

V. Ilín. E. Pozniak

---

FUNDAMENTOS  
DEL ANÁLISIS  
MATEMÁTICO

2

EDITORIAL - MIR - MOSCÚ









FUNDAMENTOS  
DEL ANÁLISIS  
MATEMÁTICO

В. А. Ильин, Э. Г. Позняк

ОСНОВЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
АНАЛИЗА

в 3 томах

Том 2

Москва  
«Наука»

V. Ilín, E. Pozniak

# FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

En 3 tomos

# 2



EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por la licenciada en matemáticas aplicadas  
M. Andriánova y el ingeniero K. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-002062-4

ISBN 5-03-002060-8

© Издательство «Наука». 1982

© traducción al español, revisada y  
ampliada, M. Andriánova, K. Med-  
kov, 1991

# INDICE

## Capítulo 1. Integral definida

§	1. Sumas integrales. Integrabilidad	9
§	2. Sumas superiores e inferiores	9
§	3. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad	11
§	4. Algunas clases de funciones integrables	17
	1. Propiedad de la continuidad uniforme de una función.	19
	2. Lema de Heine—Borel. Otra demostración del teorema de la continuidad uniforme. 3. Integrabilidad de las funciones continuas. 4. Integrabilidad de algunas funciones discontinuas. 5. Integrabilidad de las funciones acotadas monótonas.	
§	5. Propiedades principales de la integral definida	26
§	6. Estimaciones de integrales. Fórmulas del valor medio	28
	1. Estimaciones de integrales. 2. Primera fórmula del valor medio. 3. Primera fórmula del valor medio en forma generalizada. 4. Segunda fórmula del valor medio.	
§	7. Existencia de la primitiva de una función continua. Reglas fundamentales de integración	33
	1. Existencia de la primitiva de una función continua.	
	2. Fórmula principal de cálculo integral. 3. Cambio de variable bajo el signo de la integral definida. 4. Fórmula de integración por partes. 5. Término residual de la fórmula de Taylor en forma integral.	

	Complemento 1. Algunas desigualdades importantes para las sumas e integrales	41
	1. Dedución de una desigualdad preliminar. 2. Desigualdad de Hölder para las sumas. 3. Desigualdad de Minkowski para las sumas. 4. Integrabilidad de una potencia positiva arbitraria del módulo de una función integrable. 5. Desigualdad de Hölder para las integrales. 6. Desigualdad de Minkowski para las integrales.	

	Complemento 2. Demostración de la afirmación del p. 4 del § 6	46
--	---	----

	Capítulo 2. Aplicaciones geométricas y físicas de la integral definida	49
--	--	----

§	1. Longitud de un arco de una curva	49
	1. Concepto de curva plana. 2. Forma paramétrica de representación de la curva. 3. Concepto de curva espacial. 4. Concepto de longitud de un arco de una curva. 5. Condiciones suficientes de rectificabilidad de una curva. Fórmulas para calcular la longitud de un arco de una curva. 6. Diferencial de un arco. 7. Ejemplos del cálculo de longitud de un arco.	

§ 2. Área de una figura plana	64
1. Concepto de cuadrabilidad de una figura plana. Área de una figura plana cuadrable. 2. Área del trapecio curvilíneo. 3. Área del sector curvilíneo. 4. Ejemplos de cálculo de áreas.	
§ 3. Volúmenes de los cuerpos y áreas de las superficies	70
1. Concepto de cubicabilidad y de volumen. 2. Cubicabilidad de algunas clases de cuerpos. 3. Ejemplos del cálculo de volúmenes. 4. Área de una superficie de rotación.	
§ 4. Algunas aplicaciones físicas de la integral definida	76
1. Masa y centro de gravedad de una varilla no homogénea. 2. Trabajo de una fuerza variable.	
<b>Complemento. Ejemplo de una figura no cuadrable</b>	78
<b>Capítulo 3. Métodos aproximados de cálculo de las raíces de ecuaciones y de las integrales definidas</b>	83
§ 1. Métodos aproximados de cálculo de las raíces de ecuaciones	83
1. Método de «horquilla». 2. Método de las tangentes. 3. Método de las cuerdas. 4. Método de las iteraciones (aproximaciones sucesivas). 5. Argumentación del método de las tangentes. 6. Argumentación del método de las cuerdas.	
§ 2. Métodos aproximados de cálculo de las integrales definidas	95
1. Notas de introducción. 2. Método de los rectángulos. 3. Método de los trapecios. 4. Método de las parábolas. 5. Notas finales.	
<b>Capítulo 4. Teoría de las series numéricas</b>	107
§ 1. Concepto de serie numérica	107
1. La serie y sus sumas parciales. Series convergentes y divergentes. 2. Criterio de Cauchy de convergencia de una serie. 3. Dos propiedades relacionadas con la convergencia de una serie.	
§ 2. Series con términos positivos	113
1. Condición necesaria y suficiente de convergencia de una serie con términos positivos. 2. Criterios de comparación. 3. Criterios de d'Alembert y de Cauchy. 4. Criterio integral de Cauchy—Maclaurin. 5. Criterio de Raabe. 6. Ausencia de una serie universal de comparación.	
§ 3. Series absoluta y condicionalmente convergentes	126
1. Conceptos de series absoluta y condicionalmente convergentes. 2. Sobre la reordenación de los términos de una serie condicionalmente convergente. 3. Sobre la reordenación de los términos de una serie absolutamente convergente.	
§ 4. Operaciones aritméticas con las series convergentes	133
§ 5. Criterios de convergencia de las series arbitrarias	135
1. Criterio de Leibniz. 2. Criterio de Dirichlet—Abel.	
§ 6. Productos infinitos	140
1. Conceptos fundamentales. 2. Relación entre la convergencia de los productos infinitos y la de las series.	
<b>Complemento 1. Teorema auxiliar para el p. 3 del § 2</b>	146
<b>Complemento 2. Desarrollo de la función <math>\sin x</math> en un producto infinito</b>	147
<b>Complemento 3. Métodos generalizados de la sumación de series divergentes</b>	151
1. Método de Cesaro (o método de los promedios). 2. Método de la sumación de Poisson—Abel.	

Capítulo 5. Funciones de varias variables	155
§ 1. Concepto de función de varias variables	155
1. Sobre las dependencias funcionales entre varias magnitudes variables. 2. Concepto de plano euclídeo y de espacio euclídeo. 3. Concepto de función de dos y tres variables. 4. Conceptos de espacio coordinado $m$ -dimensional y de espacio euclídeo $m$ -dimensional. 5. Conjuntos de puntos del espacio euclídeo $m$ -dimensional $E^m$ . 6. Concepto de función de $m$ variables.	
§ 2. Valor límite de una función de varias variables	162
1. Sucesiones convergentes de puntos en un espacio euclídeo $m$ -dimensional $E^m$ . Criterio de convergencia (de Cauchy) de una sucesión. 2. Algunas propiedades de las sucesiones acotadas de puntos en un espacio euclídeo $m$ -dimensional. 3. Concepto de valor límite de una función de varias variables. 4. Funciones infinitésimas. 5. Condición necesaria y suficiente de existencia del valor límite de una función (criterio de Cauchy). 6. Valores límites reiterados.	
§ 3. Funciones continuas de varias variables	168
1. Definición de continuidad de una función de varias variables. 2. Propiedades principales de las funciones continuas de varias variables.	
§ 4. Derivadas y diferenciales de las funciones de varias variables	175
1. Derivadas parciales de una función de varias variables. 2. Concepto de diferenciabilidad de una función de varias variables. 3. Concepto de diferencial de una función de varias variables. 4. Diferenciación de una función compuesta. 5. Forma invariante de la primera diferencial. 6. Derivada direccional. Gradiente.	
§ 5. Derivadas parciales y diferenciales de orden superior	191
1. Derivadas parciales de orden superior. 2. Diferenciales de orden superior. 3. Fórmula de Taylor para una función de $m$ variables con el término residual en forma de Lagrange. 4. Fórmula de Taylor con el término residual en forma de Peano.	
§ 6. Extremo local de una función de $m$ variables	209
1. Concepto de extremo de una función de $m$ variables. Condiciones necesarias de un extremo local. 2. Condiciones suficientes de un extremo local. 3. Caso de una función de dos variables. 4. Ejemplos de análisis del extremo de una función.	
§ 7. Método gradiente de búsqueda del extremo de una función fuertemente convexa	220
1. Conjuntos convexos y funciones convexas. 2. Existencia del mínimo de una función fuertemente convexa y unicidad del mínimo de una función estrictamente convexa. 2. Búsqueda del mínimo de una función.	
Complemento. Sobre la elección óptima de la partición de un segmento para el cálculo aproximado de una integral	240
Capítulo 6. Teoría de las funciones implícitas y sus aplicaciones	244
§ 1. Concepto de función implícita	244
§ 2. Teorema de existencia y de diferenciabilidad de una función implícita y algunas de sus aplicaciones	245
1. Teorema de existencia y de diferenciabilidad de una función implícita. 2. Cálculo de las derivadas parciales de una	

	función definida implícitamente. 3. Puntos singulares de una superficie y de una curva plana. 4. Condiciones que aseguran la existencia de la inversa de la función $y = f(x)$ .	
§ 3.	Funciones implícitas definidas por un sistema de ecuaciones funcionales	255
	1. Teorema de resolubilidad de un sistema de ecuaciones funcionales. 2. Cálculo de las derivadas parciales de las funciones definidas implícitamente por un sistema de ecuaciones funcionales.	
§ 4.	Dependencia de las funciones	263
	1. Concepto de dependencia de las funciones. Condición suficiente de independencia. 2. Matrices funcionales y sus aplicaciones.	
§ 5.	Extremo condicionado	269
	1. Concepto de extremo condicionado. 2. Método de multiplicadores indeterminados de Lagrange. 3. Condiciones suficientes.	
<b>Complemento. Cambio de variables</b>		278
<b>Capítulo 7. Algunas aplicaciones geométricas del cálculo diferencial</b>		282
§ 1.	Envolvente y curva discriminante de una familia monoparamétrica de curvas planas	282
	1. Observaciones preliminares. 2. Familias monoparamétricas de curvas planas. Puntos característicos de las curvas de una familia. 3. Envolvente y curva discriminante de una familia monoparamétrica de curvas planas. 4. Envolvente y superficie discriminante de una familia monoparamétrica de superficies.	
§ 2.	Osculación de las curvas planas	291
	1. Concepto de orden de osculación de las curvas planas. 2. Orden de osculación de las curvas que sirven de gráfica para las funciones. 3. Condiciones suficientes de osculación de orden $n$ . 4. Circunferencia osculatriz.	
§ 3.	Curvatura de una curva plana	298
	1. Concepto de curvatura de una curva plana. 2. Fórmula para calcular la curvatura	
§ 4.	Evoluta y evolvente	303
	1. Normal a una curva plana. 2. Evoluta y evolvente de una curva plana	
<b>Índice alfabético de materias</b>		



## Capítulo 1

### INTEGRAL DEFINIDA

En el capítulo 1 del tomo 1 hemos considerado el problema de la física en el cual calculamos el camino recorrido por el punto material que se movía a lo largo del eje  $Oy$  con una velocidad determinada y el problema de la geometría en el cual calculamos el área del *trapezio curvilíneo* (es decir, la figura que se halla entre la gráfica de la función  $y = f(x)$  y el segmento  $[a, b]$  del eje  $Ox$ ). Resolviendo estos dos problemas llegamos a la conclusión de que es necesario introducir el nuevo concepto matemático, el de *integral definida*. Además de dos problemas considerados, algunos otros problemas importantes de la física y geometría llevan también al concepto de integral definida. En el presente capítulo exponemos la teoría de la integral definida. En el siguiente capítulo aplicaremos esta teoría en algunos problemas de la física y geometría.

#### § 1. Sumas integrales. Integrabilidad

Sea la función  $f(x)$  dada en el segmento  $[a, b]$ ,  $a < b$ . Mediante el símbolo  $T$  denotemos la partición del segmento  $[a, b]$  empleando algunos puntos no coincidentes uno con otro  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  en  $n$  segmentos parciales  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{n-1}, x_n]$ . Los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  se denominarán puntos de la partición  $T$ . Sean  $\xi_i$  punto arbitrario del segmento parcial  $[x_{i-1}, x_i]$  y  $\Delta x_i$  diferencia  $x_i - x_{i-1}$  que a continuación se denominará longitud del segmento parcial  $[x_{i-1}, x_i]$ .

**Definición 1.** El número  $I\{x_i, \xi_i\}$ , en el cual

$$I\{x_i, \xi_i\} = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

se denomina *suma integral de la función  $f(x)$  correspondiente a la partición dada  $T$  del segmento  $[a, b]$  y la elección dada de los puntos intermedios  $\xi_i$  en los segmentos parciales  $[x_{i-1}, x_i]$ . A continuación, mediante  $\Delta$  se denotará la longitud del segmento parcial máximo de la partición  $T$ , es decir,  $\Delta = \max \Delta x_i$ .*

Aclaremos el sentido geométrico de la suma integral. Para hacerlo, consideremos un *trapezio curvilíneo*, o sea, una figura limitada por la gráfica de la función  $f(x)$  (para la simplicidad, tomaremos la función positiva y continua), dos ordenadas trazadas por los puntos  $a$  y  $b$  del eje de abscisas y el mismo eje de abscisas (fig. 1.1). Evidente-

mente, la suma integral  $I\{x_i, \xi_i\}$  es el área de la figura escalonada rayada en la fig. 1.1.

**Definición 2.** El número  $I$  se denomina límite de las sumas integrales  $I\{x_i, \xi_i\}$  para  $\Delta \rightarrow 0$  si para cualquier número positivo  $\varepsilon$  se puede indicar un número positivo  $\delta$  \*) tal que para toda partición  $T$  del segmento  $[a, b]$ , en el cual la longitud máxima  $\Delta$  de los segmentos parciales es menor de  $\delta$ , independientemente de la elección de los puntos  $\xi_i$  en los segmentos  $[x_{i-1}, x_i]$  se cumple la desigualdad

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon.$$

Para denotar el límite de las sumas integrales se usan los símbolos

$$I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} I\{x_i, \xi_i\}.$$

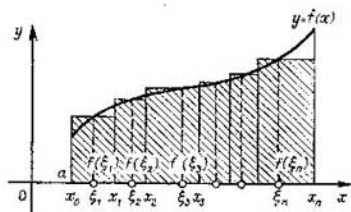


Fig. 1.1

**Definición 3.** La función  $f(x)$  se denomina integrable (según Riemann \*\*) en el segmento  $[a, b]$  si existe el límite finito  $I$  de

las sumas integrales de esta función para  $\Delta \rightarrow 0$ . Dicho límite  $I$  se denomina integral definida de la función  $f(x)$  por el segmento  $[a, b]$  y se denota del modo siguiente:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Las representaciones geométricas muestran \*\*\* que la integral definida es igual numéricamente al área del trapecio curvilíneo determinado por la gráfica de la función  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$ . En el capítulo 2 demostraremos la validez de esta afirmación.

Aduzcamos el ejemplo de la función integrable. Demostremos que la función  $f(x) = c = \text{const}$  es integrable en cualquier segmento

$[a, b]$  con tal que  $\int_a^b c dx = c(b - a)$ . En efecto, como  $f(\xi_i) = c$

para cualesquiera  $\xi_i$ , se tiene

$$I\{x_i, \xi_i\} = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + \dots + c\Delta x_n = c(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = c(b - a).$$

Por eso,  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I\{x_i, \xi_i\} = c(b - a)$ .

Aclaremos el problema de la integrabilidad de las funciones no acotadas en el segmento  $[a, b]$ .

\*) Ya que el número  $\delta$  depende de  $\varepsilon$ , a veces se escribe  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

\*\*) Bernhard Riemann, matemático alemán (1826—1866).

\*\*\*) Véase el § 4 del cap. 1 en el tomo I.

Demostremos la siguiente afirmación: *la función no acotada en el segmento  $[a, b]$  no es integrable en este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea que la función  $f(x)$  no está acotada en el segmento  $[a, b]$ . Entonces no está acotada en un segmento parcial del segmento  $[x_{h-1}, x_h]$  de cualquier partición  $T$  dada del segmento  $[a, b]$ . Por eso, el sumando  $f(\xi_h) \Delta x_h$  de la suma integral  $I\{x_i, \xi_i\}$  correspondiente a esta partición  $T$  puede hacerse cualquiera grande que sea en su valor absoluto variando la elección del punto  $\xi_h$ . De aquí se desprende que las sumas integrales  $I\{x_i, \xi_i\}$  que corresponden a cualquier partición  $T$  no están acotadas\*) y por eso no existe límite finito de las sumas integrales.

Conforme a la afirmación demostrada, consideraremos solamente las funciones acotadas en el segmento  $[a, b]$ . Surge la pregunta, *si toda función acotada en el segmento  $[a, b]$  es integrable en este segmento.* El siguiente ejemplo muestra que eso, hablando en general, no es así. Cerciorémonos de que la *función de Dirichlet* acotada, sin duda, en el segmento  $[a, b]$  y cuyos valores en los puntos racionales son iguales a la unidad y, en los irracionales, a cero, *no es integrable* en el segmento  $[a, b]$ . En efecto, si para cualquier partición  $T$  con  $\Delta$ , cualquiera pequeña que sea, elegimos los puntos racionales  $\xi_i$ , entonces, es obvio que  $I\{x_i, \xi_i\} = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a$ . Si para la misma partición  $T$  elegimos los puntos irracionales  $\xi_i$ , entonces  $I\{x_i, \xi_i\} = 0$ . Por eso, para la función de Dirichlet no existe límite de las sumas integrales, o sea, esta función no es integrable.

A continuación, demostraremos la integrabilidad de todas las funciones continuas y una clase amplia de funciones discontinuas.

## § 2. Sumas superiores e inferiores

**1. Concepto de sumas superior e inferior.** Sea la función  $f(x)$  acotada en el segmento  $[a, b]$  y sea  $T$  partición de este segmento por los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Mediante  $M_i$  y  $m_i$  denotemos respectivamente la cota superior exacta y la inferior exacta de esta función en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ . Las sumas

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

\*) Para cerciorarse de esto, basta fijar los puntos  $\xi_i$  en todos los segmentos parciales de la partición  $T$ , excepto el segmento  $[x_{h-1}, x_h]$ . Entonces, en la suma integral  $I\{x_i, \xi_i\}$  variará solamente el sumando  $f(\xi_h) \Delta x_h$  que puede ser cualquier grande que sea en su valor absoluto.

y

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

se denominan respectivamente sumas superior e inferior de la función  $f(x)$  para la partición  $T$  del segmento  $[a, b]$ .

Es obvio que toda suma integral  $I\{x_i, \xi_i\}$  de la partición dada  $T$  del segmento  $[a, b]$  se comprende entre las sumas superior  $S$  e inferior  $s$  de esta partición.

Los conceptos de sumas superior e inferior se hacen bien evidentes si nos referimos a representaciones geométricas. Para la simplicidad, consideremos una función continua y positiva  $f(x)$  y el trapecio curvilíneo determinado por esta función (las figs. 1.2 y 1.3). Si  $T$  es

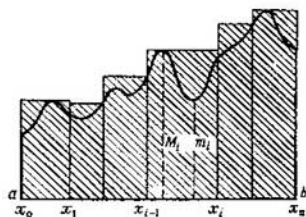


Fig. 1.2

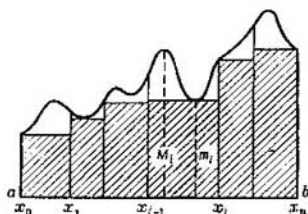


Fig. 1.3

cierta partición del segmento  $[a, b]$ , entonces los números  $M_i$  y  $m_i$  en el caso de la función continua  $f(x)$  son los valores máximo y mínimo de esta función en el segmento parcial  $[x_{i-1}, x_i]$  de la partición  $T$ . Por eso, la suma superior  $S$  es igual al área de la figura escalonada rayada (fig. 1.2) que contiene el trapecio curvilíneo, y la suma inferior  $s$  es igual al área de la figura escalonada rayada (fig. 1.3) que se contiene en el trapecio curvilíneo (este trapecio está trazado por una línea gruesa en las figs. 1.2 y 1.3).

Como ya se ha dicho, de la representación geométrica se desprende que la integral es numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo. Por otra parte, es evidente que si la diferencia entre las sumas superiores e inferiores puede hacerse tan pequeña como se desee, entonces, estas sumas pueden ser tan próximas como se quiera al área del trapecio curvilíneo. Por eso, es de esperar que para la integrabilidad de la función es necesario y suficiente que la diferencia entre las sumas superiores e inferiores sea tan pequeña que como se quiera. La demostración estricta se dará en el párrafo siguiente.

**2. Propiedades de las sumas superiores e inferiores.** Demostremos la validez de las siguientes propiedades de las sumas superiores e inferiores:

1°. *Para cualquier partición fijada  $T$  y cualquier  $\varepsilon > 0$  pueden elegirse los puntos intermedios  $\xi_i$  en los segmentos  $[x_{i-1}, x_i]$  de tal modo que la suma integral  $I\{x_i, \xi_i\}$  satisfaga las desigualdades  $0 \leq S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$ . Pueden elegirse también los puntos  $\xi_i$  de tal modo que la suma integral satisfaga las desigualdades  $0 \leq I\{x_i, \xi_i\} - s < \varepsilon$ .*

Sea  $T$  una partición fijada del segmento  $[a, b]$ . Demostremos, por ejemplo, que por  $\varepsilon > 0$  dado pueden elegirse los puntos  $\xi_i$  de tal modo que se cumpla la desigualdad  $0 \leq S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$ . Según la definición de la cota exacta  $M_i$ , para  $\varepsilon > 0$  dado en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$  se puede indicar un punto  $\xi_i$  tal que

$$0 \leq M_i - f(\xi_i) < \varepsilon/(b - a), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Multiplicando estas desigualdades por  $\Delta x_i$  y después sumándolas, obtenemos

$$0 \leq S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon.$$

La validez de la propiedad 1° queda establecida.

2°. *Si la partición  $T'$  del segmento  $[a, b]$  se hace añadiendo nuevos puntos a los puntos de la partición  $T$  de este segmento, entonces la suma superior  $S'$  de la partición  $T'$  no es mayor que la suma superior  $S$  de la partición  $T$ , y la suma inferior  $s'$  de la partición  $T'$  no es menor que la suma inferior  $s$  de la partición  $T$ , o sea,*

$$s \leq s', \quad S' \leq S.$$

Ya que la partición  $T'$  puede obtenerse de la partición  $T$  al añadir sucesivamente nuevos puntos a  $T$ , es obvio que baste demostrar la propiedad enunciada para el caso cuando a  $T$  se le añade un punto. Sea que este punto  $x'$  está en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$  de la partición  $T$  del segmento  $[a, b]$ . Mediante  $M'_i$  y  $M''_i$  denotemos las cotas superiores exactas de la función  $f(x)$  en los segmentos  $[x_{i-1}, x']$  y  $[x', x_i]$ , mediante  $\Delta x'_i$  y  $\Delta x''_i$ , las longitudes de estos segmentos, y mediante  $S$  y  $S'$ , las sumas superiores de la partición  $T$  y la  $T'$  obtenida al añadir el punto  $x'$  a la partición  $T$ . Notemos que  $\Delta x_i = \Delta x'_i + \Delta x''_i$ . Además, si  $M_i$  es cota superior exacta de la función  $f(x)$  en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ , entonces  $M_i \geq M'_i$  y  $M_i \geq M''_i$  puesto que es evidente que la cota superior exacta de la función en una parte del segmento  $[x_{i-1}, x_i]$  no supera la cota superior exacta  $M_i$  de esta función en todo el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ . Por eso, teniendo en cuenta que las sumas  $S$  y  $S'$  se diferencian solamente en los sumandos  $M_i \Delta x_i$  y  $M'_i \Delta x'_i + M''_i \Delta x''_i$ , obtenemos

$$\begin{aligned} S - S' &= M_i \Delta x_i - (M'_i \Delta x'_i + M''_i \Delta x''_i) = \\ &= (M_i - M'_i) \Delta x'_i + (M_i - M''_i) \Delta x''_i \geq 0, \end{aligned}$$

o sea,  $S' \leq S$ . La demostración para las sumas inferiores se hace análogamente.

3°. Sean  $T'$  y  $T''$  cualesquiera dos particiones del segmento  $[a, b]$ . Entonces, la suma inferior de una de estas particiones no supera la suma superior de la otra. A saber, si  $s', S'$  y  $s'', S''$  son sumas inferiores y superiores de las particiones  $T'$  y  $T''$ , entonces respectivamente

$$s' \leq S'', \quad s'' \leq S'.$$

Hemos establecido anteriormente que la suma inferior de la partición dada no supera la suma superior de esta partición. Sea  $T$  partición del segmento  $[a, b]$  obtenida al unir las particiones \*)  $T'$  y  $T''$ , y sean  $s$  y  $S$  las sumas inferior y superior de la partición  $T$ . Ya que la partición  $T$  puede obtenerse de la partición  $T'$  al añadir a ésta los puntos de la partición  $T''$ , entonces, según la propiedad 2° y la propiedad mencionada de las sumas inferior y superior de una misma partición, tenemos

$$s' \leq s \leq S \leq S'.$$

Pero la partición  $T$  puede obtenerse también de la partición  $T''$  al añadir a ésta los puntos de la partición  $T'$ . Por eso,

$$s'' \leq s \leq S \leq S''.$$

Comparando las desigualdades establecidas anteriormente con las que acabamos de obtener, nos cercioramos de que  $s' \leq S''$ ,  $s'' \leq S'$ .

La validez de la propiedad 3° queda establecida.

4°. El conjunto  $\{S\}$  de las sumas superiores de la función dada  $f(x)$  para todas las particiones posibles del segmento  $[a, b]$  está acotado inferiormente. El conjunto  $\{s\}$  de las sumas inferiores está acotado superiormente.

Esta propiedad se desprende directamente de la propiedad 3°. En efecto, toda suma superior no es menor que cierta suma inferior fijada. Por consiguiente, el conjunto  $\{S\}$  de las sumas superiores está acotado inferiormente. Toda suma inferior no es mayor que alguna suma superior, y, por eso, el conjunto  $\{s\}$  de las sumas inferiores está acotado superiormente. Mediante  $\bar{I}$  denotemos la cota inferior exacta del conjunto  $\{S\}$  de las sumas superiores, y mediante  $\underline{I}$ , la cota superior exacta del conjunto de las sumas inferiores:

$$\bar{I} = \inf \{S\}, \quad \underline{I} = \sup \{s\}.$$

Los números  $\bar{I}$  e  $\underline{I}$  se denominan respectivamente *integrales superior e inferior de Darboux de la función  $f(x)$* . Demostremos que  $\underline{I} \leq \bar{I}$ .

\*) Al mismo tiempo, los puntos comunes de las particiones  $T'$  y  $T''$  se toman en consideración una vez.

Sea  $\underline{I} > \bar{I}$ . Entonces, la diferencia  $\underline{I} - \bar{I}$  es número positivo que se denotará mediante  $\varepsilon$ , así que  $\underline{I} - \bar{I} = \varepsilon > 0$ . De la definición de las cotas exactas  $\underline{I}$  e  $\bar{I}$  se desprende que existen los números  $S'$  y  $s''$  que son respectivamente sumas superior e inferior de algunas particiones  $T'$  y  $T''$  del segmento  $[a, b]$  tales que  $\bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} > S'$  e  $\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < s''$ . Sustrayendo la segunda desigualdad de la primera y teniendo en cuenta que  $\bar{I} - \underline{I} = \varepsilon$ , obtenemos  $s'' > S'$ . Pero esta última desigualdad contradice la propiedad 3° de las sumas superiores e inferiores.

5°. Sea que la partición  $T'$  del segmento  $[a, b]$  se obtiene de la partición  $T$  al añadir a la última  $p$  puntos nuevos y sean  $s'$ ,  $S'$  y  $s$ ,  $S$  sumas inferiores y superiores de las particiones  $T'$  y  $T$ . Entonces, para las diferencias  $S - S'$  y  $s' - s$ \*) se puede obtener una estimación que depende de la longitud máxima  $\Delta$  de los segmentos parciales de la partición  $T$ , del número  $p$  de los puntos agregados y de las cotas superior e inferior exactas  $M$  y  $m$  de la función  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$ . A saber,

$$S - S' \leq (M - m) p \Delta, \quad s' - s \leq (M - m) p \Delta.$$

Para cerciorarse de que esta propiedad es válida, basta demostrar las desigualdades aducidas para el caso cuando a la partición  $T$  se agrega un punto  $x'$ . Sea que este punto está en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$  de la partición  $T$ . Entonces, este segmento se divide en dos segmentos  $[x_{i-1}, x']$  y  $[x', x_i]$  cuyas longitudes se denotarán mediante  $\Delta x'_i$  y  $\Delta x''_i$ , respectivamente. Sean  $M_i$ ,  $M'_i$  y  $M''_i$  las cotas superiores exactas de la función  $f(x)$  en los segmentos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $[x_{i-1}, x']$  y  $[x', x_i]$ , respectivamente. Ya que  $\Delta x_i = \Delta x'_i + \Delta x''_i$  y las sumas superiores  $S$  y  $S'$  de las particiones  $T$  y  $T'$  se diferencian solamente en los sumandos  $M_i \Delta x_i$  y  $M'_i \Delta x'_i + M''_i \Delta x''_i$ , entonces,  $S - S' = M_i (\Delta x'_i + \Delta x''_i) - (M'_i \Delta x'_i + M''_i \Delta x''_i) = (M_i - M'_i) \Delta x'_i + (M_i - M''_i) \Delta x''_i$ . Luego,  $m \leq M'_i \leq M_i \leq M$  y  $m \leq M''_i \leq M_i \leq M$  (\*\*). Por eso,  $M_i - M'_i \leq M - m$  y  $M_i - M''_i \leq M - m$ . Por consiguiente,  $S - S' \leq (M - m) (\Delta x'_i + \Delta x''_i) = (M - m) \Delta x_i$ . Ya que  $\Delta x_i \leq \Delta$ , entonces  $S - S' \leq (M - m) \Delta$ . Esta desigualdad coincide con la primera de las desigualdades aducidas en la formulación de la propiedad 5°, si  $p = 1$ . La demostración para las sumas inferiores se hace análogamente.

\*) Notemos que, en virtud de la propiedad 2°, estas diferencias son no negativas.

\*\*) Anteriormente, demostrando la propiedad 2°, ya hemos notado que la cota superior exacta de la función en una parte del segmento no supera su cota superior exacta en todo el segmento. Observemos también que la cota inferior exacta de la función en todo el segmento no supera su cota superior exacta en cualquier parte de este segmento.

6°. **Lema de Darboux.** Las integrales superior e inferior de Darboux  $\bar{I}$  e  $I$  de la función  $f(x)$  por el segmento  $[a, b]$  son, respectivamente, los límites \*) de las sumas superiores e inferiores para  $\Delta \rightarrow 0$ .

DEMOSTRACION. Demostremos, por ejemplo, que  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}$ . Para el caso de  $M = m$ , es decir, cuando  $f(x) = c = \text{const}$ , el lema es evidente puesto que  $S = \bar{I} = I = s$ . Por eso, tomamos  $M > m$ . Ya que  $\bar{I}$  es la cota inferior exacta del conjunto de las sumas superiores, entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$  dado se puede indicar una partición  $T^*$  del segmento  $[a, b]$  tal que la suma superior  $S^*$  de esta partición se diferencie de  $\bar{I}$  en menos que  $\varepsilon/2$ :

$$S^* - \bar{I} < \varepsilon/2. \quad (1.1)$$

Denotemos mediante  $p$  el número de los puntos de la partición  $T^*$  que se encuentran estrictamente dentro del segmento  $[a, b]$ . Sea  $T$  cualquier partición del segmento  $[a, b]$ , en el cual la longitud máxima  $\Delta$  de los segmentos parciales verifica la condición

$$\Delta < \delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}, \quad (1.2)$$

y sea  $S$  la suma superior de esta partición. Añadimos a esta partición los puntos interiores de la partición  $T^*$ . Como resultado, obtenemos la partición  $T'$  cuya suma superior  $S'$  satisface, en virtud de la propiedad 5° y la condición (1.2) para  $\Delta$ , la desigualdad

$$0 \leq S - S' \leq (M - m) p \Delta < \varepsilon/2. \quad (1.3)$$

Por otra parte, la partición  $T'$  puede considerarse como la partición obtenida después de añadir los puntos interiores de la partición  $T$  a  $T^*$ . Por eso, en virtud de la propiedad 2°,

$$\bar{I} \leq S' \leq S^*.$$

De aquí se desprende que  $0 \leq S' - \bar{I} \leq S^* - \bar{I}$ , o sea, según la desigualdad (1.1),

$$0 \leq S' - \bar{I} < \varepsilon/2.$$

Sumando esta igualdad y la desigualdad (1.3), obtenemos

$$0 \leq S - \bar{I} < \varepsilon. \quad (1.4)$$

\*) El concepto de límite de las sumas superiores o inferiores se determina de modo completamente análogo al concepto de límite de las sumas integrales. A saber, el número  $\bar{I}$  se denomina límite de las sumas superiores  $S$  para  $\Delta \rightarrow 0$  si para cualquier número positivo  $\varepsilon$  se puede indicar un número positivo  $\delta$  tal que para  $\Delta < \delta$  se cumple la desigualdad  $|S - \bar{I}| < \varepsilon$ .



De este modo, hemos establecido que, para cualquier  $\varepsilon > 0$  dado se puede indicar un  $\delta > 0$  (se puede, por ejemplo, poner  $\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)p}$ ), tal que las sumas superiores  $S$  de las particiones  $T$  del segmento  $[a, b]$  para las cuales la longitud máxima  $\Delta$  de los segmentos parciales es menor de  $\delta$  (véase (1.2)), satisfacen la desigualdad (1.4). Pero esto significa que la integral superior  $\bar{I}$  de Darboux es el límite de las sumas superiores. Para las sumas inferiores la demostración es análoga. El lema de Darboux queda demostrado.

### § 3. Condición necesaria y suficiente de integrabilidad

Las propiedades establecidas de las sumas superiores e inferiores permiten enunciar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad de la función en una forma bien simple. A saber, tiene lugar el siguiente teorema fundamental.

**Teorema 1.1.** *Para que la función  $f(x)$  acotada en el segmento  $[a, b]$  sea integrable en este segmento es necesario y suficiente que, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , exista una partición  $T$  del segmento  $[a, b]$  para la cual*

$$S - s \leq \varepsilon.$$

**DEMOSTRACIÓN.** 1) NECESIDAD. Sea la función  $f(x)$  integrable en el segmento  $[a, b]$ . Mediante  $I$  denotemos el límite de las sumas integrales de esta función. Según la definición del límite de las sumas integrales, para cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede indicar un  $\delta > 0$  tal que para cualquier partición  $T$ , que satisface la condición  $\Delta < \delta$ , independientemente del modo de elegir los puntos  $\xi_i$  en los segmentos parciales de la partición se cumple la desigualdad

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon/4. \quad (1.5)$$

Fijemos una partición de este tipo  $T$ . Por la propiedad 1° (véase el p. 2 del párrafo anterior), para la partición dada  $T$  se puede indicar dos sumas integrales (en otras palabras, en todo segmento parcial  $[x_{i-1}, x_i]$  pueden elegirse los puntos  $\xi_i$  y  $\xi_i'$ ) tales que

$$S - I\{x_i, \xi_i\} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad I\{x_i, \xi_i'\} - s \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Notemos que las dos sumas integrales  $I\{x_i, \xi_i\}$  e  $I\{x_i, \xi_i'\}$  satisfacen la desigualdad (1.5). De la relación

$$S - s = (S - I\{x_i, \xi_i\}) + (I\{x_i, \xi_i'\} - I) + (I - I\{x_i, \xi_i'\}) + (I\{x_i, \xi_i'\} - s),$$

la desigualdad (1.5) y las desigualdades  $S - I\{x_i, \xi_i\} \leq \frac{\varepsilon}{4}$  y

$$I\{x_i, \xi_i'\} - s \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ se desprende que}$$

$$S - s < \varepsilon$$

La necesidad de las condiciones del teorema queda demostrada.

2) SUFICIENCIA. Ya que para cualquier partición  $T$  son válidas las desigualdades  $s \leq I \leq \bar{I} \leq S$  y para cualquier  $\varepsilon > 0$ , según la condición del teorema, se puede indicar una partición tal que  $S - s \leq \varepsilon$ , entonces  $0 \leq \bar{I} - I \leq \varepsilon$ . Debido a que  $\varepsilon$  es arbitrario, obtenemos  $I = \bar{I}$ .

Denotemos el valor común de los números  $I$  e  $\bar{I}$  mediante  $\bar{I}$  y demostremos que el número  $I$  es el límite de las sumas integrales de la función  $f(x)$ . En efecto, en virtud del lema de Darboux (véase el p. 2 del § 2), el número  $I$  es límite común de las sumas superiores e inferiores para  $\Delta \rightarrow 0$ . Por eso, para cualquier  $\varepsilon$ , se puede indicar un  $\delta$  tal que para  $\Delta < \delta$  se cumplen las desigualdades  $I - s < \varepsilon/2$  y  $S - I < \varepsilon/2$ , o sea, para  $\Delta < \delta$ ,  $S - s < \varepsilon$ , con tal que  $s \leq I \leq S$ . Toda suma integral  $I \{x_i, \xi_i\}$  de la partición dada  $T$  se comprende entre la suma superior y la inferior  $s \leq I \{x_i, \xi_i\} \leq S$ . De este modo, para  $\Delta < \delta$  ambas magnitudes  $I$  e  $I \{x_i, \xi_i\}$  se comprenden entre los números  $S$  y  $s$ , la diferencia entre los cuales es menor de  $\varepsilon$ . De aquí se desprende que para  $\Delta < \delta$

$$| I \{x_i, \xi_i\} - I | < \varepsilon.$$

Por consiguiente, el número  $I$  es el límite de las sumas integrales. El teorema queda demostrado.

A continuación necesitaremos forma un poco distinta de anotación de la condición necesaria y suficiente de integrabilidad. Sean  $M_i$  y  $m_i$  cotas exactas de los valores de la función  $f(x)$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ . El número

$$\omega_i = M_i - m_i$$

se denomina *oscilación de la función  $f(x)$  en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$* . Notemos que, como  $M_i \geq m_i$ , la oscilación  $\omega_i$  es número no negativo. Vamos a escribir ahora la diferencia  $S - s$  en la forma siguiente:

$$S - s = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i.$$

Puesto que  $\omega_i \geq 0$  y  $\Delta x_i > 0$ , entonces todo sumando en la última suma es no negativo.

Se puede enunciar la condición necesaria y suficiente de integrabilidad de la función en la forma siguiente.

*Para que la función  $f(x)$  sea integrable en el segmento  $[a, b]$ , es necesario y suficiente que, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , exista una partición  $T$  del segmento  $[a, b]$  para la cual*

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq \varepsilon.$$

## § 4. Algunas clases de funciones integrables

En el presente párrafo demos­tre­mos la integrabilidad de funciones continuas en un segmento, algunas funciones discontinuas y funciones monótonas. Para demostrar la integrabilidad de funciones continuas necesitaremos una propiedad importante de funciones continuas en un segmento que se establece en el punto siguiente.

## 1 Propiedad de la continuidad uniforme de una función.

*Definición.* La función  $f(x)$  se denomina uniformemente continua sobre el conjunto  $\{x\}$ \* si para cualquier número positivo  $\varepsilon$  se puede indicar un  $\delta$  positivo (dependiente sólo de  $\varepsilon$ ) tal que para cualesquiera dos puntos  $x'$  y  $x''$  del conjunto  $\{x\}$  que satisfacen la condición  $|x'' - x'| < \delta$ , se cumple la desigualdad  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ .

OBSERVACION. En esta definición lo principal es que, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  que garantiza el cumplimiento de la desigualdad  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$  para todos los  $x'$  y  $x''$  del conjunto  $\{x\}$  a la vez, si se observa la única condición  $|x'' - x'| < \delta$ .

Para explicar la propiedad de la continuidad uniforme, consideremos los siguientes ejemplos:

1) La función  $f(x) = \sqrt{x}$  es uniformemente continua en la semirrecta  $x \geq 1$ . En efecto, según el teorema de Lagrange tenemos, para cualesquiera  $x' \geq 1$  y  $x'' \geq 1$ .

$$|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)| |x'' - x'| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} |x'' - x'| < \frac{1}{2} |x'' - x'|$$

(la última desigualdad se desprende del hecho de que  $\xi$  se comprende entre  $x'$  y  $x''$ , y por eso,  $\xi \geq 1$ ). Por consiguiente, si según el  $\varepsilon > 0$  dado escogemos cualquier  $\delta$  que satisface la condición  $0 < \delta \leq 2\varepsilon$ , entonces, para  $|x'' - x'| < \delta$  se cumple la desigualdad  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ , es decir, sobre el conjunto  $x \geq 1$  la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es uniformemente continua.

2) La función  $f(x) = x^2$  no es uniformemente continua sobre el conjunto  $x \geq 1$ . Es suficiente demostrar que, para cierto  $\varepsilon > 0$ , no se puede escoger  $\delta > 0$  que garantiza el cumplimiento de la desigualdad  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$  para todos los  $x' \geq 1$  y  $x'' \geq 1$  si la única condición es  $|x'' - x'| < \delta$ . Demostraremos que en realidad, incluso para cualquier  $\varepsilon > 0$ , no se puede escoger dicho  $\delta$ . Fijemos un  $\varepsilon > 0$  y consideremos cualquier  $\delta$  positivo. Escojamos  $x' > \frac{\varepsilon}{\delta}$ ,  $x'' = x' + \frac{\delta}{2}$ . Entonces,  $|x'' - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta$ . Empleando el teorema de Lagrange, obtenemos

$$|f(x'') - f(x')| = 2\xi |x'' - x'| = \xi\delta.$$

\* En este caso se supone que el conjunto  $\{x\}$  es denso en sí (véase la parte final del § 3, el cap. 2 del tomo 1).

Ya que  $\xi$  se comprende entre  $x'$  y  $x''$ , entonces  $\xi > \frac{\varepsilon}{\delta}$ , y, por eso, de la última desigualdad se desprende la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| > \varepsilon$$

aunque  $|x'' - x'| < \delta$ . De este modo, la función  $f(x) = x^2$  no es uniformemente continua sobre el conjunto  $x \geq 1$ .

3) La función  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  no es uniformemente continua sobre el intervalo  $(0, 1)$ . Demostremos que para cualquier  $\varepsilon$  que satisface las condiciones  $0 < \varepsilon < 2$  no se puede indicar  $\delta > 0$  que garantice el cumplimiento de la desigualdad  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon < 2$  para todos los  $x'$  y  $x''$  del intervalo  $(0, 1)$  si la única condición es  $|x'' - x'| < \delta$ . Para cerciorarse de esto, es suficiente tomar  $x' = \frac{2}{(4k+3)\pi}$  y  $x'' = \frac{1}{(4k+1)\pi}$  y, para cualquier  $\delta > 0$ , escoger  $k$  tan grande que  $|x'' - x'| < \delta$ . Para los puntos indicados  $x'$  y  $x''$  y para cualquier  $k$  la diferencia

$$|f(x'') - f(x')| = \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x''} - \operatorname{sen} \frac{1}{x'} \right| = 2 > \varepsilon.$$

Demostremos el siguiente teorema fundamental.

**Teorema 1.2 (de la continuidad uniforme).** Una función  $f(x)$ , continua en el segmento  $[a, b]$ , es uniformemente continua en este segmento.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función  $f(x)$ , continua en el segmento  $[a, b]$ , no es uniformemente continua en este segmento. Entonces, para cierto  $\varepsilon > 0$ , no se cumplen las condiciones enunciadas en la definición de la continuidad uniforme. Esto significa que para dicho  $\varepsilon > 0$  y cualquier número positivo  $\delta$ , en el segmento  $[a, b]$  existen puntos  $x'$  y  $x''$  tales que  $|x'' - x'| < \delta$  pero  $|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$ . Por eso, para todo  $\delta = 1/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , existen puntos  $x'_n$  y  $x''_n$  del segmento  $[a, b]$  tales que  $|x''_n - x'_n| < 1/n$ , pero  $|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ . Ya que  $\{x'_n\}$  es sucesión de puntos del segmento  $[a, b]$ , entonces según el teorema de Bolzano - Weierstrass, de ella se puede separar una subsucesión  $\{x'_{h_n}\}$  convergente a cierto punto  $c$  de este segmento (véase la observación 2 del p. 4, § 4, cap. 3, tomo 1). Evidentemente, la subsucesión  $\{x''_{h_n}\}$  de la sucesión  $\{x'_n\}$  también converge a  $c$ . Ya que en el punto  $c$  la función  $f_a(x)$  es continua, entonces los límites de las sucesiones  $\{f(x'_{h_n})\}$  y  $\{f(x''_{h_n})\}$  son iguales a  $f(c)$ , y, por eso, la sucesión  $\{f(x''_{h_n}) - f(x'_{h_n})\}$  es infinitesimal. Pero esto es imposible puesto que todos los elementos  $f(x''_{h_n}) - f(x'_{h_n})$  de dicha sucesión satisfacen la desigualdad  $|f(x''_{h_n}) - f(x'_{h_n})| \geq \varepsilon$ . De este modo, la suposición de que la

función continua en el segmento  $[a, b]$  no es uniformemente continua conlleva la contradicción. El teorema queda demostrado.

**Corolario.** Sea la función  $f(x)$  continua en el segmento  $[a, b]$ . Entonces, para cualquier número positivo  $\varepsilon$  se puede indicar un  $\delta > 0$  tal que en todo segmento parcial  $[c, d]$  perteneciente al segmento  $[a, b]$ , cuya longitud  $d - c$  es menor de  $\delta$ , la oscilación  $\omega$  \*) de la función  $f(x)$  es menor de  $\varepsilon$ .

**DEMOSTRACIÓN.** En virtud del teorema que acabamos de demostrar, la función  $f(x)$ , continua en el segmento  $[a, b]$ , es uniformemente continua en este segmento. Por eso, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , se puede indicar un  $\delta > 0$  tal que para cualesquiera  $x'$  y  $x''$  del segmento  $[a, b]$  que satisfacen la condición  $|x'' - x'| < \delta$  se cumple la desigualdad  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ . Demostremos que en todo segmento parcial  $[c, d]$  perteneciente al segmento  $[a, b]$  y cuya longitud  $d - c$  es menor de dicho  $\delta$ , la oscilación  $\omega$  de la función  $f(x)$  es menor de  $\varepsilon$ . En efecto, ya que la función  $f(x)$  es continua en el segmento  $[c, d]$ , en este segmento se puede indicar puntos  $x'$  y  $x''$  tales que  $f(x') = m$ , y  $f(x'') = M$ , donde  $m$  y  $M$  son cotas inferior y superior exactas de  $f(x)$  en el segmento  $[c, d]$  (véase el teorema 8.8). Ya que  $|x'' - x'| < \delta$  (puesto que la longitud del segmento  $[c, d]$  es menor que  $\delta$ ), entonces  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ . Pero  $f(x'') - f(x') = M - m = \omega$ . Por eso,  $\omega < \varepsilon$ .

**OBSERVACIÓN.** Un conjunto  $\{x\}$  de puntos de la recta numérica se denomina *cerrado* si contiene todos sus puntos límite \*\*). Es válida la siguiente afirmación. Una función  $f(x)$ , continua sobre un conjunto cerrado acotado \*\*\*)  $\{x\}$ , es uniformemente continua sobre este conjunto. La demostración de esta afirmación es análoga a la del teorema 1.2.

2. **Lema de Heine — Borel.** Otra demostración del teorema de la continuidad uniforme. Un punto  $x$  del conjunto  $\{x\}$  se denomina *punto interior* de este conjunto si  $x$  pertenece a un intervalo, en el cual todos los puntos pertenecen al conjunto  $\{x\}$ . El conjunto  $\{x\}$  se denomina *abierto* si todos los puntos de este conjunto son interiores.

Se dice que el conjunto dado  $\{x\}$  está cubierto por el sistema  $\Sigma$  de conjuntos abiertos \*\*\*\*) si todo punto  $x$  de este conjunto pertenece, por lo menos, a un conjunto de  $\Sigma$ . Demostremos el lema siguiente.

**Lema de Heine — Borel \*\*\*\*\*).** Si el segmento  $[a, b]$  está cubierto por un sistema infinito  $\Sigma$  de conjuntos abiertos, entonces de este sistema se puede separar un subsistema  $\bar{\Sigma}$  de conjuntos que también cubre el segmento  $[a, b]$ .

\*) Recordemos que se llama *oscilación*  $\omega$  de la función  $f(x)$  en el segmento  $[c, d]$  la diferencia  $M - m$  entre las cotas superior exacta e inferior exacta de la función  $f(x)$  en este segmento.

\*\*\*) La definición del punto límite de un conjunto se da en el p. 6 del § 4, cap. 3, tomo 1.

\*\*\*\*) La definición del conjunto acotado se da en el p. 6 del § 4, el cap. 3, tomo 1.

\*\*\*\*\*) Si el conjunto  $\{x\}$  consiste sólo de un punto y el sistema  $\Sigma$  comprende solamente un conjunto abierto, diremos que este conjunto cubre el punto indicado.

\*\*\*\*\*) E. Heine, matemático alemán (1821—1881). Emile Borel, matemático francés (1871—1956).

DEMOSTRACIÓN \*). Sea  $\{x\}$  conjunto de tales puntos del segmento  $[a, b]$  que si  $x$  pertenece a este conjunto, entonces el segmento  $[a, x]$  se cubre por un subsistema finito  $\Sigma'$  del conjunto de sistemas  $\Sigma$ . Demostremos que el conjunto  $\{x\}$  coincide con el segmento  $[a, b]$ . Ya que el punto  $a$  está cubierto por un conjunto del sistema  $\Sigma$  y este conjunto es abierto, entonces él cubre también un segmento  $[a, x]$  todos los puntos del cual, según lo dicho anteriormente, pertenecen al conjunto  $\{x\}$ . El conjunto  $\{x\}$  es evidentemente acotado. Sea  $\bar{x} = \sup \{x\}$ . Cerciorémonos de que  $\bar{x}$  pertenece al conjunto  $\{x\}$  y  $\bar{x} = b$ . En efecto,  $\bar{x}$  está cubierto por un conjunto del sistema  $\Sigma$  y, por consiguiente, todos los puntos de cierto intervalo  $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$  están cubiertos por el mismo conjunto. Ya que  $\bar{x} = \sup \{x\}$ , entonces existen puntos del conjunto  $\{x\}$  tan próximos a  $\bar{x}$  como se quiera, y, por eso, existe un punto  $x'$  de este conjunto que pertenece al intervalo  $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ . De la definición del conjunto  $\{x\}$  se desprende que el segmento  $[a, x']$  se cubre por un subsistema finito  $\Sigma'$  de conjuntos del sistema  $\Sigma$ . Uniendo a  $\Sigma'$  el conjunto que cubre el punto  $\bar{x}$ , obtenemos un subsistema finito  $\bar{\Sigma}$  de conjuntos del sistema  $\Sigma$  que cubre el segmento  $[a, \bar{x}]$ . Por consiguiente,  $\bar{x}$  pertenece a  $\{x\}$ . Si admitiéramos que  $\bar{x} < b$ , entonces el subsistema  $\bar{\Sigma}$  cubriría todos los puntos de un segmento  $[a, x'']$ , donde  $\bar{x} < x'' < \bar{x} + \varepsilon$ , y, por eso, el punto  $x''$  pertenecería al conjunto  $\{x\}$ . Pero esto es imposible porque  $\bar{x}$  es la cota superior exacta del conjunto  $\{x\}$ . De este modo, el conjunto  $\{x\}$  coincide con el segmento  $[a, b]$ . El lema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Se puede generalizar el lema de Heine-Borel del modo siguiente. Si un conjunto acotado cerrado  $\{x\}$  está cubierto por un sistema infinito  $\Sigma$  de conjuntos abiertos, entonces de este sistema se puede separar un subsistema finito  $\bar{\Sigma}$  de conjuntos que cubre también en conjunto  $\{x\}$ . Aduzcamos ahora otra demostración del teorema 1.2.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LA CONTINUIDAD UNIFORME. Prolonguemos  $f(x)$  sobre toda la recta haciéndola igual a  $f(b)$  para  $x > b$  e igual a  $f(a)$  para  $x < a$ . Ya que  $f(x)$  es continua en todo punto del segmento  $[a, b]$ , entonces, para cualquier punto  $x$  de este segmento y cualquier  $\varepsilon > 0$  dado, se puede indicar un  $\delta' > 0$  dependiente, hablando en general, de  $x$  y tal que para todos los puntos  $x'$  que satisfacen la condición  $|x' - x| < \delta'$  se cumple la desigualdad  $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$ . De este modo, el segmento  $[a, b]$  está cubierto por el sistema infinito  $\Sigma$  de los intervalos  $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$  del cual se puede separar, en virtud del lema de Heine-Borel, un subsistema finito  $\bar{\Sigma}$  de intervalos que también cubre el segmento  $[a, b]$ . Sea  $\delta$  valor mínimo de  $\delta'/2$  para este subsistema finito  $\bar{\Sigma}$  de intervalos. Sean ahora  $x'$  y  $x''$  cualesquiera dos puntos del segmento  $[a, b]$  que satisfacen la condición  $|x'' - x'| < \delta$ , y sea  $x$  centro del intervalo  $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$ ,  $\delta \leq \delta'/2$ , del sistema que cubre el punto  $x'$ . Puesto que  $|x' - x| < (\delta'/2) < \delta'$  y  $|x'' - x| < \delta'$ , se tiene  $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$  y  $|f(x'') - f(x)| < \varepsilon/2$ , y, por eso,

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - f(x)| + |f(x') - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

\*) Esta demostración del lema de Heine-Borel pertenece a Henri Lebesgue, matemático francés (1875-1941). Señalemos que Lebesgue dio y argumentó un modo más generalizado de abordar el problema de integración que el expuesto en el presente capítulo. El concepto correspondiente de integral se denomina integral de Lebesgue.

\*\*) Véase la observación del punto anterior.

\*\*\*) Tomamos los intervalos  $(x - \delta'/2, x + \delta'/2)$  en vez de  $(x - \delta', x + \delta')$  para razonar ulteriormente con más comodidad.

Así pues, para cualquier  $\varepsilon > 0$  dado hemos indicado un  $\delta > 0$  tal que para cualesquiera puntos  $x'$  y  $x''$  del segmento  $[a, b]$  que satisfacen la condición  $|x'' - x'| < \delta$  se cumple la desigualdad  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ . Por consiguiente, la función  $f(x)$  es uniformemente continua en el segmento  $[a, b]$ . El teorema queda demostrado.

**3 Integrabilidad de las funciones continuas.** Demostremos el siguiente teorema fundamental.

**Teorema 1.3.** *La función  $f(x)$  continua en el segmento  $[a, b]$  es integrable en este segmento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado cualquier  $\varepsilon > 0$ . En virtud de la continuidad uniforme de la función  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$ , para el número positivo  $\varepsilon/(b-a)$  se puede indicar un  $\delta > 0$  tal que para la partición  $T$  del segmento  $[a, b]$  en segmentos parciales  $[x_{i-1}, x_i]$ , cuyas longitudes son menores de  $\delta$ , la oscilación  $\omega_i$  de la función en todo segmento parcial será menor de  $\varepsilon/(b-a)$  (véase el corolario del teorema 1.2). Por eso, para estas particiones  $T$

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon.$$

Por consiguiente, para la función  $f(x)$ , continua en el segmento  $[a, b]$ , se cumplen las condiciones suficientes de integrabilidad.

**4. Integrabilidad de algunas funciones discontinuas.** Se dice que el punto  $x$  está cubierto por un intervalo si este punto pertenece a dicho intervalo. Demostremos el siguiente teorema.

**Teorema 1.4.** *Si la función  $f(x)$  está definida y acotada en el segmento  $[a, b]$  y si para cualquier número positivo  $\varepsilon$  se puede indicar un número finito de intervalos que cubren todos los puntos de discontinuidad de esta función y cuya suma total de longitudes es menor de  $\varepsilon$ , entonces  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[a, b]$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado cualquier  $\varepsilon > 0$ . Vamos a cubrir los puntos de discontinuidad de la función  $f(x)$  por un número finito de intervalos cuya suma total de longitudes es menor de  $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ , donde  $M$  y  $m$  son cotas superior e inferior exactas de  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$  (el caso de  $M = m$  puede excluirse puesto que entonces  $f(x) \equiv c \equiv \text{const}$ ). Los puntos del segmento no pertenecientes a dichos intervalos forman un conjunto compuesto de un número finito de segmentos no intersecantes. En cada uno de ellos la función  $f(x)$  es continua y, por eso, uniformemente continua. Vamos a partir todo segmento de este tipo de tal modo que, en cualquier segmento parcial de la partición, la oscilación  $\omega_i$  de la función  $f(x)$  sea menor de  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Uniendo estas particiones y los intervalos que cubren los puntos de discontinuidad de la función  $f(x)$  obtenemos la partición  $T$  de todo el segmento  $[a, b]$ . Para esta partición, los sumandos

de la suma  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$  (igual a  $S - s$ ) se dividen en dos grupos  $\sum' \omega_i \Delta x_i$  y  $\sum'' \omega_i \Delta x_i$  con tal que el primer grupo comprende todos los sumandos correspondientes a las partes de la partición  $T$  formadas por los intervalos que cubren los puntos de discontinuidad, y el segundo grupo, los demás sumandos. Ya que para los sumandos del primer grupo las oscilaciones  $\omega_i = M_i - m_i$  satisfacen la desigualdad  $\omega_i \leq M - m$ , entonces

$$\sum' \omega_i \Delta x_i \leq (M - m) \sum' \Delta x_i < (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para los sumandos del segundo grupo,  $\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Por eso,

$$\sum'' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum'' \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De este modo,

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum' \omega_i \Delta x_i + \sum'' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

Así pues, para la función  $f(x)$  dada en la condición del teorema, se cumplen las condiciones suficientes de integrabilidad. El teorema queda demostrado.

**Corolario.** La función  $f(x)$ , acotada en el segmento  $[a, b]$  y que tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad, es integrable en este segmento \*). En particular, una función continua a trozos en el segmento dado es integrable en este segmento.

**OBSERVACION.** Es obvio que si la función  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[a, b]$  y la función  $g(x)$  se diferencia de la función  $f(x)$  sólo en un número finito de puntos, entonces la función  $g(x)$  es también integrable en el segmento  $[a, b]$  con tal que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Consideremos un ejemplo de la función integrable que tiene un número infinito de puntos de discontinuidad. Sea que en el segmento  $[0, 1]$  está dada la función  $f(x)$  (fig. 1.4)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{en los semisegmentos } \left( \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right], n = 1, 2, \dots, \\ -1 & \text{en los semisegmentos } \left( \frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n} \right], n = 1, 2, \dots, \\ & \text{en el punto } x = 0. \end{cases}$$

\*) Si  $p$  es número de puntos de discontinuidad, es suficiente cubrir todo punto de discontinuidad por el intervalo de longitud  $\varepsilon/2p$ .



Dicha función tiene discontinuidades de primera especie en *todos* los puntos  $x_n = 1/n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Fijemos cualquier  $\varepsilon > 0$ . Vamos a cubrir el punto  $x = 0$  (en cualquier entorno de este punto se encuentra un número finito de puntos de discontinuidad de la función) por el intervalo  $(-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$ . Fuera de este intervalo se halla solamente un número finito  $p^*$ ) de puntos de discontinuidad de la función, cada uno de los cuales se cubre por un intervalo de longitud menor de  $\frac{\varepsilon}{2p}$ . La suma de las longitudes de los intervalos que cubren todos los puntos de discontinuidad de la función considerada es menor de  $\frac{\varepsilon}{2} + p \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$ .

Por consiguiente, la función  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[0, 1]$ .

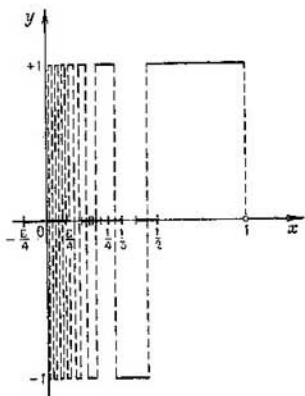


Fig. 1.4

5. Integrabilidad de las funciones acotadas monótonas.

**Teorema 1.5.** Una función  $f(x)$  monótona en el segmento  $[a, b]$ , es integrable en este segmento \*\*).

DEMOSTRACIÓN Para la precisión, demostremos el teorema para la función  $f(x)$  no decreciente en el segmento  $[a, b]$ . Prefijemos un número positivo arbitrario  $\varepsilon$  y dividamos el segmento  $[a, b]$  en partes iguales cuyas longitudes son menores de  $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$  (el caso de  $f(a) = f(b)$  puede excluirse, puesto que entonces  $f(x) = \text{const}$ ).

Estimemos para esta partición la diferencia  $S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$ .

Tenemos

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Pero, para la función decreciente  $\sum_{i=1}^n \omega_i = f(b) - f(a)$  por lo que  $S - s < \varepsilon$ . El teorema queda demostrado.

\*), Naturalmente, el número  $p$  depende de  $\varepsilon$ .

\*\*), Notemos que si la función es monótona en el segmento  $[a, b]$ , sus valores se comprenden entre  $f(a)$  y  $f(b)$ . Por eso, la función monótona definida sobre el segmento  $[a, b]$  está acotada en este segmento.

### § 5. Propiedades fundamentales de la integral definida

Demostremos la validez de las siguientes propiedades de la integral definida:

1°. Consideramos que

$$\int_b^a f(x) dx = 0. \quad (1.6)$$

Notemos que la fórmula (1.6) debe considerarse como un acuerdo. Es necesario aceptarla como la extensión lógica del concepto de la integral definida para el segmento de longitud nula.

2°. Consideramos que para  $a < b$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (1.7)$$

Esta fórmula debe considerarse también como un acuerdo. Es la generalización lógica del concepto de la integral para el caso cuando, para  $a < b$ , el segmento  $[a, b]$  es recorrido en la dirección de  $b$  a  $a$  (en este caso, en la suma integral todas las diferencias  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  tienen signo negativo).

3°. Sean las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  integrables en el segmento  $[a, b]$ . Entonces, las funciones  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$  y  $f(x)g(x)$  lo son también en este segmento con tal que

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \quad (1.8)$$

Demostremos primeramente la integrabilidad de la función  $f(x) \pm g(x)$  y la validez de la fórmula (1.8). Para cualquier partición del segmento  $[a, b]$  y cualquier modo de elección de los puntos  $\xi_i$  para las sumas integrales es válida la relación

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i,$$

y, por eso, de la existencia del límite del miembro derecho se desprende la existencia del límite del miembro izquierdo. Por consiguiente, la función  $f(x) \pm g(x)$  es integrable y tiene lugar la fórmula (1.8).

Demostremos ahora que el producto de funciones integrables es función integrable. Ya que las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son integrables en el segmento  $[a, b]$ , entonces son acotadas también en este segmento (véase la afirmación en el p. 1 del § 1), así que  $|f(x)| \leq A$  y  $|g(x)| \leq B$ . Consideremos cualquier partición dada  $T$  del

segmento  $[a, b]$ . Sean  $x'$  y  $x''$  puntos arbitrarios del segmento parcial  $[x_{i-1}, x_i]$ . Tenemos la identidad

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + \\ + [g(x'') - g(x')]f(x').$$

Ya que

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq \omega_i, \quad |f(x'') - f(x')| \leq \bar{\omega}_i, \\ |g(x'') - g(x')| \leq \bar{\bar{\omega}}_i,$$

donde  $\omega_i$ ,  $\bar{\omega}_i$ ,  $\bar{\bar{\omega}}_i$  son oscilaciones de las funciones  $f(x)g(x)$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$ , respectivamente, en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ , entonces, según la identidad mencionada \*),

$$\omega_i \leq B\bar{\omega}_i + A\bar{\bar{\omega}}_i.$$

Por eso,

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq B \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i \Delta x_i + A \sum_{i=1}^n \bar{\bar{\omega}}_i \Delta x_i.$$

Puesto que  $f(x)$  y  $g(x)$  son integrables en el segmento  $[a, b]$ , para cualquier  $\varepsilon > 0$  dado se puede indicar una partición  $\mathcal{T}$  de este segmento, tal que

$$\sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2B} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \bar{\bar{\omega}}_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2A}. \quad \text{Por consiguiente, para esta}$$

partición,

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < B \frac{\varepsilon}{2B} + A \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon.$$

Por eso, el producto de funciones integrables es función integrable.

4°. Si la función  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[a, b]$ , entonces la función  $cf(x)$  ( $c = \text{const}$ ) es integrable en este segmento, con tal que

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx. \quad (1.9)$$

En efecto, las sumas integrales de las funciones  $f(x)$  y  $cf(x)$  se diferencian en el factor constante  $c$ . Por eso, la función  $cf(x)$  es integrable y es válida la fórmula (1.9).

5°. Sea la función  $f(x)$  integrable en el segmento  $[a, b]$ . Entonces, esta función es integrable en cualquier segmento  $[c, d]$  comprendido en el segmento  $[a, b]$ .

\*) En esta identidad se puede escoger los puntos  $x'$  y  $x''$  de tal modo que el miembro izquierdo se diferencie de  $\omega_i$  en una magnitud tan pequeña como se desea.

Puesto que la función  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[a, b]$ , para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe una partición  $T$  del segmento  $[a, b]$  tal que  $S - s < \varepsilon$  (véase el teorema 1.1). Añadimos los puntos  $c$  y  $d$  a los puntos de la partición  $T$ . En virtud de la propiedad 2° de las sumas superiores e inferiores (véase el p. 2 del § 2), para la partición obtenida  $T^*$  es tanto más válida la desigualdad  $S - s < \varepsilon$ . La partición  $T^*$  del segmento  $[a, b]$  engendra la partición  $T$  del segmento  $[c, d]$ . Si  $\bar{S}$  y  $\bar{s}$  son sumas superior e inferior de la partición  $T$ , entonces  $\bar{S} - \bar{s} \leq S - s$ , puesto que en la expresión  $\bar{S} - \bar{s} = \sum \omega_i \Delta x_i$  todo sumando no negativo  $\omega_i \Delta x_i$  será también sumando en la expresión para  $S - s$ . Por consiguiente,  $\bar{S} - \bar{s} < \varepsilon$ , y, peor eso, la función  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[c, d]$ .

6°. Sea la función  $f(x)$  integrable en los segmentos  $[a, c]$  y  $[c, b]$ . Entonces, esta función es integrable en el segmento  $[a, b]$  con tal que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (1.10)$$

En primer lugar, consideremos el caso de  $a < c < b$ . Ya que la función  $f(x)$  es integrable en los segmentos  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , entonces existen tales particiones de estos segmentos que la diferencia  $S - s$  es menor de  $\varepsilon/2$ , para cada una de las particiones. Uniéndolas, obtenemos la partición del segmento  $[a, b]$  para la cual la diferencia  $S - s$  será menor de  $\varepsilon$ . Por consiguiente, la función  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$ . Incluiremos el punto  $c$  en el número de los puntos que dividen el segmento  $[a, b]$  para toda partición del segmento. Entonces, la suma integral para  $f(x)$  en  $[a, b]$  es igual a la suma de las sumas integrales para esta función en  $[a, c]$  y  $[c, b]$ . Pasando al límite, obtenemos la fórmula (1.10).

Si el punto  $c$  se halla fuera del segmento  $[a, b]$ , entonces el segmento  $[a, b]$  es parte del segmento  $[a, c]$  (o de  $[c, b]$ ), y por eso, en virtud de la propiedad 5°, la función  $f(x)$  es integrable en  $[a, b]$ . Consideremos el caso de  $a < b < c$ . Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

De aquí, empleando la propiedad 2° y la fórmula (1.7), obtenemos de nuevo la relación (1.10). Es fácil convencerse de la validez de esta relación también para  $c < a < b$ .

## § 6. Estimaciones de integrales. Fórmulas del valor medio

1. Estimaciones de integrales. En este punto obtenemos algunas estimaciones para las integrales definidas cuyas funciones subintegrales verifican unas u otras condiciones.

1°. Sea que la función  $f(x)$ , integrable en el segmento  $[a, b]$ , es no negativa en este segmento. Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

En efecto, toda suma integral de esta función es no negativa, y, por eso, el límite  $I = \int_a^b f(x) dx$  de las sumas integrales es también no negativo\*).

OBSERVACIÓN 1. Si  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[a, b]$  y  $f(x) \geq m$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b-a).$$

En efecto, la función  $f(x) - m \geq 0$  y es integrable en el segmento  $[a, b]$ . Por eso,  $\int_a^b [f(x) - m] dx \geq 0$ . De aquí,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a)$$

(véase la propiedad 3° y el ejemplo del § 1).

2°. Si la función  $f(x)$  es continua, no negativa y no es idénticamente igual a cero en el segmento  $[a, b]$ , entonces,

$$\int_a^b f(x) dx \geq c > 0.$$

En efecto, debido a que la función  $f(x)$  es no negativa y no es idénticamente igual a cero, en el segmento  $[a, b]$  existe un punto  $\xi$  tal que  $f(\xi) = 2k > 0$ . Entonces, según el teorema de la estabilidad del signo de una función continua, se puede hallar un segmento  $[p, q]$  que comprende el punto  $\xi$  y entre los límites del cual los valores de la función  $f(x)$  no serán menor que un número  $k > 0$ . Por eso, con-

\*) Admitimos que el límite  $I$  de las sumas integrales es negativo. Entonces, según la definición del límite  $I$ , para el número  $\varepsilon = |I|$  existe una suma integral  $I\{x_i, \xi_i\}$ , para la cual  $|I\{x_i, \xi_i\} - I| < |I|$ . De esta desigualdad se desprende que  $I\{x_i, \xi_i\} < 0$ , mientras acabamos de cerciorarnos de que toda suma integral es no negativa. Por consiguiente, el límite  $I$  es no negativo.

forme a la observación que acabamos de formular,

$$\int_p^q f(x) dx \geq k(q-p) > 0.$$

Según la propiedad 6° de las integrales definidas,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^q f(x) dx + \int_q^b f(x) dx.$$

Por eso, ya que  $f(x) \geq 0$  y  $\int_p^q f(x) dx \geq c > 0$ , donde  $c = k(q-p)$ ,

$$\int_a^b f(x) dx \geq c > 0.$$

3°. Si las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  son integrables en el segmento  $[a, b]$  y  $f(x) \geq g(x)$  sobre todo el segmento, entonces,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

En efecto, la función  $f(x) - g(x) \geq 0$  y es integrable en el segmento  $[a, b]$ . De aquí, en virtud de la propiedad 1°, se desprende la validez de dicha estimación.

OBSERVACION 2. Si la función  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[a, b]$ , entonces, la función  $|f(x)|$  es también integrable en este segmento, y, además,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Demostremos primero la integrabilidad del módulo  $|f(x)|$  de la función integrable  $f(x)$ . Mediante  $M_i$  y  $m_i$  denotemos las cotas exactas de  $f(x)$  en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ , y mediante  $M'_i$  y  $m'_i$ , las cotas exactas de  $|f(x)|$  en el mismo segmento. Es fácil cerciorarse de que  $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$  (basta considerar tres casos posibles: 1)  $M_i$  y  $m_i$  son no negativos, 2)  $M_i$  y  $m_i$  son no positivos, 3)  $M_i > 0$ ,  $m_i \leq 0$ ). De la desigualdad obtenida se desprende que  $S' - s' \leq S - s$ . De este modo, si para una partición  $S - s < \varepsilon$ , entonces para esta partición  $S' - s' < \varepsilon$ , es decir, para  $|f(x)|$  se cumple la condición suficiente de integrabilidad \*).

\* Hablando en general, de la integrabilidad de la función  $|f(x)|$  no se desprende la integrabilidad de  $f(x)$ . Por ejemplo, la función  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \text{ racionales,} \\ -1 & \text{para } x \text{ irracionales,} \end{cases}$  no es integrable en el segmento  $[0, 1]$  mientras  $|f(x)| = 1$  es función integrable en este segmento.

Demostremos ahora la estimación que nos interesa. Ya que  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ , entonces

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx, \text{ pero esto signi-}$$

fica que  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

4°. Sean las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  integrables en el segmento  $[a, b]$  y sea  $g(x) \geq 0$ . Entonces, si  $M$  y  $m$  son cotas exactas de  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$ , entonces,

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (1.11)$$

La validez de (1.11) se desprende de que para todos los  $x$  del segmento  $[a, b]$  son válidas las desigualdades  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$  (véase la estimación 3° del presente punto y la propiedad 4° del § 5).

OBSERVACION 3. En el complemento 1 del presente capítulo obtendremos algunas desigualdades importantes para las sumas y las integrales definidas.

**2. Primera fórmula del valor medio.** Sea la función  $f(x)$  integrable en el segmento  $[a, b]$  y sean  $m$  y  $M$  cotas exactas de  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$ . Entonces, existe un número  $\mu$  que satisface las desigualdades  $m \leq \mu \leq M$  y tal que

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a). \quad (1.12)$$

En efecto, tomando  $g(x) = 1$  y teniendo en cuenta que  $\int_a^b 1 \cdot dx = b-a$  (véase el ejemplo en el p. 1 del § 1), obtenemos, de (1.11),

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Denotando mediante  $\mu$  el número  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ , obtenemos la fórmula (1.12).

Si la función  $f(x)$  es continua en el segmento  $[a, b]$ , entonces existen puntos  $p$  y  $q$  de este segmento tales que  $f(p) = m$  y  $f(q) = M$  (véase el teorema 8.8), y, por eso, en virtud del teorema 8.6, en el segmento  $[p, q]$ , y, por tanto, en  $[a, b]$  existe un punto  $\xi$  tal que

$f(\xi) = \mu$ . En este caso, la fórmula (1.12) toma la forma

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \quad (1.13)$$

Esta fórmula se denomina *primera fórmula de valor medio*.

**3. Primera fórmula del valor medio en forma generalizada.** Demostremos la siguiente afirmación. Sean las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  integrables en el segmento  $[a, b]$ , y sean  $m$  y  $M$  cotas exactas de  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$ . Sea, además, que la función  $g(x) \geq 0$  ( $\delta g(x) \leq 0$ ) en todo el segmento  $[a, b]$ . Entonces, existe un número  $\mu$  que satisface las desigualdades  $m \leq \mu \leq M$  y tal que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx. \quad (1.14)$$

En particular, si  $f(x)$  es continua en el segmento  $[a, b]$ , entonces en este segmento existe un número  $\xi$  tal que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (1.15)$$

La fórmula (1.15) se denomina *primera fórmula del valor medio en forma generalizada*.

Demostremos la validez de la fórmula (1.14). Si  $\int_a^b g(x) dx = 0$ ,

entonces, en virtud de las desigualdades (1.11),  $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$  y, por eso, en calidad de  $\mu$  podemos tomar cualquier número. Si  $\int_a^b g(x) dx > 0$ , entonces, al dividir todos los miembros de

las desigualdades (1.11) por  $\int_a^b g(x) dx$ , obtenemos

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M.$$

Poniendo  $\mu$  igual a  $\frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ , obtenemos la fórmula (1.14)



Si  $f(x)$  es continua en el segmento  $[a, b]$ , entonces, cualquiera que sea el número  $\mu$  comprendido entre  $m$  y  $M$ , en este segmento existe un punto  $\xi$  tal que  $f(\xi) = \mu$ , es decir, la fórmula (1.14) se transforma en la fórmula (1.15).

OBSERVACIÓN 4. Si la función  $f(x)$  no es continua, entonces, hablando en general, la fórmula (1.15), es inválida. En efecto, sea, por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\text{y } g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, como es fácil cerciorarse, el número  $\mu$  en la fórmula (1.14) es igual a  $2/3$ . De este modo, para cualquier  $\xi$  del segmento  $[0, 1]$   $f(\xi) \neq \mu$ .

4. **Segunda fórmula del valor medio.** Es válida la siguiente afirmación. Si en el segmento  $[a, b]$  la función  $g(x)$  es monótona y  $f(x)$  es integrable, entonces en este segmento existe un punto  $\xi$  tal que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx. \quad (1.16)$$

La fórmula (1.16) se denomina *segunda fórmula del valor medio* o *fórmula de Bonnet* \*). La afirmación enunciada se demuestra en el complemento 2 del presente capítulo.

## § 7. Existencia de la primitiva de una función continua.

### Reglas fundamentales de integración

1. **Existencia de la primitiva de una función continua.** Antes de demostrar el teorema de la existencia de la primitiva de una función continua, introduzcamos el concepto de *integral con límite superior variable*.

Sea la función  $f(x)$  integrable en cualquier segmento que se contiene en el intervalo  $(a, b)$ , y sea  $c$  un punto fijado de este intervalo. Entonces, cualquiera que sea el número  $x$  del intervalo  $(a, b)$ , la función  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[c, x]$ . Por eso, en el intervalo

\*) Bonnet, matemático francés, (1819—1892).

( $a, b$ ) está definida la función

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt^{*},$$

que se denomina *integral con límite superior variable*. Demostremos el siguiente teorema.

**Teorema 1.6.** *Toda función  $f(x)$ , continua en el intervalo  $(a, b)$ , tiene primitiva en este intervalo. Una de las primitivas es la función*

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt,$$

donde  $c$  es cualquier punto fijado del intervalo  $(a, b)$ .

DEMOSTRACION. Es suficiente demostrar que para cualquier  $x$  fijado del intervalo  $(a, b)$  existe el valor límite  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$  con tal que este valor límite es

igual a  $f(x)$ . En virtud de la propiedad 6<sup>o</sup> de las integrales definidas (véase el § 5)\*\*), tenemos

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) - F(x) &= \int_c^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = \\ &= \int_c^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

Por la fórmula (1.13) del valor medio hallamos

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x,$$

donde  $\xi$  es número comprendido entre los números  $x$  y  $x + \Delta x$ . Ya que la función  $f(x)$  es continua en el punto  $x$ , entonces,  $f(\xi) \rightarrow f(x)$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Por eso, de la última fórmula hallamos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

El teorema queda demostrado.

OBSERVACION 1. Se demuestra análogamente el teorema de la existencia de la primitiva de una función, continua en el segmento  $[a, b]$ . Notemos que en este caso, se puede tomar  $a$  en calidad de límite inferior de integración  $c$ .

\*) Hemos denotado la variable de integración mediante la letra  $t$ , puesto que la letra  $x$  designa el límite superior de integración.

\*\*) El incremento  $\Delta x$  se toma tan pequeño que  $(x + \Delta x)$  pertenece a  $(a, b)$ .

**OBSERVACIÓN 2** En la demostración del teorema 1.6 hemos establecido la existencia de la derivada de la integral con límite superior variable y hemos demostrado que esta derivada es igual a la función subintegral

$$\frac{d}{dx} \left( \int_c^x f(t) dt \right) = f(x). \quad (1.17)$$

**OBSERVACIÓN 3.** Notemos que si la función  $f(x)$  es integrable en todo segmento que se contiene en el intervalo  $(a, b)$ , entonces la integral con límite superior variable es función de límite superior, continua en el intervalo  $(a, b)$ . Para cerciorarse de esto, demostremos que el incremento  $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$  de la función

$F(x) = \int_c^x f(t) dt$  tiende a cero cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . En virtud de la fórmula (1.12), tenemos

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \mu \Delta x,$$

donde el número  $\mu$  se comprende entre las cotas superior e inferior exactas de la función  $f(x)$  en el segmento  $[x, x + \Delta x]$ . De la última fórmula se desprende que también  $\Delta F \rightarrow 0$ , cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**OBSERVACIÓN 4.** La integral con límite superior variable se usa frecuentemente para definir nuevas funciones. Ya hemos notado en el cap. 6 que las primitivas de algunas funciones elementales no se expresan mediante funciones elementales y por eso no son funciones elementales. Recordemos que entre funciones no elementales se encuentran, por ejemplo, las funciones

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{y} \quad \int_0^x \cos t^2 dt.$$

**2. Fórmula principal del cálculo integral.** Hemos demostrado que cualesquiera dos primitivas de la función dada  $f(x)$  se diferencian en una constante (véase el teorema 6.1 del tomo 1). Por eso, según el teorema 1.6 y la observación 1 de este teorema, se puede afirmar que toda primitiva  $\Phi(x)$  de la función  $f(x)$ , continua en el segmento  $[a, b]$ , tiene la forma

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C,$$

donde  $C$  es una constante.

Poniendo en la última fórmula primeramente  $x = a$  y, después,  $x = b$  y empleando la propiedad 1° de las integrales definidas,

hallamos

$$\Phi(a) = C, \quad \Phi(b) = \int_a^b f(x) dx + C^*.$$

De estas igualdades se desprende la relación

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (1.18)$$

llamada *fórmula principal del cálculo integral* \*\*).

Así pues, para calcular la integral definida de la función continua  $f(x)$  hay que determinar la diferencia de los valores de los límites superior e inferior de integración de su primitiva arbitraria.

Notemos que la fórmula principal del cálculo integral ensancha las posibilidades para calcular integrales definidas, puesto que la determinación de la integral definida se reduce a la búsqueda de la función primitiva. Los métodos para determinar las primitivas fueron elaborados bastante completamente en los capítulos 6 y 7 del tomo 1 del presente curso.

Ya que en muchos casos la determinación de las primitivas es un problema difícil de resolver, es lógico buscar los métodos aproximados para calcular las integrales definidas. En el cap. 3 proporcionamos algunos métodos para calcular aproximadamente integrales definidas.

A veces, la fórmula (1.18) se escribe de otra forma. A saber, la diferencia  $\Phi(b) - \Phi(a)$  se denota por el símbolo  $\Phi(x) \Big|_a^b$ . Entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b. \quad (1.19)$$

Consideremos varios ejemplos:

$$1) \int_a^b \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b,$$

$$2) \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

$$3) \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.$$

\*) En esta fórmula hemos denotado la variable de integración mediante la letra  $x$ , puesto que el límite superior tiene valor fijado  $b$ .

\*\*\*) Esta fórmula se denomina también *fórmula de Newton — Leibnitz*.

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$5) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}.$$

$$6) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^3 = \ln(3 + \sqrt{10}).$$

**3. Cambio de variable bajo el signo de la integral definida.** Sea que se cumplen las siguientes condiciones:

1) la función  $f(x)$  es continua en el segmento  $[a, b]$ ;

2) el segmento  $[a, b]$  es conjunto de valores de una función  $x = g(t)$  definida en el segmento  $\alpha \leq t \leq \beta$  y que tiene derivada continua en este segmento;

3)  $g(\alpha) = a$ ,  $g(\beta) = b$ .

En estas condiciones es válida la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)] g'(t) dt. \quad (1.20)$$

La fórmula (1.20) muestra que si está calculada la integral en el miembro izquierdo de esta fórmula, está calculada también la integral en el miembro derecho, y viceversa. Dicha fórmula se denomina *fórmula del cambio de variable bajo el signo de la integral definida*.

Consideremos una primitiva  $\Phi(x)$  de la función  $f(x)$ . Según la fórmula (1.18), tenemos

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (1.21)$$

Ya que las funciones  $\Phi(x)$ , y  $x = g(t)$  son diferenciables en los segmentos correspondientes, entonces la función compuesta  $\Phi(g(t))$  es diferenciable en el segmento  $[\alpha, \beta]$ . Por eso, aplicando la regla para diferenciar la función compuesta, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \Phi(g(t)) = \Phi'(g(t)) g'(t), \quad (1.22)$$

con tal que la derivada  $\Phi'$  se calcula respecto al argumento  $x$ :  $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x)$ , donde  $x = g(t)$ . Ya que  $\Phi'(g) = f(x)$ , entonces, para  $x = g(t)$ , obtenemos  $\Phi'(g(t)) = f(g(t))$ . Poniendo este valor de  $\Phi'(g(t))$  en el miembro derecho de la igualdad (1.22), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \Phi(g(t)) = f(g(t)) g'(t).$$

Por consiguiente, la función  $\Phi(g(t))$ , definida y continua sobre el segmento  $[\alpha, \beta]$ , es primitiva de la función  $f(g(t))g'(t)$  en este segmento, y, por eso, según la fórmula (1.18),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)).$$

Ya que  $g(\beta) = b$  y  $g(\alpha) = a$ , entonces,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Comparando la última fórmula y la (1.21), nos cercioramos de la validez de la fórmula (1.20).

EJEMPLOS. 1) Consideremos la integral  $\int_1^2 \ln x \frac{dx}{x}$ . Hagamos  $x = e^t$ . Ya que  $t=0$  para  $x=1$ ,  $t=\ln 2$  para  $x=2$ , entonces

$$\int_1^2 \ln x \frac{dx}{x} = \int_0^{\ln 2} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} \ln^2 2.$$

2) Consideremos la integral  $\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \operatorname{sen} \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ . Sea  $x = t^2$ . Entonces,  $x = \pi^2/4$  para  $t = \pi/2$  y  $x = \pi^2$  para  $t = \pi$ . Por eso

$$\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \operatorname{sen} \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} t dt = -2 \cos t \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2.$$

**4. Fórmula de integración por partes.** Sea que las funciones  $u(x)$  y  $v(x)$  tienen derivadas continuas en el segmento  $[a, b]$ . Entonces tiene lugar la siguiente fórmula de integración por partes para las integrales definidas:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx. \quad (1.23)$$

Ya que  $v'(x) dx = dv$  y  $u'(x) dx = du$ , entonces esta fórmula se escribe también de otro modo:

$$\int_a^b u dv = [uv] \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (1.24)$$

No es difícil cerciorarse de que estas fórmulas son válidas. En efecto, la función  $u(x)v(x)$  es primitiva de la función  $u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ . Por eso, en virtud de (1.19):

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + v(x)u'(x)] dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b.$$

De aquí, empleando la propiedad 3<sup>o</sup> de las integrales definidas (véase el § 5), obtenemos las fórmulas (1.23) y (1.24).

EJEMPLOS.

$$1) \int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \frac{dx}{x} = [x \ln x - x] \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

$$2) \int_1^2 x e^x dx = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = e^x (x - 1) \Big|_1^2 = e^2,$$

$$3) \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \\ = \left[ x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}.$$

**5. Término residual de la fórmula de Taylor en forma integral.** Apliquemos la fórmula (1.23) para deducir la fórmula de Taylor de la función  $f(x)$  con término residual en forma integral. Sea que la función  $f(x)$  tiene en un  $\varepsilon$ -entorno del punto  $a$  derivada continua de  $(n+1)$ -ésimo orden y sea  $x$  cualquier punto dado del  $\varepsilon$ -entorno. Cerciorémosnos de que el número

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \quad (1.25)$$

es término residual de la fórmula de Taylor para la función  $f(x)$  con centro de desarrollo en el punto  $a$ . De este modo, la fórmula (1.25) representa el término residual de la fórmula de Taylor para la función  $f(x)$  en forma integral.

Para demostrarlo, observemos que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Apliquemos la fórmula de integración por partes (1.23) a la integral  $\int_a^x f'(t) dt$ , poniendo  $u(t) = f'(t)$  y  $v(t) = -(x-t)$  (ya que

$x$  es fijado,  $v' dt = dt$ ). Tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t) dt &= -f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t) dt = \\ &= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt. \end{aligned}$$

Poniendo la expresión hallada para  $\int_a^x f'(t) dt$  en la fórmula anteriormente aducida de  $f(x)$ , obtenemos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t) dt.$$

A la integral  $\int_a^x f''(t)(x-t) dt$  puede aplicarse también la fórmula de integración por partes, poniendo  $u(t) = f''(t)$  y  $v(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2$  (ya que  $x$  es fijado,  $v' dt = (x-t) dt$ ). Después de hacer transformaciones no complicadas, hallamos

$$\int_a^x f''(t)(x-t) dt = \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{2!} \int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2 dt$$

y por eso

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{2!} \int_a^x f^{(3)}(t)(x-t)^2 dt.$$

Luego hacemos la integración por partes hasta que obtengamos la fórmula

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \end{aligned}$$

Esta fórmula muestra que  $R_{n+1}(x)$  es realmente término residual de la fórmula de Taylor para la función  $f(x)$  con centro de desarrollo en el punto  $a$  (véase el § 13 del cap. 8, tomo 1). Empleando la forma integral (1.25) del término residual de la fórmula de Taylor, es fácil obtener el término residual de la fórmula de Taylor en forma de Lagrange. Utilizando precisamente la forma generalizada (1.15) de la



fórmula del valor medio obtenemos

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = \\ = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

La expresión obtenida es el término residual en forma de Lagrange \* (véase la fórmula (8.46) del § 14, cap. 8, tomo 1).

## Complemento 1

### Algunas desigualdades importantes para las sumas y las integrales

1. **Deducción de una desigualdad preliminar.** Sean  $A$  y  $B$  cualesquiera números no negativos, y sean  $p$  y  $p'$  cualesquiera dos números superiores a la unidad y ligados por la relación  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  (estos números se denominarán *conjugados*). Entonces,

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^{p'}}{p'}. \quad (1.26)$$

Hallemos el valor máximo de la función  $f(x) = x^{1/p} - \frac{x}{p}$  en la semirrecta  $x \geq 0$ . Ya que  $f'(x) = \frac{1}{p} (x^{1/p-1} - 1) = \frac{1}{p} (x^{-\frac{1}{p'}} - 1)$ , entonces  $f'(x) > 0$ , cuando  $0 < x < 1$ , y  $f'(x) < 0$ , cuando  $x > 1$ . Por eso, la función tiene máximo  $f(1) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$ . Pues, para todos los  $x \geq 0$

$$x^{1/p} - (x/p) \leq 1/p'.$$

Tomando en la última desigualdad  $x = A^p/B^{p'}$  y multiplicando ambos miembros de esta desigualdad por  $B^{p'}$ , obtenemos la desigualdad (1.26).

2. **Desigualdad de Hölder \*\*\*** para las sumas. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n$  cualesquiera que sean números no negativos y sea que  $p$  y  $p'$  tienen el mismo sentido que anteriormente. Entonces es válida la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left[ \sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} \left[ \sum_{i=1}^n b_i^{p'} \right]^{1/p'} \quad (1.27)$$

llamada *desigualdad de Hölder para las sumas*.

\* Notemos que deduciendo así el término residual en forma de Lagrange, para la derivada de  $(n+1)$ -ésimo orden se imponen restricciones un poco mayores que en el § 14 del cap. 8, tomo 1. No obstante, si empleamos el teorema de Darboux demostrado al final del cap. 9 del tomo 1 (sobre el paso de la derivada por todos sus valores intermedios), obtenemos el término residual en forma de Lagrange solamente a condición de la existencia y la integrabilidad de  $f^{(n+1)}(x)$ .

\*\* Aqué tomamos  $B > 0$ , puesto que, para  $B = 0$ , la validez de la desigualdad (1.26) no suscita dudas.

\*\*\* Hölder, matemático alemán (1859—1937).

En primer lugar demostramos que si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  y  $B_1, B_2, \dots, B_n$  son números no negativos, cualesquiera que sean, que satisfacen las desigualdades

$$\sum_{i=1}^n A_i^p \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n B_i^{p'} \leq 1, \quad (1.28)$$

entonces para estos números es válida la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq 1. \quad (1.29)$$

En efecto, escribiendo para todos los pares de los números  $A_i$  y  $B_i$  las desigualdades (1.26) y sumando estas desigualdades por todos los  $i$  de 1 a  $n$ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n A_i^p + \frac{1}{p'} \sum_{i=1}^n B_i^{p'} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Por lo tanto, la desigualdad (1.29) queda demostrada.  
Pongamos ahora

$$A_i = \frac{a_i}{\left[ \sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left[ \sum_{i=1}^n b_i^{p'} \right]^{1/p'}}.$$

Es fácil ver que los números  $A_i$  y  $B_i$  satisfacen las desigualdades (1.28), y, por eso, para estos números es válida la desigualdad (1.29) que en este caso puede escribirse de modo siguiente:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\left[ \sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} \left[ \sum_{i=1}^n b_i^{p'} \right]^{1/p'}} \leq 1.$$

De la última desigualdad se desprende la desigualdad de Hölder (1.27).

OBSERVACION. En el caso particular de  $p = p' = 2$ , la desigualdad de Hölder se transforma en la desigualdad siguiente:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (1.30)$$

La desigualdad (1.30) se denomina *desigualdad de Buniakovski* \*\*\*) para las sumas.

\*) Consideramos que al menos uno de los números  $a_i$  y al menos uno de los números  $b_i$  son diferentes de cero puesto que, en caso contrario, la fórmula (1.27) no necesita la demostración.

\*\*) Viktor Buniakovski, matemático ruso (1804—1889).

3. Desigualdad de Minkowski \*) para las sumas. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n$  cualesquiera números no negativos y el número  $p > 1$ . Entonces es válida la siguiente desigualdad:

$$\left[ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{1/p} \leq \left[ \sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} + \left[ \sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{1/p}, \quad (1.31)$$

llamada *desigualdad de Minkowski para las sumas*. Ante todo transformemos la suma en el miembro izquierdo de (1.31). Se puede escribir

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1}.$$

Apliquemos la desigualdad de Hölder a cada una de las sumas situadas en el miembro derecho. Además, ya que  $(p-1)p' = p$  y  $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &\leq \left[ \sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} \left[ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)p'} \right]^{1/p'} + \\ &+ \left[ \sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{1/p} \left[ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)p'} \right]^{1/p'} = \\ &= \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{1/p} + \left[ \sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{1/p} \right\} \left[ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{p-1/p}. \end{aligned}$$

Al dividir ambos miembros de la última desigualdad por  $\left[ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{p-1/p}$  obtenemos la desigualdad de Minkowski (1.31).

4. Integrabilidad de una potencia positiva arbitraria del módulo de una función integrable. Demostremos el siguiente teorema.

**Teorema 1.7.** Si la función  $f(x)$  es integrable en el segmento  $[a, b]$ , entonces, la función  $|f(x)|^r$  es también integrable en el segmento  $[a, b]$ , siendo  $r$  cualquier número real positivo.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar el teorema para el caso de  $r < 1$ , puesto que, si  $r > 1$ , la función  $|f(x)|^r$  puede representarse en forma del producto  $|f(x)|^{[r]} |f(x)^{r-[r]}$ , donde  $[r]$  es parte entera de  $r$  y  $r - [r] < 1$ . En virtud de la observación 2 del p. 1 del § 6, la función  $|f(x)|$  es integrable en el segmento  $[a, b]$ , y, por eso, conforme a la propiedad 3° del § 5, la función  $|f(x)|^{[r]}$  es integrable en este segmento. Pero, entonces, en virtud de la misma propiedad y la integrabilidad de la función  $|f(x)|^{r-[r]}$ , la función  $|f(x)|^r$  es también integrable en el segmento  $[a, b]$ . Pues, demostremos el teorema para el caso de  $r < 1$ . Pongamos  $r = 1/p$  y observamos que  $p > 1$ . Ya que la función  $|f(x)|$  es integrable en el segmento  $[a, b]$ , entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe una partición  $T$  de este segmento, para la cual

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon p (b-a)^{(1-p)}. \quad (1.32)$$

\*) Hermann Minkowski, matemático y físico alemán (1864—1909).

Aquí, mediante  $M_i$  y  $m_i$  se denotan las cotas exactas de la función  $|f(x)|$  en el segmento parcial  $[x_{i-1}, x_i]$ . Basta demostrar que la suma

$$S - s = \sum_{i=1}^n (M_i^{1/p} - m_i^{1/p}) \Delta x_i \quad (1.33)$$

es menor de  $\varepsilon$ .

Estimemos esta suma empleando la desigualdad de Hölder (1.27) y poniendo en ella  $a_i = (M_i^{1/p} - m_i^{1/p}) (\Delta x_i)^{1/p}$ ,  $b_i = (\Delta x_i)^{1/p'}$ . Obtenemos

$$S - s \leq \left[ \sum_{i=1}^n (M_i^{1/p} - m_i^{1/p})^p \Delta x_i \right]^{1/p} \left[ \sum_{i=1}^n \Delta x_i \right]^{1/p'}. \quad (1.34)$$

Demostremos ahora que

$$(M_i^{1/p} - m_i^{1/p})^p \leq (M_i - m_i). \quad (1.35)$$

Al dividir por  $M_i^*$  la última desigualdad se reduce a la siguiente:

$$\left[ 1 - \left( \frac{m_i}{M_i} \right)^{1/p} \right]^p \leq 1 - \frac{m_i}{M_i}.$$

Es fácil convencerse de la validez de la última desigualdad teniendo en cuenta que  $0 \leq \frac{m_i}{M_i} < 1$  y  $p > 1$ . Empleando la desigualdad (1.35) y tomando en consideración que

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b - a,$$

de la desigualdad (1.34) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$S - s \leq \left[ \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \right]^{1/p} (b - a)^{1/p'}.$$

De aquí, empleando la desigualdad (1.32) y teniendo en cuenta que  $(1/p) + (1/p') = 1$ , hallamos

$$S - s < \varepsilon.$$

El teorema queda demostrado.

**5. Desigualdad de Hölder para las integrales.** Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  cualesquiera dos funciones integrables en el segmento  $[a, b]$  y sean  $p$  y  $p'$  cualesquiera dos números, no superiores a la unidad y ligados por la relación  $(1/p) + (1/p') = 1$ . Entonces es válida la siguiente desigualdad

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[ \int_a^b |g(x)|^{p'} dx \right]^{1/p'} \quad (1.36)$$

llamada *desigualdad de Hölder para las integrales*. Notemos que la existencia de las integrales en el miembro derecho de (1.36) se garantiza por el teorema 1.7, y de la integral en el miembro izquierdo, por la propiedad 3ª del § 5.

\* Puede considerarse que  $M_i > 0$ , puesto que si  $M_i = 0$ , entonces  $m_i = 0$ , y la desigualdad (1.35) es válida.

Demostremos primero que si  $A(x)$  y  $B(x)$  son dos funciones no negativas e integrables en el segmento  $[a, b]$  que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b A^p(x) dx \leq 1, \quad \int_a^b B^{p'}(x) dx \leq 1, \quad (1.37)$$

entonces,

$$\int_a^b A(x) B(x) dx \leq 1. \quad (1.38)$$

En efecto, en cualquier punto  $x$  del segmento  $[a, b]$  es válida la desigualdad (1.26)

$$A(x) B(x) \leq \frac{A^p(x)}{p} + \frac{B^{p'}(x)}{p'}.$$

De aquí, en virtud de la estimación de 3° del § 6 y de las fórmulas (1.37),

$$\int_a^b A(x) B(x) dx \leq \frac{1}{p} \int_a^b A^p(x) dx + \frac{1}{p'} \int_a^b B^{p'}(x) dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

La desigualdad (1.38) queda demostrada.

Poniendo

$$A(x) = \frac{|f(x)|}{\left[ \int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p}}, \quad B(x) = \frac{|g(x)|}{\left[ \int_a^b |g(x)|^{p'} dx \right]^{1/p'}},$$

llegamos a la siguiente desigualdad:

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \left[ \int_a^b |g(x)|^{p'} dx \right]^{1/p'}.$$

Ya que, en virtud de la observación 2 del p. 1 del § 6,

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| dx,$$

en tonces, la desigualdad de Hölder (1.36) para las integrales queda establecida.

OBSERVACIÓN. En el caso particular de  $p = p' = 2$  la desigualdad de Hölder para las integrales se transforma en la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}, \quad (1.39)$$

llamada *desigualdad de Cauchy — Bunyakovski para las integrales*.

6. La desigualdad de Minkowski para las integrales. Para cualesquiera funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  no negativas e integrables en el segmento  $[a, b]$  y para

cualquier número  $p > 1$ , es válida la siguiente desigualdad:

$$\left\{ \int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx \right\}^{1/p} \leq \left[ \int_a^b f^p(x) dx \right]^{1/p} + \left[ \int_a^b g^p(x) dx \right]^{1/p} \quad (1.40)$$

llamada *desigualdad de Minkowski para las integrales*. Para obtener esta desigualdad hay que utilizar la fórmula

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]^p dx = \int_a^b f(x) [f(x) + g(x)]^{p-1} dx + \int_a^b g(x) [f(x) + g(x)]^{p-1} dx$$

y aplicar la desigualdad de Hölder a las integrales que están en el miembro derecho de esta fórmula. Dejamos a cargo del lector la demostración pormenorizada. Empleando la inducción, de la desigualdad (1.40) puede obtenerse la siguiente desigualdad para  $n$  funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , ...,  $f_n(x)$ , no negativas e integrables en el segmento  $[a, b]$ :

$$\left\{ \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)]^p dx \right\}^{1/p} \leq \left[ \int_a^b f_1^p(x) dx \right]^{1/p} + \left[ \int_a^b f_2^p(x) dx \right]^{1/p} + \dots + \left[ \int_a^b f_n^p(x) dx \right]^{1/p}.$$

## Complemento 2

### Demostración de la afirmación del p. 4 del § 6

Para que sea más cómodo, volvamos a enunciar la afirmación del p. 4 del § 6. Si en el segmento  $[a, b]$  la función  $g(x)$  es monótona y  $f(x)$ , integrable, entonces en este segmento existe un número  $\xi$  tal que

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx. \quad (1.46)*$$

Demostremos primero la siguiente proposición auxiliar.

**Lema de Ahel\*\*).** Sean  $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n \geq 0$  y  $u_1, u_2, \dots, u_n$  números cualesquiera. Si para todo  $i$  las sumas  $S_i = u_1 + u_2 + \dots + u_i$  se comprenden entre  $A$  y  $B$ , entonces la suma  $v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$  se comprende entre los números  $A v_1$  y  $B v_1$ .

DEMOSTRACIÓN. Tenemos  $u_1 = S_1$ ,  $u_i = S_i - S_{i-1}$ . Por eso,

$$\begin{aligned} v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n &= v_1 S_1 + v_2 (S_2 - S_1) + \\ &+ \dots + v_n (S_n - S_{n-1}) = S_1 (v_1 - v_2) + S_2 (v_2 - v_3) + \\ &+ \dots + S_{n-1} (v_{n-1} - v_n) + S_n v_n. \end{aligned}$$

\* Para la comodidad, mantenemos la numeración de la fórmula aducida.

\*\* Nils Henrik Abel, matemático noruego (1802—1829).

Ya que  $v_i \geq 0$  y  $v_i - v_{i+1} \geq 0$ , entonces, cambiando en la última relación todo  $S_i$  primero por  $A$  y después por  $B$ , obtenemos las desigualdades

$$A [(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \dots + (v_{n-1} - v_n) + v_n] \leq \\ \leq (v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n) \leq B [(v_1 - v_2) + \\ + (v_2 - v_3) + \dots + (v_{n-1} - v_n) + v_n].$$

De aquí, observando que las expresiones entre corchetes son iguales a  $v_1$ , obtenemos

$$A v_1 \leq v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \leq B v_1.$$

El lema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. Para demostrar el lema de Abel hemos empleado la transformación de la suma  $\sum_{k=1}^n v_k u_k$  que suele llamarse *transformación de Abel*. En el p. 2 del § 5 del cap. 4 hay información más completa sobre la transformación de Abel y sus aplicaciones más importantes.

DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN DEL P. 4 DEL § 6. Admitamos que la función  $g(x)$  no crece en  $[a, b]$  y no es negativa sobre este segmento. En virtud de la integrabilidad de  $f(x)$   $g(x)$  (\*), tenemos

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) g(x_{i-1}) \Delta x_i,$$

donde  $\Delta = \max \Delta x_i$ .

Sean  $M_i$  y  $m_i$  cotas exactas de  $f(x)$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ . Entonces, ya que  $g(x)$  es no negativa, son válidas las desigualdades

$$\sum_{i=1}^n m_i g(x_{i-1}) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) g(x_{i-1}) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i g(x_{i-1}) \Delta x_i. \quad (1.41)$$

Puesto que  $g(x)$  no crece en  $[a, b]$ , entonces la diferencia

$$\sum_{i=1}^n M_i g(x_{i-1}) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i g(x_{i-1}) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) g(x_{i-1}) \Delta x_i$$

no supera el número  $g(a) \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i$ . Ya que la función  $f(x)$  es integrable, la suma  $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i$  tiende a cero cuando  $\Delta \rightarrow 0$ .

De aquí y de las desigualdades (1.41) se desprende que para cualesquiera números  $\mu_i$  que satisfacen las desigualdades  $m_i \leq \mu_i \leq M_i$ , cada una de las sumas

$$\sum_{i=1}^n m_i g(x_{i-1}) \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^n \mu_i g(x_{i-1}) \Delta x_i, \quad \sum_{i=1}^n M_i g(x_{i-1}) \Delta x_i$$

\*) Véase la propiedad 3ª del § 5.

tiene por límite la integral  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  para  $\Delta \rightarrow 0$ . Conforme a la fórmula (1.12), se puede elegir los números  $\mu_i$ ,  $m_i \leq \mu_i \leq M_i$ , de tal modo que  $\sum_{i=1}^n f(x_i) dx = \mu_i \Delta x_i$ . Puesto que la función  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  es continua en el segmento  $[a, b]$  (véase la observación 3 del p. 1 del § 7), los números  $S_i = \sum_{h=1}^i \mu_h \Delta x_h = \int_a^{x_i} f(t) dt$  se comprenden entre la cota inferior exacta  $m$  y la cota superior exacta  $M$  de la función  $F(x)$  en el segmento  $[a, b]$ . Pongamos  $v_1 = g(a)$ ,  $v_2 = g(x_1)$ ,  $\dots$ ,  $v_n = g(x_{n-1})$ ,  $u_1 = \mu_1 \Delta x_1$ ,  $\dots$ ,  $u_n = \mu_n \Delta x_n$ . Ya que  $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n \geq 0$  y las sumas  $S_i = \sum_{h=1}^i u_h$  se comprenden entre  $m$  y  $M$ , entonces, en virtud del lema de Abel, la suma  $\sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \mu_i \Delta x_i$  se encuentra entre  $mg(a)$  y  $Mg(a)$ . Pero, entonces, para  $\Delta \rightarrow 0$  el límite de esta suma se encuentra también entre  $mg(a)$  y  $Mg(a)$ , o sea, son válidas las desigualdades

$$g(a) m \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq g(a) M.$$

La función continua  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  toma todo valor  $A$  comprendido entre sus cotas exactas  $m$  y  $M$ , es decir, existe un punto  $\xi$  tal que

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(t) dt = A = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{g(a)}.$$

Por eso,

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx. \quad (1.42)$$

Si la función no creciente  $g(x)$  tiene también valores negativos, entonces la función  $h(x) = g(x) - g(b)$  es no creciente y tiene valores no negativos. Por eso, en virtud de (1.42),

$$\int_a^b f(x) [g(x) - g(b)] dx = [g(a) - g(b)] \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

De aquí, haciendo transformaciones simples, obtenemos la fórmula (1.16).



## Capítulo 2

### APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y FÍSICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

#### § 1. Longitud de un arco de una curva

1. **Concepto de curva plana.** Es más lógico considerar la curva como trayectoria de un punto móvil. En el presente punto daremos el sentido matemático de esta idea de la curva e introduciremos el concepto de la llamada *curva simple*.

Sean funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  continuas en un segmento  $[\alpha, \beta]$  (a continuación el argumento de estas funciones se denominará parámetro). Si consideramos el parámetro  $t$  como tiempo, dichas funciones determinan la ley del movimiento del punto  $M$  con coordenadas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (2.1)$$

por el plano (fig. 2.1)\*). El conjunto  $\{M\}$  de los puntos  $M$  correspondientes a todos los valores posibles del parámetro  $t$  en el segmento  $[\alpha, \beta]$  se considera lógicamente como *trayectoria* del punto  $M$  que se mueve según la ley (2.1). Notemos que el conjunto  $\{M\}$ , siendo la trayectoria de un punto móvil, no corresponde obligatoriamente a nuestras representaciones de la curva. Por ejemplo, se puede indicar funciones continuas  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$ , dadas sobre el segmento  $[0, 1]$ , y tales que la trayectoria del punto  $M$  que se mueve según la ley  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , llenará un cuadrado entero. Por tanto, es lógico separar tales conjuntos  $\{M\}$  que corresponden a nuestras representaciones de la curva. De este modo, llegamos al concepto de *curva simple*.

Denominamos *curva plana simple  $L$*  el conjunto  $\{M\}$  de todos los puntos  $M$  cuyas coordenadas se determinan por las ecuaciones (2.1) si a valores diferentes del parámetro  $t$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  les corresponden puntos diferentes de este conjunto.

Utilizaremos también los términos siguientes: «las ecuaciones (2.1) determinan la curva plana simple  $L$ » y «la curva plana simple está parametrizada empleando las ecuaciones (2.1)».

Todo punto del conjunto  $\{M\}$  que figura en la definición de la curva plana simple se llamará punto de esta curva con tal que los puntos correspondientes a los valores de frontera  $\alpha$  y  $\beta$  del parámetro  $t$  se denominarán puntos de frontera de la curva plana.

---

\*). Aquí y en adelante denominamos *plano* el conjunto de todos los pares ordenados posibles  $(x, y)$  de los números  $x$  o  $y$  (todo par se denomina punto del plano). Los números  $x$  e  $y$  se denominan coordenadas del punto  $(x, y)$ . Para abreviar, denotamos también el punto  $(x, y)$  por una letra  $M$ . La denotación  $M(x, y)$  significa que el punto  $M$  tiene coordenadas  $x$  e  $y$ .

La gráfica de la función  $y = f(x)$ , continua en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , puede servir de ejemplo de una curva plana. En efecto, se puede considerar esta gráfica como la trayectoria del punto  $M$  que se mueve según la ley  $x = t, y = f(t), \alpha \leq t \leq \beta$  con tal que a valores diferentes del parámetro  $t$  les corresponden evidentemente puntos diferentes de la gráfica.

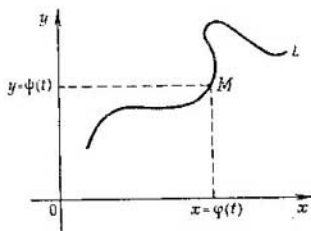


Fig. 2.1

OBSERVACIÓN 1. Las curvas simples no agotan todos los conjuntos puntuales que pueden denominarse «curvas». Sin embargo, para nuestros fines nos basta el concepto de curva simple.

OBSERVACIÓN 2. Una misma curva simple puede ser parametrizada por varios métodos. Consideraremos todas las posibles parametrizaciones de la curva

simple  $L$  obtenidas de una parametrización dada representando el parámetro  $t$  en forma de funciones continuas estrictamente monótonas de otro parámetro  $s$ .

OBSERVACIÓN 3. Un concepto importante es el de *curva cerrada simple*. Esta curva se forma del modo siguiente. Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos curvas simples con tal que: 1) los puntos de frontera de la curva  $L_1$  coinciden con los puntos de frontera de la curva  $L_2$ ; 2) cualesquiera puntos de las curvas  $L_1$  y  $L_2$  que no son de frontera, son diferentes. La curva  $L$  obtenida uniendo las curvas  $L_1$  y  $L_2$  se denomina curva cerrada simple.

2. **Forma paramétrica de representación de la curva.** En el análisis matemático y sus aplicaciones es cómodo considerar las curvas dadas en forma paramétrica. El origen evidente de este método para representar la curva es la idea de la curva como el lugar geométrico de las posiciones sucesivas del punto móvil. Por ejemplo, el lugar geométrico de las posiciones sucesivas del punto  $M$ , con coordenadas  $x$  e  $y$ , que se mueve según la ley

$$x = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y = at \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.2)$$

es una curva llamada *estrofoide* (fig. 2.2). Observemos que el punto  $M$ , que se mueve por la estrofoide, se encuentra dos veces en una misma posición  $x = 0, y = 0$  cuando  $t = -1$  y cuando  $t = 1$ . Ya que consideramos posiciones sucesivas del punto móvil, es lógico considerar que valores diferentes del parámetro  $t$  corresponden a puntos diferentes de la estrofoide.

La estrofoide no es curva simple. Sin embargo, no es difícil cerciorarse de que el campo de valores del parámetro  $t$  puede dividirse en partes de tal modo que las partes correspondientes de la estrofoide se-

an curvas simples. A saber, dividamos la recta numérica  $-\infty < t < \infty$  en segmentos  $[n-1, n]$  donde  $n$  es cualquier número entero. Obviamente, si consideramos el parámetro  $t$  en este segmento, la parte correspondiente de la estrofoide será curva simple.

Empleamos esta idea de división en partes para definir matemáticamente el concepto de curva dada paramétricamente.

Consideremos que el conjunto  $\{t\}$  es segmento, o semisegmento, o bien intervalo, o la recta numérica, o semirrecta abierta o cerrada.

Introduzcamos el concepto de partición del conjunto  $\{t\}$ . Diremos que un conjunto finito o infinito de segmentos  $\{[t_{i-1}, t_i]\}$  parte el conjunto  $\{t\}$  si: 1) la unión de todos los segmentos es todo el conjunto  $\{t\}$  y 2) solamente los extremos de cualesquiera dos segmentos del sistema pueden ser sus puntos comunes.

Consideremos ejemplos de particiones de algunos conjuntos  $\{t\}$  de los mencionados anteriormente.

1. El sistema de los segmentos  $[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$  parte obviamente el segmento  $[0, 1]$ .

2. El sistema de los segmentos  $[0, 1/2], [1/2, 3/4], [3/4, 7/8], \dots, \left[ \frac{2^n - 1}{4}, \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \right], \dots$  parte el semisegmento  $[0, 1)$ .

3. El sistema de los segmentos  $\{[n-1, n]\}$ , donde  $n$  es cualquier número entero, parte obviamente toda la recta numérica.

Pasemos ahora a definir el concepto de la curva dada paramétricamente.

Sean las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  continuas en el conjunto  $\{t\}$  \*). Diremos que las ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (2.3)$$

prefijan paramétricamente una curva  $L$  si existe un sistema de segmentos  $\{[t_{i-1}, t_i]\}$  que parten el conjunto  $\{t\}$  y tal que para los valores  $t$  de todo segmento dado de este sistema las ecuaciones (2.3) determinan una curva simple.

Además, los puntos de la curva  $L$  se consideran en un orden determinado correspondientemente al crecimiento del parámetro  $t$ . A saber, si el punto  $M_1$  corresponde al valor del parámetro  $t_1$ , y el punto  $M_2$ , al valor  $t_2$ , entonces  $M_1$  se toma como antecedente a  $M_2$  si  $t_1 < t_2$ .

\*) El conjunto  $\{t\}$  es uno de los conjuntos anteriormente mencionados.

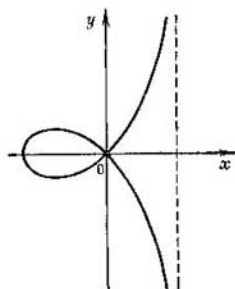


Fig. 2.2

Notemos que los puntos correspondientes a valores diferentes del parámetro siempre se consideran diferentes.

En otras palabras, la curva dada paramétricamente puede considerarse como la unión de curvas simples con tal que estas últimas sean recorridas sucesivamente por el punto  $M$  cuyas coordenadas se determinan por las relaciones (2.3) cuando el parámetro  $t$  recorre monótonamente el conjunto  $\{t\}$ .

**OBSERVACION 1** La curva simple puede considerarse como una curva dada paramétricamente. En este caso, el sistema de segmentos que parte el segmento  $[\alpha, \beta]$  se reduce sólo a este segmento.

A título de ejemplo consideremos la curva  $L$  dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad (2.4)$$

donde  $t$  varía en el segmento  $[0, 4\pi]$ . Evidentemente, el sistema de los segmentos  $[0, \pi]$ ,  $[\pi, 2\pi]$ ,  $[2\pi, 3\pi]$ ,  $[3\pi, 4\pi]$  parte el segmento  $[0, 4\pi]$  con tal que, para los valores  $t$  de cada uno de dichos segmentos del sistema dado, las ecuaciones (2.4) determinan una curva simple (la semicircunferencia). De la representación geométrica se desprende que, en el ejemplo considerado, la curva  $L$  es circunferencia dos veces recorrida.

**OBSERVACION 2.** El ejemplo considerado y el de la estrofoide muestran que la curva dada paramétricamente puede tener puntos de autointersección e, incluso, intervalos de autosuperposición.

**OBSERVACION 3.** En el caso de la curva dada paramétricamente por las ecuaciones (1.3), hablaremos también de la parametrización de dicha curva mediante estas ecuaciones. Una misma curva  $L$  puede parametrizarse por varios métodos. Consideraremos todas las parametrizaciones posibles de la curva  $L$  obtenidas de cualquier parametrización dada representando el parámetro  $t$  en forma de funciones continuas estrictamente crecientes de otro parámetro  $s$ . Señalemos que sólo para estas transformaciones del parámetro se mantiene el orden de seguimiento de los puntos en la curva  $L$ .

**3. Concepto de curva espacial.** El concepto de curva espacial se introduce de manera completamente análoga al concepto de curva plana. En primer lugar, se introduce el concepto de curva espacial simple como un conjunto  $\{M\}$  de puntos del espacio cuyas coordenadas  $x, y, z$  se determinan por las ecuaciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (2.5)$$

a condición de la continuidad de las funciones  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\chi(t)$  y la condición de que los puntos del conjunto  $\{M\}$  correspondientes a valores diferentes del parámetro  $t$  no coinciden.

Igual que en el caso del plano, el concepto de curva espacial simple y el de partición del conjunto  $\{t\}$  de variación del parámetro llevan al concepto de curva espacial dada por las ecuaciones para

métricas (2.5) si se observa la condición de la variación monótona del parámetro  $t$  sobre el conjunto  $\{t\}$ .

Notemos que todos los términos introducidos en los puntos anteriores se transfieren lógicamente al caso de curvas espaciales.

**4. Concepto de longitud de un arco de una curva.** En este punto introducamos el concepto de longitud de un arco de una curva dada paraméricamente.

Sea que la curva  $L$  es prefijada por las ecuaciones paramétricas (2.3)

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

donde el parámetro  $t$  varía sobre el segmento  $[\alpha, \beta]$ .

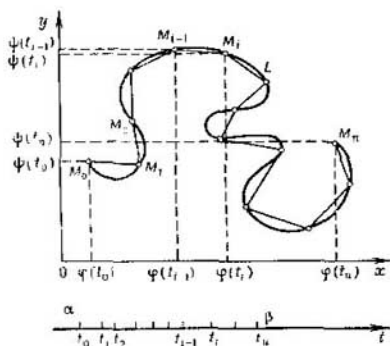


Fig. 2.3

Sea  $T$  partición arbitraria del segmento  $[\alpha, \beta]$  por los puntos  $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ . Denotemos mediante  $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$  los puntos correspondientes de la curva  $L$  (fig. 2.3). La quebrada  $M_0 M_1 M_2 \dots, M_n$  que aparece se denominará quebrada \*) inscrita en la curva  $L$  y correspondiente a la partición dada  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$ . Ya que la longitud  $l_i$  del tramo  $M_{i-1} M_i$  de esta

\*) Denominaremos *recta* una línea determinada por las ecuaciones paramétricas  $x = at + b, y = ct + d$ . Se puede escoger de antemano las constantes  $a, b, c, d$  de tal modo que la recta pase a través de dos puntos dados  $M_1(x_1, y_1)$  y  $M_2(x_2, y_2)$ . La parte de la recta entre los puntos  $M_1$  y  $M_2$  se llama naturalmente *segmento*, y el conjunto de un número finito de segmentos contiguos uno a otro se denomina lógicamente *quebrada*.

quebrada es igual a

$$\sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}^*$$

entonces la longitud  $\bar{l}(t_i)$  de toda la quebrada es igual a

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}. \quad (2.6)$$

**Definición.** Si el conjunto  $\{\bar{l}(t_i)\}$  de las longitudes de las quebradas inscritas en la curva  $L$  y correspondientes a todas las particiones posibles  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  está acotado, entonces la curva  $L$  se denomina rectificable, y la cota superior exacta  $l$  del conjunto  $\{\bar{l}(t_i)\}$  se llama longitud del arco de la curva  $L$ .

OBSERVACIÓN 1. De la definición de la curva  $L$  dada paramétricamente y de la definición de la longitud del arco  $l$  de esta curva se desprende que la longitud  $l$  es positiva,  $l > 0$ .

OBSERVACIÓN 2. Existen curvas no rectificables. En el complemento del presente capítulo aduciremos el ejemplo de una curva plana, cualquier parte de la cual es no rectificable.

A continuación, utilizaremos con frecuencia el lema siguiente.

**Lema.** Sea  $\bar{l}^*(t_i)$  longitud de una quebrada inscrita en la curva  $L$  y correspondiente a la partición  $T^*$  del segmento  $[\alpha, \beta]$ , y sea  $\bar{l}(t_i)$  longitud de la quebrada inscrita en la curva  $L$  y correspondiente a la partición  $T$  obtenida de la partición  $T^*$  al añadir varios puntos nuevos. Entonces  $\bar{l}^*(t_i) \leq \bar{l}(t_i)$ .

DEMOSTRACION. Obviamente, es suficiente considerar el caso cuando a la partición  $T^*$  se agrega un punto  $\gamma$ . La quebrada correspondiente a la partición  $T$  se diferencia de la quebrada correspondiente a la partición  $T^*$  solamente en que un tramo  $M_{i-1}M_i$  se sustituye por dos tramos  $M_{i-1}C$  y  $CM_i$  ( $C$  es punto de la curva que corresponde al valor  $\gamma$  del parámetro  $t$ ). Ya que la longitud del lado  $M_{i-1}M_i$  del triángulo  $M_{i-1}CM_i$  no supera la suma de las longitudes de otros dos lados\*\*)  $M_{i-1}C$  y  $CM_i$ , entonces  $\bar{l}^*(t_i) \leq \bar{l}(t_i)$ .

Enumeremos algunas propiedades de curvas rectificables:

1°. Si la curva  $L$  es rectificable, entonces la longitud  $l$  de su arco no depende de la parametrización de esta curva.

\*) Hemos empleado la fórmula de la distancia entre dos puntos  $M_{i-1}$  y  $M_i$  cuyas coordenadas son respectivamente iguales a

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= \varphi(t_{i-1}), & y_{i-1} &= \psi(t_{i-1}) \\ x_i &= \varphi(t_i), & y_i &= \psi(t_i). \end{aligned}$$

\*\*) Se puede demostrar este hecho geométrico de un modo puramente analítico.

2°. Si la curva rectificable  $L$  está dividida en un número finito de curvas  $L_i$  mediante un número finito de puntos  $M_0, M_1, \dots, M_n$  \*), entonces cada una de estas curvas  $L_i$  es rectificable y la suma de longitudes  $l_i$  de todas las curvas  $L_i$  es igual a la longitud  $l$  de la curva  $L$ .

3°. Sea la curva  $L$  dada paramétricamente por las ecuaciones (2.3). Mediante  $l(t)$  denotemos la longitud del arco del segmento  $L_t$  de la curva  $L$  cuyos puntos se definen por todos los valores del parámetro del segmento  $[\alpha, t]$ . La función  $l(t)$  es función creciente y continua del parámetro  $t$ . La función  $l - l(t)$  se denominará arco variable de la curva  $L$ .

4°. El arco variable  $l$  puede tomarse como parámetro. Este parámetro se denomina parámetro natural.

La validez de la propiedad 4° se desprende directamente de la propiedad 3°. En efecto, ya que el arco variable  $l = l(t)$  es función creciente y continua del parámetro  $t$ , entonces el parámetro  $t$  puede representarse también en forma de función continua y monótona  $t = \bar{l}(l)$  del arco variable  $l$ . Por eso, se puede elegir el arco variable  $l$  como parámetro.

#### DEMOSTRACIÓN DE LAS PROPIEDADES 1°-3°.

1°. Sea que hay dos parametrizaciones de la curva  $L$ , además  $t$  y  $s$  son parámetros definidos en los segmentos  $[\alpha, \beta]$  y  $[a, b]$ , respectivamente. Ya que  $t$  es función continua y estrictamente monótona de  $s$  y  $s$  es función continua y estrictamente monótona de  $t$ , entonces a toda partición  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  le corresponde una partición determinada  $P$  del segmento  $[a, b]$  y viceversa. Es obvio que las quebradas inscritas en  $L$  y correspondientes a las particiones respectivas de los segmentos  $[\alpha, \beta]$  y  $[a, b]$  son idénticas y, por eso, sus longitudes  $\bar{l}(t_i)$  y  $\bar{l}(s_j)$  son iguales. Por consiguiente, los conjuntos  $\{\bar{l}(t_i)\}$  y  $\{\bar{l}(s_j)\}$  son idénticos. De aquí se desprende que la longitud del arco de una curva no depende de la parametrización de esta curva.

2°. Obviamente, es suficiente demostrar la propiedad 2° para el caso cuando el punto  $C$  parte la curva  $L$  en dos curvas  $L_1$  y  $L_2$ . Mediante  $\gamma$  denotemos el valor del parámetro  $t$  al cual corresponde el punto  $C$ . Entonces, los puntos de la curva  $L_1$  corresponden a los valores del parámetro  $t$  del segmento  $[\alpha, \gamma]$  mientras los puntos de la curva  $L_2$  corresponden a los valores del parámetro  $t$  del segmento  $[\gamma, \beta]$ . Sean  $T_1$  y  $T_2$  particiones arbitrarias de dichos segmentos y  $T$  partición del segmento  $[\alpha, \beta]$  obtenida al unir las particiones  $T_1$  y  $T_2$ . Si  $\bar{l}_1(t_i)$ ,  $\bar{l}_2(t_j)$  y  $\bar{l}(t_k)$  son longitudes de las quebradas inscritas en las curvas  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L$ , correspondientes a las particiones  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T$  de los segmentos anteriormente indicados, entonces es obvio que

$$\bar{l}_1(t_i) + \bar{l}_2(t_j) = \bar{l}(t_k). \quad (2.7)$$

Ya que los números  $\bar{l}_1(t_i)$ ,  $\bar{l}_2(t_j)$  y  $\bar{l}(t_k)$  son positivos, entonces, de la igualdad (2.7) y de la rectificabilidad de la curva  $L$  se desprende que los conjuntos  $\{\bar{l}_1(t_i)\}$  y  $\{\bar{l}_2(t_j)\}$  de las longitudes de las quebradas, inscritas en las curvas  $L_1$  y  $L_2$  y correspondientes a todas las particiones posibles de los segmentos  $[\alpha, \gamma]$  y  $[\gamma, \beta]$ , están acotados, o sea, las curvas  $L_1$  y  $L_2$  son rectificables. Notemos que de la igualdad (2.7) y de la definición de la longitud del arco de una curva se

\*) Además, los puntos  $M_0, M_1, \dots, M_n$  corresponden a los valores  $t_0, t_1, \dots, t_n$  del parámetro  $t$  que satisfacen las condiciones  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ .

desprende que las longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l$  de los arcos de las curvas  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L$  satisfacen la desigualdad \*)

$$l_1 + l_2 \leq l. \quad (2.8)$$

Supongamos que  $l_1 + l_2 < l$ . Entonces, el número

$$l - (l_1 + l_2) = \varepsilon \quad (2.9)$$

es positivo. De la definición de la longitud  $l$  del arco de la curva  $L$  se desprende que para el número positivo  $\varepsilon$  se puede indicar una partición  $T^*$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  tal que la longitud  $\bar{l}^*(t_i)$  de la quebrada inscrita en la curva  $L$  y correspondiente a esta partición satisface la desigualdad  $l - \bar{l}^*(t_i) < \varepsilon$ . Agreguemos el punto  $\gamma$  a la partición  $T^*$  y designemos la partición obtenida mediante  $T$ . Entonces, en virtud del lema de este párrafo, la longitud  $\bar{l}(t_i)$  de la quebrada correspondiente a la partición  $T$  satisface la desigualdad  $l - \bar{l}(t_i) < \varepsilon$ . Puesto que la partición  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  se hizo uniendo ciertas particiones  $T_1$  y  $T_2$  de los segmentos  $[\alpha, \gamma]$  y  $[\gamma, \beta]$ , entonces las longitudes  $\bar{l}_1(t_i)$  y  $\bar{l}_2(t_i)$  de las quebradas correspondientes a estas particiones satisfacen la relación (2.7). Por eso es válida la desigualdad  $l - [\bar{l}_1(t_i) + \bar{l}_2(t_i)] < \varepsilon$ . Ya que  $\bar{l}_1(t_i) + \bar{l}_2(t_i) \leq l_1 + l_2$ , tanto más válida es la desigualdad  $l - (l_1 + l_2) < \varepsilon$ . Pero esta desigualdad contradice la igualdad (2.9). Por eso, la suposición  $l_1 + l_2 < l$  es inválida, y, por consiguiente, en virtud de (2.8),  $l_1 + l_2 = l$ . La validez de la propiedad 2° queda establecida.

3°. De la propiedad 2° y de la observación 1 de este punto se desprende que el arco variable  $l = l(t)$  es función positiva estrictamente creciente del parámetro  $t$ . Para demostrar la continuidad de la función  $l(t)$ , empleemos las afirmaciones siguientes:

1) Sean  $\varepsilon$  cualquier número positivo fijado,  $t$  punto arbitrario del segmento  $[\alpha, \beta]$  y  $M$  punto correspondiente de la curva  $L$ . Existe una quebrada inscrita en la curva  $L$  que tiene el punto  $M$  por su vértice y cuya longitud se diferencia de la longitud de la curva  $L$  en menos de  $\varepsilon/2$ .

2) Se puede elegir dicha quebrada de tal modo que la longitud de todo su tramo será menor de  $\varepsilon/2$ .

3) Sea que la quebrada es elegida como se indica en las afirmaciones 1) y 2). Entonces, la parte de la curva  $L$  subtendida por cualquier tramo de la quebrada considerada tiene longitud menor de  $\varepsilon$ .

Ciertamente de que de las afirmaciones formuladas y de la monotonía de la función  $l(t)$  se desprende su continuidad en cualquier punto fijado  $t$  de este segmento (en los puntos  $\alpha$  y  $\beta$  la función  $l(t)$  es continua por la derecha y por la izquierda, respectivamente).

Debemos demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede indicar un  $\delta > 0$  tal que para  $|\Delta t| < \delta$ , se cumpla la desigualdad  $|l(t + \Delta t) - l(t)| < \varepsilon$ .

Consideremos aquella partición  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  a la cual corresponde una quebrada que posee las propiedades enumeradas en las afirmaciones 1) y 2). Mediante  $\delta$  denotemos la mínima de las longitudes de dos segmentos parciales  $[t_{k-1}, t_k]$  y  $[t_k, t_{k+1}]$  de la partición  $T$  que tocan el punto  $t = t_k$  del segmento  $[\alpha, \beta]$ . Sea que el incremento  $\Delta t$  del argumento satisface la condición  $|\Delta t| < \delta$ . Para la precisión, tomemos  $\Delta t > 0$ . Ya que  $t < t + \Delta t < t + \delta \leq t_{k+1}$ , entonces, en virtud del crecimiento estricto de la función  $l(t)$  son válidas las desigualdades

$$l(t) < l(t + \Delta t) < l(t + \delta) \leq l(t_{k+1}).$$

\*) De la igualdad (2.7) se desprende que para cualesquiera particiones  $T_1$  y  $T_2$  de los segmentos  $[\alpha, \gamma]$  y  $[\gamma, \beta]$  es válida la desigualdad  $\bar{l}_1(t_i) + \bar{l}_2(t_i) \leq l$ . De aquí y de la definición de la cota superior exacta obtenemos la desigualdad (2.8).



En virtud de la afirmación 3, es válida la desigualdad

$$l(t_{h+1}) - l(t) < \varepsilon.$$

De aquí y de las desigualdades anteriores se desprende que, para  $0 < \Delta t < \delta$ , es válida la desigualdad

$$l(t + \Delta t) - l(t) < \varepsilon.$$

El caso de  $\Delta t < 0$  se considera análogamente.

Pasemos ahora a demostrar las afirmaciones 1), 2) y 3).

**DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN 1).** Sea  $\varepsilon$  cualquier número positivo fijado. Ya que la longitud  $l(\beta)$  de toda la curva  $L$  determinada por las ecuaciones paramétricas (2.3) es cota superior exacta de las longitudes de las quebradas inscritas en esta curva correspondientes a todas las particiones posibles del segmento  $[\alpha, \beta]$ , entonces, para  $\varepsilon > 0$  dado se puede indicar una partición  $T^{**}$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  para la cual la longitud de la quebrada correspondiente inscrita en la curva  $L$  se diferencia de  $l(\beta)$  en menos de  $\varepsilon/2$ . Agreguemos a la partición  $T^{**}$  el punto  $t$ . En virtud del lema de este párrafo y de la definición de la longitud del arco, la longitud de la quebrada correspondiente a la partición obtenida  $T^*$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  se diferencia de  $l(\beta)$  en menos de  $\varepsilon/2$ , y esta quebrada tiene por su vértice el punto  $M$  de la curva que corresponde al punto  $t$  del segmento  $[\alpha, \beta]$ .

**DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN 2).** Ya que las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  continuas en el segmento  $[\alpha, \beta]$  son uniformemente continuas en este segmento, entonces, según  $\varepsilon > 0$  dado se puede indicar un  $\delta > 0$  tal que para cualquier partición  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  con las longitudes de los segmentos parciales  $[t_{i-1}, t_i]$  menores de  $\delta$  se cumplen las desigualdades  $|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$ ,  $|\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$ . Puesto que la longitud  $\bar{l}_i$  del tramo de la quebrada correspondiente a la partición dada es igual a

$$\sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2},$$

entonces, obviamente,  $\bar{l}_i < \varepsilon/2$ . Consideremos ahora cualquier partición fijada  $T'$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  con las longitudes de los segmentos parciales menores de  $\delta$ , y agréguemos a ella los puntos de la partición  $T^*$  (véase la demostración de la afirmación 1). Como resultado, obtenemos la partición  $T$  a la cual corresponde una quebrada inscrita en la curva  $L$  y que satisface todas las condiciones de la afirmación 2).

**DEMOSTRACIÓN DE LA AFIRMACIÓN 3).** Sea que la quebrada  $M_0M_1 \dots M_{k-1}M_kM_{k+1} \dots M_n$  satisface las condiciones de las afirmaciones 1) y 2). Cercioremonos de que la longitud de cada parte de la curva  $L$  subtendida por cualquier tramo de la quebrada considerada es menor de  $\varepsilon$ . En efecto, sea  $l_k$  longitud de la parte  $M_{k-1}M_k$  de la curva  $L$  y sea  $\bar{l}_k$  longitud del tramo  $M_{k-1}M_k$  de la quebrada. Entonces, en virtud de las condiciones de la afirmación 1), se cumple la desigualdad  $\sum_{k=1}^n (l_k - \bar{l}_k) < \varepsilon/2$ . Puesto que todo sumando  $l_k - \bar{l}_k$

de la última suma es no negativo, entonces  $(l_k - \bar{l}_k) < \varepsilon/2$ . De aquí y de la desigualdad  $\bar{l}_k < \varepsilon/2$  se desprende la desigualdad requerida  $l_k < \varepsilon$ .

El concepto de longitud del arco de una curva espacial dada por las ecuaciones paramétricas (2.5) se introduce de manera completamente análoga al concepto del arco de una curva plana. Se consideran

las longitudes  $\bar{l}(t_i)$  de las quebradas inscritas en la curva  $L$  con tal que, obviamente

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}{+ [\chi(t_i) - \chi(t_{i-1})]^2}}$$

La curva espacial  $L$  determinada por las ecuaciones (2.5) se denomina *rectificable* si el conjunto  $\{l(t_i)\}$  de las longitudes de las quebradas inscritas en esta curva está acotado. La cota superior exacta  $l$  de este conjunto se denomina longitud del arco de la curva  $L$ .

Notemos que las curvas espaciales rectificables poseen las propiedades 1°, 2°, 3° y 4° enumeradas en este punto. La demostración de estas propiedades se realiza de modo completamente análogo a la demostración para las curvas planas.

**5. Condiciones suficientes de la rectificabilidad de la curva. Fórmulas para calcular las longitudes del arco de la curva.**

**Teorema 2.1.** Si las funciones  $x = \varphi(t)$  e  $y = \psi(t)$  tienen derivadas continuas en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , entonces la curva  $L$  determinada por las ecuaciones paramétricas (2.3) es rectificable y la longitud  $l$  de su arco puede calcularse por la fórmula

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (2.10)$$

**DEMOSTRACIÓN** En primer lugar, demostremos que la curva  $L$  es rectificable. Para hacerlo, transformemos la expresión (2.6) de la longitud  $\bar{l}(t_i)$  de la quebrada inscrita en la curva  $L$  y correspondiente a una partición arbitraria  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$ . Ya que las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  tienen derivadas en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , entonces conforme a la fórmula de Lagrange,  $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i) \Delta t_i$ , donde  $t_{i-1} < \tau_i < t_i$ ,  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  y  $\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\tau_i^*) \Delta t_i$  donde  $t_{i-1} < \tau_i^* < t_i$ . Poniendo las expresiones halladas para  $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$  y  $\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})$  en el miembro derecho de la expresión (2.6), obtenemos

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i^*)} \Delta t_i. \quad (2.11)$$

Según la condición, las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  tienen derivadas continuas en el segmento  $[\alpha, \beta]$ . Por consiguiente, las derivadas están acotadas y, por eso, existe un  $M$  tal que para todos los  $t$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  son válidas las desigualdades  $|\varphi'(t)| \leq M$  y  $|\psi'(t)| \leq M$ . Pero, entonces, de la fórmula (2.11) se desprende que

$$0 < l(t_i) \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{M^2 + M^2} \Delta t_i = M \sqrt{2} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = M \sqrt{2} (\beta - \alpha).$$

De este modo, el conjunto  $\{l(t_i)\}$  de las longitudes de las quebradas inscritas en la curva  $L$  y correspondientes a todas las particiones posibles  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$ , está acotado, o sea, *la curva  $L$  es rectificable*. Mediante  $l$  denotemos la longitud de esta curva. Demostremos que la longitud  $l$  de la curva  $L$  puede calcularse por la fórmula (2.10). Observemos que el miembro derecho de la fórmula (2.11) parece a la suma integral

$$I\{t_i, \tau_i\} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} \Delta t_i \quad (2.12)$$

de la función integrable  $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$  con tal que esta suma  $I\{t_i, \tau_i\}$  corresponde a la partición  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  y la elección dada de los puntos  $\tau_i$  en los segmentos parciales  $[t_{i-1}, t_i]$  de esta partición. *Demostremos que para cualquier  $\varepsilon > 0$  positivo se puede indicar un  $\delta > 0$  tal para que  $\Delta < \delta$  ( $\Delta = \max \Delta t_i$ ) se cumple la desigualdad*

$$|l(t_i) - I| < \varepsilon/2, \quad (2.13)$$

donde  $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$  es el límite de las sumas integrales

(2.12) cuando  $\Delta \rightarrow 0$ . En otras palabras, *demostremos que para particiones bastante «finas»  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  las longitudes  $l(t_i)$  de las quebradas, inscritas en la curva  $L$  y correspondientes a estas particiones, se diferencian en una magnitud tan pequeña como se quiera de la integral  $I$  que está en el miembro derecho de la fórmula (2.10). Notemos, primero, que*

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i^*)} - \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} \right| \leq \\ & \leq |\psi'(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i)| \leq M_i - m_i^*, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde  $M_i$  y  $m_i$  son cotas exactas de la función  $\psi'(t)$  en el segmento parcial  $[t_{i-1}, t_i]$ . En virtud de (2.11), (2.12) y (2.14) son válidas las

\* Para obtener las desigualdades (2.14), hemos empleado la desigualdad  $|\sqrt{a^2 + b^{*2}} - \sqrt{a^2 + b^2}| \leq |b^* - b|$ , donde  $a^2 = \varphi'^2(\tau_i)$ ,  $b^{*2} = \psi'^2(\tau_i^*)$  y  $b^2 = \psi'^2(\tau_i)$ , y la desigualdad  $|\psi'(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i)| \leq M_i - m_i$ .

La segunda de estas desigualdades es evidente puesto que la diferencia de cualesquiera valores de la función no es mayor que la diferencia de sus cotas exactas. Demostremos la primera de dichas desigualdades. Tenemos

$$\begin{aligned} |\sqrt{a^2 + b^{*2}} - \sqrt{a^2 + b^2}| &= \frac{|b^{*2} - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^{*2}} + \sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{|b^* - b| |b^* + b|}{\sqrt{b^{*2}} + \sqrt{b^2}} \leq \\ &\leq \frac{|b^* - b| (|b^*| + |b|)}{|b^*| + |b|} = |b^* - b|. \end{aligned}$$

desigualdades

$$\begin{aligned}
 |l(t_i) - I\{t_i, \tau_i\}| &= \left| \sum_{i=1}^n (\sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta t_i = S - s, \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

donde  $S$  y  $s$  son las sumas superior e inferior de la función  $\psi'$  ( $t$ ) para la partición del segmento  $[\alpha, \beta]$ . Ya que las funciones  $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$  y  $\psi'(t)$  son integrables en el segmento  $[\alpha, \beta]$  (esto se desprende de la continuidad de las derivadas  $\varphi'(t)$  y  $\psi'(t)$  en el segmento  $[\alpha, \beta]$ ), entonces, de la definición de la integrabilidad y del teorema 1.1 (véase el § 1 y el § 3 del cap. 1) se desprende que para cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede indicar un  $\delta > 0$  tal que para  $\Delta < \delta$  ( $\Delta = \max \Delta t_i$ ) se cumplen las desigualdades

$$|I\{t_i, \tau_i\} - I| < \varepsilon/4 \text{ y } S - s < \varepsilon/4. \quad (2.16)$$

Por eso, cuando  $\Delta < \delta$ , en virtud de (2.15) y (2.16), son válidas las desigualdades  $|l(t_i) - I| = |l(t_i) - I\{t_i, \tau_i\} + I\{t_i, \tau_i\} - I| \leq |l(t_i) - I\{t_i, \tau_i\}| + |I\{t_i, \tau_i\} - I| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$ . De este modo, la validez de las desigualdades (3.12) queda demostrada.

Demostremos ahora que *entre todas las quebradas posibles cuyas longitudes  $\bar{l}(t_i)$  satisfacen la desigualdad (2.13) existen quebradas cuyas longitudes se diferencian de la longitud  $l$  del arco de la curva  $L$  en menos de  $\varepsilon/2$ .*

Puesto que  $l$  es cota superior exacta del conjunto  $\{l(t_i)\}$  de las longitudes de las quebradas inscritas en la curva  $L$  y correspondientes a todas las particiones posibles del segmento  $[\alpha, \beta]$ , entonces existe una partición  $T^*$  de este segmento tal que la longitud  $l^*(t_i)$  de la quebrada correspondiente satisface las desigualdades

$$0 \leq l - l^*(t_i) < \varepsilon/2. \quad (2.17)$$

Dividamos ahora cada uno de los segmentos parciales  $[t_{i-1}, t_i]$  de la partición  $T^*$  en partes tan pequeñas que la longitud máxima  $\Delta$  de la partición  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$ , que se obtiene uniendo dichas particiones, sea menor de  $\delta$ ,  $\Delta < \delta$ . Es obvio que la longitud  $\bar{l}(t_i)$  de la quebrada correspondiente a la partición  $T$  satisface la desigualdad (2.13). Ya que los vértices de la quebrada correspondiente a la partición  $T^*$  son también vértices de la quebrada correspondiente a la partición  $T$ , entonces, conforme al lema de este párrafo, la longitud  $l(t_i)$  satisface las desigualdades  $0 < l^*(t_i) \leq \bar{l}(t_i) \leq l$ ,

y, por eso, en virtud de la desigualdad (2.17), se cumple la desigualdad

$$0 \leq l - l(t_i) < \varepsilon/2. \quad (2.18)$$

Así pues, hemos demostrado que entre las quebradas cuyas longitudes  $l(t_i)$  satisfacen la desigualdad (2.13) hay quebradas cuyas longitudes  $l(t_i)$  satisfacen la desigualdad (2.18). Comparando las desigualdades (2.13) y (2.18), obtenemos la siguiente desigualdad:

$$|l - I| < \varepsilon.$$

En virtud de la arbitrariedad de  $\varepsilon$ , de aquí se desprende que  $l = I$ . El teorema queda demostrado.

**OBSERVACIÓN 1.** Si las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  tienen derivadas acotadas en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , entonces, la curva  $L$  determinada por las ecuaciones (2.1) es rectificable. En efecto, demostrando el teorema (2.1), hemos establecido que si las derivadas de las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  son acotadas, entonces las longitudes  $l(t_i)$  de las quebradas inscritas en la curva  $L$  y correspondientes a todas las particiones posibles  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  son acotadas también.

**OBSERVACIÓN 2.** La fórmula (2.10) para calcular la longitud del arco es válida si las derivadas  $\varphi'(t)$  y  $\psi'(t)$  están definidas y son integrables en el segmento  $[\alpha, \beta]$ . En efecto, de la integrabilidad de estas derivadas se desprende su acotación y, por eso, en virtud de la observación 1, la rectificabilidad de la curva  $L$ . Luego observemos que para deducir las desigualdades (2.14), (2.15) y (2.16), y, por consiguiente, la desigualdad (2.13), es suficiente que existan y sean integrables las derivadas  $\varphi'(t)$  y  $\psi'(t)$  puesto que, según el complemento 1 del capítulo 1, de aquí se desprende la integrabilidad de la función  $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ . Todos los razonamientos ulteriores se hacen como en la demostración del teorema 2.1.

**OBSERVACIÓN 3.** Si la curva  $L$  es gráfica de la función  $y = f(x)$  que tiene derivada continua  $f'(x)$  en el segmento  $[a, b]$ , entonces la curva  $L$  es rectificable y la longitud  $l$  del arco  $L$  puede hallarse por la fórmula

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (2.19)$$

Para demostrarlo, observemos que la gráfica de la función considerada es curva determinada por las ecuaciones paramétricas  $x = t$ ,  $y = f(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  y, además, es evidente que se cumplen todas las condiciones del teorema 2.1. Por lo tanto, poniendo en la fórmula (2.10)  $\varphi(t) = t$ ,  $\psi(t) = f(t)$  y sustituyendo la variable de integración  $t$  por  $x$ , obtenemos la fórmula (2.19). Señalemos también que si la curva  $L$  es determinada por la ecuación polar  $r = r(\theta)$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$  y la función  $r(\theta)$  tiene derivada continua en el segmento  $[\theta_1, \theta_2]$ , entonces la curva  $L$  es rectificable y la longitud  $l$  del arco  $L$  puede hallarse por la fórmula

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta. \quad (2.20)$$

Para demostrarlo, nos valemos de las fórmulas que se emplean para pasar de las coordenadas polares a las cartesianas

$$x = r(\theta) \cos \theta, \quad y = r(\theta) \operatorname{sen} \theta.$$

De este modo, se ve que la curva  $L$  se determina por las ecuaciones paramétricas con tal que las funciones  $\varphi = r(\theta) \cos \theta$  y  $\psi = r(\theta) \operatorname{sen} \theta$  satisfacen las condiciones del teorema 2.1. Poniendo dichos valores  $\varphi$  y  $\psi$  en (2.10), obtenemos la fórmula (2.20).

Enunciamos las condiciones suficientes de la rectificabilidad de la curva espacial.

Si las funciones  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  y  $\chi(t)$  tienen derivadas continuas en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , entonces, la curva  $L$  determinada por las ecuaciones (2.5) es rectificable y la longitud  $l$  de su arco puede hallarse empleando la fórmula

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt. \quad (2.21)$$

Su demostración es análoga a la del teorema 2.1.

**OBSERVACIÓN 4.** Si las funciones  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  y  $\chi(t)$  tienen derivadas acotadas en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , entonces, la curva  $L$  determinada por las ecuaciones (2.5) es rectificable. Si, además, las derivadas de dichas funciones son integrables en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , entonces la longitud  $l$  del arco de la curva  $L$  puede hallarse empleando la fórmula (2.21) (véase las observaciones 1 y 2).

**6. Diferencial de un arco.** Sea que las funciones  $x = \varphi(t)$  e  $y = \psi(t)$  tienen derivadas continuas en el segmento  $[\alpha, \beta]$ . En este caso, conforme al teorema 2.1, el arco variable se representa por la fórmula:

$$l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)} d\tau. \quad (2.22)$$

Ya que la función subintegral del miembro derecho de la fórmula (2.22) es continua, entonces la función  $l(t)$  es diferenciable con tal que

$$l'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$$

(véase el p. 1 del § 7, cap. 1, tomo 2). Elevando ambos miembros de la última igualdad al cuadrado y multiplicando, después, por  $dt^2$ , obtenemos la fórmula

$$[l'(t) dt]^2 = [\varphi'(t) dt]^2 + [\psi'(t) dt]^2. \quad (2.23)$$

Ya que  $l'(t) dt = dl$ ,  $\varphi'(t) dt = dx$ ,  $\psi'(t) dt = dy$ , entonces, de (2.23) hallamos

$$dl^2 = dx^2 + dy^2. \quad (2.24)$$

En particular, de la fórmula (2.24) se desprende que si elegimos el arco variable  $l$  como parámetro, o sea,  $x = g(l)$  e  $y = h(l)$ , entonces

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1. \quad (2.25)$$

Notemos que si se observa la condición de continuidad de las derivadas de las funciones  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  y  $z = \varkappa(t)$ , para la diferencial  $dl$  del arco de una curva espacial determinada por las ecuaciones paramétricas (2.5), es válida la fórmula

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.26)$$

De la fórmula (2.26) se desprende que si elegimos el arco variable  $l$  como parámetro, entonces

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2 = 1. \quad (2.27)$$

**7. Ejemplos para calcular la longitud del arco.** 1°. Longitud del arco de la cicloide \*)  $x = a(t - \operatorname{sen} t)$ ,  $y = a(1 - \operatorname{cos} t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . En el caso considerado  $\varphi' = a(1 - \operatorname{cos} t)$ ,  $\psi' = a \operatorname{sen} t$ . Por lo tanto, según la fórmula (2.10),

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} a \sqrt{(1 - \operatorname{cos} t)^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = \\ &= -4a \operatorname{cos} \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

2°. Se llama *línea catenaria* la gráfica de la función  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  (\*\*). Hallemos la longitud de una parte de la línea catenaria que corresponde al segmento  $[0, x]$ . Por la fórmula (2.19), tenemos

$$l(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)} d\xi = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{a}} d\xi = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{\xi}{a} d\xi = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

3°. Hallemos el arco variable de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > b$ , partiendo del punto  $M_0(0, b)$ . Consideremos las ecuaciones paramétricas de la elipse  $x = a \operatorname{sen} t$ ,  $y = b \operatorname{cos} t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Según la

\*) *Cicloide* es una curva plana que describe un punto de la circunferencia de radio  $a$  cuando ésta rueda sin deslizarse por la línea recta.

\*\*) La denominación *línea catenaria* se debe a que una cadena pesada suspendida por sus extremos tiene forma de la curva considerada.

fórmula (2.22), tenemos

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{\psi'^2(\tau) + \psi^2(\tau)} d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 \cos^2 \tau + b^2 \sin^2 \tau} d\tau = \\ = a \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \tau} d\tau = aE(e, t).$$

El número  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  se denomina excentricidad de la elipse.

La integral indefinida  $\int \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$  que se anula cuando  $t=0$ , se denomina integral elíptica de segundo género y se denota por  $E(e, t)$  (véase el § 11, cap. 7, tomo 1).

## § 2. Área de una figura plana\*)

1. Concepto de cuadrabilidad de una figura plana. Área de una figura plana cuadrable. El concepto de área del polígono \*\*) que es una figura plana se conoce del curso de matemáticas elementales. En el presente punto introduciremos el concepto de área de una figura plana  $Q$  que es una parte del plano limitada por una curva cerrada  $L$  \*\*\*). Además, la curva  $L$  se denominará frontera de la figura  $Q$ .

Diremos que el polígono está inscrito en la figura  $Q$ , si todo punto de este polígono pertenece a la figura  $Q$  o a su frontera. Si todos los puntos de una figura plana y de su frontera pertenecen a cierto polígono, diremos que dicho polígono está circunscrito alrededor de la figura  $Q$ .

Es obvio que el área de cualquier polígono inscrito en la figura  $Q$  no es mayor que el área de cualquier polígono circunscrito alrededor de la figura  $Q$ .

Sea  $\{S_i\}$  el conjunto numérico de las áreas de los polígonos inscritos en la figura  $Q$  y sea  $\{S_d\}$  el conjunto numérico de las áreas de polígonos circunscritos alrededor de la figura  $Q$ . Evidentemente, el conjunto  $\{S_i\}$  está acotado superiormente (por el área de cualquier polígono circunscrito alrededor de la figura  $Q$ ), y el conjunto  $\{S_d\}$  está acotado inferiormente (por ejemplo, por el número cero). Deno-

\*) En el tomo 3 del presente curso el lector hallará una amplia aplicación de los conceptos de área de una figura plana y de conjunto arbitrario de los puntos del plano.

\*\*) Se llamará polígono a la parte del plano limitada por una línea quebrada cerrada simple.

\*\*\*) Señalemos que una curva plana cerrada simple divide el plano en dos partes, interior y exterior. Jordan, matemático francés (1838—1922), demostró esta afirmación.



tenemos la cota superior exacta del conjunto  $\{S_i\}$  mediante  $\underline{P}$  y la cota inferior exacta del conjunto  $\{S_d\}$ , mediante  $\overline{P}$ . Los números  $\underline{P}$  y  $\overline{P}$  se denominan *áreas inferior y superior de la figura Q*. Notemos que el área inferior  $\underline{P}$  de la figura  $Q$  no es mayor que el área superior de esta figura, es decir,  $\underline{P} \leq \overline{P}$ . En efecto, supongamos que es válida la desigualdad contraria  $\underline{P} > \overline{P}$ . Entonces, tomando  $\frac{\underline{P} - \overline{P}}{2} = \epsilon > 0$  y teniendo en cuenta la definición de las cotas exactas, hallamos tal polígono inscrito en la figura  $Q$  que su área  $S_i$  sea mayor que el número  $\underline{P} - \epsilon = \frac{\underline{P} + \overline{P}}{2}$ , o sea  $\frac{\underline{P} + \overline{P}}{2} < S_i$ , y tal polígono circunscrito alrededor de la figura  $Q$  que su área  $S_d$  sea menor que el número  $\overline{P} + \epsilon = \frac{\underline{P} + \overline{P}}{2}$ , o sea,  $S_d < \frac{\underline{P} + \overline{P}}{2}$ . Comparando las dos desigualdades obtenidas, hallamos que  $S_d < S_i$ , lo que es imposible, puesto que el área  $S_d$  de cualquier polígono circunscrito es *no menor* que el área  $S_i$  de cualquier polígono inscrito.

Introduzcamos el concepto de cuadrabilidad de una figura plana.

**Definición.** La figura plana  $Q$  se denomina *cuadrable* si el área superior de ésta coincide con su área inferior  $\underline{P}$ . Además, el número  $\underline{P} = \overline{P} = P$  se denomina *área de la figura Q*.

**OBSERVACIÓN.** En el complemento de este capítulo aduciremos el ejemplo de una figura no cuadrable.

Es válido el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.** Para que la figura plana  $Q$  sea cuadrable, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo  $\epsilon$  se pueda indicar un polígono circunscrito alrededor de la figura  $Q$  y un polígono inscrito en la figura  $Q$  tales que su diferencia sea menos que  $\epsilon$ ,  $S_d - S_i < \epsilon$ .

**DEMOSTRACIÓN.** 1) NECESIDAD. Sea la figura  $Q$  cuadrable, es decir, que  $\underline{P} = \overline{P} = P$ . Dado  $\underline{P}$  y  $\overline{P}$  son las cotas superior e inferior exactas de los conjuntos  $\{S_i\}$  y  $\{S_d\}$ , para cualquier número  $\epsilon > 0$ , se puede indicar un polígono inscrito en la figura  $Q$  tal que su área  $S_i$  se diferencia de  $\underline{P} = P$  en menos de  $\epsilon/2$ , es decir,  $\underline{P} - S_i < \epsilon/2$ . Para este mismo  $\epsilon > 0$  se puede indicar un polígono circunscrito, tal que su área  $S_d$  se diferencia de  $\overline{P} = P$  en menos de  $\epsilon/2$ , es decir,  $S_d - \overline{P} < \epsilon/2$ . Sumando las desigualdades obtenidas, hallamos que  $S_d - S_i < \epsilon$ .

2) SUFICIENCIA. Sean  $S_d$  y  $S_i$  las áreas de los polígonos para los cuales  $S_d - S_i < \epsilon$ . Dado que  $S_i \leq \underline{P} \leq \overline{P} \leq S_d$ , tenemos  $\overline{P} - \underline{P} < \epsilon$ . En virtud de la arbitrariedad de  $\epsilon$ , de aquí se desprende que  $\underline{P} = \overline{P}$ . De este modo, la figura es cuadrable. El teorema queda demostrado.

Diremos que la frontera de la figura plana  $Q$  tiene un área igual a cero, si para cualquier número positivo  $\varepsilon > 0$  se puede indicar un polígono circunscrito alrededor de la figura  $Q$  y un polígono inscrito en la figura  $Q$ , tales que la diferencia  $S_d - S_i$  sea menor de  $\varepsilon$ . Obviamente, el teorema 2.2. puede enunciarse también del modo siguiente.

Para que la figura plana  $Q$  sea cuadrable, es necesario y suficiente que su frontera tenga un área igual a cero.

OBSERVACION En todos los razonamientos aducidos, en vez de la figura plana se puede considerar un conjunto arbitrario de punto del plano.

Establezcamos el criterio suficiente de la cuadrabilidad de una figura plana.

**Teorema 2.3.** Si la frontera  $L$  de la figura plana  $Q$  es una curva rectificable, la figura  $Q$  es cuadrable.

DEMOSTRACION Sea  $l^*$  la longitud de la curva  $L$ . Consideramos que la curva  $L$  está parametrizada mediante el parámetro natural  $l$ ,  $0 \leq l \leq l^*$ , y, además, debido a que la curva  $L$  es cerrada, sus puntos de frontera, correspondientes a los valores  $0$  y  $l^*$  del parámetro  $l$ , coinciden. Sea  $n$  un número positivo arbitrario. Dividamos el segmento  $[0, l^*]$  en  $n$  partes iguales de longitud inferior a  $\varepsilon/9l^*$  mediante los puntos  $0 = l_0 < l_1 < \dots < l_n = l^*$ . Consideremos la quebrada  $M_0M_1, \dots, M_n$  ( $M_0 = M_n$ ) inscrita en la curva  $L$  y correspondiente a dicha partición del segmento  $[0, l^*]$ . Los puntos  $M_0, M_1, \dots, M_n$  dividen la curva  $L$  en las partes  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , cuyas longitudes son iguales a  $(l^*/n) < (\varepsilon/9l^*)$ . Es obvio que las longitudes de los tramos  $M_{i-1}M_i$  de la quebrada anteriormente indicada  $M_0M_1, \dots, M_n$  no es superior a  $l^*/n$ .

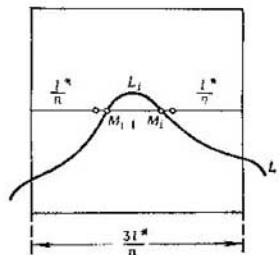


Fig. 2.4

de un cuadrado con longitud de lado igual a  $3l^*/n$  del modo indicado en la fig. 2.4. Es fácil convencerse de que el arco  $L_i$  subtendido por el tramo  $M_{i-1}M_i$  se encuentra dentro de este cuadrado puesto que la distancia de cualquier punto que se halla fuera o en la frontera de este cuadrado hasta cada uno de los puntos  $M_{i-1}$  y  $M_i$  no es inferior a  $l^*/n$ . Por tanto, si algún punto  $M$  del arco  $L_i$  se encontrara fuera o en la frontera de dicho cuadrado, la quebrada  $M_{i-1}MM_i$  inscrita en este arco tendría una longitud no menor que  $2l^*/n$ , o sea, mayor que la longitud  $l^*/n$  del arco  $L_i$ , lo cual es imposible. La unión de todos los cuadrados construidos sobre todos los tramos de la quebrada  $M_0M_1, \dots, M_n$  representa una figura poligonal que comprende la curva  $L$ . Además, es obvio que la frontera de esta figura es la unión de las fronteras del polígono inscrito en la figura  $Q$  y del polígono circunscrito alrededor de  $Q$ . Es también evidente que la diferencia  $S_d - S_i$  de las áreas de los polígonos es igual al área de dicha figura y el área de esta figura no supera la suma  $S$  de las áreas de los cuadrados anteriormente descritos. Ya que  $S = n \frac{9l^{*2}}{n^2} = 9l^* \frac{l^*}{n} < \varepsilon$  (la última desigualdad se desprende de la expresión  $\frac{l^*}{n} < \frac{\varepsilon}{9l^*}$ ), entonces  $S_d - S_i < \varepsilon$ . Por eso, según el teorema 2.2, la figura  $Q$  es cuadrable. El teorema queda demostrado.

**2 Área del trapecio curvilíneo.** Se llama trapecio curvilíneo a la figura limitada por la gráfica de una función continua y no negativa  $f(x)$  prefijada en el segmento  $[a, b]$ , por las ordenadas trazadas en los puntos  $a$  y  $b$  y por el segmento del eje  $Ox$  entre los puntos  $a$  y  $b$  (fig. 2.5). Demostremos la siguiente afirmación.

*El trapecio curvilíneo es una figura cuadrable, cuya área  $P$  puede calcularse por la fórmula*

$$P = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.28)$$

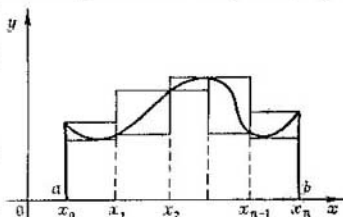


Fig. 2.5

**DEMOSTRACIÓN** Ya que la función continua en el segmento  $[a, b]$  es integrable, para cualquier número positivo  $\varepsilon$  se puede indicar una partición  $T$  del segmento  $[a, b]$  tal que la diferencia  $S - s < \varepsilon$ ,

donde  $S$  y  $s$  son, respectivamente, las cotas superior e inferior de la partición  $T$ . Pero  $S$  y  $s$  son iguales a  $S_d$  y  $S_i$ , respectivamente, donde  $S_d$  y  $S_i$  son las áreas de las figuras escalonadas (polígonos), la primera de las cuales comprende el trapecio curvilíneo y la segunda se contiene en el trapecio curvilíneo (la fig. 2.5 representa dichas figuras escalonadas). Dado que  $S_d - S_i < \varepsilon$  entonces, conforme al teorema 2.2, el trapecio curvilíneo es cuadrable. Puesto que el límite de

las cotas superiores e inferiores para  $\Delta \rightarrow 0$  es igual a  $\int_a^b f(x) dx$  y  $s \leq P \leq S$ , entonces el área  $P$  del trapecio curvilíneo puede hallarse por la fórmula (2.28).

**OBSERVACION.** Si la función  $f(x)$  es continua y no positiva en el segmento  $[a, b]$ , el valor de la integral  $\int_a^b f(x) dx$  es igual al área

del trapecio curvilíneo tomada con el signo negativo y limitada por la gráfica de la función  $f(x)$ , las ordenadas de los puntos  $a$  y  $b$  y el segmento del eje  $Ox$  entre los puntos  $a$  y  $b$ . Por eso, si  $f(x)$  cambia de signo,  $\int_a^b f(x) dx$  es igual a la suma de áreas, tomadas con un signo

determinado, de los trapecios curvilíneos que se encuentran por encima o por debajo del eje  $Ox$  con tal de que las áreas de los primeros se tomen con el signo  $+$  y los de los segundos, con el signo  $-$ .

**3 Área del sector curvilíneo.** Sea la curva  $L$  dada en el sistema polar por la ecuación  $r = r(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  (fig. 2.6) con tal de que la función  $r(\theta)$  sea continua y no negativa en el segmento  $[\alpha, \beta]$ . La

figura plana, limitada por la curva  $L$  y dos rayos que forman los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  con el eje polar, se denominará *sector curvilíneo*.

Demostremos la siguiente afirmación. *El sector curvilíneo es una figura cuadrable, cuya área  $P$  puede calcularse por la fórmula*

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta. \quad (2.29)$$

DEMOSTRACIÓN Consideremos la partición  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$  por los puntos  $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$  y para todo segmento

parcial  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$  construyamos sectores circulares, cuyos radios son iguales a  $r_i$  mínimo y a  $R_i$  máximo de los valores  $r(\theta)$  en el segmento  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ . Como resultado obtenemos dos figuras en forma de abanico, la primera de las cuales se comprende dentro del sector curvilíneo y la segunda comprende el sector curvilíneo (estas figuras en forma de abanico se representan en la fig. 2.6). Las

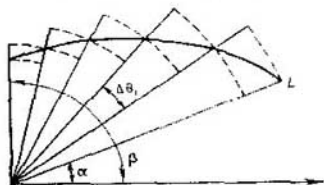


Fig. 2.6

áreas  $\bar{S}_i$  y  $\bar{S}_d$  de dichas figuras de abanico son respectivamente iguales a

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta\theta_i \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i^2 \Delta\theta_i.$$

Notemos que la primera de estas sumas es la suma inferior  $s$  de la función  $\frac{1}{2} r^2(\theta)$  con la partición  $T$  del segmento  $[\alpha, \beta]$ , y la segunda, la suma superior de la misma función con la misma partición. Ya que la función  $\frac{1}{2} r^2(\theta)$  es integrable en el segmento  $[\alpha, \beta]$ , la diferencia  $S - s = \bar{S}_d - \bar{S}_i$  puede ser tan pequeña como se quiera. Por ejemplo, para cualquier  $\varepsilon > 0$  fijado esta diferencia puede hacerse menor que  $\varepsilon/2$ . Inscribamos ahora en la figura interior en forma de abanico el polígono  $Q_i$  de área  $S_i$ , para el cual  $\bar{S}_i - S_i < \frac{\varepsilon}{4}$ , y circunscribamos alrededor de la figura exterior en forma de abanico el polígono  $Q_d$  de área  $S_d$ , para el cual  $S_d - \bar{S}_d < \frac{\varepsilon}{4}$  \*). Obviamente, el primero de estos polígonos está inscrito en el sector curvilíneo y el segundo, circunscrito alrede-

\*) Las figuras consideradas en forma de abanico se componen de sectores circulares. Todo sector es cuadrable, y, por tanto, son también cuadrables las figuras en forma de abanico. Por eso, para estas figuras pueden hallarse los polígonos cuyas áreas  $S_i$  y  $S_d$  satisfacen las desigualdades indicadas

dor de él. Dado que son válidas las desigualdades

$$S_i < \bar{S}_i \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta < \bar{S}_d < S_d, \quad (2.30)$$

resulta evidente que  $S_d - S_i < \varepsilon$ . En virtud de la arbitrariedad de  $\varepsilon$ , de esta expresión se desprende la cuadrabilidad del sector curvilíneo. De las desigualdades (2.30) se deduce la validez de la fórmula (2.29).

4. Ejemplos para calcular las áreas. 1°. Hállese el área  $P$  de la figura  $F$  limitada por las gráficas de las funciones  $y = x^\alpha$  y  $x = y^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$  (fig. 2.7). Debido a que la figura  $F$  es simétrica respecto a la bisectriz del primer ángulo de coordenadas, su área puede obtenerse sustrayendo de 1 (área del cuadrado) el área doble del trapecio curvilíneo determinado por la gráfica de

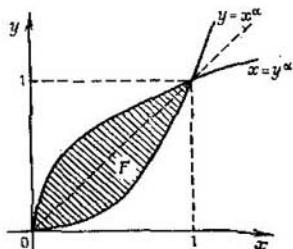


Fig. 2.7

la función  $y = x^\alpha$  en el segmento  $[0, 1]$ . De este modo, por la fórmula (2.28).

$$P = 1 - 2 \int_0^1 x^\alpha dx - 1 - 2 \left[ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

2°. Por tres puntos de coordenadas  $(-h, y_0)$ ,  $(0, y_1)$ ,  $(h, y_2)$  pasa una sola parábola  $y = Ax^2 + Bx + D$  (o una recta si los puntos se encuentran en una línea recta). En efecto, el sistema de ecuaciones respecto a  $A, B, D$  \*)

$$\left. \begin{aligned} Ah^2 - Bh + D &= y_0, \\ D &= y_1, \\ Ah^2 + Bh + D &= y_2 \end{aligned} \right\}$$

tiene una solución única. A saber:

$$A = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}, \quad B = \frac{y_2 - y_0}{2h}, \quad D = y_1.$$

Empleando las ordenadas  $y_0, y_1$  y  $y_2$  expresemos el área  $P$  del trapecio curvilíneo, determinado por dicha parábola, las ordenadas de los puntos  $(-h, 0)$  y  $(h, 0)$  y el segmento del eje  $Ox$  entre estos pun-

\*) Estas ecuaciones son condiciones de que los puntos  $(-h, y_0)$ ,  $(0, y_1)$  y  $(h, y_2)$  pertenecen a la parábola  $y = Ax^2 + Bx + D$ .

los (fig. 2.8). Ya que, según la fórmula (2.28),

$$P = \int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + D) dx = \left[ \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Dx \right]_{-h}^h = \frac{2Ah^3}{2} + 2Dh.$$

teniendo en cuenta las expresiones de  $A$  y  $D$ , hallamos

$$P = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

3°. Hállese el área  $P$  del trébol que tiene  $r = a \cos 3\theta$  (fig. 2.9). Del dibujo se ve que toda la superficie del trébol es igual al área de

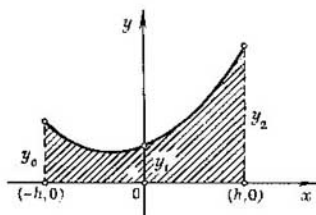


Fig. 2.8

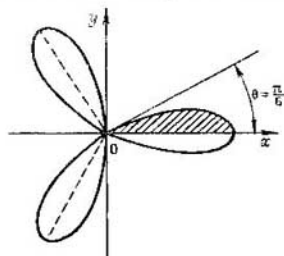


Fig. 2.9.

la parte rayada multiplicada por seis que corresponde a la variación de  $\theta$  desde 0 hasta  $\pi/6$ . Por eso, según la fórmula (2.9),

$$P = 6 \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{4}.$$

### § 3. Volúmenes de los cuerpos y áreas de las superficies

1. **Conceptos de cubicabilidad y de volumen.** Sea  $U$  un cuerpo finito \*). Consideremos todos los poliedros posibles inscritos en dicho cuerpo y todos los poliedros posibles circunscritos alrededor de él. El cálculo del volumen del poliedro se reduce a calcular los volúmenes de los tetraedros (pirámides triangulares). Por eso, consideremos que el concepto de volumen del poliedro es conocido.

Sea  $\{V_i\}$  el conjunto numérico de los volúmenes de los poliedros inscritos en el cuerpo  $E$  y  $\{V_d\}$  el conjunto numérico de los volúmenes de los poliedros circunscritos alrededor de  $E$ . El conjunto  $\{V_i\}$  está acotado superiormente (por el volumen de cualquier poliedro circunscrito), y el conjunto  $\{V_d\}$ , acotado inferiormente (por ejemplo,

\*) Se denominará cuerpo a la parte del espacio, limitada por una superficie cerrada no intersecante.

mediante el número cero). Mediante  $\underline{V}$  denotemos la cota superior exacta del conjunto  $\{V_i\}$ , y mediante  $\overline{V}$ , la cota inferior exacta del conjunto  $\{V_d\}$ . Los números  $\underline{V}$  y  $\overline{V}$  se denominan respectivamente volumen inferior y volumen superior del cuerpo  $E$ .

Señalemos que el volumen inferior  $\underline{V}$  del cuerpo  $E$  no es mayor que el volumen superior  $\overline{V}$  de este cuerpo, o sea,  $\underline{V} \leq \overline{V}$ . Para cerciorarse de que esto es válido, basta hacer unos razonamientos análogos a los hechos para la demostración de la desigualdad  $\underline{P} \leq \overline{P}$  (véase el p. 1 del § 2).

Introduzcamos ahora el concepto de *cubicabilidad* del cuerpo.

**Definición.** El cuerpo  $E$  se denomina *cubicable* si el volumen superior  $\overline{V}$  de este cuerpo coincide con el volumen inferior  $\underline{V}$ . Además, el número  $V = \underline{V} = \overline{V}$  se llama *volumen del cuerpo  $E$* .

Es válido el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.** Para que el cuerpo  $E$  sea *cubicable*, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo  $\varepsilon$  se pueda indicar tal poliedro circunscrito alrededor del cuerpo  $E$  y tal poliedro inscrito en el cuerpo  $E$  que la diferencia  $V_d - V_i$  de sus volúmenes sea menor que  $\varepsilon$ . La demostración de este teorema es completamente análoga a la del teorema 2.2 (véase el p. 1 del § 2).

**2. Cubicabilidad de algunas clases de cuerpos.** Se denominará *cilindro* al cuerpo limitado por la

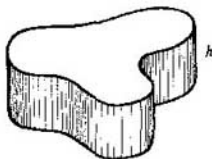


Fig. 2.10

superficie cilíndrica con las generatrices paralelas a un eje y por dos planos perpendiculares a este eje. Intersecándose con la superficie cilíndrica, estos planos forman figuras planas llamadas *bases* del cilindro, y la distancia  $h$  entre las bases del cilindro se denomina *altura del cilindro* (fig. 2.10).

Demostremos la siguiente afirmación. Si la base del cilindro  $E$  es una figura cuadrable  $Q$ , el cilindro es un cuerpo *cubicable* con tal de que el volumen  $V$  del cilindro  $E$  sea igual a  $Ph$ , donde  $P$  es el área de la base  $Q$ , y  $h$ , altura del cilindro.

Puesto que la figura  $Q$  es cuadrable, para cualquier número positivo  $\varepsilon$  pueden indicarse tales polígonos circunscrito e inscrito en esta figura que la diferencia  $S_d - S_i$  de sus áreas sea menor que  $\varepsilon/h$ . Los volúmenes  $V_d$  y  $V_i$  de las prismas de altura  $h$ , cuyas bases son los polígonos anteriormente indicados, son iguales a  $S_d h$  y  $S_i h$ , respectivamente. Por tanto,  $V_d - V_i = (S_d - S_i) h < \frac{\varepsilon}{h} h = \varepsilon$ . Dado que estas prismas son, respectivamente, los poliedros circuns-

crito e inscrito en el cuerpo considerado  $E$ , conforme al teorema 2.4, el cuerpo  $E$  es cubicable. Puesto que  $V_i \leq Ph \leq V_d$ , el volumen del cilindro es igual a  $Ph$ .

De la afirmación demostrada se desprende la *cubicabilidad de los cuerpos escalonados* (se llama cuerpo escalonado a la unión de un número finito de cilindros dispuestos de tal modo que la base superior de todo cilindro anterior se halle en el mismo plano que la base inferior del cilindro posterior, véase la fig. 2.11).

OBSERVACION. Es válida la siguiente afirmación evidente. Si para cualquier número positivo  $\varepsilon$  se puede indicar un cuerpo escalonado

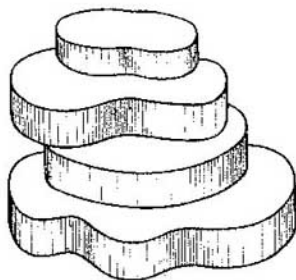


Fig. 2.11

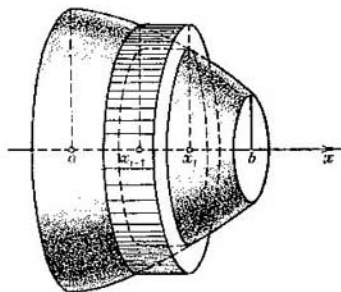


Fig. 2.12

circunscrito alrededor del cuerpo  $E$  y un cuerpo escalonado inscrito en  $E$ , tales que la diferencia  $V_d - V_i$  de sus volúmenes sea menor que  $\varepsilon$ , el cuerpo  $E$  es cubicable.

Empleemos esta afirmación para demostrar la *cubicabilidad del cuerpo de revolución* (fig. 2.12). A saber, demostremos la siguiente afirmación.

Sea la función  $y = f(x)$  continua en el segmento  $[a, b]$ . Entonces, el cuerpo  $E$  formado por revolución, alrededor del eje  $Ox$ , del trapecio curvilíneo limitado por la gráfica de la función  $f(x)$ , las ordenadas de los puntos  $a$  y  $b$  y por el segmento del eje  $Ox$  de  $a$  hasta  $b$ , es cubicable y su volumen  $V$  puede hallarse por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2.31)$$

DEMOSTRACION. Sea  $T$  la partición del segmento  $[a, b]$  por los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , y sean  $m_i$  y  $M_i$  las cotas exactas de  $f(x)$  en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ . En cada uno de estos segmentos construyamos dos rectángulos de alturas  $m_i$  y  $M_i$  (la fig. 2.12



presenta estos rectángulos sólo en un segmento  $(x_{i-1}, x_i)$ . Obtenemos dos figuras escalonadas, una de las cuales se comprende en el trapecio curvilíneo, y la otra lo comprende. Al girar el trapecio curvilíneo y estas figuras escalonadas, obtenemos el cuerpo  $E$  y dos cuerpos escalonados, uno de los cuales se comprende en  $E$  y otro comprende  $E$ . Los volúmenes  $V_i$  y  $V_d$  de estos cuerpos escalonados son respectivamente iguales a

$$\pi \sum_{i=1}^n m_i^2 \Delta x_i \quad \text{y} \quad \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 \Delta x_i.$$

Obviamente, estas expresiones son las sumas superior e inferior de la función  $\pi f^2(x)$ . Dado que esta función es integrable, para una partición  $T$  del segmento  $[a, b]$ , la diferencia de dichas sumas será menor que el número positivo dado  $\varepsilon$ . Por consiguiente, el cuerpo  $E$

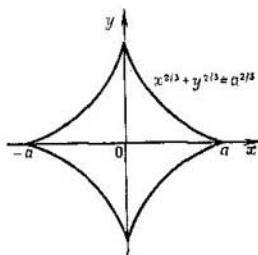


Fig. 2.13

es cubicable. Puesto que el límite de dichas sumas es igual a  $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ , el volumen  $V$  del cuerpo  $E$  puede hallarse por la fórmula (2.31).

**3. Ejemplos para calcular los volúmenes.**

1°. Volumen del cuerpo obtenido por revolución de la asteroide  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  alrededor del eje  $Ox$  (fig. 2.13). Como  $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ , se tiene

$$V = \pi \int_{-a}^a (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

2°. Volumen del cuerpo obtenido por revolución de la sinusoide alrededor del eje  $Ox$  en el segmento  $[0, \pi]$ . Tenemos

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

4. Área de la superficie de revolución. Consideremos la superficie  $\Pi$  formada por revolución de la gráfica de la función  $y = f(x)$  dada en el segmento  $[a, b]$  alrededor del eje  $Ox$  (fig. 2.14). Definamos el concepto de *cuadrabilidad* de la superficie de revolución  $\Pi$ . Sea  $T$  la partición del segmento  $[a, b]$  por los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , y sean  $A_0, A_1, \dots, A_n$  los puntos correspondientes de la gráfica de la función  $f(x)$ . Construyamos la quebra-

da  $A_0A_1 \dots A_n$ . Al girar esta quebrada alrededor del eje, obtenemos la superficie  $\Pi (A_i)$  compuesta por las superficies laterales de los conos truncados. Mediante  $P(x_i)$  denotemos el área de la superficie  $\Pi (A_i)$ . Si  $y_i$  son ordenadas de  $f(x)$  en los puntos  $x_i$  y  $l_i$  es longitud del tramo  $A_{i-1}A_i$  de la quebrada  $A_0A_1 \dots A_n$ , entonces,

$$P(x_i) = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} l_i = \pi \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) l_i. \quad (2.32)$$

Enunciemos las siguientes definiciones.

1°. El número  $P$  se denomina límite de las áreas  $P(x_i)$ , si para cualquier número positivo dado  $\varepsilon$  se puede indicar un número positivo  $\delta$  tal que, para cualquier partición  $T$  del segmento  $[a, b]$  (en el cual la máxima longitud  $\Delta$  de los segmentos parciales es menor que  $\delta$ ) se cumple la desigualdad  $|P(x_i) - P| < \varepsilon$ .

2°. La superficie de revolución  $\Pi$  se denomina cuadrable, si existe el límite  $P$  de las áreas  $P(x_i)$ . Además, el número  $P$  se denomina área de la superficie  $\Pi$ .

Demostremos la siguiente afirmación.

Si en el segmento  $[a, b]$  la función  $f(x)$  tiene derivada continua  $f'(x)$ , entonces la superficie  $\Pi$  formada por la revolución de la

gráfica de esta función alrededor del eje  $Ox$ , es cuadrable y su área puede calcularse por la fórmula

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (2.33)$$

DEMOSTRACIÓN. La longitud  $l_i$  del tramo  $A_{i-1}A_i$  de la quebrada  $A_0A_1 \dots A_n$  es igual a  $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ . Según la fórmula de Lagrange, tenemos  $y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ . Poniendo  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ , obtenemos  $l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \times \Delta x_i$ . Por tanto, según (2.32),

$$P(x_i) = 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i + \pi \left\{ \sum_{i=1}^n (y_{i-1} - f(\xi_i)) + (y_i - f(\xi_i)) \right\} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i. \quad (2.34)$$

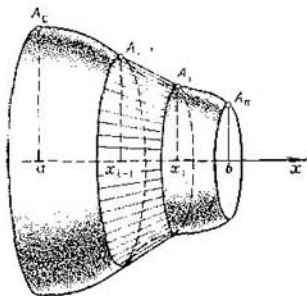


Fig. 2.14

En el miembro derecho de la relación (2.34), la primera suma es la suma integral de la función  $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$  que, en virtud de las condiciones de la afirmación que demostramos, es integrable

y tiene el límite  $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} dx$ . Demostremos que

la expresión entre llaves en el miembro derecho de la relación (2.34) tiene límite igual a cero. En efecto, sea  $\varepsilon$  un número positivo cualquiera. Ya que la función  $f(x)$  es uniformemente continua en el segmento  $[a, b]$ , para  $\varepsilon > 0$  dado se puede indicar un  $\delta > 0$  tal que para  $\Delta < \delta$  ( $\Delta = \max \Delta x_i$ ) se cumplen las desigualdades  $|y_{i-1} - f(\xi_i)| < \varepsilon$  y  $|y_i - f(\xi_i)| < \varepsilon$ . Si  $M$  es el valor máximo de la función  $\sqrt{1+f'^2(x)}$  en el segmento  $[a, b]$ , para la expresión entre llaves en el miembro derecho de la relación (2.34), obtenemos la estimación

$$\left| \left\{ \sum_{i=1}^n [(y_{i-1} - f(\xi_i)) - (y_i - f(\xi_i))] \sqrt{1+f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \right\} \right| < \\ < 2M\varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 2M(b-a)\varepsilon.$$

En virtud de la arbitrariedad de  $\varepsilon > 0$ , el límite de dicha expresión es igual a cero. Así pues, hemos demostrado la existencia del límite  $P$  de las áreas  $P(x_i)$  y hemos establecido que este límite puede calcularse por la fórmula (2.33). La afirmación queda demostrada.

**OBSERVACION 1.** La cuadrabilidad de la superficie de revolución se puede demostrar también en condiciones menos rigurosas. Es suficiente exigir que la función  $f(x)$  sea definida e integrable en el segmento  $[a, b]$ . De esta suposición se desprende la integrabilidad de la función  $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$  (véase el complemento 1, cap. 1, tomo 2). Los razonamientos ulteriores en nada se diferencian de los razonamientos que hemos hecho para demostrar la afirmación de este punto.

**OBSERVACION 1.** Si la superficie  $\Pi$  se obtiene girando alrededor del eje  $Ox$ , la curva  $L$  determinada por las ecuaciones paramétricas  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , al realizar el cambio de variables bajo el signo de la integral definida en la fórmula (2.33), obtenemos la siguiente expresión para el área  $P$  de esta superficie

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (2.35)$$

Consideremos los ejemplos de cálculo de áreas de las superficies de revolución.

1°. Hallemos el área  $P$  de la superficie de la elipsoide de revolución  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  que gira alrededor del eje  $Ox$ . Consideremos primeramente el caso cuando  $a > b$  (revolución alrededor del eje grande de la elipse). Dado que en

este caso  $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ , tomando  $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ , hallamos

$$P = 2\pi \int_{-a}^a f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - e^2 x^2} dx = \\ = 2\pi b \left( b + \frac{a}{e} \arcsen e \right).$$

Si  $a < b$ , poniendo  $e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}}$  y realizando los cálculos correspondientes, obtenemos

$$P = 2\pi b \left( b + \frac{a^2}{2b} \frac{1}{e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right).$$

2°. Hallemos el área  $P$  de la superficie formada por revolución, alrededor de eje  $Ox$ , de la cicloide determinada por las ecuaciones paramétricas  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Por la fórmula (2.35), tenemos

$$P = 2\pi \int_a^b \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = 2\pi \sqrt{2} \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2} dt = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

#### § 4. Algunas aplicaciones físicas de la integral definida

1. Masa y centro de gravedad de una varilla heterogénea. Examinemos una varilla heterogénea que se encuentra en el segmento  $[a, b]$  del eje  $Ox$ . Sea  $\rho(x)$  la densidad lineal de la varilla \*). Denotemos con  $T$  la partición del segmento  $[a, b]$  por los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . En todo segmento parcial  $[x_{i-1}, x_i]$  escojamos un punto  $\xi_i$  y compongamos la suma  $\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i$ . Dado que todo sumando de esta suma es valor aproximado de la masa de la parte de la varilla en el segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ , dicha suma se toma lógicamente por valor aproximado de la masa de toda la varilla. Conforme a los razonamientos anteriores, *definamos la masa  $M$  de toda la varilla como el límite de las sumas  $\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x_i$  cuando  $\Delta = \max \Delta x_i$*

\*) Si  $\Delta m$  es la masa de la parte de la varilla que se encuentra dentro del segmento  $[x, x + \Delta x]$ , la relación  $\Delta m : \Delta x$  se denomina *densidad lineal media* de la varilla en este segmento. Se llama densidad lineal  $\rho(x)$  el límite  $\rho(x) =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

tiende a cero, es decir, como la integral  $\int_a^b \rho(x) dx$ . De este modo,

$$M = \int_a^b \rho(x) dx. \quad (2.36)$$

Para determinar el centro de gravedad de la varilla heterogénea, empleemos la fórmula de la coordenada del centro de gravedad del sistema  $\{m_i(x_i)\}$  de puntos materiales que tienen las masas  $m_i$  y se encuentran en los puntos  $x_i$  del eje  $Ox$ . A saber, la coordenada  $x_c$  del centro de gravedad del sistema  $\{m_i\}$  puede hallarse por la fórmula

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \sum_{i=1}^n m_i x_i / \sum_{i=1}^n m_i. \quad (2.37)$$

Consideremos la partición  $T$  del segmento  $[a, b]$  por los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  y calculemos la masa  $m_i$  de la parte de la varilla que se encuentra dentro del segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ . Por la

fórmula (2.36), tenemos  $m_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x) dx$ . Aplicando la fórmula

la (1.13) del valor medio, obtenemos también que  $m_i = \rho(\xi_i) \Delta x_i$ . Tomando que la masa  $m_i$  está concentrada en el punto  $\xi_i$  del segmento  $[x_{i-1}, x_i]$ , podemos considerar la varilla heterogénea como un sistema de puntos materiales de masas  $m_i$  que se hallan en los puntos  $\xi_i$  del segmento  $[a, b]$ . Ya que

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x) dx = \int_a^b \rho(x) dx = M,$$

por la fórmula (2.37), hallamos el valor aproximado de la coordenada  $x_c$  del centro de gravedad de la varilla heterogénea

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i) \Delta x_i}{M}. \quad (2.38)$$

La expresión del numerador del miembro derecho de la relación (2.38) es la suma integral de la función  $x\rho(x)$  en el segmento  $[a, b]$ . En correspondencia con los razonamientos que hemos hecho, determinemos la coordenada  $x_c$  del centro de gravedad de la varilla heterogénea

por la fórmula

$$x_c = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx} \quad (2.39)$$

**2. Trabajo de una fuerza variable.** Supongamos que el punto material se mueve desde el punto  $a$  en el eje  $Ox$  hasta el punto  $b$  en este mismo eje bajo la acción de la fuerza  $F$  paralela al eje  $Ox$ . Consideremos que esta fuerza es función de  $x$  y está definida sobre el segmento  $[a, b]$ . Sea  $T$  la partición del segmento  $[a, b]$  por los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . En cada segmento parcial  $[x_{i-1}, x_i]$  escojamos un punto  $\xi_i$  y tomemos como valor aproximado del trabajo  $A$  de la fuerza variable  $F(x)$  en el segmento  $[a, b]$  la expresión  $\sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta x_i$ . En correspondencia con estos razonamientos preliminares, definamos el trabajo  $A$  de la fuerza variable  $F(x)$  en el segmento  $[a, b]$  como la integral  $\int_a^b F(x) dx$ . De este modo,

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (2.40)$$

### Complemento

#### Ejemplo de una figura no cuadrable

1. Denominemos *triángulo semabierto* al conjunto de puntos de un triángulo, de cuya frontera \*) se eliminan los puntos de sus dos lados y dos vértices

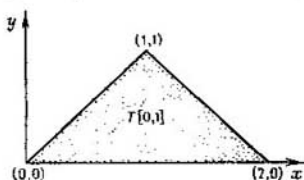


Fig. 2.15

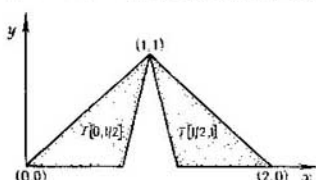


Fig. 2.16

adyacentes a estos lados. Consideremos la construcción de la curva  $L$  que será parte de la frontera de una figura no cuadrable  $Q$ . Realicemos esta construcción

\*) La frontera del triángulo es el conjunto de puntos de sus lados y vértices.

eliminando sucesivamente ciertos triángulos semiabiertos de un triángulo rectángulo isósceles  $T$  dado que denotamos  $T[0, 1]$ , para que los razonamientos sucesivos sean más cómodos. Las coordenadas de los vértices de este triángulo

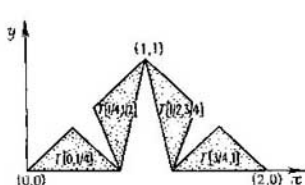


Fig. 2.17

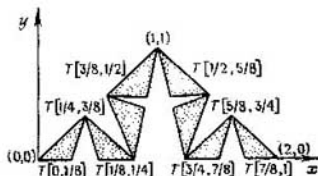


Fig. 2.18

son  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$  (fig. 2.15). Describamos ahora el proceso de eliminación sucesiva de los triángulos semiabiertos definidos del triángulo  $T[0, 1]$ :

1. Se elimina el triángulo semiabierto, un vértice del cual tiene las coordenadas  $(1, 1)$  y otros dos se encuentran en el eje  $Ox$ . El área  $S_1$  del triángulo eliminado es igual a  $1/4$ . La figura obtenida se representa en la fig. 2.16. Se compone de dos triángulos  $T[0, 1/2]$  y  $T[1/2, 1]$  cuyas áreas son iguales.

2. En el triángulo  $T[0, 1/2]$  y el  $T[1/2, 1]$  se elimina un triángulo, o sea en total dos cuya suma  $S_2$  de áreas es igual a  $1/8$ . La figura obtenida se representa en la fig. 2.17 y se compone de los cuatro triángulos  $T[0, 1/4]$ ,  $T[1/4, 1/2]$ ,  $T[1/2, 3/4]$ ,  $T[3/4, 1]$  cuyas áreas son iguales.

3. De cada uno de dichos triángulos se elimina uno, o sea cuatro triángulos en total cuya suma  $S_3$  de áreas es igual a  $1/16$ . La figura obtenida se representa en la fig. 2.18. Se compone de los ocho triángulos:

$$T[0, 1/8], T[1/8, 1/4], T[1/4, 3/8], T[3/8, 1/2], \\ T[1/2, 5/8], T[5/8, 3/4], T[3/4, 7/8], T[7/8, 1],$$

cuyas áreas son iguales.

4. De cada uno de dichos triángulos se elimina uno o sea ocho en total cuya suma de áreas es igual a  $1/32$ . La figura obtenida se representa en la fig. 2.19. Se compone de dieciséis triángulos de áreas iguales. Cada uno de estos triángulos se denota con el símbolo

$$T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right], \quad p=0, 1, \dots, 15.$$

La eliminación sucesiva de los triángulos es evidente. Pasemos ahora a la definición de la curva  $L$ . Los triángulos  $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$  ( $p$  y  $n$  son cualesquiera números enteros no negativos que satisfacen la condición  $p < 2^n$ ) obtenidos en el proceso anteriormente descrito poseen la propiedad siguiente sean  $T\left[\frac{p_1}{2^{n_1}}, \frac{p_1+1}{2^{n_1}}\right]$  y  $T\left[\frac{p_2}{2^{n_2}}, \frac{p_2+1}{2^{n_2}}\right]$  dos triángulos tales que

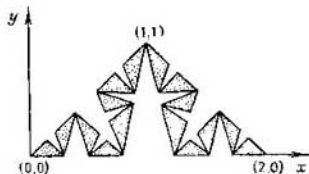


Fig. 2.19

$\frac{p_1}{2^{n_1}} \leq \frac{p_2}{2^{n_2}} < \frac{p_2+1}{2^{n_2}} \leq \frac{p_3+1}{2^{n_3}}$ . Entonces, el segundo de estos triángulos se comprende dentro del primero. Notemos también la siguiente propiedad evidente de los triángulos  $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ : cuando  $n \rightarrow \infty$  sus diámetros \*) tienden a cero. Sea  $\left\{T\left[\frac{p_k}{2^{n_k}}, \frac{p_k+1}{2^{n_k}}\right]\right\}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , un sistema concentrado de triángulos (esto significa que el triángulo correspondiente al índice  $k$  comprende el triángulo correspondiente al índice  $k+1$  y para  $k \rightarrow \infty$  los diámetros de los triángulos tienden a cero). Todo sistema concentrado de triángulos tiene exactamente un punto común \*\*). Consideremos todos los sistemas

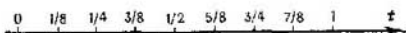


Fig. 2.20

concentrados posibles de los triángulos anteriormente indicados. Definamos la curva  $L$  como el conjunto  $\{M\}$  de todos los puntos posibles, cada uno de los cuales es punto común del sistema concentrado de los triángulos anteriormente mencionados  $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ .

Señalemos que al conjunto  $\{M\}$  (a la curva  $L$ ) le pertenecen los vértices de todos los triángulos  $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ . Para cerciorarse de esto, observemos que el vértice de cada uno de estos triángulos pertenece al sistema concentrado de triángulos  $\left\{T\left[\frac{2^k p}{2^{n+k}}, \frac{2^k p+1}{2^{n+k}}\right]\right\}$  y al sistema  $\left\{T\left[\frac{2^k p-1}{2^{n+k}}, \frac{2^k p}{2^{n+k}}\right]\right\}$ . Para convencerse de que el conjunto construido  $\{M\}$  es una curva simple en el sentido de la definición dada en el p. 1 del § 1 del presente capítulo, debemos demostrar que todos los puntos del conjunto  $M$  se determinan por las ecuaciones paramétricas  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , donde  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  son funciones continuas \*\*\*).

Consideremos el segmento  $[0, 1]$  del eje  $t$ . Para todo segmento  $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ , siendo  $p$  y  $n$  cualesquiera números enteros no negativos  $p < 2^n$ , le pongamos en correspondencia el triángulo  $T\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$  \*\*\*\*). La fig. 2.20 presenta los segmentos correspondientes a los triángulos

\*) Se llama diámetro del triángulo a la longitud de su lado máximo.

\*\*\*) En el cap. 3 (véase el p. 2, § 3, tomo 1) hemos demostrado que el sistema concentrado de segmentos tiene exactamente un punto común. Proyectando el sistema concentrado de triángulo sobre los ejes  $Ox$  y  $Oy$ , obtenemos los sistemas concentrados de segmentos en los ejes de coordenadas. Sean, respectivamente  $x$  e  $y$  los puntos comunes de dichos sistemas concentrados de segmentos en los ejes  $Ox$  y  $Oy$ . El lector puede cerciorarse fácilmente de que el punto  $M$  de coordenadas  $x$  e  $y$  es el único punto común de dicho sistema concentrado de triángulos.

\*\*\*\*) El hecho de que a diferentes  $t$  les corresponden puntos diferentes del conjunto  $M$  se evidencia por la construcción de la curva  $L$ .

\*\*\*\*\*) Notemos que a cada uno de estos triángulos le corresponde un solo segmento  $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right]$ .



$T_1 \left[ \frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k} \right]$ . Todo punto  $t$  del segmento  $[0, 1]$  pertenece a todos los segmentos de un sistema concentrado  $\left\{ \left[ \frac{pk}{2^{nk}}, \frac{pk+1}{2^{nk}} \right] \right\}$  de segmentos \*). Pongamos en correspondencia con este punto  $t$  al punto común  $M$  del sistema concentrado de triángulos  $\left\{ T \left[ \frac{pk}{2^{nk}}, \frac{pk+1}{2^{nk}} \right] \right\}$ . De este modo, a todo valor  $t$  del segmento  $[0, 1]$  se le ponen en correspondencia las coordenadas  $x$  e  $y$  del punto  $M$ . Por consiguiente,  $x$  e  $y$  son funciones del parámetro  $t$ . Cerciorémonos de que las funciones  $x = \varphi(t)$  e  $y = \psi(t)$  son continuas en el segmento  $[0, 1]$ . En efecto, sean  $\varepsilon$  un número cualquiera positivo dado,  $t$ , un punto dado del segmento  $[0, 1]$  y  $M$  un punto de la curva  $L$  determinado por este valor del parámetro  $t$ . Del sistema concentrado de triángulos  $\left\{ T \left[ \frac{pk}{2^{nk}}, \frac{pk+1}{2^{nk}} \right] \right\}$  que determinan el punto  $M$  elegimos un triángulo con el diámetro menor que  $\varepsilon$  y consideremos el segmento  $\left[ \frac{pk}{2^{nk}}, \frac{pk+1}{2^{nk}} \right]$  que

comprende el punto  $t$  que determina  $M$  (y, por consiguiente,  $x$  e  $y$ ). Todos los puntos de la curva  $L$  determinados por los valores  $t$  de este segmento se encuentran en el triángulo anteriormente mencionado y, por tanto, sus coordenadas se diferencian de las del punto  $M$  en no más de  $\varepsilon$ . Pero, esto significa que las funciones  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  son continuas en dicho punto.

2. Pasemos a la construcción de la figura no cuadrable  $Q$ . Consideremos el cuadrado  $Q$  cuyo lado es igual a 2. Sobre cada lado de este cuadrado construyamos triángulos rectángulos isósceles  $T_1, T_2, T_3, T_4$ . Como resultado, obtenemos el cuadrado  $Q$  de lado  $2\sqrt{2}$  (fig. 2.21). Luego, de cada uno de estos triángulos eliminemos los triángulos semiabiertos del modo descrito anteriormente (en el p. 1). Como resultado, obtenemos la figura  $Q$  limitada por la curva cerrada compuesta por cuatro curvas congruentes\*\*) a la curva  $L$  (véase el p. 1). Demostremos que la figura obtenida  $Q$  no es cuadrable. Consideremos dos sucesiones especiales de polígonos  $\{Q_n\}$  y  $\{\bar{Q}_n\}$ , la primera de los cuales se compone de los polígonos inscritos en la figura  $Q$  y la segunda, de los polígonos circunscritos alrededor de  $Q$ . La sucesión  $\{Q_n\}$  se obtiene si se unen el cuadrado  $Q$  y los triángulos semi-

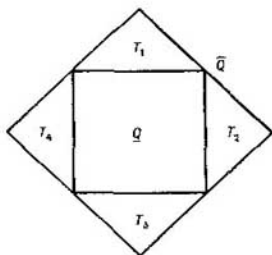


Fig. 2.21

\*) Sean  $t$  un punto cualquiera del segmento  $[0, 1]$  y  $n$  un número entero positivo cualquiera. Entonces, el punto  $t$  pertenece obviamente al segmento  $\left[ \frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right]$  con tal de que todo segmento de este tipo y correspondiente al número  $n+1$  se comprenda en el segmento correspondiente al número  $n$ .

\*\*) Los conjuntos  $A$  y  $B$  se denominan *congruentes* si son acordados por el movimiento.

abiertos eliminados de los triángulos  $T_1, T_2, T_3, T_4$  a todo paso impar del proceso descrito en el p. 1. La sucesión  $\{\bar{Q}_n\}$  se obtiene eliminando del cuadrado  $\bar{Q}$  los triángulos semiabiertos eliminados de los triángulos  $T_1, T_2, T_3, T_4$  en todo paso par del proceso descrito en el p. 1. Es obvio que cualquier polígono inscrito en la figura  $Q$  se comprenda en algún polígono  $\bar{Q}_n$  y cualquier polígono circunscrito alrededor de la figura  $Q$  comprenda algún polígono  $\underline{Q}_n$ . Por eso, el límite de la sucesión  $\{\underline{S}_n\}$  de las áreas de los polígonos  $\underline{Q}_n$  es igual al área inferior  $P$  de la figura  $Q$  y el límite de la sucesión  $\{\bar{S}_n\}$  de las áreas de los polígonos  $\bar{Q}_n$  es igual al área superior  $\bar{P}$  de la figura  $Q$ . Es fácil convencerse de que  $\underline{S}_n = 4 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^{k-1}}$

y  $\bar{S}_n = 8 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^{k-1}}$  (\*). Por eso,  $\underline{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n = 16/3$  y  $\bar{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = 22/3$ . Puesto que  $\bar{P} \neq \underline{P}$ , la figura  $Q$  no es cuadrable.

Señalemos que la diferencia  $\bar{P} - \underline{P} = 2$ . De este modo, la frontera de la figura considerada  $Q$  tiene un área igual a 2.

3. Demostremos que cualquier parte de la curva  $L$  limitada por dos puntos diferentes no es rectificable. En primer lugar, demostremos que esta parte  $L'$  de la curva  $L$  tiene un área diferente de cero, es decir, cualquier polígono que cubre  $L'$  tiene un área superior a un número positivo. Observemos que  $L'$  comprende la parte  $L''$  que corresponde a los puntos de segmento  $\left[ \frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right]$  y, por tan-

to,  $L''$  se comprende dentro del triángulo  $T \left[ \frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right]$  y puede obtenerse eliminando determinados triángulos semiabiertos de este triángulo (véase el p. 1 del presente complemento). Es fácil calcular que la suma  $S$  de las áreas de todos los triángulos semiabiertos eliminados es inferior a la suma  $S_T$  del triángulo  $T \left[ \frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} \right]$ . Por consiguiente, la parte  $L''$  tiene el área igual a  $S_T - S > 0$ .

En el § 2 del presente capítulo, demostrando la cuadrabilidad de la figura limitada por una curva rectificable, hemos demostrado que el área de la curva rectificable es igual a cero (la curva rectificable puede ser cubierta por un polígono de área tan pequeña como se quiera). Por tanto, la parte  $L''$  de la curva  $L$ , y, por consiguiente, la parte  $L'$ , que contiene  $L''$ , no es rectificable.

OBSERVACIÓN. Ninguna de las funciones construidas  $\varphi(t)$  y  $\psi(t)$  tiene derivada en ninguno de los puntos del segmento  $[0, 1]$ .

\*) Es fácil obtener estas fórmulas si tomamos en consideración que las sumas de las áreas de los triángulos eliminados en los pasos impares del proceso forman la progresión geométrica  $1, 1/4, \dots$  y las sumas de las áreas de los triángulos eliminados en los pasos pares del proceso, la progresión geométrica  $1/2, 1/8, \dots$

## Capítulo 3

# MÉTODOS APROXIMADOS DE CÁLCULO DE RAÍCES DE LAS ECUACIONES Y LAS INTEGRALES DEFINIDAS

En el presente capítulo se consideran métodos aproximados de determinación de raíces de las ecuaciones y trascendentes y de cálculo de integrales definidas.

### § 1. Métodos aproximados de cálculo de raíces de las ecuaciones

En este párrafo estudiaremos el cálculo aproximado de una de las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $y = f(x)$  es función continua o diferenciable. Admitiremos que la raíz  $c$  de esta ecuación es aislada en un segmento  $[a, b]$ , o sea, que esta raíz es punto interior del segmento  $[a, b]$  que no contiene otras raíces de la ecuación considerada. En la práctica, mediante una estimación aproximada suelen determinarse las dimensiones de dicho segmento  $[a, b]$  \*).

1. Método de la «horquilla». Comencemos por el método frecuentemente utilizado para el cálculo aproximado de las raíces en ordenadores modernos de acción rápida.

Sea la raíz  $c$  de la función  $f(x) = 0$  aislada en un segmento  $[a, b]$ . Respecto a la función  $f(x)$ , supongamos que es continua en el segmento  $[a, b]$  y en los extremos de este segmento tiene valores de signos diferentes. A continuación, para que sea más breve, denominaremos «horquilla» todo segmento en cuyos extremos  $f(x)$  tiene valores de signos diferentes.

Pasemos a describir el método de cálculo de la raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ , llamado *método de la «horquilla»*.

Para que sea más preciso, tomemos  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ . Dividamos el segmento  $[a, b]$  en dos partes iguales. En este caso pueden tenerse dos casos: 1) el valor de la función en el centro del segmento  $[a, b]$  es igual a cero (en este caso, la raíz buscada queda determinada). 2) dicho valor no es igual a cero. En este caso, una de las mitades del segmento  $[a, b]$  es una horquilla. La denotaremos  $[a_1, b_1]$ . Evidentemente,  $f(a_1) < 0$ ,  $f(b_1) > 0$ . Tratemos con el segmento  $[a_1, b_1]$  de modo igual que con el  $[a, b]$ , o sea, dividamos el segmento  $[a_1, b_1]$  en dos partes iguales. Siguiendo razonamientos análogos, tendremos dos posibilidades: 1) ora el proceso anteriormente descrito termina debido a que el valor de la función en el centro de uno de los

\*1) Además, se puede utilizar la información complementaria sobre la posición de la raíz que se desprende del contenido físico del problema.

segmentos será igual a cero (en este caso, la raíz buscada queda determinada), 2) ora se puede continuar ilimitadamente el proceso descrito y, como resultado, se obtiene el sistema concentrado de segmentos, horquillas  $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_n, b_n\}, \dots$ , con tal de que para cualquier número  $nf(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ . Dicho sistema concentrado de segmentos tiene un punto común  $c$  al que converge cada

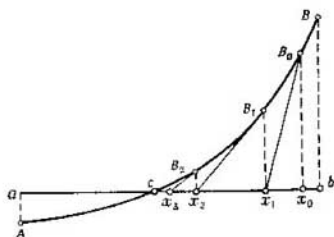


Fig. 3.1

una de las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  (véase el corolario del teorema 3.15, tomo 1). Demostremos que  $c$  es la raíz buscada, o sea,  $f(c) = 0$ . Puesto que la función  $f(x)$  es continua en el punto  $c$ , cada una de las sucesiones  $\{f(a_n)\}$  y  $\{f(b_n)\}$  converge a  $f(c)$ . Pero, entonces, de las condiciones  $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$  y en virtud del teorema 3.13 del tomo 1 y de la observación de este teorema, obtenemos que a la vez son válidas las desigualdades  $f(c) \leq 0$  y  $f(c) \geq 0$ , o sea,  $f(c) = 0$ .

Los razonamientos que hemos hecho dan el algoritmo que permite hallar la raíz buscada  $c$ . Por el valor aproximado de esta raíz se puede tomar el punto  $\frac{a_n + b_n}{2}$ , es decir, el punto medio del segmento  $[a_n, b_n]$ . Ya que la longitud del segmento  $[a_n, b_n]$  es igual a  $\frac{b-a}{2^n}$ , el número  $\frac{a_n + b_n}{2}$  se diferencia del valor exacto de la raíz en no más de  $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ . De este modo, mediante la división sucesiva por la mitad de los segmentos horquillas el proceso descrito permite calcular la raíz buscada  $c$  con cualquier grado de exactitud fijado de antemano. Dado que el proceso descrito conduce a la repetición múltiple de las operaciones de cálculo de un mismo tipo, es especialmente cómodo para realizar los cálculos con máquinas matemáticas de acción rápida.

**2. Método de las tangentes \*).** El método de las tangentes es uno de los métodos aproximados más eficaces de cálculo de raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ .

Sea la raíz buscada  $c$  de la ecuación  $f(x) = 0$  aislada en el segmento  $[a, b]$ . Pasemos a describir el método de las tangentes sin aclarar, por ahora, en qué condiciones es posible aplicar este método.

Consideremos la gráfica de la función  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$  (fig. 3.1). Como aproximación nula de la raíz buscada tomemos cierto valor  $x_0$  del segmento  $[a, b]$  y mediante  $B_0$  denotemos el punto de

\*) Este método se denomina también *método de Newton*.

la gráfica de la función con la abscisa  $x_0$ . Tracemos por el punto  $B_0$  la tangente a la gráfica de la función y como primera aproximación de la raíz buscada tomemos la abscisa  $x_1$  del punto de intersección de esta tangente con el eje  $Ox$  \*). Después tracemos la tangente a la gráfica de la función por el punto  $B_1$  de abscisa  $x_1$  y como segunda aproximación tomemos la abscisa  $x_2$  del punto de intersección de esta tangente con el eje  $Ox$ . Siguiendo ilimitadamente este proceso, construimos la sucesión  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  de valores aproximados de la raíz buscada.

Para fines prácticos es conveniente obtener una fórmula recurrente que exprese  $x_{n+1}$  mediante  $x_n$ . Para hacerlo, tomemos la ecuación  $Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$  de la tangente a la gráfica de la función en el punto  $B_n$  y calculemos la abscisa  $x_{n+1}$  del punto de intersección de esta tangente con el eje  $Ox$ . Con esto obtenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.1)$$

La fórmula (3.1) define el algoritmo del método de tangentes. De este modo, el método de las tangentes es el método de aproximaciones sucesivas (y también le llaman método de las iteraciones) que se construyen con ayuda de la fórmula recurrente (3.1). Nuestra tarea posterior es la argumentación del método de las tangentes.

En el p. 5 vamos a aclarar las condiciones en las que la sucesión de valores  $x_n$  determinados por la fórmula (3.1) converge a la raíz buscada  $c$  y vamos a dar una estimación del error, es decir, de la desviación del valor aproximado  $x_n$  respecto del valor exacto de la raíz  $c$ .

**3. Método de las cuerdas.** Entre los métodos ampliamente extendidos para la solución de la ecuación  $f(x) = 0$  tenemos el método de las cuerdas.

Pasemos a describirlo sin aclarar, por ahora, en qué condiciones es aplicable.

Supongamos que la raíz buscada  $c$  de la ecuación  $f(x) = 0$  está aislada en el segmento  $[a, b]$  y pasemos a considerar la gráfica de la función  $f(x)$  en este segmento (fig. 3.2). Por la aproximación nula

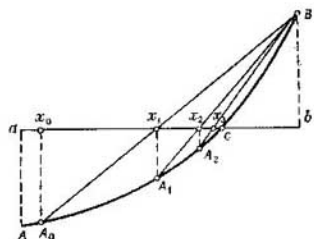


Fig. 3.2

\*) Dado que la tangente en el punto  $B_0$  es la gráfica de la diferencial de la función  $y = f(x)$  en el punto  $x_0$ , dicho procedimiento de determinación de la primera aproximación  $x_1$  se basa en la sustitución de la función por su diferencial en el punto  $x_0$ .

de la raíz buscada tomemos el número  $x_0$  del segmento  $[a, b]$  y mediante  $A_0$  y  $B$  denotemos los puntos de la gráfica de la función con abscisas  $x_0$  y  $b$ . Por los puntos  $A_0$  y  $B$  de la gráfica de la función tracemos la cuerda  $A_0B$  y tomemos como primera aproximación de la raíz buscada la abscisa  $x_1$  del punto de intersección de esta cuerda con el eje  $Ox$  (véase la fig. 3.2). Luego, tracemos la cuerda por los puntos de la gráfica  $A_1$  de abscisa  $x_1$  y  $B$ . Como segunda aproximación tomemos la abscisa  $x_2$  del punto de intersección de la cuerda  $A_1B$  con el eje  $Ox$ . Siguiendo ilimitadamente este proceso, construimos la sucesión  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  de valores aproximados de la raíz buscada.

Para fines prácticos, es conveniente obtener la fórmula recurrente que exprese  $x_{n+1}$  mediante  $x_n$ . Para hacerlo, tomemos la ecuación  $\frac{Y-f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} = \frac{x-x_n}{b-x_n}$  de la cuerda que pasa por los puntos  $A_n(x_n, f(x_n))$  y  $B(b, f(b))$  y calculemos la abscisa  $x_{n+1}$  del punto de intersección de esta cuerda con el eje  $Ox$ . Con esto, obtenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}. \quad (3.2)$$

La fórmula (3.2) define el algoritmo del método de las cuerdas. De este modo, el método de las cuerdas es un método de iteraciones que se construyen con ayuda de la fórmula recurrente (3.2). Nuestra tarea posterior es la argumentación del método de las cuerdas.

En el punto 6 aclararemos las condiciones en que la sucesión de valores sucesivos  $x_n$  converge a la raíz buscada  $c$  y daremos la estimación del error del método de las cuerdas.

**4. Métodos de las iteraciones (aproximaciones sucesivas).** De los puntos 2 y 3 se ve que los métodos de las tangentes y de las cuerdas están ligados por la idea general de construir aproximaciones sucesivas para la raíz buscada. Esta idea se basa en el método expuesto en el presente punto.

Examinemos este método aplicándolo a la ecuación

$$x = F(x). \quad (3.3)$$

Introduzcamos el concepto de *sucesión iterativa*.

La sucesión  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  se denominará *iterativa*, si para cualquier  $n \geq 1$  el elemento  $x_n$  se expresa mediante el elemento  $x_{n-1}$  por la fórmula recurrente  $x_n = F(x_{n-1})$  y como  $x_0$  se toma cualquier número del campo de definición de la función  $F(x)$ . Demostraremos que en determinadas condiciones la sucesión iterativa converge a la raíz de la ecuación (3.3) y, por tanto, se pueden tomar sus elementos por valores aproximados de esta raíz.

Es válida la siguiente afirmación.

**Afirmación 1.** Sea la función  $F(x)$  continua en el segmento  $[a, b]$  y que todos los elementos de la sucesión iterativa  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$

se encuentren en este segmento. Entonces, si esta sucesión converge a un número  $c$ , dicho número será la raíz de la ecuación (3.3).

DEMOSTRACIÓN. Dado que la sucesión  $\{x_n\}$  converge a  $c$  y todos los elementos de ella pertenecen al segmento  $[a, b]$ , el límite  $c$  también pertenece al segmento  $[a, b]$  (véase el corolario 2, teorema 3.13, tomo 1). Según la condición, la función  $F(x)$  es continua en el punto  $c$  y por eso la sucesión  $\{F(x_{n-1})\}$  converge a  $F(c)$ . De este modo, la igualdad  $x_n = F(x_{n-1})$ , en el límite, para  $n \rightarrow \infty$ , se transforma en la igualdad  $c = F(c)$ , o sea,  $c$  es la raíz de la ecuación (3.3). La afirmación demostrada se empleará esencialmente para argumentar los métodos de las tangentes y de las cuerdas en los puntos 5 y 6.

Demostremos otra afirmación frecuentemente usada para calcular aproximadamente la raíz de la ecuación (3.3) con ayuda de la sucesión iterativa.

**Afirmación 2.** Sea  $c$  la raíz de la ecuación (3.3) y que en un segmento simétrico respecto al punto  $c$   $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  la derivada de la función  $F(x)$  satisfaga la condición  $|F'(x)| \leq \alpha < 1$ . Entonces la sucesión iterativa que tiene como  $x_0$  cualquier número del segmento  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , converge a dicha raíz  $c$ .

DEMOSTRACIÓN. Antes que nada demostremos que todos los elementos de la sucesión iterativa  $\{x_n\}$  pertenecen a dicho segmento  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ . En efecto,  $x_0$  pertenece a este segmento por la condición. Por lo tanto, es suficiente, suponiendo que  $x_{n-1}$  pertenece a este segmento, demostrar que  $x_n$  también pertenece a dicho segmento. Para hacerlo, apliquemos la fórmula de Lagrange a la diferencia  $F(x_{n-1}) - F(c)$  y tomemos en consideración que  $F(c) = c$ ,  $x_n = F(x_{n-1})$ . Obtenemos

$$x_n - c = F(x_{n-1}) - F(c) = F'(\xi)(x_{n-1} - c), \quad (3.4)$$

donde  $\xi$  es el punto que se encuentra entre  $x_{n-1}$  y  $c$  y, por tanto, perteneciente al segmento  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ . Dado que  $|F'(\xi)| \leq \alpha < 1$ , de la igualdad (3.4) obtenemos

$$|x_n - c| \leq \alpha |x_{n-1} - c|. \quad (3.5)$$

A su vez de (3.5), debido a que  $0 < \alpha < 1$ , obtenemos

$$|x_n - c| < |x_{n-1} - c|. \quad (3.6)$$

La desigualdad (3.6) establece que todo elemento posterior  $x_n$  está más próximo a  $c$  que el elemento anterior  $x_{n-1}$ , y, por tanto, ya que  $x_{n-1}$  pertenece al segmento  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  y este segmento es simétrico respecto al punto  $c$ , entonces  $x_n$  también pertenece a dicho segmento. Queda por demostrar que la sucesión  $\{x_n\}$  converge a  $c$ . Puesto que la desigualdad (3.5) es válida para todos los números  $n$ , entonces, empleándola, obtenemos

$$|x_n - c| \leq \alpha^n |x_0 - c|. \quad (3.7)$$

De la última desigualdad es obvio que  $x_n \rightarrow c$  puesto que  $\alpha^n \rightarrow 0$ . La afirmación 2 queda demostrada.

Hagamos unas observaciones prácticas respecto a la afirmación que acabamos de demostrar. Supongamos que por medio de una estimación preliminar hemos establecido que la raíz buscada de la ecuación (3.3) es aislada en cierto segmento  $[a, b]$  en el cual la derivada de la función  $F(x)$  satisface la condición  $|F'(x)| \leq \alpha < 1$ .

Puesto que el segmento  $[a, b]$ , hablando en general, no es simétrico respecto a la raíz buscada, entonces, lógicamente, surge la pregunta: ¿de qué modo podemos elegir la aproximación nula  $x_0$  con tal de que se pueda aplicar la afirmación 2, anteriormente demostrada? Observemos que dondequiera que se encuentre dentro el segmento  $[a, b]$  la raíz buscada  $c$ , al menos uno de los dos segmentos simétricos respecto a  $c$ ,  $[a, 2c-a]$  ó  $[2c-b, b]$  (fig. 3.3), pertenece por completo al segmento  $[a, b]$ .

Por tanto, al menos uno de los puntos  $a$  y  $b$  pertenece al segmento simétrico respecto a la raíz  $c$ , en todos los puntos del cual  $|F'(x)| \leq \alpha < 1$ . Por lo tanto, según la afirmación 2 anteriormente demostrada, al menos uno de los puntos  $a$  y  $b$  se puede elegir en calidad de  $x_0$ . Hay que tomar como  $x_0$  aquel de los dos puntos  $a$  y  $b$  para el cual la aproximación  $x_1 = F(x_0)$  no abandona los límites del segmento  $[a, b]$ .

En la práctica con más frecuencia se encuentra el caso cuando la derivada  $F'(x)$  tiene un signo determinado en el segmento  $[a, b]$ .

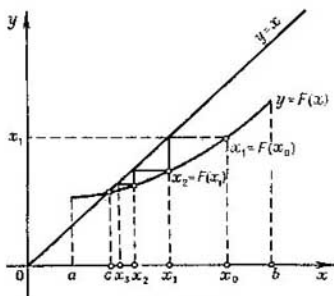


Fig. 3.4

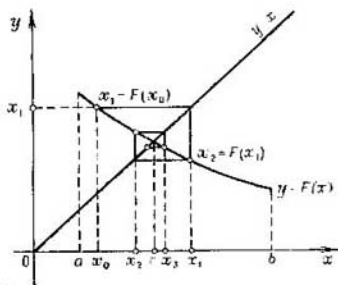


Fig. 3.5

Si este signo es positivo, de la fórmula (3.4) se desprende que la sucesión  $\{x_n\}$  es monótona. Este caso conduce al llamado *diagrama escalonado* representado en la fig. 3.4. Si la derivada  $F'(x)$  es negativa en el segmento  $[a, b]$ , de la misma fórmula (3.4) se ve que cualesquiera dos elementos sucesivos  $x_{n-1}$  y  $x_n$  se hallan a lados diferentes de la raíz  $c$ . Este caso lleva al llamado *diagrama en forma de espiral*, representado en la fig. 3.5.



OBSERVACION. Surge la pregunta sobre la estimación del error del método de las iteraciones, o sea, sobre la estimación de la desviación de la  $n$ -ésima aproximación de  $x_n$  respecto del valor exacto de la raíz  $c$ . De la fórmula (3.7) se desprende directamente la siguiente estimación:

$$|x_n - c| \leq \alpha^n (b - a),$$

donde  $\alpha$  es la cota superior exacta de la función  $|F'(x)|$  en el segmento  $[a, b]$  en el cual es aislada la raíz considerada. Si la derivada  $F'(x)$  es negativa en el segmento  $[a, b]$ , entonces, como se indica anteriormente,  $x_{n-1}$  y  $x_n$  se hallan a lados diferentes de la raíz  $c$ , y, por tanto, es válida la siguiente estimación:

$$|x_n - c| \leq |x_n - x_{n-1}|.$$

Si en el caso considerado por el valor aproximado de la raíz tomamos la semisuma de dos aproximaciones sucesivas

$$x_n^* = \frac{x_n + x_{n-1}}{2},$$

obtenemos la siguiente estimación del error:

$$|x_n^* - c| \leq \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2}.$$

### 5. Argumentación del método de las tangentes.

1°. En primer lugar, consideremos el caso cuando la raíz buscada  $c$  de la ecuación  $f(x) = 0$  es aislada en el segmento  $[a, b]$  sobre el cual la función  $f(x)$  tiene la primera derivada que no se anula y la segunda derivada acotada. Demostremos que en este caso existe un entorno bastante pequeño de la raíz  $c$  tal que si la aproximación nula  $x_0$  se halla dentro de este entorno, la sucesión  $\{x_n\}$ , determinada por la fórmula recurrente (3.1), converge a la raíz  $c$ .

Ante todo, observemos que la ecuación

$$x = F(x), \text{ donde } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (3.8)$$

tiene en el segmento  $[a, b]$  una sola raíz  $c$  coincidente con la raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ . Por eso, en vez de la ecuación  $f(x) = 0$ , resolveremos la ecuación (3.8). Para esto, tomando un valor de  $x_0$ , construyamos la sucesión iterativa

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3.9)$$

Observemos que la fórmula recurrente (3.9) coincide completamente con la fórmula recurrente (3.1).

Para demostrar la convergencia de la sucesión iterativa  $\{x_n\}$  a la raíz buscada  $c$  basta demostrar que en cierto  $\varepsilon$ -entorno de la

raíz  $c$  la derivada  $F'(x)$  satisface la condición  $|F'(x)| \leq \alpha < 1$  y tomar  $x_0$  en dicho  $\varepsilon$ -entorno (véase la afirmación 2 del p. 4). En virtud de las exigencias planteadas ante la función  $f(x)$  existen números positivos  $m$  y  $N$  tales que en todos los puntos del segmento  $[a, b]$  se cumplen las desigualdades

$$|f'(x)| \geq m > 0^*), \quad |f''(x)| \leq N, \quad (3.10)$$

Dado que

$$F'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

de las desigualdades (3.10) se desprende la siguiente estimación:

$$|F'(x)| \leq \frac{|f(x)| N}{m^2}. \quad (3.11)$$

De la continuidad de la función  $f(x)$  se desprende que en un  $\varepsilon$ -entorno de la raíz  $c$  esta función satisface la desigualdad

$$|f(x)| \leq \frac{m^2}{N} \alpha, \quad (3.12)$$

donde  $\alpha$  es el número fijado del intervalo  $0 < \alpha < 1$ . Comparando las desigualdades (3.11) y (3.12), obtenemos que en todos los puntos de dicho  $\varepsilon$ -entorno de la raíz

$$|F'(x)| \leq \alpha < 1.$$

Por lo tanto, la convergencia de la sucesión (3.9) a la raíz  $c$  queda demostrada.

**OBSERVACIÓN 1** Hemos demostrado la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  a la raíz  $c$  solamente para la condición de que la aproximación nula  $x_0$  se encuentre en un  $\varepsilon$ -entorno bastante pequeño de la raíz  $c$ . La elección del valor de  $x_0$  necesario se realiza fácilmente con ordenador moderno de acción rápida haciendo varias pruebas.

**OBSERVACIÓN 2** Estimemos la desviación del valor aproximado de la raíz  $x_{n+1}$  respecto del valor exacto de  $c$ . Para este fin, desarrollemos la función  $f(x)$  en el entorno de  $x_n$  por la fórmula de Taylor con el término residual en forma de Lagrange:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_n)^2.$$

Poniendo en esta fórmula  $x = c$  y teniendo en cuenta que  $f(c) = 0$ , tendremos

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(c - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(c - x_n)^2.$$

Sustrayendo de la última fórmula la fórmula  $f(x_n) + f'(x_n) \times (x_{n+1} - x_n) = 0$ , que se desprende de la relación recurrente (3.9),

\*). Estas desigualdades se deben a que la derivada  $f'(x)$  es continua y no se anula en el segmento considerado.

obtenemos

$$x_{n+1} - c = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)} (x_n - c)^2.$$

De aquí, empleando las denotaciones (3.10) anteriormente adoptadas, llegamos a la siguiente desigualdad:

$$|x_{n+1} - c| \leq \frac{N}{2m} |x_n - c|^2.$$

Aplicando sucesivamente esta estimación para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , obtenemos la siguiente estimación:

$$|x_{n+1} - c| \leq \left(\frac{N}{2m}\right)^n |x_0 - c|^{2^n}.$$

2°. Argumentemos el método de las tangentes con unas suposiciones un poco diferentes.

Sea que la raíz buscada  $c$  de la ecuación  $f(x) = 0$  es aislada en el segmento  $[a, b]$ , sobre el cual  $f(x)$  tiene la primera derivada monótona que conserva un signo determinante. Esta derivada es obligatoriamente continua puesto que no puede tener puntos de discontinuidad de primera especie y la función monótona no tiene otros puntos de discontinuidad.

Para precisar supongamos que la derivada no decrece y es positiva en el segmento  $[a, b]$ . Demostremos que la sucesión iterativa  $\{x_n\}$  (que tiene  $x_0 = b$  y  $x_{n+1}$  se determina mediante  $x_n$  empleando la fórmula recurrente (3.9)), converge a la raíz  $c$ .

Si para un número  $n$  resulta  $x_n = c$ , siendo  $c$  la raíz buscada, entonces  $f(x_n) = f(c) = 0$  y de la fórmula (3.9) obtenemos que  $x_{n+1} = c$ . Siguiendo estos razonamientos demostramos que también  $x_{n+2} = x_{n+3} = \dots = c$ , o sea, en este caso la sucesión iterativa  $\{x_n\}$  converge a la raíz buscada  $c$ .

Ahora demostremos por inducción que, si  $x_n$  satisface las relaciones  $c < x_n \leq b$ ,  $x_{n+1}$  satisface las relaciones  $c \leq x_{n+1} \leq x_n \leq b$ .

De aquí se desprenderá que todos los  $x_n$  pertenecen al segmento  $[c, b]$  (puesto que  $x_0 = b$  pertenece a este segmento), así como el hecho de que la sucesión  $\{x_n\}$  es no creciente y, por tanto, convergente. En virtud de la afirmación 1 del p. 4, la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}$  y el hecho de que todos los elementos de ella pertenecen al segmento  $[c, b]$  (y, por lo tanto, al segmento  $[a, b]$ ) culmina la demostración de la convergencia de esta sucesión a la raíz buscada  $c$ .

Pues, queda por demostrar que si  $x_n$  satisface las relaciones  $c < x_n \leq b$ , entonces  $x_{n+1}$  satisface las relaciones  $c \leq x_{n+1} \leq x_n$ .

Sea  $c < x_n \leq b$ . Entonces, de la fórmula (3.9), teniendo en cuenta que  $f(c) = 0$ , obtenemos

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n) - f(c)}{f'(x_n)}.$$

Aplicando a la expresión en el numerador de la última fracción la fórmula de Lagrange, obtenemos

$$x_n - x_{n+1} = (x_n - c) \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)},$$

donde  $c < \xi_n < x_n$ . En virtud de que la derivada de la función  $f(x)$  no decrece y es positiva, la fracción  $\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}$  es también positiva y no supera a la unidad, o sea,  $0 \leq x_n - x_{n+1} \leq x_n - c$  ó  $c \leq x_{n+1} \leq x_n$ .

**OBSERVACIÓN 3.** Hemos considerado el caso cuando  $f'(x)$  no decrece y es positiva en  $[a, b]$ . Son posibles tres casos más: 1)  $f'(x)$  no decrece y es negativa en  $[a, b]$ , 2)  $f'(x)$  no crece y es positiva en  $[a, b]$ , 3)  $f'(x)$  no decrece y es negativa en  $[a, b]$ .

En cada uno de estos casos, la argumentación del método de las tangentes se realiza de modo completamente análogo al caso anteriormente considerado. Solamente señalemos que, en el caso 1), por aproximación nula hay que tomar el valor  $x_0 = b$ , y en los casos 2) y 3), el valor  $x_0 = a$ . Esto asegura la pertenencia de todos los términos de la sucesión iterativa  $\{x_n\}$  al segmento  $[a, b]$  y la convergencia de esta sucesión a la raíz  $c$  buscada.

**OBSERVACIÓN 4.** Estimemos la desviación de la  $n$ -ésima aproximación de  $x_n$  respecto del valor exacto de la raíz  $c$  (observando las suposiciones enunciadas en este punto).

Aplicando la fórmula de Lagrange a la expresión  $f(x_n) = f(x_n) - f(c)$ , tendremos  $f(x_n) = (x_n - c) f'(\xi_n)$ . De aquí obtenemos la siguiente estimación:

$$|x_n - c| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (3.13)$$

donde  $m$  es valor mínimo de  $|f'(x)|$  en el segmento  $[a, b]$ . La fórmula (3.13) permite estimar la desviación de  $x_n$  respecto del valor exacto de la raíz  $c$  por medio del valor del módulo de la función dada  $y = f(x)$  en el punto  $x_n$ .

**6. Argumentación del método de las cuerdas.** Supongamos que la raíz buscada  $c$  de la ecuación  $f(x) = 0$  es aislada en un segmento  $[a, b]$ , sobre el cual la función  $f(x)$  tiene la *primera derivada monótona que conserva su signo constante*. Para la precisión tomemos que esta derivada no decrece y es positiva en el segmento  $[a, b]$ . Observemos que la ecuación

$$x = F(x), \text{ donde } F(x) = x - \frac{(b-x)f(x)}{f(b)-f(x)} \quad *) \quad (3.14)$$

tiene en el segmento  $[a, b]$  una sola raíz  $c$  coincidente con la raíz de

\*) Además, consideramos que  $F(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ . Entonces la función  $F(x)$  será continua sobre todo el segmento  $[a, b]$ .

la ecuación  $f(x) = 0$ . Por eso, en vez de la ecuación  $f(x) = 0$  resolveremos la ecuación (3.14). Para esto, tomando  $x_0 = a$ , construyamos la sucesión iterativa

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}. \quad (3.15)$$

Observemos que la fórmula recurrente (3.15) coincide exactamente con la fórmula recurrente (3.2).

Demostremos que la sucesión  $\{x_n\}$  converge a la raíz buscada  $c$ . Si para un número  $n$  se obtiene  $x_n = c$ , siendo  $c$  la raíz buscada, entonces  $f(x_n) = f(c) = 0$  y de la fórmula (3.15) obtenemos también  $x_{n+1} = c$ . Siguiendo unos razonamientos análogos, demostremos sucesivamente que, también,  $x_{n+2} = x_{n+3} = \dots = c$ , o sea, la sucesión iterativa  $\{x_n\}$  converge a la raíz buscada  $c$ .

Demostremos ahora, por inducción, que si  $x_n$  satisface las relaciones  $a \leq x_n < c$ , entonces  $x_{n+1}$  satisface las relaciones  $a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq c$ .

De aquí y de  $x_0 = a$  se desprenderá que todos los valores de  $x_n$  pertenecen al segmento  $[a, c]$  (y, tanto más, el segmento  $[a, b]$ ) y que la sucesión  $\{x_n\}$  es no decreciente (y, por tanto, es convergente).

En virtud de la afirmación 1 del p. 4, esto culmina la demostración de la sucesión iterativa  $\{x_n\}$  a la raíz buscada  $c$ .

Así pues, queda por demostrar que si  $x_n$  satisface las relaciones  $a \leq x_n < c$ , entonces  $x_{n+1}$  satisface las relaciones  $x_n \leq x_{n+1} \leq c$ .

Sea  $a \leq x_n < c$ . De la relación (3.15), teniendo en cuenta que  $f(c) = 0$ , obtenemos

$$x_{n+1} - x_n = - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} = \frac{(b-x_n)[f(c)-f(x_n)]}{[f(b)-f(c)]+[f(c)-f(x_n)]}.$$

Aplicando la fórmula de Lagrange a la expresión entre corchetes, obtenemos

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(b-x_n)f'(\xi_n)}{(b-c)f'(\xi_n^*) + (c-x_n)f'(\xi_n)} \cdot (c-x_n), \quad (3.16)$$

donde  $x_n < \xi_n < c$ ,  $c < \xi_n^* < b$ , así que  $\xi_n < \xi_n^*$ . En virtud del no decrecimiento y la positividad de la derivada  $f'(x)$ , se puede escribir  $0 < f'(\xi_n) \leq f'(\xi_n^*)$ . De aquí se desprende que la fracción en el miembro derecho de (3.16) es positiva y, además, no supera la unidad (puesto que  $(b-c)f'(\xi_n) + (c-x_n)f'(\xi_n) \geq [(b-c) + (c-x_n)]f'(\xi_n) = (b-x_n)f'(\xi_n)$ ). Por tanto,  $0 \leq x_{n+1} - x_n \leq c - x_n$ , es decir,  $x_n \leq x_{n+1} \leq c$ .

**OBSERVACIÓN 1.** Hemos considerado el caso cuando  $f'(x)$  no decrece y es positiva en  $[a, b]$ . Son posibles tres casos más: 1)  $f'(x)$  no crece y es negativa en  $[a, b]$ , 2)  $f'(x)$  no crece y es positiva en  $[a, b]$ , 3)  $f'(x)$  no decrece y es negativa en  $[a, b]$ .

Los últimos tres casos son análogos al anteriormente considerado. En el caso 1) la ecuación  $f(x) = 0$  se sustituye, igual que anterior-

mente, por la ecuación (3.14) y por aproximación nula se toma  $x_0 = a$  (además, la sucesión  $\{x_n\}$  resulta también no decreciente). En los casos 2) y 3) la ecuación  $f(x) = 0$  se sustituye no por la ecuación (3.14), sino por la ecuación

$$x = F(x),$$

donde

$$F(x) = x - \frac{(a-x)f(x)}{f(a)-f(x)}$$

y por aproximación nula se toma el punto  $x_0 = b$  (además, la sucesión  $\{x_n\}$  resulta no creciente).

**OBSERVACION 2.** Indiquemos que para el método de las cuerdas es válida la misma estimación (3.13) de la desviación de  $x_n$  respecto de la raíz  $c$  que para el método de las tangentes.

**OBSERVACION 3.** En la práctica con frecuencia se usa el método combinado que consiste en la aplicación alternativa del método de

las cuerdas y del de las tangentes. Para mayor precisión, supongamos que  $f'(x)$  no decrece y es positiva en el segmento  $[a, b]$  (fig. 3.6). Determinemos  $x_1$  por el método de las tangentes tomando por aproximación nula el punto  $b$ . Después, determinemos  $x_2$  aplicando el método de las cuerdas, pero no al segmento  $[a, b]$ , sino al segmento  $[a, x_1]$ . Luego, determinemos  $x_3$  por el método de las tangentes, partiendo del ya hallado  $x_1$ , y  $x_4$ , por el método de las cuerdas apli-

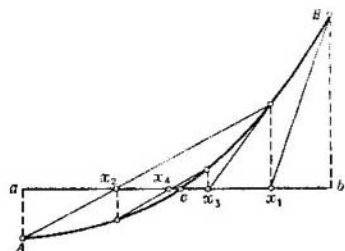


Fig. 3.6

cándolo al segmento  $[x_2, x_3]$ . Dicho proceso se ilustra en la fig. 3.6.

Las ventajas del método combinado consisten en lo siguiente: primero, ofrece una convergencia más rápida que el método de las cuerdas, y, segundo, puesto que las aproximaciones sucesivas  $x_{n+1}$  y  $x_n$  del método combinado aproximan la raíz por lados diferentes, entonces la diferencia  $|x_{n+1} - x_n|$  da la estimación del error de este método. Si como valor aproximado de la raíz tomamos  $x_n^* = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ , la estimación del error es

$$|x_n^* - c| < \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2}.$$

## § 2. Métodos aproximados de cálculo de las integrales definidas

1. **Observaciones preliminares.** Resolviendo una serie de problemas actuales físicos y técnicos nos encontramos con integrales definidas de las funciones, cuyas primitivas *no se expresan mediante funciones elementales*. Además, en las aplicaciones tenemos que operar con integrales definidas *cuyas funciones subintegrales propias no son*

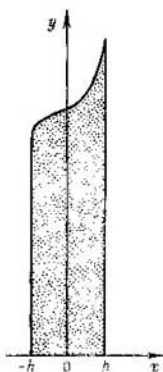


Fig. 3.7

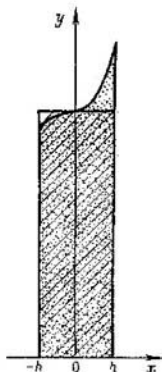


Fig. 3.8

*elementales*. Esto conduce a la necesidad de elaborar métodos aproximados para calcular las integrales definidas \*).

En este párrafo conoceremos los tres métodos aproximados más usados para calcular integrales definidas: *el método de los rectángulos, el de los trapecios y el de las parábolas*.

La idea principal de estos métodos consiste en sustituir la función subintegral  $f(x)$  por otra más simple, un polinomio que coincide con  $f(x)$  en algunos puntos. Para entender esta idea, consideremos,

para valores pequeños de  $h$  la integral  $\int_{-h}^h f(x) dx$  que es el área del trapecio curvilíneo que se encuentra por debajo de la gráfica de la función  $y = f(x)$  en el segmento  $[-h, h]$  (fig. 3.7).

\* ) Observemos que los métodos aproximados se usan también con frecuencia para las integrales que se expresan mediante funciones elementales.

Sustituycamos la función  $f(x)$  por el polinomio de grado nulo, a saber, por la constante  $f(0)$ . Al mismo tiempo, la integral  $\int_{-h}^h f(x) dx$  se sustituye aproximadamente por *el área del rectángulo rayado en la fig. 3.8*. En adelante mostraremos que, con determinadas exigencias para  $f(x)$ , el error cometido como resultado de esta sustitución es del orden de  $h^3$ . Luego, sustituimos la función  $f(x)$  por un polinomio de

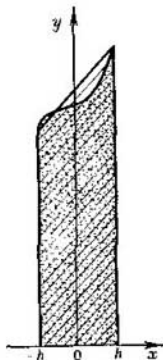


Fig. 3.9

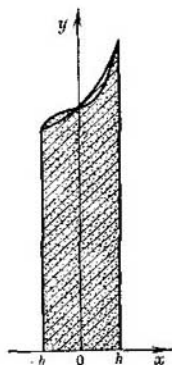


Fig. 3.10

primer grado, a saber, por la función lineal  $y = kx + b$  coincidente con  $f(x)$  en los puntos  $-h$  y  $h$ . Además, la integral  $\int_{-h}^h f(x) dx$  se sustituye aproximadamente por *el área del trapecio curvilíneo rayado en la fig. 3.9*. En adelante mostraremos que, con determinadas exigencias para  $f(x)$ , el error cometido como resultado de esta sustitución es también del orden de  $h^3$ . En fin, sustituycamos la función  $f(x)$  por un polinomio de segundo grado, o sea, por la parábola  $y = Ax^2 + Bx + C$  coincidente con  $f(x)$  en los puntos  $-h$ ,  $0$  y  $h$ . Al mismo tiempo, la integral  $\int_{-h}^h f(x) dx$  se sustituye aproximadamente por *el área de la figura que se encuentra por debajo de la parábola y es rayada en la fig. 3.10*.

Más adelante mostraremos que, con determinadas exigencias para la función  $f(x)$ , el error cometido en esta sustitución es del orden



de  $k^5$ . Si debemos calcular la integral  $\int_a^b f(x) dx$  por cualquier segmento  $[a, b]$ , es lógico dividir este segmento en un número bastante grande de segmentos pequeños y para cada uno de estos segmentos hacer los razonamientos anteriormente expuestos. De este modo, llegamos a los métodos de los rectángulos, los trapecios y las parábolas en forma general.

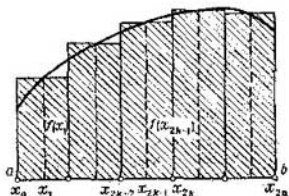


Fig. 3.11

Una exposición más detallada de cada uno de estos métodos se da más adelante. Hagamos aquí una observación importante para el material posterior.

**OBSERVACIÓN.** Sea la función  $f(x)$  continua en el segmento  $[a, b]$  y sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  algunos puntos del segmento  $[a, b]$ . Entonces, en este segmento existe un punto  $\xi$  tal que el promedio de  $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$  es igual a  $f(\xi)$ .

En efecto, denotemos mediante  $m$  y  $M$  las cotas exactas de la función  $f(x)$  en el segmento  $[a, b]$ . Entonces, para cualquier número  $k$  son válidas las desigualdades  $m \leq f(x_k) \leq M$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Sumando estas desigualdades por todos los números  $k = 1, 2, \dots, n$  y dividiendo el resultado por  $n$ , obtenemos

$$m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq M.$$

Puesto que la función continua toma cualquier valor intermedio comprendido entre  $m$  y  $M$ , entonces, en el segmento  $[a, b]$  existe un punto  $\xi$  tal que

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}. \tag{3.17}$$

**2. Método de los rectángulos.** Supongamos que se exige calcular la integral

$$\int_a^b f(x) dx. \tag{3.18}$$

Dividamos el segmento  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales empleando los puntos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Mediante  $x_{2h-1}$  denotemos el punto medio del segmento  $[x_{2h-2}, x_{2h}]$  (fig. 3.11). El método de los

rectángulos consiste en sustituir la integral (3.18) por la suma

$$\frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})]$$

de las áreas de los rectángulos con alturas iguales a  $f(x_{2k-1})$  y bases iguales a  $x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{a-b}{n}$  (estos rectángulos están rayados en la fig. 3.11). De este modo, es válida la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + R, \quad (3.19)$$

donde  $R$  es término residual. La fórmula (3.19) se denomina *fórmula de los rectángulos*.

Demostremos que, si en el segmento  $[a, b]$  la función  $f(x)$  tiene la segunda derivada continua, en este segmento existe un punto  $\eta$  tal que el término residual  $R$  en la fórmula (3.19) es igual a

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f^{(2)}(\eta). \quad (3.20)$$

Con este fin, estimemos primeramente  $\int_{-h}^{+h} f(x) dx$ , teniendo en cuenta que en el segmento  $[-h, +h]$  la función  $f(x)$  tiene la segunda derivada continua.

Para hacerlo, integremos dos veces por partes cada una de las dos integrales siguientes:

$$I_1 = \int_{-h}^0 f^{(2)}(x) (x+h)^2 dx, \quad I_2 = \int_0^h f^{(2)}(x) (x-h)^2 dx$$

Para la primera de éstas, obtenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-h}^0 f^{(2)}(x) (x+h)^2 dx = \{(x+h)^2 f'(x)\} \Big|_{-h}^0 - \\ &= 2 \int_{-h}^0 f'(x) (x+h) dx = f'(0) h^2 - [2(x+h) \cdot f(x)] \Big|_{-h}^0 + \\ &+ 2 \int_{-h}^0 f(x) dx = f'(0) h^2 - 2f(0) h + 2 \int_{-h}^0 f(x) dx. \end{aligned}$$

Para la segunda integral obtenemos de un modo completamente análogo

$$I_2 = -f'(0) h^2 - 2 \cdot f(0) h + 2 \int_0^h f(x) dx.$$

La semisuma de las expresiones obtenidas para  $I_1$  e  $I_2$  conduce a la siguiente fórmula:

$$\int_{-h}^h f(x) dx = 2f(0)h + \frac{I_1 + I_2}{2}. \quad (3.21)$$

Estimemos la magnitud  $\frac{I_1 + I_2}{2}$ , aplicando la fórmula del valor medio a las integrales  $I_1$  e  $I_2$  y tomando en consideración la no negatividad de las funciones  $(x+h)^2$  y  $(x-h)^2$ . Obtenemos la existencia del punto  $\xi_1$  en el segmento  $[-h, 0]$  y del punto  $\xi_2$  en el segmento  $[0, h]$  tales que

$$\begin{aligned} \frac{I_1 + I_2}{2} &= \frac{1}{2} \int_{-h}^0 f^{(2)}(x) (x+h)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^h f^{(2)}(x) (x-h)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi_1) \int_{-h}^0 (x+h)^2 dx + \frac{1}{2} f^{(2)}(\xi_2) \int_0^h (x-h)^2 dx = \\ &= \frac{h^3}{6} f^{(2)}(\xi_1) + \frac{h^3}{6} f^{(2)}(\xi_2) = \frac{h^3}{3} \frac{f^{(2)}(\xi_1) + f^{(2)}(\xi_2)}{2}. \end{aligned}$$

En virtud de la observación al final del p. 1, en el segmento  $[-h, h]$  existe un punto  $\eta$  tal que

$$\frac{f^{(2)}(\xi_1) + f^{(2)}(\xi_2)}{2} = f^{(2)}(\eta).$$

Por eso, para la semisuma  $\frac{I_1 + I_2}{2}$  obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{h^3}{3} f^{(2)}(\eta).$$

Poniendo esta expresión en (3.21), obtenemos que

$$\int_{-h}^h f(x) dx = 2f(0)h + \bar{R}, \quad (3.22)$$

donde

$$\bar{R} = \frac{1}{24} f^{(2)}(\eta) (2h)^3 \quad (-h \leq \eta \leq h). \quad (3.23)$$

Puesto que la magnitud  $2f(0) \cdot h$  es el área del rectángulo rayado en la fig. 3.8, las fórmulas (3.22) y (3.23) demuestran que el error, cometido cuando sustituimos  $\int_{-h}^h f(x) dx$  por dicha área, es del orden de  $h^3$ .

De este modo, la fórmula  $\int_{-h}^h f(x) dx \approx 2f(0)h$  es tanto más exacta cuanto menos sea  $h$ . Por eso, para calcular la integral  $\int_a^b f(x) dx$  es lógico representar ésta en forma de la suma de un número bastante grande  $n$  de integrales

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n-1}} f(x) dx$$

y aplicar la fórmula (3.22) cada una de dichas integrales. Además, tomando en consideración que la longitud del segmento  $[x_{2h-2}, x_{2h}]$  es igual a  $\frac{b-a}{n}$ , obtenemos la fórmula de los rectángulos (3.19), en la cual

$$R = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \dots + \bar{R}_n = \frac{(b-a)^2}{24n^3} [f^{(2)}(\eta_1) + f^{(2)}(\eta_2) + \dots + f^{(2)}(\eta_n)] = \\ = \frac{(b-a)^2}{24n^2} \frac{f^{(2)}(\eta_1) + f^{(2)}(\eta_2) + \dots + f^{(2)}(\eta_n)}{n} = \frac{(b-a)^2}{24n^2} f^{(2)}(\eta).$$

(Aquí  $a \leq \eta \leq b$ . Hemos empleado la fórmula (3.17) para la función  $f^{(2)}(x)$ ).

**3. Método de los trapecios.** Sea que, igual que antes, se exige calcular la integral

$$\int_a^b f(x) dx \quad (3.18)$$

Dividamos el segmento  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales, empleando los puntos  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  (fig. 3.12). El método de los trapecios consiste en sustituir la integral (3.18) por la suma

$$\frac{b-a}{2n} \{ [f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \dots + [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \} = \\ = \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} f(x_h) \right\}$$

de las áreas de los trapecios con bases iguales, respectivamente a  $f(x_{h-1})$  y  $f(x_h)$  y alturas iguales a  $x_h - x_{h-1} = \frac{b-a}{n}$  (estos trapecios están rayados en la fig. 3.12).

De este modo, es válida la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} f(x_h) \right\} + R, \quad (3.24)$$

donde  $R$  es término residual. La fórmula (3.24) se denomina *fórmula de los trapecios*.

Demostremos que si la función  $f(x)$  tiene la segunda derivada continua en el segmento  $[a, b]$ , en este segmento existe un punto  $\eta$  tal que el término residual  $R$  en la fórmula (3.24) toma la forma

$$R = -\frac{(b-a)^2}{12n^2} f^{(2)}(\eta). \quad (3.25)$$

En primer lugar, estimemos

la integral  $\int_{-h}^{+h} f(x) dx$ , teniendo en cuenta que la función  $f(x)$  tiene la segunda derivada continua en el segmento  $[-h, +h]$ .

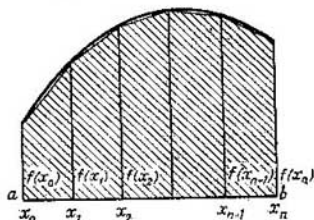


Fig. 3.12

Integrando dos veces la integral  $\int_{-h}^{+h} f^{(2)}(x)(x^2 - h^2) dx$  por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{+h} f^{(2)}(x)(x^2 - h^2) dx = \left[ f'(x)(x^2 - h^2) \right]_{-h}^{+h} - \\ & - 2 \int_{-h}^{+h} f'(x)x dx = - \left[ 2f(x)x \right]_{-h}^{+h} + 2 \int_{-h}^{+h} f(x) dx = \\ & = - 2[f(-h) + f(+h)]h + 2 \int_{-h}^{+h} f(x) dx. \quad (3.26) \end{aligned}$$

En virtud de (3.26), llegamos a la fórmula

$$\int_{-h}^{+h} f(x) dx = \frac{f(-h) + f(+h)}{2} 2h + R, \quad (3.27)$$

donde

$$\bar{R} = -\frac{1}{12} f^{(2)}(\eta) (2h)^3 \quad (-h \leq \eta \leq h). \quad (3.28)$$

Dado que la magnitud  $\frac{f(-h) + f(+h)}{2} 2h$  es el área del trapecio rayado en la fig. 3.9, las fórmulas (3.27) y (3.28) demuestran que el error cometido a consecuencia de la sustitución de

$\int_{-h}^{+h} f(x) dx$  por dicha área, es del orden de  $h^3$ .

Para calcular la integral  $\int_a^b f(x) dx$ , igual que en el método de los rectángulos, representemos esta integral en forma de la suma de un número bastante grande  $n$  de integrales

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx.$$

Aplicando las fórmulas (3.27) y (3.28) a cada una de estas integrales, llegamos a la fórmula de los trapecios (3.24) con la expresión para el término residual (3.25).

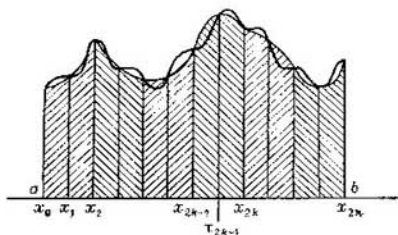


Fig. 3.13

4. Método de las parábolas. Para calcular la integral

$$\int_a^b f(x) dx \quad (3.18)$$

volvamos a dividir el segmento  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales, empleando los puntos  $a = x_0 < x_2 < \dots < x_{2n} = b$  y mediante  $x_{2k-1}$  denotemos el punto medio del segmento  $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ . El método de las parábolas consiste en sustituir la integral (3.18) por la suma

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{6n} \{ [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + \\ & + f(x_4)] + \dots + [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \} = \\ & = \frac{b-a}{6n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} f(x_{2h}) + 4 \sum_{h=0}^{n-1} f(x_{2h+1}) \right\} \end{aligned}$$

de áreas de las figuras rayadas en la fig. 3.13 que son trapecios curvilíneos situados por debajo de las parábolas que pasan por tres

puntos de la gráfica de la función  $f(x)$  que tienen las abscisas  $x_{2k-2}$ ,  $x_{2k-1}$  y  $x_{2k}^*$ ).

De este modo, es válida la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} f(x_{2h}) + 4 \sum_{h=0}^{n-1} f(x_{2h+1}) \right] + R, \quad (3.29)$$

donde  $R$  es el término residual. La fórmula (3.29) se denomina *fórmula de las parábolas* o *fórmula de Simpson*.

Demostremos que si la función  $f(x)$  tiene la cuarta derivada continua en el segmento  $[a, b]$ , en este segmento existe un punto  $\eta$  tal que el término residual  $R$  en la fórmula (3.29) es igual a

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta). \quad (3.30)$$

Con este fin, estimemos primero  $\int_{-h}^{+h} f(x) dx$ , teniendo en cuenta que en el segmento  $[-h, +h]$  la función  $f(x)$  tiene la cuarta derivada continua

Integremos cuatro veces por partes cada una de las dos integrales siguientes:

$$I_1 = \int_{-h}^{+h} f^{(4)}(x) (x-h)^3 \left(x - \frac{h}{3}\right) dx,$$

$$I_2 = \int_0^h f^{(4)}(x) (x-h)^3 \left(x + \frac{h}{3}\right) dx.$$

\*) Del ejemplo 2 (p. 4, § 2, cap. 2, tomo 2) se desprende que la expresión  $\frac{b-a}{6n} [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]$  (tomando en consideración que  $\frac{b-a}{6n} \approx \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6}$ ) es el área que se encuentra por debajo de la parábola que pasa por tres puntos de la gráfica de la función  $f(x)$  con las abscisas  $x_{2k-2}$ ,  $x_{2k-1}$  y  $x_{2k}$ .

Para la primera integral obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-h}^0 f^{(4)}(x) (x+h)^3 \left(x - \frac{h}{3}\right) dx = \left[ f^{(3)}(x) (x+h)^3 \left(x - \frac{h}{3}\right) \right]_{-h}^0 - \\
 &\quad - \left\{ f^{(2)}(x) \left[ 3(x+h)^2 \left(x - \frac{h}{3}\right) + (x+h) \right] \right\} \Big|_{-h}^0 + \\
 &\quad + \left\{ 6f'(x) \left[ (x+h) \left(x - \frac{h}{3}\right) + (x+h)^2 \right] \right\} \Big|_{-h}^0 - \\
 &\quad - \left\{ 6f(x) \left( 4x + \frac{8}{3}h \right) \right\} \Big|_{-h}^0 + 24 \int_{-h}^0 f(x) dx = \\
 &= -f^{(3)}(0) \frac{h^3}{3} + 4f'(0) h^2 - 8h [f(-h) + 2f(0)] + \\
 &\quad + 24 \int_{-h}^0 f(x) dx. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Para  $I_2$ , obtenemos de una manera completamente análoga

$$I_2 = f^{(3)}(0) \frac{h^3}{3} - 4f'(0) h^2 - 8h [f(h) + 2f(0)] + 24 \int_0^h f(x) dx. \quad (3.32)$$

Al sumar las relaciones (3.31) y (3.32), obtenemos la siguiente igualdad:

$$\int_{-h}^{+h} f(x) dx = \frac{f(-h) + 4f(0) + f(+h)}{6} 2h + \frac{I_1 + I_2}{24}. \quad (3.33)$$

Para estimar  $\frac{I_1 + I_2}{24}$ , apliquemos la fórmula del valor medio a las integrales  $I_1$  e  $I_2$ , teniendo en cuenta que las funciones  $(x+h)^3 \left(x - \frac{h}{3}\right)$  y  $(x-h)^3 \left(x + \frac{h}{3}\right)$  son no positivas en los segmentos  $[-h, 0]$  y  $[0, +h]$ , respectivamente.

Obtenemos la existencia de un punto  $\xi_1$  en el segmento  $[-h, 0]$  y de un punto  $\xi_2$  en el segmento  $[0, +h]$  tales que

$$\begin{aligned}
 \frac{I_1 + I_2}{24} &= \frac{1}{24} \left[ f^{(4)}(\xi_1) \int_{-h}^0 (x+h)^3 \left(x - \frac{h}{3}\right) dx + \right. \\
 &\quad \left. + f^{(4)}(\xi_2) \int_0^{+h} (x-h)^3 \left(x + \frac{h}{3}\right) dx \right] = \frac{-h^5}{90} \frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)}{2}.
 \end{aligned}$$



Empleando de nuevo la observación al final del p. 1, obtenemos que en el segmento  $[-h, +h]$  existe un punto  $\eta$  tal que

$$\frac{I_1 + I_2}{24} = \frac{-h^5}{90} f^{(4)}(\eta). \quad (3.34)$$

De (3.33) y (3.34) obtenemos, definitivamente,

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \frac{[f(-h) + 4f(0) + f(h)]}{6} 2h + \bar{R}, \quad (3.35)$$

donde

$$\bar{R} = -\frac{(2h)^5}{2880} f^{(4)}(\eta). \quad (3.36)$$

Dado que la magnitud  $\frac{[f(-h) + 4f(0) + f(h)]}{6} 2h$  es el área de la figura que se encuentra por debajo de la parábola y es rayada en la fig. 3.10, las fórmulas (3.35) y (3.36) demuestran que el

error, cometido al sustituir  $\int_{-h}^h f(x) dx$  por dicha área, es del orden de  $h^5$ .

Para calcular la integral  $\int_a^b f(x) dx$ , igual que en los métodos de los rectángulos y de los trapecios, representemos esta integral en forma de la suma de  $n$  integrales

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx.$$

Aplicando las fórmulas (3.35) y (3.36) a cada una de estas integrales, llegamos a la fórmula de Simpson (3.29) con la expresión del término residual (3.30).

Comparando el término residual (3.30) con los términos residuales (3.20) y (3.25), nos convencemos de que la fórmula de Simpson da mayor exactitud que las fórmulas de los rectángulos y de los trapecios.

Para ilustrar la aplicación de la fórmula de Simpson, vamos a calcular la integral  $I(x_0) = \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx$  limitándonos, para que sea

\*1 La integral considerada no se expresa mediante las funciones elementales. Esta integral se usa ampliamente en la física estadística, en la teoría de la conductibilidad calorífica y de la difusión.

más simple, a los valores  $x_0$  del segmento  $0 \leq x_0 \leq 1$ . Tomando  $f(x) = e^{-x^2}$  y calculando la derivada  $f^{(4)}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}$ , nos convencemos fácilmente de que para todos los  $x$  del segmento  $0 \leq x \leq x_0 \leq 1$ , en todo caso,  $|f^{(4)}(x)| < 20$ . Partiendo de la estimación (3.30), podemos afirmar que  $|R| < \frac{1}{144n^4}$ . Por lo tanto,

al dividir el segmento  $[0, x_0]$  sólo en cinco partes iguales y al sustituir la integral considerada por la suma del miembro derecho de la fórmula de Simpson, calculamos esta integral con exactitud de hasta  $\frac{1}{144 \cdot 5^4} = \frac{1}{90\,000}$ .

**5. Observaciones finales.** Cada uno de los métodos, expuestos en el presente capítulo para calcular raíces de la ecuación y las integrales definidas *contiene un algoritmo bien formulado* para realizar los cálculos. Otra particularidad de los métodos expuestos es la *trivialidad* de las operaciones de cálculo que deben efectuarse en cada paso separado. Las dos particularidades aseguran el amplio uso de los métodos expuestos para realizar cálculos con los ordenadores modernos de acción rápida.

Anteriormente, para calcular aproximadamente la integral (3.18) de la función  $f(x)$ , dividimos el segmento fundamental  $[a, b]$  en un número bastante grande  $n$  de segmentos parciales *iguales* de una misma longitud  $h$ , sustituyendo posteriormente la función  $f(x)$  por un polinomio de grado nulo, primero o segundo, respectivamente, en todo segmento parcial.

El error que aparece en este método de ningún modo toma en consideración las propiedades individuales de la función  $f(x)$ . Por eso, lógicamente, surge la idea de variar los puntos del segmento fundamental  $[a, b]$  y para toda función fijada  $f(x)$  elegir una *partición óptima* del segmento fundamental  $[a, b]$  en  $n$  segmentos parciales, no iguales, hablando en general, uno a otro, tal que asegure la magnitud mínima del error de la fórmula aproximada dada.

En el Complemento del cap. 5 nos detendremos en la realización de dicha idea perteneciente a A. N. Tijonov y S. S. Gaysarián.

## Capítulo 4

# TEORÍA DE LAS SERIES NUMÉRICAS

Ya en el curso elemental nos encontramos con sumas que comprenden un número *infinito* de sumandos (por ejemplo, con la suma de un número infinito de elementos de la progresión geométrica). Estas sumas, llamadas *series*, se examinan en el presente capítulo. Estableceremos que en algunas condiciones las series poseen propiedades análogas a las de las sumas finitas.

### § 1. Concepto de serie numérica

**1. La serie y sus sumas parciales. Series convergentes y divergentes.** Consideremos una sucesión numérica infinita  $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$  y con los elementos de esta sucesión compongamos formalmente la expresión de la forma

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots = \sum_{h=1}^{\infty} u_h. \quad (4.1)$$

La expresión (4.1) suele llamarse *serie numérica* o simplemente *serie*. Los elementos  $u_h$ , de los que está formada la expresión (4.1), suelen llamarse *términos de la serie*. Como regla, para designar la serie utilizamos el símbolo de suma.

*La suma de los  $n$  primeros términos de una serie dada se denominará  $n$ -ésima suma parcial de la serie dada y se denotará con el símbolo  $S_n$ .*

Así,  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$ . La serie (4.1) se denomina *convergente* si converge la sucesión  $\{S_n\}$  de las sumas parciales de esta serie. Además, el límite  $S$  de la sucesión de las sumas parciales  $\{S_n\}$  se denomina *suma de la serie dada*. De este modo, podemos escribir formalmente la igualdad de la serie convergente que tiene la suma  $S$

$$S = \sum_{h=1}^{\infty} u_h.$$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  no existe, la serie se denomina *divergente*.

Subrayemos que el concepto de suma se define solamente para la serie convergente, y, a diferencia del concepto de suma finita, se introduce por medio del paso límite \*).

Observemos que la consideración de series numéricas es una nueva forma de estudiar sucesiones numéricas, puesto que: 1) a toda serie dada le corresponde unívocamente la sucesión de sus sumas parciales, 2) a toda sucesión dada  $\{S_n\}$  le corresponde unívocamente una serie, para la cual esta sucesión es la de sus sumas parciales (baste tomar los términos de la serie iguales a  $u_k = S_k - S_{k-1}$ , para  $k > 1$  y  $u_1 = S_1$ ).

Uno de los problemas fundamentales de la teoría de series numéricas es establecer los criterios, según los cuales se pueda resolver el problema de convergencia o divergencia de la serie dada.

#### EJEMPLOS DE SERIES NUMÉRICAS.

Examinemos la convergencia de la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1}. \quad (4.2)$$

Debido a que la sucesión de sus sumas parciales  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 0$ , ...,  $S_{2n-1} = 1$ ,  $S_{2n} = 0$ , ... no tiene límite, la serie (4.2) diverge.

2. Consideremos la serie compuesta por elementos de la progresión geométrica:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots = \sum_{h=1}^{\infty} q^{h-1}. \quad (4.3)$$

La  $n$ -ésima suma parcial  $S_n$  de esta serie tiene, para  $q \neq 1$ , la forma

$$S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}. \quad (4.4)$$

Evidentemente, cuando  $|q| < 1$ , la sucesión de las sumas parciales  $S_n$  converge y tiene un límite igual a  $\frac{1}{1 - q}$ . De este modo, cuando  $|q| < 1$  la serie considerada converge y tiene una suma igual a  $\frac{1}{1 - q}$ .

Para  $|q| > 1$ , de la igualdad (4.4) es obvio que la sucesión  $S_n$  (y, por tanto, la serie considerada) diverge. Si  $|q| = 1$ , se ve inmediatamente la divergencia de la serie (4.3). En efecto, cuando  $q = +1$  y  $S_n = n$ , la divergencia de la sucesión  $S_n$  es evidente,

\* En las matemáticas modernas, junto al concepto de suma anteriormente dado, se introduce el de suma de la serie en varios sentidos generalizados. Esto permite sumar, en sentidos generalizados, muchas series divergentes (véase el Complemento 3 del presente capítulo).

mientras que para  $q = -1$  la serie (4.3) se transforma en la serie (4.2), anteriormente examinada.

3 Sea  $x$  cualquier número fijado. Demostremos que la serie

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{h-1}}{(k-1)!} \quad (4.5)$$

converge y tiene la suma igual a  $e^x$ .

En el p. 2 del § 5 (cap. 8, tomo 1) hemos desarrollado la función  $e^x$  por la fórmula de Maclaurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \quad (4.6)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1). \quad (4.7)$$

De las fórmulas (4.6) y (4.7) obtenemos

$$\left| \left[ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] - e^x \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}. \quad (4.8)$$

Denotando mediante  $S_n$  la  $n$ -ésima suma parcial de la serie (4.5), podemos escribir la desigualdad (4.8) en la forma

$$|S_n - e^x| \leq \frac{|x|^n}{n!} e^{|x|}. \quad (4.9)$$

Puesto que para cualquier  $x$  fijo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0^{**}$$

el segundo miembro de la desigualdad (4.9) es elemento de una sucesión infinitesimal. Pero esto significa que la sucesión  $\{S_n\}$  converge al número  $e^x$ . Por lo tanto, la serie (4.5) también converge y tiene la suma  $e^x$ .

4. De modo análogo, empleando la fórmula de Maclaurin para las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$  se puede demostrar que las series

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

y

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{(2k-2)!}$$

\*] Mediante el símbolo  $0!$  hemos denotado el número 1.

\*\*] Véase el ejemplo 3 (p. 3, § 3, cap. 3, tomo 1)

convergen para cualquier valor fijo de  $x$  y tienen unas sumas iguales a  $\operatorname{sen} x$  y  $\operatorname{cos} x$ , respectivamente. (Dejamos a cargo del lector convergerse de esto.)

**2. Criterio de Cauchy de convergencia de una serie.** Dado que, por definición, la cuestión sobre la convergencia de una serie es equivalente a la cuestión sobre la convergencia de sus sumas parciales, la condición necesaria y suficiente de convergencia de la serie dada se obtiene al enunciar el criterio de convergencia de Cauchy para la sucesión de sus sumas parciales. Para mayor comodidad, aduzcamos la formulación del criterio de Cauchy para la sucesión. *Para que la sucesión  $\{S_n\}$  sea convergente, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo  $\varepsilon$  exista un número  $N$  tal que para todos los números  $n$  que satisfacen la condición  $n \geq N$  y para todos los  $p$  naturales ( $p = 1, 2, 3, \dots$ )*

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Como corolario de esta afirmación, obtenemos el siguiente teorema fundamental.

**Teorema 4.1 (criterio de Cauchy para la serie).** *Para que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  converja es necesario y suficiente que para cualquier número positivo  $\varepsilon$  exista un número  $N$  tal que para todos los números  $n$  que satisfacen la condición  $n \geq N$  y para todos los números naturales  $p$*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \quad (4.10)$$

Para demostrar este teorema es suficiente que la magnitud bajo el signo del módulo en la desigualdad (4.10) sea igual a la diferencia de las sumas parciales  $S_{n+p} - S_n$ . Hemos de subrayar que, en esencia, el criterio de convergencia de Cauchy es de interés teórico. Como regla, su empleo para establecer la convergencia o la divergencia de unas u otras series concretas tiene dificultades. Por eso, además del criterio de Cauchy no hay que establecer otros criterios eficaces de convergencia y divergencia de las series.

Del teorema 4.1 es fácil extraer dos corolarios elementales, pero importantes.

**Corolario 1.** *Si la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  converge, la sucesión  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$  es infinitesimal.*

La magnitud  $r_n$  suele llamarse *n-ésimo resto de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ .*

Para demostrar el corolario 1, es suficiente demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un número  $N$  tal que  $|r_n| \leq \varepsilon$  cuando  $n \geq N$ .

La última desigualdad se desprende inmediatamente de la desigualdad (4.10), válida para cualquier  $p = 1, 2, 3, \dots$ , y del teorema 3.13, t. 1.

**Corolario 2 (condición necesaria de convergencia de una serie).** Para la convergencia de la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$  es necesario que la sucesión  $u_1, u_2, u_3, \dots$  de los términos de esta serie sea infinitesimal.

Basta demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  y para la serie convergente dada existe un número  $N_0$  tal que, cuando  $n \geq N_0$ ,  $|u_n| < \varepsilon$ . Sea dado cualquier  $\varepsilon > 0$ . Según el teorema 4.1, existe un número  $N$  tal que para  $n \geq N$  y para cualquier  $p$  natural se cumple la desigualdad (4.10). En particular, para  $p = 1$  esta desigualdad adquiere la forma

$$|u_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{para } n \geq N). \quad (4.11)$$

Si ahora hacemos el número  $N_0$  igual a  $N_0 = N + 1$ , entonces, para  $n \geq N_0$ , en virtud de la desigualdad (4.11), obtenemos  $|u_n| < \varepsilon$ , lo que era necesario demostrar.

En otras palabras, el corolario 2 puede enunciarse del modo siguiente; para la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  es necesario que  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ . De este modo, cuando investigamos la serie dada en cuanto a la convergencia debemos, ante todo, ver si tiende a cero el  $k$ -ésimo término de esta serie cuando  $k \rightarrow \infty$ . Si no es así, la serie, sin duda, diverge. Así, por ejemplo, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{5k^2 + 300k}$$

a ciencia cierta diverge, puesto que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{5k^2 + 300k} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

De manera análoga, la divergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ , anteriormente examinada, se desprende de que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k$  no existe.

Sin embargo, subrayemos que la tendencia a cero del  $k$ -ésimo término de la serie, para  $k \rightarrow \infty$ , es solamente condición necesaria, pero no suficiente para la convergencia de la serie.

A título de ejemplo consideramos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (4.12)$$

Esta serie suele llamarse *serie armónica*. Es evidente que para la serie armónica se cumple la condición necesaria de convergencia, puesto que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ . Sin embargo, demostremos que esta serie diverge. Empleemos el criterio de Cauchy. Demostremos que para el número positivo  $\varepsilon = 1/2$  no existe un número  $N$  tal que para  $n \geq N$  y cualquier  $p$  natural

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}. \quad (4.13)$$

En efecto, si tomamos  $p = n$ , para  $n$ , por más grande que sea

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{h=n+1}^{2n} \frac{1}{h} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

(Hemos tomado en consideración que en la última suma hay  $n$  sumandos y el mínimo entre ellos es igual a  $1/2n$ .)

Así, pues, la desigualdad (4.13) no se cumple, por más grande que sea el número  $N$ . En virtud del criterio de Cauchy, la serie (4.12) diverge.

### 3. Dos propiedades relacionadas con la convergencia de una serie.

1°. La eliminación de un número finito de términos de la serie (o la adición de un número finito de términos a la serie) no influye en la convergencia ni en la divergencia de esta serie.

Para cerciorarse de esto, es suficiente observar que después de eliminar (o adicionar) términos, todas las sumas parciales de esta serie, partiendo de un número, varían en una misma constante.

2°. Si  $c$  es una constante diferente de cero,  $u'_h = cu_h$ , la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} u'_h \text{ converge si, y sólo si, converge la serie } \sum_{h=1}^{\infty} u_h.$$

Si denotamos las  $n$ -ésimas sumas parciales de las series consideradas mediante  $S'_n$  y  $S_n$ , respectivamente, entonces, es obvio que  $S'_n = cS_n$ . De la última igualdad se desprende que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n$  existe si, y sólo si, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .



## § 2. Series con términos positivos

**1. Condición necesaria y suficiente de convergencia de una serie con términos positivos.** En el presente párrafo consideraremos las series *cuyos términos no son negativos*. Siguiendo la tradición establecida, las denominaremos *series con términos positivos* (aunque sea más correcto usar el término «series con términos no negativos»). Las series, cuyos términos son estrictamente mayores que cero, se denominarán *series con términos estrictamente positivos*.

Por sí mismas, las series con términos positivos se encuentran con frecuencia en aplicaciones. Además, su estudio preliminar facilita el estudio de las series con términos de cualquier signo. A continuación, para subrayar que se trata de una serie con términos positivos, denotaremos con frecuencia los términos de esta serie con el símbolo  $p_k$  en vez de  $u_k$ .

A la vez, podemos señalar la propiedad característica fundamental de la serie con términos positivos: *la sucesión de las sumas parciales de esta serie es no decreciente*.

Esto permite demostrar la siguiente afirmación.

**Teorema 4.2.** *Para que la serie con términos positivos converja, es necesario y suficiente que la sucesión de las sumas parciales de esta serie sea acotada.*

La *necesidad* se debe a que toda sucesión convergente es acotada (en virtud del teorema 3.8, l. 1).

La *suficiencia* se desprende de que la sucesión de las sumas parciales no decrece y, por tanto, para la convergencia de esta sucesión es suficiente que sea acotada (en virtud del teorema 3.15, l. 1).

**2. Criterios de comparación.** Aquí estableceremos algunos criterios que permitirán sacar la conclusión sobre la convergencia (o la divergencia) de la serie considerada comparándola con otra serie cuya convergencia (o divergencia) se conoce de antemano.

**Teorema 4.3.** *Sean  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  dos series con términos positivos. Sea, luego, que para todos los números  $k$  es válida la desigualdad*

$$p_k \leq p'_k. \quad (4.14)$$

*Entonces, la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  trae consigo la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y la divergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  trae consigo la divergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ .*

**DEMOSTRACION** Denotemos las  $n$ -ésimas sumas parciales de las series  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  mediante  $S_n$  y  $S'_n$ , respectivamente. De la

desigualdad (4.14) deducimos que  $S_n \leq S'_n$ . La última desigualdad significa que la acotación de la sucesión de las sumas parciales  $\{S'_n\}$  provoca la acotación de la sucesión de las sumas parciales  $\{S_n\}$  y, viceversa, la no acotación de la sucesión de las sumas parciales  $\{S_n\}$  produce la no acotación de la sucesión de las sumas parciales  $\{S'_n\}$ . En virtud del teorema 4.2, el teorema 4.3 queda demostrado.

**OBSERVACION 1.** En la condición del teorema 4.3 se puede exigir que la desigualdad (4.14) se cumpla no para todos los números  $k$ , sino solamente a partir de cierto número  $k$ . En efecto, en virtud del p. 3 del § 1, la eliminación de un número finito de términos no influye en la convergencia de la serie.

**OBSERVACION 2.** El teorema 4.3 sigue siendo válido si en la condición de este teorema la desigualdad (4.14) se sustituye por la siguiente desigualdad

$$p_k \leq cp'_k \quad (4.15)$$

donde  $c$  es cualquier constante positiva. En efecto, conforme al p. 3 del § 1, la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  es equivalente a la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (cp'_k)$ . Además, se puede exigir que la desigualdad (4.15) se cumpla solamente partiendo de un número bastante grande  $k$ .

**Corolario del teorema 4.3.** Si  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  es una serie con términos positivos,  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ , una serie con términos estrictamente positivos, y existe el límite finito entonces la

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L,$$

convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  conlleva la convergencia de la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y la divergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  produce divergencia de la

serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ .

**DEMOSTRACION.** Dado que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} = L$ , según la definición del límite, para  $\varepsilon > 0$  existe un número  $N$  tal que para  $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p'_k} < L + \varepsilon.$$

Por tanto, cuando  $k \geq N$ , es válida la desigualdad  $p_k < (L + \varepsilon) p'_k$ . La última desigualdad coincide con la desigualdad (4.15) para  $c = L + \varepsilon$ . En virtud de la observación 2 del teorema 4.3, el corolario queda demostrado.

**Teorema 4.4.** Sean  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  dos series con términos estrictamente positivos. Sea también que para todos los números  $k$  es válida la desigualdad

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k}. \quad (4.16)$$

Entonces, la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  conduce a la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y la divergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  conduce a la divergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ .

**DEMOSTRACION.** Escribamos la desigualdad (4.16) para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , donde  $n$  es un número cualquiera. Tendremos,

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &\leq \frac{p'_2}{p'_1}, \\ \frac{p_3}{p_2} &\leq \frac{p'_3}{p'_2}, \\ &\dots \\ \frac{p_n}{p_{n-1}} &\leq \frac{p'_n}{p'_{n-1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando término a término todas las desigualdades escritas obtenemos

$$\frac{p_n}{p_1} \leq \frac{p'_n}{p'_1} \quad \text{o bien} \quad p_n \leq \frac{p_1}{p'_1} p'_n.$$

Dado que en la última desigualdad la magnitud  $c = p_1/p'_1$  es constante, positiva e independiente del número  $n$ , conforme a la observación 2 del teorema 4.3, el teorema 4.4 queda demostrado.

**OBSERVACION 3.** Se puede exigir que la desigualdad (4.16) del teorema 4.4 no se cumpla para todos los números  $k$ , sino a partir del número  $k$  (pues la eliminación de un número finito de primeros términos no influye en la convergencia de la serie).

Los dos teoremas demostrados en el presente punto se denominan *teoremas de comparación* o *criterios de comparación*.

Aduzcamos los ejemplos de aplicación de los criterios de comparación

1. Investiguemos la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3 + bk}, \text{ donde } b > 0.$$

Si  $b \leq 1$ , el  $k$ -ésimo término de la serie considerada no tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, se infringe la condición necesaria de convergencia de la serie y la serie diverge. Si  $b > 1$ , entonces, puesto que para cualquier número  $k$  es válida la desigualdad

$$\frac{1}{3 + bk} < \frac{1}{bk}$$

y la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{bk}$  converge, el teorema 4.3 de comparación permite afirmar que la serie considerada es convergente.

2. Investiguemos en cuanto a la convergencia, para todo  $\alpha \leq 1$ , la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{k^\alpha} + \dots \quad (4.17)$$

Esta serie se denomina con frecuencia *serie armónica generalizada*. Debido a que, cuando  $\alpha \leq 1$ , para cualquier número  $k$  es válida la desigualdad

$$\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$$

y la serie armónica  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverge <sup>\*)</sup>, el teorema de comparación 4.3 permite afirmar que la serie (4.17) es divergente para cualquier  $\alpha \leq 1$ .

**3. Criterios de d'Alembert y de Cauchy.** Entre los criterios de comparación hay dos muy usados, de convergencia de las series con términos positivos, el de d'Alembert y el de Cauchy. Los criterios de d'Alembert y de Cauchy se basan en la comparación de la serie considerada con una serie compuesta de términos de la progresión geométrica, a saber, con la serie convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + \dots, \quad |q| < 1, \quad (4.18)$$

o con la divergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots \quad (4.19)$$

<sup>\*)</sup> La divergencia de la serie armónica se establece en el p. 2 del § 1.

**Teorema 4.5 (criterio de d'Alembert)\*.** 1. Si para todos los números  $k$ , o, por lo menos, partiendo de un número  $k$ , es válida la desigualdad

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1^{**} \left( \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right), \quad (4.20)$$

la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  converge (diverge).

II. Si existe el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L \quad (4.21)$$

la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  converge cuando  $L < 1$  y diverge cuando  $L > 1$ .

El teorema II suele llamarse *criterio de d'Alembert en forma límite*. En esta forma se usa con la mayor frecuencia.

DEMOSTRACION. Consideremos los teoremas I y II por separado.

1) Para demostrar el teorema I pongamos  $p'_k = q^k$  ( $p'_k = 1$ ).

Entonces  $\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = q$ , donde  $q < 1$ ,  $\left( \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \geq 1 \right)$ , y podemos escribir la desigualdad (4.20) en la forma

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \left( \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \right). \quad (4.22)$$

Dado que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  que coincide con la serie (4.18) ((4.19)) converge (diverge), la desigualdad (4.22), basándose en el teorema de comparación 4.4, garantiza la convergencia (divergencia) de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ . El teorema I queda demostrado.

2) Demostremos ahora el teorema II. Si  $L < 1$ , existe un número positivo  $\varepsilon$  tal que  $L + \varepsilon < 1 - 2\varepsilon$  y  $L - \varepsilon > 1 - \varepsilon$ . Según la definición del límite de una sucesión, para dicho  $\varepsilon$  existe un número  $N$  tal que para  $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon. \quad (4.23)$$

El número  $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$  hace las veces de  $q$  en el teorema I. La serie converge.

\*) Jacques Leron d'Alembert, matemático y filósofo francés (1717—1783).

\*\*\*) Además, se supone, naturalmente, que todos los miembros de la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  (por lo menos, partiendo de cierto número) son *estrictamente* positivos.

Si  $L > 1$ , existe un número *positivo*  $\varepsilon$  tal que  $L = 1 + \varepsilon$  y  $L - \varepsilon = 1$ . En este caso, basándose en la desigualdad izquierda de (4.23), obtenemos

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1 \quad (\text{para } k \geq N).$$

La serie diverge de acuerdo con el teorema I. El teorema 4.5 queda completamente demostrado.

OBSERVACIONES AL TEOREMA 4.5. 1) Prestemos la atención a que en el teorema 4.5 (I) *no se puede sustituir* la desigualdad

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad (\text{para todos los } k, \text{ partiendo de cierto } k) \text{ por } \frac{p_{k+1}}{p_k} < 1.$$

En efecto, conforme a lo demostrado anteriormente, la serie armónica (4.12) diverge, pero para esta serie se tiene  $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{k+1} < 1$  (para todos los números  $k$ ).

2) Si en las condiciones del teorema (4.5) (II)  $L = 1$ , no se puede decir nada concreto sobre la convergencia de la serie (o sea, para  $L = 1$  el criterio de d'Alembert «no funcional»). En efecto, para la serie armónica (4.12)  $L = 1$ , además como sabemos, esta serie diverge. Al mismo tiempo, para la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (4.24)$$

también  $L = 1$ , pero, como se mostrará en el punto siguiente, esta serie converge.

**Teorema 4.6 (criterio de Cauchy).** I. Si para todos los números  $k$ ,  $n$ , por lo menos, partiendo de un número  $k$ , es válida la desigualdad

$$\sqrt[n]{p_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[n]{p_k} \geq 1) \quad (4.25)$$

la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  converge (diverge).

II. Si existe el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_k} = L, \quad (4.26)$$

la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  converge cuando  $L < 1$  y diverge cuando  $L > 1$ .

El teorema II suele llamarse *criterio de Cauchy en forma límite*.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos los teoremas I y II por separado.

1) Para demostrar el teorema I adoptemos  $p'_k = q^k$  ( $p'_k = 1$ ). Entonces, de la desigualdad (4.25) obtenemos

$$p_k \leq p'_k \quad (p^k \geq p'_k) \quad (4.27)$$

Como la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} r'_k$  que coincide con la serie (4.18) ((4.19)) converge (diverge), a base del teorema de comparación 4.3, la desigualdad (4.27) garantiza la convergencia (divergencia) de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ . El teorema 4.6 (I) queda demostrado.

2) Para demostrar el teorema (4.6) (II) es necesario repetir literalmente el esquema de demostración del teorema 4.5 (II), sustituyendo en todos los razonamientos por  $\frac{p_{k+1}}{p_k} \sqrt[k]{p_k}$ .

El teorema 4.6 queda completamente demostrado.

OBSERVACIONES AL TEOREMA 4.6 1) Al igual que en el teorema anterior, en el 4.6 (I) no se puede sustituir la desigualdad  $\sqrt[k]{p_k} \leq \eta < 1$  por  $\sqrt[k]{p_k} < 1$ .

2) Si  $L = 1$ , el criterio de Cauchy en forma límite «no funciona». Podemos referirnos a dos ejemplos mencionados en la observación correspondiente del criterio de d'Alembert.

3) Surge la pregunta: ¿cuál de los dos criterios, de d'Alembert o de Cauchy, es el más fuerte? Analicemos esta cuestión respecto a los criterios de d'Alembert y de Cauchy tomados en forma límite. Se puede demostrar que de la existencia del límite (4.24) se desprende la existencia del límite (4.26) y la igualdad de estos límites. (La demostración se da en el complemento 1 del presente capítulo). La afirmación inversa es inválida. En efecto, es fácil cerciorarse de que para la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 3}{2^{k+1}} \quad (4.28)$$

el límite (4.26) existe y es igual a 1/2, mientras que el límite (4.24) no existe en absoluto. De este modo, el criterio de Cauchy es más fuerte que el de d'Alembert, puesto que cada vez que funciona el criterio de d'Alembert, funciona también el de Cauchy y, al mismo tiempo, existen series (por ejemplo, la serie (4.28)), para las cuales funciona el criterio de Cauchy y no funciona el de d'Alembert. A pesar de esto, en la práctica, el criterio de d'Alembert se usa con mayor frecuencia que el de Cauchy.

EJEMPLOS 1) Investiguemos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[k]{k})^k}{k!} \quad (4.29)$$

en cuanto a la convergencia. Apliquemos el criterio de d'Alembert en forma límite. Tenemos

$$p_h = \frac{(\sqrt{k})^k}{h!}, \quad \frac{p_{h+1}}{p_h} = \frac{(\sqrt{k+1})^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{h!}{(1/k)^k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+2}. \quad (4.30)$$

Basándose en (4.30),

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{p_{h+1}}{p_h} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+2} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+2} = 0 \cdot \sqrt{e} = 0 < 1, \end{aligned}$$

es decir, la serie (4.29) converge.

2) Investiguemos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \quad (4.31)$$

en cuanto a la convergencia. Apliquemos el criterio de Cauchy en forma límite. Tenemos

$$\sqrt[k]{p_k} = \frac{\sqrt[k]{k}}{2}. \quad (4.32)$$

De acuerdo con (4.32),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = \frac{1}{2} < 1.$$

De este modo, el criterio de Cauchy establece la convergencia de la serie (4.31).

**4. Criterio integral de Cauchy—Maclaurin.** Los criterios de d'Alembert y de Cauchy no sirven para aclarar la cuestión sobre la convergencia de algunas series con términos positivos que se encuentran frecuentemente. Así, por ejemplo, empleando estos criterios, no se puede aclarar es o no convergente la serie armónica generalizada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (4.33)$$

( $\alpha$  es cualquier número real).

Es verdad que al final del punto 2 hemos establecido que, para  $\alpha \leq 1$ , la serie (4.33) diverge, pero sigue pendiente la cuestión

---

\*) Para calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ , hay que hallar por logaritmos la expresión  $x^{1/x}$  y aplicar la regla de L'Hospital.





Sumando término a término las desigualdades anotadas, obtenemos

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k), \quad (4.38)$$

Convengamos denotar por el símbolo  $S_n$  la  $n$ -ésima suma de la serie (4.34), igual a

$$S_n = \sum_{k=m}^n f(k).$$

Adoptando esta denotación y teniendo en cuenta la denotación de (4.35), podemos escribir las desigualdades (4.38) del modo siguiente:

$$S_n - f(m) \leq a_n \leq S_{n-1}. \quad (4.39)$$

Las desigualdades (4.39) permiten demostrar fácilmente el teorema. En efecto, la fórmula (4.35) evidencia que la sucesión  $\{a_n\}$  es no decreciente. Por tanto, para que esta sucesión sea convergente, es necesario y suficiente que esté acotada. En virtud del teorema 4.2, para que la serie (4.34) sea convergente, es necesario y suficiente que esté acotada sucesión  $\{S_n\}$ . De las desigualdades (4.39) se desprende que la sucesión  $\{S_n\}$  está acotada si, y sólo si, lo está la sucesión  $\{a_n\}$ , o sea, si, y sólo si, la sucesión  $\{a_n\}$  converge. El teorema queda demostrado.

**EJEMPLOS** 1) Primero apliquemos el criterio integral de Cauchy — Maclaurin para aclarar si es o no convergente la serie armónica generalizada (4.33). Puesto que la serie (4.33) puede considerarse como una serie de la forma (4.34) para  $m = 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  y la función  $f(x)$  decrece y es positiva en la semirrecta  $x \geq 1$ , entonces la cuestión sobre la convergencia de la serie (4.33) es equivalente a la cuestión sobre la convergencia de la sucesión  $\{a_n\}$ , donde

$$a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x=1}^{x=n} = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln x \Big|_{x=1}^{x=n} = \ln n & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

De la forma de los elementos  $a_n$  se desprende que la sucesión  $\{a_n\}$  diverge si  $\alpha \leq 1$  y converge si  $\alpha > 1$ , además, en el último caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\alpha-1}$ . De este modo, la serie (4.33) diverge si  $\alpha \leq 1$  (ya lo hemos establecido anteriormente por otro procedimiento) y converge si  $\alpha > 1$ . En particular, para  $\alpha = 2$  la serie (4.33) se transforma en la serie (4.24) cuya convergencia se puede afirmar ahora.

2) Investiguemos la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k}, \quad (4.40)$$

en cuanto a la convergencia aquí  $\beta$  es un número real positivo fijo. La serie (4.40) puede considerarse como una serie de la forma (4.34) para  $m = 2$  y  $f(x) = \frac{1}{x \ln^{\beta} x}$ . Como la función  $f(x)$  es no negativa y no crece en la semirrecta  $x \geq 2$ , la cuestión sobre la convergencia o la divergencia de la serie (4.40) es equivalente a la cuestión sobre la convergencia o la divergencia de la sucesión  $\{a_n\}$  donde

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x \ln^{\beta} x} dx = \begin{cases} \frac{\ln^{1-\beta} x}{1-\beta} \Big|_{x=2}^{x=n} = \frac{\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1, \\ \ln \ln n - \ln \ln 2 & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

De la forma de los elementos  $a_n$  se desprende que la sucesión  $\{a_n\}$  converge si  $\beta > 1$  y diverge si  $\beta \leq 1$ . De este modo, la serie (4.40) converge si  $\beta > 1$  y diverge si  $\beta \leq 1$ .

5. **Criterio de Raabe.** Los criterios de d'Alembert y de Cauchy se basan en la comparación de la serie considerada con la serie que constituye la suma de la progresión geométrica. Lógicamente, surge la idea de obtener criterios más finos, basados en la comparación de la serie considerada con otras series estándar, convergentes o divergentes «más lentamente» que la serie en caso de la progresión geométrica.

En este punto estableceremos el criterio basado en la comparación de la serie considerada con la estándar, examinada en el punto anterior,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots \quad (4.41)$$

**Teorema 4.8 (criterio de Raabe)\*.** I. Si para todos los números  $k$  o, por lo menos, a partir de cierto número  $k$  es válida la desigualdad \*\*)

$$k \left( 1 - \frac{p_{k+1}}{p_k} \right) \geq q \geq 1 \left\{ k \left( 1 - \frac{p_{k+1}}{p_k} \right) \leq 1 \right\}, \quad (4.42)$$

la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  converge (diverge).

II Si existe el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left( 1 - \frac{p_{k+1}}{p_k} \right) = L, \quad (4.43)$$

\*) Joseph Ludwig Raabe, matemático suizo (1801—1850).

\*\*\*) Naturalmente, se supone además que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ , a partir, por lo menos, de cierto número, tiene términos estrictamente positivos.

la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} p_h$  converge cuando  $L > 1$  y diverge cuando  $L < 1$ . El teorema II suele denominarse criterio de Raabe en forma límite.

DEMOSTRACIÓN Consideremos los teoremas I y II por separado.

1) Para demostrar el teorema I, escribamos la desigualdad (4.42) en la forma

$$\frac{p_{h+1}}{p_h} \leq 1 - \frac{q}{k} \left\{ \frac{p_{h+1}}{p_h} \geq 1 - \frac{1}{k} \right\}. \quad (4.44)$$

Dado que  $q > 1$ , existe un número  $\alpha$  que satisface las desigualdades  $q > \alpha > 1$ . Al desarrollar la función  $(1-x)^\alpha$  por la fórmula de Maclaurin con el término residual en forma de Peano (véase el p. 2 del § 15, cap. 8, t. 1), tendremos

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \varepsilon(x).$$

Adoptando  $x = -1/k$  en la última fórmula obtenemos

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^\alpha = 1 - \frac{\alpha}{k} + \varepsilon\left(\frac{1}{k}\right). \quad (4.45)$$

Como la sucesión  $\frac{\varepsilon(1/k)}{1/k}$  es infinitesimal, a partir de cierto número  $k_0$ , es válida la desigualdad

$$\frac{\varepsilon(1/k)}{1/k} \leq q - \alpha. \quad (4.46)$$

Comparando (4.45) y (4.46), obtenemos la desigualdad

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^\alpha \geq 1 - \frac{q}{k} \quad (\text{si } k \geq k_0). \quad (4.47)$$

La comparación de las desigualdades (4.44) y (4.47) da

$$\frac{p_{h+1}}{p_h} \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^\alpha \left\{ \frac{p_{h+1}}{p_h} \geq 1 - \frac{1}{k} \right\} \quad (\text{si } k \geq k_0)$$

Las últimas desigualdades pueden anotarse en la forma

$$\frac{p_{h+1}}{p_h} \leq \frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(k-1)^\alpha}} \left\{ \frac{p_{h+1}}{p_h} \geq \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} \right\} \quad (\text{si } k \geq k_0). \quad (4.48)$$

Como la serie (4.41) converge para  $\alpha > 1$  y diverge para  $\alpha = 1$ , las desigualdades (4.48) y el teorema de comparación (4.4) permiten afirmar que la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  converge (diverge). El teorema I queda demostrado.

2) Al igual que en caso de los criterios de d'Alembert y de Cauchy, reducamos el teorema II al teorema I. Sea primero  $L > 1$ . Adoptemos  $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ ,  $q = 1 + \varepsilon = L - \varepsilon$ . Según la definición de límite (4.43), para este  $\varepsilon$  se puede indicar un número  $k_0$  partiendo del cual  $\left| k \left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) - L \right| < \varepsilon$  y, por tanto, es válida la desigualdad izquierda de (4.42). Pero si  $L < 1$ , adoptamos

$\varepsilon = 1 - L$  y, empleando la definición de límite (4.43), obtenemos que, a partir de un número  $k_0$ , es válida la desigualdad derecha (4.42). El teorema 4.8 queda completamente demostrado.

**OBSERVACION.** Señalemos que en el teorema 4.8 (I) en la desigualdad izquierda de (4.42) no se puede tomar  $q = 1$  (con esto la convergencia de la serie puede dejar de tener lugar). Si  $L = 1$ , el teorema 4.8 (II) «no funciona» (es posible tanto la convergencia como la divergencia de la serie).

**EJEMPLO.** Investigar la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k, \text{ donde } p_k = a^{-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k-1}\right)} \quad (a = \text{const} > 0)$$

en cuanto a la convergencia (divergencia).

Es fácil comprobar que los criterios de d'Alembert y de Cauchy no «funcionan» en caso de esta serie. Apliquemos el criterio de Raabe. Es fácil comprobar que

$$k \left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) = \frac{a^{-1/k} - 1}{\left(-\frac{1}{k}\right)}.$$

No es difícil comprender que, para  $k \rightarrow \infty$ , la última fracción tiende a la derivada de la función  $a^x$  en el punto  $x = 0$ , o sea, tiende a  $\ln a$ . En virtud del criterio de Raabe, la serie considerada converge si  $\ln a > 1$ , es decir, si  $a > e$ , y diverge si  $\ln a < 1$ , es decir, si  $a < e$ . Si  $a = e$ , para aclarar que la serie converge o diverge se necesita una investigación complementaria, puesto que el criterio de Raabe «no funciona». La serie (4.40) puede servir de otro ejemplo, en cuyo caso el criterio de Raabe «no funciona».

6. Ausencia de una serie universal de comparación. Ya hemos señalado que los criterios de d'Alembert y de Cauchy se basan en la comparación de la serie considerada con la de la progresión geométrica, en tanto que el criterio de Raabe, con una serie (4.41) que converge (o diverge) más despacio.

Lógicamente, surge la pregunta: *existe una serie universal que converge (o diverge) (con la lentitud límite!) y la comparación con la cual permitiría establecer la convergencia (o divergencia) de cualquier serie con términos positivos tomada de antemano.*

Demostremos que tal serie universal *no existe*. Sean dadas dos series con-

vergentes:  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ ; por los símbolos  $r_n$  y  $r'_n$  denotemos, respectiva-

mente, sus  $n$ -ésimos restos. Diremos que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  converge más despacio

que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{r'_n} = 0$ . Demostremos que para toda serie convergente

existe una serie que converge más despacio que ésta. En efecto, sea  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  cualquier serie convergente; sea  $r_n$  su  $n$ -ésimo resto. Demostremos que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ , donde \*)  $p'_k = \sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}$ , converge más despacio que la serie

\*) Por  $r_0$  tomamos toda la suma  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ .

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ . En realidad, si  $r'_n$  es el  $n$ -ésimo resto de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ , entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r'_n}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{\sqrt{r_n}} = 0.$$

Demostremos ahora la ausencia de la serie convergente universal, la comparación con la cual permitiría deducir la convergencia de cualquier serie convergente tomada de antemano. En efecto, si existiera esta serie convergente universal  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ , al tomar para ella la serie anteriormente construida  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ , obtendríamos que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{p_h}{p'_h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{r_{h-1} - r_h}{\sqrt{r_{h-1}} - \sqrt{r_h}} = \lim_{h \rightarrow \infty} (\sqrt{r_{h-1}} + \sqrt{r_h}) = 0.$$

De este modo, de la comparación con la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  no permite deducir que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  es convergente. De manera análoga se demuestra la ausencia de la serie divergente universal, la comparación con la cual permitiría deducir que cualquier serie divergente tomada de antemano es divergente.

### § 3. Series absoluta y condicionalmente convergentes

**1. Conceptos de series absoluta y condicionalmente convergentes.** Pasemos a examinar series cuyos términos son números reales de cualquier signo.

*Definición 1.* La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (4.49)$$

se denominará *absolutamente convergente* si converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \quad (4.50)$$

Señalemos que en esta definición nada se dice de si se supone o no la convergencia de la propia serie (4.49). Esta suposición sería excesiva puesto que es válido el teorema siguiente.

**Teorema 4.9.** De la convergencia de la serie (4.50) se desprende la convergencia de la serie (4.49).

**DEMOSTRACION** Empleemos el criterio de Cauchy para la serie (es decir, el teorema 4.1). Es necesario demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un número  $N$  tal que para todos los números  $n$  que sa-

tisfacen la condición  $n \geq N$  y para cualquier  $p$  natural,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \quad (4.51)$$

Fijemos cualquier  $\varepsilon > 0$ . Dado que la serie (4.50) converge, en virtud del teorema 4.1, existe un número  $N$  tal que para todos los números  $n$  que satisfacen la condición  $n \geq N$  y para cualquier  $p$  natural

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon. \quad (4.52)$$

Teniendo en cuenta que el módulo de la suma de varios sumandos no supera a la suma de sus módulos, podemos escribir

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|. \quad (4.53)$$

Comparando las desigualdades (4.52) y (4.53), obtenemos la desigualdad (4.51). El teorema queda demostrado.

**Definición 2.** La serie (4.49) se denomina *condicionalmente convergente* si converge, mientras que la serie correspondiente de los módulos (4.50) *diverge*.

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots, \text{ donde } \alpha > 1,$$

puede servir de ejemplo de serie *absolutamente* convergente, puesto que, si  $\alpha > 1$ , la serie (4.33) converge. Demos un ejemplo de serie *condicionalmente* convergente. Demostremos la convergencia condicional de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \quad (4.54)$$

Como la serie correspondiente de los módulos (serie armónica), según ya sabemos, *diverge*, para demostrar la convergencia condicional de la serie (4.54), basta demostrar que esta serie converge. Demostremos que la serie (4.54) converge al número  $\ln 2$ . En el p. 2 del § 15, cap. 1 hemos desarrollado la función  $\ln(1+x)$  por la fórmula de Maclaurin

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \quad (4.55)$$

En el mismo punto, para todos los  $x$  del segmento  $0 \leq x \leq 1$  está obtenida la siguiente estimación del término residual:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}.$$

Adoptando en las fórmulas (4.55) y (4.56)  $x = 1$ , tendremos

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1)$$

donde

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1}$$

o bien

$$\left| \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] - \ln 2 \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Designando por  $S_n$  la  $n$ -ésima suma parcial de la serie (4.54), podemos escribir la última desigualdad en la forma

$$|S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}.$$

De este modo, la diferencia  $S_n - \ln 2$  es una sucesión infinitesimal, lo que demuestra la convergencia de la serie (4.54) al número  $\ln 2$ .

**2. Sobre la reordenación de los términos de una serie condicionalmente convergente.** Una de las propiedades más importantes de la suma de un número finito de sumandos reales es la *propiedad conmutativa*. Esta última afirma que la suma no cambia al conmutar los sumandos. Lógicamente, surge la pregunta: ¿sigue siendo o no válida esta propiedad para la suma de una serie convergente, es decir, *puede o no cambiar la suma de una serie convergente al reordenar los términos de esta serie?* En el presente punto aclararemos esta cuestión respecto a una serie condicionalmente convergente. Empecemos la consideración examinando una reordenación concreta de los términos de la serie (4.54). Para mayor comodidad, escribamos la serie (4.54) en la forma

$$1 - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \dots \quad (4.56)$$

Al finalizar el punto anterior hemos demostrado que la serie (4.54) converge condicionalmente y tiene la suma  $S = \ln 2$ . Reordenemos ahora los términos de la serie (4.54) de modo que después de un término positivo estén dos negativos. Como resultado de esta reordenación de términos obtenemos la serie

$$1 - \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \dots + \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) + \dots \quad (4.57)$$



Demostremos que la serie (4.57), obtenida como resultado de dicha reordenación de los términos de la serie (4.54), converge y tiene una suma dos veces inferior a la de la serie (4.54). Denotaremos las  $m$ -ésimas sumas parciales de las series (4.54) y (4.57) por los símbolos  $S_m$  y  $S'_m$ , respectivamente. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} S'_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2m}. \end{aligned}$$

Así, pues,

$$S'_{3m} = \frac{1}{2} S_{2m}. \quad (4.58)$$

Luego, es obvio que

$$S'_{3m-1} = \frac{1}{2} S_{2m} + \frac{1}{4m}, \quad (4.59)$$

$$S'_{3m-2} = S'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2}. \quad (4.60)$$

Puesto que  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ , pasando al límite, para  $m \rightarrow \infty$  de las fórmulas (4.58), (4.59) y (4.60) obtenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S'_{3m} = \frac{1}{2} S, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S'_{3m-1} = \frac{1}{2} S, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S'_{3m-2} = \frac{1}{2} S.$$

Por lo tanto, queda definitivamente demostrado que la serie (4.57) converge y tiene una suma igual a  $\frac{1}{2} S$ . Como  $S = \ln 2 \neq 0$ , es evidente que  $\frac{1}{2} S \neq S$ . Por tanto, como resultado de la reordenación anteriormente mencionada de los términos cambió la suma de la serie condicionalmente convergente (4.54). El ejemplo concreto considerado más arriba muestra que la serie condicionalmente convergente *no posee la propiedad conmutativa*. La siguiente afirmación notable, formulada por Riemann, aclara completamente la cuestión sobre la influencia de las reordenaciones de los términos en la suma de una serie condicionalmente convergente.

**Teorema 4.10 (teorema de Riemann).** *Si una serie converge condicionalmente, cualquiera que sea el número  $L$  tomado de antemano, se puede reordenar los términos de la serie de modo que la serie transformada convergirá al número  $L$ .*

DEMOSTRACION. Sea

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (4.61)$$

serie arbitraria condicionalmente convergente. Mediante  $p_1, p_2, p_3, \dots$  denotaremos los términos positivos de la serie (4.61), escritos en el mismo orden en que se encuentran en esta serie, y mediante  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , los módulos de los términos negativos de la serie (4.61), escritos en el mismo orden en que se encuentran en esta serie. La serie (4.61) comprende un número infinito de términos tanto positivos como negativos, puesto que si se tuviera un número finito de términos de un signo, eliminando un número finito de primeros términos que no influyen en la convergencia, obtendríamos una serie compuesta de términos de un signo, para la cual la convergencia significaría la convergencia absoluta. Así, pues, con la serie (4.61) están ligadas dos series infinitas con términos positivos  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ . La primera de estas series se denotará por el símbolo  $P$  y la segunda por  $Q$ . Demostremos que ambas series  $P$  y  $Q$  son divergentes. Por el símbolo  $S_n$  denotaremos la  $n$ -ésima suma parcial de la serie (4.61), por  $P_n$ , la suma de todos los términos positivos que integran  $S_n$ , por  $Q_n$ , la suma de los módulos de todos los términos negativos que integran  $S_n$ . Entonces, es obvio que  $S_n = P_n - Q_n$ , y como, según la condición, la serie (4.61) converge a un número  $S$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - Q_n) = S. \quad (4.62)$$

Por otra parte, ya que la serie (4.61) no converge absolutamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n + Q_n) = \infty. \quad (4.63)$$

Comparando (4.62) y (4.63), obtenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty$ , es decir, queda demostrado que ambas series  $P$  y  $Q$  divergen. De la divergencia de las series  $P$  y  $Q$  se desprende que aun después de eliminar cualquier número finito de los primeros términos de estas series, entre los términos restantes, tanto de la serie  $P$  como de la serie  $Q$ , podemos tomar un número tan grande de términos que su suma superará a cualquier número tomado de antemano. Basándonos en este hecho, demostremos que se puede reordenar los términos de la serie inicial (4.61) de modo que, como resultado, se obtiene una serie convergente al número  $L$  tomado de antemano. En efecto, obtenemos la serie necesaria del modo siguiente. En primer lugar, de la serie inicial (4.61) elejimos exactamente tantos términos positivos  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  que su suma  $p_1 + p_2 + \dots + p_k$  supere a  $L$ . A continuación, añadamos a los términos elegidos exactamente tantos términos negativos  $-q_1, -q_2, \dots, -q_h$  que la suma común  $p_1 + p_2 + \dots + p_k - q_1 - q_2 - \dots - q_h$  sea menor que  $L$ . Además, volvamos a añadir exactamente tantos términos positivos  $p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots, p_{k_1}$  que la suma total  $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_h + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2}$  sea mayor que  $L$ . Por

razonamientos análogos obtenemos una serie infinita que comprende *todos los términos* de la serie inicial (4.61), puesto que tendremos que añadir cada vez *por lo menos un término* positivo o negativo de la serie inicial. Queda por demostrar que la serie obtenida converge a  $L$ . Observemos que en la serie obtenida se alteran sucesivamente *grupos de términos positivos y grupos de términos negativos*. Si la suma parcial de la serie obtenida termina en *un grupo completamente acabado*, la diferencia de esta suma parcial respecto del número  $L$  no supera al módulo de su último término\*). Si la suma parcial termina en *un grupo no completamente acabado*, la diferencia de esta suma parcial respecto del número  $L$  no supera al módulo del último término del penúltimo de los grupos. Para establecer que la serie converge hacia  $L$ , basta cerciorarse de que los módulos de los últimos términos de los grupos forman una sucesión infinitesimal, lo que se desprende directamente de la condición necesaria de convergencia de la serie inicial (4.61). El teorema de Riemann queda demostrado.

**3. Sobre la reordenación de los términos de una serie absolutamente convergente.** En el punto anterior hemos demostrado que *una serie condicionalmente convergente no posee la propiedad conmutativa*. En este punto demostraremos que *para toda serie absolutamente convergente es válida la propiedad conmutativa*.

**Teorema 4.11 (teorema de Cauchy).** *Si una serie converge absolutamente, toda serie obtenida a partir de la dada reordenando los términos también converge absolutamente y tiene la misma suma que la serie dada.*

DEMOSTRACION. Sea que la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h \quad (4.64)$$

converge absolutamente y la suma de esta serie es igual a  $S$ . Sea, además,

$$\sum_{h=1}^{\infty} u'_k \quad (4.65)$$

una serie obtenida de la serie (4.64) reordenando los términos. Es necesario demostrar: 1) que la serie (4.65) converge y tiene una suma igual a  $S$ , 2) que la serie (4.65) converge absolutamente. Demostremos primero la afirmación 1). Es suficiente demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un número  $N$  tal que para  $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| < \varepsilon. \quad (4.66)$$

Fijemos un  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Dado que la serie (4.64) converge absolutamente y tiene una suma igual a  $S$ , entonces, para  $\varepsilon > 0$  elegido,

\*) Puesto que añadimos términos al grupo dado exactamente hasta que la suma total supera al número  $L$ .

se puede indicar un número  $N_0$  tal que serán válidas las desigualdades

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p \text{ es cualquier número natural}) \quad (4.67)$$

$$\left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.68)$$

Escojamos ahora el número  $N$  tan grande que cualquier suma parcial  $S'_n$  de la serie (4.65) con un número  $n$  mayor que  $N$  comprenda todos los primeros  $N_0$  términos de la serie (4.65)\*\*).

Estimemos la diferencia que está en el miembro izquierdo de (4.66) y demostremos que, si  $n \geq N$ , para esta diferencia es válida la desigualdad (4.66).

En efecto, dicha diferencia puede representarse en la forma

$$\sum_{h=1}^n u'_h - S = \left( \sum_{h=1}^n u'_h - \sum_{h=1}^{N_0} u_h \right) + \left( \sum_{h=1}^{N_0} u_h - S \right). \quad (4.69)$$

Puesto que módulo de la suma de dos magnitudes no supera a la suma de sus módulos, a partir de (4.69) obtenemos

$$\left| \sum_{h=1}^n u'_h - S \right| \leq \left| \sum_{h=1}^n u'_h - \sum_{h=1}^{N_0} u_h \right| + \left| \sum_{h=1}^{N_0} u_h - S \right|. \quad (4.70)$$

De las desigualdades (4.68) y (4.70) es evidente que para demostrar la desigualdad (4.66) basta demostrar que para  $n \geq N$

$$\left| \sum_{h=1}^n u'_h - \sum_{h=1}^{N_0} u_h \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.71)$$

Para demostrar la desigualdad (4.71), advirtamos que para  $n \geq N$  en la primera de las sumas del primer miembro de (4.71) comprende todos los  $N_0$  primeros términos de la serie (4.64). Por consiguiente, la diferencia

$$\sum_{h=1}^n u'_h - \sum_{h=1}^{N_0} u_h \quad (4.72)$$

es suma de  $(n - N_0)$  términos de la serie (4.64), cada uno de cuyos números supera a  $N_0$ .

Si escogemos un  $p$  natural tan grande que el número  $N_0 + p$  supere a los números de todos los  $(n - N_0)$  términos de la suma que

\* En las desigualdades (4.67) y (4.68) se puede tomar un mismo número  $N_0$ . En efecto, escribiendo con anticipación las dos desigualdades mencionadas con distintos números  $N_0$ , podemos tomar el máximo entre los números  $N_0$ .

\*\* Se puede escoger este número  $N$ , puesto que la serie (4.65) se obtiene de la (4.64) reordenando los términos.

acabamos de indicar, para la diferencia (4.72) será válida, en todo caso, la desigualdad

$$\left| \sum_{h=1}^n u'_h - \sum_{h=1}^{N_0} u_h \right| \leq \sum_{h=n_0+1}^{N_0+p} |u_h|. \quad (4.73)$$

De las desigualdades (4.73) y (4.67) se desprende la desigualdad (4.71). Por lo tanto, queda demostrada la desigualdad (4.66), o sea, queda demostrado que la serie (4.65) converge y tiene una suma igual a  $S$ . Queda por demostrar la afirmación 2) de que la serie (4.65) converge *absolutamente*. La demostración de esta afirmación se infiere de la afirmación 1) si la aplicamos a las series

$$\sum_{h=1}^{\infty} |u_h| \quad \text{y} \quad \sum_{h=1}^{\infty} |u'_h|. \quad (4.74)$$

Además, se demuestra la convergencia de la segunda de la serie (4.74), es decir, la convergencia absoluta de la serie (4.86). El teorema 4.11 queda completamente demostrado.

#### § 4. Operaciones aritméticas con las series convergentes

En el presente párrafo consideraremos la cuestión sobre la posibilidad de sumar y multiplicar término a término las series convergentes.

**Teorema 4.12.** *Si dos series  $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$  y  $\sum_{h=1}^{\infty} v_h$  convergen y tienen sumas iguales a  $U$  y  $V$ , respectivamente, la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} (u_h \pm v_h)$  también converge y tiene una suma igual a  $U \pm V$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Denotemos  $n$ -ésimas sumas parciales de las series  $\sum u_h$ ,  $\sum v_h$  y  $\sum (u_h \pm v_h)$  por  $U_n$ ,  $V_n$  y  $S_n$ , respectivamente. Entonces, es obvio que  $S_n = U_n \pm V_n$ . Dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$ , según los teoremas 3.9 y 3.10 del t. 1, existe un límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = U \pm V$ . El teorema queda demostrado.

De este modo, se puede sumar y sustraer término a término cualesquiera series convergentes.

Pasando a la cuestión sobre la posibilidad de multiplicar las series término a término, demos demos la siguiente afirmación.

**Teorema 4.13.** *Si dos series  $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$  y  $\sum_{l=1}^{\infty} v_l$  convergen absolutamente y tienen las sumas iguales a  $U$  y  $V$ , respectivamente, la serie compuesta de todos los productos de la forma*

$$u_h v_l \quad (k = 1, 2, \dots; l = 1, 2, \dots),$$

enumerados en cualquier orden, también converge absolutamente y su suma es igual a  $UV$ .

DEMOSTRACION. Denotemos por  $w_1, w_2, w_3, \dots$  los productos de la forma  $u_h v_l$  ( $k = 1, 2, \dots; l = 1, 2, \dots$ ), enumerados en cualquier orden. Demostremos que la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|$  converge. Sea  $S_n$  la  $n$ -ésima suma parcial de esta serie. La suma  $S_n$  se compone de términos de la forma  $|u_h v_l|$ . Entre los índices  $k$  y  $l$  de estos términos que integran la suma  $S_n$ , existe un índice máximo que se denotará por  $m$ .

Entonces, en todo caso,

$$S_n \leq (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_m|) (|v_1| + |v_2| + \dots + |v_m|). \quad (4.75)$$

En el segundo miembro de la desigualdad (4.75) se halla el producto de  $m$ -ésimas sumas parciales de las series  $\sum |u_h|$  y  $\sum |v_l|$ . Dada la convergencia de dichas series con términos positivos, todas sus sumas parciales (y, por tanto, su producto) están acotadas. Por eso, lo está también la sucesión de las sumas parciales  $\{S_n\}$ , lo que demuestra la convergencia de la serie  $\sum |w_i|$ , es decir, la convergencia absoluta de la serie  $\sum w_i$ .

Queda por demostrar que la última serie tiene una suma  $S$  igual a  $UV$ . Como esta serie converge absolutamente, en virtud del teorema 4.11, su suma  $S$  no depende del orden en que la sumamos. Cualquiera que sea la sucesión (y, por tanto, la subsucesión\*) de las sumas parciales de esta serie, ella converge al número  $S$ . Pero, en este caso, la suma  $S$  de la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} w_i$  es, sin duda, igual a  $UV$ , puesto que precisamente a este número converge la subsucesión  $W_m$  de las sumas parciales de esta serie, de la forma

$$W_m = (u_1 + u_2 + \dots + u_m) (v_1 + v_2 + \dots + v_m).$$

El teorema 4.13 queda demostrado.

OBSERVACION. Para numerosos fines es conveniente escribir el producto de las series

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h \quad \text{y} \quad \sum_{h=1}^{\infty} v_h$$

en la forma

\* En virtud del p. 1 del § 4, cap. 3, t. 1.

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k\right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k\right) =$$

$$= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_{k-1} + \dots + u_{k-1} v_1) + \dots$$

Sin demostrar, señalemos que la serie obtenida multiplicando dos series término a término mediante dicho modo especial, converge también si *sólo una* serie de las dos series a multiplicar converge *absolutamente*. Si ambas series convergen condicionalmente, multiplicándolas término a término incluso según esta regla, como regla, se obtiene una serie divergente.

### § 5. Criterios de convergencia de las series arbitrarias

En el § 2 hemos establecido algunos criterios de convergencia de las series con *términos positivos*. En el presente párrafo examinaremos los criterios de convergencia de las series con términos de cualquier signo. Así, pues, sea

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (4.76)$$

una serie, cuyos términos tienen signos cualesquiera que sean. Ante todo, observamos que para establecer la convergencia *absoluta* de esta serie, es decir, para establecer la convergencia de la serie con términos positivos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|,$$

se puede aplicar cualquiera de los criterios del § 2 (criterios de d'Alembert, de Cauchy, de Raabe o criterio integral). Sin embargo, ninguno de dichos criterios da la posibilidad de aclarar *la cuestión más sutil sobre la convergencia condicional de la serie* (4.76 \*).

\*). Además, observemos que los criterios de d'Alembert y de Cauchy pueden aplicarse *para establecer la divergencia de una serie con términos de cualquier signo* (4.76). En efecto, cada vez que el criterio de d'Alembert o de Cauchy hace constar

la divergencia de  $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ , el  $k$ -ésimo término de la serie (4.76)  $u_k$  no tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ , o sea, la serie (4.76) diverge. A título de ejemplo establezcamos que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k! \left(\frac{x}{k}\right)^k$  diverge para cualquier valor

fijo de  $x$  que satisface la desigualdad  $|x| > e$ . Subrayemos que es difícil comprobar directamente que el  $k$ -ésimo término de la serie considerada no tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . Apliquemos el criterio de d'Alembert a la serie considerada. Denotando el  $k$ -ésimo término de esta serie por  $a_k$  tendremos  $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} =$

$$= \frac{|x|}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^k} \quad \text{de donde} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|}{e} > 1. \text{ La divergencia de la}$$

serie queda demostrada.

A continuación nos pondremos a buscar criterios más finos que permitan establecer la convergencia de la serie (4.76) también cuando esta serie no es absolutamente convergente.

**1. Criterio de Leibniz.** El criterio de Leibniz se refiere a un tipo particular muy difundido de la serie (4.76), a la llamada serie *alternada*. Una serie se denomina *alternada* si los términos de esta serie tienen alternativamente ora signo positivo ora negativo. Es conveniente escribir la serie alternada de modo que sean definidos los signos de todos sus términos, es decir, en la forma

$$p_1 - p_2 + p_3 - \dots + (-1)^{k-1} p_k + \dots \quad (4.77)$$

donde todos los  $p_k \geq 0$ .

**Teorema 4.14 (criterio de Leibniz).** Si los términos de una serie alternada, tomados por módulo, forman una sucesión infinitesimal no creciente, esta serie converge.

OBSERVACION 1. Una serie que satisface las condiciones del teorema 4.14 se denomina frecuentemente *serie de Leibniz*.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.14. Supongamos que viene dada la serie (4.77) y se conoce que la sucesión  $\{p_k\}$  es no creciente e infinitesimal. La suma parcial de orden *par* de esta serie  $S_{2n}$  puede escribirse en la forma

$$S_{2n} = (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \dots + (p_{2n-1} - p_{2n}). \quad (4.78)$$

Dado que en (4.78) toda expresión entre paréntesis es *no negativa\**, está claro que si  $n$  crece, la sucesión  $\{S_{2n}\}$  *no decrece*.

Por otra parte,  $S_{2n}$  puede escribirse en la forma

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \dots \\ \dots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n},$$

de donde es evidente que para cualquier número  $n$  habrá  $S_{2n} \leq p_1$ . Así, pues, la sucesión de las sumas parciales *pares*  $S_{2n}$  no decrece y está superiormente acotada. En virtud del teorema 3.15 del tomo 1, esta sucesión converge a un número  $S$ , o sea,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ . De la igualdad evidente  $S_{2n-1} = S_{2n} + p_{2n}$  y de los que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n} = 0$  se desprende que la sucesión de las sumas parciales *impares*  $\{S_{2n-1}\}$  también converge al mismo número  $S$ , o sea,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = S$ . Así,

pues, toda la sucesión  $\{S_n\}$  converge a  $S$ .

OBSERVACION 2. Demostrando el teorema 4.14, descubrimos que la sucesión de las sumas parciales *pares*  $\{S_{2n}\}$  converge al límite  $S$  *sin decrecer*. De un modo análogo, de la igualdad

\*) Debido a que  $\{p_k\}$  no crece, es decir,  $p_k \geq p_{k+1}$ .



$$S_{2n-1} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \dots \\ \dots - (p_{2n-2} - p_{2n-1})$$

se infiere que la sucesión de las sumas parciales impares  $\{S_{2n-1}\}$  converge al límite  $S$  sin decrecer.

De esta manera, para cualquier número  $n$

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}. \quad (4.79)$$

Puesto que  $S_{2n-1} - S_{2n} = p_{2n}$ , de las desigualdades (4.79) se desprende que  $S - S_{2n} \leq p_{2n}$  y  $S_{2n-1} - S \leq p_{2n} \leq p_{2n-1}$ . Por lo tanto, obtenemos que para cualquier número  $n$  es válida la desigualdad

$$|S_n - S| \leq p_n. \quad (4.80)$$

La desigualdad (4.80) se usa ampliamente al realizar los cálculos aproximados con ayuda de las series.

En calidad de ejemplo, consideremos la serie que anteriormente hemos usado más de una vez

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \dots \quad (4.81)$$

Observemos que la serie (4.81) es la serie de Leibniz, y, por tanto, su convergencia se desprende del teorema 4.14. Por ejemplo, sea que es necesario calcular la suma de la serie (4.81), es decir, el número  $\ln 2$ , con una exactitud de hasta  $\frac{1}{10^n}$ . Conforme a la estimación (4.80), esta suma coincide, con la exactitud necesaria, con  $S_{10^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{10^n}$ .

**2 Criterio de Dirichlet — Abel.** Para establecer otro criterio fino de convergencia de las series, deduciremos una identidad interesante, análoga a la fórmula de integración por partes. Sean  $u_1, u_2, u_3, \dots, v_1, v_2, v_3, \dots$  números completamente arbitrarios,  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ,  $n$  y  $p$ , números cualesquiera. Entonces es válida la siguiente identidad:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n. \quad (4.82)$$

La identidad (4.82) suele llamarse *identidad de Abel\**.

\* Si la igualdad (4.82) se escribe en la forma

$$\sum_{k=n}^{n+p} v_k (S_k - S_{k-1} = S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_{k+1} - v_k),$$

*Deducción de la identidad de Abel.* Consideremos que  $u_k = S_k - S_{k-1}$  y pongamos este valor de  $u_k$  en el segundo miembro de (4.82). Obtenemos

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k.$$

En la última suma disminuycamos el índice de sumación  $k$  en la unidad. Obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_k + S_{n+p} v_{n+p} - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} - S_{n-1} v_n = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n. \end{aligned}$$

Hemos obtenido una expresión que coincide con el segundo miembro de (4.82). Por lo tanto, la identidad de Abel queda demostrada.

**Teorema 4.15 (criterio de Dirichlet — Abel).** Sea dada la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k. \quad (4.83)$$

La serie converge si se cumplen dos condiciones siguientes:

- 1) la sucesión  $\{v_k\}$  es no creciente e infinitesimal;
- 2) la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  tiene una sucesión acotada de las sumas parciales.

**DEMOSTRACION** Mediante  $S_n$  denotemos la  $n$ -ésima suma parcial de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ . Según la condición, existe un número  $M > 0$  tal que  $|S_n| \leq M$  para todos los números  $n$ . En virtud del criterio de Cauchy, es suficiente demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un número  $N$  tal que para  $n \geq N$  y para cualquier  $p$  natural

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k \right| < \varepsilon. \quad (4.84)$$

Sea dado cualquier  $\varepsilon > 0$ . Dado que la sucesión  $\{v_k\}$  es infinitesimal y no crece, para el número positivo  $\frac{\varepsilon}{2M}$  existe un número  $N$  tal que

$$0 \leq v_n < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (\text{para } n \geq N). \quad (4.85)$$

se hace evidente que la transformación de Abel es, en realidad, una fórmula de sumación por partes, siendo una fórmula de diferencias, análoga a la de integración por partes.

Ahora, para estimar la magnitud del segundo miembro de (4.84), apliquemos la identidad de Abel (4.82). Teniendo en cuenta que el módulo de la suma de varias magnitudes no supera a la suma de sus módulos, el módulo del producto es igual al producto de los módulos y que  $v_h \geq v_{h+1}$ , obtenemos

$$\left| \sum_{h=n}^{n+p} u_h v_h \right| \leq \sum_{h=n}^{n+p-1} |S_h| (v_h - v_{h+1}) + |S_{n+p}| v_{n+p} + |S_{n-1}| v_n. \quad (4.86)$$

En el segundo miembro de (4.86) empleemos la desigualdad  $|S_n| \leq M$ , válida para todos los números  $n$ . Obtenemos

$$\left| \sum_{h=n}^{n+p} u_h v_h \right| \leq M \left\{ \sum_{h=n}^{n+p-1} (v_h - v_{h+1}) + v_{n+p} \right\} + M v_n. \quad (4.87)$$

Además, observemos que la suma entre llaves es exactamente igual a  $v_n$ . En este caso, la desigualdad (4.87) toma la forma

$$\left| \sum_{h=n}^{n+p} u_h v_h \right| \leq 2M v_n. \quad (4.88)$$

Ahora, si en el segundo miembro de (4.88) empleamos la desigualdad (4.85), obtenemos que para  $n \geq N$  y para cualquier  $p$  natural es válida la desigualdad (4.84). El teorema queda demostrado.

OBSERVACIÓN. El teorema 4.14 (criterio de Leibniz) es un caso particular del teorema 4.15 cuando\*)  $u_k = (-1)^{k-1}$ .

EJEMPLOS. I. Investigar la serie siguiente en cuanto a la convergencia:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} + \dots$$

Dicha serie puede considerarse como una serie de la forma (4.83) para

$$v_k = \frac{1}{k}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -2, \quad u_4 = 1, \quad u_5 = 1, \quad u_6 = -2, \quad \dots$$

Es obvio que: 1) la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  posee una sucesión acotada de las sumas parciales:  $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 0, S_4 = 1, S_5 = 0, S_6 = 0, \dots$ ; 2) la sucesión  $\{v_k\}$  no crece y es infinitesimal. Según el teorema 4.15, la serie considerada converge.

2. Aclaremos la cuestión sobre la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ , donde  $x$  es un número real fijo. Empleando las desig-

\*) Es obvio que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  tiene una sucesión acotada de las sumas parciales.

naciones del teorema 4.15, hagamos  $u_k = \cos kx$ ,  $v_k = 1/k$ . Estimemos la sucesión de las sumas parciales  $S_n$  de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ . Como para cualquier número  $k$

$$\operatorname{sen} \left( k + \frac{1}{2} \right) x - \operatorname{sen} \left( k - \frac{1}{2} \right) x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos kx,$$

sumando esta relación respecto de  $k$  de 1 a  $n$ , obtenemos

$$\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \operatorname{sen} \frac{1}{2} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos kx = 2S_n \operatorname{sen} \frac{x}{2}.$$

De aquí,

$$S_n = \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

Así, pues, para cualquier  $x$  no múltiplo de  $2\pi$  la sucesión de las sumas parciales  $S_n$  está acotada:

$$|S_n| \leq \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|}.$$

Según el teorema 4.15, la serie considerada converge para cualquier valor  $x$  no múltiplo de  $2\pi$ . Si  $x$  es múltiplo de  $2\pi$ , la serie considerada se transforma en armónica y, según hemos demostrado anteriormente, *diverge*.

## § 6. Productos infinitos

**1. Conceptos fundamentales.** Al concepto de *producto numérico infinito* es muy similar el concepto de serie numérica. Sea dada una sucesión numérica infinita  $v_1, v_2, \dots, v_h, \dots$ . La expresión escrita formalmente en la forma

$$v_1 v_2 v_3 \dots v_h \dots = \prod_{h=1}^{\infty} v_h \quad (4.89)$$

suele denominarse *producto infinito*. Los elementos  $v_h$  suelen llamarse términos del producto infinito dado. El producto de los primeros  $n$  términos del producto infinito dado suele denominarse *n-ésimo producto parcial* y denotarse por el símbolo  $P_n$ :

$$P_n = v_1 v_2 \dots v_n = \prod_{h=1}^n v_h.$$

El producto infinito (4.89) se denomina *convergente* si la sucesión de los productos parciales  $P_n$  tiene un límite finito  $P$ , *distinto de cero\**. Si el producto infinito (4.89) converge, dicho límite  $P$  se denomina *valor de este producto infinito*, es decir, se escribe

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k. \quad (4.90)$$

Subrayemos que la igualdad (4.90) tiene sentido solamente para un producto infinito. Está claro que la consideración de los productos infinitos es, en esencia, una nueva forma de estudiar las sucesiones numéricas, puesto que a todo producto infinito dado le corresponde unívocamente la sucesión de sus productos parciales, y a toda sucesión numérica  $\{P_k\}$ , cuyos elementos se diferencian de cero, le corresponde unívocamente un producto infinito, para el cual esta sucesión es una sucesión de productos parciales (baste tomar los términos del producto infinito iguales a  $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$  para  $k > 1$  y  $v_1 = P_1$ ).

**Teorema 4.16.** Una condición necesaria de convergencia del producto infinito (4.89) es que su  $k$ -ésimo término tienda a la unidad cuando  $k \rightarrow \infty$ .

DEMOSTRACION. Sea que el producto infinito (4.89) converge y tiene un valor  $P$  diferente de cero. Entonces,  $\lim_{h \rightarrow \infty} P_{h-1} = \lim_{h \rightarrow \infty} P_h = p \neq 0$ . Dado que  $v_h = \frac{P_h}{P_{h-1}}$ , entonces  $\lim_{h \rightarrow \infty} v_h$  existe y es igual a la unidad.

Observemos que la eliminación de *cualquier número finito* de términos de un producto infinito (naturalmente, si entre estos términos no hay términos que sean iguales a cero) *no influye* en la convergencia de este producto. Dado que, según la definición anteriormente adoptada, un producto infinito que tiene, por lo menos, un término igual a cero se considera *divergente*, en adelante *no examinaremos en general los productos infinitos que tienen por lo menos un término igual a cero*.

#### EJEMPLOS DE PRODUCTOS INFINITOS.

$$1. \quad \prod_{h=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^h} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^k} \dots \quad (4.91)$$

( $x$  es cualquier número fijo).

\*) El hecho de que para  $P = 0$  el producto infinito suele considerarse *divergente* y, pese a tener carácter convencional, permite, como lo veremos en adelante, verificar una analogía precisa entre la convergencia de las series y de los productos infinitos.

Demostremos que el producto infinito (4.91) converge y tiene el valor  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ . Calculemos el  $n$ -ésimo producto parcial

$$P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \cos \frac{x}{2^n}. \quad (4.92)$$

Multiplicando los dos miembros de (4.92) por  $\operatorname{sen} \frac{x}{2^n}$  y empleando sucesivamente la fórmula del seno del ángulo doble  $\operatorname{sen} 2y = 2 \operatorname{sen} y \cos y$ , obtenemos

$$P_n \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{sen} x.$$

De la última fórmula \*),

$$P_n = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)} \right\}.$$

Debido a que la expresión entre llaves tiende a la unidad para  $n \rightarrow \infty$  (en virtud del primer límite notable),  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  existe y es igual a  $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ . Por lo tanto, queda demostrado que el producto infinito (4.91) converge y tiene el valor  $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ .

$$\begin{aligned} 2. \quad \prod_{k=2}^{\infty} \left[ 1 - \frac{2}{k(k+1)} \right] &= \prod_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{(k-1)}{k} \cdot \frac{(k+2)}{(k+1)} \dots \quad (4.93) \end{aligned}$$

Demostremos que el producto infinito (4.93) converge y tiene el valor  $\frac{1}{3}$ . Calculemos el producto parcial  $P_n$ :

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3}.$$

Después de esto es evidente que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n}$  existe y es igual a  $\frac{1}{3}$ .

**2. Relación entre la convergencia de los productos infinitos y la de las series.** Si el producto infinito (4.89) converge, en virtud del teorema 4.16, todos sus términos  $v_n$  son positivos\*\*) a partir de un

\*) Tomamos  $x \neq 0$ . Si  $x = 0$ , todos los términos de (4.91) y su valor son iguales a la unidad.

\*\*) Puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$ .

número  $k$ . Como un número finito de los primeros términos no influye de ningún modo en la convergencia del producto infinito, entonces, si examinamos la cuestión sobre la convergencia de los productos infinitos, sin limitar la generalidad, podemos considerar solamente los productos infinitos, cuyos términos son todos positivos.

**Teorema 4.17.** Para que el producto infinito (4.89) con términos positivos converja, es necesario y suficiente que converja la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \ln v_h. \quad (4.94)$$

En caso de convergencia, la suma  $S$  de la serie (4.94) y el valor  $P$  del producto (4.89) están relacionados por la fórmula

$$P = e^S. \quad (4.95)$$

DEMOSTRACIÓN. Denotando con  $P_n$  el  $n$ -ésimo producto parcial del producto infinito (4.89) y con  $S_n$ , la  $n$ -ésima suma parcial de la serie (4.94), podemos escribir

$$S_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}.$$

Dadas la continuidad de la función exponencial para todos los valores del argumento y la continuidad de la función logarítmica para todos los valores positivos del argumento, la sucesión  $P_n$  converge si, y sólo si, converge  $S_n$ ; además, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = e^S. \text{ El teorema queda demostrado.}$$

Si investigamos un producto infinito en cuanto a la convergencia es muy conveniente representar este producto infinito en la forma

$$\prod_{h=1}^{\infty} (1 + u_h) = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (4.96)$$

Claro que, además, conforme a la suposición anteriormente adoptada, consideramos que todos los  $u_h > -1$ .

El teorema 4.17 afirma que la cuestión sobre la convergencia del producto (4.96) es equivalente a la cuestión de la convergencia de la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \ln(1 + u_h). \quad (4.97)$$

Ahora podemos demostrar otra afirmación.

**Teorema 4.18.** Si todos los  $u_h$  (por lo menos, a partir de cierto número  $k$ ) mantienen un mismo signo, para la convergencia del producto infinito (4.96), es necesario y suficiente que converja la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h. \quad (4.98)$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la condición  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$  es necesaria también para la convergencia de la serie (4.98) y para la convergencia del producto (4.96), podemos considerar cumplida esta condición al demostrar tanto la necesidad, como la suficiencia. Pero de dicha condición y de la fórmula asintótica\*)

$$\ln(1+y) = y + o(y)$$

se desprende que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 1 \quad (4.99)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{\ln(1+u_k)} = 1. \quad (4.100)$$

Puesto que, según la condición del teorema, todos los términos de las series (4.97) y (4.98) mantienen un mismo signo a partir de cierto número  $k$ , en virtud del corolario del teorema de comparación 4.3, las condiciones (4.99) y (4.100) permiten afirmar que la serie (4.98) converge si, y sólo si, converge la serie (4.97). El teorema queda demostrado.

EJEMPLOS 1) De la divergencia de la serie armónica y del teorema 4.18 se desprende la divergencia de los siguientes productos infinitos:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k}\right) \dots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \dots$$

Es fácil comprender que el primero de los productos indicados diverge hacia  $+\infty$  y el segundo, hacia el cero.

2) Del mismo teorema 4.18 y de la convergencia de la serie (4.33) para  $\alpha > 1$  se infiere la convergencia de los siguientes productos infinitos para  $\alpha > 1$ :

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{3^\alpha}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{k^\alpha}\right) \dots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right] = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{3^\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) \dots$$

\*) Véase el § 7 del cap. 4, t. 1.



Al igual que para las series, para los productos infinitos se introducen los conceptos de convergencia *absoluta* y *condicional*. El producto infinito (4.96) se denomina *absolutamente convergente* si, y sólo si, la serie (4.97) converge absolutamente. Los teoremas de Cauchy 4.11 y de Riemann 4.10 permiten deducir que el producto absolutamente convergente posee la propiedad *conmutativa*, mientras que el producto condicionalmente convergente no la posee a ciencia cierta.

Es válida la afirmación siguiente.

**Teorema 4.19.** *El producto infinito (4.96) converge absolutamente si, y sólo si, converge absolutamente la serie (4.98). Para demostrar este teorema es suficiente demostrar que la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} |u_h|$  converge*

*si, y sólo si, converge la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} |\ln(1 + u_h)|$ . Lo último se desprende fácilmente de la existencia de los límites (4.99) y (4.100). Dejamos los detalles de los razonamientos a cargo del lector.*

Para concluir, consideremos varios ejemplos más.

1°. Consideremos el producto infinito

$$x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots \quad (4.101)$$

Como la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  converge, en virtud de los teoremas 4.18

y 4.19, el producto infinito (4.101) converge absolutamente para cualquier valor fijo  $x$  distinto de  $l\pi$  (donde  $l = 0, \pm 1, \dots$ ). En el complemento 2 del presente capítulo demostraremos que este producto converge al valor  $\operatorname{sen} x$ . Por lo tanto, argumentaremos la descomposición de la función  $\operatorname{sen} x$  en un producto infinito

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) \quad (4.102)$$

2°. De la descomposición (4.102), empleando la relación  $\cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 \operatorname{sen} x}$ , se obtiene fácilmente la descomposición siguiente:

$$\cos x = \prod_{l=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{(2l-1)^2 \pi^2}\right] \quad (4.103)$$

Para cualquier  $x$  diferente de  $\frac{\pi}{2}(2l-1)$  ( $l = 0, \pm 1, \dots$ ), la convergencia absoluta del producto del segundo miembro de (4.103)

se desprende de los teoremas 4.18 y 4.19, así como de la convergen-

cia de la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ .

3°. Adoptando en la descomposición (4.102)  $x = \pi/2$ , obtenemos

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{h=1}^{\infty} \frac{4k^2-1}{4k^2} = \prod_{h=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}.$$

De aquí se obtiene la llamada *fórmula de Wallis\**)

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdots \quad (4.104)$$

Realizando transformaciones no complicadas, se puede reducir la fórmula de Wallis a la forma

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \left[ \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k)!} \right]^2. \quad (4.104^*)$$

Inicialmente, la fórmula de Wallis se usó para calcular aproximadamente el número  $\pi$ . En el presente, para calcular el número  $\pi$  se utilizan métodos más eficaces. La fórmula de Wallis (4.104) es de interés para algunas investigaciones teóricas\*\*).

### Complemento 1

#### Teorema auxiliar para el p. 3 del § 2

*Teorema 4.20.* Sean  $p_h$  cualesquiera números positivos. Entonces, si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{p_{h+1}}{p_h} = L, \quad (4.105)$$

entonces existe también el límite  $\lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt[h]{p_h}$ , con tal de que es válida la fórmula

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt[h]{p_h} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L. \quad (4.106)$$

**DEMOSTRACIÓN** Primero demosetremos la siguiente afirmación auxiliar\*\*\*): si la sucesión de números positivos  $a_1, a_2, \dots, a_h, \dots$  converge a un número  $L$ , entonces a este mismo número  $L$  converge también la sucesión de las medias proporcionales de estos números  $b_h = \sqrt{a_1 a_2 \dots a_h}$ . Para demostrar la afirmación auxiliar observemos que, en virtud de la continuidad de la función logarítmica

\* ) John Wallis, matemático inglés (1616—1703).

\*\* ) En particular, se puede utilizarla para establecer la llamada fórmula de Stirling (véase el tomo 3 del presente curso). James Stirling, matemático inglés (1692—1770).

\*\*\* ) Subrayemos que esta afirmación es también interesante de por sí.

para  $L > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \ln a_k = \ln L$ . (La última igualdad es formalmente válida también para  $L = 0$  cuando  $\ln L = -\infty$ .) Pero, entonces, según el teorema del límite del promedio (véase el ejemplo 1, complemento del cap. 3, tomo 1), existe el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_k}{k} = \ln L.$$

(La última igualdad es también válida para  $L = 0$  cuando  $\ln L = -\infty$ .) De la última igualdad, en virtud de la continuidad de la función exponencial, obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{\ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}} = e^{\ln L} = L.$$

(Estos razonamientos son también válidos para  $L = 0$ .)

La afirmación auxiliar queda demostrada. Aplicando esta afirmación a los números  $a_1 = p_1$ ,  $a_2 = \frac{p_2}{p_1}$ ,  $a_3 = \frac{p_3}{p_2}$ , ...,  $a_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$ , ..., demostramos la existencia del límite  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{n_k}$  y la igualdad (4.106). El teorema 4.20 queda demostrado.

## Complemento 2

### Descomposición de la función $\operatorname{sen} x$ en el producto infinito

Para que sea más cómodo, dividimos la deducción de la fórmula (4.102) en puntos separados.

1° Sea  $m$  cualquier número impar positivo;  $m = 2n + 1$ . Primero demostramos que para cualquier valor  $\theta$  \*) diferente de  $k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ) es válida la siguiente fórmula:

$$\frac{\operatorname{sen} m\theta}{m \operatorname{sen} \theta} = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{m}}\right) \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{m}}\right), \quad (4.107)$$

Para establecer la fórmula (4.107), empleamos la fórmula de Moivre (véase el § 1, cap. 7, tomo 1)

$$\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^m.$$

Descomponiendo el miembro derecho de esta fórmula con ayuda del binomio de Newton y comparando las partes imaginarias, obtenemos

$$\operatorname{sen} m\theta = m \cos^{m-1} \theta \operatorname{sen} \theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} \theta \operatorname{sen}^3 \theta + \dots$$

Teniendo en cuenta que  $m = 2n + 1$ , tendremos

$$\frac{\operatorname{sen} m\theta}{m \operatorname{sen} \theta} = \cos^{2n} \theta - \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{2n-2} \theta \operatorname{sen}^2 \theta + \dots \quad (4.108)$$

\*) A continuación nos interesarán solamente los valores  $\theta$  del intervalo  $0 < |\theta| < \pi$ .

En el miembro derecho de (4.108) todos los exponentes de los cosenos y los senos son pares, así que, si sustituimos  $\cos^2 \theta$  por  $1 - \sin^2 \theta$ , en el miembro derecho de (4.108) obtenemos el polinomio de grado  $n$  respecto a  $\sin^2 \theta$ . Haciendo  $z = \sin^2 \theta$  denotemos este polinomio mediante el símbolo  $F(z)$  y sus raíces, mediante los símbolos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Dado que  $z = \sin^2 \theta \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow 0$  y el miembro izquierdo de (4.108) tiende a la unidad para  $\theta \rightarrow 0$ , el polinomio  $F(z)$  puede representarse en la forma

$$\frac{\sin m\theta}{m \sin \theta} = F(z) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Queda por determinar las raíces  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Observando que estas raíces corresponden a los ceros de la función  $\sin m\theta$ , obtenemos

$$\alpha_1 = \sin^2 \frac{\pi}{m}, \alpha_2 = \sin^2 \frac{2\pi}{m}, \dots, \alpha_n = \sin^2 \frac{n\pi}{m}.$$

Por lo tanto, la fórmula (4.107) queda establecida.

2°. Poniendo en la fórmula (4.107)  $\theta = x/m$  y teniendo en cuenta que  $0 < |x| < \pi m$ , daremos a esta fórmula la siguiente forma

$$\frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right). \quad (4.109)$$

Fijemos cualquier valor de  $x$  (diferente de cero) y tomemos dos números naturales arbitrarios  $p$  y  $n$  que satisfacen las desigualdades  $2 \frac{|x|}{\pi} < p < n = \frac{m-1}{2}$ . Entonces la fórmula (4.109) puede escribirse en la forma

$$\frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right) R_p(x), \quad (4.110)$$

donde

$$R_p(x) = \prod_{k=p+1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right). \quad (4.111)$$

Primero estimemos  $R_p(x)$ . Dado que  $2 \frac{|x|}{\pi} < p < n = \frac{m-1}{2}$ , los argumentos de todos los senos de la fórmula (4.111) pertenecen al intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Además, es obvio que para todos los  $k$  que figuran en esta fórmula  $|x| < k\pi/2$  y, por tanto,

$$0 < \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}} < \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{2m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{k\pi}{2m}} < \frac{1}{2}$$

(puesto que  $\frac{k\pi}{m} < \frac{\pi}{2}$ , o sea,  $\frac{k\pi}{2m} < \frac{\pi}{4}$ , por tanto  $\cos^2 \frac{k\pi}{2m} > \frac{1}{2}$ ). Dado que para cualquier  $\beta$  del intervalo  $0 < \beta < 1/2$  son válidas las desigualdades  $1 > 1 - \beta > e^{-\beta^2}$  \*), entonces para todos los números  $k$  que superan  $p$  se tiene

$$1 > 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}} > e^{-\alpha \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}}} \quad (4.112)$$

Multiplicando término a término las desigualdades (4.112) en las cuales ponemos los valores  $k = p+1, p+2, \dots, n$ , obtenemos la siguiente estimación de  $R_p(x)$ :

$$1 > R_p(x) > e^{-2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{m} \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}}} \quad (4.113)$$

Tomando en consideración que el argumento  $k\pi/m$  se encuentra en el primer cuadrante y que para cualquier  $\beta$  del primer cuadrante  $1 \geq \frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \geq \frac{2}{\pi}$  \*\*, obtenemos

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}} < \frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{k\pi}{m}\right)^2} = \frac{m^2}{4k^2} < \frac{m^2}{4} \left[ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right].$$

De este modo,

$$e^{-2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{m} \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}}} > e^{-\frac{m^2}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{m} \sum_{k=p+1}^n \left[ \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right]} = e^{-\frac{m^2}{2p} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}.$$

La última desigualdad permite reforzar la estimación (4.113) del modo siguiente:

$$1 > R_p(x) > e^{-\frac{m^2}{2p} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}} \quad (4.114)$$

\*) La desigualdad derecha de estas desigualdades se deduce elementalmente de la fórmula de Maclaurin:  $e^{-2\beta} = 1 - 2\beta + \frac{(2\beta)^2}{2} - \dots < 1 - 2\beta + 2\beta^2 < 1 - \beta$ , puesto que  $2\beta^2 < \beta$ .

\*\*\*) Estas desigualdades se deducen del hecho de que la relación  $\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}$  decrece de 1 hasta  $2/\pi$  si  $\beta$  varía de 0 a  $\pi/2$ . A su vez, este hecho se desprende de que  $\left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta}\right)' = -\frac{\cos \beta}{\beta^2} (\beta - \operatorname{tg} \beta) < 0$  en todos los puntos del intervalo  $0 < \beta < \pi/2$ .

3°. En la fórmula (4.110) hagamos tender el número  $m$  al infinito dejando fijados el valor  $x$  y el número  $p$ . Dado  $\lim_{m \rightarrow \infty} m \operatorname{sen} \frac{x}{m} = x$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m} = k^2\pi^2$ , entonces existe el límite del miembro izquierdo de (4.110) igual a  $\operatorname{sen} x/x$ , y el límite del producto finito

$$\prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{m}}{\operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{m}} \right) \text{ igual a } \prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right).$$

Luego consideremos que el último límite es diferente de cero, puesto que, si es igual a cero,  $\operatorname{sen} x = 0$  y la descomposición (4.102) queda demostrada. Pero, entonces, existe también el límite  $\lim_{m \rightarrow \infty} R_p(x)$ . Lo denotemos mediante

$\hat{R}_p(x)$ . De las desigualdades (4.114) válidas para cualquier número  $m$  y del teorema 3.13 del tomo 1 se desprende que

$$1 \geq \hat{R}_p(x) \geq e^{-x^2/(2p)} \quad (4.115)$$

Pasando al límite para  $m \rightarrow \infty$ , de la fórmula (4.110) tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right) \hat{R}_p(x). \quad (4.116)$$

4. Por último, manteniendo  $x$  fijado, en la fórmula hagamos tender el número  $p$  al infinito. Dado que el miembro izquierdo de (4.116) no depende de  $p$  y, en virtud de las desigualdades (4.115) y el teorema 3.14 del tomo 1, el límite

$\lim_{p \rightarrow \infty} \hat{R}_p(x)$  existe y es igual a la unidad, entonces existe también el límite

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^p \left( 1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Por lo tanto, la descomposición de  $\operatorname{sen} x$  (4.102) queda establecida.

**OBSERVACIÓN** De manera completamente análoga a las descomposiciones de  $\operatorname{sen} x$  (4.102) y de  $\operatorname{cos} x$  (4.103) pueden obtenerse las descomposiciones en productos infinitos de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right) \quad \text{y} \quad \operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2} \right].$$

Observemos que de las descomposiciones de  $\operatorname{sen} x$ ,  $\operatorname{cos} x$ ,  $\operatorname{sh} x$  y  $\operatorname{ch} x$  se obtienen directamente las descomposiciones en productos infinitos de las funciones  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{th} x$  y  $\operatorname{cth} x$ .

## Complemento 3

## Métodos generalizados de la sumación de series divergentes

En todo el capítulo 4 llamábamos suma de la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_h + \dots \quad (4.117)$$

el límite  $S$  de la sucesión  $\{S_n\}$  de las sumas parciales de esta serie (a condición de que este límite existe).

En algunos problemas del análisis matemático que son de interés tanto teórico como práctico, debemos operar con series para las cuales la sucesión de las sumas parciales no converge y la suma en el sentido mencionado en el cap. 4 no existe. Lógicamente, surge el problema de la generalización del concepto de suma de la serie y la sumación de la serie divergente en sentido común (4.117) empleando algunos métodos generalizados. En el presente complemento nos detengamos en algunos métodos generalizados de la sumación de series divergentes.

Primero vamos a dar la característica general de los métodos de la sumación que examinamos. Es lógico exigir que el concepto generalizado de la suma incluya el concepto ordinario de suma a decir más exactamente la serie convergente en sentido corriente que tiene suma ordinaria  $S$  debe tener la suma generalizada que es también igual a  $S$ . El método de sumación que posee dicha propiedad se denomina regular.

Luego, es lógico subordinar el concepto de suma generalizada a la siguiente

condición: si la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$  tiene la suma generalizada  $U$  y la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} v_h$

tiene la suma generalizada  $V$ , entonces la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} (Au_h + Bv_h)$ , siendo  $A$  y  $B$

constantes cualesquiera, tiene la suma generalizada  $(AU + BV)$ . El método de la sumación que satisface dicha condición se denomina lineal. Como regla, en el análisis y sus aplicaciones se emplean solamente métodos lineales regulares de la sumación. Nos detengamos en dos métodos de la sumación generalizada que son de especial interés para las aplicaciones.

1. Método de Cesaro \*) (o método de los promedios). Se dice que la serie (4.117) es sumable por el método de Cesaro si existe el límite de los promedios de las sumas parciales de esta serie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}. \quad (4.118)$$

Además, el límite (4.118) se denomina suma de la serie (4.117), generalizada según Cesaro.

La linealidad del método de la sumación de Cesaro es evidente. La regularidad del método de Cesaro se desprende del ejemplo 1 considerado en el Complemento 1 del cap. 3, tomo 1. En efecto, de dicho ejemplo se deduce que si la sucesión  $\{S_n\}$  de las sumas parciales de la serie (4.117) converge al número  $S$ , entonces el límite (4.118) existe y es también igual a  $S$ .

Aduzcamos ejemplos de series que no convergen en sentido corriente pero son sumables por el método de Cesaro.

\*) Ernesto Cesaro, matemático italiano (1859—1906).

1) Consideremos la serie divergente a ciencia cierta

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Puesto que todas las sumas parciales *pares*  $S_{2n}$  de esta serie son iguales a cero, y todas las sumas parciales *impares*  $S_{2n-1}$ , a la unidad, el límite (4.118) existe y es igual a 1/2. De este modo, la serie considerada es sumable por el método de Cesaro y su suma, según Cesaro, es igual a 1/2.

2) Tomando en consideración que  $x$  es cualquier número real fijado del intervalo  $0 < x < 2\pi$ , consideremos la serie que diverge a ciencia cierta\*

$$\sum_{h=1}^{\infty} \cos hx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots \quad (4.119)$$

En el ejemplo 2 al final del § 5 ya hemos calculado la suma parcial  $S_n$  de esta serie

$$S_n = \frac{\operatorname{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) x \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

Calculemos el promedio de las sumas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} &= \frac{1}{2n \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \left[ \sum_{m=1}^n \operatorname{sen} \left( m + \frac{1}{2} \right) x \right] = \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4n \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} \left[ \sum_{m=1}^n (\cos mx - \cos (m+1)x) \right] = \frac{1}{2} = \frac{\cos x - \cos (n+1)x}{4n \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De aquí es evidente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

De este modo, la serie (4.119) es sumable por el método de Cesaro y su suma según Cesaro es igual a  $(-1/2)$ .

2. Método de la sumación de Poisson\*\*)—Abel. Este método de la sumación consiste en lo siguiente. Según la serie dada (4.117) se compone la serie potencial

$$\sum_{h=1}^{\infty} u_h x^{h-1} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \dots + u_n x^{n-1} + \dots \quad (4.120)$$

Si dicha serie potencial converge para todos los  $x$  del intervalo  $0 < x < 1$  y la suma  $S(x)$  de esta serie tiene el valor límite izquierdo  $\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x)$  en el punto  $x = 1$ , se dice que la serie (4.117) es sumable por el método de Poisson—Abel. Además, dicho valor límite se denomina suma de la serie (4.117) según Poisson—Abel.

\* ) La divergencia de la serie (4.119) se deduce fácilmente de la expresión de su suma parcial dada a continuación.

\*\* ) Simón Denis Poisson, matemático francés (1781—1842).



La linealidad del método de la sumación de Poisson—Abel no provoca dudas. Demostremos la regularidad de este método. Sea que la serie (4.117) converge en sentido corriente y tiene la suma igual a  $S$ . Es necesario demostrar: 1) que la serie (4.120) converge para cualquier  $x$  del intervalo  $0 < x < 1$ , 2) que la suma  $S(x)$  de la serie (4.120) tiene el valor límite izquierdo igual a  $S$  en el punto  $x = 1$ .

Demostremos primero la afirmación 1). Dado que la serie (4.117) converge, entonces la sucesión de sus términos es infinitesimal y, por tanto, acotada, o sea, existe un número  $M$  tal que para todos los números  $k$

$$|u_k| \leq M, \quad (4.121)$$

Empleando la desigualdad (4.121), estimemos el módulo de  $k$ -ésimo término de la serie (4.120) teniendo en cuenta que  $x$  es cualquier número fijado del intervalo  $0 < x < 1$ . Obtenemos

$$|u_k x^{k-1}| \leq M |x|^{k-1}.$$

Puesto que  $|x| < 1$ , la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x|^{k-1}$  converge. Por tanto, en virtud de

la observación 2 del teorema de comparación 4.3, converge también la serie (4.120).

Demostremos ahora la afirmación 2). Sea  $S_n$   $n$ -ésima suma de la serie (4.117) y sea  $S$  su suma ordinaria. Empleando la transformación de Abel\*), es fácil cerciorarse de que para todo  $x$  del intervalo  $0 < x < 1$  es válida la identidad

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}. \quad (4.122)$$

Restrayemos la identidad (4.122) de la siguiente identidad evidente.

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}.$$

Además, denotando mediante  $r_k$  el  $k$ -ésimo resto de la serie (4.117), tendremos

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

o bien

$$S - s(x) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}. \quad (4.123)$$

Nuestro objetivo es demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que el miembro izquierdo de (4.123) es menor que  $\varepsilon$  para todos los  $x$  que satisfacen las desigualdades  $1 - \delta < x < 1$ . Dado que el resto  $r_k$  de la serie (4.117) tiende a cero para  $k \rightarrow \infty$ , entonces para el número positivo  $\varepsilon/2$  existe un número  $k_0$  tal que  $r_k < \varepsilon/2$  cuando  $k \geq k_0$ . De este modo,

$$\left| (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

\*) Hemos establecido la transformación de Abel (4.82) en el p. 2 del § 5. En el caso considerado es necesario poner en (4.82)  $n=1$ ,  $S_{n-1} = 0$  y después hacer tender  $p$  al infinito.

Queda por demostrar que para  $x$  bastante próximos a la unidad

$$\left| (1-x) \sum_{h=1}^{k_0-1} r_h x^{h-1} \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

pero esto es obvio, puesto que la suma en la última desigualdad está acotada. La regularidad del método de Poisson—Abel queda demostrada. Como ejemplo volvamos a considerar la serie divergente

$$\sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (4.124)$$

Para esta serie compongamos la serie potencial de forma (4.120)

$$\sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} x^{h-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Es obvio que la última serie converge para todos los  $x$  del intervalo  $0 < x < 1$  y tiene la suma igual a  $S(x) = \frac{1}{1+x}$ . Ya que

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

la serie (4.124) es sumable por el método de Poisson—Abel y su suma según Poisson—Abel es igual a  $1/2$ .

Fijemos la atención en que la suma de la serie (4.124) según Poisson—Abel coincide con su suma según Cesaro. Este hecho no es casual: puede demostrarse que si la serie es sumable por el método de Cesaro, es también sumable por el método de Poisson—Abel con tal de que la suma de esta serie según Cesaro coincide con su suma según Poisson—Abel. Más que eso, existen series sumables por el método de Poisson—Abel pero no sumables por el método de Cesaro\*). La investigación detallada de todos los métodos posibles de la sumación generalizada de series divergentes se hace en la obra de G. Hardy «Divergent series», NY, Academic Press, 1948.

\*) De este modo, puede decirse que el método de Poisson—Abel es más «efectivo» que el de Cesaro.