (a, b) que satisfacen la condición $x_1 < x_2$. La función ($f(x)$ es diferenciable (y por tanto, continua) en todos los puntos del segmento $[x_1, x_2]$. Por eso, en el segmento $[x_1, x_2]$ a $f(x)$ se puede aplicar el teorema de Lagrange. Como resultado, obtenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \tag{8.14}$$

donde $x_1 < \xi < x_2$.

Por condición, $f'(\xi) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$), $x_2 - x_1 > 0$. Por eso, el miembro derecho de (8.14) es no negativo (no positivo), lo que demuestra el no decrecimiento (no crecimiento) de $f(x)$ en el intervalo (a, b).

2) NECESIDAD. Sea la función $f(x)$ diferenciable en el intervalo (a, b) y sea que no decrece (no crece) en este intervalo. Hay que demostrar que $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) en todo el intervalo. Ya que $f(x)$ no decrece (no crece) en el intervalo (a, b), entonces esta función no puede decrecer (crecer) en ningún punto del intervalo (a, b). Por tanto, en virtud del teorema 8.9, en ningún punto del intervalo (a, b) la derivada de $f'(x)$ puede ser negativa (positiva), lo que era necesario demostrar.

Teorema 8.15. *Para que la función $f(x)$ crezca (decrezca) en el intervalo (a, b) es suficiente que la derivada $f'(x)$ sea positiva (negativa) en todos los puntos de este intervalo.*

Demostramos valiéndose del mismo procedimiento que utilizamos para demostrar la suficiencia en el teorema 8.14. Sean x_1 y x_2 cualesquiera dos puntos del intervalo (a, b) que satisfacen la condición $x_1 < x_2$. Escribiendo para el segmento $[x_1, x_2]$ la fórmula de Lagrange, obtenemos la igualdad (8.14), pero esta vez, en la igualdad $f'(\xi) > 0$ (< 0).

Por consiguiente, el miembro izquierdo de (8.14) es positivo (negativo) lo que demuestra el crecimiento (decrecimiento) de $f(x)$ en el intervalo (a, b).

OBSERVACIÓN. Subrayemos que la positividad (negatividad) de la derivada $f'(x)$ en el intervalo (a, b) *no es condición necesaria* del crecimiento (decrecimiento) de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b). Así, la función $y = x^3$ crece en el intervalo $(-1, +1)$, pero la derivada de esta función $f'(x) = 3x^2$ no es siempre positiva en este intervalo (se anula en el punto $x = 0$). En general, es fácil demostrar que la función $f(x)$ crece (decrece) en el intervalo (a, b) si la derivada de esta función $f'(x)$ es siempre positiva (negativa) en este intervalo *excepto un número finito de puntos*, en los cuales la derivada es igual a cero. (Para demostrarlo es suficiente aplicar el teorema 8.15 a cada uno del número finito de intervalos en los cuales $f'(x)$ es estrictamente positiva (negativa) y tomar en consideración la continuidad de $f(x)$ en los puntos donde la derivada es igual a cero. Valiéndose de los razonamientos geométricos es fácil comprender la relación establecida por el teorema 8.15 entre el signo de la derivada y la dirección de variación de la función. Ya que la derivada es igual al coeficiente angular de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$, el signo de la derivada indica qué ángulo, agudo u obtuso, forma el rayo de la tangente situado en el semiplano superior con la dirección positiva del eje Ox. Si $f'(x) > 0$ en todo el intervalo (a, b), entonces, en todo este intervalo el rayo de la tangente situado en el semiplano superior forma un ángulo agudo con Ox. Por lo tanto, la curva $y = f(x)$ va hacia arriba en todo este intervalo (fig. 8.12).

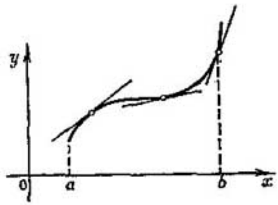

Fig. 8.12

3. Carencia de puntos de discontinuidad de primera especie y de discontinuidad evitable en la derivada. Apliquemos el teorema de Lagrange para aclarar una propiedad notable de la derivada. Ante todo, demostremos la siguiente afirmación. *Sea que la función $f(x)$ tiene derivada finita en todos los puntos del semientorno derecho (izquierdo) del punto c y la derivada derecha (izquierda) en el propio punto c. Entonces, si en el punto c la derivada $f'(x)$ tiene valor límite derecho (izquierdo), este valor límite es igual a la derivada derecha (izquierda) en el punto c.*

Para demostrar esta afirmación, consideremos cualquier sucesión $\{x_n\}$ de valores del argumento convergente a c por la derecha (por la izquierda). Teniendo en cuenta que, a partir de un número n bastante grande, todos los x_n pertenecen al semientorno, en el que la función $f(x)$ tiene la primera derivada finita, apliquemos el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ por el segmento* $[c, x_n]$ ($[x_n, c]$). En este caso obtenemos

$$\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}=f'(\xi_n), \tag{8.15}$$

donde mediante ξ_n se denota un punto situado entre c y x_n. Sea, ahora, que en la igualdad (8.15) $n\to\infty$. Entonces, es obvio que $\xi_n\to c$ por la derecha (por la izquierda). Ya que según la condición, $f'(x)$ tiene en el punto c valor límite derecho (izquierdo) finito, entonces, por la definición del valor límite, el miembro derecho de (8.15) tiene que tender a dicho valor límite cuando $n\to\infty$. Por lo tanto, para $n\to\infty$ existe también el límite del miembro izquierdo de (8.15). Por la definición de la derivada derecha (izquierda), este límite es igual a $f'(c+0)$ ($f'(c-0)$). Pues, pasando al límite para $n\to\infty$, de la igualdad (8.15) obtenemos

$$f'(c+0)=\lim_{x\to c+0} f'(x), \quad \left(f'(c-0)=\lim_{x\to c-0} f'(x)\right).$$

Si exigimos complementariamente que se cumple la igualdad $f'(c+$ $+0)=f'(c-0)$, entonces de la existencia de los límites $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$ se desprenderá la continuidad de $f'(x)$ en el punto c.

Aplicando la afirmación que acabamos de demostrar, en todo punto c de cierto intervalo (a, b), llegamos a la siguiente afirmación: *si la función $f(x)$ tiene derivada finita en todos los puntos del intervalo (a, b), entonces $f'(x)$ no puede tener en este intervalo puntos de discontinuidad evitable ni puntos de discontinuidad de primera especie.*

En efecto, si en un punto c del intervalo (a, b) existen valores límite derecho e izquierdo finitos de $f'(x)$, extonces $f'(x)$ *es continua en el punto c* (en virtud de la afirmación anteriormente demostrada). Si al menos uno de dos valores límite indicados no existe, $f'(x)$ *tiene discontinuidad de segunda especie en el punto c*. Demos el ejemplo de la función cuya derivada existe y es finita en todos los puntos de cierto intervalo y tiene en un punto de este intervalo discontinuidad de segunda especie. En el intervalo $(-1, +1)$ consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & \text{si } x\neq 0,\\ 0, & \text{si } x=0.\end{cases}$$

*) Se cumplen todas las condiciones del teorema de Lagrange puesto que la función $f(x)$ es diferenciable (y, por tanto, continua) en todo punto del segmento $[c, x_n]$ ($[x_n, c]$), excepto el punto c. La continuidad de $f(x)$ en el punto c por la derecha (por la izquierda) se desprende de la existencia de $f'(c+0)$ ($f'(c-0)$).

Es obvio que para cualquier $x \neq 0$ la derivada de esta función existe y se determina por la fórmula $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. La existencia de la derivada $f'(0)$ en el punto $x = 0$ se desprende directamente de la existencia del valor límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

En el punto $x = 0$ la derivada $f'(x)$ no tiene valor límite derecho ni izquierdo, puesto que en el punto $x = 0$ el sumando $2x \cos \frac{1}{x}$ tiene valor límite igual a cero, y el sumando $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no tiene valor límite derecho ni izquierdo en este punto (véase el ejemplo al final del p. 1 en el § 8 del cap. 4).

4. Deducción de algunas desigualdades. Para concluir, mostremos de qué modo, empleando el teorema de Lagrange, pueden obtenerse algunas desigualdades muy útiles. Como ejemplo argumentamos dos desigualdades siguientes:

$$|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| \leqslant |x_1 - x_2| \tag{8.16}$$

$$|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|. \tag{8.17}$$

(Aquí, como x_1 y x_2 se puede tomar cualesquiera valores del argumento.) Para argumentar la desigualdad (8.16) apliquemos el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ por el segmento $[x_1, x_2]$. Obtenemos

$$\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2 = (x_1 - x_2) f'(\xi). \tag{8.18}$$

Teniendo en cuenta que $f'(\xi) = \cos \xi$ y que $|\cos \xi| \leqslant 1$ para cualquier ξ obtenemos la desigualdad (8.16) pasando en (8.18) a los módulos.

Para argumentar la desigualdad (8.17) debemos aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ por el segmento $[x_1, x_2]$ y tomar en consideración que $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \leqslant 1$.

§ 11. Fórmula generalizada de los incrementos finitos (fórmula de Cauchy)

En este párrafo demostremos el teorema que pertenece a Cauchy y generaliza el teorema de Lagrange anteriormente establecido.

***Teorema 8.16.* (*teorema de Cauchy*).** *Si cada una de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y es diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento y si, además, la derivada $g'(x)$ es diferente de cero en todos los puntos dentro del segmento $[a, b]$, entonces,* *dentro de este segmento existe un punto ξ tal que es válida la fórmula*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{8.19}$$

La fórmula (8.19) se denomina *fórmula generalizada de los incrementos finitos* o *fórmula de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Ante todo, demostremos que $g(a)\neq g(b)$. En efecto, si no fuera así, para la función $g(x)$ se cumplirían todas las condiciones del teorema 8.11 (de Rolle) en el segmento $[a, b]$ y según este teorema, dentro del segmento $[a, b]$ existiría un punto ξ tal que $g'(\xi)=0$. Lo último contradice la condición del teorema. Pues, $g(a)\neq g(b)$ y tenemos derecho de considerar la siguiente función auxiliar:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]. \tag{8.20}$$

En virtud de las exigencias impuestas sobre las funciones $f(x)$ y $g(x)$, la función $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y es diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento. Además, es obvio que $F(a)=F(b)=0$. De este modo, para $F(x)$ se cumplen todas las condiciones del teorema 8.11 (de Rolle). Conforme a este teorema, dentro del segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que

$$F'(\xi)=0. \tag{8.21}$$

Teniendo en cuenta que $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$ y empleando la igualdad (8.21), tendremos

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0. \tag{8.22}$$

Tomando en consideración que $g'(\xi)\neq 0$, de la igualdad (8.22) obtenemos la fórmula de Cauchy (8.19). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. La fórmula de Lagrange (8.7) es el caso particular de la fórmula de Cauchy (8.19) para $g(x)=x$.

OBSERVACIÓN 2. En la fórmula (8.19) no es necesario tomar $b>a$.

§ 12. Resolución de las indeterminaciones (regla de L'Hospital)

1. Resolución de la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Diremos que para $x\to a$ la razón de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Resolver esta indeterminación significa calcular el valor límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (observando la condición de que este valor límite existe).

El siguiente teorema da la regla para resolver la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Teorema 8.17 (regla de L'Hospital*)). *Sea que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son definidas y diferenciables en todos los puntos del entorno del punto a, excepto, tal vez, el propio punto a. Sea, luego, que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

*y la derivada $g'(x)$ es diferente de cero en todos los puntos del entorno mencionado anteriormente del punto a. Entonces, si existe valor límite **) (finito o infinito)*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{8.23}$$

entonces, existe también el valor límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, con tal que es válida la fórmula

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{8.24}$$

El teorema 8.17 da la regla para resolver la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ que reduce el cálculo del valor límite de la razón de dos funciones al cálculo del valor límite de la razón de sus derivadas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión de valores del argumento convergente a a y compuesta de números diferentes de a. Consideremos esta sucesión *partiendo de un número n, desde el cual todos los x_n pertenecen al entorno del punto a mencionado en el enunciado del teorema*. Definemos completamente las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto a, tomándolas iguales a cero en este punto. Entonces, $f(x)$ y $g(x)$ serán evidentemente *continuas* en todo el segmento $[a, x_n]$ y diferenciables en todos los puntos interiores de este segmento. Además, $g'(x)$ es diferente de cero dentro de todo el segmento. De este modo, para $f(x)$ y $g(x)$ en el segmento $[a, x_n]$ se cumplen todas las condiciones del teorema 8.16 (de Cauchy). Según este

*) Guillaume Francois de L'Hospital, matemático francés (1661—1704).

**) Notemos que el valor límite (8.23) puede no existir, mientras el límite de la razón de las funciones $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe. Por ejemplo, se puede tomar $a = 0$, $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. De este modo, la regla de L'Hospital no «funciona» siempre.

teorema, dentro del segmento $[a, x_n]$ existe un punto ξ_n tal que

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \tag{8.25}$$

Teniendo en cuenta que, según la definición completa $f(a) = g(a) = 0$, podemos escribir la fórmula (8.25) del modo siguiente:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \tag{8.26}$$

Sea, ahora que en la fórmula (8.26) $n \to \infty$. Entonces es obvio que $\xi_n \to a$. Ya que hemos supuesto que el valor límite (8.23) existe, entonces, para $n \to \infty$ el miembro derecho de (8.26) debe tender a este valor límite. Por lo tanto, para $n \to \infty$ existe también el límite del miembro izquierdo de (8.26). Por la definición del valor límite de la función, este límite es igual a $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. De este modo, pasando al límite para $n \to \infty$, la igualdad (8.26) se transforma en la igualdad (8.24). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1. Si añadimos a las condiciones del teorema 8.17 la exigencia de la continuidad de las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ en el punto a, entonces, observando la condición $g'(a) \neq 0$ la fórmula (8.24) puede escribirse en la forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{8.27}$$

OBSERVACIÓN 2. Si las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, satisfacen las mismas exigencias que las propias funciones $f(x)$ y $g(x)$, entonces se puede volver a aplicar la regla de L'Hospital (es decir, el valor límite de la razón de las primeras derivadas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ puede sustituirse por el valor límite de la *razón de las segundas derivadas de estas funciones*). En este caso obtenemos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

OBSERVACIÓN 3. Es fácil transferir el teorema 8.17 para el caso cuando el argumento x tiende no al límite finito sino *al infinito* $a = +\infty$ o $a = -\infty$. Limitémonos a enunciar el teorema 8.17 para el caso de $a = +\infty$. *Sea que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son definidas y diferenciables en todos los puntos de la semirrecta $c < x < \infty$. Sea, luego, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y derivada $g'(x)$ es diferente de cero en dicha semirrecta. Entonces, si existe el valor límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe también el valor límite $\lim\limits_{x\to+\infty} gf(x)$ con tal que es válida la igualdad*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

EJEMPLOS.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

2) El siguiente valor límite se calcula aplicando dos veces la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

3) Aplicando tres veces la regla de L'Hospital, calculemos el valor límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+2\cos x-2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{2x-2\operatorname{sen} x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{12x^2}{2x-2\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{24x}{2\operatorname{sen} x} = 12.$$

2. Resolución de la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Diremos que, para $x\to a$, la razón de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty\ ^{*)}. \tag{8.28}$$

Para resolver esta indeterminación, o sea, para calcular el valor límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, es válida la afirmación completamente análoga al teorema 8.17, a saber: *si en el enunciado del teorema* 8.17 *sustituimos la exigencia* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *por la condición* (8.28), *el teorema* 8.17 *queda válida.*

Para demostrarla consideremos una sucesión *arbitraria* $\{x_n\}$, de valores del argumento convergente hacia a por la derecha (o por la izquierda). Sean x_m y x_n cualesquiera dos elementos de esta sucesión de números bastante grandes m y n que satisfacen la condición $n > m$.

Aplicando la fórmula de Cauchy (8.19) por el segmento $[x_m, x_n]$, podemos afirmar que en este segmento existe un punto ξ_{mn} tal que

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \frac{1-\frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1-\frac{g(x_m)}{g(x_n)}} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}.$$

De aquí,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} \frac{1-\frac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\frac{f(x_m)}{f(x_n)}}.$$

---

*) En vez de ∞ se puede tomar $+\infty$ o $-\infty$

Si existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$, entonces *para cualquier* $\varepsilon>0$ se puede fijar el número m tan grande que para cualquier $n>m$ la fracción $\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})}$ se diferencia del número A menos que en $\varepsilon/2$. Luego, teniendo en cuenta (8.28), para m fijado podemos hallar un número n_0 tal que para $n\geqslant n_0$ la fracción

$$\frac{1-\frac{g(x_m)}{g(x_n)}}{1-\frac{f(x_m)}{f(x_n)}}$$

se diferencie de la unidad menos que en $\frac{\varepsilon/2}{|A|+\frac{\varepsilon}{2}}$. Pero, entonces, para $n\geqslant n_0$ la fracción $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ se diferencia del número A menos que en $\frac{\varepsilon}{2}+$ $+|A|\frac{\varepsilon/2}{|A|+\frac{\varepsilon}{2}}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\varepsilon/2}{|A|+\frac{\varepsilon}{2}}=\varepsilon$. Esto significa que valor límite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ existe y es igual a A.

EJEMPLOS. 1) $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}}=-2\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0.$$

2) Aplicando n veces la regla de L'Hospital, calculamos el valor límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\dots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

3. Resolución de indeterminaciones de otras formas. Además de las indeterminaciones ya examinadas de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, se encuentran frecuentemente las indeterminaciones de la forma siguiente: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Estas indeterminaciones se reducen a las dos ya examinadas haciendo transformaciones algebraicas. Por ejemplo, mostrémoslo respecto a *tres últimas indeterminaciones* de las mencionadas

$$y=f(x)^{g(x)}, \tag{8.29}$$

donde, para $x\to a$, $f(x)$ tiende a 1, 0 ó ∞, respectivamente y $g(x)$ tiende a ∞, 0 ó 0, respectivamente. Hallando logaritmos de la expresión (8.29), obtenemos (teniendo en cuenta que $f(x)>0$)

$$\ln y=g(x)\ln f(x). \tag{8.30}$$

Para hallar el valor límite de la expresión (8.29), baste hallar dicho valor de la expresión (8.30).

Observemos que para $x \to \infty$ en cualquiera de tres casos considerados la expresión (8.30) es la indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$. Por lo tanto, es suficiente aprender a reducir la indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$ a la de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Mostremos cómo se hace eso. Así pues, sea

$$z = \varphi(x) \cdot \psi(x), \tag{8.31}$$

con tal que

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} \psi(x) = \pm \infty.$$

Escribimos (8.31) en la forma

$$z = \varphi(x) \cdot \psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}. \tag{8.32}$$

Obviamente, para $x \to a$, la expresión (8.32) es la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Hemos alcanzado nuestro objetivo.

EJEMPLOS. 1) Calcúlese $\lim\limits_{x \to 0+0} x^x$. Denotemos $y = x^x$. Entonces, $\ln y = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Aplicando la regla de L'Hospital, tendremos

$$\lim_{x \to 0+0} (\ln y) = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0+0} x = 0.$$

De aquí es evidente que $\lim\limits_{x \to 0+0} y = 1$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$. Sea $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$. Entonces,

$$\ln y = \frac{1}{(e^x - 1 - x)} \cdot \ln(1 + x^2).$$

Empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{1 + x^2}}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{(e^x - 1)(1 + x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{e^x (1 + x^2) + (e^x - 1) 2x} = 2.$$

De aquí está claro que $\lim\limits_{x \to 0} y = e^2$.

§ 13. Fórmula de Taylor

La fórmula que se deduce en este párrafo es una de las fórmulas fundamentales del análisis matemático y tiene numerosas aplicaciones, tanto en el mismo análisis como en materias contiguas.

Teorema 8.18 (teorema de Taylor *). *Sea que en un entorno del punto a la función $f(x)$ tiene derivada de orden **) $n+1$ (n es cualquier número fijado). Sea, luego, que x es cualquier valor del argumento de dicho entorno, p, un número positivo arbitrario. Entonces, entre los puntos a y x existe un punto ξ tal que es válida la siguiente fórmula:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x), \quad (8.33)$$

donde ***)

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\cdot\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi). \quad (8.34)$$

La fórmula (8.33) se denomina *fórmula de Taylor* (con centro en el punto a), y la expresión $R_{n+1}(x)$, *término residual*. Como veremos a continuación, el término residual puede escribirse tanto en la forma (8.34) como en otras formas. El término residual escrito en la forma (8.34) suele llamarse *término residual en forma general* ****).

DEMOSTRACIÓN. Mediante el símbolo $\varphi(x, a)$ denotemos el polinomio de x de orden n que figura en el miembro derecho de (8.33) o sea, pongamos

$$\varphi(x, a)=$$
$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (8.35)$$

Luego, mediante $R_{n+1}(x)$ denotemos la diferencia

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x, a). \quad (8.36)$$

El teorema quedará demostrado si establecemos que $R_{n+1}(x)$ se determina por la fórmula (8.34).

---

*) Brook Taylor, matemático inglés (1685—1731).

**) De aquí se desprende que *la propia función $f(x)$ y sus derivadas de hasta el orden n son continuas en dicho entorno del punto a.*

***) Ya que ξ se sitúa entre x y a, entonces $\frac{x-a}{x-\xi}>0$, así que la expresión $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)p$ está definida para cualquier $p>0$.

****) Esta forma del término residual se denomina también forma de Schlömilch — Roche.

Fijemos cualquier valor x del entorno mencionado en el enunciado del teorema. Para la precisión, tomaremos $x > a$. Mediante t denotemos la magnitud variable cuyo campo de definición es el segmento $[a, x]$ y consideremos la función auxiliar $\psi(t)$ del tipo siguiente:

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x-t)^p Q(x), \tag{8.37}$$

donde

$$Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}. \tag{8.38}$$

Con más detalles, $\psi(t)$ puede escribirse del modo siguiente:

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n}(x-t)^n - (x-t)^p Q(x). \tag{8.39}$$

Nuestro objetivo es expresar $Q(x)$ utilizando las propiedades de la función introducida $\psi(t)$.

Mostremos que la función $\psi(t)$ satisface todas las condiciones del teorema 8.11 (de Rolle) en el segmento $[a, x]$.

De la fórmula (8.39) y de las condiciones impuestas sobre la función $f(x)$ se desprende que la función $\psi(t)$ es continua sobre el segmento $[a, x]$ y diferenciable en él *). Cerciorémonos de que $\psi(a) = \psi(x) = 0$. Poniendo $t = a$ en (8.37) y tomando en consideración la igualdad (8.38), tendremos

$$\psi(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x).$$

De aquí, conforme a (8.36), obtenemos $\psi(a) = 0$. La igualdad $\psi(x) = 0$ se desprende inmediatamente de la fórmula (8.39).

Así pues, en el segmento $[a, x]$ para la función $\psi(t)$ se cumplen todas las condiciones del teorema 8.11 (de Rolle). De acuerdo con este teorema, dentro del segmento $[a, x]$ existe un punto ξ tal que

$$\psi'(\xi) = 0. \tag{8.40}$$

Calculemos la derivada $\psi'(t)$. Diferenciando la igualdad (8.39), tendremos

$$\psi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) +$$
$$+ \frac{f^{(2)}(t)}{2!}2(x-t) - \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} -$$
$$- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x). \tag{8.41}$$

---

*) La función $f(t)$ y sus derivadas de hasta el orden n son continuas en el segmento $[a, x]$, y $f^{n+1}(t)$ existe y es finita en este segmento (véase la nota *) en la pág. 262).

Es fácil ver que todos los términos del miembro derecho de (8.41), excepto dos últimos, se eliminan mutuamente. De este modo,

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x). \qquad (8.42)$$

Poniendo en la fórmula (8.42) $t = \xi$ y empleando la igualdad (8.40), obtenemos

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (8.43)$$

Comparando (8.43) y (8.38), tendremos definitivamente

$$R_{n+1}(x) = (x-a)^p Q(x) = \frac{(x-a)(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi).$$

El teorema queda demostrado.

Valiéndose de la fórmula de Taylor hallemos el desarrollo de la función simple, *polinomio algebraico de n-ésimo orden*. Sea

$$f(x) = C_0x^n + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Entonces, ya que $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, el término residual $R_{n+1}(x) \equiv 0$ y la fórmula de Taylor (8.33) toma la forma

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (8.44)$$

(Aquí, como a puede tomarse cualquier punto de recta infinita.) De este modo, la fórmula de Taylor permite representar cualquier polinomio $f(x)$ *en forma de polinomio respecto a las potencias de* $(x-a)$, donde p es cualquier número real.

Sea, ahora, $f(x)$ *función arbitraria* que satisface las condiciones del teorema 8.18. Tratemos de aclarar qué propiedades posee el polinomio (8.35) que figura en la fórmula de Taylor para esta función. Como anteriormente, denotaremos este polinomio por el símbolo $\varphi(x, a)$. Mediante el símbolo $\varphi^{(n)}(x, a)$ denotaremos la n-ésima derivada de $\varphi(x, a)$ respecto a x. Diferenciando la fórmula (8.35) respecto a x y poniendo después $x = a$, obtenemos las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}\varphi(a, a) &= f(a),\\ \varphi'(a, a) &= f'(a),\\ \varphi^{(2)}(a, a) &= f^{(2)}(a),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \varphi^{(n)}(a, a) &= f^{(n)}(a)\end{aligned}$$

De este modo, el polinomio $\varphi(x, a)$ que figura en la fórmula de Taylor para una función arbitraria $f(x)$ posee la propiedad de que el mismo y sus derivadas de hasta el orden n, inclusive, son iguales, en el punto $x = a$, a $f(x)$ y sus derivadas de hasta el orden n, respectivamente.

§ 14. Diferentes formas del término residual. Fórmula de Maclaurin

1. Término residual en forma de Lagrange, Cauchy y Peano. Anteriormente hemos establecido la fórmula de Taylor con el término residual *en forma general*. Aquí establecemos otras fórmulas posibles para el término residual. Obtenemos dos de ellas como casos particulares de la forma general del término residual.

Ante todo, transformemos un poco la fórmula para el término residual (8.34). Ya que el punto γ se comprende entre los puntos a y x *existe un punto* θ *) *del intervalo* $0 < \theta < 1$ tal que $\xi - a = \theta(x - a)$. Además, $\xi = a + \theta(x - a)$, $x - \xi = (x - a)(1 - \theta)$. De este modo, la fórmula (8.34) puede escribirse en la forma

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]. \qquad (8.45)$$

Consideremos ahora dos casos particulares importantes de la fórmula (8.45): 1) $p = n + 1$, 2) $p = 1$ (recordemos que en las fórmulas (8.34) y (8.45) como p se puede tomar cualquier número positivo). El primero de estos casos particulares ($p = n + 1$) lleva al término residual *en forma de Lagrange*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]. \qquad (8.46)$$

Esta forma del término residual es más usada en las aplicaciones. El término residual en forma de Lagrange se parece al término siguiente de la fórmula de Taylor, sólo la $(n + 1)$-ésima derivada de la función $f(t)$ se calcula no en el punto a, sino en un punto intermedio entre a y x $\xi = a + \theta(x - a)$. El segundo de los casos anteriormente mencionados ($p = 1$) lleva al término residual *en forma de Cauchy*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]. \qquad (8.47)$$

Ya que las formas de Lagrange y Cauchy corresponden a varios valores de p y θ depende de p, entonces, hablando en general, los valores θ en las fórmulas (8.46) y (8.47) son *diferentes*. Para estimar algunas funciones la forma de Cauchy es más preferible que la de Lagrange. Ambas formas del término residual (de Lagrange y Cauchy)

*) Cabe subrayar que ξ, y, por tanto, θ dependen tanto de x y n como también de p.

suelen emplearse si para unos u otros valores fijados de x, diferentes de a, es necesario *calcular aproximadamente la función* $f(x)$.

Es lógico sustituir aproximadamente $f(x)$ por el polinomio $\varphi(x, a)$ y estimar numéricamente el error hecho. Además, se encuentran problemas, en los cuales no nos interesa el valor numérico de dicho error, sino *solamente el orden de su magnitud relativamente pequeña* $(x - a)$. Para este, es cómoda otra forma de denotación del término residual (la llamada *forma de Peano* *)) la cual vamos a formular.

Sea que la función $f(x)$ *tiene derivadas de hasta el orden* $(n - 1)$ *en un entorno del punto* a *y la derivada de orden* n *en el propio punto* a.

Igual que anteriormente, denotemos la diferencia de la función $f(x)$ y el polinomio (8.35) mediante $R_{n+1}(x)$ y demostremos que para $R_{n+1}(x)$ es válida la siguiente igualdad

$$R_{n+1}(x) = o\,[(x - a)^n]. \tag{8.48}$$

La última igualdad es la que se denomina término residual representado *en forma de Peano*.

Ya que, en las suposiciones hechas, el polinomio (8.35) y sus derivadas de hasta el orden n inclusive coinciden, en el punto $x = a$, con la función $f(x)$ y sus derivadas, respectivamente, tomadas en el mismo punto $x = a$, entonces son válidas las desigualdades,

$$R_{n+1}(a) = 0,\ R'_{n+1}(a) = 0,\ \ldots,\ R_{n+1}^{(n-1)}(a) = 0,\ R_{n+1}^{(n)}(a) = 0 \tag{8.49}$$

y nos queda demostrar que de las desigualdades (8.49) se desprende la fórmula (8.48).

Para hacerlo es suficiente, empleando las igualdades (8.49) demostrar que

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{8.50}$$

Puesto que cada una de las funciones $R_{n+1}(x)$ y $(x - a)^n$ es diferenciable $(n - 1)$ veces en todos los puntos de cierto entorno del punto a, son válidas las desigualdades (8.49) y toda derivada de la función $(x - a)^n$ de hasta el orden $(n - 1)$ inclusive se anula *solamente en el punto* a, entonces, para resolver la indeterminación que está en el miembro izquierdo de (8.50), se puede aplicar $(n - 1)$ veces sucesivamente el teorema de L'Hospital 8.17 y, como resultado, se obtiene

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R'_{n+1}(x)}{n\cdot(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to 0} \frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)}. \tag{8.51}$$

---

*) Giuseppe Peano, matemático italiano (1858—1932).

Teniendo en cuenta la penúltima igualdad (8.49), podemos escribir (8.51) en la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}^{(n-1)}(x) - R_{n+1}^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

Ya que la derivada $R\,(a_{n+1}^{(n)})$ existe y en virtud de la última relación (8.49) es igual a cero, entonces, el valor límite del miembro derecho de la última igualdad existe y es igual a cero lo que demuestra la igualdad (8.50).

Por lo tanto, la deducción de la fórmula (8.48) queda terminada.

Para concluir escribimos por completo la fórmula de Taylor con el término residual en la forma de Peano

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\,[(x-a)^n]. \tag{8.52}$$

2. Otra denotación de la fórmula de Taylor. La fórmula de Taylor (8.33) se escribe frecuentemente en otra forma un poco distinta. Pongamos en (8.33) $a = x_0$, $(x - a) = \Delta x$ y tomemos el término residual en forma de Lagrange (8.46). Además, $x = x_0 + \Delta x$ y obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}. \tag{8.53}$$

(Aquí θ es un número del intervalo $0 < \theta < 1$). La fórmula de Taylor (8.53) es la generalización natural de la fórmula de Lagrange (8.11) (véase el § 9). La fórmula de Lagrange (8.11) se obtiene de la fórmula (8.53) en el caso particular de $n = 0$.

3. Fórmula de Maclaurin. Suele llamarse *fórmula de Maclaurin* *) fórmula de Taylor (8.33) con centro en el punto $a = 0$. De este modo, la fórmula de Maclaurin representa la función en el entorno del punto $x = 0$. Escribimos la fórmula de Maclaurin para una función arbitraria $f(x)$ con el término residual en forma de Lagrange, Cauchy y Peano **):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{8.54}$$

donde el término residual tiene la forma:

1) de Lagrange

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1), \tag{8.55}$$

*) Colin Maclaurin, matemático inglés (1698—1746).

**) Además, se supone que en el entorno del punto $x = 0$ $f(x)$ tiene $(n + 1)$-ésima derivada, en el propio punto $x = 0$, n-ésima derivada y para el término residual en forma de Peano, $(n - 1)$-ésima derivada.

2) de Cauchy *)

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)\quad (0<\theta<1), \tag{8.56}$$

3) de Peano

$$R_{n+1}(x)=o(x^n). \tag{8.57}$$

(Hemos empleado las fórmulas (8.46), (8.47) y (8.48).)

Pasamos a estimar el término residual de la fórmula de Taylor — Maclaurin, hallar el desarrollo de las funciones elementales más importantes por la fórmula de Maclaurin y considerar varias aplicaciones de esta fórmula.

§ 15. Estimación del término residual. Desarrollo de algunas funciones elementales

1. Estimación del término residual para una función arbitraria. Estimemos, para una función arbitraria $f(x)$, el término residual de la fórmula de Maclaurin tomado en forma de Lagrange (8.55).

Supongamos que la función considerada $f(x)$ posee la siguiente propiedad: *existe un número real M tal que para todos los números n y para todos los valores del argumento x del entorno considerado del punto $x=0$ es válida la desigualdad*

$$f^{(n)}(x)|\leqslant M. \tag{8.58}$$

La función que posee dicha propiedad se denominará *función cuyo conjunto de todas las derivadas está acotado en el entorno del punto $x=0$.*

De la desigualdad (8.48) se desprende que

$$|f^{(n)}(\theta x)|\leqslant M, \tag{8.59}$$

y por eso de la fórmula (8.55) se desprende que

$$R_{n+1}(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{n(+1)}(\theta x)\right|\leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Así pues, *obtenemos la siguiente estimación universal del término residual para la función cuyo conjunto de todas las derivadas está acotado por el número M en el entorno del punto $x=0$:*

$$|R_{n+1}(x)|\leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8.60}$$

Recordemos que para cualquier x fijado

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

*) Subrayemos otra vez que hablando en general, en las fórmulas (8.55) y (8.56) los valores de θ son diferentes.

(véase el ejemplo 3 del p. 3 del § 3 del cap. 3). De aquí se desprende miembro derecho de (8.60) cualquier pequeño que sea. Esto nos permite aplicar la fórmula de Maclaurin para el cálculo aproximado de las funciones que poseen dicha propiedad con cualquier exactitud anticipadamente fijada. Aduzcamos ejemplos de las funciones cuyo conjunto de todas las derivadas está acotado en el entorno del punto $x = 0$.

1) $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$. El conjunto de todas las derivadas de esta función está acotado por el número $M = e^r$ sobre cualquier segmento $[-r, r]$ $(r > 0)$.

2) $f(x) = \cos x$ ó $f(x) = \operatorname{sen} x$. El conjunto de todas las derivadas de cada una de estas funciones está acotado por el número $M = 1$ sobre toda la recta infinita.

2. Desarrollo de algunas funciones elementales por la fórmula de Maclaurin.

A. $f(x) = e^x$. Ya que $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ para cualquier n, la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \tag{8.61}$$

donde el término residual en forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

En todo segmento $[-r, +r]$ $(r > 0)$, debido a que $|e^{\theta x}| < e^r$, obtenemos la siguiente estimación para el término residual:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r. \tag{8.62}$$

B. $f(x) = \operatorname{sen} x$. Ya que $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0) = \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x), \tag{8.63}$$

donde n es número impar y el término residual en forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \operatorname{sen}\left(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Es obvio que en todo segmento $[-r, +r]$ $(r > 0)$ para el término residual es válida la siguiente estimación:

$$|R_{n+2}(x)| \leqslant \frac{r^{n+2}}{(n+2)!}. \qquad (8.64)$$

C. $f(x) = \cos x$. Ya que $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x), \qquad (8.65)$$

donde n es número par y el término residual en forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi\right) \quad (0 < \theta < 1).$$

Sobre todo segmento $[-r, +r]$ $(r > 0)$ obtenemos, para el término residual, la estimación (8.64).

D. $f(x) = \ln(1 + x)$. Ya que para $n \geqslant 1$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f(0) = 0, \; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \qquad (8.66)$$

Esta vez escribamos y estimemos el término residual tanto *en forma de Lagrange como en forma de Cauchy*:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad \text{(en forma de Lagrange)}, \qquad (8.67)$$

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n x^{n+1}\frac{(1+\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\,^{*)} \quad \text{(en forma de Cauchy)}. \qquad (8.58)$$

Si estimamos la función $\ln(1 + x)$ para los valores x pertenecientes al segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$, es más conveniente utilizar el término residual en forma de Lagrange (8.67). Pasando en la fórmula (8.67) a los módulos, para todos los x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ obtenemos

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}. \qquad (8.69)$$

*) Notemos otra vez que, hablando en general, en las fórmulas (8.67) y (8.68), los valores de θ son diferentes.

De la estimación (8.69) es obvio que para todos los x del segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$ $R_{n+1}(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Estimemos ahora la función $\ln(1+x)$ para los valores *negativos* x del segmento $-r \leqslant x \leqslant 0$, donde $0 < r < 1$. Para hacerlo, utilizamos el término residual en forma de Cauchy (8.68).

Escribimos este término residual en la forma

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}. \tag{8.70}$$

Tomando en consideración que para los valores considerados de x $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ y pasando a los módulos en la fórmula (8.70) tendremos

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r}. \tag{8.71}$$

Ya que $0 < r < 1$, entonces la estimación (8.71) permite comprobar que $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$.

E. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, donde α es número real. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

la fórmula de Maclaurin (8.54) tiene la forma

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{8.72}$$

donde el término residual en forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \tag{8.73}$$

En el caso particular cuando $\alpha = n$ es número entero, $R_{n+1}(x) = 0$ obtenemos la fórmula del binomio de Newton conocida del curso de matemáticas elementales

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \tag{8.74}$$

Si es necesario obtener el desarrollo no del binomio $(1+x)^n$, sino del binomio $(a+x)^n$, entonces se puede sacar a^n del paréntesis y emplear la fórmula (8.74). En este caso obtenemos

$$(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n\left[1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

De este modo, el caso general del binomio de Newton es el caso particular de la fórmula de Maclaurin.

F. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Podemos cerciorarnos de que

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

De esta manera, la fórmula de Maclaurin (8.54) con el término residual en forma de Peano (8.57) tiene la forma

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Aquí n es número impar.

§ 16. Ejemplos de aplicaciones de la fórmula de Maclaurin

1. Algoritmo para calcular el número e. En el p. 4 del § 3 del cap. 3 hemos introducido el número e como el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y hemos obtenido para e la estimación aproximada (véase la fórmula (3.7) del cap. 3) $2 \leqslant e \leqslant 3$. Ahora mostremos cómo se calcula el número e con cualquier grado de exactitud que nos interesa. Empleemos la fórmula de Maclaurin (8.61) y la estimación del término residual (8.62) poniendo en estas fórmulas $x = r = 1$. Obtenemos

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \tag{8.75}$$

donde

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{e}{(n+1)!} \leqslant \frac{3}{(n+1)!}. \tag{8.76}$$

Empleando estas fórmulas y escogiendo en ellas n bastante grande, podemos estimar el número e con cualquier grado de exactitud que nos interesa.

2. Realización del algoritmo para calcular el número e en un ordenador. El algoritmo para calcular el número e mencionado en el punto anterior se realiza fácilmente en los ordenadores.

Aduzcamos el cálculo del número e por la fórmula (8.75) para $n = 400$ en el ordenador BESM-6 *). Los cálculos se realizaron para

---

*) Para los lectores que conocen el lenguaje algorítmico estándar ALGOL aduzcamos el programa de cálculos escrito en este lenguaje:

Sistema Algol — BESM-6, variante 10—12—69

begin integer i, c, p, n, m: **integer array** a, b, e [0: 601);
m: = 400; marg (39, 50, 39, 10, 0, 0):
e [0]: = 1; b [0]: = 1;

600 cifras a la derecha de la coma. Teniendo en cuenta los errores posibles del redondeo, hemos omitido las últimas 10 cifras y aduzcamos el resultado del cálculo para 590 cifras y la derecha de la coma:

2,718281 828459 045235 360287 471352 662497 757247 093699
959574 966967 627724 076630 353547 594571 382178 525166 427427
466391 932003 059921 817413 596629 043572 900334 295260 595630
738132 328627 943490 763233 829880 753195 251019 011573 834187
930702 154089 149934 884167 509244 761460 668082 264800 168477
411853 742345 442437 107539 077744 992069 551702 761838 606261
331384 583000 752044 933826 560297 606737 113200 709328 709127
443747 047230 696977 209310 141692 836819 025515 108657 463772
111252 389784 425056 953696 770785 449969 967946 864454 905987
931636 889230 098793 127736 178215 424999 229576 351482 208269
895193 668033 182528 869398 496465 105820 939239 829488 793320
36...

Notemos que el ordenador tardó aproximadamente un minuto en realizar todos estos cálculos.

3. Empleo de la fórmula de Maclaurin para estimaciones asintóticas **) de funciones elementales y para calcular límites. La fórmula de Maclaurin es un medio eficaz para obtener estimaciones asintóticas de funciones elementales y para calcular límites.

En el cap. 4 hemos establecido las siguientes fórmulas asintó-

---

```
  for i: = 1 step 1 until 601 do
     a [i]: = b [i]: = e [i]: = 0;
  for n: = 1 step 1 until m do
  begin for i: = 0 step 1 until 600 do
     a [i]:  =  b [i];  c: = a [0];
     for i = 0 step 1 until 600 do
     begin b [i]: = c ÷ n;
      c: = (c − n × b [i] × 10 + a [i + 1) end
     p: = 0;
  for i: = 600 step − 1 until x do
  begin  c: = e [i] + b [i] + p,
      p: = 0;
      if c < 10 then e [i]: = c else
      begin  e [i]: = c − 10:  p: = 1  end
     end
  end
  for n: = 1 step 1 until 6 do
  begin output ('10/', 'zd', e [0]);
      for i: = 1 step 1 until 590 do
   output ('zd'), e ([i])
  end
end
```

**) La fórmula o estimación que caracteriza el comportamiento de $f(x)$ para $x \to a$ (aquí para $x \to 0$) se denomina *asintótica*.

ticas para las funciones elementales:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x + o(x), \\ \sqrt[n]{1+x} &= 1 + \frac{x}{n} + o(x), \\ \ln(1+x) &= x + o(x), \\ e^x &= 1 + x + o(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}\right\} \tag{8.77}$$

Las fórmulas (8.77) dan representaciones de las funciones elementales para valores pequeños de $|x|$. Las cuatro primeras fórmulas de (8.77) estiman las funciones elementales correspondientes con exactitud de hasta términos *de primer grado* respecto a la magnitud pequeña x, y la última de las fórmulas (8.77), con exactitud de hasta términos de *segundo grado* respecto a x.

Las estimaciones (8.77) resultan suficientes para calcular límites más simples. Sin embargo, para calcular límites más complicados en los cuales desempeñan el papel determinante los términos de grado superior respecto a la magnitud pequeña x, las fórmulas (8.77) son insuficientes. Así, por ejemplo, empleando las fórmulas (8.77) es imposible calcular el valor límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}, \tag{8.78}$$

puesto que al examinar el denominador se puede deducir que aquí desempeñan el papel determinante los términos de *tercer grado* respecto a x.

De este modo, para calcular los límites finos es necesario obtener estimaciones asintóticas más exactas para las funciones que están en los miembros izquierdos de las fórmulas (8.77).

Estas estimaciones se desprenden inmediatamente de la fórmula de Maclaurin (8.54) si en esta fórmula tomamos el término residual en forma de Peano (8.57). Escribiendo las fórmulas de Maclaurin (8.63), (8.72), (8.66), (8.61) y (8.65) y tomando en cada una de ellas el término residual en forma de Peano, obtenemos las siguientes estimaciones asintóticas:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} + o(x^{n+1}), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \end{aligned}\right\} \tag{8.79}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^n}{n!} + o(x^{n+1}).$$

(Aquí, en la primera de las fórmulas (8.79) n es cualquier número *impar*, y en la última de las fórmulas (8.79), n es cualquier número *par*.) Las fórmulas (8.79) estiman las funciones elementales correspondientes con exactitud de hasta términos de *cualquier grado* n respecto a la magnitud pequeña x. Estas fórmulas son medios eficaces para calcular algunos valores límite finos.

Aduzcamos ejemplos del empleo de las fórmulas asintóticas (8.79).

1°. A título de primer ejemplo consideremos el valor límite (8.78) mencionado anteriormente. Aplicando la primera de las fórmulas (8.79) (tomada para $n = 3$), tendremos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left[-\frac{1}{3!} + o(x) \right] = -\frac{1}{3!}.$$

2°. $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \operatorname{sen} x}$.

Partiendo del tipo del denominador se puede deducir que el papel determinante deben desempeñarlo los términos de cuarto grado respecto a x (puesto que $\operatorname{sen} x = x + o(x)$). Empleando las fórmulas (8.79), podemos escribir

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \tag{8.80}$$

$$\operatorname{sen} x = x + o(x), \tag{8.81}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2).$$

Por lo tanto, si $z = -x^2/2$ obtenemos

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4). \tag{8.82}$$

En virtud de las fórmulas (8.80), (8.81) (8.82) el valor límite buscado puede escribirse en la forma

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}.$$

(Aquí, mediante el símbolo $\alpha(x)$ hemos denotado la magnitud $\frac{o(x^4)}{x^4}$ que es infinitesimal para $x \to 0$.)

3°. $I = \lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\operatorname{sen} x - x)}}$.

Mediante y denotemos la magnitud *) $y = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\operatorname{sen} x - x)}}$. Entonces los $I = \lim\limits_{x \to 0} y$. Hallando los logaritmos para la expresión de y, tendremos

$$\ln y = \frac{1}{x(\operatorname{sen} x - x)} \ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Calculemos

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{x(\operatorname{sen} x - x)}.$$

Puesto que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ y $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)}.$$

Ahora tomemos en consideración que $\ln(1 + z) = z + o(z)$. De esta fórmula se desprende

$$\ln \left(1 + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

De esto modo,

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^5)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{6} + o(x)} = -\frac{1}{4}.$$

De aquí se deduce

$$I = \lim_{x \to 0} y = e^{-\frac{1}{4}}.$$

*) Para x pequeños la expresión $\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)$ es anticipadamente *positiva*.

Complemento

Cálculo de funciones elementales

En el presente Complemento examinaremos el problema del cálculo de valores de las funciones elementales más simples.

Para calcular los valores de todas las funciones mencionadas, se utilizan dos tipos de algoritmos, el primero de los cuales se basa en el desarrollo de la función calculada por la fórmula de Taylor, y el segundo, en su desarrollo en la fracción continua. El primer algoritmo permite elaborar el programa común para calcular los valores de las funciones logarítmica y trigonométricas inversas. El segundo algoritmo es base del programa universal para calcular las demás funciones elementales más simples.

Además de argumentar dichos algoritmos, estimaremos el número de iteraciones que garantizan la exactitud dada de los cálculos.

1. Cálculo de las funciones logarítmica y trigonométricas inversas. El cálculo de estas funciones se hace basándose en la fórmula de Taylor. Consideraremos detalladamente el problema del cálculo del logaritmo y del arco tangente. El cálculo de los valores de $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsen} x$ y $\arccos x$ se reduce fácilmente al cálculo del arco tangente empleando las siguientes fórmulas conocidas:

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

I. CÁLCULO de $\ln a$. Representemos el número $a > 0$ en la forma siguiente:

$$a - 2^p M, \tag{8.83}$$

donde p es número entero, y M satisface las condiciones

$$\frac{1}{2} \leqslant M < 1. \tag{8.84}$$

Notemos que la representación de a en la forma (8.83) es la única. Empleando la fórmula (8.83), obtenemos la siguiente expresión para $\ln a$:

$$\ln a = p \ln 2 + \ln M. \tag{8.85}$$

Haciendo

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+x}{1-x} \tag{8.86}$$

y poniendo esta expresión para M en (8.85), transformemos la fórmula (8.86) para $\ln a$ en la forma siguiente:

$$\ln a = \left(p - \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \ln \frac{1+x}{1-x}. \tag{8.87}$$

Desarrollemos la función $\ln \frac{1+x}{1-x}$ por la fórmula de Maclaurin. Es fácil cerciorarse de que este desarrollo con el término residual en forma de Lagrange tiene la forma siguiente:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x), \tag{8.88}$$

donde

$$R_{2n+2}(x)=\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left[\frac{1}{(1+\theta x)^{2n+2}}-\frac{1}{(1-\theta x)^{2n+2}}\right], \qquad (8.89)$$

y el número θ está comprendido estrictamente entre el cero y la unidad.

Para calcular aproximadamente $\ln a$ se usa la siguiente fórmula:

$$\ln a\approx\left(p-\frac{1}{2}\right)\ln 2+2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right), \qquad (8.90)$$

que se obtiene de (8.87), al sustituir $\ln\frac{1+x}{1-x}$ por la parte de la fórmula de Maclaurin (8.88) para esta función sin tomar el término residual $R_{2n+2}(x)$. Observemos que en la fórmula aproximada (8.90) para $\ln a$ el número x se determina valiéndose de la fórmula (8.86) y tomando en consideración las restricciones (8.84) impuestas sobre M.

Pasamos a estimar el error de la fórmula (8.90). Ya que el valor aproximado de $\ln a$ calculado por la fórmula (8.90) se diferencia del valor exacto calculado por la fórmula (8.87) solamente en el valor del término residual $R_{2n+2}(x)$, entonces, para determinar el error, baste estimar este término residual.

En primer lugar, aclaremos los límites de la variación de x. De la fórmula (8.86) obtenemos

$$x=\frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1}. \qquad (8.91)$$

De (8.91) se desprende que, para los valores de M que satisfacen las desigualdades (8.84), el valor absoluto de x satisface la condición *)

$$|x|<0,172 \qquad (8.92)$$

Observemos ahora que la estructura del término residual $R_{2n+2}(x)$ es tal que la estimación puede realizarse de la manera igual para los valores positivos y negativos de x (de la fórmula (8.89) se desprende que la sustitución de x por $-x$ no cambia la estructura de $R_{2n+2}(x)$). Por eso, es suficiente obtener la estimación de $R_{2n+2}(x)$ para $x\geqslant 0$. Teniendo en cuenta este hecho y la igualdad (8.92) y sustituyendo en el miembro derecho de (8.89) la magnitud x por el número 0,172, la magnitud $\frac{1}{1+\theta x}$ por la unidad, y la magnitud $\frac{1}{1-\theta x}$ por el número $\frac{1}{1-0,172}$ obtenemos la siguiente estimación:

$$|R_{2n+2}(x)|\leqslant\frac{(0,172)^{2n+2}}{2n+2}\left[1+\frac{1}{(1-0,172)^{2n+2}}\right].$$

En la última fórmula, pone $(0,172)^{2n+2}$ entre los corchetes. Ya que $\frac{0,172}{1-0,172}<$ $<0,208$, obtenemos la siguiente estimación para $R_{2n+2}(x)$:

$$|R_{2n+2}(x)|\leqslant\frac{(0,172)^{2n+2}+(0,208)^{2n+2}}{2n+2}. \qquad (8.93)$$

Al calcular $\ln a$ en el ordenador **) se suele tomar la fórmula (8.90) para

*) Ya que x es función de M, entonces el problema se reduce a la búsqueda del valor máximo del módulo de la función (8.91) en el segmento [1/2, 1].

**) Exactamente de este modo se calcula $\ln a$ en el ordenador BESM-6

$n = 6$. Para este caso, la exactitud de los cálculos se estima, como se ve de (8.93), por el número $\frac{(0,172)^{14} + (0,208)^{14}}{14}$ que no supera a $1,625 \cdot 10^{-10}$.

2. CÁLCULO de $\operatorname{arctg} \alpha$. Evidentemente, podemos limitarnos al caso de los valores positivos del argumento, puesto que, tomando $|\alpha| = 0$, hallamos

$$\operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{sgn} \alpha \cdot \operatorname{arctg} x.$$

Ahora indiquemos transformaciones normales empleando las cuales el cálculo de $\operatorname{arctg} x$, para los valores del argumento x no inferiores a $1/8$, se reduce al cálculo del arco tangente para los valores del argumento inferiores a $1/8$.

Sea primeramente $x \geqslant 1$. Hagamos $y = \operatorname{arctg} x$, es decir, $x = \operatorname{tg} y$ y $x_1 = \operatorname{tg}(y - \operatorname{arctg} 1)$. De la última fórmula obtenemos $x_1 = \frac{\operatorname{tg} y - 1}{\operatorname{tg} y + 1} = \frac{x - 1}{x + 1} < 1$. Ya que $\operatorname{arctg} x = \operatorname{actg} 1 + \operatorname{arctg} x_1 = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x_1$, entonces el cálculo de $\operatorname{arctg} x$ para los valores $x \geqslant 1$ se reduce al cálculo de $\operatorname{arctg} x_1$ para $0 < x_1 < 1$.

Examinemos ahora el caso cuando el argumento satisface las desigualdades $\frac{1}{8} \leqslant x < 1$.

Sea $k_1 = 1$, $k_2 = 1/2$, $k_3 = 1/4$, $k_4 = 1/8$. Evidentemente, para cierto $i = 1, 2, 3, 4$ se cumplen las desigualdades

$$k_i \leqslant x < 2k_i. \tag{8.94}$$

Hagamos $y = \operatorname{arctg} x$, es decir, $x = \operatorname{tg} y$ y $x_i = \operatorname{tg}(y - \operatorname{arctg} k_i)$. De esta fórmula obtenemos

$$x_i = \frac{\operatorname{tg} y - k_i}{1 + k_i \operatorname{tg} y} = \frac{x - k_i}{1 + k_i x}.$$

Ya que $x > 0$, entonces $1 + k_i x > 1$. Además, según la desigualdad derecha de (8.94), $x - k_i < 2k_i - k_i$. Por eso, de la última expresión para x_i obtenemos la desigualdad $x_i < k_i$. Ya que $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} k_i + \operatorname{arctg} x_i$, entonces el cálculo de $\operatorname{arctg} x$ para los valores x que satisfacen las desigualdades (8.94), se reduce al cálculo de $\operatorname{arctg} x_i$ para $0 < x_i < k_i$.

Al repetir las transformaciones descritas del argumento x cuatro veces al máximo, reducimos el cálculo de $\operatorname{arctg} x$ para los valores x del semiintervalo $1/8 \leqslant x < 1$ al cálculo del arco tangente para los valores del argumento inferiores a $1/8$.

Para calcular $\operatorname{arctg} x$ para $x < 1/8$ se utiliza la fórmula de Maclaurin

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x).$$

Para hacer cálculos suelen tomar la última fórmula para $n = 6$ eliminando el término residual *). El programa para calcular el logaritmo es el mismo que para el arco tangente. Empleando este programa para el arco tangente, hay que tener en cuenta que los signos de los términos vecinos $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ se cambian.

2. Cálculo de las funciones trigonométricas, la función exponencial y las funciones hiperbólicas. El cálculo de estas funciones se hace empleando *fracciones continuas*. Las propiedades de estas fracciones se dan a continuación en el p. 1.

El cálculo de todas las funciones enumeradas se efectúa utilizando una fracción continua que se obtiene al desarrollar la función $\operatorname{th} x$. Por eso, examine-

*) Precisamente de este modo se hace, por ejemplo, para efectuar cálculos en el ordenador BESM-6.

mos detalladamente el cálculo de los valores de la función th x y después indiquemos como se calculan las demás funciones.

1. ALGUNAS NOCIONES DE LAS FRACCIONES CONTINUAS. Se denomina *fracción continua finita* $\frac{P_n}{Q_n}$ la expresión de tipo

$$\frac{P_n}{Q_n}=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cdots+\cfrac{a_n}{b_n}}}}. \tag{8.95}$$

Las magnitudes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suelen llamarse *numeradores parciales*, y $b_0, b_1, \ldots, b_n$, *denominadores parciales*.

Las fracciones continuas

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{b_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1}=b_0+\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}}, \quad \ldots \tag{8.96}$$

se denominan fracciones *convenientes* para la fracción $\frac{P_n}{Q_n}$.

Si tomamos $P_{-1}=1$ y $Q_{-1}=0$, entonces de las expresiones (8.96) para las fracciones convenientes $\frac{P_k}{Q_k}$ ($k=1, 2, \ldots, n$) se puede obtener las siguientes fórmulas que ligan P_k con P_{k-1} y P_{k-2} y Q_k con Q_{k-1} y Q_{k-2}:

$$\left.\begin{aligned} P_k&=b_kP_{k-1}+a_kP_{k-2}, \\ Q_k&=b_kQ_{k-1}+a_kQ_{k-2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.97}$$

Necesitamos una fórmula especial para la fracción $\frac{P_n}{Q_n}$ determinada por la relación (8.95). Para establecer esta fórmula, comparemos dos fracciones convenientes $\frac{P_k}{Q_k}$ y $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$. La diferencia de estas fracciones es obviamente igual a

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}}{Q_{k-1}Q_k}. \tag{8.98}$$

En virtud de (8.97), el numerador del miembro derecho de (8.98) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}&=(b_kP_{k-1}+a_kP_{k-2})\,Q_{k-1}-(b_kQ_{k-1}+a_kQ_{k-2})\,P_{k-1}= \\ &=-a_k\,[P_{k-1}Q_{k-2}-Q_{k-1}P_{k-2}]. \end{aligned} \tag{8.99}$$

Empleando sucesivamente la relación (8.99) para los valores k, $(k-1)$, $(k-2), \ldots, 1$ y teniendo en cuenta que $P_{-1}=1$, $Q_{-1}=0$, $Q_0=1$, daremos a la fracción (8.98) la forma siguiente:

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=(-1)^{k+1}\,a_ka_{k-1}\ldots a_1\,\frac{1}{Q_{k-1}Q_k}. \tag{8.100}$$

Ya que

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_0}{Q_0}+\left(\frac{P_1}{Q_1}-\frac{P_0}{Q_0}\right)+\left(\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}\right)+\ldots+\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right),$$

entonces, empleando (8.100), obtenemos la fórmula especial necesaria para la fracción $\frac{P_n}{Q_n}$:

$$\frac{P_n}{Q_n}=b_0+\frac{a_1}{Q_0Q_1}-\frac{a_1a_2}{Q_1Q_2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{a_1a_2\ldots a_n}{Q_{n-1}Q_n}. \tag{8.101}$$

2. DESARROLLO DE LA FUNCIÓN th x EN LA FRACCIÓN CONTINUA. El método de desarrollo de la función th x en la fracción continua empleado en este punto fue propuesto por Schlömilch *) para desarrollar la función tg x en la fracción continua.

Consideremos la función $y=\operatorname{ch}\sqrt{x}$ para los valores $x>0$. Son evidentes las siguientes identidades que se obtienen diferenciando sucesivamente la función dada y haciendo transformaciones simples:

$$2\sqrt{x}y'=\operatorname{sh}\sqrt{x},\quad 2\sqrt{x}y''+\frac{y'}{\sqrt{x}}-\frac{y}{2\sqrt{x}}=0.$$

De la última relación obtenemos la identidad válida para todos los $x>0$:

$$4xy''+2y'-y=0. \tag{8.102}$$

Diferenciando sucesivamente la identidad (8.102), tendremos

$$\left.\begin{array}{l} 4xy'''+6y''-y'=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 4xy^{(n+2)}+(4n+2)\,y^{(n+1)}-y^{(n)}=0. \end{array}\right\} \tag{8.103}$$

Denotemos la relación $\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}}$ mediante u_{n+1}. Entonces, de la última relación de (8.103) obtenemos la identidad $4xu_{n+2}+4n+2=\frac{1}{u_{n+1}}$, de la cual se desprende la relación

$$u_{n+1}=\frac{1/2}{2n+1+2xu_{n+2}}. \tag{8.104}$$

Puesto que $u_1=\frac{y'}{y}=\frac{\operatorname{th}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, entonces, para $n=0$, la relación (8.104) puede escribirse en la forma siguiente:

$$\operatorname{th}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{1+2xu_2}.$$

En el miembro derecho de esta fórmula sustituimos u_2 por su expresión obtenida empleando (8.104) para $n=1$. Como resultado obtenemos la fórmula

$$\operatorname{th}\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{1+\frac{x}{3+2xu_3}}.$$

En la última relación podemos sustituir, u_3 por su expresión obtenida valiéndose de (8.104) para $n=2$. Podemos realizar operaciones de este tipo cualquier número finito de veces. Como resultado, obtenemos el desarrollo de la función th $\sqrt{x}$ en la fracción continua. Sustituyendo en esta relación $\sqrt{x}$ por x,

*) *Schlömilch O.* Ueber den Kettendruch fur tg x.— Zs. Math. und Phys. 2 (1857), 137—165.

hallemos el desarrollo necesario de la función th x en la fracción continua finita. Este desarrollo tiene la forma

$$\operatorname{th} x = \cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\ddots+\cfrac{x^2}{2n+1+2x^2u_{n+2}}}}} \tag{8.105}$$

3. CÁLCULO DE LOS VALORES DE LA FUNCIÓN th x. ESTIMACIÓN DEL ERROR DE LOS CÁLCULOS. El cálculo de valores de la función th x en el ordenador suele realizarse empleando la fórmula (8.105) en la cual se omite el término $2x^2u_{n+2}$. Además, n se toma igual a 6 ($n=6$) y el valor absoluto de las magnitudes de x se limita al número $\pi/4$.

Estimemos el error para cualquier número n.

Mediante $\overline{\operatorname{th}}\, x$ denotemos el valor aproximado de la función th x obtenido de (8.105) después de omitir el término $2x^2u_{n+2}$. Para determinar la exactitud de cálculos debemos, obviamente, estimar la diferencia $\operatorname{th} x - \overline{\operatorname{th}}\, x$. Observemos que th x y $\overline{\operatorname{th}}$ x son fracciones continuas que denotamos por $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ y $\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$, respectivamente.

Vamos a poner los valores de los numeradores parciales a_i, $\overline{a_i}$ y de los denominadores parciales b_i, $\overline{b_i}$ para estas fracciones (la raya por arriba denota las magnitudes que se refieren a la fracción $\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$). Tenemos

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\bar a_1=x,\ a_2=\bar a_2=x^2,\ \ldots,\ a_{n+1}=\bar a_{n+1}=x^2, \\ b_0=\bar b_0=0,\ b_1=\bar b_1=1,\ \ldots,\ b_n=\bar b_n=2n-1, \\ b_{n+1}=2n+1+2x^2u_{n+2},\ \ \bar b_{n+1}=2n+1. \end{array}\right\} \tag{8.106}$$

Ya que para las fracciones $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ y $\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$, $Q_{-1}=\overline{Q}_{-1}=0$ y $Q_0=\overline{Q}_0=1$, entonces, empleando la fórmula (8.106) y las relaciones (8.97), obtenemos las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1=\overline{Q}_1,\ Q_2=\overline{Q}_2,\ \ldots,\ Q_n=\overline{Q}_n, \\ Q_{n+1}=(2n+1+2x^2u_{n+2})\,\overline{Q}_n+x^2\overline{Q}_{n-1}, \\ \overline{Q}_{n+1}=(2n+1)\,\overline{Q}_n+x^2\overline{Q}_{n-1}. \end{array}\right\} \tag{8.107}$$

Ahora representemos cada una de las fracciones $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ y $\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$ en la forma (8.101). De las fórmulas (8.106) y (8.107) se desprende que estas representaciones se diferenciarán solamente por los últimos sumandos. Por eso la diferencia $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\dfrac{\overline{P}_{n+1}}{\overline{Q}_{n+1}}$ será igual a la diferencia de los últimos sumandos de las representaciones de estas fracciones según la fórmula (8.101). Ya que la diferencia de las fracciones consideradas es igual a $\operatorname{th} x-\overline{\operatorname{th}}'\, x$, entonces, empleando (8.106), obtenemos la siguiente fórmula:

$$\operatorname{th} x-\overline{\operatorname{th}}\, x=(-1)^{n+2} x^{2n+1}\left[\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}-\frac{1}{\overline{Q}_n\overline{Q}_{n+1}}\right].$$

Empleando las fórmulas (8.107), es fácil transformar esta relación en la forma siguiente:

$$\operatorname{th} x-\overline{\operatorname{th}}\, x=(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{\overline{Q}_n\overline{Q}_{n+1}}\left[\frac{2x^2\overline{Q}_nu_{n+2}}{2x^2\overline{Q}_nu_{n+2}+(2n+1)\overline{Q}_n+x^2\overline{Q}_{n-1}}\right]. \qquad (8.108)$$

Para obtener la estimación necesaria utilicemos dos desigualdades siguientes que demostramos a continuación.

Si $x \geqslant 0$, para cualquier $k \geqslant 1$ es válida la desigualdad:

$$\overline{Q}_k \geqslant (2k-1)!! \qquad (8.109)$$

Si $x > 0$ la magnitud u_{n+2} es positiva:

$$u_{n+2} > 0. \qquad (8.110)$$

Pasamos ahora a estimar la diferencia $\operatorname{th} x-\overline{\operatorname{th}}\, x$ para $x > 0$. Ya que para $x > 0$, $u_{n+2} > 0$ (véase (8.110)) y cualquier $\overline{Q}_k > 0$ (véase (8.109)), entonces la expresión entre corchetes en el miembro derecho de la igualdad (8.108) no supera a la unidad. Luego, de (8.109) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\overline{Q}_n\overline{Q}_{n+1} \geqslant [(2n-1)!!]^2\,(2n+1).$$

Por eso, cuando $x > 0$, para cualquier número n es válida la siguiente estimación del error:

$$|\operatorname{th} x-\overline{\operatorname{th}}\, x| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{[(2n-1)!!]^2\,(2n+1)}. \qquad (8.111)$$

Detengámonos en estimar el error para $n = 6$ y para los valores x que satisfacen las desigualdades $0 < x \leqslant \pi/4$. Si $n = 6$, el número $2n-1$ es igual a 11, y el número $2n+1$, a 13. Ya que $(\pi/4) < 0{,}8$, entonces $x^{13} < (0{,}8)^{13} < 5{,}6\cdot 10^{-2}$. Es fácil calcular que $11!! = 10\,395$. Por eso, teniendo en cuenta que $2\cdot 6+1 = 13$, de fórmula (8.111) obtenemos que para $n = 6$ el error del cálculo aproximado de $\operatorname{th} x$ no supera a $4\cdot 10^{-11}$.

Ahora demostremos las desigualdades (8.109) y (8.110).

DEMOSTRACIÓN DE LA DESIGUALDAD (8.109).

Demostremos primeramente la no negatividad de cualquier $\overline{Q}_k$. De las fórmulas (8.106) se desprende la no negatividad de $\overline{b}_k$ y $\overline{a}_k$ para cualquier $k \leqslant n$ cuando $x \geqslant 0$. Ya hemos notado que $\overline{Q}_{-1} = 0$, $\overline{Q}_0 = 1$. De aquí y de la segunda fórmula de (8.97) se desprende la no negatividad de $\overline{Q}_k$ para cualquier $k \leqslant n$.

De la segunda fórmula de (8.97), así como de la no negatividad de $\overline{a}_k$ y $\overline{Q}_k$ se desprende la desigualdad

$$\overline{Q}_k \geqslant \overline{b}_k\overline{Q}_{k-1}. \qquad (8.112)$$

Ya que $\overline{Q}_0 = 1$ y $\overline{b}_k = 2k-1$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, de la desigualdad (8.112) obtenemos sucesivamente $\overline{Q}_1 \geqslant 1$, $\overline{Q}_2 \geqslant 3$, ..., $\overline{Q}_k \geqslant (2k-1)!!$. La validez de la desigualdad (8.109) queda demostrada.

DEMOSTRACIÓN DE LA DESIGUALDAD (8.110).

Es suficiente demostrar que para $x > 0$ todas las derivadas de la función $y = \operatorname{ch}\sqrt{x}$ son positivas. De esta manera demostramos evidentemente, la desigualdad (8.110), puesto que

$$u_{n+2} = \frac{y^{(n+2)}}{y^{(n+1)}}.$$

Multiplicando la última relación de (8.103) por $\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{4}$, podemos escribir esta relación en la forma

$$\left[x^{n+\frac{1}{2}}y^{(n+1)}\right]'=\frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{4}\,y^{(n)}. \tag{8.113}$$

Cerciorémonos ahora de que

$$\lim_{x\to 0+0}\left[x^{n+\frac{1}{2}}\,y^{(n+1)}(x)\right]=0. \tag{8.114}$$

Para esto basta cerciorarse de que la magnitud

$$x^n y^{(n+1)}(x) \tag{8.115}$$

está acotada para $x\to 0+0$. De las relaciones $y=\operatorname{ch}\sqrt{x}$ e $y'=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ se desprende que $y(x)$ e $y'(x)$ están acotadas para $x\to 0+0$. Pero, entonces, de (8.102) se desprende que la magnitud $xy^2(x)$ está también acotada para $x\to$ $\to 0+0$.

Luego, de la última relación de (8.103) se deduce utilizando la inducción, que la magnitud (8.115) está acotada para cualquier número n cuando $x\to 0+0$. Por lo tanto, la relación (8.114) queda demostrada.

Demostremos ahora que para cualquier número n la derivada

$$y^{(n)}(x) \tag{8.116}$$

es positiva para $x>0$. Es evidente que $y^{(0)}(x)=y(x)=\operatorname{ch}\sqrt{x}$ es positiva para $x>0$. Supongamos que para cierto número n la magnitud (8.116) es positiva para $x>0$. Entonces, cerciorémonos de que $y^{(n+1)}(x)$ es positiva para $x>0$. De (8.113) deducimos que la derivada en el miembro izquierdo de (8.113) es positiva para $x>0$, o sea, la función $x^{n+1/2}$ e $y^{(n+1)}(x)$ crece para $x>0$. Pero, entonces de (8.114) se desprende que esta función es positiva para $x>0$. Pues, $y^{(n+1)}(x)>0$ cuando $x>0$ y la desigualdad (8.110) queda demostrada.

4. CÁLCULO DEL SENO Y COSENO HIPERBÓLICOS Y LA FUNCIÓN EXPONENCIAL. A continuación, mediante el símbolo $S_n\ (t)$ denotaremos la siguiente fracción continua:

$$S_n(t)=1+\cfrac{t}{3+\cfrac{t}{5+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{t}{2n+1}}}}. \tag{8.117}$$

Para el ordenador se elabora el programa para calcular esta fracción continua. Empleando este programa, se puede confeccionar fácilmente el programa para calcular la tangente hiperbólica puesto que, como hemos aclarado en el punto anterior, el valor aproximado de th x puede calcularse por la fórmula

$$\operatorname{th}x\approx\frac{x}{S_n(x^2)}, \tag{8.118}$$

con tal que en los puntos anteriores hemos también aclarado que si n crece, entonces la exactitud de los cálculos aumenta y el error tiende a cero.

El cálculo de las funciones sh $2x$, ch $2x$, e^{2x} puede reducirse al cálculo de la tangente hiperbólica por medio de las fórmulas

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad e^{2x} = \frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}.$$

De estas fórmulas y de la relación (8.118) se obtienen las siguientes fórmulas para los valores de las funciones enumeradas:

$$\operatorname{sh} 2x \approx \frac{2S_n(x^2) \cdot x}{S_n^2(x^2) - x^2} \ \operatorname{ch} 2x \approx \frac{[S_n^2(x^2) + x^2}{S_n^2(x^2) - x^2},$$

$$e^{2x} \approx \frac{S_n(x^2) + x}{S_n(x^2) - x}.$$

Está claro que, empleando estas fórmulas y el programa para calcular $S_n(t)$, es fácil confeccionar los programas para calcular sh $2x$, ch $2x$ y e^{2x}.

5. CÁLCULO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. El desarrollo de la función tg x se hace análogamente al desarrollo de la función th x en la fracción continua.

Consideremos la función $y = \cos \sqrt{x}$ para los valores $x > 0$. Son evidentes las siguientes relaciones obtenidas diferenciando sucesivamente esta función y haciendo transformaciones simples:

$$2\sqrt{x} y' = -\operatorname{sen} \sqrt{x}; \quad 2\sqrt{x} y'' + \frac{y'}{\sqrt{x}} = -\frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

De la última relación obtenemos la identidad

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

Diferenciando sucesivamente esta identidad, tendremos

$$4xy''' + 6y'' + y' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$4xy^{(n+2)} + (4n+2)\, y^{(n+1)} + y^{(n)} = 0$$

Mediante u_{n+1} denotemos la relación $\frac{y^{(n+1)}}{y^{(n)}}$. Entonces, de la última igualdad obtenemos la igualdad $4xu_{n+2} + 4n + 2 = -\frac{1}{u_{n+1}}$ de la cual se desprende la relación

$$u_{n+1} = \frac{-1/2}{2n + 1 + 2xu_{n+2}}.$$

De aquí, empleando los razonamientos completamente análogos hechos para la tangente hiperbólica, obtenemos el siguiente desarrollo de la función tg x en la fracción continua:

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{-x^2}{3 + \cfrac{-x^2}{5 + \ddots + \cfrac{-x^2}{2n + 1 + 2x^2 u_{n+2}}}}}.$$

El valor aproximado de tg x se obtiene de esta fórmula al omitir el término $2x^2 u_{n+2}$. Teniendo en cuenta la expresión (8.117), este valor aproximado puede hallarse por la fórmula

$$\operatorname{tg} x \approx \frac{x}{S_n(-x^2)}. \tag{8.119}$$

Igual que en el caso de la tangente hiperbólica, podemos cerciorarnos de que, si n aumenta, la exactitud de los cálculos por la fórmula (8.119) crece y el error tiende a cero.

Empleando las fórmulas del curso de las matemáticas elementales $\operatorname{sen} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ y $\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ y las relaciones (8.119), obtenemos las siguientes fórmulas para calcular los valores aproximados de sen $2x$ y cos $2x$:

$$\operatorname{sen} 2x \approx \frac{2S_n(-x^2)\cdot x}{S_n^2(-x^2)-x^2}, \quad \cos 2x \approx \frac{S_n^2(-x^2)+x^2}{S_n^2(-x^2)-x^2}.$$

Para concluir, notemos que la exactitud de cálculos de todas las funciones mencionadas en los últimos dos puntos no será menor que 10^{-11} para seis iteraciones ($n = 6$) si se observa la condición de que el argumento x no supera a $\pi/4$ en valor absoluto.

Capítulo 9

INVESTIGACIÓN GEOMÉTRICA DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN. DETERMINACIÓN DE VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN

§ 1. Intervalos de monotonía de una función. Búsqueda de puntos de extremo

1. Búsqueda de intervalos de monotonía de una función. En el § 10 del capítulo anterior hemos establecido algunas condiciones que aseguran *el crecimiento* (o, respectivamente, *el decrecimiento*, *el no crecimiento* y *el no decrecimiento*) de la función $f(x)$ en cierto intervalo (a, b). Para que sea más cómodo, volvamos a enunciar las condiciones halladas:

1°. Para que la función $f(x)$ diferenciable en un intervalo a, (b) *no decrezca* (*no crezca*) sobre este intervalo es necesario y suficiente que la derivada de esta función $f'(x)$ sea no negativa (no positiva) en todos los puntos de este intervalo.

2°. Para que la función diferenciable $f(x)$ *crezca* (*decrezca*) sobre el intervalo (a, b) es suficiente que la derivada $f'(x)$ sea positiva (negativa) en todos los puntos de este intervalo.

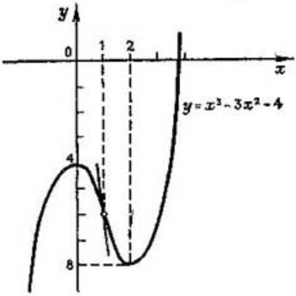

Fig. 9.1

De este modo, el estudio de los intervalos de monotonía de la función diferenciable $f(x)$ se reduce *a la investigación del signo de la primera derivada de esta función.*

A título de ejemplo examinemos el problema en el cual se buscan los intervalos de monotonía de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$. Ya que $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, entonces, $f'(x)$ es evidentemente

$$\begin{array}{ll} \text{positiva si} & -\infty < x < 0, \\ \text{negativa si} & 0 < x < 2, \\ \text{positiva si} & 2 < x < +\infty. \end{array}$$

De este modo, la función considerada crece en cada una de las semirrectas $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2)$. La gráfica de esta función está representada en la fig. 9.1.

2. Búsqueda de puntos de extremo posible. En el p. 2 del § 7 del capítulo anterior hemos introducido el concepto de *máximo* (*mínimo*) *local* de la función $f(x)$ y hemos establecido la *condición necesaria* para que en un punto dado la función $f(x)$ tenga máximo (mínimo) local. Para que sea más cómodo, volvamos a enunciar las definiciones y los resultados establecidos en dicho punto.

Sea la función $f(x)$ definida en todos los puntos de cierto entorno del punto c. Se dice que en el punto c la función $f(x)$ tiene *máximo (mínimo) local* si existe un entorno del punto c tal que entre sus límites el valor $f(c)$ es el máximo (el mínimo) entre todos los demás valores de esta función.

El máximo local y el mínimo local se denominan *extremo*.

El siguiente teorema establece *la condición necesaria del extremo de una función diferenciable: si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto c y tiene extremo en este punto*, entonces, $f'(c) = 0$.

De este modo, para hallar los puntos de extremo posible de la función diferenciable $f(x)$, hay que determinar todas las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ (es decir, hallar todos los ceros de la derivada $f'(x)$). En adelante, las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ denominaremos puntos de *extremo posible* de la función $f(x)$ *).

Sin embargo, observemos que, como la igualdad de la primera derivada a cero es *solamente* condición *necesaria* **) de extremo, hay que investigar complementariamente el problema de la existencia del extremo en todo punto de extremo posible. Para hacer esta investigación complementaria tenemos que establecer *condiciones suficientes de la existencia del extremo*. Pasamos a hacerlo.

3. Primera condición suficiente de extremo.

Teorema 9.1. *Sea que un punto c es punto de extremo posible de la función $f(x)$ y sea que la función $f(x)$ es diferenciable en todos los puntos de un entorno del punto c. Entonces, si entre los límites de dicho entorno la derivada $f'(x)$ es positiva (negativa) a la izquierda del punto c y negativa (positiva) a la derecha del punto c, la función $f(x)$ tiene máximo (mínimo) local en el punto c. Si la derivada $f'(x)$ tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha del punto c, entonces en el punto c no hay extremo.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea primero que entre los límites de dicho entorno la derivada $f'(x)$ es positiva (negativa) a la izquierda del punto c y negativa (positiva) a la derecha del punto c. Es necesario demostrar que el valor $f(c)$ es el máximo (mínimo) entre todos los valores de $f(x)$ en dicho entorno. Mediante x_0 denotemos *cualquier* valor del argumento de dicho entorno diferente de c. Basta demostrar que

$$f(c) - f(x_0) > 0 \quad (<0).$$

*) Las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ se denominan a veces *puntos estacionarios*.

**) Esta condición no es suficiente lo que se desprende, por lo menos, de la investigación de la función $y = x^3$. Esta función no tiene extremo en el punto $x = 0$ donde $f'(x) = 0$.

La función $f(x)$ es diferenciable (y, por lo tanto, continua) en el segmento $[c, x_0]$. Aplicando el teorema 8.12 de Lagrange a $f(x)$ por el segmento $[c, x_0]$, tendremos

$$f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0), \tag{9.1}$$

donde ξ es cierto valor del argumento comprendido entre c y x_0. Ya que la derivada $f'(\xi)$ es positiva (negativa) para $x_0 < c$ y negativa (positiva) para $x_0 > c$, entonces el miembro derecho de (9.1) es positivo (negativo).

2) Sea ahora que la derivada $f'(x)$ tiene el mismo signo tanto a la izquierda como a la derecha del punto c. Denotando, igual que anteriormente, mediante x_0 *cualquier* valor del argumento diferente de c y repitiendo los razonamientos hechos anteriormente, demostremos que el miembro derecho de (9.1) tiene *diferentes* signos para $x_0 < c$ y para $x_0 > c$. Esto demuestra que en el punto c no hay extremo.

La regla que se desprende del teorema 9.1 puede enunciarse brevemente del modo siguiente: 1) *si al pasar a través del punto de extremo posible dado c la derivada $f'(x)$ cambia el signo de más a menos (de menos a más), entonces en el punto c la función $f(x)$ tiene máximo (mínimo) local*; 2) *si al pasar a través del punto de extremo posible dado c la derivada $f'(x)$ no cambia de signo, entonces en el punto c no hay extremo.*

EJEMPLOS. 1) Suponiendo que una lata de conservas tiene forma de cilindro circular de radio r y altura h, determínese que relación entre r y h garantiza el mayor volumen posible de si su superficie total permanece constante.

Denotemos la superficie total de la lata de conservas mediante S. Entonces,

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = S = \text{const.} \tag{9.2}$$

De esta igualdad hallamos que

$$h = \frac{S}{2\pi r} - r.$$

De este modo, podemos expresar el volumen V de la lata de conservas como función del radio r: $V = \pi r^2 h = \frac{S}{2} r - \pi r^3$. El problema se reduce a la búsqueda del máximo de la función $V(r) = \frac{S}{2} r - \pi r^3$. Igualando a cero la derivada $V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$ y teniendo en cuenta que $r > 0$, hallamos el punto de extremo posible

$$r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}. \tag{9.3}$$

Aunque por el sentido del problema queda claro que el único punto de extremo es el punto del máximo de la función $V(r)$, podemos cerciorarnos estrictamente de esto empleando el teorema 9.1 y observando que la derivada $V'(r) = 3\pi\left(\frac{S}{6\pi} - r^2\right)$ es positiva para $r < \sqrt{S/6\pi}$ y negativa para $r > \sqrt{S/6\pi}$. Establecemos ahora que relación entre el radio r y la altura h garantiza el volumen máximo $V(r)$ de la lata de conservas. Para hacerlo, dividimos la igualdad (9.2) por r^2 y en el miembro derecho de la igualdad obtenida empleamos la relación (9.3). En este caso obtenemos $\frac{h}{r} = 2$, es decir, $h = 2r$.

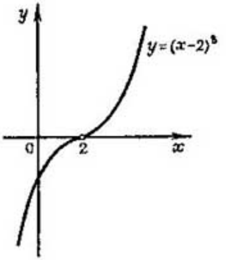

Fig. 9.2

De este modo, *el máximo volumen tendrá la lata cuya altura es igual al diámetro* *).

2) Hállese los puntos de extremo de la función $f(x) = (x-2)^5$. Ya que $f'(x) = 5(x-2)^4$, entonces el único punto de extremo posible es el punto $x = 2$.

Puesto que $f'(x)$ es positiva, tanto a la izquierda como a la derecha de este punto, entonces la función $f(x) = (x-2)^5$ no tiene puntos de extremo (la gráfica de la función $f(x) = (x-2)^5$ se representa en la fig. 9.2).

4. Segunda condición suficiente de extremo. A veces, es difícil determinar el signo de la primera derivada $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha del punto de extremo posible. Para este caso, indiquemos otra condición suficiente de la existencia del extremo en el punto de extremo posible dado c que no necesita la investigación del signo de $f'(x)$ en el entorno del c, sino *supone la existencia en el punto c de la segunda derivada finita $f^{(2)}(x)$ diferente de cero.*

Teorema 9.2. *Sea que la función $f(x)$ tiene segunda derivada finita en el punto de extremo finito dado c. Entonces, en el punto c, la función $f(x)$ tiene máximo si $f^{(2)}(c) < 0$, y mínimo si $f^{(2)}(c) > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. De la condición $f^{(2)}(c) < 0$ (>0) y del teorema 8.9 se desprende que la función $f'(x)$ decrece (crece) en el punto c. Ya que, según la condición, $f'(c) = 0$, entonces existe un entorno del punto c dentro del cual $f'(x)$ es positiva (negativa) a la izquierda de c y negativa (positiva) a la derecha de c. Pero, entonces, según el teorema anterior, en el punto c $f(x)$ tiene máximo (mínimo).

*) El problema resuelto demuestra que es conveniente fabricar las latas de altura igual al diámetro para ahorrar el metal.

OBSERVACIÓN. Hablando en general, el teorema 9.2 tiene aplicación más estrecha que el teorema 9.1. El teorema 9.2 no resuelve el problema de extremo para el caso cuando la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ no existe en el punto c, así como, cuando $f^{(2)}(c) = 0$. En el último caso, para resolver el problema de la existencia del extremo hay que examinar el comportamiento de las derivadas de órdenes superiores en el punto c, lo que haremos en el § 4 del presente capítulo.

EJEMPLOS. 1) En la taza que tiene forma de semiesfera de radio r se ha puesto una varilla homogénea de longitud l (fig. 9.3). Suponiendo que $2r < l < 4r$, hallar la posición de equilibrio de la varilla.

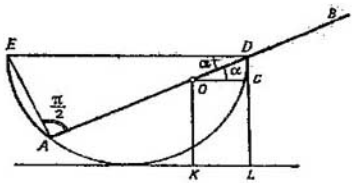

Fig. 9.3

A la posición de equilibrio de la varilla le corresponde el valor mínimo de su energía potencial, es decir, la posición más baja del centro de su gravedad O (puesto que la varilla es homogénea, su centro de gravedad coincide con su punto medio). Denotando mediante OK la perpendicular al plano, en el cual está la taza, reducimos el problema a la búsqueda de la posición de la varilla AB, en la cual el segmento OK tiene la longitud mínima. Ante todo, calculemos la longitud del segmento OK como función del ángulo entre la varilla y el plano, en el cual está la taza. Sea DL paralelo a OK, y OC perpendicular a OK (D es el punto de apoyo de la varilla en el borde de la taza).

Del triángulo rectangular EAD se tiene $AD = ED \cos\alpha = 2r\cos\alpha$. Por la condición, $AO = l/2$. De este modo,

$$OD = AD - AO = 2r\cos\alpha - 1/2.$$

Por otra parte, $DC = DL - OK = r - OK$. Por eso, del triángulo rectangular ODC,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{DC}{OD} = \frac{r - OK}{2r\cos\alpha - l/2}.$$

De este modo, la longitud del segmento OK denotada por $f(\alpha)$ es igual a $f(\alpha) = r + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\alpha - r\operatorname{sen}2\alpha$.

Pasamos a determinar el valor del ángulo α que da el mínimo de $f(\alpha)$. (Está claro que podemos limitarnos a los valores del ángulo α del primer cuadrante.) Ya que $f'(\alpha) = \frac{l}{2}\cos\alpha - 2r\cos 2\alpha = \frac{l}{2}\cos\alpha + 2r - 4r\cos^2\alpha$, entonces los puntos de extremo posible se hallan como soluciones de la ecuación cuadrática

$$4r\cos^2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha - 2r = 0.$$

Puesto que en el primer cuadrante $\cos\alpha$ es positivo, nos conviene solamente la raíz positiva de esta ecuación

$$\cos\alpha_0 = \frac{l+\sqrt{l^2+128r^2}}{16r}. \tag{9.4}$$

Aunque por el sentido del problema queda claro que el único punto de extremo posible α_0 es punto de mínimo de la función $f(\alpha)$, demostremos eso estrictamente, empleando el teorema 9.2. Es suficiente cerciorarse de que $f^{(2)}(\alpha_0) > 0$. Ya que

$$f^{(2)}(\alpha) = -\frac{l}{2}\operatorname{sen}\alpha + 4r\operatorname{sen}2\alpha = 8r\operatorname{sen}\alpha\left(\cos\alpha - \frac{l}{16r}\right),$$

entonces, en virtud de (9.4),

$$f^{(2)}(\alpha_0) = 8r\operatorname{sen}\alpha_0\left(\cos\alpha_0 - \frac{l}{16r}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha_0}{2}\sqrt{l^2+128r^2} > 0.$$

Por lo tanto, queda establecido que la posición de equilibrio de la varilla corresponde al ángulo entre la varilla y el plano, en el cual está la taza, determinado por la fórmula (9.4).

2) Hállense los valores de extremo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$. Ya hemos investigado esta función en el p. 1 del presente párrafo (véase la fig. 9.1). Puesto que $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, entonces la función $f(x)$ tiene dos puntos de extremo posible: $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Ya que es fácil dilucidar el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de estos puntos, se puede resolver el problema de extremo, empleando el teorema 9.1 (la primera condición suficiente). Pero nos preferimos a utilizar el teorema 9.2 (la segunda condición suficiente). Tenemos

$$f^{(2)}(x) = 6x - 6, \quad f^{(2)}(0) = -6 < 0, \quad f^{(2)}(2) = 6 > 0.$$

De este modo, la función $f(x)$ tiene máximo en el punto 0 y mínimo en el punto 2. Los valores extremales de esta función son iguales a

$$f_{\text{máx}} = f(0) = -4, \quad f_{\text{mín}} = f(2) = -8.$$

5. Extremo de la función, no diferenciable en un punto dado. Procedimiento general para determinar extremos. Hasta ahora, hemos estudiado el problema de existencia del extremo de la función $f(x)$ *en tal punto* c, *en el que la función* $f(x)$ *es diferenciable.* En este punto examinaremos el problema de existencia del extremo de una función en el punto c que no es diferenciable en dicho punto c pero es diferenciable en todos los puntos de cierto entorno a la derecha y a la izquierda de c.

Resulta que el teorema 9.1 puede generalizarse para el caso de tal función. A saber, tiene lugar la siguiente afirmación.

Teorema 9.3. *Sea la función $f(x)$ diferenciable en todos los puntos de cierto entorno del punto c, excepto, tal vez, el propio punto c, y continua en el punto c.*

Entonces, si entre los límites de dicho entorno la derivada $f'(x)$ es positiva (negativa) a la izquierda del punto c y negativa (positiva) a la derecha del punto c, entonces la función $f(x)$ tiene máximo (mínimo)

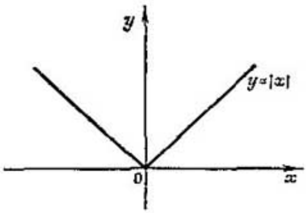

Fig. 9.4

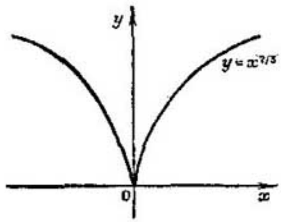

Fig. 9.5

local en el punto c. Si la derivada *$f'(x)$ tiene un mismo signo tanto a la izquierda como a la derecha del punto c, entonces, en el punto c no hay extremo.*

LA DEMOSTRACIÓN coincide en todos los detalles con la demostración del teorema 9.1. Pero esta vez, la posibilidad de aplicar el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ por el segmento $[c, x_0]$ se demuestra del modo siguiente: por la condición, la función $f(x)$ es diferenciable (y, por tanto, continua) sobre todo el semisegmento $(c, x_0]$ y, además, continua en el punto c. Por tanto, $f(x)$ es continua sobre todo el segmento $[c, x_0]$ y diferenciable en todos los puntos interiores de este segmento.

EJEMPLOS. 1) Hállense los puntos de extremo de la función $f(x) = |x|$. La función es diferenciable en todos los puntos de la recta infinita, excepto el punto $x = 0$, y continua en el punto $x = 0$, con tal que la derivada $f'(x) = 1$ para $x > 0$ y es igual a -1 para $x < 0$.

El teorema 9.1 no puede aplicarse a esta función, pero, según el teorema 9.3, ella tiene mínimo cuando $x = 0$ (fig. 9.4).

2) Hállense los puntos de extremo de la función $y = x^{2/3}$. Esta función es continua sobre toda la recta infinita y diferenciable en todos los puntos de esta recta, excepto el punto $x = 0$. La derivada, para $x \neq 0$, es igual a

$$y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

En el ejemplo anterior la derivada tenía discontinuidad de primera especie *) en el punto $x = 0$; esta vez, la derivada tiene en el punto $x = 0$ discontinuidad de segunda especie («salto infinito»). De la expresión para la derivada deducimos que la derivada es negativa a la izquierda del punto $x = 0$ y positiva a la derecha de este punto. Por tanto, el teorema 9.3 permite comprobar que la función considerada tiene mínimo en el punto $x = 0$ (la gráfica de la función considerada se representa en la fig. 9.5).

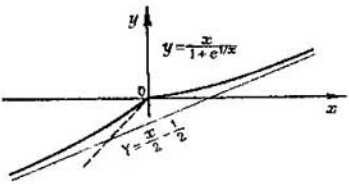

Fig. 9.6

3) Hállense los puntos de extremo de la función

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que esta función es continua sobre toda la recta infinita. En efecto, el único punto «dudoso» es el punto $x = 0$, pero en este punto la función es continua, puesto que

$$\lim_{x \to 0+0} y = \lim_{x \to 0-0} y = 0.$$

Luego, es obvio que la función considerada es diferenciable en todos los puntos de la recta infinita, excepto el punto $x = 0$. En todos los puntos, excepto éste, la derivada se determina por la fórmula

$$y' = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}}{\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2} .$$

Es fácil ver que el límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ no existe, así que la función $y = f(x)$ no es diferenciable en el punto $x = 0$. Debido a que la derivada y' es positiva, tanto a la izquierda como a la derecha del punto $x = 0$, la función considerada según el teorema 9.3 no tiene extremo en el punto $x = 0$, y, por lo tanto, nunca tiene extremos. (La gráfica de la función considerada se representa en la fig. 9.6.)

Pasamos al procedimiento general para determinar puntos de extremo local. Supongamos que la función $f(x)$ *es continua sobre el*

*) En el sentido de que esta derivada, aunque no existía en el punto $x = 0$ tenía en este punto los valores límite finitos derecho e izquierdo no coincidentes entre sí.

intervalo *) (a, b) *y su derivada* $f'(x)$ *existe y es continua sobre todo este intervalo, excepto un número finito de puntos.*

Además, supongamos que *en el intervalo* (a, b) *la derivada* $f'(x)$ *se anula sólo en un número finito de puntos.* En otras palabras, suponemos que en el intervalo (a, b) existe sólo un número finito de puntos en los cuales la derivada $f(x)$ no existe o se anula. Denotemos estos puntos mediante los símbolos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a < x_1 < < x_2 \ldots < x_n < b)$. En virtud de las suposiciones hechas, la derivada $f'(x)$ *mantiene el signo constante* en cada uno de los intervalos $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$. Por lo tanto, *el problema de existencia del extremo en cada uno de los puntos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *puede resolverse (en sentido positivo o negativo) empleando el teorema 9.3.*

Aquí no ofrecemos el ejemplo que ilustra el procedimiento general para determinar puntos de extremo local. Lo haremos en el § 6.

§ 2. Dirección de convexidad de la gráfica de una función

Supongamos que la función $f(x)$ es diferenciable en todo punto del intervalo (a, b). Entonces, como ya hemos establecido en el p. 4 del § 1 del cap. 5, *existe la tangente a la gráfica de la función* $y = f(x)$

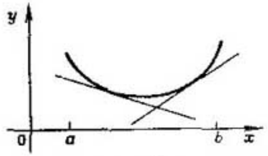

Fig. 9.7

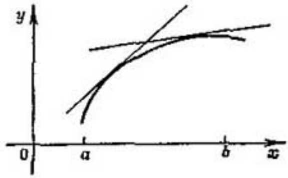

Fig. 9.8

que pasa por cualquier punto $M(x, f(x))$ *de esta gráfica* $(a < x < b)$ *con tal que la tangente no es paralela* **) *al eje* Oy.

Definición. Diremos que *en el intervalo* (a, b) *la gráfica de la función* $y = f(x)$ *tiene convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba) si la gráfica de esta función se encuentra no por debajo (no por encima) de cualquiera de sus tangentes entre los límites de dicho intervalo.*

OBSERVACIÓN 1. El término «*la gráfica se encuentra no por debajo (no por encima) de su tangente*» tiene sentido, puesto que la tangente no es paralela al eje Oy.

En la fig. 9.7 está representada la gráfica de la función que en

*) En vez del intervalo pueden considerarse una semirrecta, la recta infinita y otro conjunto.

**) Puesto que su coeficiente angular, igual a la derivada $f'(x)$, *es finito.*

el intervalo (a, b) tiene convexidad dirigida hacia abajo y, en la fig. 9.8, hacia arriba.

Teorema 9.4. *Si en el intervalo (a, b) la función $y = f(x)$ tiene la segunda derivada finita y si esta derivada es no negativa (no positiva) en todo este intervalo, entonces, en el intervalo (a, b), la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba).*

DEMOSTRACION. Para la precisión, consideremos el caso cuando la segunda derivada $f^{(2)}(x) \geqslant 0$ en todo el (a, b). Mediante c denotemos *cualquier* punto del intervalo (a, b) (fig. 9.9). Es necesario demostrar que la gráfica de la función $y = f(x)$ no se encuentra por debajo de la tangente que pasa por el punto $M(c, f(c))$. Escribimos la ecuación de dicha tangente, denotando su ordenada corriente

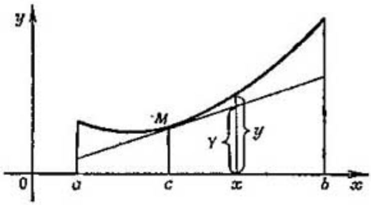

Fig. 9.9

mediante Y. Ya que el coeficiente angular de dicha tangente es igual a $f'(c)$, su ecuación tiene la forma *)

$$Y - f(c) = f'(c)(x - c). \tag{9.5}$$

Desarrollemos la función $f(x)$ en el entorno del punto c por la fórmula de Taylor, tomando en esta fórmula $n = 1$. Obtenemos

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - c)^2, \tag{9.6}$$

donde el término residual se toma en forma de Lagrange, ξ se comprende entre c y x. Ya que, según la condición, $f(x)$ tiene la segunda derivada en el intervalo (a, b), la fórmula (9.6), es válida para *cualquier* x del intervalo (a, b) (véase el § 13 del cap. 8).

Comparando (9.6) y (9.5), tendremos

$$y - Y = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - c)^2. \tag{9.7}$$

*) En el fascículo 8 del presente curso se demuestra que la ecuación de la recta que pasa por el punto $M(a, b)$ y tiene el coeficiente angular k, es de la forma $Y - b = k(x - a)$.

Ya que, según la condición, la segunda derivada $\geqslant 0$, en todo el (a, b), entonces el miembro derecho de (9.7) es *no negativo*, o sea, para todos los x de (a, b) $y - Y \geqslant 0$ o bien $y \geqslant Y$.

La última desigualdad demuestra que la gráfica de la función $y = f(x)$, entre los límites del intervalo (a, b), se sitúa no más bajo que la tangente (9.5).

Análogamente se demuestra el teorema para el caso de $f^{(2)}(x) \leqslant \leqslant 0$.

OBSERVACIÓN 2. Si, en todo el intervalo (a, b), $f^{(2)}(x) = 0$, entonces, como es fácil cerciorarse, $y = f(x)$ es función lineal, o sea, su gráfica es línea recta. En este caso, la dirección de convexidad puede ser arbitraria.

Teorema 9.5. *Sea la segunda derivada de la función $y = f(x)$ continua y positiva (negativa) en el punto c. Entonces, existe un entorno del punto c tal que entre sus límites la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba).*

DEMOSTRACION. Según el teorema sobre la estabilidad del signo de una función continua, existe un entorno del punto c tal que entre sus límites la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ es positiva (negativa). Conforme al teorema anterior, entre los límites de este entorno la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene la convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba).

De este modo, *la dirección de convexidad de la gráfica de la función se caracteriza completamente por el signo de la segunda derivada de esta función*.

EJEMPLO. Investigar la dirección de convexidad de la gráfica de la función $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. Ya la hemos considerado en los puntos 1 y 4 del párrafo anterior (véase la fig. 9.1). De la forma de la segunda derivada $f^{(2)}(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ se desprende que esta derivada es negativa para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. De este modo, la convexidad de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 - 4$ está dirigida hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 1)$ y hacia abajo en el intervalo $(1, \infty)$.

§ 3. Puntos de inflexión de la gráfica de una función

1. Definición del punto de inflexión. Condición necesaria de inflexión. Sean a, b y c tres números vinculados por las desigualdades $a < c < b$. Supongamos que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el intervalo (a, b), o sea, existe la tangente a la gráfica de esta función de todos los puntos cuyas abscisas pertenecen al intervalo (a, b). Además, supongamos que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene dirección determinada de convexidad en cada uno de los intervalos (a, c) y (c, b).

Definición. *El punto $M(c, f(c))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ se denomina* ***punto de inflexión*** *de esta gráfica si existe un* *entorno del punto c del eje de abscisas tal que, entre sus límites, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene direcciones diferentes de convexidad a la izquierda y a la derecha del punto c.*

En la fig. 9.10 está representada la gráfica de la función que tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.

A veces, cuando se hallan los puntos de inflexión de la gráfica de una función $y = f(x)$ se exige complementariamente que *dicha gráfica, entre los límites de todo el entorno bastante pequeño del punto c del eje de abscisas, a la izquierda y a la derecha de c esté situada por los lados diferentes de la tangente a esta gráfica en el punto* $M(c, f(c))$.

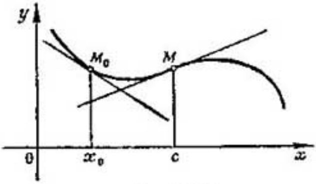

Fig. 9.10

A continuación demostremos que esta propiedad se desprenderá de la definición dada suponiendo que la derivada $f'(x)$ sea continua en el punto c.

Demostremos dos lemas siguientes.

Lema 1. *Sea que la función $y = f(x)$ tiene la derivada $f'(x)$ en todos los puntos de δ-entorno del punto c con tal que esta derivada es continua en el punto c. Entonces, si la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene, en el intervalo $(c, c + \delta)$, la convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba), entonces entre los límites de todo el intervalo $(c, c + \delta)$ esta gráfica se sitúa no más bajo (no más alto) que la tangente a la gráfica trazada en el punto $M(c, f(c))$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las sucesión $\{x_n\}$ de puntos del intervalo $(c, c + \delta)$ convergente al punto c. Por todo punto $M_n(x_n, f(x_n))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ tracemos la tangente a esta gráfica, o sea, la recta *)

$$Y_n = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Ya que, según la condición, en el intervalo $(c, c + \delta)$ la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene la convexidad dirigida hacia abajo (hacia arriba), entonces, para cualquier número n y cualquier punto *fijado* x del intervalo $(c, c + \delta)$,

$$f(x) - Y_n = f(x) - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0). \qquad (*)$$

De la condición de continuidad de $f'(x)$ y, por lo tanto, de $f(x)$) en el punto c y de la definición de continuidad del p. 1 del § 3 del

*) Emp eamos la ecuación de la recta que pasa por el punto dado $M_n(x_n, f(x_n))$ y tiene el coeficiente angular igual a $f'(x_n)$. La ordenada corriente de esta recta se denota por Y_n.

cap. 4 se desprende que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty}(f(x)-Y_n)=\lim_{n\to\infty}\{f(x)-f(x_n)-f'(x_n)(x-x_n)\}=$$
$$=f(x)-f(c)-f'(c)(x-c).$$

De la existencia del último límite, en virtud de la desigualdad (*) y el teorema 3.13 del § 1 del cap. 3, obtenemos que

$$f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)\geqslant 0\quad(\leqslant 0).$$

Si mediante Y denotamos la ordenada corriente de la tangente (9.5) que pasa por el punto $M(c, f(c))$, entonces podemos escribir la última desigualdad en la forma: $f(x)-Y\geqslant 0$ ($\leqslant 0$).

Así pues, pasando en la desigualdad (*) al límite para $n\to\infty$ y empleando el teorema 3.13 del cap. 3, obtenemos que

$$f(x)-Y\geqslant 0\quad(\leqslant 0)$$

para todo punto fijado x del intervalo $(c, c+\delta)$ con tal que Y designe la ordenada corriente de la tangente trazada por el punto $M(c, f(c))$. El lema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. De manera análoga se enuncia y se demuestra el lema 1 para el caso cuando la gráfica de la función tiene dirección determinada de convexidad no en el intervalo $(c, c+\delta)$ sino en el intervalo $(c-\delta, c)$.

Lema 2. *Sea que la función $y=f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ en un entorno del punto c con tal que esta derivada sea continua en el punto c. Entonces, si la gráfica de la función $y=f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$, entonces entre los límites de un δ-entorno bastante pequeño del punto c, a la izquierda y a la derecha de c esta gráfica está situada por los lados diferentes de la tangente trazada por el punto $M(c, f(c))$.*

Para *demostrar* este lema debemos elegir $\delta>0$ tan pequeño que, en cada uno de los intervalos $(c-\delta, c)$ y $(c, c+\delta)$, la gráfica de la función $y=f(x)$ tenga dirección determinada de convexidad (esta dirección será diferente en los intervalos $(c-\delta, c)$ y $(c, c+\delta)$). Después de eso para demostrar el lema 2 queda por aplicar el lema 1 a la función $y=f(x)$ en cada uno de los intervalos $(c-\delta, c)$ y $(c, c+\delta)$.

El lema 2 permite establecer la condición necesaria de inflexión de la gráfica de la función dos veces diferenciable en un punto dado.

Teorema 9.6. (condición necesaria de inflexión de la gráfica de la función dos veces diferenciable). *Si en el punto c la función $y=f(x)$ tiene la segunda derivada y la gráfica de esta función tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$, entonces $f^{(2)}(c)=0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea, igual que anteriormente, Y la ordenada corriente de la tangente $Y=f(c)+f'(c)(x-c)$ que pasa por el punto de la gráfica $M(c, f(c))$.

Consideremos la función

$$F(x) = f(x) - Y = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

igual a la diferencia de $f(x)$ y la función lineal $f(c) + f'(c)(x - c)$.

Igual que la función $f(x)$, la $F(x)$ tiene en el punto c la segunda derivada (y, por eso, tiene la primera derivada en cierto entorno de c con tal que la primera derivada es continua en el punto c). En virtud del lema 2, en un entorno pequeño del punto c, a la izquierda y a la derecha de c la gráfica de la función $y = f(x)$ está situada por los lados diferentes de la tangente que pasa por el punto $M(c, f(c))$, y, por consiguiente, en el entorno pequeño del punto c la función $F(x)$ tiene *signos diferentes* a la izquierda y a la derecha de c.

Por tanto, *la función $F(x)$ no puede tener extremo local en el punto c.*

Supongamos ahora que $f^{(2)}(c) \neq 0$. Entonces, puesto que $F'(x) = f'(x) - f'(c)$, $F^{(2)}(x) = f^{(2)}(x)$, se cumplen las condiciones $F'(c) = 0$, $F^{(2)}(c) \neq 0$ y la función $F(x)$ en virtud del teorema 9.2, tiene extremo local en el punto c. La contradicción obtenida demuestra que la suposición $f^{(2)}(c) \neq 0$ es inválida, o sea, $f^{(2)}(c) = 0$. El teorema queda demostrado.

El hecho de que la igualdad de la segunda derivada a cero es *solamente* la condición *necesaria* de inflexión de la gráfica de la función dos veces diferenciable se desprende, por ejemplo, de la consideración de la gráfica de la función $y = x^4$. Para esta función, la segunda derivada $y^{(2)} = 12x^2$ se anula en el punto $x = 0$ pero su gráfica no tiene inflexión en el punto $M(0, 0)$.

En virtud del teorema 9.6, para hallar todos los puntos de inflexión de la gráfica de la función dos veces diferenciable $y = f(x)$ hace falta considerar todas las raíces de la ecuación $f^{(2)}(x) = 0$.

Debido a que la igualdad de la segunda derivada a cero es solamente la condición necesaria de inflexión, es necesario investigar complementariamente el problema de existencia de la inflexión en todo punto, para el cual $f^{(2)}(x) = 0$. Para realizar esta investigación, debemos establecer las condiciones suficientes de inflexión. Pasamos a hacerlo.

2. Primera condición suficiente de inflexión.

Teorema 9.7. *Sea que la función $y = f(x)$ tiene la segunda derivada en cierto entorno del punto c y $f^{(2)}(c) = 0$. Entonces, si entre los límites de dicho entorno la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha de c, la gráfica de esta función tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, observemos que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene tangente en el punto $M(c, f(c))$, puesto que de las condiciones del teorema se desprende la existencia de la derivada finita $f'(c)$. Luego, de que $f^{(2)}(x)$ tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha de c y del teorema 9.4 deducimos que la dirección de convexidad es diferente a la izquierda y a la derecha de c. El teorema queda demostrado.

EJEMPLO. Hállense los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 - 4$. La consideramos anteriormente muchas veces (su gráfica está representada en la fig. 9.1). Puesto que $f^{(2)}(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$, entonces el único valor del argumento para el cual la inflexión sea posible, es $x = 1$. Le corresponde el punto de la gráfica $M(1, -6)$. Ya que $f^{(2)}(x)$ tiene signos diferentes para $x > 1$ y para $x < 1$, entonces el punto $M(1, -6)$ es punto de inflexión de la gráfica de la función considerada.

3. Segunda condición suficiente de inflexión. Para el caso cuando la investigación del signo de la segunda derivada en el entorno del punto c no es deseable, enunciemos la segunda condición suficiente de inflexión que supone la existencia de la tercera derivada finita de la función $y = f(x)$ en el punto c.

Teorema 9.8. *Si en el punto c la función $y = f(x)$ tiene la tercera derivada finita y en este punto satisface las condiciones $f^{(2)}(c) = 0$, $f^{(3)}(c) \neq 0$, entonces la gráfica de esta función tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.*

DEMOSTRACIÓN. De la condición $f^{(3)}(c) \neq 0$ y del teorema 8.9 se desprende que la función $f^{(2)}(x)$ ora crece ora decrece en el punto c. Ya que $f^{(2)}(c) = 0$, tanto en uno como en otro caso existe un entorno del punto c tal que entre sus límites $f^{(2)}(x)$ tiene *signos diferentes a la izquierda y a la derecha de c*. Pero, entonces, según el teorema anterior, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.

OBSERVACIÓN. Naturalmente, el teorema 9.8 tiene una aplicación más estrecha que el teorema 9.7. Así, el teorema 9.8. no resuelve el problema de existencia de la inflexión para el caso cuando la función $y = f(x)$ no tiene la tercera derivada finita, así como para el caso de $f^{(3)}(c) = 0$. En el último caso, para resolver el problema de existencia de la inflexión es necesario examinar el comportamiento de las derivadas de órdenes superiores en el punto c, lo que haremos en el § 4 de este capítulo.

Volvamos al ejemplo considerado en el punto anterior y mostremos que el problema de existencia de la inflexión para la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 - 4$ puede también resolverse si empleamos el teorema 9.8. En efecto, $f^{(3)}(x) = 6 \neq 0$, y, por tanto, según el teorema 9.8. el punto $M(1, -6)$ es punto de inflexión.

4. Algunas generalizaciones de la primera condición suficiente de inflexión. Ante todo, notemos que en las condiciones del teorema 9.7 se puede eliminar la exigencia de la doble diferenciabilidad de la función $y = f(x)$ *en el propio punto c*, manteniendo esta exigencia solamente para los puntos que están situados en cierto entorno a la izquierda y a la derecha de c. Además, debemos suponer complementariamente la existencia de la derivada finita $f'(c)$.

La demostración del teorema 9.7 tomando en consideración dichos cambios coincide literalmente con la demostración anteriormente aducida.

Luego, podemos ponernos de acuerdo en no excluir en la definición del punto de inflexión, el caso cuando en el punto considerado la tangente a la gráfica *es paralela* al eje Oy *). Teniendo en cuenta este acuerdo, en el teorema se puede incluso eliminar la exigencia de la diferenciabilidad de la función $f(x)$ en el propio punto c y enunciar este teorema del modo siguiente.

*Sea que la función $y = f(x)$ tiene la segunda derivada finita en todos los puntos de cierto entorno del punto c, excepto, tal vez, el propio punto c. Luego, sea la función $f(x)$ continua en el punto c y sea que la gráfica de esta función tiene tangente**) en el punto $M(c, f(c))$. Entonces, si entre los límites de dicho entorno la segunda derivada $f^{(2)}(x)$ tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha del punto c, entonces la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$.*

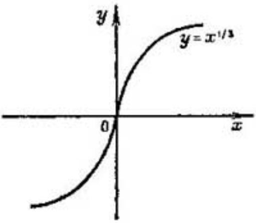

Fig. 9.11

La demostración de la afirmación enunciada es completamente análoga a la demostración del teorema 9.7.

EJEMPLO. Hállense los puntos de inflexión de la gráfica de la función $y = x^{1/3}$. La función tiene la segunda derivada en todos los puntos de la recta infinita, excepto el punto $x = 0$. En el punto $x = 0$ la función considerada es continua, pero su primera derivada es igual al infinito. Sin embargo, en el punto $(0, 0)$ la gráfica de la función $y = x^{1/3}$ tiene tangente paralela al eje Oy ***) (fig. 9.11). Ya que la segunda derivada

$$y^{(2)} = -\frac{2}{9}\frac{1}{x^{5/3}}$$

tiene signos diferentes a la izquierda y a la derecha del punto $x = 0$, entonces la gráfica de la función $y = x^{1/3}$ tiene inflexión en el punto $(0, 0)$.

§ 4. Tercera condición suficiente de extremo e inflexión

Teorema 9.9. *Sea $n \geqslant 1$ y sea que la función $y = f(x)$ tiene derivada de orden n en un entorno del punto c y derivada de orden $n + 1$ en el propio punto c. Sea, luego, que son válidas las siguientes relaciones:*

$$f^{(2)}(c) = f^{(3)}(c) = \ldots = f^{(n)}(c) = 0, \quad f^{(n+1)}(c) \neq 0. \qquad (9.8)$$

Entonces, si n es número ***par***, *la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$. Si n es número* ***impar*** *y, además $f'(c) = 0$, la función $y = f(x)$ tiene extremo local en el punto c, o, más exacto, tiene en el punto c mínimo local para $f^{(n+1)}(c) > 0$*

*) Este caso corresponde al valor infinito de $f'(c)$.

**) Aunque sea paralela al eje Oy.

***) Esto se desprende, por ejemplo, de que la gráfica de la función inversa $x = y^3$ tiene en este punto la tangnte $x = 0$.

y máximo local para $f^{(n+1)}(c) < 0$.

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea, primero, n un número *par*. Para $n = 2$ el teorema que demostramos coincide con el teorema 9.8 ya demostrado, así que es necesario demostrar sólo para $n \geqslant 4$ *par*.

Sea que n par satisface la condición $n \geqslant 4$. De la condición $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ y del teorema 8.9 aplicando a la función $f^{(n)}(x)$ se desprende que la función $f^{(n)}(x)$ ora crece ora decrece en el punto c. Ya que, además, $f^{(n)}(c) = 0$, en ambos casos *existe un entorno bastante pequeño del punto* c, *entre los límites del cual* $f^{(n)}(x)$ *tiene signos diferentes a la derecha y a la izquierda de* c.

Al observar eso desarrollemos la función $f^{(2)}(x)$ por la fórmula de Taylor con el término residual en forma de Lagrange en el entorno del punto c. Obtenemos que, para todos los x de un entorno bastante pequeño del punto c, entre c y x existe un punto ξ tal que

$$f^{(2)}(x) = f^{(2)}(c) + \frac{f^{(3)}(c)}{1!}(x-c) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}.$$

Las relaciones (9.8) permiten dar a la última igualdad la forma siguiente:

$$f^{(2)}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}. \tag{9.9}$$

Ya que entre los límites de un entorno bastante pequeño del punto c la función $f^{(n)}(x)$ tiene signos diferentes para $x < c$ y para $x > c$ y ya que ξ siempre está situado entre c y x, obtenemos que $f^{(n)}(\xi)$ (y, en virtud de la paridad de n, todo el miembro derecho de (9.9)) tiene también signos diferentes para $x < c$ y para $x > c$. Pero, entonces, el miembro izquierdo de (9.9), o sea, $f^{(2)}(x)$, entre los límites de un entorno bastante pequeño de c tiene signos diferentes para $x < c$ y para $x > c$. En virtud del teorema 9.7, esto significa que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene inflexión en el punto $M(c, f(c))$. Para el caso de n par el teorema queda demostrado.

2) Sea ahora que $n \geqslant 1$ es número impar y se supone complementariamente que $f'(c) = 0$. Ya que para $n = 1$ el teorema que demostramos coincide con el teorema 9.2 anteriormente demostrado, es suficiente hacer la demostración para $n \geqslant 3$ *impar*.

Sea que n impar satisface la condición $n \geqslant 3$. Para la precisión hacemos los razonamientos para el caso de $f^{(n+1)}(c) > 0$ puesto que para el caso $f^{(n+1)}(c) < 0$ la demostración es análoga.

De la condición $f^{(n+1)}(c) > 0$ y del teorema 8.9 aplicada a la función $f^{(n)}$ se desprende que la función $f^{(n)}(x)$ crece en el punto c. Ya que, además, $f^{(n)}(c) = 0$, esto significa que *existe un entorno bastante pequeño del punto* c *entre los límites del cual* $f^{(n)}(x)$ *es negativa a la izquierda de* c *y positiva a la derecha de* c.

Al observar eso desarrollemos la función $f'(x)$ en el entorno del punto c por la fórmula de Taylor con el término residual en forma de

Lagrange. Obtenemos que para todos los x de un entorno bastante pequeño del punto c entre c y x existe un punto ξ tal que

$$f'(x)=f'(c)+\frac{f^{(2)}(c)}{1!}(x-c)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}. \qquad (9.10)$$

Las relaciones (9.8) y la condición complementaria $f'(c)=0$ permiten escribir la igualdad (9.10) en la forma

$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}. \qquad (9.11)$$

Ya que ξ siempre está situado entre c y x, entonces para todos los x de un entorno bastante pequeño del punto c la derivada $f^{(n)}(\xi)$ es negativa para $x<c$ y positiva para $x>c$. Para n impar el número $n-1$ es par y, por eso, todo el miembro derecho (y, por tanto, el izquierdo) de (9.11) es negativo a la izquierda de c y positivo a la derecha de c para todos los x de un entorno bastante pequeño de c.

Tomando en consideración el teorema 9.1 esto significa que la función $f(x)$ tiene mínimo local en el punto c. Así pues, para el caso de $f^{(n+1)}(c)>0$, la segunda parte del teorema queda demostrado. Puesto que el caso de $f^{(n+1)}(c)>0$ se considera de modo completamente análogo, el teorema queda demostrado por completo.

EJEMPLO. Investíguese el extremo y la inflexión de la función $f(x)=(x-c)^{n+1}$. Es fácil ver que $f'(c)=f^{(2)}(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0$, $f^{(n+1)}(c)=(n+1)!>0$. Según el teorema 9.9, para $(n+1)$ *par* la función tiene mínimo en el punto $x=c$ (fig. 9.12) y para $(n+1)$ *impar*, la gráfica de la función tiene inflexión en el punto $M(c, 0)$ (fig. 9.13).

§ 5. Asíntotas de la gráfica de una función

Definición 1. *Se dice que la recta $x=a$ es* ***asíntota vertical*** *de la gráfica de la función $y=f(x)$ si al menos uno de los valores límite*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

es igual a $+\infty$ o $-\infty$.

EJEMPLO. La gráfica de la función $y=\frac{1}{x}$ tiene la asíntota vertical $x=0$ puesto que $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$ (fig. 9.14).

Luego supongamos que la función $y=f(x)$ está definida para los valores del argumento cualesquiera grandes que sean. Para la precisión, consideraremos los valores cualesquiera grandes que sean de signo *positivo*.

Definición 2. Se dice que *la recta*

$$Y = kx + b \tag{9.12}$$

es ***asíntota oblicua*** *de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *para* $x \to +\infty$ *si la función* $f(x)$ *puede representarse en la forma*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{9.13}$$

donde $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Teorema 9.10. *Para que la gráfica de la función* $y = f(x)$ *tenga*

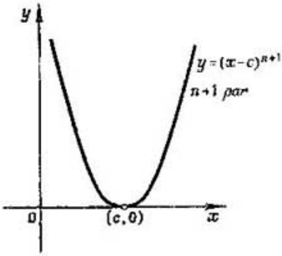

Fig. 9.12

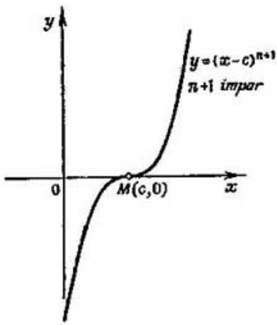

Fig. 9.13

asíntota oblicua para $x \to +\infty$ (fig. 9.12), *es necesario y suficiente que existan dos valores límite*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ y } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b. \tag{9.14}$$

DEMOSTRACIÓN 1) NECESIDAD. Sea que para $x = +\infty$ la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene asíntota (9.12), o sea, para $f(x)$ es válida la representación (9.13). Entonces,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

2) SUFICIENCIA. Sea que existan los valores límite (9.14). El segundo de estos valores límite permite afirmar que la diferencia $f(x) - kx - b$ es infinitesimal para $x \to +\infty$. Denotando esta infinitesimal por $\alpha(x)$, obtenemos la representación (9.13) para $f(x)$. El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. De manera análoga se determina la asíntota oblicua y se demuestra el teorema 9.10 para el caso de $x \to -\infty$.

EJEMPLO. La gráfica de la función $y = \frac{2x^2+x}{x+1} = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$ tiene la asíntota oblicua $Y = 2x - 1$, tanto para $x \to +\infty$

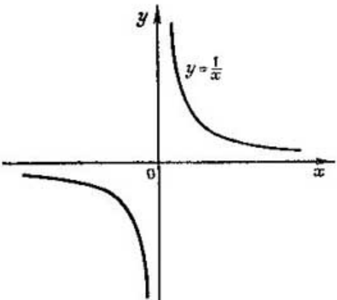

Fig. 9.14

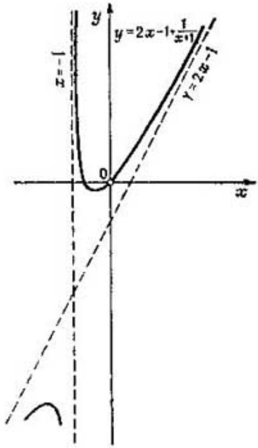

Fig. 9.15

como para $x \to -\infty$, y, además, tiene la asíntota vertical $x = -1$ (fig. 9.15). En efecto,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x}{x(x+1)} = 2,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[-1 + \frac{1}{x+1}\right] = -1,$$

$$\lim_{x\to\pm 1+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1-0} f(x) = -\infty.$$

A la par con la asíntota lineal (9.12) se consideran también asíntotas de forma más complicada.

Se dice que la parábola de orden n determinada por el polinomio

$$Y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{9.12*}$$

es *asíntota de la gráfica de la función* $y = f(x)$ para $x \to +\infty$ si la función $f(x)$ puede representarse en la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + \alpha(x)$, donde $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Es fácil demostrar la siguiente afirmación.

Para que la gráfica de la función $y = f(x)$ *tenga la asíntota* (9.12*) *para*

$x \to +\infty$, *es necesario y suficiente que existan los* $n+1$ *valores límite siguientes:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = a_n, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-a_nx^n}{x^{n-1}} = a_{n-1}, \ \ldots$$

$$\ldots, \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2)}{x} = a_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x)] = a_0.$$

§ 6. Procedimiento para investigar la gráfica de una función

En este párrafo exponemos el procedimiento empleando el cual es conveniente investigar la gráfica de la función y ofrecemos el ejemplo que ilustra este procedimiento.

Para investigar cualitativamente la gráfica de la función $y = f(x)$ ante todo es conveniente realizar las siguientes investigaciones:

1°. Precisar el campo de definición de la función.

2°. Aclarar la cuestión sobre la existencia de asíntotas (verticales y oblicuas).

3°. Hallar los campos de crecimiento y decrecimiento de la función y los puntos de extremo.

4°. Hallar los campos de dirección constante de convexidad y los puntos de inflexión.

5°. Hallar los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje Ox.

Por los datos obtenidos es fácil trazar el boceto de la gráfica de la función. A título de ejemplo tracemos la gráfica de la función

$$y = \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}. \qquad (9.15)$$

Seguiremos el procedimiento anteriormente expuesto.

1°. Ya que la función (9.15) es fracción racional, entonces ella está definida y es continua sobre toda la recta infinita, excepto el punto $x = 0$, en el cual el denominador se anula.

2°. Aclaremos el problema de la existencia de asíntotas. Es obvio que

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2} = -\infty,$$

por eso la gráfica de la función tiene *asíntota vertical* $x = 0$. Luego, de la existencia de los límites

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^3} = \pm \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{14}{x^2}-\frac{6}{x^3}}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x)-\frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-5x^2+14x-6-2x^3}{4x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm 8} \frac{-5+\frac{14}{x}-\frac{6}{x^2}}{4} = -\frac{5}{4}$$

se desprende que tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$ la gráfica de la función tiene *asíntota oblicua* $Y = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$.

3°. Para hallar los campos de crecimiento y decrecimiento calculemos la primera derivada de la función (9.15)

$$y' = \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3} = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Además, teniendo en cuenta que la propia función y la primera derivada no existen para $x = 0$, obtenemos los siguientes campos de signo constante de y':

Campo de valores x	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo de y'	+	—	+	—	+
Comportamiento de la función	crece	decrece	crece	decrece	crece

De la tabla aducida se desprende que la función tiene los siguientes puntos de extremo:

1) el máximo, si $x = -3$ con tal que $f(-3) = -49/12$,

2) el máximo, si $x = 1$ con tal que $f(1) = 5/4$,

3) el mínimo, si $x = 2$ con tal que $f(2) = 9/8$.

4°. Para hallar los campos de dirección constante de convexidad, calculemos la segunda derivada

$$y^{(2)} = \frac{7x - 9}{x^4} = \frac{7\left(x - \frac{9}{7}\right)}{x^4}.$$

Teniendo en cuenta que la propia función y sus derivadas no existen

Campo de valores x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \frac{9}{7}$	$\frac{9}{7} < x < \infty$
Signo de $y^{(2)}$	—	—	—
Dirección de convexidad de la gráfica	hacia arriba	hacia arriba	hacia abajo

en el punto $x = 0$, obtenemos los siguientes campos de signo constante de $y^{(2)}$:

De la tabla aducida se desprende que la gráfica de la función tiene inflexión en el punto $(9/7, f(9/7))$. Es fácil calcular que $f(9/7) = 913/756$.

5°. Queda por hallar los puntos de intersección de la gráfica con el eje Ox. Estos puntos corresponden a las raíces de la ecuación

$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0.$$

Es fácil determinar que $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 6)$. Ya que el trinomio cuadrático $(x^2 - 2x + 6)$ tiene raí-

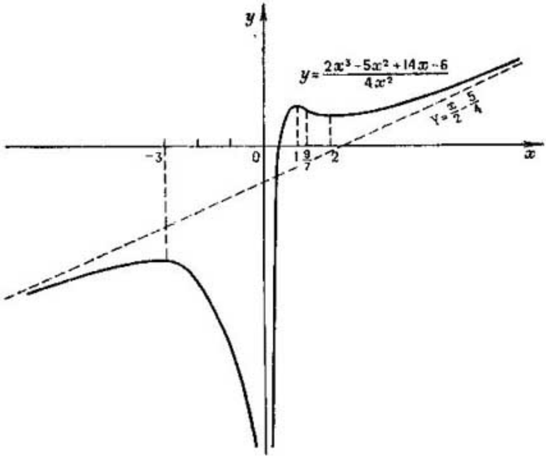

Fig. 9.16

ces complejas, la ecuación considerada tiene solamente una raíz real $x = 1/2$. Por eso, la gráfica de la función interseca el eje Ox en el punto $(1/2, 0)$. Según los datos obtenidos tracemos el boceto de la gráfica de la función considerada (fig. 9.16).

§ 7. Búsqueda de los valores máximo y mínimo de una función. Extremo de frontera

1. Búsqueda de valores máximo y mínimo de una función. Consideremos una función $y = f(x)$ definida y continua sobre un segmento $[a, b]$. Hasta ahora nos hemos interesado sólo en determinar los máximos y mínimos locales de esta función. Ahora planteemos el problema de *hallar los valores máximo y mínimo* de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. Subrayemos que en virtud del teorema de Weierstrass (véase el § 6 del cap. 8) la función $f(x)$ alcanza obligatoriamente su valor máximo (mínimo) en un punto del segmento $[a, b]$. Para que sea

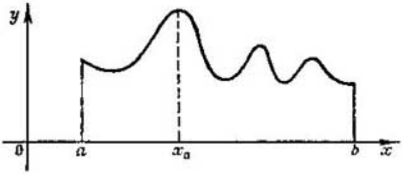

Fig. 9.17

más preciso, detengámonos en determinar el valor máximo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

La función $f(x)$ puede alcanzar su valor máximo ora en un punto interior x_0 del segmento $[a, b]$ (entonces, éste coincide con uno de los máximos locales de la función $f(x)$, véase la fig. 9.17) ora en uno de los extremos del segmento $[a, b]$ (fig. 9.18). De aquí es evidente que

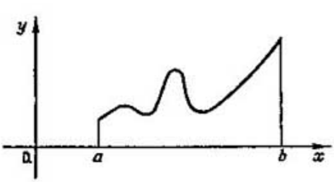

Fig. 9.18

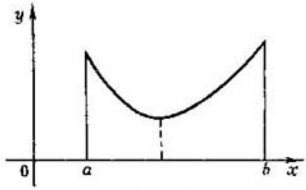

Fig. 9.19

para hallar el valor máximo de la función $f(x)$ en el segmento $[a,b]$ es necesario comparar uno con otro los valores de $f(x)$ en todos los puntos de máximo local y en los puntos de frontera del segmento a y b. El máximo de estos valores será el valor máximo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. De manera análoga se halla el valor mínimo de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

Si deseamos evitar la investigación de los puntos de extremo posible, se puede comparar sencillamente uno con otro los valores de $f(x)$ en todos los puntos de extremo posible y en los puntos de frontera a y b. El máximo (el mínimo) de estos valores será el valor máximo (mínimo) de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

Notemos luego que si $f(x)$ tiene en el segmento $[a, b]$ *solamente un punto* de extremo local *) que es punto de máximo (mínimo) local, entonces, sin comparar el valor de $f(x)$ en este punto con $f(a)$ y $f(b)$ se puede afirmar que este valor es el máximo (el mínimo) de $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ (fig. 9.19).

Empleando los métodos análogos se resuelve el problema para hallar el valor máximo (así como, el mínimo) de la función $y = f(x)$ en un intervalo, una semirrecta y la recta infinita (si se observa la condición de que este valor exista).

Puede ocurrir que la función $f(x)$ no tiene puntos de extremo posible en el segmento $[a, b]$ (o en la semirrecta $a \leqslant x < \infty$).

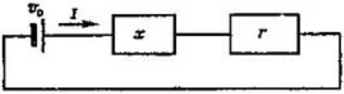

Fig. 9.20

En este caso, $f(x)$ es monótona en este segmento (semirrecta) y sus valores máximo y mínimo se alcanzan en los extremos de este segmento (en el extremo de la semirrecta). Ilustremos el último caso con un ejemplo de la física. Sea que es necesario determinar qué resistencia x hay que conectar al circuito en serie con la resistencia dada r para que en r se consume la potencia máxima (al mismo tiempo, la tensión v_0 de la batería se considera constante, véase la fig. 9.20). Según la ley de Ohm, la corriente I en el circuito es igual a $I = v_0 (r + x)$. Por lo tanto, según la misma ley, la caída de tensión v_r en la resistencia r es igual a $v_r = Ir = v_0 r/(r + x)$. De este modo, la potencia $w(x)$ consumida en la resistencia r es igual a

$$w(x) = Iv_r = v_0^2 r/(r + x)^2.$$

Ya que, según el sentido físico, la resistencia x no puede ser negativa, el problema se reduce a determinar el valor máximo de la función $w(x)$ en la semirrecta $x \geqslant 0$. Calculando la derivada de esta función

$$w'(x) = -\frac{2v_0^2 r}{(r+x)^3},$$

nos cercioramos de que $w'(x) < 0$ en toda la semirrecta $x \geqslant 0$ y que no hay puntos de extremo posible. De este modo, la función $w(x)$ decrece sobre toda la semirrecta $x \geqslant 0$ y alcanza su valor máximo en esta semirrecta si $x = 0$. Este valor es igual a $v_0^2 r$ (fig. 9.21). Esto está claro también por razones físicas.

*) Exactamente este caso se encuentra con frecuencia en la práctica.

Como segundo ejemplo, resolvemos el problema para hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ en el segmento $-\sqrt{\pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{5\pi/2}$.

Puesto que $y' = 2x \cos x^2$, dicha función tiene en el segmento considerado tres puntos de extremo posible $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\pi/2}$. Comparando los valores de la función en dichos puntos y en los extremos del segmento

$$f(0) = 0,\quad f(\pm\sqrt{\pi/2}) = 1,\quad f(-\sqrt{\pi}) = 0,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

nos cercioramos de que el valor máximo de la función considerada es igual a $+1$ y se alcanza en dos puntos interiores del segmento $x_1 =$

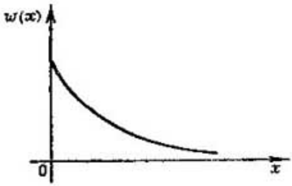

Fig. 9.21

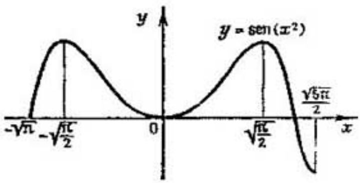

Fig. 9.22

$= -\sqrt{\pi/2}$ y $x_2 = +\sqrt{\pi/2}$, y el valor mínimo de la función considerada es igual a $-\sqrt{2}/2$ y se alcanza en el extremo derecho del segmento $\sqrt{5\pi/2}$.

La gráfica de la función considerada se representa en la fig. 9.22.

2. Extremo de frontera. Sea la función $y = f(x)$ definida sobre un segmento $[a, b]$. Diremos que en el punto de frontera b de este segmento la función tiene *máximo de frontera* (*mínimo de frontera*) si existe un semientorno izquierdo del punto b, entre los límites del cual el valor $f(b)$ es el máximo (el mínimo) entre todos los demás valores de esta función. Se definen de modo análogo el máximo de frontera y el mínimo de frontera en el punto de frontera a del segmento $[a, b]$. El máximo de frontera y el mínimo de frontera tienen la denominación común extremo de frontera. Tiene lugar la siguiente ***condición suficiente de extremo de frontera***: *para que la función $y = f(x)$ tenga en el punto b del segmento $[a, b]$ el máximo de frontera (el mínimo de frontera) es suficiente que esta función tenga en el punto b la derivada izquierda positiva (negativa)* *). (La demostración es análoga a la del

*) Para el punto de frontera a, la condición suficiente de máximo de frontera (mínimo de frontera) es la negatividad (la positividad) de la derivada derecha en el punto a.

teorema 8.9). De dicha condición suficiente de extremo de frontera se desprende directamente la siguiente *condición necesaria de extremo de frontera de la función que tiene en el punto b la derivada izquierda: para que la función $y = f(x)$ que en el punto b posee la derivada izquierda, tenga máximo de frontera (mínimo de frontera) en este punto, es necesario que dicha derivada sea no negativa (no positiva).*

Para concluir, demostremos la siguiente afirmación notable.

Teorema 9.11 (teorema de Darboux*). *Sea que la función $f(x)$ tiene derivada finita en todos los puntos del segmento $[a, b]$ **) y sea que $f'(a+0) = A$, $f'(b-0) = B$. Entonces, cualquiera que sea un número C comprendido entre A y B, en este segmento existe un punto ξ tal que $f'(\xi) = C$ ***).*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar demostremos la siguiente afirmación: si $F(x)$ tiene derivada finita en $[a, b]$ y si $F'(a+0)$ y $F'(b-0)$ son números de signos diferentes, entonces en el segmento $[a, b]$ existe un punto ξ tal que $F'(\xi) = 0$.

Para la precisión, sea $F'(a+0) < 0$, $F'(b-0) > 0$. Entonces, la función $F(x)$ tiene máximo de frontera en ambos extremos del segmento $[a, b]$. Pero esto significa que el valor mínimo de $F(x)$, en el segmento $[a, b]$, se alcanza en un punto interior ξ de este segmento (la función $F(x)$ es diferenciable y, por tanto, continua en el segmento $[a, b]$ y, por consiguiente, alcanza su valor mínimo en este segmento). En dicho punto ξ, la función $F(x)$ tiene mínimo local y, por eso, $F'(\xi) = 0$.

Para demostrar el teorema 9.11 queda por hacer $F(x) = f(x) - Cx$ y aplicar a $F(x)$ la afirmación que acabamos de demostrar.

OBSERVACIÓN. Del teorema 9.11 volvamos a concluir que la derivada no puede tener puntos de discontinuidad de primera especie (saltos).

---

*) Gaston Darboux, matemático francés (1842—1917).

**) Se comprende que $f(x)$ tiene derivada en cualquier punto interior del segmento $[a, b]$ y, además, la derivada izquierda en el punto b y la derecha en el punto a.

***) Subrayemos que la continuidad de la derivada $f'(x)$ no se supone.

Apéndice

DESARROLLO ULTERIOR DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS REALES

Para introducir los números reales, en el cap. 2 hemos utilizado el conjunto de las fracciones decimales infinitas. Al definir las reglas de comparación, adición y multiplicación para el conjunto de estas fracciones, hemos establecido que los elementos de este conjunto poseen 13 *propiedades fundamentales* (enumeradas en el p. 1 del § 1 del cap. 2 para los números racionales). El método descrito para introducir los números reales no es el único posible, a pesar de tener indudables calidades heurísticas y metodológicas. Se podría introducir los números reales empleando las fracciones binarias infinitas, llamadas cortaduras de Dedekind en el campo de los números racionales *), sucesiones de números racionales **) u otros métodos. Para esclarecer las correlaciones entre varios métodos que introducen los números reales, utilicemos algunos conceptos nuevos y establecemos una propiedad importante más del conjunto de los números reales examinados.

1. Completitud del conjunto de los números reales. Dos conjuntos, cada uno de los cuales tiene definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación para sus elementos, se denominarán *isomorfos uno a otro respecto a estas reglas* si entre los elementos de estos conjuntos puede establecerse una correspondencia biunívoca ***) de tal modo que si a los elementos a y b del primer conjunto les corresponden los elementos a' y b' del segundo, entonces: 1) los elementos a' y b' están ligados por el mismo símbolo ($>$, $<$ ó $=$) que los elementos a y b; 2) al elemento $a + b$ le corresponde el elemento $a' + b'$; 3) al elemento $a \cdot b$ le corresponde el elemento $a' \cdot b'$.

Análogamente se podría hablar no de las reglas de comparación, adición y multiplicación, sino de cualesquiera otras reglas que caracterizan las relaciones entre los elementos, e introducir el concepto de conjuntos isomorfos uno a otro respecto a las reglas mencionadas.

---

*) El método para introducir los números reales empleando las cortaduras pertenece a R. Dedekind, matemático alemán (1831—1916). Este método se expone, por ejemplo, en el cap. 1 del libro de G. M. Fijtengolts «Fundamentos del análisis matemático», Moscú, 1979 (*en ruso*).

**) Este método para introducir los números reales pertenece a G. Cantor. Su exposición puede encontrarse en el libro de V. V. Nemitski, M. I. Slúdskaia y A. N. Cherkásov «Curso del análisis matemático», tomo I, cap. 2, Moscú, Naúka, 1983 (*en ruso*).

***) En cuanto a la correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos.

El conjunto de los números racionales, introducidos en forma de la razón de números enteros, con las reglas de comparación, adición y multiplicación indicadas en las notas en la pág. 30 y el conjunto de los números racionales puestos en forma de fracciones decimales infinitas con las reglas ordinarias de comparación, adición y multiplicación de los números reales pueden ser ejemplo de dos conjuntos isomorfos uno a otro respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación.

Consideremos más atentamente dos conjuntos: uno de ellos el de todos los números racionales y el otro el de todos los números reales. Para cada uno de estos conjuntos están definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación y son válidas 13 propiedades fundamentales. Al mismo tiempo, está claro que el conjunto de todos los números reales es más «amplio» que el conjunto de todos los números racionales, puesto que, *en total, el conjunto de todos los números reales no es isomorfo al conjunto de todos los números racionales respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación* *), *pero en el conjunto de los números reales puede separarse una parte isomorfa al conjunto de todos los números racionales respecto a dichas reglas.*

Lógicamente, surge la pregunta, si puede construirse también para el conjunto de todos los números reales un conjunto más «amplio» de objetos que posea las propiedades siguientes: 1) en este conjunto más «amplio» están definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación y son válidas 13 propiedades fundamentales; 2) en total el conjunto más «amplio» no es isomorfo al conjunto de todos los números reales respecto a dichas reglas; 3) en el conjunto más «amplio» puede separarse una parte isomorfa al conjunto de todos los números reales respecto a dichas reglas.

Demostremos que este conjunto más «amplio» *no existe*, o sea, como sule decirse en las matemáticas, *el conjunto de todos los números reales es* ***completo*** *respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación y 13 propiedades fundamentales.*

En general, *un conjunto arbitrario de objetos, para el cual están definidas algunas reglas y son válidas algunas propiedades, se denomina completo respecto a estas reglas y propiedades si no puede construirse un conjunto más «amplio» de objetos tal que:* 1) *en este conjunto más «amplio» sean definidas las mismas reglas y sean válidas las mismas propiedades*; 2) *en total este conjunto más «amplio» no sea isomorfo al dado respecto a dichas reglas*; 3) *en este conjunto más «amplio» exista una parte isomorfa al conjunto dado respecto a dichas reglas.*

Se puede afirmar que el conjunto de todos los números racionales *no es completo respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación, y 13 propiedades fundamentales*, puesto que existe conjunto

*) Esto se desprende de que entre el conjunto de todos los números racionales y el de todos los números reales no puede establecerse ninguna correspondencia biunívoca (véase el p. 6 del § 4 del cap. 3).

más «amplio» (el de los números reales) que satisface las exigencias 1), 2), y 3) de la definición que acabamos de enunciar.

Demostremos ahora que *el conjunto de todos los números reales es completo respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación y las 13 propiedades fundamentales.*

Supongamos lo contrario, o sea, supongamos que existe un conjunto más «amplio» de objetos $\{x'\}$ tal que: 1) para los elementos del conjunto $\{x'\}$ están definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación y son válidas las 13 propiedades fundamentales, 2) en total, el conjunto $\{x'\}$ no es isomorfo al conjunto $\{x\}$ de todos los números reales respecto a dichas reglas, 3) existe una parte del conjunto $\{x'\}$ (se denota por el símbolo $\{\overline{x'}\}$) isomorfa al conjunto de todos los números reales respecto a dichas reglas.

Ante todo, observemos que el conjunto $\{x'\}$ tiene *un solo par* de los elementos $0'$ y $1'$ que desempeñan el papel especial del cero y de la unidad *). Luego, se puede afirmar que los elementos $0'$ y $1'$ integran el conjunto $\{\overline{x'}\}$ y están en correspondencia biunívoca con los números reales 0 y 1**). Sea α' un elemento del conjunto $\{x'\}$ que *no pertecene* al conjunto $\{\overline{x'}\}$.

En virtud de la regla de comparación, podemos partir todos los elementos $\overline{x'}$ del conjunto $\{\overline{x'}\}$ en *dos clases, superior e inferior* atribuyendo a la clase superior todos los elementos x' que satisfacen la desigualdad $\overline{x'} > \alpha'$, y a la clase inferior, todos los elementos $\overline{x'}$ que satisfacen la desigualdad $\overline{x'} < \alpha'$. Ambas clases no son vacías. En efecto, demostremos, por ejemplo, que la clase superior no es vacía. Repitiendo el elemento $1'$ como sumando un número de veces bastante grande, en virtud de la propiedad 13°, obtenemos el elemento n' del conjunto $\{\overline{x'}\}$ que satisface la desigualdad $n' > \alpha'$, es decir, pertenece a la clase superior. De la propiedad 1° se desprende que *todo elemento de la clase inferior es menor de cualquier elemento de la clase superior.* En virtud del isomorfismo del conjunto $\{\overline{x'}\}$ y el conjunto $\{x\}$ de todos los números reales se puede afirmar que el conjunto de todos los números reales se parte también en dos clases

---

*) Si existieran dos elementos $0_1'$ y $0_2'$ que interpretarían el papel especial del cero, entonces, en virtud de las propiedades de la suma, obtendríamos que $0_1' = 0_1' + 0_2' = 0_2' + 0_1' = 0_2'$, o sea, $0_1' = 0_2'$. De manera análoga se demuestra la unicidad del elemento $1'$ que desempeña el papel especial de la unidad.

**) Demostremos, por ejemplo, que el elemento $0'$ integra el conjunto $\{\overline{x'}\}$ y corresponde biunívocamente al número real 0. Supongamos que al número real 0 le corresponde un elemento θ' del conjunto $\{\overline{x'}\}$ y sea a' cualquier elemento de este conjunto que corresponde al número real a. En virtud del carácter isomorfo respecto a la adición, al elemento $a' + \theta'$ le corresponde el número real $a + 0 = a$, o sea, el elemento $a' + \theta'$ coincide con el elemento a', pero esto significa que θ' es (¡el único!) elemento nulo, o sea, $\theta' = 0'$. Análogamente se realizan los razonamientos para el elemento unitario.

con tal que todo número de la clase inferior es menor que cualquier número de la clase superior. Pero esto significa que *la clase inferior de números reales está acotada superiormente y tiene* (de acuerdo con el teorema 2.1) *cota superior exacta m*, y la clase superior tiene la cota inferior exacta M. De la definición de las cotas exactas se desprende que ambas cotas m y M se comprenden entre números reales que están a distancia cualquier pequeña que sea uno de otro, y, por eso, $m = M$. Ya que el número $m = M$ es uno de los números reales, entonces pertenece a una de las clases, es decir, *existe ora el mínimo elemento en la clase superior ora el máximo elemento en la clase inferior*. Demostremos que ambas afirmaciones son absurdas. Sea (para la precisión) que exista el elemento mínimo en la clase superior de los números reales. Entonces, existe también el elemento mínimo m' en la clase superior que corresponde a la partición del conjunto $\{\overline{x'}\}$. Según la definición de la clase superior, $m' > \alpha'$. Conforme a las propiedades de la suma, existe la diferencia $m' - \alpha'$ con tal que, según estas propiedades, $m' - \alpha' > 0'$. Pero, entonces, en virtud de la propiedad 9°, para el elemento $m' - \alpha'$ existe el elemento inverso que, en virtud de las propiedades del producto, es igual al cociente $\frac{1'}{m'-\alpha'}$. Según la propiedad 13°, el elemento $1'$ puede repetirse como sumando tantas veces que el número «entero» obtenido n' pertenezca a $\{\overline{x'}\}$ y satisfaga la desigualdad $n' > \frac{1'}{m'-\alpha}$. De la última desigualdad, en virtud de las propiedades del producto y de la suma, obtenemos *)

$$m' - \frac{1'}{n'} > \alpha'. \qquad (A.1)$$

Puesto que los elementos m', $1'$ y n' pertenecen al conjunto $\{\overline{x'}\}$, entonces el elemento $\left(m' - \frac{1'}{n'}\right)$ pertenece también a este conjunto y, obviamente, satisface la desigualdad $m' - \frac{1'}{n'} < m'$. Pero, entonces, la desigualdad (A.1) significa que *en la clase superior existe un elemento menor de m', o sea, m' no es el elemento mínimo*. La contradicción obtenida demuestra la completitud del conjunto de los números reales.

2. Introducción axiomática del conjunto de los números reales. El método axiomático de la introducción de los números reales es la conclusión lógica completa de nuestras nociones sobre estos números. Este método consiste en lo siguiente.

El conjunto de los números reales se introduce como el conjunto de objetos de cualquier naturaleza que satisfacen 17 axiomas en calidad de

*) Estas propiedades garantizan la aplicación de todas las reglas del álgebra.

los cuales se toman las reglas de comparación, adición y multiplicación),* 13 *propiedades fundamentales y el axioma de la completitud respecto a las reglas y propiedades mencionadas.*

Las 17 axiomas mencionadas suelen llamarse *axiomas del número real*. La realización concreta del conjunto de objetos que satisfacen 17 axiomas del número real es el conjunto de fracciones decimales infinitas, examinado en el capítulo 2. Son también posibles otras realizaciones dedicho conjunto de objetos **). Después de aclarar completamente problema de la relación entre estas realizaciones se obtiene la siguiente afirmación notable.

Toda realización $\{x'\}$ del conjunto de objetos que satisfacen 17 *axiomas del número real es isomorfa al conjunto anteriormente examinado $\{x\}$ de las fracciones decimales infinitas respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación.*

DEMOSTRACIÓN. Para la comodidad, dividamos la demostración en puntos por separado.

1°. Ante todo, observemos que los axiomas garantizan la existencia de los elementos $0'$ y $1'$, que interpretan el papel especial del cero y de la unidad, en el conjunto $\{x'\}$. En virtud del axioma de Arquímedes, $1' > 0'$ ***). En el conjunto $\{x'\}$ separemos el conjunto de «objetos racionales». Para esto, observemos que todo número racional puede obtenerse de los números 0 y 1 efectuando las operaciones de adición, sustracción y división. En efecto, repitiendo el número 1 como sumando un número necesario de veces, obtenemos cualquier número entero positivo n; sustrayendo del número 0 el número 1 un número necesario de veces obtenemos cualquier número entero negativo; mediante la división de dos números enteros obtenemos cualquier número racional. Ya que, según los axiomas, en el conjunto $\{x'\}$ están definidas las operaciones de adición, sustracción y división, entonces, empleando estas operaciones y $0'$ y $1'$, obtenemos «todos los objetos racionales». Denotaremos estos objetos por los mismos símbolos que los números racionales, añadiendo las rayitas.

Demostremos que el conjunto construido de «objetos racionales» del conjunto $\{x'\}$ es isomorfo al conjunto de los números racionales del conjunto $\{x\}$ respecto a las reglas de comparación, adición y multiplicación. En realidad, pongamos en correspondencia al número racional m/n el «objeto racional» m'/n'. Analizando el modo de cons-

*) Se enuncia el postulado solamente de la existencia de las reglas de comparación, adición y multiplicación. Al mismo tiempo, la forma concreta de estas reglas no se indica.

**) En la introducción al presente apéndice ya hemos señalado que los números reales pueden ser introducidos por varios métodos (con ayuda de fracciones binarias infinitas, llamadas cortaduras de Dedekind, etc.).

***) En efecto, si fuera válida la desigualdad contraria $1' \leqslant 0'$, entonces, en virtud de los axiomas, de ésta obtendríamos que $1' + 1' + \ldots + 1' \leqslant 0' + 0' + \ldots + 0' = 0'$ (cualquiera que sea el número de veces que tendríamos que repetir $1'$ como sumando). Pero esto contradice el axioma de Arquímedes.

truir los «objetos racionales» se deduce que a la suma y al producto de los números racionales m/n y p/q les corresponde la suma y el producto de los «objetos racionales» m'/n' y p'/q'. Queda por cerciorarse de que m'/n' y p'/q' están ligadas por el mismo signo que m/n y p/q. Ya que en nuestra construcción de «objetos racionales» la regla de comparación de cualesquiera «objetos racionales» utilizando la multiplicación por «objetos enteros» se reduce a la comparación de «objetos enteros», nos queda por cerciorarse de que $m' > n'$ para cualesquiera «objetos enteros» m' y n' si $m > n$. Para comprobarlo basta, en virtud de los axiomas, demostrar que $(n+1)' > n'$. Lo último se desprende de que $1' > 0'$ y, por lo tanto,

$$(n+1)' = n' + 1' > n' + 0' = n'.$$

2°. Sea ahora a' cualquier objeto del conjunto $\{x'\}$. Mostremos que *a este objeto se le puede poner en correspondencia una «fracción decimal infinita» determinada.* Para la precisión, supongamos que $a' > 0'$. En virtud del axioma de Arquímedes, entre los «objetos enteros» estrictamente menores de a' exista el objeto máximo que denotamos por a_0'; entre los «objetos racionales»

$$a_1', 0'; \; a_1', 1'; \; \ldots; \; a_0', 9',$$

estrictamente menores de a' existe el objeto máximo que denotamos por a_0', a_1', etc.

De este modo, ponemos en correspondencia a cualquier objeto un conjunto infinito de «objetos racionales»

$$a_0'; \; a_0', a_1'; \; \ldots; \; a_0', a_1' \ldots a_n'; \; \ldots, \tag{A.2}$$

o, que es lo mismo, una «fracción decimal infinita»

$$a_0', a_1', a_2' \ldots a_n' \ldots \tag{A.3}$$

Los mismos razonamientos son también válidos para $a' < 0'$, pero en este caso, todos los objetos de (A.2), igual que la «fracción decimal infinita» (A. 3), tendrán el signo menos.

Al analizar la construcción del conjunto de objetos (A.2) es evidente que para cualquier número n son válidas las desigualdades

$$a_0', a_1'a_2' \ldots a_n' < a' \leqslant a_0', a_1'a_2' \ldots a_n' + \frac{1'}{(10^n)'}, \tag{A.4}$$

es decir, cualquier objeto a' se comprende entre dos «objetos racionales», la diferencia entre los cuales $\frac{1'}{(10^n)'}$ puede hacerse menor de cualquier objeto «positivo» fijado de antemano *).

*) En efecto, conforme a los axiomas, para cualquier objeto $\varepsilon' > 0'$ existe el elemento inverso $\frac{1'}{\varepsilon'}$, ε' para el cual existe un «objeto entero» n' tal que $n' > \frac{1'}{\varepsilon'}$, así que $\frac{1'}{(10^n)'} < \frac{1'}{n'} < \varepsilon'$.

3°. Demostremos ahora que *si dos objetos a' y b' pueden comprenderse entre dos «objetos racionales» α' y β' ($\beta' > \alpha'$), la diferencia entre los cuales $\beta' - \alpha'$ puede hacerse menor de cualquier objeto «positivo» fijado de antemano, entonces $a' = b'$*. Supongamos que $a' \neq b'$. Sea, por ejemplo, $a' < b'$. Entonces, $\alpha'' \leqslant a' < b' \leqslant \beta'$. De estas desigualdades, en virtud de los axiomas, obtenemos

$$0' < b' - a' \leqslant \beta' - \alpha'. \tag{A.5}$$

Pero, entonces, para el objeto $b' - a'$ existe el inverso $\frac{1}{b'-a'}$, y para éste existe un «objeto entero» n' tal que

$$n' > \frac{1'}{b'-a'},$$

así que

$$\frac{1'}{n'} < b' - a'.$$

Comparando la última desigualdad y (A.5), obtenemos

$$\frac{1'}{n'} < \beta' - \alpha',$$

lo que contradice al hecho de que la diferencia $\beta' - \alpha'$ puede hacerse menor de cualquier objeto «positivo» fijado de antemano.

4°. Cerciorémonos de que *a dos objetos no iguales del conjunto $\{x'\}$ se les pone en correspondencia «fracciones decimales infinitas» diferentes*. En efecto, supongamos que a dos objetos de $\{x'\}$ se les pone en correspondencia una misma «fracción decimal infinita» (por ejemplo, (A.3)). Entonces, en virtud de las desigualdades (A.4), los dos objetos pueden comprenderse entre «objetos racionales», la diferencia entre los cuales puede hacerse menor de cualquier objeto «positivo» fijado de antemano. De acuerdo con el punto 3°, los objetos considerados son iguales. La afirmación demostrada justifica que representamos todo objeto del conjunto $\{x'\}$ mediante una «fracción decimal infinita».

5°. Conforme a los tres primeros axiomas, para los objetos del conjunto $\{x'\}$ están definidas las reglas de comparación, adición y multiplicación. Demostremos que *si todos los objetos del conjunto $\{x'\}$ se representan por «fracciones decimales infinitas», entonces para estas «fracciones» las reglas de comparación y las definiciones de la suma y del producto se enuncian de modo exactamente igual que para las fracciones decimales infinitas ordinarias examinadas anteriormente.*

Sean a' y b' dos objetos cualesquiera del conjunto $\{x'\}$ y sea que les corresponden «fracciones decimales infinitas» *)

$$a'_0,\ a'_1\ \ldots\ a'_n\ \ldots\ \text{y}\ b'_0,\ b'_1\ \ldots\ b'_n\ \ldots \tag{A.6}$$

*) Estableciendo la regla de comparación, podemos limitarnos al caso de objetos «positivos» a' y b' puesto que el caso general se reduce a este caso utilizando la regla de los signos.

Ante todo, aclaremos la regla de comparación de los objetos a' y b' representados en forma de las «fracciones decimales infinitas» (A.6). Es suficiente demostrar dos afirmaciones siguientes: 1) si las fracciones (A.6) coinciden, o sea, si

$$a'_0 = b'_0,\ a'_1 = b'_1,\ \ldots,\ a'_n = b'_n,\ \ldots,$$

entonces los objetos a' y b' son iguales; 2) si existe un número n tal que son válidas las relaciones

$$a'_0 = b'_0,\ a'_1 = b'_1,\ \ldots,\ a'_{n-1} = b'_{n-1},\ a'_n < b'_n, \tag{A.7}$$

entonces los objetos a' y b' están ligadas por la desigualdad $a' < b'$.

La afirmación 1) ya está demostrada en el p. 4°. Demostremos la afirmación 2). La última de las relaciones (A.7) puede escribirse en la forma

$$a'_n + 1' \leqslant b'_n.$$

Empleando esta relación y las demás relaciones de (A.7) y escribiendo, para a', la derecha de las desigualdades (A.4) y, para b', la izquierda de las desigualdades (A.4), tendremos

$$a' \leqslant a'_0,\ a'_1\ \ldots\ a'_{n-1}a'_n + \frac{1'}{(10^n)'} =$$
$$= a'_0,\ a'_1\ \ldots\ a'_{n-1}(a'_n + 1') \leqslant a'_0,\ a'_1\ \ldots$$
$$\ldots\ a'_{n-1}b'_n < b',\ \text{es decir},\ a' < b'.$$

Demostremos ahora que para los objetos a' y b' son válidas las mismas definiciones de la suma y del producto que para los números reales ordinarios. Limitémonos al caso de la suma. Sean α'_1, α'_2, β'_1, β'_2 todos los «objetos racionales» posibles que satisfacen las desigualdades

$$\alpha'_1 \leqslant a' \leqslant \alpha'_2,\quad \beta'_1 \leqslant b' \leqslant \beta'_2. \tag{A.8}$$

Entonces la suma $a' + b'$ de los objetos a' y b' es el único objeto que satisface las desigualdades

$$\alpha'_1 + \beta'_1 \leqslant a' + b' \leqslant \alpha'_2 + \beta'_2. \tag{A.9}$$

En efecto, de los axiomas se desprende la posibilidad de adicionar término a término las desigualdades, y de aquí se deduce que la suma $a' + b'$ satisface las desigualdades (A.9). Además, esta suma es el único objeto que satisface las desigualdades (A.9) puesto que cada una de las diferencias

$$\alpha'_2 - \alpha'_1 \text{ y } \beta'_2 - \beta'_1,$$

y, por lo tanto, la diferencia

$$(\alpha_2' + \beta_2') - (\alpha_1' + \beta_1')$$

puede hacerse menor que cualquier objeto «positivo» fijado de antemano (en virtud del p. 2°). De manera análoga se examina el caso del producto.

6°. Demostremos, por fin, que el conjunto $\{x'\}$ es isomorfo al conjunto de los números reales representables mediante fracciones decimales infinitas. Supongamos que el conjunto $\{x'\}$ no es isomorfo a $\{x\}$. Al objeto a' representable por la «fracción decimal infinita» $a_0', a_1'a_2' \ldots$, le pongamos en correspondencia el número real $a = a_0, a_1a_2 \ldots$ Sea que a dos objetos a' y b' les corresponden los números reales a y b.

De los resultados del p. 5 se desprende que 1) a' y b' están ligados por el mismo signo que los números a y b; 2) a la suma $a' + b'$ le corresponde la suma $a + b$; 3) al producto $a' \cdot b'$ le corresponde el producto $a \cdot b$ *).

Ya que, según la suposición, $\{x'\}$ no es isomorfo a $\{x\}$, entonces, en la correspondencia indicada no a todo número real le corresponde algún elemento del conjunto $\{x'\}$. Esto significa que, no siendo isomorfo a todo el conjunto $\{x\}$, el conjunto $\{x'\}$ es isomorfo a una parte del conjunto $\{x\}$, lo que contradice la completitud del conjunto $\{x'\}$.

La contradicción obtenida demuestra la afirmación.

3. Notas finales. Para concluir, observemos que el método axiomático y el concepto de conjuntos isomorfos de objetos (respecto a reglas diferentes) se usan ampliamente en varias ramas de las matemáticas modernas y la física (en la construcción de la geometría, la teoría de probabilidades, mecánica clásica, física estadística, mecánica cuántica **) y otras ramas).

Por ejemplo, en la geometría, el conjunto de los puntos de la recta se introduce como un conjunto de objetos que satisfacen algunos axiomas, entre los cuales desempeña el papel fundamental el axioma de la completitud de este conjunto respecto a los demás axiomas. Dichos axiomas permiten establecer la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos de la recta y el conjunto de todos los nú-

---

*) Puesto que la comparación, adición y multiplicación de los objetos a' y b', así como de los números reales a y b, se determinan por las mismas reglas.

**) Así, por ejemplo la mecánica cuántica surgió inicialmente en forma de dos teorías distintas a primera vista: la «Mecánica matricial», de Heisenberg, y la «Mecánica ondulatoria», de Schrödinger. Más tarde fue demostrado que las dos teorías utilizan dos realizaciones concretas isomorfas una a otra de un conjunto común de objetos introducido de modo axiomático y llamado espacio de Hilbert abstracto (véase al respecto, el tomo 3 del presente curso).

meros reales *). Esta correspondencia permite representar los números reales mediante los puntos en la recta (en el eje numérico), lo que se usa ampliamente en el curso del análisis matemático con fines ilustrativos.

*) Véase el Apéndice del fascículo 5 de la presente serie «Geometría analítica» y la exposición más detallada en el libro de N. V. Efímov «Geometría superior», Editorial Mir, Moscú, 1984, §§ 20—23.

INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

A. Alenitsin, E. Bútikov, A. Kondrátiev

Breve manual físico-matemático

El trabajo que ofrecemos al lector abarca todos los temas de los primeros cursos de física y matemáticas que se imparten en la actualidad. Contiene las definiciones de los conceptos esenciales de las magnitudes físicas y matemáticas, las formulaciones de las leyes físicas, de los axiomas y teoremas matemáticos, las fórmulas más importantes. La idea que persiguen los autores consiste en ayudar al lector a encontrar rápidamente o a memorizar la información necesaria. La presencia en el libro de información, tanto de física como también de matemáticas, reducida a un sistema concordado, hace más cómoda la aplicación práctica del manual, por ejemplo, en la resolución de problemas.
Recomendamos este trabajo a escolares y profesores de secundaria, a estudiantes de escuelas técnicas profesionales, escuelas de peritaje, a oyentes de los cursos preparatorios para el ingreso en centros de enseñanza superior, así como a estudiantes de institutos pedagógicos y técnicos.