V.S.SHIPACHEV

FUNDAMENTOS

DE LAS

MATEMÁTICAS SUPERIORES

EDITORIAL MIR MOSCÚ

FUNDAMENTOS
de las
MATEMÁTICAS SUPERIORES

В. С. Шипачёв

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Москва «Высшая школа»

V. S. SHIPACHEV

FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por Alexandr I. Samojválov

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-002059-4 (исп.)
ISBN 5-06-000048-6 (русск.)

INDICE

PREFACIO

El presente manual contiene en forma generalizada la experiencia que el autor acumuló durante muchos años dando clases de matemática superior en la Universidad de Moscú, más precisamente, en sus facultades no matemáticas y en los Cursos nacionales de capacitación profesional de maestros de enseñanza media.

Al escribir el libro el autor se propuso como finalidad el exponer en forma clara, concreta y accesible para un amplio círculo de lectores los conceptos y teoremas fundamentales de la matemática superior; enseñar a los estudiantes a resolver de manera independiente problemas de matemática.

Puesto que en el libro hay una gran cantidad de ejemplos y problemas, resueltos minuciosamente, que aclaran el material teórico y contribuyen a asimilarlo más profundamente, él encontrará aplicación en la actividad pedagógica de los centros de enseñanza superior, escuelas técnicas, escuelas medias, cursos de capacitación profesional de maestros, así como en las secciones preparatorias de los centros de enseñanza superior.

Cada párrafo lleva formuladas «Preguntas para la autoverificación» concernientes, en lo fundamental, a la teoría. Éstas tienen por objeto ayudar a los alumnos en su estudio individual del material teórico.

Al final de cada capítulo (salvo el cap. 4) se dan problemas de control para repetir el material del capítulo respectivo y hacer más profundos los conocimientos adquiridos. Estos problemas serán muy útiles a los estudiantes de grados secundarios y a los maestros en la selección del material para los ejercicios, así como a los estudiantes de los centros de enseñanza superior para el trabajo individual.

Al final del libro se dan las respuestas, resoluciones e indicaciones para los problemas de control. Aquí el autor quisiera dar algunas recomendaciones. Antes de comenzar a resolver estos problemas es necesario primero estudiar la parte respectiva y alcanzar una claridad total en la comprensión de los conceptos y teoremas correspondientes. En este caso hace falta realizar por sí mismo, paralelamente con el texto, todos los cálculos y resolver todos los ejemplos, tanto analizados como los que se dan sin resolución. Esto será un buen entrenamiento y garantía de que el material sea bien asimilado.

Conviene prestar atención especial a los enunciados que contienen la terminología de «ε-N» y «ε-δ». Es importante entender clara y exactamente la esencia de las definiciones, el papel que juega y el lugar que ocupa cada palabra. Para ello es preciso examinar detalladamente los ejemplos y problemas propuestos.

Y por último. El material ha de estudiarse en estricta sucesión empezando por el primer capítulo, el primer párrafo y el primer subpárrafo, ya que en la matemática todos los conceptos están íntimamente vinculados entre sí. De un concepto se deduce otro y la omisión de uno de ellos puede hacer incomprensible el siguiente. En esto radica la particularidad específica de la matemática.

El autor espera que el presente manual facilite la labor de los estudiantes y profesores de los centros de enseñanza superior y media en el estudio de los fundamentos de matemática superior. Él también supone que esta obra será de utilidad a un amplio círculo de personas que estudian por correspondencia o como autodidactas. El libro les sustituirá, en cierto grado, al conferenciante y al profesor.

El autor

1

NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

§ 1. Conjuntos y designaciones fundamentales

En las matemáticas todos los conceptos se dividen en *primarios*[1]) y *definibles* a través de los conceptos primarios o ya conocidos. El concepto de *conjunto* es el concepto primario fundamental de las matemáticas, su base. Las palabras: *totalidad*, *familia*, *sistema*, *colección*, *unión*, etc. son sinónimos de la palabra *conjunto*. Como ejemplos de conjuntos sirven: el conjunto de alumnos en un aula dada; la totalidad de aquellos que sacan sólo notas «bien» y «sobresaliente» en matemática; la familia de las estrellas de la Osa Mayor; el conjunto de las páginas de este libro; el conjunto de todos los números racionales, etc. De los ejemplos citados se deduce que el conjunto puede contener un número finito o infinito de objetos de naturaleza arbitraria.

Los objetos de los cuales se compone un conjunto se llaman *elementos* o *puntos* del mismo. Los conjuntos suelen designarse con letras mayúsculas del alfabeto latino, y sus elementos, con letras minúsculas. Si x es un elemento del conjunto X, se escribe $x \in X$ (x pertenece a X). Si x no es un elemento del conjunto X, se escribe $x \notin X$ (x no pertenece a X). Si $x_1, \ldots, x_n$ son ciertos elementos, la notación $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ significa que el conjunto X se compone de los elementos $x_1, \ldots, x_n$. Un sentido análogo lo tiene también la notación $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Sean X e Y dos conjuntos. Si X e Y constan de unos mismos elementos, se dice que ellos *coinciden* y se escribe $X = Y$. Si en X faltan elementos no pertenecientes a Y, se dice que *X se contiene en Y* o bien que X es un *subconjunto del conjunto Y*. En este caso se escribe $X \subset Y$ o bien $Y \supset X$ (X se contiene en Y o Y contiene X).

○ [2]) **Ejemplos. 1.** El conjunto de los números pares X es un subconjunto del conjunto Y de los números enteros: $X \subset Y$. **2.** El conjunto de los números racionales Q es un subconjunto del conjunto **R** de todos los números reales [3]): $Q \subset \mathbf{R}$. **3.** El conjunto de los

---

[1]) Cabe especialmente subrayar que los conceptos primarios no pueden ser definidos y, por lo general, se explican con ejemplos. Con su ayuda se definen otros conceptos.

[2]) Aquí y a continuación los signos ○ y ● designan el comienzo de los ejemplos y su fin, respectivamente.

[3]) El conjunto de todos los números reales suele designarse con **R** (o con $\mathbf{R}^1$)

estudiantes de todas las facultades del instituto X y el conjunto de todos los estudiantes del mismo instituto Y coinciden: $X = Y$. ●

El conjunto que no contiene ni un solo elemento se llama *vacío* y se designa con el símbolo $\varnothing$. Un conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

El conjunto con un orden determinado de disposición de los elementos se denomina *ordenado*. A diferencia de un conjunto no ordenado el ordenado se escribe entre paréntesis ordinarios. Por ejemplo, de un mismo conjunto $\{x_1, x_2\}$ se pueden obtener dos conjuntos ordenados $(x_1; x_2)$ y $(x_2; x_1)$.

A continuación estudiaremos distintos conjuntos de los números reales. Para mayor brevedad, los números reales los llamaremos en todas partes, donde no haya lugar a equivocación, simplemente números.

Sea $P(x)$ cierta propiedad del número x. Entonces la notación $\{x \mid P(x)\}$ designa el conjunto de todos los números que poseen la propiedad $P(x)$.

○ **Ejemplos. 1.** El conjunto $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ es una colección de las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, o sea, este conjunto se compone de dos elementos: 1 y 2. **2.** El conjunto $\{x \mid 3 < x < 7\}$ es una colección de todos los números que satisfacen las desigualdades $3 < x < 7$. **3.** El conjunto $\{x \mid x > 7 \text{ y } x < 3\} = \varnothing$, o sea, es un conjunto vacío. ●

Si $x_1, \ldots, x_n$ son números arbitrarios, la notación $x = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ ($x = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$) significa que el número x es máximo (mínimo) entre los números $x_1, \ldots, x_n$.

En conclusión señalaremos que el *punto*, la *recta* y el *plano* son conceptos primarios. Para todos los demás conceptos se darán definiciones.

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué papel desempeñan en la matemática los conceptos primarios?
2. Nómbrese el concepto primario fundamental.
3. Cítese ejemplos de distintos conjuntos.
4. Cítese un ejemplo de conjuntos coincidentes.
5. ¿Cuántos subconjuntos pueden ser formados del conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$?
6. ¿Por qué el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto?
7. ¿Qué significa la notación $\{x \mid P(x)\}$?
8. Cítese los conceptos, salvo el de conjunto, que son primarios.

§ 2. Números reales y sus propiedades fundamentales

El concepto de número real figura entre los conceptos matemáticos fundamentales. Existen diferentes enfoques de definir el número real (método de secciones, definición del número real como fracción decimal infinita y otros); no obstante, el método axiomático de introducir el número real es el más lógico y simple. Nótese que todos los métodos de introducción del número real son equivalentes, ya que en ninguno de ellos se establece el hecho de que exista tal número. Por eso en todos los casos es necesario introducir el axioma de existencia del número real. Puesto que la utilización de los axiomas es inevitable, es más sencillo enunciarlos de una vez y pasar a la exposición inmediata del material principal.

Recuérdese que el conjunto de los números reales se subdivide en dos conjuntos: conjunto de los números racionales y conjunto de los números irracionales. Se llama *racional* al número que puede representarse en la forma de $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros, con la particularidad de que $q \neq 0$. Se denomina *irracional* a todo número real que no es racional. Todo número racional $\frac{p}{q}$ o bien es entero, o bien puede ser representado como fracción decimal finita o infinita periódica. En cambio, el número irracional se representa por una fracción decimal infinita aperiódica. Por ejemplo, los números racionales 3/4 y 1/3 se representan, respectivamente, por las siguientes fracciones decimiales: 0,75 y 0,333 . . .; los números irracionales $\sqrt{2}$ y π se representan, respectivamente, por las fracciones decimales infinitas aperiódicas: 1,41421356 . . . y 3,14159 . . .

Citemos las propiedades fundamentales de los números reales, que tomaremos por axiomas, deduzcamos de ellas algunos corolarios y luego demos la definición de los números reales.

I. Adición y multiplicación de los números reales

Para todo par a y b de números reales están definidos, y además, de un modo único, dos números reales $a + b$ y $a \cdot b$ que se llaman *suma* y *producto* de aquéllos y poseen las propiedades siguientes.

Cualesquiera que sean los números a, b y c:

1°. $a + b = b + a$ **(propiedad conmutativa).**

2°. $a + (b + c) = (a + b) + c$ **(propiedad asociativa).**

3°. $a \cdot b = b \cdot a$ **(propiedad conmutativa).**

4°. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ **(propiedad asociativa).**

5°. $(a + b) \cdot c = ac + bc$ **(propiedad distributiva).**

6°. *Existe el único número 0 tal que $a + 0 = a$ para todo número a.*

7°. *Para todo número a existe tal número $-a$ que $a + (-a) = 0$.*

8°. *Existe el único número $1 \neq 0$ tal que para todo número a tiene lugar la igualdad $a \cdot 1 = a$.*

9°. *Para todo número $a \neq 0$ existe tal número a^{-1} que $a \cdot a^{-1} = 1$; el número a^{-1} se designa también con el símbolo $\frac{1}{a}$.*

Observación. Los números $-a$ y a^{-1} de los cuales se trata en las propiedades 7ª y 9ª son únicos.

En efecto, si existiera, por ejemplo, un número más $b \neq -a$ que pudiera satisfacer la condición $a + b = 0$, entonces $a + b + (-a) = -a$, de donde $a + (-a) + b = -a$, $0 + b = -a$ y $b = -a$, o sea, se ha obtenido una contradicción. (Demuestre por sí mismo la unicidad del número a^{-1}.)

II. Comparación de los números reales

Para cualesquiera dos números reales distintos a y b queda establecida una de las relaciones: $a = b$ (a es igual a b), $a > b$ o bien $b > a$ (a es mayor que b o b es mayor que a). La relación $=$ posee la propiedad siguiente: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

La relación $>$ posee las propiedades siguientes.

Cualesquiera que sean los números a, b y c:

10°. *Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.*

11°. *Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.*

12°. *Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b > 0$.*

En vez de $a > b$ se escribe también $b < a$ (b es menor que a). La notación $a \geqslant b$ (o, que es lo mismo, $b \leqslant a$) significa que $a = b$ o $a > b$ [1]. Las relaciones $a < b$, $a \leqslant b$, $a > b$ y $a \geqslant b$ se llaman *desigualdades* [2]. Las desigualdades $a < b$ y $a > b$ se denominan *desigualdades estrictas*.

El número a que satisface la desigualdad $a > 0$ se denomina *positivo* y el número a que satisface la desigualdad $a < 0$, *negativo*.

Nótese que un conjunto formado sólo por los números racionales satisface también las propiedades I y II.

III. Continuidad de los números reales

13°. *Sean X e Y dos conjuntos compuestos por los números reales. Entonces, si para todos los números $x \in X$ e $y \in Y$ se cumple la desigualdad $x \leqslant y$, existe al menos un número c tal que para cualesquiera números x e y se cumplen las desigualdades*

$$x \leqslant c \leqslant y.$$

Cabe señalar que el conjunto de todos los números reales posee propiedad de continuidad, pero no la posee el formado sólo por los números racionales. Efectivamente, supongamos que el conjunto X se compone de números racionales x para los cuales se cumple la desigualdad $x < \sqrt{2}$ y el conjunto Y consta de números racionales y

---

[1] Por ejemplo, se puede escribir $2 \leqslant 2$, $2 \leqslant 5$. Desde luego, se puede escribir más exactamente: $2 = 2$, $2 < 5$; sin embargo, las desigualdades $2 \leqslant 2$ y $2 \leqslant 5$ son también ciertas, ya que significan que «dos no es mayor que dos» y «dos no es mayor que cinco».

[2] Las desigualdades en las que aparece al menos una variable se denominan inecuaciones. (*Nota del tr.*).

para los cuales se cumple la desigualdad $y > \sqrt{2}$. Entonces, evidentemente, para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ se cumple la desigualdad $x \leqslant y$; sin embargo, no existe un número racional c tal que se cumplan las desigualdades $x \leqslant c \leqslant y$. En efecto, tal número podría ser sólo $\sqrt{2}$ que, como se sabe, no es racional.

De las propiedades I a III se desprenden todas las demás propiedades de los números reales. Citemos algunas de ellas, pero a continuación utilizaremos también otras propiedades sin demostrarlas formalmente (tal demostración es fácil de realizar cada vez).

Cualesquiera que sean los números a, b, c y d:

14°. *El número $x = b + (-a)$ es una solución de la ecuación $a + x = b$.*

□ Efectivamente, en virtud de las propiedades 1ª, 2ª, 6ª, 7ª tenemos $a + b + (-a) = b$. ■ [1])

El número $b + (-a)$ se llama *diferencia* de los números b y a y se designa con el símbolo $b - a$. Nótese que si $a < b$ (o, que es lo mismo, $b > a$), la diferencia $b - a > 0$. En efecto, en virtud de la propiedad 11ª de la desigualdad $b > a$ obtenemos $b + (-a) > > a + (-a)$ o bien $b - a > 0$.

15°. *El número $x = ba^{-1}$ es una solución de la ecuación $ax = b$* si $a \neq 0$.

□ Efectivamente, en virtud de las propiedades 3ª, 4ª, 8ª y 9ª tenemos $a \cdot ba^{-1} = b$. ■

El número ba^{-1} se llama *cociente* de los números b y a y se designa con el símbolo $\frac{b}{a}$ o bien $b : a$.

16°. *Si $a < b$, entonces $-a > -b$.*

□ En efecto, puesto que $a < b$, entonces $b - a > 0$. Por consiguiente, conforme a la propiedad 11ª, $b - a + (-b) > 0 + (-b)$, de donde obtenemos $-a > -b$. ■

En particular, si $a > 0$, entonces $-a < 0$, y si $a < 0$, entonces $-a > 0$ (aquí hemos utilizado el hecho de que $-0 = 0$; efectivamente, en virtud de la 6ª propiedad $(-0) + 0 = -0$ y conforme a la 7ª propiedad $(-0) + 0 = 0$ de donde resulta que $-0 = 0$).

17°. *Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$, o sea, las desigualdades que tienen un mismo signo pueden sumarse término a término.*

□ En efecto, si $a > b$ y $c > d$, entonces, conforme a la propiedad 11ª, tenemos $a + c > b + c$ y $c + b > d + b$. Por eso en virtud de la 10ª propiedad $a + c > b + d$. ■

18°. *Si $a < b$ y $c > d$, entonces $a - c < b - d$, o sea, se pueden sustraer las desigualdades de signos opuestos, conservando el signo de la desigualdad de la cual se ha restado la otra.*

---

[1]) Aquí y a continuación el signo □ significa el comienzo de la demostración y ■, su fin.

□ En efecto, puesto que $c > d$, entonces conforme a la propiedad 16°, $-c < -d$. Adicionando término a término las desigualdades $a < b$ y $-c < -d$ (esto se puede hacer basándose en la propiedad 17°), obtenemos $a - c < b - d$. ■

19°. $a - a = 0$.

□ En efecto, $a - a = a + (-a) = 0$. ■

20°. $a \cdot 0 = 0$.

□ Efectivamente, $a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = ab - ab = 0$. ■

21°. $-(-a) = a$.

□ En efecto, $-(-a) = (-(-a)) + (-a) + a = 0 + a = a$. ■

22°. $(-a)\, b = -ab$.

□ Efectivamente, $(-a)\, b = (-a)\, b + ab + (-ab) = [(-a) + a] \cdot b - ab = 0 \cdot b - ab = 0 - ab = -ab$. ■

Notemos que reemplazando la suma $(-a)b + ab$ por el producto $[(-a) + a]\, b$, hemos utilizado la 5ª propiedad. De la propiedad 22ª obtenemos, en particular, $(-1)\, a = -a$.

23°. *Si* $a < 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $ab < 0$.

□ En efecto, puesto que $a < 0$, entonces $-a > 0$, por eso conforme a la 12ª propiedad $(-a)\, b > 0$. Por consiguiente, $(-a)\, b = -ab > 0$ y, por lo tanto, $ab < 0$. ■

24°. *Si* $a < 0$ y $b < 0$, *entonces* $ab > 0$.

□ Efectivamente, puesto que $b < 0$, entonces $-b > 0$. Por eso en virtud de la 23ª propiedad $(-b)\, a < 0$. Por consiguiente, $(-b)\, a = -ab < 0$ y, por lo tanto, $ab > 0$. ■

25°. *Si* $a \neq 0$, *entonces* $a \cdot a = a^2 > 0$.

La validez de esta afirmación se deduce de las igualdades 12ª y 24ª. En particular, $1 = 1^2 > 0$, o sea, $1 > 0$.

26°. *Si* $a > 0$, *entonces también* $a^{-1} > 0$.

□ En efecto, según las propiedades 9ª, y 25ª, $aa^{-1} = 1 > 0$ y *si suponemos que* $a^{-1} \leqslant 0$, *en virtud de las propiedades 20ª y 23ª* obtendremos que $aa^{-1} \leqslant 0$, o sea, tiene lugar una contradicción. Por consiguiente, $a^{-1} > 0$. ■

Así pues, vemos que de las propiedades fundamentales I...III *de los números reales se desprenden las demás propiedades de los* mismos. Por eso se puede considerar que los números reales no son más que el conjunto de los elementos que poseen las propiedades I...III. Tal definición de los valores reales se llama *axiomática* y las propiedades I...III, *axiomas de los números reales.*

En conclusión nótese que, partiendo de las propiedades I...III, todo número real se puede presentar en forma de una fracción decimal infinita

$$a,\ a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots,$$

donde a es todo número entero y $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ son los números que toman los valores enteros de 0 a 9 ($0 \leqslant a_n \leqslant 9$). Sin embargo, no vamos a considerar esta cuestión [1]). Nótese, además, que se puede definir los números reales como fracciones decimales infinitas y luego demostrar sus propiedades fundamentales I...III [2]). Todas las otras construcciones de números reales conducen a los conjuntos de los elementos que poseen las propiedades I...III.

En adelante, al considerar los problemas teóricos con la participación de los números reales, no nos interesará la naturaleza de estos números sino sólo nos interesarán las propiedades que ellos poseen.

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué números forman el conjunto de los números reales?
2. ¿En qué consiste el método axiomático de introducción de los números reales?
3. Nómbrense las propiedades fundamentales (axiomas) de los números reales.
4. ¿Cuál es la propiedad fundamental que distingue el conjunto de todos los números reales del formado sólo por números racionales?

§ 3. Conjuntos numéricos más usados

Sean a y b dos números y $a < b$. Utilizaremos las designaciones siguientes:

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]; \quad \{x \mid a < x \leqslant b\} = (a, b];$$
$$\{x \mid a \leqslant x < b\} = [a, b);$$
$$\{x \mid a < x < b\} = (a, b) \quad \{x \mid a \leqslant x\} = [a, +\infty);$$
$$\{x \mid a < x\} = (a, +\infty);$$
$$\{x \mid x \leqslant b\} = (-\infty, b] \quad \{x \mid x < b\} = (-\infty, b).$$

Designaremos el conjunto de todos los números reales del modo siguiente: $\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ o bien $(-\infty >, +\infty)$.

Todos estos conjuntos se llaman *intervalos* con la particularidad de que $[a, b]$ se dice *segmento* y $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$, *semiintervalos*; (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ y $(-\infty, +\infty)$, *intervalos*. *Los intervalos* $[a, b]$, $(a, b]$ $[a, b)$ y (a, b) se llaman *finitos*; a y b son sus *extremos*. Los demás intervalos se llaman *infinitos*.

El intervalo (a, b) se distingue del segmento $[a, b]$ únicamente por el hecho de que no le pertenecen los extremos a y b. Esta distinción desempeña un papel esencial en muchas cuestiones del análisis matemático. Además, el intervalo (a, b) no contiene los números mayor y menor, mientras que en el segmento $[a, b]$ tales números son b y a, respectivamente.

[1]) Esta cuestión se considera, por ejemplo, en el libro: *L. D. Kudriávtsev.* Curso de análisis matemático. M., 1989, t. 1, *en ruso.*

[2]) Tal construcción de los números reales se da en el libro: *V. A. Illin, E. G. Pozniak.* Fundamentos del análisis matemático. M., 1981, parte I, *en ruso.*

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué conjuntos numéricos se llaman intervalos?
2. Del segmento $[a, b]$ está eliminado el intervalo (a, b). ¿Qué ha quedado?
3. Del segmento $[1, 8]$ está eliminado el intervalo $(3, 5)$. ¿Qué es lo que queda? Escriba el conjunto de los números que quedaron con ayuda de los intervalos.

§ 4. Cotas de los conjuntos numéricos

Sea X un conjunto de números no vacío.

Definición. *El conjunto X se llama acotado superiormente (inferiormente) si existe un número c tal que para cada $x \in X$ se cumpla la desigualdad $x \leqslant c$ $(x \geqslant c)$* [1].

En este caso el número c se denomina cota *superior (inferior) del conjunto X.*

El conjunto limitado superior e inferiormente se dice *acotado.*

○ **Ejemplos. 1.** Todo dintervalo finito ($[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)) está acotado. **2.** El intervalo $(a, +\infty)$ es un conjunto acotado inferiormente, pero no acotado superiormente. **3.** El intervalo $(-\infty, +\infty)$ es un conjunto no acotado ni superiormente ni inferiormente. ●

Es evidente que todo conjunto X acotado superiormente (inferiormente) tiene una multitud infinita de cotas superiores (inferiores) que forman el conjunto de los números que acotan a X por arriba (por abajo). En efecto, si el número c es la cota superior (inferior) del conjunto X, entonces todo número c', mayor (menor) que el número c, también es la cota superior (inferior) del conjunto X, ya que de la validez de la desigualdad $x \leqslant c$ $(x \geqslant c)$ resulta que $x \leqslant \leqslant c'$ $(x \geqslant c')$.

Surge la cuestión sobre la existencia del número mínimo entre los números del conjunto acotado superiormente y del número máximo entre los que forman el conjunto acotado inferiormente.

El número menor entre los que acotan por arriba el conjunto X se llama *cota superior exacta* del conjunto X y se designa por el símbolo $\sup X$ [2] y el número mayor entre los que acotan por abajo el conjunto X se denomina *cota inferior exacta* de este conjunto y se designa por el símbolo $\inf X$ [3].

○ **Ejemplos. 1.** Sea $X = (a, b)$. Entonces el número b y, por consiguiente, también todo número mayor es la cota superior del conjunto dado y el número a y todo número menor, su cota inferior. Es evidente que el número b es la cota superior exacta del conjun-

---

[1] Para abreviar la notación en esta definición están unidas dos definiciones una de las cuales corresponde a las palabras puestas entre paréntesis. A continuación también utilizaremos este procedimiento.

[2] *supremum* (lat.,) o sea, superior.

[3] *infinum* (lat.), o sea, inferior.

to X y el número a, su cota inferior exacta, o sea, $b = \sup X$, $a = \inf X$. **2.** Sea $X = (a, +\infty)$. Entonces el número a y todo número menor es la cota inferior del conjunto X. Es obvio que el número $a = \inf X$, al mismo tiempo el conjunto dado no tiene cotas superiores y, por consiguiente, no tiene cota superior exacta. ●

Propiedad de la cota superior (inferior) exacta. La cota superior exacta ($\sup X$) posee la siguiente propiedad importante: *por pequeño que sea el número* $\varepsilon > 0$ [1], *habrá un número* $x \in X$ *tal que* $x > \sup X - \varepsilon$.

Si no hubiera existido tal número x, el número $\sup X - \varepsilon$ habría sido también la cota superior y entonces el número $\sup X$ no habría sido la cota superior exacta. Con otras palabras, esta propiedad expresa el hecho de que el número $\sup X$ es el mínimo entre los que acotan por arriba el conjunto X y no puede ser disminuido.

La cota inferior exacta también posee la propiedad análoga: *por pequeño que sea el número* $\varepsilon > 0$, *habrá un número* $x \in X$ *tal que* $x < \inf X + \varepsilon$.

○ **Ejemplo.** Demostrar que el conjunto $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ está acotado. Determinar qué números son sus cotas. Hallar las cotas superior e inferior exactas de este conjunto.

Resolución. Para todo n natural se cumplen las desigualdades $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, por eso el conjunto dado X está acotado. Ahora bien, el número 1 es la cota superior y el número 0, su cota inferior.

Vamos a demostrar que el número 1 es la cota superior exacta del conjunto X, o sea, que $\sup X = 1$. Para esto, de acuerdo con la propiedad de la cota superior exacta hace falta mostrar, que para todo $\varepsilon > 0$ habrá un número natural n tal que se cumpla la desigualdad $\frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$. Este número n es $n = 1$, ya que $1 > 1 - \varepsilon$ es una desigualdad justa para todo $\varepsilon > 0$, que es lo que se necesitaba demostrar.

Demostremos ahora que el número 0 es la cota inferior exacta del conjunto X. Para esto es necesario comprobar que para todo $\varepsilon > 0$, habrá un número natural n tal que se cumpla la desigualdad $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$ o bien $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Resolviendo la desigualdad, obtenemos $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Tomando cualquier número natural $n > \frac{1}{\varepsilon}$, odtenemos la desigualdad requerida y esto, conforme a la propiedad de la cota inferior exacta, significa precisamente que el número 0 es la cota inferior exacta del conjunto X, o sea, $\inf X = 0$.

[1] ε es la letra griega «épsilon».

Notemos que al conjunto dado X le pertenece la cota exacta 1 y es su número mayor, mientras que la cota inferior exacta 0 no le pertenece y en este conjunto falta el número menor. ●

La cota superior exacta sup X puede ser definida también de otro modo:

El número sup X *se llama cota superior exacta del conjunto* X *limitado por arriba si*: 1) *para todo número* $x \in X$ *se cumple la desigualdad* $x \leqslant \sup X$; 2) *para todo número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $x \in X$ *tal que* $x > \sup X - \varepsilon$.

En esta definición la primera condición muestra exactamente que el número sup X acota al conjunto X superiormente y la segunda condición muestra que ningún número, menor que sup X, limita superiormente al conjunto X, o sea, que ya no es su cota superior.

Análogamente se define la cota inferior exacta inf X. (Hága esto por sí mismo).

Surge la pregunta ¿para qué condiciones el conjunto de números tiene una cota superior (inferior) exacta? El siguiente teorema importante da la respuesta.

Teorema 1.1. *Todo conjunto numérico acotado superiormente (inferiormente) tiene una cota superior (inferior) exacta.*

□ **Demostración.** Sea X un conjunto no vacío acotado superiormente. Entonces el conjunto Y de los números que acotan X superiormente no es vacío. De la definición de la cota superior se deduce que para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ tiene lugar la desigualdad $x \leqslant y$. Según la 13ª propiedad de continuidad de los números reales (véase el § 2) existe un número c tal que para todo número x e y se cumplen las desigualdades

$$x \leqslant c \leqslant y. \tag{1}$$

En virtud de la definición de la cota superior, de la primera de las desigualdades (1) se desprende que el número c acota superiormente al conjunto X, o sea, es la cota superior, y de la segunda desigualdad se desprende que este número es el menor entre tales números [1]), o sea, es la cota superior exacta, con la particularidad de que puede pertenecer o no pertenecer al conjunto X.

El caso de existencia de la cota inferior exacta en un conjunto no vacío acotado inferiormente se considera de un modo análogo. ■

Si el conjunto X no está acotado superiormente (inferiormente) convengamos en escribir $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$).

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. Dése la definición del conjunto X acotado superiormente (inferiormente); cite ejemplos.
2. Dése la definición de la cota superior (inferior) exacta del conjunto X acotado superiormente (inferiormente); cite ejemplos.

---

[1]) Puesto que $c \leqslant y$ para todos los números $y \in Y$.

3. Enúnciese la propiedad de la cota superior (inferior) exacta.
4. Demuéstrese que el conjunto X acotado inferiormente tiene la cota inferior exacta.
5. ¿Qué significa la notación simbólica: a) $\sup X = +\infty$; b) $\inf X = -\infty$?

§ 5. Valor absoluto de un número

El concepto de valor absoluto de un número y las desigualdades relacionadas con los valores absolutos se utilizan ampliamente en la matemática.

Definición. *Se llama valor absoluto (o módulo) del número x al mismo número x,* si $x \geqslant 0$ *o bien al número $-x$, si $x < 0$.*

El valor absoluto del número x se designa con el símbolo $|x|$. Ahora, bien,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|+5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$; $|0| = 0$.

De la definición se deducen varias propiedades del valor absoluto de un número.

1°. $|x| \geqslant 0$.

□ Efectivamente: 1) *si* $x \geqslant 0$, *entonces* $|x| = x \geqslant 0$; 2) *si* $x < 0$, *entonces* $|x| = -x$; pero $-x > 0$, puesto que $x < 0$, *o sea*, $|x| > 0$.

De 1) *y* 2) obtenemos que $|x| \geqslant 0$. ■

2°. $|x| = |-x|$.

□ En efecto: 1) si $x \geqslant 0$, entonces $-x \leqslant 0$ y en este caso $|-x| = -(-x) = x = |x|$, ya que $x \geqslant 0$; 2) si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y en este caso $|-x| = -x = |x|$, ya que $x < 0$.

De 1) y 2) obtenemos que $|x| = |-x|$. ■

3°. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

□ Efectivamente: 1) si $x \geqslant 0$, entonces $|x| = x$ y $-x \leqslant 0$ y en este caso $-x \leqslant 0 \leqslant x = |x|$, de donde $-x \leqslant |x|$ o bien $-|x| \leqslant x$; 2) si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $-x > 0$ y en este caso $x < 0 < -x = |x|$, de donde $x < |x|$.

De 1) y 2) obtenemos que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. ■

Demostremos en forma de teoremas las tres propiedades siguientes.

Teorema 1.2. *Sea ε un número positivo. Entonces las desigualdades* $|x| \leqslant \varepsilon$ y $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$ *son equivalentes.*

□ **Demostración.** Sea $|x| \leqslant \varepsilon$. En este caso:

1) si $x \geqslant 0$, entonces $|x| = x \leqslant \varepsilon$, de donde $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$;

2) si $x < 0$, entonces $|x| = -x \leqslant \varepsilon$, de donde $-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0$.

Uniendo 1) y 2), para todo número x obtenemos $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Supongamos que son válidas las desigualdades $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Esto quiere decir que simultáneamente se cumplen las desigualdades

$x \leqslant \varepsilon$ y $x \geqslant -\varepsilon$. De la última desigualdad tenemos $-x \leqslant \varepsilon$. Puesto que, por definición, $|x|$ es x o $-x$, entonces $|x| \leqslant \varepsilon$. ■

Teorema 1.3. *El valor absoluto de la suma de dos números no es mayor que la suma de los valores absolutos de estos números, o sea,* $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

□ **Demostración.** Sean x e y cualesquiera números. Conforme a la propiedad 3ª para ellos son válidas las desigualdades

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{y} \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

sumando las cuales término a término obtenemos

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant (|x|+|y|).$$

Según el teorema 1.2 esta desigualdad doble es equivalente a la desigualdad $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. ■

Notemos que $|x-y| \leqslant |x|+|y|$. Efectivamente, $|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x|+|-y| = |x|+|y|$ (compruebe esto por sí mismo).

Teorema 1.4. *El valor absoluto de la diferencia de dos números no es menor que la diferencia de los valores absolutos de estos dos números, o sea* $|x-y| \geqslant |x|-|y|$.

□ **Demostración.** Para todos números x e y tenemos

$$x = y + (x-y).$$

Según el teorema 1.3 es válida la desigualdad

$$|x| = |y+(x-y)| \leqslant |y|+|x-y|,$$

de donde obtenemos $|x-y| \geqslant |x|-|y|$. ■

Notemos que $|x+y| \geqslant |x|-|y|$. Efectivamente, $|x+y| = |x-(-y)| \geqslant |x|-|-y| = |x|-|y|$ (compruebe esto por sí mismo).

Y en conclusión nótese, además, que cualesquiera que sean dos números x e y tienen lugar las relaciones

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \text{ y } \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ si } y \neq 0$$

que son fáciles de comprobar considerando los casos cuando x e y son números de un mismo signo (ambos positivos o ambos negativos) y cuando ellos tienen los signos opuestos. Por ejemplo, verifiquemos $|xy| = |x|\,|y|$ en el caso cuando $x > 0$, $y < 0$. Tenemos $|x| = x$, $|y| = -y$ y $xy < 0$; por consiguiente, $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x|\,|y|$.

○ **Ejemplo 1.** Hallar las soluciones de las ecuaciones siguientes: 1) $|x| = x+2$; 2) $|x| = x-2$; 3) $x+2|x| = 3$; 4) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$.

Resolución. 1) Para $x \geqslant 0$ tenemos $x = x + 2$, de donde $0 = 2$ es una igualdad incorrecta. Por lo tanto, no hay soluciones. Para $x < 0$ obtenemos $-x = x + 2$, de donde $x = -1$. Esto es la solución de la ecuación.

2) Para $x \geqslant 0$ tenemos $x = x - 2$, de donde $0 = -2$ es una igualdad incorrecta. Por lo tanto no hay soluciones. Para $x < 0$ obtenemos $-x = x - 2$, de donde $x = 1 > 0$ lo que contradice la suposición hecha $x < 0$. Así pues, la ecuación no tiene soluciones.

3) Para $x \geqslant 0$ tenemos $x + 2x = 3$, de donde $x_1 = 1$. Para $x < 0$ obtenemos $x - 2x = 3$, de donde $x_2 = -3$. Por consiguiente, $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$ son las soluciones de la ecuación.

4) Utilicemos el hecho de que $|x|^2 = x^2$ [1]. Entonces $|x|^2 + 3|x| - 4 = 0$. Reemplazando $|x|$ por y, obtenemos $y^2 + 3y - 4 = 0$, de donde $y_1 = 1$, $y_2 = -4$. Puesto que $y = |x| \geqslant 0$, tenemos que $y_2 = -4$ no conviene. Queda $y_1 = |x| = 1$ y esto es equivalente a $x = -1$ y $x = 1$. La ecuación puede ser resuelta también por el método corriente, considerando los casos $x \geqslant 0$ y $x < 0$. (Haga esto por sí mismo).

Ejemplo 2. Demostrar que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Resolución. Puesto que, por definición, $||x| - |y||$ es $|x| - |y|$ o bien $-(|x| - |y|) = |y| - |x|$, para la demostración de dicha desigualdad hace falta establecer que: 1) $|x| - |y| \leqslant |x - y|$ y 2) $|y| - |x| \leqslant |x - y|$. Pero la desigualdad 1) queda demostrada en el teorema 1.4 y la desigualdad 2) también se desprende de este teorema y de la propiedad 2ª:

$$|x - y| = |-(x-y)| = |y-x| \geqslant |y| - |x|. \bullet$$

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué se llama valor absoluto de un número?
2. Demuéstrese la equivalencia de las desigualdades $|x| < \varepsilon$ y $-\varepsilon < x < \varepsilon$.
3. ¿Qué es mayor: $|2 - 3|$ ó $|2| + |-3|$?
4. Hállese $|-x|$ si $x < 0$.
5. ¿Es cierto que $|x^3| \neq |x|^3$ si $x < 0$?
6. Demuéstrese que $|x^2| = |x|^2$; $\sqrt{x^2} = |x|$.
7. Escríbase sin el signo de módulo la expresión $|x - y|$ si $x < y$.

§ 6. Método de inducción matemática

El método de inducción matemática pertenece a los más importantes métodos de demostraciones matemáticas. Se emplea para demostrar las afirmaciones que dependen del número natural n.

---

[1] Efectivamente, poniendo $x = y$ en la relación $|xy| = |x||y|$, obtenemos $|x|^2 = |x^2| = x^2$, ya que $x^2 \geqslant 0$.

Enunciémoslo en la forma general: para demostrar cierta afirmación dependiente del número natural n (por ejemplo, cualquier fórmula) es necesario: 1) comprobar su validez para $n = 1$ [1]); 2) suponiendo la validez de la afirmación para cierto n ($n > 1$), demostrar su validez para $n + 1$. Luego se saca la conclusión de que la afirmación dada es válida para todo número natural n.

○ **Ejemplo 1.** Haciendo uso del método de inducción matemática demostrar que

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Resolución. 1) *Comprobamos la validez de la fórmula dada para* $n = 1$. El primer miembro es igual a la unidad. El segundo miembro $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1$. Por lo tanto, la fórmula es justa para $n = 1$.

2) Suponiendo que la fórmula dada es justa también para cierto número n ($n > 1$), demostremos que para $n + 1$ tiene lugar la misma fórmula:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1^2)=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Efectivamente,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6},$$

que es lo que se quería demostrar. Por consiguiente, basándonos en el método de inducción matemática, sacamos la conclusión de que la fórmula dada es cierta para todo número natural n. ●

El método de inducción matemática es cómodo para determinar las sumas de un número finito de sumandos.

○ **Ejemplo 2.** Hallar la suma

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Resolución. Designemos esta suma con S_n, o sea,

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Para obtener para S_n una expresión que no necesite la adición algebraica de n sumandos, calculemos algunos primeros valores de esta

[1]) Si para $n = 1$ la afirmación no tiene sentido, la validez de la misma ha de comprobarse para el valor mínimo de n con el cual la afirmación tiene sentido.

suma:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + 3 = 4; \quad S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$$
$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

Vemos que estos valores son los cuadrados sucesivos de números naturales. Es natural suponer que $S_n = n^2$. Para demostrar la validez de esta igualdad utilicemos el método de inducción matemática. Tenemos: 1) $S_1 = 1 = 1^2$. Por lo tanto, la fórmula es justa para $n = 1$; 2) suponiendo que ella es justa para cierto n, demostremos que para $n + 1$ tiene lugar la fórmula $S_{n+1} = (n + 1)^2$. En efecto,

$$S_{n+1} = S_n + [2(n + 1) - 1] = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2,$$

que es lo que se necesitaba demostrar. Por consiguiente, basándonos en el método de inducción matemática sacamos la conclusión de que la fórmula $S_n = n^2$ es justa para todo número natural n y

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \quad \bullet$$

Ejercicio. Hallar la suma $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$. $\Big($*Resp.* $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. **Indicación:** reemplace cada sumando por la diferencia según la fórmula $\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ o haga uso de la inducción.$\Big)$

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿En qué consiste el método de inducción matemática?
2. Haciendo uso del método de inducción matemática, demuéstrese que para cada n natural es válida la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

§ 7. Factorial y fórmula del binomio de Newton

1. Factorial. Para calcular la suma de los primeros n números naturales hay una fórmula cómoda

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para el producto de los primeros n números naturales tal fórmula no existe, pero esta magnitud, que se encuentra con frecuencia en el análisis combinatorio y otras partes de la matemática, tiene una designación especial: $n!$ (factorial de n). Así pues, por definición,

$$1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ \cdot n = n!$$

El signo de admiración está elegido, quizás, para la designación debido al hecho de que incluso para valores comparativamente pequeños de n, el número $n!$ es muy grande; para mostrar lo rápido que crece $n!$ con el aumento de n escribamos estos números para n de 1 a 10: $1! = 1$ [1]), $2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $4! = 3!\cdot 4 = 24$, $5! = 4!\cdot 5 = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40\,320$, $9! = 362\,880$, $10! = 3\,628\,800$.

De la definición de $n!$ se deduce que las factoriales de dos números naturales vecinos n y $n+1$ están relacionadas por la fórmula

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1). \tag{1}$$

Notemos que si en esta igualdad se sustituye $n = 0$, obtenemos $1! = 0!\cdot 1$, por eso se supone

$$0! = 1; \tag{2}$$

este acuerdo resulta frecuentemente cómodo en distintas fórmulas generales.

○ **Ejemplo 1.** Demuéstrese la fórmula $(n+1)! - n! = n!\cdot n$.

Resolución. Hagamos uso del método de inducción matemática. Tenemos: 1) para $n = 1$ $(1+1)! - 1! = 1!\cdot 1$, de donde $1 = 1$, por lo tanto, la fórmula es justa; 2) suponiendo su validez para cierto n demostremos que para $n+1$ tiene lugar la fórmula $(n+2)! - (n+1)! = (n+1)!(n+1)$. Efectivamente, por la fórmula (1) obtenemos

$$(n+2)! - (n+1)! = n!\,(n+1)(n+2) - n!\,(n+1) =$$
$$= n!\,(n+1)\,[(n+2) - 1] = n!\,(n+1)(n+1) = (n+1)!(n+1)$$

que es lo que se quería demostrar. Por consiguiente, basándonos en el método de inducción matemática, sacamos la conclusión de que la fórmula es justa para todo n natural.

Ejemplo 2. Hallar la suma $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!$

Resolución. Reemplacemos cada sumando por la diferencia según la fórmula $(n+1)! - n! = n!\cdot n$ (véase el ejemplo 1); obtenemos

$$(1+1)! - 1! + (2+1)! - 2! + (3+1)! - 3! + \ldots$$
$$\ldots + (n+1)! - n! = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \ldots$$
$$\ldots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1,$$

ya que todos los sumandos en el primer miembro de la igualdad, a excepción del segundo y el penúltimo, se suprimen recíprocamente.

[1]) Por definición se supone $1! = 1$.

Por consiguiente, $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$. ●

Ejercicio. Hállese la suma $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!}$. $\Big($*Resp.* $1 - \frac{1}{n!}$. *Indicación*: reemplácese cada sumando por la diferencia según la fórmula $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\Big)$.

2. Fórmula del binomio de Newton. En las matemáticas se utilizan ampliamente los magníficos números llamados coeficientes binomiales. Estos tienen la designación especial C_n^k y se hallan por la fórmula

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \tag{3}$$

donde n son números enteros no negativos y k, números enteros no negativos que satisfacen la condición $0 \leqslant k \leqslant n$.

Si el numerador y denominador de la fracción (3) se reducen eliminando $(n-k)!$, obtenemos la fórmula

$$C_n^k = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}$$

que es cómoda de guardar en la memoria y con cuya ayuda es más fácil realoizar los cálculos. El denominador de esta fracción está formado por el producto de todos los primeros k números naturales y el numerador, por el producto de k números naturales escritos en el orden de decrecimiento, comenzando con el número n. En el análisis combinatorio esta fórmula define el coeficiente binomial C_n^k como *número de combinaciones de n elementos tomados k a k*.

○ **Ejemplo 3.** Calcular C_{20}^6.
Resolución. Tenemos

$$C_{20}^6 = \frac{20!}{6!\,14!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 38\,760. \quad ●$$

Con ayuda de los coeficientes binomiales se demuestran muchas afirmaciones matemáticas y, en particular, una *fórmula* muy importante *del binomio de Newton* [1])

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n \tag{4}$$

a cuyo nombre se debe también la denominación de los coeficientes C_n^k.

□ Vamos a demostrar la fórmula (4) por el método de inducción matemática, pero mostremos previamente que para los coeficientes

[1]) Isaac Newton (1642 — 1727), ilustre matemático, mecánico y astrónomo nglés.

binomiales se cumple la relación

$$C_n^{k+1}+C_n^k=C_{n+1}^{k+1}. \tag{5}$$

En efecto,

$$C_n^{k+1}+C_n^k=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=$$
$$=\frac{n!}{k!\,(k+1)\,(n-k-1)!}+\frac{n!}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)}=$$
$$=\frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k}\right)=$$
$$=\frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k-1)!\,(k+1)\,(n-k)}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}=$$
$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!}=C_{n+1}^{k+1}$$

que es lo que se quería mostrar.

Demostremos ahora la fórmula (4). 1) Comprobamos la validez de la fórmula (4) para $n=1$:

$$(a+b)^1=C_1^0a+C_1^1b=a+b,$$

ya que en virtud del acuerdo (2) $C_1^0=\frac{1!}{0!\,1!}=1$, $C_1^1=\frac{1!}{1!\,0!}=1$.

2) Suponiendo que la fórmula (4) es justa para cierto n, demostremos que para $n+1$ tiene lugar la misma fórmula, o sea,

$$(a+b)^{n+1}=C_{n+1}^0a^{n+1}+C_{n+1}^1a^nb+\dots$$
$$\dots+C_{n+1}^{k+1}a^{n-k}b^{k+1}+\dots+C_{n+1}^nab^n+C_{n+1}^{n+1}b^{n+1}. \tag{6}$$

Efectivamente,

$$(a+b)^{n+1}=(C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\dots+C_n^ka^{n-k}b^k+\dots$$
$$\dots+C_n^nb^n)\cdot(a+b)=C_n^0a^{n+1}+C_n^1a^nb+\dots$$
$$\dots+C_n^{k+1}a^{n-k}b^{k+1}+\dots+C_n^nab^n+C_n^0a^nb+\dots$$
$$\dots+C_n^ka^{n-k}b^{k+1}+\dots+C_n^{n-1}ab^n+C_n^nb^{n+1}=$$
$$=C_n^0a^{n+1}+(C_n^0+C_n^1)\,a^nb+\dots+(C_n^k+C_n^{k+1})a^{n-k}b^{k+1}+\dots$$
$$\dots+(C_n^{n-1}+C_n^n)\,ab^n+C_n^nb^{n+1},$$

de donde en virtud de que $C_n^0=1=C_{n+1}^0$, $C_n^0+C_n^1=C_{n+1}^1$, $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$, $C_n^{n-1}+C_n^n=C_{n+1}^n$, $C_n^n=1=C_{n+1}^{n+1}$ (véanse las fórmulas (2), (3), (5)) se deduce la fórmula (6). De (1) y (2) basándonos en el método de inducción matemática, sacamos la conclusión de que la fórmula (4) es justa para todo número natural n. ■

La fórmula (4) suele escribirse brevemente así:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

[El símbolo $\sum$ (la letra griega «sigma») designa el signo de sumación (de adición).]

De la fórmula (4), en particular, para $n = 2$ y $n = 3$ obtenemos las fórmulas bien conocidas:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Ejercicio. Escriba el desarrollo según la fórmula del binomio de Newton $(a+b)^6$. (*Resp.* $a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$.)

PREQUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué significa la notación $n!$?
2. Hállese el número $n!$ para $n = 11$; 12.
3. ¿Puede $n!$ terminar en cinco ceros exactamente?
4. Demuéstrese la fórmula del binomio de Newton.

§ 8. Números complejos

1. Nociones breves. La introducción de los números complejos se debe al hecho de que en el conjunto de los números reales no se puede extraer la raíz de grado par de un número negativo.

Definición. *Se llama número complejo a la expresión que tiene la forma*

$$z = x + iy = x + yi,$$

donde x e y son números reales; i, el símbolo especial. En este caso x se llama parte real del número z; y, parte imaginaria de este número; i, unidad imaginaria definida por la igualdad $i^2 = -1$. [1])

Los números complejos $x_1 + iy_1$ y $x_2 + iy_2$ se consideran iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Por definición se supone también que $x + i0 = x$, $0 + iy = iy$, $0 + 0i = 0$.

De la definición se deduce que:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i; \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i; \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1, \; \ldots .$$

[1]) O sea, la unidad imaginaria es un número cuyo cuadrado es igual a la unidad negativa.

A cada número complejo $z = x + iy$ corresponde el número $x - iy$ que se denomina conjugado con z y se designa $\bar{z}$; $\bar{z} = x - iy$.

○ **Ejemplo 1.** Resolver la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Resolución. Aplicando a la ecuación dada la regla conocida de determinación de las raíces de una ecuación cuadrática, obtenemos

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i.\ ^{1)}$$

La ecuación dada no tiene raíces reales; sus raíces son complejas conjugadas, o sea, $x_1 = -1 + i$, $x_2 = -1 - i$.

Ejercicio. Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$.
(*Resp.* $x_{1,2} = 1 \pm i$).

2. Operaciones con los números complejos. Con los números complejos pueden realizarse operaciones aritméticas con ayuda de las reglas que están adoptadas en el álgebra para las expresiones literales. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos. Entonces con los números complejos z_1 y z_2 son válidas las transformaciones siguientes:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2 + iy_2 \neq 0.$$

De esta manera vemos que la suma, diferencia, producto y cociente de los números complejos es, a su vez, un número complejo.

○ **Ejemplo 2.** Hallar la suma de los números $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - i2$.

Resolución. Tenemos

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - i2) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i.$$

Ejemplo 3. Dividir el número $z_1 = 2 + i3$ por el número $z_2 = 1 + i4$.

Resolución. Tenemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 + i3)(1 - i4)}{(1 + i4)(1 - i4)} = \frac{14 - i5}{17} = \frac{14}{17} - i\frac{5}{17}.$$

---

1) Se puede demostrar que $\sqrt{-1} = \pm i$.

Ejercicios. 1) Hallar el producto de los números $z_1 = 2 - i3$ y $z_2 = 1 + i2$ (*Resp.* $8 + i$).
2) Dividir el número $z_1 = 1 + i$ por el número $z_2 = 1 - i$ (*Resp.* i).

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué número se llama complejo? Nombre las partes real e imaginaria del número complejo.
2. Dése la definición de la unidad imaginaria. ¿Cómo se designa la unidad imaginaria?
3. ¿Qué números complejos se denominan conjugados?
4. Enúnciese la condición de igualdad de los números complejos.
5. ¿Cómo se cumplen las operaciones de adición, de sustracción, de multiplicación y de división de los números complejos?

§ 9. Problemas de control

1.1. Demuéstrese que el conjunto $X = (0, 1)$ está acotado. ¿Qué números son cotas? Halle la cota superior exacta de este conjunto.
1.2. Demuéstrese que el conjunto $X = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ de todos los números enteros no está acotado inferiormente ni superiormente, o sea, $\sup X = +\infty$ e $\inf X = -\infty$.
1.3. Demuéstrese que el conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de los números naturales no está acotado superiormente, o sea, $\sup X = +\infty$.
1.4. Demuéstrese la afirmación siguiente: *cualesquiera que sean los números a y b, $0 < a < b$, existe tal número entero $n > 0$ que $an > b$.*
1.5. Sean X e Y dos conjuntos numéricos no vacíos. Demuéstrese que si $Y \subset X$, entonces $\sup X \geqslant \sup Y$.
1.6. Sean X e Y dos conjuntos numéricos no vacíos. Demuéstrese que $\sup \{z \mid z = x + y;\ x \in X,\ y \in Y\} = \sup X + \sup Y$.
1.7. Resuélvase la ecuación $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$.
1.8. Resuélvase la ecuación $|(x^2 + 2x + 5) + (x - 5)| = |x^2 + 2x + 5| + |x - 5|$.
1.9. Resuélvase la ecuación $|\operatorname{sen} x| - \operatorname{sen} x = 2$.
1.10. Resuélvase la ecuación $|(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$.
1.11. Resuélvase las ecuaciones, anulando los módulos:
1) $|x + 4| = |x - 4|$; 2) $|x - 1| + |1 - 2x| = 2|x|$; 3) $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$.
1.12. Resuélvase la inecuación $||x^2 - 3x| > |x^2| - |3x|$.
1.13. Resuélvase la inecuación $|x - 3| + |x + 3| > 8$ anulando el módulo.
1.14. Haciendo uso del método de inducción matemática, demuéstrese que $4^n > n^2$ para todo n natural.
1.15. Haciendo uso del método de inducción matemática, demuéstrese que $n! > 2^n$ para $n > 3$.
1.16. Haciendo uso del método de inducción matemática, demuestre las desigualdades $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ para $n > 1$.
1.17. Hállese la suma $1 + 3 + 6 + \ldots + \dfrac{n(n+1)}{2}$.
1.18. Hállese la suma $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

2

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO

La geometría analítica es el campo de la matemática que estudia las representaciones geométricas por métodos algebraicos. En el siglo XVII el matemático francés Descartes desarrolló y por primera vez utilizó el método de las coordenadas que dio la posibilidad de vincular unos con otros los conceptos geométricos y algebraicos.

§ 1. Método de las coordenadas

El método de las coordenadas se basa en la construcción de un sistema de coordenadas. Existen muchos tales sistemas. Vamos

Fig. 1

a familiarizarnos con los sistemas rectangular (o cartesiano) y polar de coordenadas.

1. Segmentos orientados y sus valores. Identidad fundamental. Recuérdese que el conjunto de los puntos de una recta formado por dos puntos de frontera y por todos los puntos que están entre ellos se llama *segmento*.

Uno de los conceptos fundamentales de la geometría analítica es el de segmento orientado.

Consideremos una recta arbitraria. Señalemos sobre ella dos direcciones recíprocamente contrarias. Elijamos una de ellas y designémosla en la figura con una flecha (fig. 1). Supongamos, además, que está escogida la unidad de escala para medir las longitudes de los segmentos.

La recta con la dirección elegida sobre ella se denomina *eje* [1]).

Vamos a considerar sobre el eje dos puntos arbitrarios A y B.

---

[1]) Aquí y a continuación se supone que el eje está dispuesto horizontalmente y su dirección positiva es *la de izquierda a derecha*.

Definición 1. *El segmento con los puntos de frontera A y B se dice orientado si se señala cuál de los puntos A y B se considera como origen del segmento y cuál de ellos, como su fin.*

Designemos por $\overline{AB}$ [1] el segmento orientado con el origen en el punto A y con el fin en el punto B y consideraremos que este segmento está orientado desde el origen hacia el fin.

En la notación $\overline{AB}$ la letra que designa el origen del segmento orientado se escribe la primera y la que designa su fin, la segunda.

La longitud del segmento orientado $\overline{AB}$ se indica así: $|\overline{AB}|$ o $|AB|$.

Para los segmentos orientados que están sobre el eje introduzcamos un concepto importante de magnitud del segmento orientado.

Definición 2. *Se llama magnitud AB del segmento orientado $\overline{AB}$ al número real que es igual a $|\overline{AB}|$ si las direcciones del segmento y del eje coinciden, e igual a $-|\overline{AB}|$ si estas direcciones son opuestas.*

De la definición se deduce que cualquiera que sea la dirección del eje las magnitudes de los segmentos orientados no se distinguen sino por los signos:

$$AB = -BA.$$

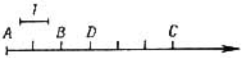

Fig. 2

Notemos que $|\overline{AB}|$ y $|\overline{BA}|$ designan el mismo número.

Supongamos que se da cualquier eje, la unidad de escala y los puntos A, B, C y D situados de modo que la distancia entre A y B sea igual a dos y entre C y D, a tres (fig. 2). Entonces la dirección del segmento orientado $\overline{AB}$ y del eje coinciden y la dirección del segmento orientado $\overline{CD}$ y del eje es contraria. Por consiguiente, $AB = |\overline{AB}| = 2$, $CD = -|\overline{CD}| = -3$. Si consideramos los segmentos orientados $\overline{BA}$ y $\overline{DC}$, entonces $BA = -|\overline{BA}| = -2$, $DC = |\overline{DC}| = 3$. En este caso $|\overline{BA}| = |\overline{AB}| = 2$ y $|\overline{CD}| = |\overline{DC}| = 3$.

Si los puntos A y B del segmento orientado $\overline{AB}$ coinciden, la magnitud del segmento definido $\overline{AB}$ es igual a cero y su sentido no está determinado.

A continuación llamaremos simplemente *segmentos* a los segmentos orientados del eje omitiendo la palabra «orientados».

Identidad fundamental. *Para todos tres puntos A, B y C situados sobre el eje el valor del segmento $\overline{AC}$ es igual a la suma de los valores de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$,* o sea,

$$AB + BC = AC. \tag{1}$$

[1] A veces se designa $\overrightarrow{AB}$.

□ Vamos a **demostrar** la identidad fundamental. Supongamos primero que los puntos A, B y C son distintos. Entonces para demostrar la igualdad (1) es necesario considerar seis casos de situación recíproca de los puntos A, B y C sobre el eje [1] (fig. 3). El caso I es evidente. Examinemos, por ejemplo, el caso II. Tenemos $AB - CB = AC$. Pero $CB = BC$. Por lo tanto, $AB + BC = AC$, o sea, hemos obtenido la igualdad (1). Los demás casos se demuestran de un modo análogo.

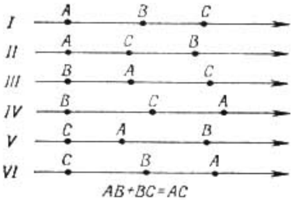

Fig. 3

Supongamos ahora que algunos de los puntos A, B y C coinciden, por ejemplo, el punto B coincide con el punto A. Entonces

$$AB + BC = AA + AC = 0 + \\ + AC = AC,$$

o sea, una vez más se obtiene la igualdad (1).

Así pues, queda establecido que la igualdad (1) es realmente válida cualquiera que sea la situación de los puntos A, B y C sobre el eje. ■

2. Coordenadas sobre la recta. Recta numérica. Consideremos una recta cualquiera. Escojamos sobre ella la dirección (entonces llegará a ser eje) y cierto punto O (origen de coordenadas). La recta con la dirección elegida y con el origen de coordenadas se denomina *recta de coordenadas* (en este caso suponemos que la unidad de escala está elegida).

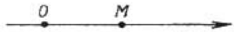

Fig. 4

Sea M un punto arbitrario sobre la recta de coordenadas (fig. 4). Pongamos en correspondencia al punto M el número real x, igual al valor OM del segmento $\overline{OM}$: $x = OM$. El número x se llama *coordenada* del punto M. De la definición de la magnitud del segmento se deduce que si la dirección del segmento $\overline{OM}$ coincide con la del eje, el punto M está situado a la derecha del punto O y la coordenada x es positiva; en cambio, si no coincide, el punto M está situado a la izquierda del punto O y la coordenada x es negativa y, por último, si el punto M coincide con el punto O, la coordenada x es igual a cero.

El hecho de que el punto M tiene la coordenada x se escribe simbólicamente en la forma $M(x)$.

De esta manera, a cada punto de la recta de coordenadas le corresponde cierto número real. Es válido también lo inverso: a cada punto

[1] Puesto que de tres puntos se puede componer $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutaciones.

real x le corresponde cierto punto sobre la recta de coordenadas y precisamente tal punto M cuya coordenada es igual a x. Tal correspondencia se denomina *biunívoca*.

Así pues, los números reales pueden ser representados por los puntos de la recta de coordenadas, o sea, la recta de coordenadas sirve de representación del conjunto de todos los números reales. Por eso el conjunto de todos los números reales se denomina *recta numérica* [1]) y todo número, punto de esta recta. Sobre la recta numérica cerca del punto suele indicarse el número, o sea, su coordenada.

La representación de los números reales en forma de puntos de la recta numérica hace geométricamente evidente la noción de números y de sus propiedades. A los intervalos numéricos les correspon-

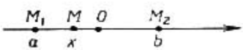

Fig. 5

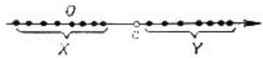

Fig. 6

den geométricamente los intervalos sobre la recta numérica. Por ejemplo, el segmento $[a, b]$ se representa sobre la recta numérica por el segmento $\overline{M_1M_2}$ en forma de los puntos $M(x)$ situados entre dos puntos M_1 y M_2 (fig. 5), uno de los cuales representa el número a (tiene la coordenada a) y el otro, el número b (tiene la coordenada b), o sea, para todo $x \in [a, b]$ se cumplen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$.

Consideremos un ejemplo más. La propiedad 13ª de continuidad de los números reales tiene un sentido geométrico simple. Efectivamente, si tomamos la recta numérica, en ella cada punto $x \in X$ está dispuesto a la izquierda de cada punto $y \in Y$. Por eso el conjunto X está situado por completo a la izquierda del conjunto Y. Conforme a la propiedad de continuidad entre los conjuntos X e Y hay un punto c que «separa un conjunto del otro» (fig. 6). En este caso el punto c puede pertenecer tanto al conjunto X como al conjunto Y o no pertenecer a ninguno de ellos. Ahora bien, la recta numérica parece ser una línea continua sin «huecos». Cualquiera que sea el lugar donde hemos «cortado» la recta formando dos partes, el corte pasará por uno de los puntos de la recta.

Sea a un número arbitrario de la recta numérica y δ [2]), un número positivo. El intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ se llama *δ-entorno del punto a* (fig. 7).

Sobre la recta numérica el conjunto acotado X representa un

[1]) Cabe notar que hay muchas rectas de coordenadas, mientras que la recta numérica es una sola: el conjunto de los números reales. A veces la recta numérica se llama eje numérico.

[2]) δ es la letra griega «delta».

conjunto de puntos en el cual sirven de cotas los extremos de los intervalos que contienen todos los puntos de este conjunto.

○ **Ejemplo 1.** Construir sobre la recta numérica puntos cuyas coordenadas satisfagan las ecuaciones siguientes: 1) $|x| = 2$; 2) $|x - 1| = 3$; 3) $|2x - 3| = 2x - 3$; 4) $|1 - x| = 2$; 5) $|2 + x| = 2$.

Resolución. 1) La ecuación $|x| = 2$ es equivalente a dos ecuaciones: $x = 2$ y $x = -2$. Por consiguiente, tenemos dos puntos

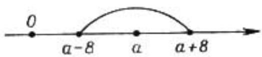

Fig. 7

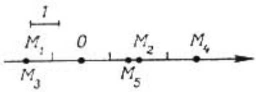

Fig. 8

$M_1(-2)$ y $M_2(2)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada (fig. 8).

2) La ecuación $|x - 1| = 3$ es equivalente a dos ecuaciones: $x - 1 = 3$ y $x - 1 = -3$, de donde encontramos $x = -2$ y $x = 4$ y los puntos correspondientes $M_3(-2)$ y $M(4)$ (fig. 8), cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

3) Puesto que $|x| = x$ para $x \geqslant 0$, la igualdad dada es válida para aquellos x con los cuales $2x - 3 \geqslant 0$, de donde obtenemos $x \geqslant \frac{3}{2}$. Por lo tanto, los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada están situados a la derecha del punto $M_5\left(\frac{3}{2}\right)$, incluyendo el punto M_5. En los demás casos las resoluciones son análogas. (Constrúyanse los demás puntos por sí mismo.)

Ejemplo 2. Caracterizar la situación sobre la recta numérica de los conjuntos de puntos, cuyas coordenadas satisfacen las inecuaciones siguientes: 1) $x > 2$; 2) $x - 3 \leqslant 0$; 3) $2x - 3 \leqslant 0$; 4) $1 < x \leqslant 3$; 5) $x^2 - 9 < 0$; 6) $x^2 - 5x + 6 < 0$; 7) $12 - x < 0$; 8) $3x - 5 > 0$; 9) $-2 \leqslant x \leqslant 3$; 10) $x^2 - 8x + 15 \leqslant 0$; 11) $x^2 - 8x + 15 > 0$; 12) $x^2 - 25 < 0$; 13) $16 - x^2 \leqslant 0$. Hágase una figura para cada caso.

Resolución. 1) Los puntos están dispuestos a la derecha del punto $M_1(2)$.

2) Adicionando a cada miembro de la inecuación $x - 3 \leqslant 0$ el número 3, obtenemos $x \leqslant 3$. Por consiguiente, los puntos están situados a la izquierda del punto $M_2(3)$, incluyendo el punto M_2.

3) Adicionando a cada miembro de la inecuación $2x - 3 \leqslant 0$ el número 3 y dividiéndolos término a término por dos, obtenemos $x \leqslant \frac{3}{2}$. Por lo tanto, los puntos están a la izquierda del punto $M_3\left(\frac{3}{2}\right)$, incluyendo el punto M_3.

4) Los puntos se encuentran dentro del intervalo acotado por los puntos $M_4(1)$ y $M_5(3)$, incluyendo el punto M_5.

5) La inecuación dada es equivalente a la inecuación $x^2 < 9$. Puesto que $\sqrt{x^2} = |x|$, entonces $|x| < 3$ ó $-3 < x < 3$ (véase el teorema 1.2). Por consiguiente, los puntos están situados dentro del intervalo acotado por los puntos $M_6(-3)$ y $M_7(3)$.

6) Determinemos las raíces del trinomio que está en el primer miembro de la inecuación dada $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ y representémoslo en la forma

$$(x-2)(x-3) < 0.$$

El producto de dos factores es negativo cuando estos factores tienen los signos opuestos. Por lo tanto, son posibles dos casos:

$$\text{bien } \begin{cases} x-2<0, \\ x-3>0, \end{cases} \quad \text{o bien } \begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0. \end{cases}$$

El primer sistema es incompatible (no tiene solución); la solución de la segunda es $2<x<3$. Por consiguiente, los puntos se encuentran dentro del intervalo acotado por los puntos $M_8(2)$ y $M_9(3)$. En los demás casos las resoluciones son análogas. (Háganse de manera independiente.)

Ejemplo 3. Caracterizar sobre la recta numérica el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen las inecuaciones siguientes: 1) $|x| < 1$; 2) $|x| > 2$; 3) $|x| \leqslant 2$; 4) $|x-2| < 3$; 5) $|x-1| \geqslant 2$; 6) $|x^2 - 5x + 6| > x^2 - 5x + 6$; 7) $|x| < x + 1$.

Resolución. 1) La inecuación dada es equivalente a las inecuaciones $-1 < x < 1$ (véase el teorema 1.2). Por lo tanto, los puntos se hallan dentro del intervalo acotado por los puntos $M_1(-1)$ y $M_2(2)$.

2) Si $|x| > \alpha$ $(\alpha > 0)$, entonces $x > \alpha$ o $x < -\alpha$ (demuestre esto por sí mismo). En el caso dado $x > 2$ ó bien $x < -2$. Por consiguiente, los puntos están situados fuera del intervalo acotado por los puntos $M_3(-2)$ y $M_4(2)$.

3) La inecuación dada es equivalente a las inecuaciones $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Así pues, los puntos se encuentran dentro del intervalo limitado por los puntos $M_5(-2)$ y $M_6(2)$, incluyendo los puntos M_5 y M_6.

4) La inecuación dada es equivalente a las inecuaciones $-3 < x - 2 < 3$. Adicionando a cada miembro de estas inecuaciones el número 2, obtenemos $-1 < x < 5$. Por lo tanto, los puntos están dentro del intervalo acotado por los puntos $M_7(-1)$ y $M_8(5)$.

5) Si $|x-1| \geqslant 2$, entonces $x - 1 \geqslant 2$ ó $x - 1 \leqslant -2$. Resolviendo cada una de estas inecuaciones, obtenemos $x \geqslant 3$ ó bien $x \leqslant -1$. Por consiguiente, los puntos se encuentran fuera del intervalo acotado por los puntos $M_9(-1)$ y $_{10}(3)$, incluyendo los puntos M_9 y M_{10}.

6) Puesto que $|x| > x$ sólo cuando $x < 0$ (véase la propiedad 3ª del valor absoluto de un número), la inecuación dada es válida para las x con las cuales $x^2 - 5x + 6 < 0$. Como se desprende del ejemplo 2, caso 6), la solución de esta inecuación es $2 < x < 3$.

7) Si $x \geqslant 0$, la inecuación dada es equivalente a la inecuación $x < x + 1$, la cual se satisface con todos los valores de x. Si $x < 0$, la inecuación es equivalente a la inecuación $-x < x + 1$. Resolviéndola, obtenemos $x > -\frac{1}{2}$. Ahora bien, los puntos están situados a la derecha del punto $M_{11}\left(-\frac{1}{2}\right)$. ●

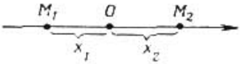

Fig. 9

En conclusión vamos a demostrar dos teoremas importantes.

Teorema 2.1. *Cualesquiera que sean dos puntos $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ siempre es válida la igualdad*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \tag{2}$$

□ **Demostración.** Consideremos tres puntos O, M_1, M_2 (fig. 9). Conforme a la identidad fundamental (1)

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

de donde

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1$$

Pero $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$. Por consiguiente, $M_1M_2 = x_2 - x_1$. ■

El teorema tiene un sentido simple: para hallar el valor M_1M_2 del segmento $\overline{M_1M_2}$ es necesario de la coordenada de su extremo restar la coordenada de su origen.

Teorema 2.2. *Si $M_1(x_1)$ y $M_2(x_2)$ son dos puntos cualesquiera y d es la distancia entre ellos*, entonces

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{3}$$

□ **Demostración.** Según el teorema 2.1

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

Pero la distancia entre los puntos M_1 y M_2 es igual a la longitud del segmento $\overline{M_1M_2}$, o sea, al módulo de este segmento. Por consiguiente,

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|. \blacksquare$$

Observación. Puesto que los números $x_2 - x_1$ y $x_1 - x_2$ se toman en módulo, se puede escribir $d = |x_1 - x_2|$.

Teniendo en cuenta la observación, el teorema 2.2 puede enunciarse así: para hallar la distancia comprendida entre los puntos M_1 y M_2 es necesario de la coordenada de uno de ellos restar la coordenada del otro y la diferencia obtenida tomarla en módulo.

○ **Ejemplo 4.** Se dan los puntos $A(5)$, $B(-1)$, $C(-8)$, $D(2)$. Hallar los valores de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$.

Resolución. En virtud del teorema 2.1 tenemos

$$AB = -1-5 = -6, \quad CD = 2-(-8) = 10,$$
$$DB = -1-2 = -3.$$

Ejemplo 5. Se dan los puntos $A(3)$ y $B(-2)$. Hallar la distancia d entre ellos.

Resolución. En virtud del teorema 2.2 tenemos

$$d = |-2-3| = |-5| = 5. \bullet$$

3. Sistema rectangular (cartesiano) de coordenadas en el plano. Dos ejes recíprocamente perpendiculares Ox y Oy que tienen el origen común O y la misma unidad de escala (fig. 10) forman un sistema rectangular (o cartesiano) de coordenadas en el plano.

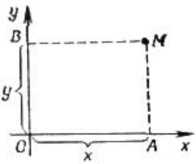

Fig. 10

El eje Ox se llama *eje de abscisas* y el eje Oy, *eje de ordenadas*. El punto O de intersección de los ejes se llama *origen de coordenadas*. El plano en el cual están situados los ejes Ox y Oy se llama *plano de coordenadas* y se designa Oxy.

Sea M un punto arbitrario del plano. Bajemos de este punto los perpendiculares MA y MB a los ejes Ox y Oy, respectivamente. Llamaremos *coordenadas rectangulares* x e y del punto M a los valores OA y OB, de los segmentos orientados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, respectivamente: $x = OA$, $y = OB$.

Las coordenadas x e y del punto M se denominan *abscisa* y *ordenada* del mismo.

El hecho de que el punto M tiene las coordenadas x e y se designa simbólicamente así: $M(x;\ y)$. En este caso la primera ordenada entre paréntesis es la abscisa y la segunda, la ordenada. El origen de coordenadas tiene las coordenadas $(0;\ 0)$.

De esta manera, elegido el sistema de coordenadas, a cada punto M del plano corresponde un par de números $(x;\ y)$, o sea, sus coordenadas rectangulares y, viceversa, a cada par de números $(x,\ y)$ [1]) corresponde en el plano Oxy un punto, y sólo uno, M tal que su abscisa es igual a x y su ordenada, a y.

Así pues, el sistema rectangular de coordenadas en el plano establece la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos

[1]) Se trata de un par ordenado de números (de un conjunto ordenado) o sea de una colección de dos números en la cual se indica qué número es primero y qué número es segundo. Si $x \neq y$, los pares $(x;\ y)$ e $(y;\ x)$ son distintos, ya que en el primero de ellos el primer número es x y en el segundo, y.

los puntos del plano y el conjunto de pares de números, correspondencia que al resolver los problemas geométricos permite emplear los métodos algebraicos.

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes* que se numeran por las cirfas romanas I, II, III y IV como se indica en la fig. 11.

En la fig. 11 se muestran también los signos de las coordenadas de puntos según su situación en uno u otro cuadrante.

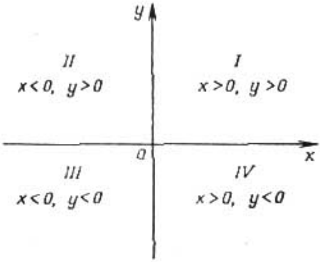

Fig 11

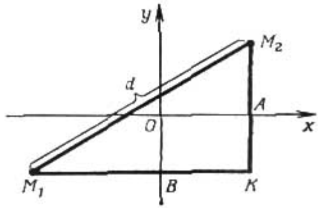

Fig. 12

4. Problemas elementales de la geometría analítica en el plano. Consideremos algunos problemas elementales referentes al empleo de las coordenadas rectangulares en el plano.

1. **Distancia comprendida entre dos puntos.**

Teorema 2.3. *Para cualesquiera dos puntos M_1 $(x_1; y_1)$ y M_2 $(x_2; y_2)$ del plano la distancia d comprendida entre ellos se expresa por la fórmula*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{4}$$

□ **Demostración.** Tracemos de los puntos M_1 y $_2$ las perpendiculares M_1B y M_2A a los ejes Oy y Ox, respectivamente, y designemos por K el punto de intersección de las rectas M_1B y M_2A (fig. 12). El punto K tiene las coordenadas $(x_2; y_1)$. Según el teorema 2.2

$$|M_1K|=|x_2-x_1|; \quad |M_2K|=|y_2-y_1|.$$

Puesto que el triángulo M_1M_2K es rectángulo, entonces, conforme al teorema de Pitágoras,

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{|M_1K|^2+|M_2K|^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \quad ■$$

○ **Ejemplo 6.** Hallar la distancia d entre los puntos M_1 $(-2; 3)$ y M_2 $(5; 4)$.

Resolución. Según la fórmula (4) tenemos

$$d=\sqrt{[5-(-2)]^2+(4-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}. \quad ●$$

II. **Área de un triángulo. Teorema 2.4.**
Para cualesquiera tres puntos $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ y $C(x_3;\ y_3)$ que no estén sobre una misma recta el área S del triángulo ABC se expresa por la fórmula:

$$S=\frac{1}{2}\ |[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]\ |. \tag{5}$$

□ **Demostración.** El área del triángulo ABC representado en la fig. 13 puede ser hallada así:

$$S_{ABC}=S_{ADEC}+S_{BCEF}-S_{ABFD}, \tag{6}$$

donde S_{ADEC}, S_{BCEF} y S_{ABFD} son las áreas de los trapecios respectivos. Puesto que

$$S_{ADEC}=|\ DE\ |\cdot\frac{|\ AD\ |+|\ CE\ |}{2}=\frac{(x_3-x_1)(y_3+y_1)}{2},$$

$$S_{BCEF}=|\ EF\ |\cdot\frac{|\ EC\ |+|\ BF\ |}{2}=\frac{(x_2-x_3)(y_2+y_3)}{2},$$

$$S_{ABFD}=|\ DF\ |\cdot\frac{|\ AD\ |+|\ BF\ |}{2}=\frac{(x_2-x_1)(y_1+y_2)}{2},$$

sustituyendo las expresiones para estas áreas en la igualdad (6) obtenemos la fórmula

$$S=\frac{1}{2}\ |[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+$$
$$+(x_3-x_1)(y_3+y_1)]|$$

de la cual, efectuadas las transformaciones poco complicadas, se deduce la fórmula (5). Para toda otra situación del triángulo ABC la fórmula (5) se demuestra de un modo análogo. ■

○ **Ejemplo 7.** Se dan los puntos A (1; 1), B (6; 4) y C (8; 2). Hallar el área S del triángulo ABC.

Resolución. Según la fórmula (5)

$$S=\frac{1}{2}\ |[(6-1)(2-1)-(8-1)(4-1)]|=\frac{1}{2}\ |[-16]|=8.$$

Así pues, $S=-8$. ●

III. **División de un segmento en una razón dada.** Supongamos que sobre el plano se da un segmento arbitrario M_1M_2 y sea M todo punto de este segmento distinto del punto M_2 (fig. 14).

El número λ definido por la igualdad

$$\lambda=\frac{|\ M_1M\ |}{|\ MM_2\ |}$$

se llama *razón* en la que el punto M **divide** al segmento M_1M_2.

El problema de división del segmento en una razón dada consiste en que, dada la razón λ y dadas las coordenadas de los puntos M_1 y M_2, hallar las coordenadas del punto M.

El siguiente teorema permite resolver este problema.

Teorema 2.5. *Si el punto M $(x; y)$ divide al segmento M_1M_2 en una razón λ, las coordenadas de este punto se definen por las fórmulas*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{7}$$

donde $(x_1; y_1)$ son las coordenadas del punto M_1; $(x_2; y_2)$, las coordenadas del punto M_2.

□ **Demostración.** Supongamos que la recta M_1M_2 no es perpendicular al eje Ox. Bajemos las perpendiculares de los puntos con M_1,

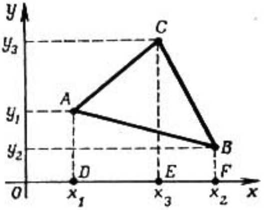

Fig. 13

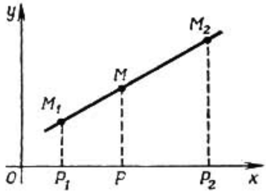

Fig. 14

M, M_2 al eje Ox y designemos los puntos de su intersección el eje Ox por P_1, P y P_2, respectivamente (fig. 14). En virtud del teorema de la geometría elemental sobre la proporcionalidad de los segmentos de rectas comprendidos entre las rectas paralelas tenemos

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=\lambda.$$

Pero, según el teorema 2.2,

$$|P_1P|=|x-x_1|, \quad |PP_2|=|x_2-x|.$$

Puesto que los números $(x-x_1)$ y (x_2-x) tienen el mismo signo (para $x_1<x_2$ son positivos y para $x_1>x_2$ son negativos), entonces $\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\frac{x-x_1}{x_2-x}$. Por eso $\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$, de donde $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$. Si la recta M_1M_2 es perpendicular al eje Ox, entonces $x_1=x_2=x$ y esta fórmula es, evidentemente, también justa. Hemos hallado la primera de las fórmulas (7). La segunda fórmula se determina de un modo análogo. ■

Corolario. *Si M_1 $(x_1; y_1)$ y M_2 $(x_2; y_2)$ son dos puntos arbitrarios y el punto M (x, y) es el punto medio del segmento M_1M_2, o sea,*

$|M_1M| = |MM_2|$ *entonces* $\lambda = 1$ *y según las fórmulas* (7) *obtenemos*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Así pues, *cada coordenada del punto medio del segmento es igual a la semisuma de las coordenadas respectivas.*

○ **Ejemplo 8.** Se dan los puntos M_1 (1; 1) y M_2 (7; 4). **Hallar** el punto M $(x; y)$ que es dos veces más próximo a M_1 que a M_2.

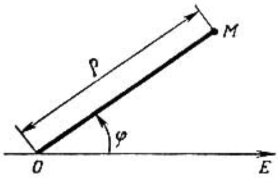

Fig. 15

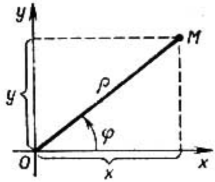

Fig. 16

Resolución. El punto buscado M divide al segmento M_1M_2 en la razón $\lambda = \frac{1}{2}$. Aplicando las fórmulas (7), encontramos las coordenadas de este punto $x = 3$, $y = 2$.

5. Coordenadas polares. Consideremos ahora el sistema polar de coordenadas. Este sistema se compone de cierto punto O, llamado *polo*, y de una semirrecta OE, llamada *eje polar*, que parte de este punto. Además, se asigna la unidad de escala para medir las longitudes de los segmentos.

Supongamos que se da un sistema polar de coordenadas y sea M un punto arbitrario del plano. Designemos con ρ la distancia entre el punto M y el punto O y con φ, el ángulo en el que es necesario girar, en sentido antihorario, el eje polar para que éste coincida con la semirrecta OM (fig. 15).

Se llaman *coordenadas polares* del punto M a los números ρ y φ. El número ρ se considera primera coordenada y se denomina *radio polar* y el número φ es la segunda coordenada y se denomina *ángulo polar*.

El punto M con las coordenadas polares ρ y φ se designa así: M $(\rho; \varphi)$.

Por lo general, se supone que las coordenadas polares ρ y φ varían en los límites siguientes: $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Sin embargo, en una serie de casos han de considerarse ángulos mayores que 2π, así como ángulos negativos, o sea, los ángulos que se miden a partir del eje polar en el sentido de las agujas del reloj.

Vamos a establecer la relación entre las coordenadas polares de un punto y sus coordenadas rectangulares. En este caso supondremos que el origen del sistema rectangular de coordenadas esté en el polo y el semieje positivo de abscisas coincida con el eje polar. Sea que el punto M tenga las coordenadas rectangulares x e y y las coordenadas polares ρ y φ (fig. 16). Es obvio que

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi. \tag{8}$$

Las fórmulas (8) expresan las coordenadas rectangulares a través de las polares y la expresión de las coordenadas polares a través de las rectangulares se desprende de estas fórmulas:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \tag{9}$$

La fórmula $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ determina dos valores del ángulo polar φ, ya que φ varía entre 0 y 2π. De estos dos valores del ángulo φ se elige el que permite satisfacer las igualdades (8).

○ **Ejemplo 9.** Se dan las coordenadas rectangulares de un punto (2; 2). Hallar sus coordenadas polares considerando que el polo coincide con el origen del sistema polar de coordenadas y el eje polar coincide con el semieje positivo de las abscisas.

Resolución. Según las fórmulas (9) tenemos $\rho = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Conforme a la segunda de estas igualdades, $\varphi = \pi/4$ ó $\varphi = 5\pi/4$. Pero puesto que $x = 2 > 0$ e $y = 2 > 0$, es necesario tomar $\varphi = \pi/4$. ●

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿A qué se llama segmento orientado y su valor?
2. ¿A qué se llama identidad básica? Demuéstrela.
3. ¿A qué se llama eje y recta de coordenadas?
4. ¿Por qué el conjunto de todos los números reales se denomina recta numérica?
5. Muéstrese el significado geométrico de la propiedad de continuidad de los números reales.
6. ¿A qué son iguales la magnitud del segmento orientado y la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica?
7. ¿Qué es el sistema rectangular de coordenadas?
8. Muéstrese cómo con ayuda del sistema rectangular de coordenadas se establece la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del plano y el conjunto de pares ordenados de números (x, y).
9. Cítense problemas elementales de la geometría analítica que se resuelven por el método de coordenadas.
10. ¿Qué es el sistema polar de coordenadas?
11. Muéstrese la relación existente entre el sistema rectangular y el sistema polar de coordenadas.

§ 2. Conjuntos de los puntos de un plano y sus ecuaciones

1. Definición de la ecuación de la línea. Consideremos la relación de la forma

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

que liga las variables x e y. La igualdad de la forma (1) vamos a llamarla *ecuación con dos variables* x, y si esta igualdad es válida no para todos los pares de números x e y. Ejemplos de las ecuaciones: $2x + 3y = 0$, $x^2 + y^2 - 25 = 0$, $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y - 1 = 0$.

Si (1) es válida para todos los pares de números x e y, ella se llama *identidad*. Los ejemplos de las identidades $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$, $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$.

Llamaremos *ecuación del conjunto de los puntos* $(x; y)$ a la ecuación (1) si a esta ecuación le satisfacen las coordenadas x e y de todo punto del conjunto y no le satisfacen las coordenadas de ningún punto no pertenecientes a este conjunto.

El concepto de ecuación de la línea es un concepto importante de la geometría analítica. Supongamos que en un plano se dan el sistema rectangular de coordenadas y cierta línea L (fig. 17).

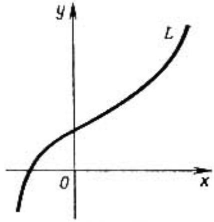

Fig. 17

Definición. *La ecuación* (1) *se llama ecuación de la línea* L *(en el sistema de coordenadas dado) si a ella le satisfacen las coordenadas* x *e* y *de todo punto que esté sobre la línea* L *y no le satisfacen las coordenadas de ningún punto que no esté sobre esta línea.*

De la definición se deduce que la línea L es el conjunto de todos los puntos del plano (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (1).

Si (1) es la ecuación de la línea L, diremos que la ecuación (1) *define* (*asigna*) la línea L.

La línea L puede definirse no sólo por la ecuación de la forma (1) sino también por la ecuación de la forma

$$F(\rho, \varphi) = 0$$

que contiene las coordenadas polares.

Consideremos algunos ejemplos elementales en que las líneas se definen por las ecuaciones.

○ 1) $x - y = 0$. Escribiendo esta ecuación en la forma $y = x$, concluimos que el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación representa las bisectrices de los cuadrantes I y III. Es la línea definida por la ecuación $x - y = 0$ (fig. 18).

2) $x^2 - y^2 = 0$. Representando esta ecuación en la forma $(x-y) \times \times (x+y) = 0$, concluimos que el conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación son dos rectas que contienen las bisectrices de los cuatro cuadrantes (fig. 19).

3) $x^2 + y^2 = 0$. El conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación se compone de un solo punto $(0; 0)$. En el caso dado la ecuación determina la línea degenerada.

4) $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Puesto que para cualesquiera x e y, los números x^2 e y^2 son no negativos, entonces $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Por lo

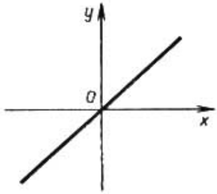

Fig. 18

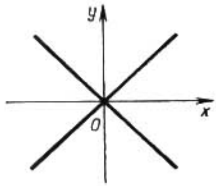

Fig. 19

tanto, no hay ningún punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación dada, o sea, ésta no define ninguna imagen geométrica en el plano. La ecuación en cuestión define un conjunto «vacío» de los puntos.

5) $\rho = a \cos \varphi$, donde a es un número positivo y las variables ρ y φ son las coordenadas polares. Designemos con M el punto con las coordenadas polares $(\rho; \varphi)$ y con A, el punto con las coordenadas polares $(a; 0)$ (fig. 20). Si $\rho = a \cos \varphi$, donde $0 < \varphi < \pi/2$, entonces el ángulo OMA es recto e inversamente. Por consiguiente, el conjunto de los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen la ecuación dada es la circunferencia de diámetro OA (fig. 20).

6) $\rho = a\varphi$, donde a es un número positivo, ρ y φ son las coordenadas polares. Designemos con M el punto con las coordenadas polares $(\rho; \varphi)$. Si $\varphi = 0$, entonces $\rho = 0$. Ahora bien, al aumentar el ángulo φ el punto M $(\rho; \varphi)$, que ha comenzado su movimiento en el polo, se mueve en torno a éste alejándose simultáneamente del polo. El conjunto de los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen la ecuación $\rho = a\varphi$ se llama *espiral de Arquímedes* (fig. 21). En este caso se supone que φ puede tomar todos los valores no negativos.

Si el punto M efectúa una revolución completa alrededor del polo, φ crece en 2π y ρ, en $2a\pi$, o sea, la espiral corta a toda recta que pasa por el polo en segmentos iguales (sin contar el segmento que comprende el polo) que tienen la longitud de $2a\pi$. ●

En los ejemplos considerados por la ecuación dada de la línea hemos investigado sus propiedades y de esta manera hemos establecido qué representa esta línea.

Vamos a considerar ahora el problema inverso: para un conjunto de puntos (definido por cualesquiera propiedades suyas), o sea, para la línea dada L hallar la ecuación de la misma.

○ **Ejemplo 1.** Deducir (en el sistema rectangular dado de coordenadas) la ecuación del conjunto de los puntos cada uno de los cuales

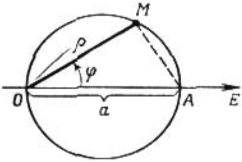

Fig. 20

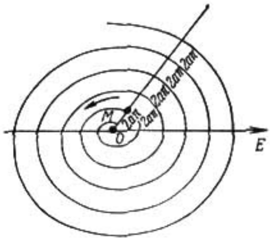

Fig. 21

está alejado del punto C $(\alpha; \beta)$ a la distancia R. En otras palabras, deducir la ecuación de la circunferencia de radio R que tiene por centro el punto C $(\alpha; \beta)$ (fig. 22).

Resolución. La distancia entre el punto arbitrario M $(x; y)$ y el punto C se calcula con ayuda de la fórmula $|MC| = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$. Si el punto M está sobre la circunferencia, entonces $|MC| = R$ o $MC^2 = R^2$, o sea, las coordenadas del punto M satisfacen la ecuación

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2. \tag{2}$$

En cambio, si el punto M $(x; y)$ no se encuentra sobre la circunferencia dada, entonces $MC^2 \neq R^2$, o sea, las coordenadas del punto M no satisfacen la ecuación (2). Ahora bien, la ecuación buscada de la circunferencia tiene la forma (2). Suponiendo en (2) $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, obtenemos la ecuación de la circunferencia de radio R que tiene por centro el origen de coordenadas:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad \bullet$$

2. Ejemplos referentes a la determinación de los conjuntos de los puntos. Consideremos algunos ejemplos más relativos a la determinación de los conjuntos de los puntos con ayuda de las ecuaciones e inecuaciones que ligan sus coordenadas.

● **Ejemplo 2.** Hallar un conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $|x| + |y| = 1$.

Resolución 1. Puesto que $|-m| = |m|$, entonces junto con el punto $(a; b)$ al conjunto buscado pertenecen también los puntos

$(-a; b)$, $(-a; -b)$, $(a; -b)$. Esto quiere decir que Ox y Oy son los ejes de simetría del conjunto buscado. Por eso hallamos su parte situada en el cuadrante I y obtenemos lo demás reflejando simétricamente esta parte respecto a los ejes de coordenadas.

En la cuadrante I $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, por eso $|x| = x$, $|y| = y$ y la ecuación dada toma la forma $x + y = 1$. Dibujando la parte de esta recta situada en el cuadrante I y reflejándola simétricamente

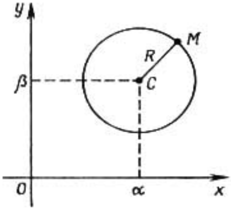

Fig. 22

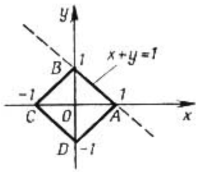

Fig. 23

respecto a los ejes Ox y Oy, obtenemos el conjunto buscado, o sea, el cuadrado representado en la fig. 23.

Resolución 2. Consideremos la ecuación $|x| + |y| = 1$ en los cuadrantes.

1) En el cuadrante I $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, por eso $|x| = x$ e $|y| = y$ y la ecuación toma la forma $x + y = 1$. El conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación es una recta. Por lo tanto, al conjunto buscado de los puntos del cuadrante I pertenece el trozo AB de esta recta (fig. 23).

2) En el cuadrante II $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, por eso $|x| = -x$, $|y| = y$ y la ecuación toma la forma $-x + y = 1$. Ahora bien, en los límites del cuadrante II al conjunto buscado de los puntos pertenece el trozo BC de la recta $-x + y = 1$.

3) En el cuadrante III $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, por eso $|x| = -x$, $|y| = -y$ y la ecuación toma la forma $-x - y = 1$. Por lo tanto, en el cuadrante III al conjunto buscado de los puntos pertenece el trozo CD de la recta $-x - y = 1$.

4) En el cuadrante IV $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, por eso $|x| = x$, $|y| = -y$ y la ecuación toma la forma $x - y = 1$. Por consiguiente, en el cuadrante IV el conjunto buscado de los puntos es el trozo DA de la recta $x - y = 1$, trozo que cierra el cuadrado $ABCD$. ●

Al resolver los ejemplos, es necesario prestar atención a la simetría del conjunto buscado de los puntos respecto a los ejes de coordenadas.

○ **Ejemplo 3.** Hallar el conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $|x| - |y| = 1$.

Resolución. Puesto que el conjunto buscado de los puntos es simétrico respecto a los ejes de coordenadas Oy y Ox, se puede utilizar cualquiera de las dos resoluciones dadas en el ejemplo 2. Para mayor brevedad, consideremos la primera resolución. En el cuadrante I la ecuación $|x| - |y| = 1$ toma la forma $x - y = 1$. Por consiguiente, en el cuadrante I al conjunto buscado de los puntos pertenece el trozo AB de la recta $x - y = 1$ y al reflejarlo simétricamente

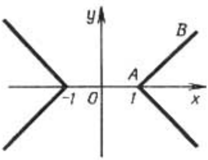

Fig. 24

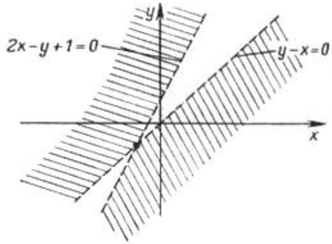

Fig. 25

respecto a los ejes de coordenadas obtenemos todo el conjunto buscado de los puntos, representado en la fig. 24.

(Haga por sí mismo la segunda resolución de este ejemplo).

Ejemplo 4. Hallar el conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas satisfacen la inecuación $(x - 2y)(2x - y + 1) > 0$.

Resolución. El producto de dos factores es positivo si, y sólo si, ellos tienen los signos iguales, o sea,

$$\begin{cases} x - y > 0, \\ 2x - y + 1 > 0 \end{cases} \tag{3}$$

o bien

$$\begin{cases} x - y < 0, \\ 2x - y + 1 < 0. \end{cases} \tag{4}$$

La inecuación de primer grado $Ax + By + C > 0$ da un semiplano limitado por la recta $Ax + By + C = 0$ (véase el § 3, subp. 4). Por eso la resolución de cada uno de los sistemas (3) y (4) es la intersección de los semiplanos respectivos; obtenemos la respuesta: un par de ángulos verticales representado en la fig. 25.

Ejemplo 5. Mostrar que la ecuación $x^2 + 2x + y^2 = 0$ define en el plano cierta circunferencia. Hallar su centro y su radio.

Resolución. Representemos la ecuación dada en la forma

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1 \text{ ó bien } (x + 1)^2 + y^2 = 1.$$

Ahora está claro que ésta es la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto C $(-1; 0)$ y por radio 1.

Ejemplo 6. Establecer qué conjunto de los puntos es definido por la inecuación $x^2 + y^2 \leqslant 4x + 4y$.

Resolución. Escribamos está inecuación en la forma

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leqslant 8 \text{ o bien}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 8.$$

Esta inecuación muestra que la distancia entre cada punto del conjunto buscado y el punto $(2; 2)$ es menor o igual a $\sqrt{8}$. Es evidente que los puntos que satisfacen esta ecuación llenan el círculo de radio $\sqrt{8}$ que tiene por centro el punto $(2; 2)$ Puesto que en la inecuación se admite la igualdad, la frontera del círculo también pertenece al conjunto buscado.

Ejemplo 7. En un plano se dan los puntos A y B. Hallar el conjunto de los puntos M que están dos veces más distantes de A que de B.

Resolución. Elijamos un sistema de coordenadas en el plano de un modo que el origen de coordenadas coincida con el punto A y el semieje positivo de abscisas pase de A a B. Tomemos por unidad de escala la longitud del segmento AB. Entonces el punto A tiene las coordenadas $(0; 0)$ y el punto B, las coordenadas $(1; 0)$. Designemos las coordenadas del punto M por $(x; y)$. Escribamos las condiciones $|AM| = 2|BM|$ en las coordenadas así:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Aquí hemos utilizado la fórmula (4) del § 1. Se ha obtenido la ecuación del conjunto buscado de los puntos. Para comprender qué conjunto se describe por esta ecuación la transformamos de modo que tome la forma conocida. Elevando al cuadrado ambos miembros, suprimiendo paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos la ecuación equivalente

$$3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0.$$

Esta igualdad puede ser escrita en la forma:

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 = \frac{4}{9}$$

o en la forma siguiente::

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

La última ecuación es la de la circunferencia que tiene por centro el punto $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ y por radio $\frac{2}{3}$. Ahora bien, el conjuntobuscado de los puntos es la circunferencia (o una parte suya).

Para la resolución no tiene importancia el que $|AM|$ sea precisamente dos veces mayor que $|BM|$, por eso de hecho está resuelto el problema general. Precisamente queda demostrado que el conjunto de los puntos M, que tiene constante la razón de las distancias a los puntos dados A y B

$$\frac{|AM|}{|BM|} = k$$

(k es el número positivo asignado, no igual a 1), es la circunferencia.

Hemos excluido el caso $k = 1$. En este caso el conjunto buscado es la recta (el punto M es equidistante de los puntos A y B). (Demuestre esto analíticamente.) ●

Los ejemplos considerados muestran cómo el método de coordenadas permite emplear los métodos algebraicos para resolver los problemas geométricos. Ahora consideremos el ejemplo cuando un problema algebraico puede resolverse geométricamente con ayuda del método de coordenadas.

○ **Ejemplo 8.** Determinar para qué valores del parámetro a el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

no tiene soluciones, tiene una única solución, tiene un conjunto infinito de soluciones. ¿Qué casos más son posibles?

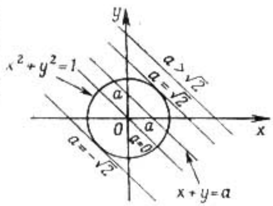

Fig. 26

Resolución. La primera ecuación del sistema es la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el origen de coordenadas y por radio 1. La segunda ecuación es la de la recta que intercepta en los ejes los segmentos iguales a a. Resolver el sistema quiere decir que es necesario hallar los puntos cuyas coordenadas satisfacen tanto la primera ecuación como la segunda, o sea, encontrar los puntos de intersección de la recta $x + y = a$ y de la circunferencia. De la fig. 26 se deduce que para $a > \sqrt{2}$ y para $a < -\sqrt{2}$ la recta no corta la circunferencia, o sea, el sistema no tiene soluciones; para $a = \pm\sqrt{2}$ obtenemos las tangentes a la circunferencia, o sea, el sistema tiene la única (doble) solución; para $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ la recta corta la circunferencia, o sea, el sistema tiene dos soluciones. Otros casos no pueden existir. ●

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿A qué se llama ecuación con dos variables e identidad? Cítense ejemplos
2. Dése la definición de la ecuación de la línea y de la misma línea. Cítense. ejemplos.
3. Dedúzcase la ecuación de la circunferencia que tiene por centro un punto dado.

§ 3. Rectas y ecuaciones lineales

1. Ecuación de la recta con un coeficiente angular. Supongamos que se da cierta recta, no perpendicular al eje Ox. Llamaremos *ángulo de inclinación* de la recta dada respecto al eje Ox, al ángulo α en el que es necesario girar el eje Ox para que el sentido positivo coincida con uno de los sentidos de la recta. El ángulo α puede tener diferentes valores que se distinguen entre sí en una magnitud igual a $\pm n\pi$, donde n es un número natural. Por lo general, por ángulo de inclinación se toma el valor mínimo no negativo del ángulo α en el que hay que hacer girar (en el sentido contrario a las agujas del reloj) al eje Ox para que su sentido positivo coincida con uno de los sentidos de la recta (fig 27). En este caso $0 \leqslant \alpha < \pi$.

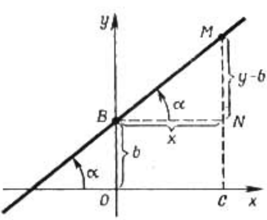

Fig. 27

La tangente del ángulo de inclinación de la recta respecto al eje Ox se denomina *coeficiente angular* (pendiente) de esta recta y se designa con letra k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

De la fórmula (1), en particular, se desprende que si $\alpha = 0$, o sea, la recta es paralela al eje Ox, entonces $k = 0$. Si $\alpha = \pi/2$, o sea, la recta es perpendicular al eje Ox, la expresión $k = \operatorname{tg} \alpha$ pierde el significado. En tal caso se dice que el coeficiente angular «se convierte en infinito».

Deduzcamos la ecuación de la recta dada si se conocen su coeficiente angular k y la magnitud b del segmento OB [1]) que la recta intercepta sobre el eje Oy (véase la fig. 27).

Designemos por M un punto arbitrario del plano con las coordenadas x e y. Si trazamos las rectas BN y NM paralelas a los ejes, se forma un triángulo rectángulo BNM. El punto M está sobre la recta si, y sólo si, los valores de NM y BN satisfacen la condición

$$\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Pero $NM = CM - CN = CM - OB = y - b$, $BN = x$. De donde, teniendo en cuenta la fórmula (1), obtenemos que el punto M $(x; y)$ está sobre la recta dada si, y sólo si, sus coordenadas satisfacen

---

[1]) Más exactamente, b es la magnitud del segmento orientado $\overline{OB}$ sobre el eje Oy. Sin embargo, para mayor brevedad diremos simplemente «magnitud del segmento OB».

la ecuación

$$\frac{y-b}{x}=k$$

que, después de las transformaciones, toma la forma

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

La ecuación (2) se llama *ecuación de la recta con coeficiente angular.* Si $k = 0$, la recta es paralela al eje Ox y su ecuación tiene la forma $y = b$.

Así pues, toda recta, no perpendicular al eje Ox, tiene la ecuación de la forma (2). Es obvio, que es justo también lo inverso: toda ecuación de la forma (2) define la recta que tiene el coeficiente angular k e intercepta sobre el eje Oy el segmento cuyo valor es b.

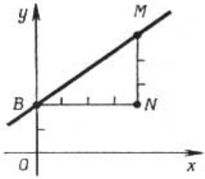

Fig. 28

○ **Ejemplo 1.** Escribir la ecuación de la recta que intercepta sobre el eje Oy el segmento $b = 3$ y forma con el eje Ox el ángulo $\alpha = \pi/6$.

Resolución. Encontramos el coeficiente angular: $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\pi/6) = 1/\sqrt{3}$. Sustituyendo k y b en la ecuación (2), obtenemos la ecuación buscada de la recta:

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3 \text{ o bien } \sqrt{3}y-x-3\sqrt{3}=0.$$

Ejemplo 2. Construir la recta definida por la ecuación

$$y=\frac{3}{4}x+2.$$

Resolución. Tomemos sobre el eje Oy un segmento OB cuyo valor es igual a 2 (fig. 28). Tracemos por el punto B paralelamente al eje Ox un segmento cuyo valor $BN = 4$ y por el punto N tracemos paralelamente al eje Oy un segmento cuyo valor $NM = 3$. Luego trazamos la línea BM. Ésta es precisamente la recta buscada. Ella tiene el coeficiente angular dado $k = \frac{3}{4}$ e intercepta sobre el eje Oy el segmento cuyo valor $b = 2$. ●

2. Ecuación de la recta que pasa por un punto dado con un coeficiente angular dado. En varios casos surge la necesidad de formar la ecuación de la recta conociendo sólo un punto suyo $M_1(x_1; y_1)$ y el coeficiente angular k. Escribamos la ecuación de la recta en la forma (2), donde b es por ahora un número desconocido. Puesto que la recta pasa por el punto $M_1(x_1; y_1)$, las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación (2): $y_1 = kx_1 + b$. Determinando b de esta igualdad y sustituyéndolo en la ecuación (2) obtenemos la ecuación buscada de la recta:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1). \tag{3}$$

Observación. Si la recta pasa por el punto $M_1\,(x_1;\,y_1)$ perpendicularmente al eje Ox, o sea, su coeficiente angular se convierte en infinito, la ecuación de la recta tiene la forma $x - x_1 = 0$. Formalmente esta ecuación puede ser obtenida de la ecuación (3) si ésta la dividimos por k y luego hacemos que k tienda hacia el infinito.

○ **Ejemplo 3.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por el punto $M\,(2;\,1)$ y forma con el eje Ox el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Resolución. Encontramos el coeficiente angular: $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Sustituyendo las coordenadas dadas y el valor del coeficiente angular k en la ecuación (3), obtenemos la ecuación de la recta buscada:

$$y - 1 = x - 2 \quad \text{o bien} \quad y - x + 1 = 0. \quad \bullet$$

3. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados. Supongamos que se dan dos puntos $M_1\,(x_1;\,y_1)$ y $M_2\,(x_2;\,y_2)$.

Tomando en (3) el punto $M\,(x;\,y)$ por $M_2\,(x_2;\,y_2)$, obtenemos

$$y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1).$$

Determinando k de la última igualdad y sustituyéndolo en la ecuación (3), obtenemos la ecuación buscada de la recta:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

Esta ecuación, si $y_1 \neq y_2$, se puede escribir en la forma

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Si $y_1 = y_2$, la ecuación buscada de la recta tiene la forma $y = y_1$. En este caso la recta es paralela al eje Ox. Si $x_1 = x_2$, la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2 es paralela al eje Oy y su ecuación tiene la forma $x = x_1$.

○ **Ejemplo 4.** Escríbase la ecuación de la recta que pasa por los puntos $M_1\,(3;\,1)$ y $M_2\,(5;\,4)$.

Resolución. Sustituyendo las coordenadas dadas de los puntos M_1 y M_2 en la relación (4), obtenemos la ecuación de la recta buscada:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} \quad \text{o bien} \quad 3x - 2y - 7 = 0. \quad \bullet$$

4. Ecuación general de la recta. Teorema 2.6. *En el sistema rectangular de coordenadas Oxy toda recta se define por una ecuación* *de primer grado*

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

y, viceversa, la ecuación (5), *al ser arbitrarios los coeficientes A, B, C (A y B no son iguales a cero simultáneamente), define cierta recta en el sistema rectangular de coordenadas Oxy.*

□ **Demostración.** Primero vamos a demostrar la primera afirmación. Si una recta no es perpendicular al eje Ox, ella, como hemos mostrado en el subp. 1, es definida por la ecuación de primer grado: $y = kx + b$, o sea, por la ecuación de la forma (5), donde $A = k$, $B = -1$ y $C = b$. Si una recta es perpendicular al eje Ox, todos los puntos de ella tienen las mismas abscisas que son iguales a la magnitud a del segmento interceptado por la recta sobre el eje Ox (fig. 29). La ecuación de esta recta tiene la forma $x = a$, o sea, también es una ecuación de primer grado de la forma (5), donde $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. De este modo la primera afirmación queda demostrada.

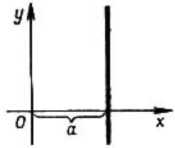

Fig. 29

Demostremos la afirmación inversa. Supongamos que se da la ecuación (5), con la particularidad de que al menos uno de los coeficientes A y B no es igual a 0.

Si $B \neq 0$, la (5) puede escribirse en la forma $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Suponiendo $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, obtenemos la ecuación $y = kx + b$, o sea, la ecuación de la forma (2) que define una recta.

Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$ y la (5) toma la forma $x = -\frac{C}{A}$. Designando $-\frac{C}{A}$ por a, obtenemos $x = a$, o sea, la ecuación de la recta que es perpendicular al eje Ox. ■

Las líneas definidas en el sistema rectangular de coordenadas por la ecuación de primer grado se llaman *líneas de primer orden.* De esta manera, cada recta es una línea de primer orden e inversamente, cada línea de primer orden es una recta.

La ecuación que tiene la forma $Ax + By + C = 0$ se denomina *ecuación general de la recta* (o bien *ecuación completa de la recta*). Para diferentes valores de A, B, C ella define las rectas de toda clase.

○ **Ejemplo 5.** Se da la ecuación general $12x - 5y - 65 = 0$. Escríbase la ecuación de la recta con un coeficiente angular.

Resolución. Resolviendo la ecuación de la recta respecto a y, obtenemos la ecuación de la recta con un coeficiente angular:

$$y = \frac{12}{5}x - 13.$$

Aquí $k = \frac{12}{5}$, $b = -13$. ●

5. Ecuación incompleta de primer grado. Ecuación «segmentaria» de la recta. Consideremos tres casos particulares cuando la ecuación $Ax + By + C = 0$ es incompleta, o sea, cuando cualquiera de los coeficientes es igual a cero.

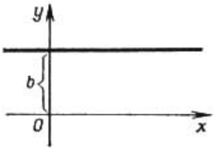

Fig. 30

1) $C = 0$; la ecuación tiene la forma $Ax + By = 0$ y define la recta que pasa por el origen de coordenadas.

2) $B = 0$ $(A \neq 0)$; la ecuación tiene la forma $Ax + C = 0$ y define una recta paralela al eje Oy. Como hemos mostrado en el teorema 2.6, esta ecuación se reduce a la forma $x = a$, donde $a = -\frac{C}{A}$, a es el valor del segmento que la recta intercepta sobre el eje Ox (véase la fig. 29). En particular, si $a = 0$, la recta coincide con el eje Oy. Ahora bien, la ecuación $x = 0$ define el eje de ordenadas.

3) $A = 0$ $(B \neq 0)$; la ecuación tiene la forma $By + C = 0$ y define una recta que es paralela al eje Ox. Este hecho se determina de un modo análogo al caso precedente. Si se pone $-\frac{C}{B} = b$, la ecuación toma la forma $y = b$, donde b es el valor del segmento que la recta intercepta sobre el eje Oy (fig. 30). En particular, si $b = 0$, la recta coincide con el eje Ox. Ahora bien, la ecuación $y = 0$ define el eje de abscisas.

Supongamos ahora que se da la ecuación $Ax + By + C = 0$ con la condición de que ninguno de los coeficientes A, B, C es igual a cero. Transformemos esta ecuación de un modo tal que tenga la forma

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Introduciendo las designaciones $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$, obtenemos

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{6}$$

La ecuación (6) se denomina *ecuación «segmentaria» de la recta.* Los números a y b son las magnitudes de los segmentos que la recta intercepta sobre los ejes de coordenadas. Esta forma de la ecuación es cómoda para la construcción geométrica de la recta.

○ **Ejemplo 6.** Una recta se define por la ecuación $3x - 5y + 15 = 0$. Escríbase para esta recta la ecuación «segmentaria» y constrúyase la recta.

Resolución. Para la recta dada la ecuación «segmentaria» tiene la forma

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

Para construir esta recta pongamos sobre los ejes de coordenadas Ox y Oy los segmentos cuyos valores son iguales a $a = -5$, $b = 3$ y tracemos la recta por los puntos $M_1(-5; 0)$ y $M_2(0; 3)$ (fig. 31). ●

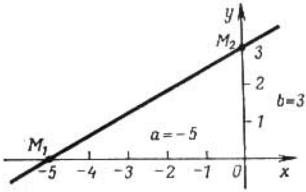

Fig. 31

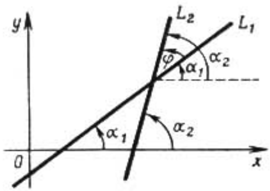

Fig. 32

6. Ángulo entre dos rectas. Consideremos dos rectas L_1 y L_2. Supongamos que la ecuación de L_1 tiene la forma $y = k_1x + b_1$, donde $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, y la ecuación L_2 tiene la forma $y = k_2x + b_2$, donde $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ (fig. 32). Sea φ el ángulo entre las rectas L_1 y L_2; $0 \leqslant \varphi < \pi$.

De las consideraciones geométricas determinamos la dependencia entre los ángulos α_1, α_2, φ: $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ o bien $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, de donde

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$$

o bien

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \tag{7}$$

La fórmula (7) define uno de los ángulos entre las rectas. El segundo ángulo es igual a $\pi - \varphi$.

○ **Ejemplo 7.** Dos rectas se definen por las ecuaciones $y = 2x + 3$ e $y = -3x + 2$. Hállese el ángulo entre estas rectas.

Resolución. Es obvio que $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, por eso según la fórmula (7) encontramos

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3-2}{1+(-3)\,2} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Ahora bien, uno de los ángulos entre las rectas dadas es igual a $\pi/4$ y el otro ángulo $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$. ●

7. Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas. Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, $\varphi = 0$ y $\operatorname{tg} \varphi = 0$. En este caso el numerador del segundo miembro de la fórmula (7) es igual a cero: $k_2 - k_1 = 0$, de donde

$$k_2 = k_1.$$

Así pues, la igualdad de los coeficientes angulares de dos rectas es la condición de su paralelismo.

Si dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, o sea, $\varphi = \pi/2$, de la (7) encontramos $\operatorname{ctg} \varphi = (1 + k_2k_1)/(k_2 - k_1)$. En este caso $\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$ y $1 + k_2k_1 = 0$, de donde

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

De esta manera, la condición de perpendicularidad de dos rectas consiste en que sus coeficientes angulares son recíprocos en valor y contrarios de signo.

○ **Ejemplo 8.** Mostrar que las rectas $4x - 6y + 7 = 0$ y $20x - 30y - 11 = 0$ son paralelas.

Resolución. Reduciendo la ecuación de cada recta a la forma de la ecuación con coeficiente angular (2), obtenemos

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6} \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{30}.$$

Los coeficientes angulares de estas rectas son iguales a $k_1 = k_2 = 2/3$. De donde concluimos que las rectas son paralelas.

Ejemplo 9. Mostrar que las rectas $3x - 5y + 7 = 0$ y $10x + 6y - 3 = 0$ son perpendiculares.

Resolución. Reducidas las ecuaciones a la forma de la ecuación con coeficiente angular (2), resulta

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \quad \text{e} \quad y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}.$$

Aquí $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$. Puesto que $k_2 = -1/k_1$, las rectas son perpendiculares. ●

8. Distancia entre el punto y la recta. Teorema 2.7. *La distancia d entre el punto dado $M(x_0; y_0)$ y la recta L definida por la ecuación $Ax + By + C = 0$ en el plano se determina por la fórmula*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{8}$$

La idea de demostrar esta fórmula consiste en lo siguiente. Consideremos sobre la recta L dos puntos arbitrarios E y F con las coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$. Calculemos la longitud del segmento EF y el área S_{MEF} del triángulo MEF (las fórmulas para determinar la longitud del segmento y el área del triángulo se conocen). Entonces la distancia del punto M a la recta L es la longitud de la altura h del triángulo MEF (fig. 33):

$$d = h = \frac{2S_{MEF}}{|EF|}.$$

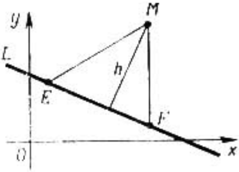

Fig. 33

□ **Demostración.** Escribamos la ecuación de la recta L con ayuda de las coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ de los puntos E y F según la fórmula (4)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

de donde

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1) = 0. \qquad (9)$$

El área S_{MEF} del triángulo MEF se escribe según la fórmula (5) del § 2:

$$2S_{MEF} = |[(x_2 - x_1)(y_0 - y_1) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1)]|.$$

Además,

$$|EF| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Entonces

$$d = \frac{|[(x_2 - x_1)(y_0 - y_1) - (x_0 - x_1)(y_2 - y_1)]|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \qquad (10)$$

Con ayuda de la ecuación (9) expresemos ahora los coeficientes A, B, C de la ecuación $Ax + By + C = 0$ de la recta L mediante las coordenadas de los puntos E e F. Para esto escribamos la ecuación (9) en la forma

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + [x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)] = 0,$$

de donde obtenemos que $A = y_1 - y_2$; $B = x_2 - x_1$; $C = x_1(y_2 - y_1) - y_1(x_2 - x_1)$. Entonces

$$2S_{MEF} = |Ax_0 + By_0 + C|; \quad |EF| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

y la fórmula (10) puede escribirse en la forma

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

que es lo que se quería demostrar. ■

○ **Ejemplo 10.** Supongamos que la recta L se define por la ecuación $3x - 4y + 10 = 0$ y se da el punto $M(4; 3)$. Hállese la distancia d del punto M a la recta L.

Resolución. Según la fórmula (8) tenemos

$$d=\frac{|3\cdot4-4\cdot3+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

De esta manera, la distancia buscada es igual a 2. ●

9. Posición recíproca de dos rectas en un plano. Supongamos que las rectas L_1 y L_2 se definen por las ecuaciones

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases} \tag{11}$$

Consideremos estas ecuaciones como sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas x e y. Resolviendo este sistema, encontramos

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\quad y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Sea $A_1B_2-A_2B_1\neq0$. Entonces las fórmulas halladas dan la solución del sistema (11). Esto quiere decir que las rectas L_1 y L_2 no son paralelas y se intersecan en un punto que tiene por coordenadas $(x;\ y)$.

Sea ahora $A_1B_2-A_2B_1=0$. Son posibles dos casos: 1) $A_2C_1-A_1C_2=0$ y $B_1C_2-B_2C_1=0$; 2) $A_2C_1-A_1C_2\neq0$ $(B_1C_2-B_2C_1\neq0)$.

En el primer caso tenemos $A_2=\mu A_1$, $B_2=\mu B_1$, $C_2=\mu C_1$ o bien

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\mu,$$

donde $\mu\neq0$ es cierto número. Esto significa que los coeficientes de las ecuaciones son proporcionales, de donde se deduce que la segunda ecuación se obtiene de la primera multiplicándola por el número μ. En este caso las rectas L_1 y L_2 coinciden, o sea, las ecuaciones definen la misma recta. Es evidente que el sistema (11) tiene un conjunto infinito de soluciones.

En el segundo caso si, por ejemplo, $A_2C_1-A_1C_2\neq0$, entonces, admitiendo que el sistema tiene la solución $(x_0;\ y_0)$, obtenemos una contradicción. En efecto, sustituyendo en las ecuaciones en vez de x e y los valores x_0 e y_0, multiplicando la primera ecuación por A_2, la segunda por A_1 y sustrayendo de la primera ecuación la segunda, resulta $A_2C_1-A_1C_2=0$ lo que contradice nuestra hipótesis. Ahora bien, el sistema (11) no tiene solución. En este caso las rectas L_1 y L_2 no tienen puntos de intersección, o sea, son paralelas.

Así pues, dos rectas de un plano se intersecan en un punto, o coinciden, o bien son paralelas.

Ejercicio. Hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x-3y-1=0$ y $3x-y-2=0$ perpendicularmente a la recta $y=x+1$. (*Resp.* $7x+7y-6=0$.)

10. Ejemplos de solución de los problemas geométricos por el método de coordenadas. Consideremos los problemas geométricos que son cómodos de resolver con ayuda del método de coordenadas y que son difíciles de resolver por métodos geométricos puros.

○ **Ejemplo 11.** Hállese el conjunto de los puntos de un plano, cuya suma de los cuadrados de las distancias a dos vértices opuestos

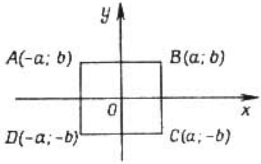

Fig. 34

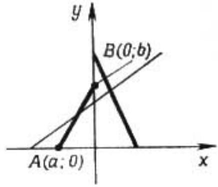

Fig. 35

del rectángulo dado es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a otros dos vértices suyos.

Resolución. Introduzcamos en el plano el sistema de coordenadas de modo que su origen sea el centro del rectángulo dado (fig. 34). Sea $M(x;\ y)$ un punto arbitrario del conjunto buscado. Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos (4) del § 1, tenemos

$$|MA|^2+|MC|^2=(x+a)^2+(y-b)^2+(x-a)^2+(y+b)^2,$$
$$|MB|^2+|MD|^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(x+a)^2+(y+b)^2.$$

Igualando los segundos miembros de las igualdades halladas, obtenemos la identidad $0\equiv 0$. Por consiguiente, el buscado conjunto de los puntos es todo el plano.

Ejemplo 12. Determínese qué línea se describe por el punto medio del segmento entre dos peatones que caminan por dos vías recíprocamente perpendiculares con igual velocidad.

Resolución. Supongamos que el primer peatón camina a lo largo del eje Ox a partir del punto $A\ (a;\ 0)$ con la velocidad v y el segundo, a lo largo del eje Oy a partir del punto $B\ (0;\ b)$ con la misma velocidad (fig. 35). Entonces en el instante de tiempo t el primer peatón está en el punto $(a+vt;\ 0)$ y el segundo, en el punto $(0;\ b+vt)$. Designemos con $(x;\ y)$ las coordenadas del punto medio del segmento entre los peatones. En virtud del corolario del teorema 2.5 resulta

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+vt}{2}, \\ y=\dfrac{b+vt}{2}. \end{cases}$$

Eliminemos de estas igualdades t:

$$t=\frac{2x-a}{v}, \quad t=\frac{2y-b}{v},$$

de donde

$$\frac{2x-a}{v}=\frac{2y-b}{v} \quad \text{o bien} \quad y=x+\frac{b-a}{2}.$$

Ahora bien, la línea buscada es la recta que es paralela a la bisectriz del ángulo comprendido entre las direcciones del movimiento de los peatones.

Observación. Nótese que si las velocidades de los peatones no son iguales, entonces, análogamente, la ecuación obtenida de la línea buscada tendrá la forma

$$y=\frac{v_2}{v_1}x+\frac{bv_1-av_2}{2},$$

o sea, es también una recta, pero el ángulo de su inclinación al eje Ox es ya otro (aquí v_1 y v_2 son las velocidades del movimiento de los peatones).

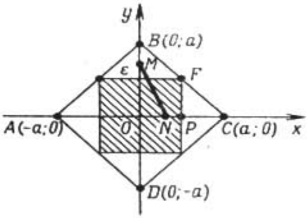

Fig. 36

Ejemplo 13. Hállese el conjunto de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos están en distintas diagonales del cuadrado.

Resolución. Elijamos el sistema de coordenadas como hemos mostrado en la fig. 36, donde $ABCD$ es el cuadrado dado. Sean los puntos M $(0;\ y)$ y N $(x;\ 0)$ puntos arbitrarios situados sobre los segmentos OB y OC (sobre las mitades de las diagonales del cuadrado), respectivamente. Entonces

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant a,\\ 0\leqslant y\leqslant a,\end{cases}$$

y el segmento MN está en el cuadrante I y los puntos medios de los segmentos MN tienen las coordenadas $(x/2;\ y/2)$, donde

$$\begin{cases}0\leqslant x/2\leqslant a/2,\\ 0\leqslant y/2\leqslant a/2,\end{cases}$$

o sea, llenan el cuadrado $OEFP$. Haciendo uso de la simetría del cuadrado dado, obtenemos que el conjunto buscado es un cuadrado que tiene por vértices los puntos medios de sus lados. ●

Con ayuda del método de coordenadas se resuelven fácilmente también muchos problemas del curso escolar de matemáticas. Citemos un ejemplo.

○ **Ejemplo 14.** Se dan dos circunferencias que tienen una tangencia exterior. Determínese qué conjunto de los puntos forman los puntos, de los cuales pueden trazarse a estas circunferencias las tangentes de igual longitud.

Resolución geométrica. Los puntos pertenecientes a la recta, que es perpendicular a la línea de los centros y pasa por el punto común de estas circunferencias, poseen la propiedad indicada. Efectivamente, según la propiedad de los segmentos de tangentes trazadas de un punto a la circunferencia (fig. 37).

$$|MA| = |MC| \quad \text{y} \quad |MC| = |MB|,$$

de donde $|MA| = |MB|$.

Vamos a demostrar que los puntos no pertenecientes a esta recta no poseen la propiedad en cuestión. Para esto tomemos un punto

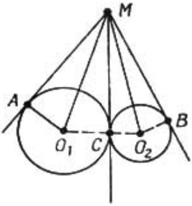

Fig. 37

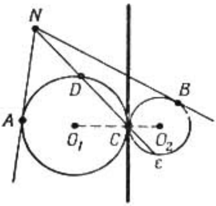

Fig. 38

arbitrario N del plano que no esté sobre la perpendicular a la línea de los centros O_1O_2, perpendicular trazada a través de C, o sea, por el punto común de dos circunferencias (fig. 38). Tracemos la recta NC. Según el teorema sobre el producto de la longitud de la secante por su parte exterior [1]) resulta

$$|NA|^2 = |NC|\,|ND| \quad \text{y} \quad |NB|^2 = |NC|\,|NE|,$$

o sea, $|NA| \neq |NB|$.

Así pues, el conjunto de los puntos buscado, de los cuales se puede trazar a estas circunferencias las tangentes de igual longitud, es una recta perpendicular a la línea de los centros que pasa por el punto común de estas circunferencias.

Surge la pregunta: ¿cuál es el conjunto de los puntos de los que se puede trazar a dos circunferencias las tangentes de igual longitud (para las circunferencias situadas arbitrariamente)?

---

[1]) Si de un punto que está fuera de la circunferencia están trazadas a ésta una tangente y una secante, el cuadrado de la longitud de la tangente es igual al producto de la longitud de toda la secante por la longitud de su parte exterior.

Si se toman dos circunferencias que se intersecan en los puntos C y D (fig. 39), es fácil mostrar que las longitudes de las tangentes trazadas del punto M de la recta CD son iguales (se trata de aquellos puntos de esta recta, de los cuales pueden trazarse tangentes). En efecto, según el teorema sobre el producto de la longitud del segmento de la secante por su parte exterior

$$|AM|^2 = |MD|\,|MC| \quad \text{y} \quad |MB|^2 = |MD|\,|MC|.$$

Por lo tanto, $|AM| = |MB|$.

Ahora es necesario demostrar que fuera de la recta CD no hay puntos que posean la propiedad mencionada. Sin embargo, resulta que es difícil hacer esto empleando métodos geométricos puros.

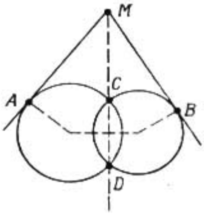

Fig. 39

En cambio, si se considera este problema para el caso de dos circunferencias que no se intersecan, resulta que en la resolución es difícil apoyarse en los teoremas citados sobre las propiedades de la tangente y hace falta buscar un nuevo método de solución. Además, es necesario tener en cuenta que el teorema sobre el cuadrado de la longitud no entra en el curso escolar obligatorio.

De esta manera, la resolución geométrica pura del problema es bastante complicada. Apliquemos el método de coordenadas. Así pues, resolvamos el problema siguiente.

Ejemplo 15 (generalización del ejemplo 14). Se dan dos circunferencias. Aclarar qué conjunto de puntos forman los puntos, de los cuales se puede trazar a estas circunferencias tangentes de igual longitud.

Resolución. Si MN y MP son los segmentos de las tangentes a las circunferencias con los centros O_1 y O_2 (fig. 40), entonces hace falta hallar el conjunto de puntos M tales que $|MN| = |MP|$. Notando que

$$|MN|^2 = |MP|^2; \quad |MN|^2 = |MO_1|^2 - |O_1N|^2;$$
$$|MP|^2 = |MO_2|^2 - |O_2P|^2,$$

escribamos los datos del problema así:

$$|MO_1|^2 - |O_1N|^2 = |MO_2|^2 - |O_2P|^2$$

o bien

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = |O_1N|^2 - |O_2P|^2$$

y puesto que

$$|O_1N|^2 - |O_2P|^2 = R^2 - r^2 = C = \text{const},$$

el problema puede ser formulado de otro modo así.

Ejemplo 16. Hállese el conjunto de los puntos para los cuales la diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos dados O_1 y O_2 es constante.

Resolución con ayuda del método de coordenadas. Orientemos el eje de abscisas por la recta O_1O_2 y elijamos el origen de coordenadas en el punto medio del segmento O_1O_2 (fig. 41).

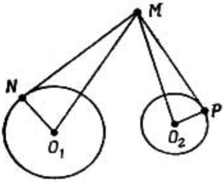

Fig. 40

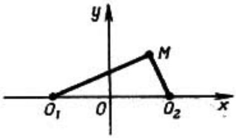

Fig. 41

Sea $|O_1O_2| = d$; entonces $\left(-\frac{d}{2}; 0\right)$ son las coordenadas del punto O_1 y $\left(\frac{d}{2}; 0\right)$, las coordenadas del punto O_2. Tomemos un punto arbitrario $M(x; y)$ del plano. Según la fórmula de la distancia entre dos puntos (4) del § 1 resulta

$$|MO_1|^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2; \quad |MO_2|^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2;$$

de donde

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - y^2 = 2xd.$$

Puesto que $|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = C$, para el conjunto de los puntos buscado obtenemos la ecuación de primer grado:

$$2xd = C.$$

Si $d \neq 0$, los puntos buscados pertenecen a la recta $x = \frac{C}{2d}$ paralela al eje de ordenadas o sea, pertenecen a la recta perpendicular a la recta O_1O_2.

Inversamente: tomando los puntos pertenecientes a la recta $x = \frac{C}{2d}$ y cumpliendo todas las transformaciones en el orden inverso, obtenemos que para todo punto de esta recta

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = C.$$

Así pues, hemos obtenido el resultado siguiente. El conjunto de los puntos que tienen constante la diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos dados, es la recta perpendicular a la recta que une los puntos dados.

Ahora es fácil responder a la pregunta del ejemplo 15 sobre el conjunto de los puntos, de los cuales se pueden trazar a dos circunferencias las tangentes de igual longitud para todos los casos cuando las circunferencias están situadas recíprocamente.

Resolución. Utilicemos el resultado del ejemplo 16 en el cual hemos demostrado que el conjunto buscado es una recta (posiblemente, sin cierto intervalo). Por eso basta aclarar dónde pasa esta

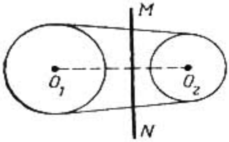

Fig. 42

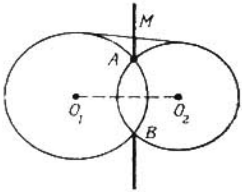

Fig. 43

recta, por ejemplo hallar dos puntos suyos. Además, hagamos uso del hecho de que los puntos comunes de dos circunferencias satisfacen los datos del problema: de estos puntos se pueden trazar las tangentes cuya longitud es igual a cero. Consideremos los posibles casos de posición recíproca de las circunferencias dadas.

1) Supongamos que las circunferencias dadas están situadas una fuera de la otra (fig. 42). M y N (los puntos medios de sus tangentes exteriores comunes) satisfacen los datos del problema, por eso la recta MN es la buscada. Como corolario (véase el ejemplo 16) de aquí obtenemos que la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes exteriores comunes a dos circunferencias, es perpendicular a la línea de los centros de estas circunferencias.

2) Supongamos que las circunferencias dadas son tangentes exteriormente (fig. 43). Razonando de un modo análogo, nótese que el punto medio M de la tangente exterior común y el punto N de tangencia de las circunferencias satisfacen los datos del problema (en vez del punto N se puede tomar el punto medio de la segunda tangente exterior común, que en la fig. 43 está representada por la línea de trazos), por eso la recta MN es el conjunto buscado. (Simultáneamente hemos obtenido que la recta que pasa por el punto medio de la tangente exterior común de dos circunferencias perpendicularmente a su línea de los centros, pasa también por el punto común de estas circunferencias.)

3) Si las circunferencias se intersecan (fig. 44), entonces, puesto que los puntos M y A satisfacen las condiciones del problema, la recta buscada es MA sin el intervalo AB (de los puntos de este intervalo no se pueden trazar las tangentes a las circunferencias). Además, de este modo queda demostrado que los puntos M, A y B se encuentran sobre la misma recta, que es perpendicular a la línea de los centros.

4) Supongamos ahora que las circunferencias son tangentes interiormente (fig. 45). La recta buscada es la tangente común ya que ésta pasa por el punto N, que satisface los datos del problema, y es

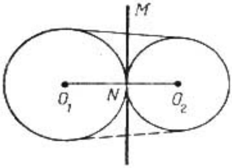

Fig. 44

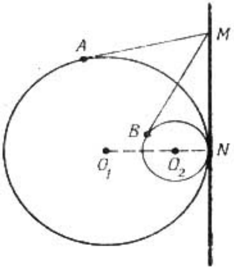

Fig. 45

perpendicular a la línea de los centros (fig. 45). Esto es fácil demostrar también de un modo distinto: para todo punto de esta recta $|MA| = |MN| = |MB|$, donde A y B son los puntos de tangencia.

5) Ahora consideremos el caso cuando una circunferencia está dentro de la otra y sus centros O_1 y O_2 no coinciden (fig. 46).

Reduzcamos este caso al caso 3). Para esto tracemos la circunferencia con el centro O_3, no perteneciente a la recta O_1O_2 y que corta a las dos circunferencias dadas. Consideremos las rectas sobre las cuales están las cuerdas comunes de las circunferencias que tienen por centros O_1 y O_3, O_2 y O_3. Sea M el punto de intersección de estas rectas. Según lo demostrado en el caso 3)

$$|MO_1|^2 - |MO_3|^2 = R_1^2 - R_3^2; \; |MO_2|^2 - |MO_3|^2 = R_2^2 - R_3^2,$$

de donde

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

o sea, el punto M pertenece al conjunto buscado, por eso todo el conjunto buscado es una recta que pasa por el punto M perpendicularmente a la recta O_1O_2.

6) Si las circunferencias son concéntricas, el conjunto buscado es vacío. En efecto, el conjunto de los puntos de los cuales se puede trazar a la primera circunferencia tangentes de longitud dada, es una *circunferencia concéntrica a la dada*; para la *segunda circunferencia* es también una circunferencia concéntrica, pero de otro radio (fig. 47). Estos conjuntos no tienen puntos comunes.

Observación. La recta $x = (R^2 - r^2)/(2d)$ se llama *eje radical* de dos circunferencias dadas. De cada punto suyo que sea exterior

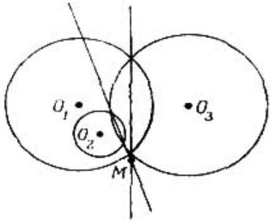

Fig. 46

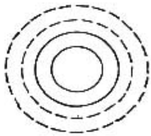

Fig. 47

respecto a dos circunferencias dadas, se puede trazar a éstas tangentes iguales. ●

Ahora se puede resolver sin dificultad el siguiente problema (cuya resolución puramente geométrica también es bastante difícil)

○ **Ejemplo 17.** *Se dan tres circunferencias cada una de las cuales corta a otras dos. Demuéstrese que las rectas a las cuales pertenecen sus cuerdas comunes se intersecan en el mismo punto.*

Resolución. El problema se resuelve de un modo análogo al caso 5) del ejemplo 16 (fig. 48). El punto M de intersección de las cuerdas comunes de las circunferencias, que tienen por centros O_1 y O_2 y O_2 y O_3, posee una propiedad que consiste en que la diferencia de los cuadrados de las distancias comprendidas entre este punto y los puntos O_1 y O_2 (O_2 y O_3) es constante, a saber

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = R_1^2 - R_2^2,$$
$$|MO_2|^2 - |MO_3|^2 = R_2^2 - R_3^2.$$

Sumando término a término estas igualdades, resulta

$$|MO_1|^2 - |MO_3|^2 = R_1^2 - R_3^2,$$

o sea, el punto M debe encontrarse sobre la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias con los centros O_1 y O_3 y pertenecer a la cuerda común de estas circunferencias. Por consiguiente, el punto M está en la intersección de tres rectas a las cuales pertenecen sus cuerdas comunes.

Ejemplo 18. Hállese el conjunto de los puntos la suma de los cuadrados de las distancias de los cuales a los vértices A y B del triángulo ABC es igual al cuadrado de la distancia a su tercer vértice: el punto C.

Resolución. Introduzcamos el sistema de coordenadas según se muestra en la fig. 49; el vértice A tiene las coordenadas $(-1; 0)$ y el vértice B, las coordenadas $(1; 0)$. Supongamos que el vértice C tiene las coordenadas $(a; b)$ y sea $M(x; y)$ el punto arbitrario del

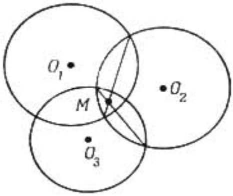

Fig. 48

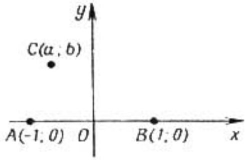

Fig. 49

conjunto buscado. Entonces los datos del problema pueden escribirse así:

$$|MA|^2 + |MB|^2 = |MC|^2.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, obtenemos

$$[(x+1)^2 + y^2] + [(x-1)^2 + y^2] = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Suprimiendo paréntesis y reduciendo los términos semejantes, se puede transformar la última ecuación así:

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = 2(a^2 + b^2 - 1). \qquad (12)$$

Ahora se ve que si $a^2 + b^2 - 1 > 0$, el conjunto buscado es la circunferencia que tiene por centro el punto $D(-a; -b)$ y por radio $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2}$; si $a^2 + b^2 = 1$, el conjunto buscado se compone de un solo punto $D(-a; -b)$; si $a^2 + b^2 - 1 < 0$, el conjunto buscado es vacío.

Nótese que el punto D es simétrico al vértice C respecto al origen de coordenadas O (fig. 50). De aquí se deduce que el centro D de la circunferencia hallada es el vértice del paralelogramo $ACBD$, opuesto al vértice C.

Aclaremos ahora el significado de las condiciones, para las cuales están obtenidas distintas respuestas a la pregunta del problema. Es sabido que $a^2 + b^2 = 1$ es la ecuación de la circunferencia de radio unitario con el centro en el origen de coordenadas, y las desigualdades $a^2 + b^2 > 1$ y $a^2 + b^2 < 1$ representan respectivamente, la región exterior y el interior del círculo unitario acotado por esta circunferencia.

De aquí se desprende que el conjunto buscado de los puntos es la circunferencia, el punto o el conjunto vacío y esto depende si está o no el vértice C fuera del círculo unitario con el centro en el origen de coordenadas, en la circunferencia que lo limita (desde luego, sin los puntos A y B) o dentro de este círculo, respectivamente.

Si el vértice C está situado en la circunferencia indicada, el ángulo $ACB = 90°$, como ángulo inscrito que se apoya en el diámetro. Por eso la investigación de las condiciones para las cuales

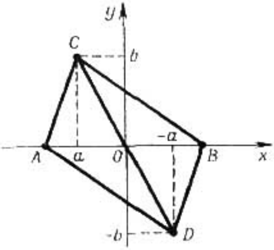

Fig. 50

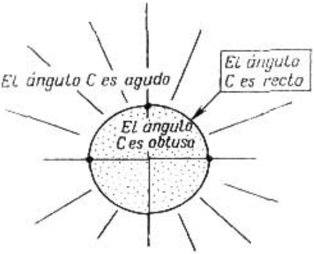

Fig. 51

se obtienen distintas respuestas consiste en aclarar si es agudo, recto u obtuso el ángulo C en el triángulo ABC (fig. 51).

Por último, nótese que

$$2(a^2 + b^2 - 1) = [(a-1)^2 + b^2] + [(a+1)^2 + b^2] - 4$$

(para cerciorarse de esto es necesario suprimir los paréntesis en el segundo miembro de la última igualdad y reducir los términos semejantes). Pero

$$(a-1)^2 + b^2 = |BC|^2; \quad (a+1)^2 + b^2 = |AC|^2;$$
$$4 = |AB|^2,$$

por eso el radio de la circunferencia (12) es igual a

$$\sqrt{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}.$$

Ahora bien, si el ángulo del vértice C es agudo, el conjunto buscado representa la circunferencia de radio $\sqrt{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}$ que tiene por centro el vértice D del paralelogramo $ACBD$;

si el ángulo del vértice C es recto, el conjunto buscado es el vértice D del paralelogramo $ACBD$;

si el ángulo del vértice C es obtuso, el conjunto buscado es vacío

Observación. De paso queda determinado que si a, b, c son las longitudes de los lados del triángulo, entonces:

la condición $a^2 + b^2 > c^2$ significa que el ángulo opuesto al lado c es agudo;

la condición $a^2 + b^2 = c^2$ significa que el ángulo opuesto al lado c es recto;

la condición $a^2 + b^2 < c^2$ significa que el ángulo opuesto al lado c es obtuso. ●

Los últimos problemas son los casos particulares del siguiente teorema general que puede ser demostrado también con ayuda del método de coordenadas.

Teorema de los cuadrados de las distancias. *Si se dan los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en un plano y los números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu$, entonces el conjunto de los puntos M para los cuales se cumple la condición*

$$\lambda_1 |MA_1|^2 + \lambda_2 |MA_2|^2 + \ldots + \lambda_n |MA_n|^2 = \mu,$$

es la circunferencia, o la recta, o un solo punto, o todo el plano, o bien el conjunto vacío. [1])

Consideremos cómo con ayuda del método de coordenadas se puede resolver el siguiente problema presentado en los exámenes de ingreso de 1970 (Universidad de Moscú, facultad de química).

○ **Ejemplo 19.** En el triángulo ABC se conoce que el ángulo $ACB = 60°$ y el radio de la circunferencia circunscrita es igual a $2\sqrt{3}$. En el lado AB se toma un punto D de modo que $|AD| = 2|DB|$ y además, $|CD| = 2\sqrt{2}$. Hállese el área S_{ABC}.

Resolución. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita. Introduzcamos el sistema de coordenadas que tiene por origen el punto E (punto medio del segmento AB) y orientemos los ejes de coordenadas según se muestra en la fig. 52. Calculemos las longitudes de los segmentos siguientes:

$$|AB| = R\sqrt{3} = 6; \quad |DE| = \frac{1}{6}|AB| = 1; \quad |OE| = \frac{R}{2} = \sqrt{3}.$$

En el sistema de coordenadas elegido el punto C tiene las coordenadas (x, y) y las coordenadas de los puntos O y D son iguales a $(0; \sqrt{3})$ y $(1; 0)$, respectivamente.

Para calcular el área del triángulo ABC es necesario hallar su altura, o sea, la ordenada del punto C. Puesto que el punto C pertenece a la circunferencia circunscrita, sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2.$$

---

[1]) **Véase el** § 2 del libro: *N. B. Vasíliev, V. L. Gutenmajer.* Rectas y **curvas.** M., 1978, ***en ruso.***

Para encontrar la ordenada del punto C planteemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+(y-\sqrt{3})^2=12, \\ (x-1)^2+y^2=8. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos $y=\sqrt{2}$ (el valor $y=-\sqrt{2}$ que también satisface el sistema no conviene, ya que en este caso $\widehat{AC_1B}=120°$, lo que no corresponde a los datos del problema).

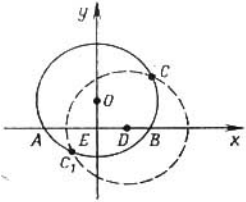

Fig. 52

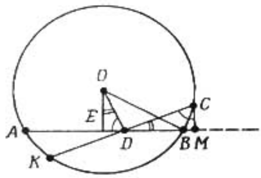

Fig. 53

Así pues, la altura del triángulo ABC es igual a $\sqrt{2}$, por lo tanto,

$$S_{ABC}=6\sqrt{2}/2=3\sqrt{2}.$$

Demos ahora, para comparar, la resolución geométrica de este problema (fig. 53). Al igual que en la primera resolución, primero encontramos que $|AB|=6$; entonces $|AD|=4$, $|BD|=2$ (E es el punto medio de la cuerda AB). Según el teorema de las cuerdas que se intersecan dentro del círculo

$$|AD|\,|DB|=|DC|\,|KD|,$$

de donde

$$|KD|=\frac{|AD|\,|DB|}{|DC|}=2\sqrt{2}=|CD|,$$

o sea, D es el punto medio de la cuerda KC. De aquí obtenemos inmediatamente que

$$[OD]\perp[KC]\ ^{1)}. \qquad (13)$$

Sea CM la altura del triángulo ABC, entonces $\widehat{CDM}=\widehat{EOD}$ (de (13) y del hecho de que $[OE]\perp[AB]$ resulta que los ángulos en cuestión tienen lados perpendiculares, respectivamente). Pero es fácil hallar

[1] La designación $[OD]$ simboliza el segmento de la recta con los extremos O y D.

el ángulo EOD:

$$\widehat{EOB}=60^\circ;\quad \frac{|ED|}{|BD|}=\frac{1}{2}=\frac{|OE|}{|OB|},$$

por eso OD es la bisectriz del ángulo EOB, por lo tanto,

$$\widehat{EOD}=30^\circ=\widehat{CDM},$$

de donde se deduce que $|CM|=(1/2)\,|CD|=\sqrt{2}$ y el problema queda resuelto. ●

Los ejemplos citados muestran que la aplicación del método de coordenadas resulta muy útil para resolver los problemas geométricos.

Sus ventajas son evidentes sobre todo en los casos cuando la resolución del problema por métodos puramente geométricos resulta complicada o necesita aplicar teoremas poco conocidos; el método de coordenadas permite obtener la solución del problema en la forma general, mientras que la resolución geométrica requiere considerar casos particulares por separado (así, en el ejemplo 19 resulta muy difícil la solución puramente geométrica para otros datos numéricos).

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. ¿Qué es tangente del ángulo de inclinación de una recta al eje Ox?
2. Dedúzcase la ecuación de la recta con coeficiente angular.
3. Dedúzcase la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.
4. ¿Qué es la ecuación «segmentaria» de la recta?
5. Enúnciese las condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos rectas.
6. ¿Cómo se determina la distancia de un punto a la recta?
7. Demuéstrese que la ecuación de la recta siempre se expresa por la ecuación de primer grado e, inversamente, toda ecuación de primer grado es la ecuación de la recta.
8. ¿En qué consiste el significado geométrico de los parámetros k y b en la ecuación de la recta con coeficiente angular?
9. Investíguese la ecuación general de la recta $Ax+By+C=0$ para $A=0$, para $B=0$ y para $C=0$.
10. ¿Cómo se expresan las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes Ox y Oy, así como las ecuaciones de los mismos ejes de coordenadas?
11. ¿Cómo reducir la ecuación de la recta con coeficiente angular a la ecuación general de la recta?
12. ¿Cómo se puede hallar el punto de intersección de dos rectas?

§ 4. Líneas de segundo orden

Consideremos tres tipos de líneas: la elipse, la hipérbola y la parábola, cuyas ecuaciones en el sistema rectangular de coordenadas son las ecuaciones de segundo grado. Estas líneas se llaman *líneas de segundo orden*.

1. La elipse.

Definición. *Se llama elipse al conjunto de todos los puntos de un plano para los cuales la suma de las distancias a dos puntos dados, llamados focos, es un valor constante, mayor que la distancia entre los focos.*

Para deducir la ecuación de la elipse introduzcamos en el plano el sistema rectangular de coordenadas, de modo que los focos de la elipse estén sobre el eje de abscisas y el origen de coordenadas divida en dos partes iguales la distancia entre los focos. Deduzcamos la ecuación de la elipse en el sistema de coordenadas elegido.

Designemos los focos de la elipse por F_1 y F_2 (fig. 54). Sea M un punto arbitrario de la elipse. Designemos por $2c$ la distancia $|F_1F_2|$ entre los focos y por $2a$ la suma de las distancias que median del punto M a los focos. Puesto que, por definición,

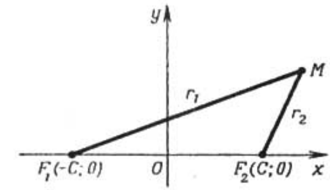

Fig. 54

$$|F_1M| + |F_2M| > |F_1F_2|,$$

$2a > 2c$ o bien $a > c$.

Designemos, luego, por r_1 y r_2 la distancia que media del punto M a los focos ($r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$). Los números r_1 y r_2 se denominan *radios focales* del punto M. De la definición se desprende que el punto $M\ (x;\ y)$ se encuentra sobre la elipse dada si, y sólo si,

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1}$$

Para obtener la ecuación buscada de la elipse es necesario reemplazar en la igualdad (1) las variables r_1 y r_2 por sus expresiones con ayuda de las coordenadas x e y. Puesto que F_1 y F_2 están situados en el eje Ox simétricamente respecto al origen de coordenadas, ellos tienen las coordenadas $(-c;\ 0)$ y $(c;\ 0)$, respectivamente; tomando esto en consideración y aplicando la fórmula (4) del § 1, encontramos

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad (1), resulta

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{3}$$

La ecuación (3) es precisamente la ecuación de la elipse buscada. Sin embargo, para el uso práctico esta forma es incómoda, por eso la ecuación de la elipse suele reducirse a una forma más simple. Para esto traslademos la segunda raíz de la ecuación (3) al segundo miembro de la ecuación y luego elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad. Obtenemos

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

o bien

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx. \tag{4}$$

Otra vez elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

De aquí

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{5}$$

Introduzcamos en el examen una nueva magnitud

$$b=\sqrt{a^2-c^2} \tag{6}$$

cuyo significado se aclarará a continuación. Puesto que, según los datos, $a>c$, entonces $a^2-c^2>0$ y, por consiguiente, b es un número positivo. De la igualdad (6) resulta

$$b^2=a^2-c^2,$$

por eso la ecuación (5) se puede escribir en la forma

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Dividiendo ambos miembros por a^2b^2, obtenemos finalmente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7}$$

Puesto que la ecuación (7) fue obtenida de la ecuación (3), las coordenadas de todo punto de la elipse que satisfacen la ecuación (3) satisfarán también la ecuación (7). No obstante, durante la simplificación de la ecuación (3) ambos miembros suyos han sido elevados dos veces al cuadrado y pudieron aparecer raíces «superfluas» y la ecuación (7) pudo resultar no equivalente a la (3). Vamos a cerciorarnos de que si las coordenadas del punto satisfacen la ecuación (7), ellas satisfacen también la (3), o sea, las ecuaciones (3) y (7) son equivalentes. Para esto, evidentemente, basta mostrar que las magnitudes r_1 y r_2 para todo punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (7), satisfacen la relación (1). Efectivamente, supongamos que las coordenadas x e y de cierto punto satisfacen la ecuación (7). Entonces, sustituyendo en la expresión (2) para r_1 el valor $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, obtenido de (7), después de transformaciones poco complicadas hallaremos $r_1=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}$. Puesto que $|x|\leqslant a$ [esto se deduce de (7)] y $\frac{c}{a}<1$, entonces $a+\frac{c}{a}x>0$ y por eso $r_1=a+\frac{c}{a}x$.

De un modo análogo encontramos que $r_2 = a - \frac{c}{a} x$. Sumando término a término estas igualdades, obtenemos la relación (1), que es lo que se quería demostrar. Así pues, todo punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (7) pertenece a la elipse y, viceversa, (7) es la ecuación de la elipse. La ecuación (7) se llama *ecuación canónica* (o *elemental*) de la elipse. De esta manera, la elipse es una línea de segundo orden.

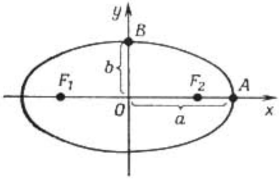

Fig. 55

Vamos a investigar ahora la forma de la elipse según su ecuación canónica (7). Nótese que la ecuación (7) contiene términos sólo con potencias pares de las coordenadas x e y, por eso la elipse es simétrica respecto a los ejes Ox y Oy, así como respecto al origen de coordenadas. En virtud de lo dicho la forma de toda la elipse será conocida si se determina la forma de aquella parte suya que está en el cuadrante I. Para esto resolvamos la ecuación (7) respecto a y: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ y teniendo en cuenta que en el primer cuadrante $y \geqslant 0$, consideremos la ecuación

$$y=\frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2}. \tag{8}$$

De la igualdad (8) se desprenden las afirmaciones siguientes:

1) si $x = 0$, entonces $y = b$. Por lo tanto, el punto $(0; b)$ está sobre la elipse. Designémoslo con B;

2) al crecer x de 0 a a, y disminuye;

3) si $x = a$, entonces $y = 0$. Por consiguiente, el punto $(a; 0)$ está sobre la elipse. Designémoslo con A;

4) para $x > a$ obtenemos los valores imaginarios de y. Por lo tanto, no existen los puntos de la elipse en los cuales $x > a$.

Así pues, la parte de la elipse situada en el cuadrante I es el arco BA [1]).

Reflejando este arco simétricamente respecto a ambos ejes de coordenadas obtenemos toda la elipse (fig. 55).

Observación. Si $a = b$, la ecuación (7) toma la forma $x^2 + y^2 = a^2$. Ésta es la ecuación de la circunferencia de radio a. De esta forma, la circunferencia es un caso particular de la elipse. Notemos que la elipse puede ser obtenida de la circunferencia de radio a si

[1]) En el cap. V será introducido el concepto de sentido de la convexidad del gráfico de la función $y = f(x)$ y demostrado que el arco BA está orientado con la convexidad hacia arriba.

ésta se contrae $\frac{a}{b}$ veces a lo largo del eje Oy. Con tal contracción el punto $(x;\ y)$ pasará al punto $(x;\ y_1)$, donde $y_1 = y\frac{b}{a}$. Sustituyendo $y = y_1\frac{a}{b}$ en la ecuación de la circunferencia, obtenemos la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Los ejes de simetría de la elipse se llaman *ejes* de la misma y el centro de simetría (el punto de intersección de los ejes), *centro* de la elipse. Los puntos en los cuales la elipse corta los ejes se denominan *vértices* de la misma. Puesto que en virtud de la igualdad (6) $a \geqslant b$, entonces $2a$ es la longitud del eje mayor de simetría de la elipse y $2b$, la longitud del eje menor. Por consiguiente, los números a y b son *las longitudes de los semiejes mayor y menor de la elipse, respectivamente.*

Introduzcamos una magnitud más que caracteriza la forma de la elipse.

Definición. *Se llama excentricidad de la elipse la razón* $\frac{c}{a}$, *donde* c *es la mitad de la distancia entre los focos y* a, *el semieje mayor de la elipse.*

La excentricidad suele designarse con letra ε: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Puesto que $c < a$, entonces $0 \leqslant \varepsilon < 1$, o sea, la excentricidad de la elipse es menor que la unidad. Tomando en consideración que $c^2 = a^2 - b^2$, encontraremos

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

de donde

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

De la última igualdad se puede obtener fácilmente la interpretación geométrica de la elipse. Para una ε muy pequeña, los números a y b son casi iguales, o sea, la elipse se asemeja a la circunferencia. En cambio, si ε es próxima a la unidad, el número b es pequeño en comparación con el número a y la elipse está muy alargada a lo largo del eje mayor. Así que, la excentricidad de la elipse caracteriza la medida de alargamiento de la elipse.

Como es sabido, los planetas y ciertos cometas se mueven por órbitas elípticas. Resulta que las excentricidades de las órbitas planetarias son muy pequeñas y de las de cometas son grandes, o sea son próximas a la unidad. Así pues, los planetas se mueven casi por la circunferencia, mientras que los cometas ora se acercan al Sol (el Sol se encuentra en uno de los focos), ora se alejan de éste.

○ **Ejemplo 1.** Escribir la ecuación canónica de la elipse que pasa por los puntos M_1 (2; 3) y $M_2\left(1;\ 3\sqrt{5/2}\right)$.

Resolución. Supongamos que la ecuación buscada de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. A esta ecuación se satisface por las coordenadas de los puntos dados. Sustituyendo en vez de x e y primero las coordenadas del punto M_1 y luego las coordenadas del punto M_2, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1;\qquad \frac{1}{a^2}+\frac{45}{4b^2}=1.$$

Designando $\frac{1}{a^2}=m$; $\frac{1}{b^2}=n$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} 4m+9n=1,\\ m+\dfrac{45}{4n}=1,\end{cases}$$

con el que hallamos, al resolverlo, $m=1/16$, $n=1/12$, de donde $a^2=16$, $b^2=12$. Por lo tanto, la ecuación de la elipse tiene la forma

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.\quad \bullet$$

Ejercicio. Muestre que la ecuación $3x^2+16y^2=192$ define una elipse. Hállense sus semiejes, focos y excentricidad. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{12}=1;\ a=8;\ b=2\sqrt{3};\ F_1(2\sqrt{13};\ 0),\ F_2(-2\sqrt{13};\ 0);\ \varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{4}\right)$.

2. La hipérbola.

Definición. *Se llama hipérbola al conjunto de todos los puntos del plano para los cuales el módulo de la diferencia de las distancias a dos puntos dados, llamados focos, es un valor constante, menor que la distancia entre los focos.*

Para deducir la ecuación de la hipérbola introduzcamos en el plano el sistema rectangular de coordenadas de modo que los focos estén sobre el eje de abscisas y el origen de coordenadas divida en dos partes iguales la distancia entre los focos. Deduzcamos la ecuación de la hipérbola en el sistema elegido de coordenadas.

Designemos con F_1 y F_2 (fig. 56) los focos de la hipérbola. Sea M un punto arbitrario de la misma. Designemos con $2c$ la distancia $|F_1F_2|$ entre los focos y con $2a$ el módulo de la diferencia de las distancias del punto M a los focos. Puesto que, por definición, $||F_1M|-|F_2M||<|F_1F_2|$, entonces $2a<2c$ o bien $a<c$.

Los números $|F_1M|$ y $|F_2M|$ se llaman *radios focales* del punto M y se designan por r_1 y r_2. De la definición se deduce que el punto $M(x; y)$ está sobre la hipérbola dada si, y sólo si, $|r_1 - r_2| = 2a$. De aquí

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \qquad (9)$$

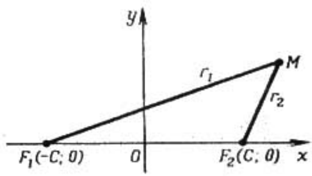

Fig. 56

Por analogía con la elipse, para obtener la ecuación buscada de la hipérbola es necesario en la igualdad (9) reemplazar las variables r_1 y r_2 por sus expresiones con ayuda de las coordenadas x e y. Puesto que los focos F_1 y F_2 se encuentran sobre el eje Ox simétricamente respecto al origen de coordenadas, ellos tienen las coordenadas $(-c; 0)$ y $(c; 0)$. Según la fórmula (4) del § 1 resulta

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (10)$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad (9), se tiene

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (11)$$

La ecuación (11) es la *ecuación de la hipérbola* buscada. Simplifiquemos esta ecuación al igual que la ecuación (3) para la elipse. Traslademos la segunda raíz al segundo miembro de la ecuación y luego elevemos al cuadrado ambos miembros. Resulta

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

o bien

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (12)$$

Elevemos una vez más al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

De aquí

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \qquad (13)$$

Vamos a considerar una nueva magnitud:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad (14)$$

cuyo significado geométrico se aclarará posteriormente. Puesto que $c > a$, entonces $c^2 - a^2 > 0$ y b es un número positivo. De la igualdad (14) tenemos

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

La ecuación (13) toma la forma

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

o bien

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (15)$$

Ésta es precisamente la *ecuación canónica de la* ***hipérbola.***

Al igual que para la elipse, se puede demostrar la equivalencia de las ecuaciones (15) y (11) (hágase esto en forma independiente).

Investiguemos la fórmula de la hipérbola según la ecuación (15).

Puesto que la ecuación (15) contiene sólo los términos con potencias pares de las coordenadas corrientes x e y, por analogía con la elipse basta examinar únicamente la parte de la hipérbola que se encuentra en el cuadrante I. Despejemos en la ecuación (15) y, suponiendo $y \geqslant 0$. Obtenemos

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (16)$$

De la igualdad (16) se desprenden las afirmaciones siguientes:

1) si $0 \leqslant x < a$, entonces y tiene valores imaginarios, o sea, los puntos de la hipérbola con las abscisas $0 \leqslant x < a$ no existen;

2) si $x = a$, entonces $y = 0$, o sea, el punto $(a; 0)$ pertenece a la hipérbola. Designémoslo con A;

3) si $x > a$, entonces $y > 0$. Al crecer x crece también y e $y \to +\infty$ para $x \to +\infty$. El punto variable $M\ (x;\ y)$ se traslada en la hipérbola, con el crecimiento de x, «a la derecha» y «hacia arriba», con la particularidad de que su posición inicial es el punto $A\ (a;\ 0)$ (fig. 57). Aquí es necesario precisar cómo el punto M «se va al infinito». Para esto, además de la ecuación (16), consideremos la ecuación

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad (17)$$

que, como ya se sabe, define la recta con el coeficiente angular $k = \frac{b}{a}$ la cual pasa por el origen de coordenadas. La parte de esta recta, situada en el cuadrante I, se muestra en la fig. 57. Para construirla se puede utilizar el triángulo rectángulo OAB con los catetos $|OA| = a$ y $|AB| = b$.

Mostremos que el punto M, moviéndose por la hipérbola al infinito, se aproxima indefinidamente a la recta (17) que es *asíntota de la* ***hipérbola***[1]).

---

[1]) En el cap. V, § 15 se da la definición de la asíntota de una gráfica de la función $y = f(x)$ y se muestra que la recta $y = \frac{b}{a}x$ es la asíntota de la hipérbola, y en el subp. 4 se considera la cuestión sobre el sentido de la convexidad de la hipérbola.

Tomemos un valor arbitrario de $x (x \geqslant a)$ y consideremos dos puntos $M(x, y)$ y $N(x, Y)$, donde $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ e $Y = \frac{b}{a}x$. El punto M está situado en la hipérbola y el punto N, sobre la recta (17). Puesto que ambos puntos tienen la misma abscisa x, la recta

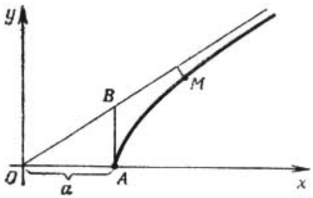

Fig. 57

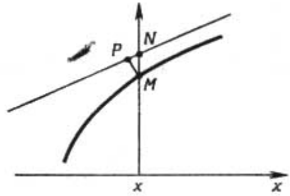

Fig. 58

que une los puntos M y N es perpendicular al eje Ox (fig. 58). Hallemos la longitud del segmento MN.

Ante todo obsérvese que para $x \geqslant a$

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y.$$

Esto quiere decir que para la misma abscisa el punto de la hipérbola está debajo del punto correspondiente de la asíntota. Por lo tanto,

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

De la expresión obtenida se deduce que para $x \to +\infty$ la fracción tiende a cero ya que el denominador crece mientras que el numerador es una magnitud constante ab. Por consiguiente, $|MN| = Y - y$ tiende a cero para $x \to +\infty$.

Designemos con P el pie de la perpendicular trazada del punto M a la recta (17); MP es la distancia que media del punto M a esta recta. Es evidente que $|MP| < |MN|$ y ya que $|MN| \to 0$, entonces con mayor razón $|MP| \to 0$ cuando $x \to +\infty$, o sea, el punto M se aproxima indefinidamente a la recta (17). Y precisamente esto es lo que queríamos mostrar. Un razonamiento análogo se puede llevar a cabo para todo cuadrante.

Así pues, la rama de la hipérbola en cuestión, situada en el cuadrante I, pasa por el punto $A(a; 0)$ y está dirigida «a la derecha» y «hacia arriba», acercándose asintóticamente a la recta $y = \frac{b}{a}x$ (véase la fig. 57).

Ahora es fácil determinar la forma de toda la hipérbola con ayuda de la simetría respecto a los ejes de coordenadas (fig. 59). La hipérbola se compone de dos ramas (derecha e izquierda) y tiene dos asíntotas: $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ la primera de las cuales ya está considerada y la segunda es su reflejo simétrico respecto al eje Ox (o respecto al eje Oy).

Los ejes de simetría se llaman *ejes de la hipérbola* y el centro de la simetría (el punto de intersección de los ejes), *centro de la hipérbola*.

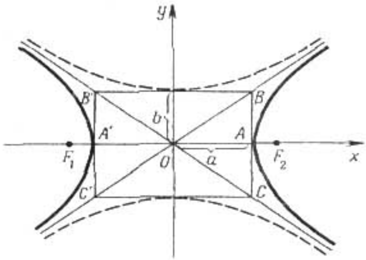

Fig. 59

Uno de los ejes se interseca con la hipérbola en dos puntos que se llaman *vértices* de la misma (en la fig. 59 se designan con letras A' y A). Este eje se denomina *eje real* de la hipérbola. El otro eje no tiene puntos comunes con la hipérbola y se denomina *eje imaginario* de la hipérbola. El rectángulo $BB'C'C$ con los lados $2a$ y $2b$ (fig. 59) se dice *rectángulo básico* de la hipérbola. Las magnitudes a y b se llaman *semiejes real* e *imaginario* de la hipérbola, respectivamente.

Permutando las letras x e y, a y b, la ecuación

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

puede reducirse a la ecuación (15). De aquí está claro que ella define la hipérbola situada así como se muestra en la fig. 59 con líneas de trazos; sus vértices se encuentran sobre el eje Oy. Esta hipérbola se llama *conjugada* respecto a la hipérbola (15). Ambas hipérbolas tienen las mismas asíntotas.

La hipérbola con semiejes iguales ($a = b$) se denomina *equilátera* y su ecuación canónica tiene la forma

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Puesto que el rectángulo básico de una hipérbola equilátera es un cuadrado, las asíntotas de la misma son recíprocamente perpendiculares.

Definición. *Se llama excentricidad de la hipérbola a la razón* $\frac{c}{a}$, *donde c es la mitad de la distancia entre los focos y a, el semieje real de la hipérbola.*

La excentricidad de la hipérbola (al igual que la de la elipse) se designa con letra ε. Puesto que $c > a$, entonces $\varepsilon > 1$, o sea, la excentricidad de la hipérbola es mayor que la unidad. Tomando en consideración que $c^2 = a^2 + b^2$, resulta

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

de donde

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

De la última igualdad es fácil obtener la interpretación geométrica de la excentricidad de la hipérbola. Cuanto menor sea la excentricidad, es decir, cuanto más próxima sea ella a la unidad, tanto menor será la razón $\frac{b}{a}$ y esto quiere decir que el rectángulo básico quedará más alargado en la dirección del eje real. De esta manera, la excentricidad de la hipérbola caracteriza la forma de su rectángulo básico y, por lo tanto, también la forma de la misma hipérbola.

Para la hipérbola equilátera ($a = b$) resulta $\varepsilon = \sqrt{2}$.

○ **Ejemplo 2.** Se da la ecuación de la hipérbola $3x^2 - 4y^2 = 12$. Hállese sus semiejes real e imaginario; escríbase la ecuación de las asíntotas de la hipérbola.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la hipérbola a la forma canónica

$$\frac{3x^2}{12} - \frac{4y^2}{12} = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1,$$

de donde encontramos que el semieje real $a=2$ y el semieje imaginario $b=\sqrt{3}$. Puesto que las asíntotas de la hipérbola tienen las ecuaciones $y=\pm\frac{b}{a}x$, los focos tienen las coordenadas $(-c;\ 0)$ y $(c;\ 0)$; la excentricidad $\varepsilon=\frac{c}{a}$ y $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$, entonces para la hipérbola dada obtenemos las coordenadas de los focos $(-\sqrt{7};\ 0)$ y $(\sqrt{7};\ 0)$, la excentricidad $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{a}$ y la ecuación de las asíntotas $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x$. ●

Ejercicio. Escríbase la ecuación de la hipérbola si se conoce que la distancia entre sus vértices es igual a 16 y sus focos se encuentran en los puntos $(-10;\ 0)$ y $(10;\ 0)$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.\right)$

En el subpárrafo siguiente consideraremos una propiedad importante de la elipse y la hipérbola.

3. Directrices de la elipse y la hipérbola.

Definición 1. *Dos rectas perpendiculares al eje mayor de la elipse, situadas simétricamente respecto al centro y que distan* $\frac{a}{\varepsilon}$ *de éste, se llaman directrices de la elipse (aquí* a *es el semieje mayor y* ε*, la excentricidad de la elipse).*

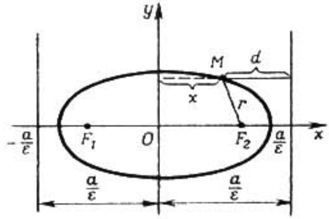

Fig. 60

La ecuación de las directrices de una elipse definida por la ecuación (7) tiene la forma

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad x=\frac{a}{\varepsilon}.$$

Puesto que para la elipse $\varepsilon<1$, entonces $\frac{a}{\varepsilon}>a$. De aquí, se desprende que la directriz derecha está situada a la derecha del vértice derecho de la elipse y la izquierda, a la izquierda de su vértice izquierdo (fig. 60).

Definición 2. *Dos rectas perpendiculares al eje real de la hipérbola y situadas simétricamente respecto a su centro, a la distancia* $\frac{a}{\varepsilon}$ *de éste, se llaman directrices de la hipérbola (aquí* a *es el semieje real y* ε*, la excentricidad de la hipérbola).*

La ecuación de las directrices de la hipérbola definida por la ecuación canónica (15) tiene la forma

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad x=\frac{a}{\varepsilon}.$$

Puesto que para la hipérbola $\varepsilon>1$, entonces $\frac{a}{\varepsilon}<a$. De donde se deduce que la directriz derecha está situada entre el centro y el vértice derecho de la hipérbola, y la izquierda, entre el centro y el vértice izquierdo (fig. 61).

Con ayuda de los conceptos de directriz y excentricidad se puede enunciar la propiedad común inherente a la elipse y la hipérbola. Tienen lugar los dos teoremas siguientes.

Teorema 2.8. *Si* r *es la distancia de un punto arbitrario* M *de la elipse a cualquier foco y* d *es la distancia del mismo punto a la directriz* *correspondiente a este foco, la razón* $\frac{r}{d}$ ***es una magnitud constante, igual a la excentricidad de la elipse.***

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que se trata del foco derecho F_2 y de la directriz derecha. Sea $M(x; y)$ un punto arbitrario de la elipse (véase la fig. 60). La distancia entre el

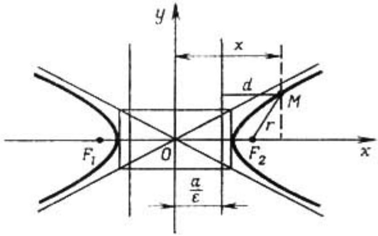

Fig. 61

punto M y la directriz derecha se define por la igualdad

$$d=\frac{a}{\varepsilon}-x \tag{18}$$

la cual se determina fácilmente de la figura. De las igualdades (2) y (4) resulta

$$r=r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

Suponiendo $c/a=\varepsilon$, obtenemos la fórmula de la distancia que media del punto M al foco derecho;

$$r=a-\varepsilon x. \tag{19}$$

De las relaciones (18) y (19) resulta

$$\frac{r}{d}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\frac{(a-\varepsilon x)\,\varepsilon}{a-\varepsilon x}=\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.9. *Si r es la distancia de un punto arbitrario M de la hipérbola a cualquier foco y d es la distancia que medía del mismo punto a la directriz correspondiente a este foco, la razón* $\frac{r}{d}$ *es una magnitud constante, igual a la excentricidad de la hipérbola.*

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que se trata del foco derecho F_2 y de la directriz derecha. Sea $M(x, y)$ un punto arbitrario de la hipérbola (fig. 61). Consideremos dos casos.

1) El punto M se encuentra sobre la rama derecha de la hipérbola. Entonces la distancia entre el punto M y la directriz derecha

se define por la igualdad

$$d=x-\frac{a}{\varepsilon} \tag{20}$$

la cual se determina fácilmente de la figura. De las igualdades (10) y (12) resulta

$$r=r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{c}{a}x-a.$$

Suponiendo $c/a=\varepsilon$, obtenemos la fórmula de la distancia desde el punto M al foco derecho:

$$r=\varepsilon x-a. \tag{21}$$

De las relaciones (20) y (21) resulta

$$\frac{r}{d}=\frac{\varepsilon x-a}{x-a/\varepsilon}=\frac{(\varepsilon x-a)}{\varepsilon x-a}=\varepsilon.$$

2) El punto M se encuentra sobre la rama izquierda de la hipérbola. Entonces la distancia entre el punto M y la directriz derecha se define por la igualdad

$$d=-x+\frac{a}{\varepsilon}. \tag{22}$$

De las igualdades (10) y (12) resulta

$$r=r_1\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\left(\frac{c}{a}x-a\right).$$

Suponiendo $c/a=\varepsilon$, obtenemos la fórmula de la distancia desde el punto M al foco derecho:

$$r=-(\varepsilon x-a). \tag{23}$$

De las relaciones (22) y (23) resulta

$$\frac{r}{d}=\frac{-(\varepsilon x-a)}{-x+\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{(-\varepsilon x+a)\,\varepsilon}{(-\varepsilon x+a)}=\varepsilon. \quad \blacksquare$$

La propiedad determinada de la elipse y la hipérbola se puede poner como base de la definición común de estas líneas: *el conjunto de los puntos para los cuales la razón de sus distancias al foco y a la directriz correspondiente es una magnitud constante*, *igual a* ε, *es una elipse*, *si* $\varepsilon<1$ *y una hipérbola*, *si* $\varepsilon>1$.

Surge la pregunta: ¿qué es el conjunto de los puntos definido de un modo análogo a condición de que $\varepsilon=1$? Resulta que es una nueva línea de segundo orden llamada parábola.

4. La parábola.

Definición. *Se llama parábola al conjunto de todos los puntos del plano cada uno de los cuales equidista de un punto dado, llamado foco, y de una recta dada que se llama directriz y no pasa por el foco.*

Para deducir la ecuación de la parábola introduzcamos en el plano el sistema rectangular de coordenadas de un modo tal, que el eje de abscisas pase por el foco perpendicularmente a la directriz y consideremos como positivo el sentido de la directriz al foco; situemos el origen de coordenadas en el punto medio entre el foco y la directriz. Deduzcamos la ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas elegido.

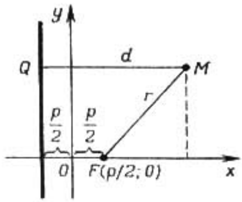

Fig. 62

Sea M $(x;\ y)$ el punto arbitrario de la parábola. Designemos por r la distancia entre el punto M y el foco F $(r = |FM|)$, por d la distancia entre el punto M y la directriz y por p la distancia entre el foco y la directriz (fig. 62). La magnitud p se denomina *parámetro de la parábola* su significado geométrico se aclarará posteriormente. El punto M estará sobre la parábola dada si, y solo si,

$$r = d. \tag{24}$$

Para obtener la ecuación buscada es necesario en la igualdad (24) reemplazar las variables r y d por sus expresiones con ayuda de las coordenadas x e y. El foco F tiene las coordenadas $(p/2;\ 0)$; por eso según la fórmula (4) del § 1 resulta

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \tag{25}$$

Designemos por Q el pie de la perpendicular trazada del punto M a la directriz. Es obvio que el punto Q tiene las coordenadas $(-p/2;\ y)$. De aquí, y de la fórmula (4) del § 1 obtenemos

$$d = |MQ| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{26}$$

Reemplazando en la igualdad (24) r y d por sus expresiones (25) y (26), encontramos

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{27}$$

Esta es precisamente la ecuación buscada de la parábola. Reduzcamos la ecuación de la parábola a una forma más cómoda; para esto elevaremos ambos miembros de la igualdad (27) al cuadrado. Obtenemos

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

o bien

$$y^2 = 2px. \tag{28}$$

Cerciorémonos de que, elevados al cuadrado ambos miembros de la ecuación (27), la ecuación (28) no ha adquirido raíces «superfluas». Para esto basta mostrar que para todo punto cuyas coordenadas x e y satisfacen la ecuación (28) se cumple la relación (24). En efecto, de la ecuación (28) se desprende que $x \geqslant 0$, por eso para los puntos con abscisas no negativas $d = \frac{p}{2} + x$. Sustituyendo el valor de y^2 de (28) en la expresión (25) para r y teniendo en cuenta que $x \geqslant 0$, obtenemos que $r = \frac{p}{2} + x$, o sea las magnitudes r y d son iguales, y esto es lo que se quería mostrar. Así que, la ecuación (28) se satisface por las coordenadas de los puntos de la parábola dada, y sólo por ellas, o sea, la ecuación (28) es ecuación de la parábola dada.

La ecuación (28) se llama *ecuación canónica de la parábola*, que es una ecuación de segundo grado. Así pues, la parábola es una línea de segundo orden.

Investiguemos ahora la forma de la parábola según su ecuación (28).

Puesto que la ecuación (28) contiene y sólo en forma de potencia par, la parábola es simétrica al eje Ox. Por consiguiente, basta considerar sólo la parte de la parábola que está en el semiplano superior. Para esta parte $y \geqslant 0$, por eso, despejando la y en la ecuación (28), obtenemos

$$y = \sqrt{2px}. \tag{29}$$

De la ecuación (29) se deducen las afirmaciones siguientes:

1) si $x < 0$, la ecuación (29) da los valores imaginarios de y. Por lo tanto, a la izquierda del eje Oy no hay ningún punto de la parábola;

2) si $x = 0$, entonces $y = 0$. Por lo tanto, el origen de coordenadas está situado en la parábola y es el punto «más izquierdo» de la misma;

3) al crecer x crece también y, con la particularidad de que si $x \to +\infty$, entonces también $y \to +\infty$.

De esta manera, el punto variable $M(x;\ y)$ que se desplaza por la parábola parte del origen de coordenadas al crecer x y se mueve «a la derecha» y «hacia arriba»; en este caso para $x \to +\infty$ el punto M se aleja infinitamente tanto del eje Oy como del eje Ox.

Reflejando simétricamente la parte considerada de la parábola respecto al eje Ox, obtenemos toda la parábola (fig. 63) definida por la ecuación (28).

El punto O se llama *vértice de la parábola* y el eje de simetría (eje Ox), *eje de la parábola*. El número p, o sea, el parámetro de la parábola expresa, como es sabido, la distancia que media del foco a la directriz. Aclaremos cómo el parámetro de la parábola influye en su forma. Para esto tomemos cualquier valor determinado de la abscisa, por ejemplo $x = 1$, y de la ecuación (28) hallemos los valores correspondientes de la ordenada: $y = \pm\sqrt{2p}$. Obtenemos sobre la parábola dos puntos $M_1(1; +\sqrt{2p})$ y $M_2(1; -\sqrt{2p})$, simétricos respecto al eje de la misma; la distancia entre ellos es igual a $2\sqrt{2p}$. De aquí sacamos la conclusión de que esta distancia es tanto mayor cuanto mayor es p. Por lo tanto, el parámetro p caracteriza «la anchura» del dominio limitado por la parábola. Precisamente en esto consiste el *significado geométrico* del parámetro p.

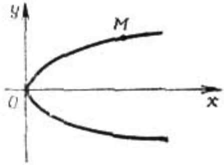

Fig. 63

La parábola cuya ecuación $y^2 = -2px$, $p > 0$, está situada a la izquierda del eje de ordenadas (fig. 64, *a*). El vértice de esta parábola coincide con el origen de coordenadas, el eje Ox es el eje de simetría.

Por analogía con lo dicho anteriormente, se puede afirmar que la ecuación $x^2 = 2py$, $p > 0$, es la ecuación de la parábola cuyo vértice coincide con el origen de coordenadas, pero en este caso el eje Oy es el eje de simetría (fig. 64, *b*). Esta parábola está situada

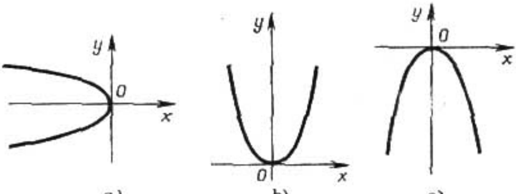

Fig. 64

por encima del eje de abscisas. La ecuación $x^2 = -2py$, $p > 0$, define la parábola que está situada más abajo del eje Ox y tiene por vértice el origen de coordenadas (fig. 64, *c*). La ecuación de la parábola representada en la fig. 65 tiene la forma

$$x^2 = 2p(y - a), \quad p > 0, \quad a < 0$$

y la ecuación de la parábola representada en la fig. 66 tiene la forma siguiente:

$$y^2 = 2p(x - b), \quad p > 0, \quad b > 0.$$

○ **Ejemplo 3.** Se da la ecuación de la parábola $y^2 = 6x$. Escríbase la ecuación de su directriz y hállense las coordenadas de su foco.

Resolución. Comparando la ecuación dada con la ecuación canónica de la parábola (29), sacamos la conclusión de que $2p = 6$, de donde $p=3$. Puesto que el foco de la parábola tiene las coordenadas $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ y la directriz tiene la ecuación $x=-\frac{p}{2}$, para la parábola dada obtenemos las coordenadas $\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$ y la ecuación de la directriz es $x=-\frac{3}{2}$. ●

Ejercicio. Escriba la ecuación de la parábola que tiene por vértice el origen de coordenadas y la ecuación de la directriz, si se conoce que el eje Ox es eje de simetría y que el punto de intersección de las rectas $y=x$ y $x+y=2$ se encuentra en la parábola. (*Resp.* $y^2=x$; $x=-1/4$.)

En conclusión consideremos algunos ejemplos más referentes a la forma de hallar el conjunto de los puntos según las ecuaciones que relacionan sus coordenadas.

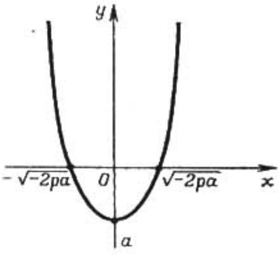

Fig. 65

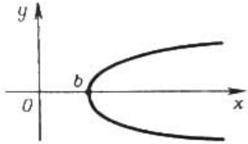

Fig. 66

○ **Ejemplo 4.** Se dan los puntos $A\ (-1;\ 0)$ y $B\ (2;\ 0)$. Un punto $M\ (x;\ y)$ se mueve de un modo tal que en el triángulo AMB el ángulo ABM queda dos veces mayor que el ángulo MAB. Determinar la trayectoria del punto M (fig. 67).

Resolución. Expresemos $\operatorname{tg} B$ y $\operatorname{tg} A$ mediante las coordenadas de los puntos A, B y M

$$\operatorname{tg} B=\frac{y}{2-x};\quad \operatorname{tg} A=\frac{y}{x-(-1)}=\frac{y}{x+1}.$$

Ecribamos la ecuación de movimiento del punto. Según los datos del problema $B=2A$, por consiguiente, la ecuación tiene la forma $\operatorname{tg} B=\operatorname{tg} 2A$ o bien

$$\operatorname{tg} B=\frac{2\operatorname{tg} A}{1-\operatorname{tg}^2 A}.$$

Sustituyendo en la ecuación las expresiones halladas para $\operatorname{tg} B$ y $\operatorname{tg} A$

$$\frac{y}{2-x}=\frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2},$$

después de simplificar obtenemos la ecuación buscada

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1,$$

o sea, la trayectoria de movimiento del punto es hipérbola.

Ejemplo 5. Se dan una circunferencia y un punto A dentro de ésta. Hállese el conjunto de los centros de las circunferencias que son tangentes a la circunferencia dada y pasan por el punto A.

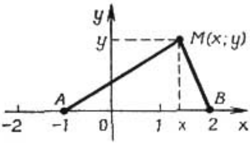

Fig. 67

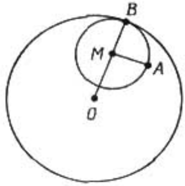

Fig. 68

Resolución. Sea M un punto arbitrario del conjunto buscado, entonces la circunferencia de radio MA es tangente a la circunferencia dada. Sea O el centro de la circunferencia dada; R la longitud de su radio; B el punto de tangencia (fig. 68). Entonces $|OB| = R = |OM| + |MB| = |OM| + |MA|$. Así pues, para el punto M

$$|MO| + |MA| = R,$$

o sea, la suma de sus distancias a dos puntos dados O y A es constante. Por lo tanto, el punto M yace sobre una elipse que tiene por focos los puntos O y A (véase la definición de la elipse).

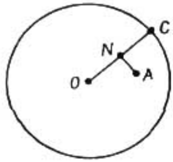

Fig. 69

Mostremos que todos los puntos de dicha elipse pertenecen al conjunto buscado. Sea N un punto arbitrario de esta elipse, o sea, $|NO| + |NA| = R$. Nótese que el punto N está situado dentro del círculo dado, ya que $|ON| < |ON| + |NA| = R$. Supongamos que el rayo ON corta a la circunferencia dada en el punto C (fig. 69). Puesto que $|ON| + |NC| = R$ y $|ON| + |NA| = R$, entonces $|NC| = |NA|$. Por eso la circunferencia que tiene por centro el punto N y por radio NA pasa por el punto C y es en éste tangente a la circunferencia dada.

Ejemplo 6. Demuéstrese que si los ejes de dos parábolas son recíprocamente perpendiculares y éstas se intersecan en cuatro puntos, entonces estos puntos de intersección se encuentran sobre la misma circunferencia.

Resolución. Tomemos los ejes de las parábolas dadas por ejes de coordenadas Ox y Oy (fig. 70). Entonces las ecuaciones de las parábolas tienen la forma

$$y^2 = 2p(x - a) \tag{30}$$

y

$$x^2 = 2q(y - b). \tag{31}$$

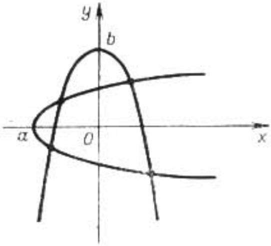

Fig. 70

Sumando término a término las ecuaciones (30) y (31), resulta

$$x^2 + y^2 = 2px - 2pa + 2qy - 2qb,$$

de donde

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = p^2 + q^2 - 2pa - 2qb. \tag{32}$$

Según los datos del problema las parábolas se cortan en cuatro puntos, por lo tanto, las coordenadas de estos puntos satisfacen la ecuación (30) y (31), así como, por consiguiente, la (32).

Pero la ecuación (32) define, según el signo de su segundo miembro, bien una circunferencia (si el segundo miembro es mayor que cero), o bien un punto (si el segundo miembro es igual a cero), o un conjunto vacío. Puesto que las coordenadas de los puntos satisfacen la ecuación (32), ésta define la circunferencia sobre la cual los puntos dados están situados. ●

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. Dese la definición de la elipse y deduzca su ecuación canónica.
2. Investíguese la forma de la elipse valiéndose de su ecuación canónica.
3. ¿Qué es la excentricidad de la elipse y cuál es su significado geométrico?
4. Dese la definición de la hipérbola y dedúzcase su ecuación canónica.
5. Investíguese la forma de la hipérbola valiéndose de su ecuación canónica.
6. ¿Qué es la excentricidad de la hipérbola y cuál es su significado geométrico?
7. ¿Qué propiedad importante poseen la elipse y la hipérbola?
8. Dese la definición de la parábola y deduzca su ecuación canónica.
9. Investíguese la forma de la parábola valiéndose de su ecuación canónica.
10. ¿A qué es igual la excentricidad de la parábola?
11. ¿En qué consiste el significado geométrico del parámetro p en la ecuación de la parábola?
12. ¿Por qué la elipse, la hipérbola y la parábola se llaman líneas de segundo orden?
13. ¿Cómo hallar el punto de intersección de la parábola con la recta, la circunferencia, la elipse y con otra parábola?
14. ¿Qué relación existe entre la elipse y la circunferencia?

§ 5. Fórmulas y hechos fundamentales de la geometría analítica plana

1. Si M_1 (x_1) y M_2 (x_2) son dos puntos de la recta numérica, la fórmula

$$M_1M_2 = x_2 - x_1$$

expresa el valor del segmento $\overline{M_1M_2}$ y la fórmula

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$$

expresa la distancia entre los puntos.

2. Una vez elegido en el plano el sistema de coordenadas Oxy, a cada punto del plano se le hace corresponder un par de números $(x;\ y)$, o sea, sus coordenadas. La correspondencia entre los puntos del plano y los pares de números es biunívoca: a cada punto le corresponde un par de número e inversamente.

3. La distancia entre los puntos A $(x_1;\ y_1)$ y B $(x_2;\ y_2)$ se halla por la fórmula

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

4. El área del triángulo que tiene por vértices A $(x_1;\ y_1)$, B $(x_2;\ y_2)$ y C $(x_3;\ y_3)$ se halla por la fórmula

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\,[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]\,\right|.$$

5. Si un punto $M(x;\ y)$ divide al segmento que tiene por extremos $M_1(x_1;\ y_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2)$ en la razón $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, entonces

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

6. El conjunto de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A, B y C son ciertos números, con la particularidad de que A y B no son iguales a cero simultáneamente (es decir, $A^2 + B^2 \neq 0$), es una recta. Viceversa, cada recta L se define por la ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + C = 0.$$

En este caso los números A, B y C se determinan para la recta dada unívocamente con una exactitud de hasta la proporcionalidad: si todos estos números se multiplican por un mismo número μ $(\mu \neq 0)$

la ecuación obtenida

$$(\mu A)\,x + (\mu B)\,y + \mu C = 0$$

define la misma recta L.

7. La ecuación de la recta que pasa por un punto dado $(x_1;\ y_1)$ con un coeficiente angular dado k tiene la forma

$$y - y_1 = k\,(x - x_1).$$

8. La ecuación de la recta que corta al eje Ox en el punto $(a;\ 0)$ y al eje Oy en el punto $(0;\ b)$ tiene la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

que es la ecuación «segmentaria» de la recta.

9. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1;\ y_1)$ y $(x_2;\ y_2)$ se escribe así:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

10. Si la recta L_1 tiene un coeficiente angular k_1 y la recta L_2, un coeficiente angular k_2, entonces:

a) $k_1 = k_2$ es la condición de paralelismo de las rectas L_1 y L_2;

b) $k_1 \cdot k_2 = -1$ es la condición de perpendicularidad de las rectas L_1 y L_2.

11. La distancia d del punto $M\ (x_0;\ y_0)$ a la recta L definida por la ecuación $Ax + By + C = 0$ se calcula por la fórmula

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

12. La recta $Ax + By + C = 0$ divide el plano en dos semiplanos: uno, el conjunto de los puntos $(x;\ y)$ para los cuales $Ax + By + C > 0$ y otro, el conjunto de los puntos $(x;\ y)$ para los cuales $Ax + By + C < 0$.

13. El conjunto de los puntos $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

donde a y b son los números dados, y $R > 0$, es una circunferencia que tiene por centro el punto $(a;\ b)$ y por radio R.

14. El conjunto de los puntos $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b son los números positivos dados es una elipse con los semiejes a y b y el centro en el origen de coordenadas.

15. El conjunto de los puntos $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

donde a y b son los números positivos dados, es una hipérbola con los semiejes transverso y no transverso a y b y el centro de simetría en el origen de coordenadas.

16. El conjunto de los puntos $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$y^2=2px\ (x^2=2py),$$

donde p es el número dado, es una parábola que tiene como vértice en el origen de coordenadas y como eje de simetría Ox (como eje de simetría Oy).

§ 6. Problemas de control

2.1. Constrúyanse los puntos A (2; 3), B (4; —1), C (—1; 7), D (—2; —3), E (0; 2), F (4; 0).

2.2. Sin construir el punto A (1; —3) aclare en qué cuadrante está situado éste.

2.3. ¿En qué cuadrantes puede encontrarse un punto si su abscisa es positiva?

2.4. Sobre el eje Ox se toma un punto con la coordenada (—5). ¿Cuáles son las coordenadas de este punto en el plano?

2.5. Los puntos A (3; 2) y B (a; —1) están situados sobre una recta paralela al eje Oy. Hállese el valor de a.

2.6. *M es el punto medio del segmento OA que une el origen de coordenadas* con el punto A (—5; 2). Hállense las coordenadas del punto M.

2.7. Se dan los puntos A $(x_1;\ y_1)$ y B $(x_2;\ y_2)$. Muéstrase que la fórmula de la distancia entre los puntos A y B no depende de los signos de sus coordenadas.

2.8. a) ¿Qué punto está más lejos del eje Ox: A (2; —5) ó B (3; 4)? b) ¿Cuál de estos puntos está más lejos del eje Oy? c) ¿A qué son iguales las distancias del punto A (a; b) a los ejes Ox y Oy, respectivamente?

2.9. Costrúyanse los puntos A (4; 1), B (3; 5), C (—1; 4) y D (0; 0). Si los puntos están construidos correctamente, se obtiene un cuadrado. ¿Cuál es el área de éste? ¿A qué es igual la longitud del lado del cuadrado? Determínense las coordenadas de los puntos medios de los lados del cuadrado.

2.10. Hállense las coordenadas del centro de gravedad de una placa homogénea que tiene la forma de un triángulo con los vértices A (2; 4), B (0; 1), C (4; —2) (fig. 71).

2.11. Los puntos A (—2; 1); B (2; 3) y C (4; —1) son los puntos medios de los lados de un triángulo. Determínense las coordenadas de sus vértices.

2.12. En el plano se dan los puntos A (0; 0), B $(x_1;\ y_1)$ y D $(x_2;\ y_2)$ (fig. 72). ¿Qué coordenadas debe tener el punto C para que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo?

2.13. El área de un triángulo es igual a 10 unidades cuadradas, dos de sus vértices son los puntos A (5; 1) y B (—2; 2). Hállense las coordenadas de su tercer vértice si se conoce que éste está situado sobre el eje de abscisas.

2.14. Hállese el área de un cuadrilátero que tiene por vértices los puntos A (3; 1), B (4; 6), C (6; 3) y D (5; —2).

2.15. Se dan las coordenadas polares de un punto: $\rho=10$; $\varphi=30^\circ$. Determínense las coordenadas cartesianas rectangulares de este punto si se conoce que el polo del sistema polar se encuentra en el punto (2, 3;) y el eje polar es paralelo al eje de abscisas.

2.16. Determínese la distancia entre dos puntos, conociendo sus coordenadas polares: $\rho_1 = 3$, $\varphi_1 = 30°$; $\rho_2 = 5$, $\varphi_2 = 120°$.

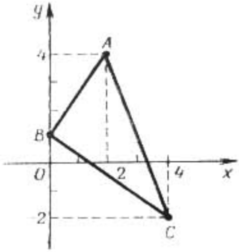

Fig. 71

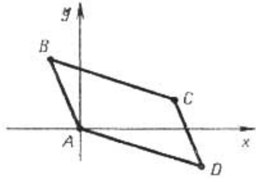

Fig. 72

2.17. Hállese el conjunto de los puntos cuyas coordenadas están ligadas por las relaciones siguientes: **1.** a) $y = |x|$; b) $x = |y|$; c) $|y| = |x|$. **2.** $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$. **3.** $x + |x| = y + |y|$. **4.** $(x - y)(x - 2y) = 0$. **5.** $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$. **6.** $x + y > 0$. **7.** $x + y > 1$. **8.** $x - y < 1$. **9.** $\begin{cases} x - y > 0, \\ x - 2y > 0. \end{cases}$ **10.** $(x - y)(x - 2y) > 0$.

2.18. Escríbanse las ecuaciones que describen los siguientes conjuntos de los puntos: a) la recta que es paralela al eje de abscisas y pasa por el punto (1; 0); b) la recta que es paralela a la recta $y = x$ y pasa por el punto (—3; 7); c) el conjunto de los puntos que se encuentran a la distancia 2 del eje de coordenadas Oy.

2.19. Hállense las relaciones entre x e y que representan en el plano de coordenadas: a) un par de rectas $y = 3x$ e $y = x - 3$; b) la recta $y = x$ y el punto (—1; 2); c) toda la parte del plano que está por encima de la recta $y = x$ (incluyendo esta recta); d) una parte del plano entre las rectas $y = 0$ e $y = 1$ (sin estas rectas); e) el interior del cuadrado que tiene por vértices los puntos (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0).

2.20. Sobre un plano se dan tres puntos: A (3; —6), B (—200; 400), C (1000; —2000). Demuéstrese que estos puntos están sobre una misma recta.

2.21. Determínese cuáles de los tres puntos siguientes A (1; 3), B (—2; 1), C (—1; 7), D (3; 1) se encuentran sobre una misma recta.

2.22. Aplíquese la fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano de coordenadas a la demostración del teorema siguiente: en un paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de todos sus lados.

2.23. Detemínese: a) si el punto N (4,1; 1,9) está sobre la circunferencia que tiene por centro el punto C (1; —2) y por radio 5 (pruebe hacer uso de la fig. 73); b) si el punto K (0; $2\sqrt{6} - 2$) está sobre esta misma circunferencia; c) si el punto A (160; —1) se halla en la circunferencia que tiene por centro el punto (147; —6) y por radio 13.

2.24. Escríbase la ecuación de la circunferencia con el centro en el punto C $(-2; 3)$ y el radio igual a 5. Se conoce que el punto A $(a; -1)$ está sobre esta circunferencia. Determínese a.

2.25. Escríbase la ecuación de cada una de las cuatro rectas representadas en la fig. 74.

2.26. Escríbase la ecuación de la recta que es paralela a la bisectriz del cuadrante I y pasa por el punto $(0; -5)$.

2.27. Escríbase la ecuación de la recta que es paralela a la recta $y = 2x + 1$ y, además: a) pasa por el punto $(0; 2)$; b) pasa por el punto $(1; -1)$.

2.28. Se da la recta $2x + y - 6 = 0$ y sobre ella dos puntos A y B con las ordenadas $y_A = 6$ e $y_B = -2$. Escríbase la ecuación de la altura AD del triángulo AOB y hállese la longitud de esta altura y el área del triángulo AOB.

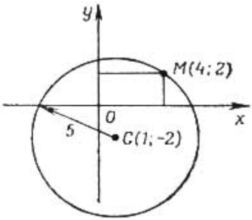

Fig. 73

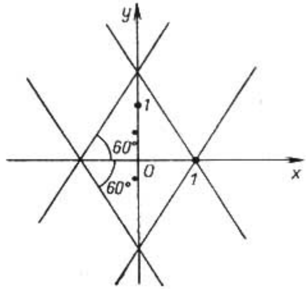

Fig. 74

2.29. Determínese la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1; 1)$ de un modo tal que el punto medio del segmento de esta recta comprendido entre las rectas $x + 2y - 1 = 0$ y $x + 2y - 3 = 0$ esté sobre la recta $x - y - 1 = 0$.

2.30. Determínense las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos comprendidos entre las rectas $3x + 4y - 1 = 0$ y $4x - 3y + 5 = 0$.

2.31. Hállese el conjunto de los puntos M, cuya diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos dados A y B es igual a la magnitud dada a. ¿Para qué valores de a el problema tiene solución?

2.32. Hállense las coordenadas de un punto que está situado en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y se halla alejado a igual distancia de los puntos $(1; 3)$ y $(-2; 2)$.

2.33. Determínese la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$, que pasa por el punto $(1; 2)$.

2.34. Escríbase la ecuación de la cuerda común de las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$, y $x^2 + y^2 = 2by$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

2.35. Plantéense las ecuaciones de las tangentes comunes a las circunferencias $x^2 + y^2 = 6x$ y $x^2 + y^2 = 6y$.

2.36. Fórmese la ecuación de la parábola que pasa por el punto $(6; 9)$ y tiene por vértice el origen de coordenadas y por eje de simetría el eje Oy.

2.37. Las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ están disminuidas dos veces. Determínese la ecuación de la curva obtenida.

2.38. Determínense los semiejes de la elipse $3x^2 + 5y^2 - 30 = 0$.

2.39. Hállese la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $(1; 4)$ y $(7; 2)$ y es simétrica respecto a los ejes Ox y Oy.

2.40. Se da la elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. Hállese la ecuación de la hipérbola que tiene por foco los vértices de la elipse dada y por vértices sus focos.

2.41. Escríbase la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ el cual es perpendicular a la recta $5x+2y-13=0$.

2.42. Determínese la distancia mínima entre el punto M_0 y los puntos de la circunferencia Γ si:

a) M_0 $(6;\ -8)$; Γ: $x^2+y^2=9$;
b) M_0 $(-7;\ 2)$; Γ: $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

2.43. Determínese si la recta asignada L corta a la circunferencia dada Γ, o es tangente a ésta o pasa fuera de ella:

a) L: $2x-y-3=0$; Γ: $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;
b) L: $x-2y-1=0$; Γ: $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;
c) L: $x-y+10=0$; Γ: $x^2+y^2-1=0$.

2.44. Constrúyase la elipse $9x^2+25y^2=225$. Determínense: a) sus semiejes; b) las coordenadas de sus focos; c) su excentricidad; d) las ecuaciones de las directrices.

2.45. Determínese si la recta asignada L corta la elipse dada Γ, o es tangente a ésta o pasa fuera de ella:

a) L: $2x-y-3=0$, Γ: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

b) L: $2x+y-10=0$, Γ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

c) L: $3x+2y-20=0$, Γ: $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.

2.46. Constrúyase la hipérbola $16x^2-9y^2=144$. Hállense: a) sus semiejes real e imaginario; b) las coordenadas de sus focos; c) la excentricidad; d) las ecuaciones de sus asíntotas; e) las ecuaciones de sus directrices.

2.47. Constrúyase la hipérbola $16x^2-9y^2=-144$, «conjugada» de la hipérbola $16x^2-9y^2=144$ dada en el problema 2.46. Determínese: a) su excentricidad; b) las ecuaciones de sus directrices.

2.48. Hállense los conjuntos de los puntos cuyas coordenadas están ligadas por las relaciones:

a) $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225<0, \\ 3x+5y-15<0, \\ y+2>0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+4y^2-16>0, \\ y+3>0, \\ x+y-2<0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-4y^2-4>0; \\ 4x+3y-12<0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144>0, \\ 2x-y-6<0, \\ 3x+y+12>0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y^2-10x<0, \\ 5x-3y-15<0, \\ y-2<0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2+8y<0, \\ 2x+3y+6<0, \\ 16x^2-9y^2\geqslant 144. \end{cases}$

2.49. Determínese el conjunto de los puntos para los cuales el producto de sus distancias a dos rectas dadas que se intersecan es igual a $C=\text{const}$.

2.50. Determínese el conjunto de los centros de las circunferencias que pasan por el punto dado A y tocan la recta dada L.

3

TEORÍA DE LOS LÍMITES

En este capítulo se examina la teoría fundamental de la matemática, o sea, la teoría de los límites. Esta teoría es el fundamento sobre el que está construida una magnífica obra que lleva el nombre de «análisis matemático». Actualmente el análisis matemático es un instrumento insustituible de investigación en los más distintos dominios de la ciencia y la técnica. Ahora el conocimiento del cálculo diferencial e integral es indispensable a todo ingeniero y colaborador científico. Sin embargo, para estudiar el análisis matemático y poder emplearlo correctamente es necesario primero dominar la teoría de los límites.

El estudio de la teoría de los límites comenzó en la matemática elemental donde con ayuda de los pasos al límite se determinan la longitud de la circunferencia, el volumen del cilindro y del cono, etc. Esta teoría se utiliza también al determinar la suma de la progresión geométrica decreciente. La operación de paso al límite es una de las principales del análisis matemático. En este capítulo vamos a considerar la forma elemental de la operación de paso al límite, basada en el concepto de límite de una sucesión numérica.

§ 1. Sucesiones numéricas

1. Sucesiones numéricas y operaciones aritméticas con ellas. Progresiones. Las sucesiones numéricas ya se encuentraon en el programa de enseñanza secundaria. De ejemplos de tales sucesiones sirven: 1) la sucesión de los términos de las progresiones aritmética y geométrica; 2) la sucesión de los perímetros de los polígonos regulares de n lados inscritos en la circunferencia dada; 3) la sucesión $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$, ... de los valores aproximados de $\sqrt{2}$. Vamos a precisar y extender el concepto de sucesión numérica.

Definición 1. *Si a cada número n de la serie natural de números*

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

se le hace corresponder un número real x_n, *el conjunto de los números reales*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

se llama sucesión numérica o simplemente sucesión [1]).

Los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ los denominaremos *elementos* (o *términos*) de la sucesión (1); el símbolo x_n, *elemento general* (o *término general*) de la sucesión y el número n, su *número de orden* [2]). En forma abreviada la sucesión (1) se designará con el símbolo $\{x_n\}$. Así, por ejemplo, el símbolo $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ designa la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

La fórmula que define x_n se llama *fórmula del elemento general* (o del *término general*) de la sucesión $\{x_n\}$. Por ejemplo, la sucesión $\{n^2\}$ está definida por la fórmula $x_n = n^2$. Con ayuda de esta fórmula se puede calcular todo elemento de la sucesión; $x_1 = 1^2 = 1$, $x_5 = 5^2 = 25$, $x_{10} = 10^2 = 100$, etc.

○ **Ejemplo 1.** Se da la fórmula del elemento general de la sucesión: $x_n = \frac{n}{n+1}$. Escríbanse los primeros cinco elementos de la sucesión.

Resolución. Poniendo sucesivamente $n = 1, 2, 3, 4, 5$ en el elemento general x_n, obtenemos $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 4/5$, $x_5 = 5/6$. ●

Ejercicios. Escríbanse los primeros cinco elementos de cada una de las sucesiones definidas por sus elementos generales:

1. $x_n = \frac{1}{2n+1}$. (*Resp.* $x_1 = 1/3$; $x_2 = 1/5$, $x_3 = 1/7$; $x_4 = 1/9$, $x_5 = 1/11$).
2. $x_n = \frac{n+2}{n^3+1}$. (*Resp.* $x_1 = 3/2$; $x_2 = 4/9$, $x_3 = 5/28$, $x_4 = 6/65$, $x_5 = 7/126$.)
3. $x_n = \frac{n}{2^{n+1}}$. (*Resp.* $x_1 = 1/2^2$, $x_2 = 2/2^3$, $x_3 = 3/2^4$, $x_4 = 4/2^5$, $x_5 = 5/2^6$).
4. $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n+1}{n^2}$. (*Resp.* $x_1 = 2$; $x_2 = -3/2^2$, $x_3 = 4/3^2$, $x_4 = -5/4^2$, $x_5 = 6/5^2$.)

○ **Ejemplo 2.** Conociendo unos cuantos primeros elementos de la sucesión, escríbase la fórmula del elemento general de la sucesión $1; 1/3^2; 1/5^2; 1/7^2; \ldots$.

---

[1]) Con otras palabras, la sucesión numérica puede definirse como un conjunto de pares de números $(n; x_n)$ en los cuales el primer número toma sucesivamente los valores de $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, o sea, $(1; x_1)$, $(2, x_2)$, $(3, x_3)$, $\ldots$, $(n; x_n)$, $\ldots$.

[2]) El número de orden del elemento ha de entenderse en sentido usual, por ejemplo, como un número bajo el cual aparece un jockeísta o un futbolista.

Resolución. Los denominadores de los elementos dados de la sucesión forman la sucesión de todos los números naturales impares elevados a la potencia 2. Por eso en calidad de la fórmula buscada se puede elegir la siguiente:

$$x_n = \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Sin embargo, el conocimiento de algunos primeros elementos de una sucesión no determina todavía la misma sucesión. Por eso el problema dado debe considerarse como un problema de determinación de cierta regularidad inductiva simple que concuerde con los elementos dados de la sucesión. ●

Ejercicios. Conociendo algunos primeros elementos de una sucesión, escríbase la fórmula del elemento general de las sucesiones siguientes:

1. $1; \frac{1}{1\cdot 2}; \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}; \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}; \ldots$ $\left(\textit{Resp. } x_n = \frac{1}{n!}.\right)$

2. $1;\ 2\frac{1}{4};\ 2\frac{7}{9};\ 3\frac{1}{16};\ 3\frac{6}{25};\ \ldots$ $\left(\textit{Resp. } x_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2.\right.$

Indicación: $\left.1;\ \frac{3^2}{2^2};\ \frac{5^2}{3^2};\ \frac{7^2}{4^2};\ \ldots\right).$

3. $2;\ 10;\ 26;\ 82;\ 242;\ 730;\ \ldots$ ($\textit{Resp. } x_n = 3^n + (-1)^n$.

Indicación: $3-1;\ 3^2+1;\ 3^3-1;\ 3^4+1;\ 3^5-1;\ 3^6+1;\ \ldots$).

La fórmula que define x_n no es única. Así, por ejemplo, la sucesión: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ se define por la fórmula $x_n = (-1)^n$ o por la fórmula $x_n = \cos \pi n$. No siempre la sucesión $\{x_n\}$ puede ser representada analíticamente, por ejemplo, la sucesión de los valores aproximados de $\sqrt{2}$.

La sucesión $\{x_n\}$ se considera definida si se indica el método de obtención de todo elemento suyo. Por ejemplo, si $x_n = 1 + (-1)^n$, la sucesión se escribirá en la forma $0, 2, 0, 2, \ldots$. Convirtiendo la fracción $1/3$ en fracción decimal, también obtenemos la sucesión $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = 0{,}33$, $x_3 = 0{,}333$, $\ldots$, $x_n = \underbrace{0{,}333\ldots3}_{n \text{ ternas.}}\ldots$

Con frecuencia se utiliza el método recurrente de representar la sucesión $\{x_n\}$. Este método consiste en que se dan: 1) el primer elemento de la sucesión x_1 (o varios primeros elementos) y 2) la fórmula (o la relación recurrente) que indica qué operaciones deben ejecutarse para calcular el elemento siguiente (o varios elementos siguientes). Así, si se conoce que: 1) el primer elemento $x_1 = 1$ y 2) para todo $n \geqslant 1$ $x_{n+1} = (n+1)\,x_n$, entonces, cumpliendo sucesivamente las operaciones definidas por la fórmula dada, resulta

$$(n=1)\ x_2 = x_{1+1} = (1+1)\cdot x_1 = 2\cdot 1! = 2!,$$
$$(n=2)\ x_3 = x_{2+1} = (2+1)\cdot x_2 = 3\cdot 2! = 6 = 3!,$$

$$(n = 3)\ x_4 = x_{3+1} = (3+1)\cdot x_3 = 4\cdot 3! = 24 = 4!,$$
$$(n = 4)\ x_5 = x_{4+1} = (4+1)\cdot x_4 = 5\cdot 4! = 120 = 5!,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

De esta manera, la relación recurrente dada define la sucesión $1!, 2!, 3!, 4!, 5!, \ldots, n!, \ldots$ [1]) en la cual el elemento general se define por la fórmula $x_n = n!$ Nótese que al deducir estrictamente la fórmula del elemento general hace falta emplear el método de inducción matemática. (Hágase esto por sí mismo.)

Ejercicios. Escríbanse los primeros cinco elementos y la fórmula del elemento general de las sucesiones siguientes: **1.** $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n!$ (*Resp.* $1!, 1!, 1!, 1!, 1!, x_n = 1!$) **2.** $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 3$. (*Resp.* $1, 4, 7, 10, 13; x_n = 3n - 2$.)

Citemos un ejemplo más. La sucesión $\{x_n\}$ se define por los primeros dos elementos $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y por la relación recurrente $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ para todo $n \geqslant 3$. Aquí la relación recurrente liga x_n con los dos precedentes. Para obtener la sucesión es necesario conocer los primeros dos elementos de la sucesión. Escribamos varios primeros elementos de la misma:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots.$$

Esta sucesión posee una serie de propiedades interesantes e importantes. Sus elementos se llaman *números de Fibonacci* (nombre del matemático italiano que vivió en los siglos XII—XIII). Si en el primer ejemplo es fácil encontrar la fórmula del elemento general conociendo el primer elemento y la relación recurrente, para los números de Fibonacci es bastante difícil hallar la fórmula mencionada. [2])

Geométricamente la sucesión $\{x_n\}$ se representa sobre la recta numérica en forma de una sucesión de puntos, cuyas coordenadas son iguales a los elementos correspondientes de la sucesión. En la fig. 75 se muestran las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ respectivamente.

Puede resultar que el mismo punto de la recta numérica corresponde a varios elementos de la sucesión, por ejemplo, para la sucesión con el elemento general $x_n = (-1)^n$ todos los elementos con números pares caen al punto con la coordenada 1, y con números impares, al punto que tiene por coordenada -1; para la sucesión con el elemento general $x_n = 5$, o sea, para la sucesión 5, 5, 5, 5, . . ., todos los elementos caerán al mismo punto con las coordenadas 5.

---

[1]) Recuérdese que $n!$ es la designación abreviada del producto $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ por definición $1! = 1$.

[2]) Para familiarizarse con los números de Fibonacci y sus propiedades recomendamos, por ejemplo, el libro: *N. N. Vorobiev.* Números de Fibonacci. M., Mir. 1974.

Introduzcamos el concepto de operaciones aritméticas con sucesiones numéricas. Supongamos que se dan las sucesiones arbitrarias $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Se llama *producto* de la

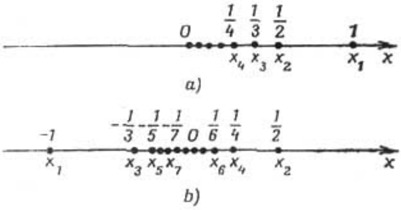

Fig. 75

sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ por el número m a la sucesión

$$mx_1, \ mx_2, \ \ldots, \ mx_n, \ \ldots.$$

Se llama *suma* de las sucesiones dadas a la sucesión

$$x_1 + y_1, \ \ x_2 + y_2, \ \ldots, \ x_n + y_n, \ \ldots;$$

diferencia de las sucesiones dadas a la sucesión

$$x_1 - y_1, \ \ x_2 - y_2, \ \ldots, \ x_n - y_n, \ \ldots;$$

producto de las sucesiones dadas a la sucesión

$$x_1 \cdot y_1, \ \ x_2 \cdot y_2, \ \ldots, \ x_n \cdot y_n, \ \ldots;$$

cociente de las sucesiones dadas a la sucesión

$$\frac{x_1}{y_1}, \ \frac{x_2}{y_2}, \ \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ \ldots,$$

si todos los elementos de la sucesión por la que se divide son distintos del cero.

Las operaciones indicadas que se realizan con las sucesiones se escriben simbólicamente así:

$$m\,\{x_n\} = \{mx_n\}, \quad \{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\},$$
$$\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}, \quad \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\},$$
$$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}, \quad y_n \neq 0\ ^{1)}.$$

---

1) $y_n \neq 0$ significa que los valores de y_n se distinguen del cero cualquiera que sea n.

Progresión aritmética. Definición 2. *La sucesión* $\{x_n\}$[1] *definida por el primer elemento* x_1 *y por la relación recurrente*

$$x_{n+1} = x_n + d,$$

donde d *es un número constante, se denomina* ***progresión aritmética.*** *El número* d *se llama* ***razón*** *(****diferencia****) de la progresión aritmética.*

La relación recurrente que define la progresión aritmética viene enunciada así: *todo término de una progresión aritmética, comenzando por el segundo, es igual al precedente sumado con el número constante d.*

Escribamos algunos primeros términos de la progresión aritmética: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_2 + d = x_1 + d + d = x_1 + 2d$, etc. Cada vez adicionamos un sumando más d. Por ejemplo, los números pares forman una progresión aritmética con el primer número $x_1 = 2$ y la razón $d = 2$:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ \ldots$$

□ Vamos a demostrar con ayuda del método de inducción matemática la fórmula del término general de la progresión aritmética

$$x_n = x_1 + d\,(n-1). \tag{2}$$

1) Para $n = 1$ tenemos $x_1 = x_1 + d\cdot 0$, o sea, la fórmula (2) es justa.

2) Suponiendo la validez de la fórmula (2) para cierto n, demostremos que es válida también para $n + 1$, o sea, demostremos la fórmula $x_{n+1} = x_1 + d\,[(n+1) - 1]$.

Efectivamente, por definición de la progresión aritmética, $x_{n+1} = x_n + d$. De aquí, utilizando la fórmula (2), hallamos

$$x_{n+1} = x_1 + (n-1)\,d + d = x_1 + d\,[(n+1) - 1],$$

que es lo que se quería demostrar. Basándonos en el método de inducción matemática, sacamos la conclusión de que la fórmula (2) es válida para todo número n.

Deduzcamos la fórmula de la suma de n términos de la progresión aritmética. Previamente demostremos la propiedad principal de los términos de una progresión aritmética finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$: *las sumas de los términos de una progresión que equidistan de sus extremos son iguales, o sea,*

$$x_m + x_n = x_k + x_l$$

si $m + n = k + l$.

En efecto, utilizando la fórmula (2), resulta

$$\begin{aligned} x_m + x_n &= x_1 + d\,(m-1) + x_1 + d\,(n-1) = \\ &= 2x_1 + d\,(m+n-2) = 2x_1 + d\,(k+l-2) = \\ &= x_1 + d\,(k-1) + x_1 + d\,(l-1) = x_k + x_l, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

---

[1]) A veces los términos de la progresión se designan con la letra a.

Determinemos ahora la suma S_n. Escribamos esta suma dos veces, poniendo los sumandos en diferente orden:

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n,$$
$$S_n = x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1.$$

Sumando término a término y utilizando la propiedad demostrada y la fórmula (2), hallamos

$$2S_n = (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + \ldots + (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) = n(x_1 + x_n) = n[2x_1 + d(n-1)],$$

de donde obtenemos las dos fórmulas siguientes:

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)\cdot n}{2} \text{ y } S_n = \frac{[2x_1 + d(n-1)]\cdot n}{2} \quad \blacksquare$$

○ **Ejemplo 3.** Escríbase la fórmula del término general de la sucesión si se conocen varios primeros términos suyos: 3, 5, 7, 9, 11, ...

Resolución. Los números dados forman la progresión aritmética que tiene por primer término $x_1 = 3$ y por razón $d = 2$. Según la fórmula (2) tenemos $x_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$.

Ejemplo 4. La suma de los primeros n términos de una sucesión se expresa por la fórmula $S_n = 3n^2$. Demuéstrese que esta sucesión es una progresión aritmética; hállese su primer miembro y su razón.

Resolución. Tenemos $x_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 3n^2 - 3n^2 + 6n - 3 = 3(2n-1)$. Puesto que la razón $x_n - x_{n-1} = 3(2n-1) - 3(2n-3) = 6n - 3 - 6n + 9 = 6$ no depende de n, la sucesión dada es una progresión aritmética que tiene por razón $d = 6$. El primer miembro de la progresión $x_1 = S_1 = 3$. ●

Progresión geométrica. Definición 3. *La sucesión* $\{x_n\}$ *definida por el primer elemento* x_1 *y por la relación recurrente*

$$x_{n+1} = x_n \cdot q,$$

donde q *es un número constante* $(q \neq 1)$ *se llama progresión geométrica. El número* q *se denomina razón de la progresión geométrica.*

La relación recurrente que define la progresión geométrica viene enunciada así: *todo término de la progresión geométrica, comenzando por el segundo, es igual al precedente multiplicado por el número constante* q.

Escribamos algunos primeros términos de la progresión geométrica: $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1 \cdot q$, $x_3 = x_2 \cdot q = x_1 \cdot qq = x_1 q^2$, etc. Por ejemplo, los números 2, 6, 18, 54, 162, . . . forman una progresión geométrica que tiene por razón $q = 3$ y por primer término $x_1 = 2$.

La fórmula del término general de la progresión geométrica

$$x_n = x_1 q^{n-1} \tag{3}$$

se demuestra de un modo exactamente igual que la fórmula del término general de la progresión aritmética (hágase esto de manera independiente).

□ Deduzcamos la fórmula de la suma de n términos de una progresión geométrica [1]. Para esto consideremos la suma

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{4}$$

y multipliquemos ambos miembros de la igualdad (4) por q. Puesto que $x_1 q = x_2$, $x_2 q = x_3$, $\ldots$, $x_n q = x_{n+1}$, entonces

$$S_n \cdot q = x_1 q + x_2 q + \ldots + x_n q = x_2 + x_3 + \ldots \\ \ldots + x_{n+1}. \tag{5}$$

Sustrayemos, término a término, de la igualdad (5) la igualdad (4). Todos los términos, salvo $x_{n+1} = x_n q$ y x_1, se suprimen. Por eso resulta

$$S_n q - S_n = x_{n+1} - x_1 = x_n q - x_1,$$

de donde

$$S_n = \frac{x_n q - x_1}{q-1} \quad \text{o bien} \quad S_n = \frac{x_1 - x_n q}{1-q}. \tag{6}$$

Puesto que $x_n = x_1 q^{n-1}$, la fórmula (6) puede escribirse de otro modo:

$$S_n = \frac{x_1 (q^n - 1)}{q-1} \quad \text{o bien} \quad S_n = \frac{x_1 (1 - q^n)}{1-q}. \quad \blacksquare \tag{7}$$

○ **Ejemplo 5.** Hállese en la progresión geométrica 1; −2; 4; −8; 16 el término 11 y la suma de seis términos.

Resolución. Determinemos primero la razón de la progresión geométrica. Para esto hágase uso de la relación recurrente. Tenemos

$$q = \frac{x_{n+1}}{x_n}; \quad q = \frac{x_5}{x_4} = \frac{16}{-8} = -2.$$

Con ayuda de la fórmula (3) calculemos el término 11:

$$x_{11} = x_1 q^{11-1} = 1\,(-2)^{10} = 1024$$

y por la primera de las fórmulas (7) calculemos la suma de seis términos:

$$S_6 = \frac{1 \cdot [(-2)^6 - 1]}{-2-1} = \frac{64-1}{-3} = -21. \quad \bullet$$

Téngase presente que el material ulterior puede ser estudiado felizmente sólo a condición de que quede comprendida bien la definición de la sucesión.

[1]) La deducción de la fórmula de la suma de una progresión geométrica decreciente infinita se da en el párrafo siguiente (véase el ejemplo 7).

2. Sucesiones acotadas y no acotadas.

Definición 4. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama acotada superiormente (inferiormente) si existe un número* M *(un número* m*) tal que todo elemento* x_n *de esta sucesión satisfaga la desigualdad* $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$.

Definición 5. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se dice acotada si está acotada superior e inferiormente, o sea, existen los números* m *y* M *tales que todo elemento* x_n *de esta sucesión satisface las desigualdades* $m \leqslant x_n \leqslant M$.

Designemos $A = \text{máx}\ \{|\,m\,|,\ |\,M\,|\}$. Entonces la condición de acotación de la sucesión puede escribirse en la forma $|\,x_n\,| \leqslant A$, o bien $-A \leqslant x_n \leqslant A$. Efectivamente, puesto que $A \geqslant |\,M\,| \geqslant M$ y $-A \leqslant -|\,m\,| \leqslant m$, para todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ se cumplen las desigualdades $-A \leqslant x_n \leqslant A$.

Definición 6. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama no acotada si para todo número positivo* A *existe un elemento* x_n *de esta sucesión que satisface la desigualdad* $|\,x_n\,| > A$ [1]).

De las definiciones dadas se deduce que si la sucesión está acotada superiormente, todos sus elementos pertenecen al infervalo en sentido lato $(-\infty,\ M]$ y si la sucesión está acotada inferiormente, al intervalo $[m,\ +\infty)$; en caso de que la sucesión esté acotada superior e inferiormente, sus elementos pertenecen al intervalo $[m,\ M]$. La sucesión no acotada puede ser acotada superiormente (inferiormente). Vamos a considerar algunos ejemplos.

○ 1. La sucesión $\{n\}$ o bien, lo que es lo mismo, $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ está acotada inferiormente, pero no está acotada superiormente $(m = 1)$.

2. La sucesión $\{-n\}$ o bien, lo que es lo mismo, $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$ está acotada superiormente, pero no está acotada inferiormente $(M = -1)$.

3. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ o bien, lo que es lo mismo, $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n}\ \ldots$ está acotada, ya que todo elemento x_n de esta sucesión satisface las desigualdades $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ $(m = 0,\ M = 1)$.

4. La sucesión $\{(-1)^n\, n\}$ o bien, lo que es lo mismo, $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \ldots,\ (-1)^n\, n\ \ldots$ está no acotada. En efecto, cualquiera que sea el número A entre los elementos x_n de esta sucesión siempre habrá elementos para los cuales se cumplirá la desigualdad $|\,x_n\,| > A$. ●

Ejercicios. ¿Están acotadas o no las sucesiones siguientes?:. **1.** $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. (*Resp.* Sí.). **2.** $\{2n\}$. (*Resp.* No.) **3.** $\{\ln\, n\}$. (*Resp.* No.) **4.** $\{\operatorname{sen} n\}$. (*Resp.* Sí.) **5.** $1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ 5,\ \ldots$ (*Resp.* No.) (Argumente las respuestas).

3. Sucesiones infinitamente grandes e infinitamente pequeñas.

---

[1]) Si $|\,x_n\,| > A$ $(A > 0)$, entonces o bien $x_n > A$, o bien $x_n < -A$ (demuéstrese esto por sí mismo).

Definición 7. *La sucesión* $\{x_n\}$ *se llama infinitamente grande si para todo número positivo* A *(cualquiera que sea de grande) existe un número de orden* N *tal que para* $n > N$ [1]) *se cumple la desigualdad* $|x_n| > A$.

Observación. Es evidente que toda sucesión infinitamente grande no está acotada. Sin embargo, una sucesión no acotada puede no ser infinitamente grande. Por ejemplo, la sucesión no acotada 1, 2, 1, 3, . . ., 1, n, 1, $n+1$, . . . no es infinitamente grande, puesto que para $A > 1$ la desigualdad $|x_n| > A$ no tiene lugar para todos los elementos x_n con números impares.

Definición 8. *La sucesión* $\{\alpha_n\}$ *se llama infinitamente pequeña si para todo número positivo* ε *(cualquiera que sea de pequeño) existe un número de orden* N *tal que para* $n > N$ *se cumple la desigualdad* $|\alpha_n| < \varepsilon$.

○ **Ejemplo 6.** Utilizando la definición 7, demuéstrese que la sucesión $\{n\}$ es infinitamente grande.

Resolución. Tomemos todo número $A > 0$. De la desigualdad $|x_n| = |n| > A$ obtenemos $n > A$. Si se toma $N \geqslant A$, entonces para todos los números $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|x_n| > A$, o sea, según la definición 7 la sucesión $\{n\}$ es infinitamente grande. ●

Ejercicios. Haciendo uso de la definición 7, demuéstrese que las sucesiones: **1.** $\{-n\}$. **2.** $\{n^2\}$. **3.** $\{(-1)^{n+1}n\}$ son infinitamente grandes.

○ **Ejemplo 7.** Utilizando la definición 8, demuéstrese que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es infinitamente pequeña.

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. De la desigualdad $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ obtenemos $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Si se toma $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ [2]), para todos los números $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$. (Para $\varepsilon = \frac{1}{10}$ obtenemos $N = [10] = 10$, para $\varepsilon = 4/15$ tenemos $N = [15/4] = 3$, etc.). Por lo tanto, según la definición 8, la sucesión $\{1/n\}$ es infinitamente pequeña. ●

Ejercicios. Utilizando la definición 8, determínese si son infinitamente pequeñas las sucesiones siguientes:

1. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. **2.** $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}(k > 0)$. **3.** $\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$.

(**Indicación:** Hágase uso de la desigualdad $\frac{2n}{n^2+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$.)

[1]) «Para $n > N$» significa para todos los elementos de la sucesión con números $n > N$.

[2]) El símbolo $[x]$ denota el número entero máximo que no supera x. Por ejemplo, $[1] = 1$, $[3{,}1] = 3$, $[0{,}7] = 0$, $[-0{,}5] = -1$, $[-172{,}9] = -173$, $[\pi] = 3$, $[\log 2] = 0$, etc.

Al final del subpárrafo dado vamos a demostrar un teorema que establece la relación entre las sucesiones infinitamente grandes e infinitamente pequeñas.

Teorema 3.1. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión infinitamente grande y todos sus términos se distinguen del cero, $x_n \neq 0$, la sucesión $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es infinitamente pequeña e, inversamente, si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, $\alpha_n \neq 0$, la sucesión $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ es infinitamente grande.*

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión infinitamente grande. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$ y pongamos $A = \frac{1}{\varepsilon}$. Según la definición 7 para este número A existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|x_n| > A$. Entonces $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} = \varepsilon$, o sea, $|\alpha_n| < \varepsilon$ para todos los números $n > N$. Y esto quiere decir que la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es infinitamente pequeña.

La segunda parte del teorema se demuestra de un modo análogo. ■

Todas las demostraciones efectuadas están basadas en la comprobación del cumplimiento de las condiciones enunciadas en las definiciones. Por eso es necesario comprender claramente las definiciones dadas.

4. Propiedades fundamentales de las sucesiones infinitamente pequeñas.

Teorema 3.2. *La suma y la diferencia de dos sucesiones infinitamente pequeñas son sucesiones infinitamente pequeñas.*

□ **Demostración.** Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ sucesiones infinitamente pequeñas. Se necesita demostrar que la sucesión $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ es infinitamente pequeña. Sea ε un número positivo arbitrario; N_1, el número de orden comenzando por el cual $|\alpha_n| < \varepsilon/2$, y N_2, el número de orden comenzando por el cual $|\beta_n| < \varepsilon/2$. (Tales números de orden N_1 y N_2 se determinarán según la definición de la sucesión infinitamente pequeña.) Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$; entonces para $n > N$ se cumplirán simultáneamente dos desigualdades: $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ y $|\beta_n| < \varepsilon/2$. Por consiguiente, para $n > N$

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ^{1)}.$$

Esto quiere decir que la sucesión $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ es infinitamente pequeña. ■

---

[1]) Aquí hemos utilizado la propiedad de los valores absolutos $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (véase el teorema 1.3).

Corolario. *La suma algebraica de todo número finito de sucesiones infinitamente pequeñas es una sucesión infinitamente pequeña.*

Teorema 3.3. *El producto de dos sucesiones infinitamente pequeñas es una sucesión infinitamente pequeña.*

□ **Demostración.** Sean $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ sucesiones infinitamente pequeñas. Es necesario demostrar que $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña. Puesto que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es infinitamente pequeña, para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número de orden N_1 tal que $|\alpha_n| < \varepsilon$ para $n > N_1$ y puesto que la sucesión $\{\beta_n\}$ es también infinitamente pequeña, para $\varepsilon = 1$ existe un número de orden N_2 tal que $|\beta_n| < 1$ para $n > N_2$. Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$; entonces para $n > N$ se cumplirán ambas desigualdades. Por lo tanto, para $n > N$

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon.$$

Esto significa que la sucesión $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ es infinitamente pequeña. ■

Corolario. *El producto de todo número finito de sucesiones infinitamente pequeñas es una sucesión infinitamente pequeña.*

Observación. El cociente de dos sucesiones infinitamente pequeñas puede ser toda sucesión y puede no tener sentido. Por ejemplo, si $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n$, todos los elementos de la sucesión $\{\alpha_n/\beta_n\}$ son iguales a la unidad y la sucesión dada está acotada. Si $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n^2$, la sucesión $\{\alpha_n/\beta_n\}$ es infinitamente grande y, viceversa, si $\alpha_n = 1/n^2$ y $\beta_n = 1/n$, la sucesión $\{\alpha_n/\beta_n\}$ es infinitamente pequeña. Si comenzando por cierto número de orden los elementos de la sucesión $\{\beta_n\}$ son iguales a cero, la sucesión $\{\alpha_n/\beta_n\}$ no tiene sentido.

Ejercicio. Mostrar que el cociente de dos sucesiones infinitamente grandes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ puede ser toda sucesión, utilizando a título de ejemplos las sucesiones $\{n\}$ y $\{n^2\}$.

Teorema 3.4. *El producto de una sucesión acotada por otra sucesión que es infinitamente pequeña es una sucesión infinitamente pequeña.*

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y $\{\alpha_n\}$, una sucesión infinitamente pequeña. Se necesita demostrar que la sucesión $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ es infinitamente pequeña. La sucesión $\{x_n\}$ está acotada, por eso existe un número $A > 0$ tal que todo elemento x_n safistace la desigualdad $|x_n| \leqslant A$. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. Puesto que $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, para el número positivo ε/A existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon/A$. Entonces para $n > N$

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

Esto quiere decir que la sucesión $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ es infinitamente pequeña. ■

Corolario. *El producto de una sucesión infinitamente pequeña por un número es una sucesión infinitamente pequeña.*

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese la definición de sucesión.
2. ¿Cuándo la sucesión se considera definida? Cítense ejemplos.
3. ¿En qué consiste la representación recurrente de una sucesión? Cítese un ejemplo.
4. Dese la interpretación geométrica de sucesión. Cítense ejemplos.
5. Dese la definición de las operaciones aritméticas con las sucesiones.
6. ¿Por qué de la definición de la sucesión se deduce que ésta tiene un número infinito de elementos?
7. Enúnciese la definición de progresión aritmética.
8. Dedúzcase la fórmula de la suma de n términos de una progresión aritmética.
9. Enúnciese la definición de progresión geométrica.
10. Dedúzcase la fórmula de la suma de n términos de una progresión geométrica.
11. Enúnciense las definiciones de una sucesión acotada y no acotada. Dese la interpretación geométrica de estas definiciones.
12. Cítese un ejemplo de una sucesión acotada que tiene: a) los elementos máximo y mínimo; b) el elemento máximo, pero no tiene el mínimo; c) el elemento mínimo, pero no tiene el máximo.
13. Enúnciense las definiciones de las sucesiones infinitamente pequeña e infinitamente grande. Dese la interpretación geométrica de estas definiciones.
14. Cítese un ejemplo de una sucesión no acotada que no sea infinitamente grande.
15. ¿Puede llamarse infinitamente pequeña la sucesión que tiene un elemento común $x_n = 0$?
16. Cítese un ejemplo cuando los valores de los elementos de una sucesión infinitamente pequeña al crecer tienden a cero. ¿Cómo se llama tal sucesión?
17. Cítese un ejemplo cuando los valores de los elementos de una sucesión infinitamente grande al crecer n decrecen. ¿Cómo se llama tal sucesión?
18. Se da la sucesión $1;\ \frac{1}{2};\ 2;\ \frac{1}{3};\ 3;\ \frac{1}{4};\ 4;\ \frac{1}{5};\ \ldots,\ n;\ \frac{1}{n};\ \ldots$. ¿Por qué esta sucesión no es infinitamente pequeña a pesar de que por pequeño que sea el número $\varepsilon > 0$ que tomamos entre los elementos de la sucesión siempre habrá elementos menores en módulo que ε? ¿Por qué esta sucesión no es infinitamente grande, a pesar de que por grande que sea el número $A > 0$ que tomamos entre los elementos de la sucesión siempre habrá elementos mayores en módulo que A? ¿Cómo se llama esta sucesión?
19. ¿Es acotada la sucesión infinitamente pequeña?
20. Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ es: 1) infinitamente pequeña; b) infinitamente grande. ¿Se deduce de aquí que la sucesión $\{1/x_n\}$ (a condición de que $x_n \neq 0$ para todos los n) es: a) infinitamente grande; b) infinitamente pequeña?

§ 2. Sucesiones convergentes

En este párrafo se considera el concepto de límite de una sucesión numérica que es uno de los conceptos más importantes en el análisis matemático.

1. Concepto de sucesión convergente.

Definición. *El número a se llama límite de la sucesión numérica $\{x_n\}$ si para todo número positivo ε existe un número de orden N tal* *que para $n > N$ se cumple la desigualdad*

$$| x_n - a | < \varepsilon. \tag{1}$$

En este caso la sucesión $\{x_n\}$ se llama *convergente*.

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge y tiene por su límite el número a, esto se escribe simbólicamente así:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\ ^{1)} \text{ o bien } x_n \to a \text{ para } n \to \infty.$$

La sucesión que no es convergente se llama *divergente*.

De la definición de límite se deduce que, por pequeño que sea el número $\varepsilon > 0$, comenzando por cierto número de orden N todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ se diferenciarán del número a en menos de ε, o sea $| x_n - a | < \varepsilon$ para $n > N$. Esto significa precisamente que los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ se aproximan indefinidamente al número a siempre que crezca indefinidamente el número de orden n.

No es casual que en la definición se destaca la palabra «todo». En esta palabra «se apoya» toda la definición.

A título de ejemplo examinemos la cuestión sobre el límite de la sucesión

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots .$$

Con el aumento de n esta sucesión no tiene límite, ya que oscila entre los valores de $+1$ y -1 sin acercarse a ningún número (véase la demostración estricta en la observación para el teorema 3.6).

«Demostremos», utilizando la definición, que la sucesión tiene «límite igual a 0». Efectivamente, para $\varepsilon = 2$ la desigualdad $| (-1)^n - 0 | < \varepsilon$ se cumple para todos los números de orden n. Por consiguiente, se puede tomar $N = 1$ y todo «quedará demostrado». El error consiste en el hecho de que, por ejemplo, para $\varepsilon = 1/2$ la desigualdad $| (-1)^n - 0 | < \varepsilon$ ya no se cumple para ningún n, o sea, durante «la demostración» no se observa la exigencia principal de la definición consistente en que la desigualdad $| x_n - a | < \varepsilon$ se cumpla para *todo* número $\varepsilon > 0$, en particular, también para $\varepsilon = 1/2$, al menos comenzando por cierto número de orden N.

Enunciemos la definición siguiente: *el número a no es el límite de la sucesión $\{x_n\}$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo número de orden N habrá un número de orden $n > N$ tal que se cumple la desigualdad* $| x_n - a | \geqslant \varepsilon$.

Comparando las definiciones dadas, vemos que para construir la negación es necesario reemplazar recíprocamente las palabras «existe» y «todo» y sustituir la desigualdad por la contraria.

---

1) Esta notación se lee así: «el límite de x_n para n que tiende al infinito es igual a a».

Esta regla puede utilizarse también para construir la negación en todas otras definiciones dadas en el sentido de «$\varepsilon - N$».

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición de límite, mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. Puesto que $|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$, para encontrar los valores de n que satisfagan la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$ basta resolver la inecuación $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, de donde resulta $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. *Por lo tanto, por N se puede tomar* la parte entera del número $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, o sea, $N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$. Entonces la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$ se cumplirá para todos los números $n > N$. Puesto que ε es todo número, queda demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Según la definición en este ejemplo a es igual a 1.

Para comprender más claramente la definición de límite comprobemos los cálculos realizados con números concretos.

Tomemos, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}01$. Entonces $N = \left[\frac{1-0{,}01}{0{,}01}\right] = 99$ y para $n > N = 99$ tenemos $|x_n - 1| < 0{,}01$. En particular, para $n < N$ ($n = 97$, $n = 98$) la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon = 0{,}01$ no se cumple. En efecto, sea $n = 98$. Entonces

$$|x_{98} - 1| = |98/99 - 1| = |-1/99| = 1/99 > 1/100$$

y si se toma $n > 99$, por ejemplo, $n = 100$, entonces

$$|x_{100} - 1| = |100/101 - 1| = |-1/101| = 1/101 < 1/100.$$

Ahora bien, la desigualdad $|x_n - 1| < 0{,}01$ se cumple sólo para números de orden n mayores que 99.

Si se toma el valor de $\varepsilon < 0{,}01$, *por ejemplo*, $\varepsilon = 0{,}001$, el valor del número de orden N aumentará. En efecto, $N = \left[\frac{1-0{,}001}{0{,}001}\right] = 999$ y para $n > N = 999$ obtenemos $|x_n - 1| < 0{,}001$.

En conclusión mostremos que el número 2 no es límite de la sucesión dada. Para esto consideremos el valor absoluto de la diferencia

$$|x_n - 2| = \left|\frac{n}{n+1} - 2\right| = \left|-\frac{n+2}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1}$$

y resolvamos respecto a n la desigualdad $\frac{n+2}{n+1} < \varepsilon$. Sin embargo, en el caso dado se puede no hacer esto, ya que para todo valor del número de orden n (n puede ser sólo un número entero y positivo) el número $\frac{n+2}{n+1} > 1$ y, por consiguiente, no puede ser menor que un número positivo arbitrario dado ε, por ejemplo, $\varepsilon = 1/2$. Esto demuestra precisamente que el número 2 no es límite de la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Ejemplo 2. Utilizando la definición de límite, demuéstrese que si $|q| < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \tag{2}$$

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$ y $q \neq 0$. Puesto que para $|q^n - 0| = |q|^n$, para hallar valores de n que satisfagan la desigualdad $|q^n - 0| < \varepsilon$ basta resolver la inecuación $|q|^n < \varepsilon$ o bien, para no utilizar los logaritmos negativos ($|q| < 1$), $\left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Después de la logaritmación resulta

$$n \log \frac{1}{|q|} > \log \frac{1}{\varepsilon},$$

de donde $n > \frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/|q|)}$. Por lo tanto, si se toma $N = \left[\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/|q|)}\right]$, para todos los $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|q^n - 0| < \varepsilon$. Puesto que ε es todo número, entonces según la definición $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Si $q = 0$, la relación (2) es evidente, ya que la desigualdad $|q^n - 0| < \varepsilon$ se cumple para todo número n.

Ejemplo 3. Utilizando la definición de límite, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Resolución. Mostremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Puesto que $\sqrt[n]{n} > 1$, entonces $|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$, de donde resulta $n < (1+\varepsilon)^n$.

Hagamos uso del hecho de que

$$(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \tag{3}$$

(aquí hemos empleado la fórmula del binomio de Newton [1]) y demostremos que la desigualdad $n < (1+\varepsilon)^n$ se cumple para $n > 1 + 2/\varepsilon^2$. Efectivamente, sea $n \geqslant (1+\varepsilon)^n$; entonces de la de-

[1]) Recuérdese que la fórmula del binomio de Newton tiene la forma $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$.

sigualdad (3) se desprende que $n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$, de donde $n < 1 + 2/\varepsilon^2$. Por eso para $n > 1 + 2/\varepsilon^2$ la desigualdad $n \geqslant (1+\varepsilon)^n$ no se cumple y, por consiguiente, se cumple la desigualdad $n < (1+\varepsilon)^n$ y, por lo tanto, también la desigualdad $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$. Así pues, si se toma $N = [1 + 2/\varepsilon^2]$, para $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$. Puesto que ε es todo número, entonces, según la definición, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. ●

Ejercicios. a) Utilizando la definición de límite, demuéstrese que: **1.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2} = 0$. **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3} = 2$. **3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n} = 1$. (**Indicación:** represéntese la expresión del elemento general de la sucesión en la forma $x_n = (3^n-1)/3^n = 1 - 1/3^n$ o bien $x_n - 1 = -1/3^n$.) **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$. **5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$. **6.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}} = 0$.

b) Se conoce que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1} = 2$. Determínese el número de orden N comenzando con el cual se cumple la desigualdad $\left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001$. (*Resp.* La desigualdad $\left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ se cumple para $n > N = [1/\varepsilon - 1]$. Para $\varepsilon = 0{,}1$ la desigualdad se cumple comenzando por $N = 10$; para $\varepsilon = 0{,}01$, comenzando por $N = 100$; para $\varepsilon = 0{,}001$, por $N = 1000$.)

Observación 1. Supongamos que $\{x_n\}$ converge y tiene por su límite cierto número a. Entonces la diferencia $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, ya que para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ [1]). Por consiguiente, todo elemento x_n de una sucesión convergente que tiene por límite el número a puede ser representado en la forma

$$x_n = a + \alpha_n, \tag{4}$$

donde α_n es un elemento de la sucesión infinitamente pequeña $\{\alpha_n\}$. Es obvio que es válido también lo inverso: si x_n puede representarse en la forma $x_n = a + \alpha_n$, donde $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (demuéstrese esto por sí mismo). La representación (4) será utilizada para demostrar los teoremas 3.7 a 3.9 sobre los límites de las sucesiones.

○ **Ejemplo 4.** Demuéstrese que el límite de la sucesión $C, C, C, \ldots$ con el término general $x_n = C = \text{const}$ es igual al número C, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

---

[1]) De aquí, en particular, se deduce que toda sucesión infinitamente pequeña es convergente y tiene por su límite el número $a = 0$.

Resolución. Efectivamente, la sucesión $\{x_n - C\} = C - C = 0$ y por eso, en virtud de la representación (4), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$. ●

Observación 2. El límite de la sucesión numérica tiene una interpretación geométrica. La desigualdad (1) es equivalente a las desigualdades

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{o bien} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$ [1])

que significan que el elemento x_n se encuentra en el ε-entorno del punto a (fig. 76). Por eso la definición de límite de una sucesión puede enunciarse del modo siguiente: *el número a se llama límite de la sucesión $\{x_n\}$ si para todo ε-entorno del punto a existe un número de orden N tal que todos los elementos x_n con los números de orden $n > N$ estén en este ε-entorno.*

○ Para ilustrar lo dicho retornemos una vez más al ejemplo 1. Si $\varepsilon = 0{,}01$ y $n > 99$, todos los términos de la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ comenzando por el término que lleva el número de orden $n = 100$ (x_{100}) caerán al ε-entorno dado del número $a = 1$ $(-0{,}01 < x_n - 1 < 0{,}01$ ó $1 - 0{,}01 < x_n < 1 + 0{,}01)$, o sea en la recta numérica pertenecerán al intervalo $(0,99; 1{,}01)$. ●

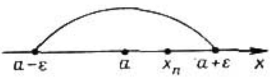

Fig. 76

Cabe señalar que el número N en la definición de límite de una sucesión depende tanto de la sucesión que se considera como del número ε tomado arbitrariamente. Cuanto menor sea ε, tanto mayor será N (véase el ejemplo 1), a excepción del caso cuando la sucesión se compone de un solo elemento. Por ejemplo, la sucesión 1, 1, 1, 1, . . ., definida por el elemento general $x_n = 1$, tiene por su límite el número 1 (véase el ejemplo 4) y la desigualdad $|x_n - 1|$ se cumple para todo número N independientemente del número ε tomado.

Observación 3. Es evidente que las sucesiones infinitamente grandes no tienen límite en el sentido en que hemos definido el límite anteriormente. Por eso se considera, por lo general, que las sucesiones infinitamente grandes tienen un límite igual a ∞ y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$ [2]).

Si la sucesión $\{x_n\}$ es tal que para todo $A > 0$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $x_n > A$ $(x_n < -A)$, se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty)$. En todos estos

[1]) Véase el teorema 1.2.

[2]) Recuérdese que aquí la sucesión $\{x_n\}$ es tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $|x_n| > A$.

casos se dice que la sucesión infinitamente grande tiene *límite infinito* igual a ∞, $+\infty$ o bien $-\infty$, respectivamente:

Puesto que hemos introducido el concepto de «límite infinito» convengamos en llamar límite finito al definido inicialmente.

Ejercicio. Cítense ejemplos de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ y, además:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$. $\left(Resp.\ \{x_n\}=\left\{n+\frac{1}{n}\right\}\right.$ e $\left.\{y_n\}=\{-n\}.\right)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=+\infty$. (*Resp.* $\{x_n\}=\{2n\}$ e $\{y_n\}=\{-n\}$.)
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=1$. (*Resp.* $\{x_n\}=\{n+1\}$ e $\{y_n\}=\{-n\}$.)
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ no existe. (*Resp.* $\{x_n\}=\{n+(-1)^n\}$ e $\{y_n\}=$ $=\{-n\}$.) (Argumente las respuestas.)

2. Propiedades fundamentales de las sucesiones convergentes. Antes de pasar a la demostración del teorema siguiente, demostremos el lema.

Lema 3.1. *Si todos los elementos de una sucesión infinitamente pequeña $\{\alpha_n\}$ son iguales al mismo número c, entonces $c = 0$.*

□ **Demostración.** Supongamos lo contrario, es decir, que $c \neq 0$. Pongamos $\varepsilon = |c|/2$. Entonces, según la definición de sucesión infinitamente pequeña, existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$. Puesto que $\alpha_n = c$ y $\varepsilon = |c|/2$, la última desigualdad puede escribirse en la forma $|c| < |c|/2$, de donde $1 < 1/2$. La contradicción obtenida muestra que la suposición de que $c \neq 0$ no puede tener lugar. ■

Teorema 3.5. *La sucesión convergente tiene un solo límite.*

□ **Demostración.** Supongamos lo inverso, es decir, que la sucesión convergente $\{x_n\}$ tiene dos límites a y b. Entonces según la fórmula (4) para los elementos x_n resulta

$$x_n = a + \alpha_n \quad \text{y} \quad x_n = b + \beta_n,$$

donde α_n y β_n son los elementos de las sucesiones infinitamente pequeñas $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$. Restando de la primera relación la segunda, encontramos que $\alpha_n - \beta_n = b - a$. Puesto que todos los elementos de la sucesión infinitamente pequeña $\{\alpha_n - \beta_n\}$ tienen el mismo valor constante $b - a$, según el lema demostrado 3.1 $b - a = 0$, o sea, $b = a$. ■

Teorema 3.6. *La sucesión convergente está acotada.*

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente y el número a, su límite. Sea luego ε un número positivo arbitrario y N, el número de orden comenzando por el cual se cumple $|x_n - a| < \varepsilon$. Entonces para todos los números $n > N$

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a| < |a| + \varepsilon\ ^{1)}.$$

Sea $A = \text{máx}\,\{|a| + \varepsilon, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$. Es obvio que $|x_n| \leqslant A$ para todos los números de orden n, lo que significa precisamente que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada. ■

Observación. Una sucesión acotada puede ser también no convergente. Por ejemplo, la sucesión $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ está acotada, pero no convergente. Efectuemos los razonamientos por reducción al absurdo. Supongamos que el límite de la sucesión dada es el número a. Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, en particular, también para $\varepsilon = 1/2$, existe un número de orden N tal que para $n > N$ tendremos $|x_n - a| < 1/2$. Puesto que x_n toma alternativamente los valores 1 y -1, se puede escribir $|1 - a| < 1/2$ y $|(-1) - a| < 1/2$. Utilizando estas desigualdades, tenemos

$$2 = |1 - a + a - (-1)| \leqslant |1 - a| + |a - (-1)| <$$
$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

o sea $2 < 1$. La contradicción obtenida demuestra el carácter divergente de la sucesión dada.

○ **Ejemplo 5.** Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ es infinitamente grande y la sucesión $\{y_n\}$ tiene límite finito, distinto del cero ($y_n \neq 0$). ¿Qué se puede decir de las sucesiones: 1) $\{x_n + y_n\}$; 2) $\{y_n/x_n\}$; 3) $\{x_n/y_n\}$?

Resolución. 1) Puesto que la sucesión $\{y_n\}$ converge, entonces según el teorema 3.6 está acotada, o sea, para todos los números n se cumple la desigualdad $|y_n| < A$, y puesto que la sucesión $\{x_n\}$ es infinitamente grande, comenzando por cierto número de orden n se cumplirá la desigualdad $|x_n| > A + M$, donde M es todo número positivo. Entonces comenzando por cierto número de orden n se cumplirá la desigualdad

$$|x_n + y_n| \geqslant |x_n| - |y_n| > (A + M) - A = M\ ^{2)},$$

o sea, $|x_n + y_n| > M$ y esto, según la definición de la sucesión infinitamente grande, significa precisamente que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ es infinitamente grande.

2) La sucesión $\{y_n/x_n\}$ es infinitamente pequeña, ya que puede ser representada en la forma: $\{1/x_n\} \cdot \{y_n\}$, donde según el teorema 3.1 la sucesión $\{1/x_n\}$ es infinitamente pequeña, la sucesión $\{y_n\}$, según el teorema 3.6, está acotada, y según el teorema 3.4 la sucesión $\{1/x_n \cdot y_n\}$ es infinitamente pequeña.

---

1) Véase la llamada en la pág. 109.

2) Aquí hemos utilizado la propiedad de los valores absolutos $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ (véase el teorema 1.4).

3) Puesto que la sucesión $\{y_n/x_n\}$ (véase el caso 2) es infinitamente pequeña, entonces, según el teorema 3.1, la sucesión $\{x_n/y_n\}$ es infinitamente grande. ●

Demostremos los teoremas siguientes.

Teorema 3.7. *La suma (diferencia) de dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es una sucesión convergente cuyo límite es igual a la suma (diferencia) de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□ **Demostración.** Sean a y b los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Entonces, según la fórmula (4),

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

donde $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son las sucesiones infinitamente pequeñas. Por lo tanto,

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n.$$

Según el teorema 3.2, la sucesión $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ es infinitamente pequeña. Por lo tanto, la sucesión $\{(x_n \pm y_n) = (a \pm b)\}$ es tamdién infinitamente pequeña y por eso la sucesión $\{x_n \pm y_n\}$ converge y tiene por límite el número $a \pm b$. ■

○ **Ejemplo 6.** Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ converge y la sucesión $\{y_n\}$ diverge. ¿Qué se puede decir de la convergencia de la sucesión $\{x_n + y_n\}$?

Resolución. Efectuemos los razonamientos por reducción al absurdo. Supongamos que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ converge. Entonces, según el teorema 3.7, la sucesión $\{y_n\}$ también converge, ya que $\{y_n\} = \{(x_n + y_n) - x_n\}$. Pero según los datos del problema la sucesión $\{y_n\}$ diverge. La contradicción obtenida demuestra que la sucesión $\{x_n + y_n\}$ diverge. ●

Teorema 3.8. *El producto de dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es una sucesión convergente cuyo límite es igual al producto de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

□ **Demostración.** Sean a y b los límites de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, respectivamente. Entonces, según la fórmula 4,

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

donde $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son sucesiones infinitamente pequeñas. Por lo tanto,

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Según los teoremas 3.2 a 3.4 la sucesión $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ es infinitamente pequeña. Así pues, la sucesión $\{x_n y_n - ab\}$ también es infinitamente pequeña y por eso la sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ converge y tiene por límite el número $a \cdot b$. ■

○ **Ejemplo 7.** Supongamos que la sucesión $\{x_n\}$ es una progresión geométrica que tiene por razón q, con la particularidad de que $|q| < 1$ y $x_1 \neq 0$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q}. \tag{5}$$

Resolución. Puesto que (véase la fórmula (7) del § 1)

$$S_n = \frac{x_1 - x_1 q^n}{1-q} = \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q} \cdot q^n$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (véase el ejemplo 2), entonces, pasando al límite para $n \to \infty$ y empleando los teoremas 3.7 y 3.8 resulta

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{x_1}{1-q} - \frac{x_1}{1-q} \cdot 0 = \frac{x_1}{1-q}. \quad \bullet$$

El límite (5) se llama *suma de una progresión geométrica infinita decreciente* y se designa de ordinario con S.

Por ejemplo, la suma de la progresión geométrica infinita decreciente es $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8},\ \ldots$, donde $x_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, o sea, $|q| = \frac{1}{2} < 1$, es

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

Teorema 3.9. *El cociente de dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ es a condición de que el límite $\{y_n\}$ sea distinto del cero* [1]*, una sucesión convergente cuyo límite es igual al cociente de los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ o sea,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

□ **Demostración.** Sean a y b ($b \neq 0$) los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ respectivamente. Entonces, según la fórmula (4),

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

[1] Según la condición $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ los elementos y_n comenzando con cierto número de orden N no se anulan, por eso el cociente $\{x_n/y_n\}$ tiene razón para todos los números $n > N$.

donde $\{\alpha_n\}$ y $\{\beta_n\}$ son sucesiones infinitamente pequeñas. Por consiguiente,

$$\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{bx_n-ay_n}{by_n}=\frac{b(a+\alpha_n)-a(b+\beta_n)}{by_n}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Conforme a las propiedades de las sucesiones infinitamente grandes el factor $\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n$ es una sucesión infinitamente pequeña. Mostremos que $\{1/y_n\}$ es una sucesión acotada. Puesto que $y_n \to b$, $b\neq 0$ para $n\to\infty$, entonces para $\varepsilon=|b|/2$ habrá un número de orden N tal que para todos los $n>N$ sea $|y_n-b|<|b|/2$. Entonces

$$|y_n|=|b-(b-y_n)|\geqslant |b|-|y_n-b|>|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2}\ ^{1)}.$$

de donde $|y_n|>|b|/2$ y, por lo tanto, $|1/y_n|<2/|b|$ para todos los $n>N$ lo que significa precisamente que la sucesión $\{1/y_n\}$ está acotada.

Según el teorema 3.4 la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ es infinitamente pequeña, por eso la sucesión $\{x_n/y_n-a/b\}$ también es infinitamente pequeña. Por consiguiente, la sucesión $\{x_n/y_n\}$ converge y tiene por límite el número a/b. ■

Los teoremas demostrados en este subpárrafo tienen importancia primordial tanto teórica como práctica. Pese a la sencillez de estos teoremas su aplicación correcta ofrece gran dificultad para muchos principiantes. Es necesario sobre todo tener presente el hecho de que el empleo de los teoremas exige la existencia de límites finitos. Mostremos qué errores pueden cometerse si no se tiene en cuenta este hecho.

Consideremos la sucesión $\left\{\frac{5n+1}{n}\right\}$. Por un lado,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5+0=5$$

y por el otro

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5n+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=\frac{\infty}{\infty}=1.$$

Hemos obtenido la igualdad incorrecta $5=1$.

Consideremos la sucesión $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$. Por un lado,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+0=1$$

[1]) Véase la llamada en la pág. 118.

y por el otro,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\infty\cdot 0=0.$$

Hemos obtenido la igualdad incorrecta $1=0$.

Por último, consideremos la sucesión $1, 1, 1, 1, \ldots$ que tiene por elemento general $x_n=1$. Por un lado, $\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$ y por el otro,

$$\lim_{n\to\infty} 1=\lim_{n\to\infty}[(n+1)-n]=\lim_{n\to\infty}(n+1)-\lim_{n\to\infty} n=\infty-\infty=0.$$

Hemos obtenido una vez más la igualdad incorrecta $1=0$.

En todos los casos considerados hemos cometido un gran error: hemos empleado incorrectamente los teoremas de los límites del cociente, del producto y de la diferencia, o sea, las sucesiones $\{5n+1\}$, $\{n\}$ y $\{n+1\}$ no tienen límites finitos.

Nótese una vez más que la notación $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ no designa ningún número y es sólo la expresión de que los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ crecen indefinidamente en valor absoluto. Por eso el símbolo ∞ no puede tratarse al igual que los números y no se puede escribir $\frac{\infty}{\infty}=1$ ó $\infty\cdot 0=0$, o bien $\infty-\infty=0$.

Las faltas de tal género se encuentran con frecuencia al determinar el límite de una sucesión dada en forma de una razón de dos expresiones o en forma de la diferencia de éstas. Por ejemplo, el teorema del límite del cociente no puede ser empleado inmediatamente si el numerador o el denominador no tienen límites finitos o el límite del denominador es igual a cero. En tales casos es necesario transformar previamente la sucesión dada. A menudo es útil dividir el numerador y el denominador por la misma expresión o multiplicarlos por ésta. Este procedimiento será utilizado reiteradamente a continuación.

Consideremos ahora los ejemplos más típicos.

○ **Ejemplo 8.** Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$.

Resolución. Para $n\to\infty$ el numerador y el denominador tienden hacia el infinito y no se puede aplicar inmediatamente el teorema del límite del cociente, ya que en la hipótesis de este teorema se supone la existencia de límites finitos. Por eso primero transformemos la sucesión dada dividiendo el numerador y el denominador por n^2. Luego, empleando el teorema del límite del cociente y el del límite de la suma, hallamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n+1/n^2}{3-1/n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (2+1/n+1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty} (3-1/n^2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\lim\limits_{n\to\infty} (1/n)+\lim\limits_{n\to\infty} (1/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty} 3-\lim\limits_{n\to\infty} (1/n^2)} = \frac{2+0+0}{3-0} = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 9. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right)$.

Resolución. Al igual que en el ejemplo 8, en el primer sumando de la expresión que está bajo el signo del límite no se puede utilizar inmediatamente el teorema del límite del cociente. Por eso, dividiendo primero el numerador y el denominador por n y luego empleando el teorema del límite del cociente y el del límite de la suma, encontramos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1+1/n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty} (1/n)} = \frac{5}{1+0} = 5.$$

El segundo sumando de la expresión que está bajo el signo del límite puede considerarse como producto de la sucesión acotada $\{\operatorname{sen} n\}$ ($|\operatorname{sen} n| \leqslant 1$) y de la sucesión infinitamente pequeña $\{1/n\}$. Según el teorema 3.4 el segundo sumando es una sucesión infinitamente pequeña y su límite es igual a cero. Por consiguiente, finalmente resulta

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+1}+\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 5+0 = 5.$$

En una forma más compacta la resolución del ejemplo puede escribirse del modo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{n+1}+\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1+1/n} +$$

$$+\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 5}{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\lim\limits_{n\to\infty} (1/n)} + \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{sen} n\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{5}{1+0}+0 = 5.$$

Adquirida cierta práctica, la notación detallada puede ser abreviada.

Ejemplo 10. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n^2+1}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-3/n}{n+1/n} = 0,$$

ya que para $n \to \infty$ la sucesión $\{2 - 3/n\}$ está acotada (muestre esto por sí mismo), la sucesión $\{n + 1/n\}$ es infinitamente grande (muestre esto de manera independiente) y según el teorema 3.1 la *sucesión* $\left\{\frac{1}{n+1/n}\right\}$ *es infinitamente pequeña.* Por consiguiente, en virtud del teorema 3.4,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(2-\frac{3}{n}\right)\right]\cdot\frac{1}{n+1/n}\right]=0.$$

Ejemplo 11. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+4/n^3}{1/n+5n^3}=\infty,$$

ya que para $n\to\infty$ la sucesión $\{z_n\}=\{2+4/n^3\}$ es convergente ($z_n\to 2$), la sucesión $\{1/z_n\}$ está acotada (muestre esto de manera *independiente*), *la sucesión* $\{y_n\}=\{1/n+5/n^3\}$ *es infinitamente* pequeña (muestre esto por cuenta propia) y según el teorema 3.4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{z_n}=\lim_{n\to\infty}\left(y_n\cdot\frac{1}{z_n}\right)=0,$$

entonces la sucesión dada, en virtud del teorema 3.1, es infinitamente grande y su límite es igual a ∞.

Ejemplo 12. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

Resolución. Aquí, aunque en el numerador hay una suma, no se puede aplicar inmediatamente el teorema del límite de la suma, puesto que el número de sumandos no es finito y depende de n (con el aumento de n el número de sumandos también aumenta). Por eso, efectuemos una transformación. Puesto que $1+2+3+\ldots+n$ es la suma de los términos de la progresión aritmética que tiene por razón $d=1$ y esta suma es igual a $\frac{(1+n)\,n}{2}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\,n}{2n^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 13. Hallar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+1/2+1/2^2+\ldots+1/2^n}{1+1/3+1/3^2+\ldots+1/3^n}$.

Resolución. Puesto que $1+q+q^2+\ldots+q^n$ es la suma de $n+1$ términos de la progresión geométrica que tiene por razón q (en el numerador $q=1/2$ y en el denominador $q=1/3$) y esta suma es igual a $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+1/2+1/2^2+\ldots+1/2^n}{1+1/3+1/3^2+\ldots+1/3^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-1/2^{n+1})(1-1/3)}{(1-1/2)(1-1/3^{n+1})} = \frac{(1-0)(1-1/3)}{(1-1/2)(1-0)} = \frac{2/3}{1/2} = \frac{4}{3}.$$

Ejemplo 14. Hállese $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Ejemplo 15. Hállese $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n+1}\right)$.

Resolución. Puesto que $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+1} = \infty$ (muéstrese esto por sí mismo) y $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n+1} = \infty$ (muestre esto de manera independiente), no se puede aplicar inmediatamente el teorema del límite de la diferencia. Por eso primero transformemos la expresión que está bajo el signo del límite, reduciéndola al denominador común y dividiendo el numerador y el denominador por n^3. Luego, aplicando el teorema del límite del cociente, producto y diferencia, encontramos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-3/n}{(1+1/n^2)(3+1/n)} = \frac{1-0}{(1+0)(3+0)} = \frac{1}{3}. \quad \bullet$$

Ejercicios. Hállense los límites: **1.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{5n+11}-\frac{\cos n}{10n}\right)$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{5}.\right)$ **2.** $\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$. (*Resp.* 0.) **3.** $\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{n+1}$. (*Resp.* 10.) **4.** $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3}{n^2+1}$. (*Resp.* ∞.) **5.** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$. (*Resp.* ∞.) **6.** $\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$. (*Resp.* 5.) **7.** $\lim_{n\to\infty}\frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3+3n+2}$. $\Big($*Resp.* $\frac{1}{3}$. **Indicación:** transfórmese previamente el numerador, utilizando la fórmula $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ demostrada en el ejemplo 1 del cap. 1, § 6.$\Big)$ **8.** $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$. (*Resp.* 0.)

3. Paso al límite en las desigualdades.

Teorema 3.10. *Si los elementos de una sucesión convergente* $\{x_n\}$ *comenzando por cierto número de orden satisfacen la desigualdad* $x_n \geqslant b$ $(x_n \leqslant b)$, *entonces también el límite* a *de esta sucesión satisface la desigualdad* $a \geqslant b$ $(a \leqslant b)$.

□ **Demostración.** Supongamos que todos los elementos x_n, comenzando por cierto número de orden, satisfacen la desigualdad $x_n \geqslant b$. Se necesita demostrar la desigualdad $a \geqslant b$. Supongamos lo contrario, que $a < b$.

Puesto que a es el límite de $\{x_n\}$, para $\varepsilon = b - a$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|x_n - a| < b - a$, la cual es equivalente a las dos desigualdades siguientes: $-(b - a) < x_n - a < b - a$. Del segundo miembro de la desigualdad resulta $x_n < b$, pero esto contradice la hipótesis del teorema. El caso $x_n \leqslant b$ se considera de un modo análogo.

Observación. Del teorema se deduce que el signo de una desigualdad no estricta se conserva al pasar al límite. Sin embargo, al pasar al límite en una desigualdad estricta, $x_n > b$ $(x_n < b)$, puede *aparecer también el signo de la igualdad, o sea,* $a \geqslant b$ $(a \leqslant b)$. Tomemos, por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$. Es evidente que $x_n = 1/n > 0$ $(b = 0)$ *para todo número de orden* n, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n) = 0$ $(a = 0)$.

○ **Ejemplo 16.** Sean $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, con la particularidad de que comenzando por cierto número de orden n se cumple la desigualdad $x_n \leqslant y_n$. Demuéstrese que $a \leqslant b$.

Resolución. Efectivamente, comenzando por cierto número de orden n los elementos de la sucesión $\{y_n - x_n\}$ son no negativos y por eso, en virtud del teorema 3.10, también es no negativo su límite:

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n = b - a \geqslant 0,$$

de aquí se desprende que $a \leqslant b$. ●

Ejercicio 1. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ y sean todos los elementos $x_n \in [a, b]$, o sea, $a \leqslant x_n \leqslant b$ para todo número de orden n. Demuéstrese que también el límite $c \in [a, b]$, o sea, $a \leqslant c \leqslant b$.
2. *Cítese un ejemplo de una sucesión cuando al pasar al límite la* desigualdad estricta no se conserva. $\left(Resp. \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}. \right)$

El teorema siguiente desempeña importante papel en diferentes aplicaciones.

Teorema 3.11. *Supongamos que se dan tres sucesiones* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *y* $\{z_n\}$ *relacionadas mediante las desigualdades* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *para todos los números* n. *En este caso si* $\{x_n\}$ *y* $\{z_n\}$ *tienen el mismo límite* a, *entonces* $\{y_n\}$ *también tiene el límite* a.

□ **Demostración.** Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. Para este ε en la sucesión $\{x_n\}$ habrá un número de orden N_1 tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para todos los números $n > N_1$, o sea,

$$\underline{a - \varepsilon < x_n} < a + \varepsilon. \tag{6}$$

Para este mismo número ε en la sucesión $\{z_n\}$ habrá un número de orden N_2 tal que $|z_n - a| < \varepsilon$ para todos los números $n > N_2$, o sea,

$$a - \varepsilon > \underline{z_n < a + \varepsilon}. \tag{7}$$

Tomemos $N = \text{máx}\,\{N_1, N_2\}$. Entonces para $n > N$ se cumplirán simultáneamente las desigualdades (6) y (7). Utilizando sus miembros subrayados, así como las desigualdades dadas en la hipótesis del teorema, se puede escribir

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \quad \text{para } n > N.$$

De aquí

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \ \text{ o bien } \ |y_n - a| < \varepsilon \ \text{para } n > N.$$

Lo último significa que a es el limite de $\{y_n\}$. ■

□ **Ejemplo 17.** Hállense los límites de las sucesiones asignadas por los elementos generales:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}, \quad z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Resolución. Demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}.$$

Puesto que $1 < \sqrt{1 + 1/n} < 1 + 1/n$, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n) = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, entonces según el teorema 3.11 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + 1/n} = 1$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Análogamente se demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

Demostremos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. Efectivamente, por un lado,

$$y_n < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n \text{ sumandos}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n,$$

por otro lado,

$$y_n > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n$$

o sea, resulta $x_n < y_n < z_n$. Y puesto que según lo recién demostrado $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, entonces, aplicando una vez más el teorema 3.11, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$. ●

Ejercicio. Supongamos que los elementos de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ satisfacen las desigualdades $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$ para todos los números de orden n y que la sucesión $\{y_n\}$ es infinitamente pequeña. Determínese: existe o no el límite de la sucesión $\{x_n\}$ y si existe ¿a qué es igual y por qué?

PREGUNTAS PARA EL AUTOCONTROL

1. Enúnciese la definición de límite de una sucesión. Dese la interpretación geométrica.
2. Cítese un ejemplo cuando el número de orden N en la definición de límite de una sucesión depende de ε; no depende de ε.
3. ¿Es infinitamente pequeña una sucesión convergente?
4. ¿Es infinitamente grande una sucesión convergente?
5. ¿Puede una sucesión tener dos límites distintos?
6. ¿Puede una sucesión no acotada ser convergente?
7. Cítese un ejemplo de una sucesión acotada que no sea convergente.
8. Cítese un ejemplo de una sucesión convergente y acotada.
9. Cítense ejemplos de sucesiones convergentes cuando: a) los elementos de la sucesión al crecer n se aproximan al límite sólo por un lado; b) por dos lados simultáneamente. Dese una interpretación geométrica.
10. ¿Qué sucesión se llama divergente?
11. Supongamos que en cierto entorno del punto a hay muchos elementos de la sucesión $\{x_n\}$. ¿Se deduce de esta hipótesis que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?
12. Supongamos que en todo entorno del punto a hay muchos elementos de la sucesión $\{x_n\}$. ¿Se deduce de esta hipótesis que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?
13. ¿Puede una sucesión con elementos positivos tener límite negativo y una sucesión con elementos negativos tener límite positivo?
14. Cítese un ejemplo cuando al pasar al límite una desigualdad estricta se conserva (no se conserva).
15. Enúnciese el teorema de tres sucesiones.

§ 3. Sucesiones monótonas

1. Definición y criterio de convergencia de las sucesiones monótonas.

Definición. *La sucesión $\{x_n\}$ se llama creciente si* $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$; *no decreciente si* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$; *decreciente si* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$; *no creciente si* $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$

Todas tales sucesiones se unen por el nombre común de *monótonas*. Las sucesiones crecientes y decrecientes se denominan también *estrictamente monótonas*.

Consideremos algunos ejemplos de sucesiones monótonas.

○ 1) La sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ es decreciente y acotada.

2) La sucesión $1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, \ldots, 1/n, 1/n, \ldots$ es no creciente y acotada.

3) La sucesión $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ es creciente y no acotada.

4) La sucesión $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n, \ldots$ es no decreciente y no acotada.

5) La sucesión $1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots$ es creciente y acotada. ●

Al investigar la monotonía de las sucesiones concretas se aclara, ante todo, el signo de la diferencia $x_{n+1} - x_n$ o bien (para las sucesiones positivas) se compara con la unidad la razón $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

○ **Ejemplo 1.** Demuéstrese que la sucesión que tiene por elemento general $x_n = \frac{n}{2n+1}$ es monótona creciente.

Resolución. Es necesario demostrar que $x_{n+1} > x_n$ para todo n. Determinemos x_{n+1} reemplazando n por $n+1$ en la expresión para x_n:

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Comparemos los valores de las fracciones $x_n = \frac{n}{2n+1}$ y $x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$; para esto reduzcámoslas al denominador común. Resulta

$$x_{n+1} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+3)(2n+1)}, \quad x_n = \frac{2n^2+3n}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Puesto que $2n^2+3n+1 > 2n^2+3n$, la primera fracción es mayor que la segunda, por lo tanto, $x_{n+1} > x_n$ para todo número n, que es lo que quería demostrar.

Ejemplo 2. Demuéstrese que la sucesión que tiene por elemento general $x_n = \frac{n}{5^n}$ es monótona decreciente.

Resolución. Es necesario demostrar que $x_n > x_{n+1}$ para todo número n. En efecto, consideremos la relación entre el término sucesivo x_{n+1} y el precedente x_n:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{5^{n+1}} : \frac{n}{5^n} = \frac{(n+1)5^n}{5^n 5n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1+\frac{1}{n}}{5} \leqslant \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por consiguiente, $x_n > x_{n+1}$ para todo número n, que es lo que se *quería demostrar.* ●

Nótese que las sucesiones monótonas están acotadas al menos por un lado: las sucesiones no decrecientes, inferiormente ($x_n \geqslant x_1$ para todos los números n); las no crecientes, superiormente ($x_n \leqslant x_1$ para todos los números n). Resulta que si una sucesión monótona está acotada por ambos lados, o sea, simplemente acotada, ella converge. Las sucesiones no monótonas no poseen esta propiedad. Por ejemplo, la sucesión no monótona $\{(-1)^n\}$ está acotada, pero no converge (véase la observación para el teorema 3.6).

Tiene lugar el siguiente teorema fundamental de las sucesiones monótonas.

Teorema 3.12. *Una sucesión monótona acotada tiene límite.*

□ **Demostración.** Consideremos el caso de una sucesión monótona no decreciente. Sea $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$ y sea que existe un número M tal que todos los elementos x_n no son mayores que M, o sea, $x_n \leqslant M$. Consideremos el conjunto numérico X compuesto por los elementos de la sucesión dada. Según los datos del problema este conjunto está acotado superior e inferiormente. Por eso, en virtud del teorema 1.1, el conjunto X tiene una cota superior exacta. Designémosla por a y mostremos que a es el límite de la sucesión dada.

Puesto que a es una cota superior exacta del conjunto de los elementos de la sucesión $\{x_n\}$, según su propiedad para todo número $\varepsilon > 0$ habrá un número de orden N tal que $x_N > a - \varepsilon$. Puesto que $\{x_n\}$ es la sucesión no decreciente, para $n > N$ tenemos $x_n > a - \varepsilon$. Por otro lado, conforme a la definición de la cota superior, $x_n \leqslant a < a + \varepsilon$ para todos los números n. Por lo tanto, para $n > N$ obtenemos las desigualdades $a < \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ de las cuales se deduce la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$. Lo último significa precisamente que el número a es el límite de la sucesión $\{x_n\}$.

El caso de la sucesión monótona no creciente es análogo. ■

Observación. La condición de que una sucesión monótona esté *acotada es una condición necesaria y suficiente de su convergencia.*

En efecto, si una sucesión monótona está acotada, en virtud del teorema ella converge; en cambio, si una sucesión monótona converge, según el teorema 3.6 ella está acotada.

○ ***Ejemplo 3.*** *Demuéstrese que la sucesión que tiene por término general* $x_n = \frac{n!}{n^n}$ *converge y hállese su límite.*

Resolución. La sucesión dada tiene la forma $1, \frac{1\cdot 2}{2^2}, \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3}, \ldots$ $\ldots, \frac{n!}{n^n}, \ldots$ Demostremos primero su convergencia. Para esto, evidentemente, basta mostrar que la sucesión dada es monótona y acotada. Efectivamente,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{n!}{n^n}=\frac{n!\,(n+1)\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}.$$

Puesto que $\frac{n^n}{(n+1)^n}<1$, entonces $x_{n+1}<x_n$ y, por lo tanto, la sucesión es monótona decreciente y está acotada superiormente. Como $x_n>0$, ella está acotada inferiormente, verbigracia, por el cero. Por consiguiente la sucesión es monótona y acotada. Según el teorema 3.12 ella converge, es decir, tiene un límite finito.

Vamos a determinar este límite. Designémoslo por a. Puesto que todos los elementos $x_n>0$, según el teorema 3.10 $a\geqslant 0$. Aquí hagamos uso de la desigualdad de Bernoulli [1]):

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh\ (h>-1)$$

realizando su demostración por inducción. Para $n=1$ la desigualdad es evidente (en este caso ella se convierte en igualdad). Supongamos que es válida para $n=k$ y demostremos su validez para $n=k+1$. Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $(1+h)$ (el signo de la desigualdad no cambiará, ya que $1+h>0$), resulta

$$(1+h)^{k+1}\geqslant(1+kh)(1+h)=1+kh+h+kh^2\geqslant 1+(k+1)h$$

(ya que $kh^2\geqslant 0$), que es lo que se quería demostrar. Continuando la resolución del ejemplo, tenemos

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 1+n\cdot\frac{1}{n}=2.$$

Por lo tanto, $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n^n}{(n+1)^n}\leqslant\frac{1}{2}$, o bien $x_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}x_n$. Pasando al límite en la última desigualdad cuando $n\to\infty$, obtenemos la desigualdad $a\leqslant\frac{1}{2}a$, de donde $a=0$. De esta manera, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

Ejemplo 4. La sucesión $\{x_n\}$ está definida por la relación recurrente $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$. Demuéstrese que esta sucesión tiene un límite y hállese.

Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$x_1=\sqrt{2},\quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots,$$

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ raíces}},\ \ldots.$$

Vamos a comprobar el hecho de que el límite exista. Para esto determinemos que la sucesión es monótona y acotada. De la desi-

[1]) Jacobo Bernoulli (1654—1705), matemático suizo.

gualdad

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n^2} = x_n$$

se desprende que $x_n < x_{n+1}$, o sea, la sucesión es monótona creciente y está acotada inferiormente. Mostremos que la sucesión está acotada también superiormente. En efecto, puesto que $x_1 = \sqrt{2} < 2$, entonces $x_2 = \sqrt{2+x_1} < \sqrt{2+2} = 2$, $x_3 = \sqrt{2+x_2} < \sqrt{2+2} = 2, \ldots$.

Supongamos que queda demostrada la desigualdad $x_n < 2$. Entonces $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$ y ya que $x_1 < 2$, por inducción resulta demostrado que para todo n se cumple la desigualdad $x_n < 2$, o sea, la sucesión está acotada también superiormente.

Así pues, queda determinado que la sucesión dada es monótona y acotada. Según el teorema 3.12 ella tiene un límite finito. Ahora, sabiendo que el límite existe, vamos a encontrarlo. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Entonces también $\lim x_{n+1} = a$, ya que el elemento general x_{n+1} asigna la misma sucesión que x_n. Elevando al cuadrado la igualdad $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, resulta $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$. Pasando al límite en esta igualdad cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (2 + x_n),$$

llegamos a la ecuación $a^2 = 2 + a$. Resolviendo la ecuación obtenida, hallamos $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Puesto que, según lo demostrado anteriormente, la sucesión $\{x_n\}$ crece y según los datos del problema $x_1 > 0$, *el límite debe ser positivo, por lo tanto* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ●

Nótese que el teorema 3.12 determina sólo el hecho de que el límite existe y no habla nada del mismo límite. Sin embargo, en la teoría de los límites esto también tiene gran importancia. A veces es importante sólo saber que el límite existe.

2. Número e. Consideremos la sucesión $\{x_n\}$ que tiene por elemento general $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$(1+1)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots$$

y demostremos que ella converge. Para esto basta mostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y está acotada superiormente.

Aplicando la fórmula del binomio de Newton, resulta

$$x_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Representemos esta expresión en la siguiente forma:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (1)$$

De modo análogo escribamos el elemento $n+1$:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Ante todo, notemos que $\left(1-\frac{k}{n}\right) < \left(1-\frac{k}{n+1}\right)$ para $0 < k < n$, o sea, cada sumando en la expresión x_{n+1} es mayor que el sumando correspondiente en la expresión x_n y, además, en comparación con x_n en x_{n+1} se añade un sumando positivo más. Por eso $x_n < x_{n+1}$, o sea, la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y está acotada inferiormente.

Para demostrar el hecho de que la sucesión dada está acotada superiormente nótese que cada expresión puesta entre paréntesis en la relación (1) es menor que la unidad. Teniendo también en cuenta que $1/n! < 1/2^{n-1}$ para $n > 2$, resulta

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Apliquemos la fórmula para la suma de la progresión geométrica en la última expresión; entonces

$$x_n < 1 + \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

o sea, la sucesión está acotada superiormente.

Por lo tanto, queda demostrado que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es monótona creciente y está acotada. Según el teorema 3.12 ella tiene un límite finito. Este límite se llama *número* e. Por consiguiente, según la definición

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

El número e tiene gran importancia en muchas cuestiones de la teoría y la práctica. En este párrafo hemos dado sólo la definición del número e. En adelante expondremos el método para calcular este número con cualquier grado de precisión.

Aquí sólo señalaremos que puesto que $x_n < 3$ y de (1) es directamente evidente que $2 < x_n$, el número e está encerrado dentro de los límites de $2 \leqslant e \leqslant 3$. Se puede demostrar también que e es un número irracional. En particular, este número es la base de los logaritmos naturales que desempeñan en la matemática un importante papel.

Los logaritmos naturales se designan $\ln x$ ($\ln x = \log_e x$). Vamos a establecer la relación entre los logaritmos de los números respecto a toda base $a > 0$ y los logaritmos naturales. Para esto hagamos uso de la identidad $x = a^{\log_a x}$ que se deduce de la definición del logaritmo. Logaritmemos ambos miembros de esta igualdad respecto a la base e; obtenemos

$$\ln x = \ln a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \ln a,$$

de donde

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \text{ o bien } \log_a x = M \ln x.$$

El número M se llama *módulo de paso*.

○ **Ejemplo 5.** Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Resolución. Hagamos uso del hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$.

Tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left[\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right] = e\cdot[1+0] = e.$$

Ejemplo 6. Hállense los números enteros sucesivos entre los cuales se contiene la expresión $6\,(1 - 1{,}01^{-100})$.

Resolución. Representemos la expresión dada en la forma

$$6\,(1-1{,}01^{-100}) = 6\left[1-\left(1+\frac{1}{100}\right)^{-100}\right].$$

Utilicemos el hecho de que $2 < (1 + 1/n)^n < 3$. Entonces $1/2 > (1 + 1/n)^{-n} > 1/3$, $-1/2 < -(1 + 1/n)^{-n} < -1/3$. Adicionando a cada miembro de la desigualdad 1, encontramos $1/2 < 1 - (1 + 1/n)^{-n} < 2/3$. Suponiendo $n = 100$ y multiplicando término a término por 6, obtenemos finalmente

$$3 < 6\left[1-\left(1+\frac{1}{100}\right)^{-100}\right] < 4,$$

que es lo que se necesitaba hallar. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciense las definiciones: a) de las sucesiones no creciente y creciente; b) de las sucesiones no decreciente y decreciente.
2. Cítese un ejemplo de una sucesión monótona.
3. Cítese un ejemplo de una sucesión monótona acotada (no acotada).
4. Demuéstrese el teorema de la convergencia de una sucesión monótona para el caso de una sucesión no creciente.
5. ¿El límite de qué sucesión lleva el nombre de número e?

§ 4. Teorema de los segmentos encajados

Vamos a terminar el estudio de la teoría de los límites con la demostración del teorema que más adelante se utilizará reiteradamente para demostrar otros teoremas importantes.

Supongamos que se da una sucesión de segmentos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, . . ., $[a_n, b_n]$, . . . tales que cada segmento siguiente se contiene en el precedente: $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$, o sea,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \text{ para todos los números } n \qquad (1)$$

y supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Llamémosla *sucesión de los segmentos encajados*. Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema 3.13. *Para toda sucesión de segmentos encajados existe un único punto c perteneciente a todos los segmentos de esta sucesión, o sea, tal que* $a_n \leqslant c \leqslant b_n$.

□ **Demostración.** De la desigualdad (1) se deduce que los extremos izquierdos de los segmentos forman una sucesión monótona no decreciente

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \qquad (2)$$

y los extremos derechos, una sucesión monótona no creciente

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \ldots . \qquad (3)$$

En este caso la sucesión (2) está acotada superiormente y la sucesión (3) está acotada inferiormente, ya que $a_n \leqslant b_1$ y $b_n \geqslant a_1$ para todo número n. Por consiguiente, en virtud del teorema 3.12 estas sucesiones tienen límites. Sean $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c'$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c''$. Entonces de la hipótesis

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c'' - c' = 0$$

se desprende que $c' = c''$, o sea, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tienen un límite común. Designando este límite con c, obtenemos que para todo número n son válidas las desigualdades $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, o sea, el punto c pertenece a todos los segmentos de la sucesión (1).

Mostremos ahora que el punto c es único. Admitamos que exista un punto más c_1 ($c_1 \neq c$) perteneciente a todos los segmentos de la sucesión (1). Entonces para todo número n debe cumplirse la desigualdad $b_n - a_n \geqslant |c_1 - c|$ y, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - -a_n) \geqslant |c_1 - c| \neq 0$ lo que contradice la hipótesis del teorema. ■

Observación. El teorema no es justo si en vez de los segmentos se consideran los intervalos. Por ejemplo, para la sucesión de los intervalos encajados

$$(0,\ 1) \supset (0,\ 1/2) \supset (0,\ 1/4) \supset \ldots \supset (0,\ 1/2^n) \supset \ldots \quad (4)$$

no existe un punto que pertenezca a todos los intervalos. En efecto, cualquiera que sea el punto c que se tome sobre el intervalo $(0, 1)$, siempre habrá un número de orden N tal que para $n > N$ tenga lugar $1/2^n < c$ y el punto c no pertenecerá a los intervalos de la sucesión (4) comenzando por el intervalo $(0, 1/2^N)$. El punto nulo tampoco les pertenece, ya que es el extremo izquierdo común de todos los intervalos.

○ **Ejemplo 7.** Constrúyase una sucesión de los segmentos encajados con el punto $c = 1$ perteneciente a todos los segmentos.

Resolución. La sucesión buscada es la de los segmentos encajados $[1/2, 1]$, $[2/3, 1]$, $[3/4, 1]$, $[4/5, 1]$, ... $[n/(n+1), 1]$, ..., ya que los **extremos izquierdos de los segmentos forman la sucesión $\{n/(n+1)\}$ cuyo límite para $n \to \infty$ es igual a 1 (véase el ejemplo 1 del § 2).** ●

PREGUNTAS PARA ELAUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de los segmentos encajados.
2. Dese la interpretación geométrica de la sucesión de los segmentos encajados.
3. Cítese un ejemplo de una sucesión de los segmentos encajados que con, curren al punto $c = 3$.

§ 5. Problemas de control

3.1. Una sucesión $\{x_n\}$ se asigna por los dos primeros elementos $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ y por la relación recurrente $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ para todo número $n \geqslant 1$ Determínese x_{90} y x_{885}.

3.2. Demuéstrese que la sucesión $\{3^{\sqrt{n}}\}$ es infinitamente grande.

3.3. Demuéstrese que la sucesión $\left\{\dfrac{(-1)^n \cdot 2}{5\sqrt{n}+1}\right\}$ es infinitamente pequeña.

3.4. Demuéstrese la segunda parte del teorema 3.1: si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente pequeña, $(\alpha_n \neq 0)$ entonces $\{x_n\} = \{1/\alpha_n\}$ es una sucesión infinitamente grande.

3.5. Muéstrese que la sucesión no acotada $\{n^{(-1)^n}\}$ no es infinitamente grande.

3.6. Demuéstrese que la sucesión $\{1+1/2+\ldots+1/2^n\}$ tiene por límite el número 2.

3.7. Demuéstrese que la sucesión $\{n/2^n\}$ tiene por límite el número 0.

3.8. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$.

3.9. Demuéstrese que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

3.10. Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ es infinitamente grande y la sucesión $\{y_n\}$ tiene un límite finito $a\neq 0$. ¿Qué se puede decir de la sucesión $\{x_n\cdot y_n\}$?

3.11. Cítense ejemplos de tales sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de manera que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$ y, además: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=\infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\cdot y_n$ no exista.

3.12. Se conoce que la sucesión $\{x_n\}$ converge y la sucesión $\{y_n\}$ tiene un límite finito $a\neq 0$. ¿Qué se puede decir de la convergencia de la sucesión $\{x_n\cdot y_n\}$?

3.13. Se sabe que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ divergen. ¿Pueden o no las sucesiones $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$ ser convergentes? ¿divergentes? Argumente las respuestas citando los ejemplos de las sucesiones $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$, $\{(-1)^{n+1}\}$.

3.14. Hállese: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+7}{3-4n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+1}{n^2-1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{n^2+n-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cos n^3-\dfrac{3n}{6n+1}\right)$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-n}{n^2+1}-\dfrac{3n^2+2}{4n^2+1}\right)$.

3.15. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ (a es todo número).

3.16. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3n^{10}}$.

3.17. Hállese $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$.

3.18. Demuéstrese que la sucesión que tiene por elemento general $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$ converge y determine su límite.

3.19. Una sucesión $\{x_n\}$ se asigna por la relación recurrente $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$. Demuéstrese que esta sucesión converge y hállese su límite.