4

FUNCIÓN

Pasando al estudio de la función nótese que el concepto de función es fundamental no sólo en el análisis matemático, donde se estudia especialmente, sino en todas las matemáticas en conjunto.

§ 1. Concepto de función

1. Definición de la función y conceptos fundamentales.

Definición 1. *Sean X e Y ciertos conjuntos numéricos. Se llama función f al conjunto de pares ordenados de números $(x;\ y)$* [1] *tales que $x \in X$, $y \in Y$ y cada x entra en un y sólo en un par de este conjunto, y cada y entra al menos en un par. En este caso se dice que al número x se le ha hecho corresponder el número y y se escribe $y = f(x)$. El número y se denomina valor de la función f en el punto x. La variable y se dice variable dependiente y la variable x, variable independiente (o argumento); el conjunto X se llama dominio de definición (o de existencia) de la función y el conjunto Y, conjunto de los valores de la función.*

En algunos manuales la función se entiende como una correspondencia determinada entre los elementos de dos conjuntos.

En este caso el concepto de correspondencia se introduce como primario, lo que provoca, naturalmente, ciertas dificultades en su aclaración [2] y, lo principal, en la comprensión exacta del mismo concepto de función. En cambio, la definición de función que se propone mediante el concepto de conjunto, en primer lugar carece de estas deficiencias y, en segundo lugar, responde al nivel moderno de la enseñanza de las matemáticas.

Además de la letra f, para designar las funciones, se utilizan otras letras del alfabeto latino y griego, por ejemploo $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = A(x)$, $y = F(x)$, etc. Con tras letras se designan las variables dependiente e independiente. A veces la función dependiente también se llama función.

Junto con el término «función» se usa el término equivalente «aplicación» y en vez de $y = f(x)$ se escribe $f : x \mapsto y$ y se dice que la *aplicación f transforma el número x en número y* o bien, lo que es lo mismo, el *número y es la imagen del número x cuando se aplica f.*

[1] Recuérdese que un par de números x e y se dice ordenado si se señala cuál de estos números se considera primero y cuál, segundo. Un par ordenado de números se escribe en la forma $(x;\ y)$, donde x es el primer número e y, el segundo.

[2] Pruebe, por ejemplo, explicar qué significa el término «correspondencia».

Durante los cálculos la notación $y = f(x)$ es de ordinario más cómoda que la notación $f\colon x \mapsto y$. Por ejemplo, siempre que se trate de transformaciones analíticas, es más cómodo utilizar la notación $f(x) = x^2$ que la notación $f\colon x \mapsto x^2$.

Supongamos que sobre cierto conjunto X está definida una función $f(x)$; entonces el valor de esta función, correspondiente a cierto valor del argumento x_0, se designará $f(x_0)$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(3) = 3^2 = 9$, $f(-2) = (-2)^2 = 4$, etc.

La función, todos los valores de la cual son iguales entre sí se dice *constante*. La función constante suele designarse con la letra C ($f(x) = C$).

Se dice que la función $f(x)$, definida sobre cierto conjunto X, está acotada superiormente (inferiormente) sobre este conjunto, si existe un número M (m) tal que para todo $x \in X$ se cumpla la desigualdad $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant m$). La función acotada superior e inferiormente sobre el conjunto X se denomina *acotada sobre este conjunto*. La condición de que la función $f(x)$ esté acotada puede escribirse en la forma siguiente: existe un número $M > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumpla la desigualdad $|f(x)| \leqslant M$.

○ **Ejemplos.** 1) La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ está acotada sobre toda la recta numérica, ya que $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ para cualquier x ($M = 1$); 2) la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no está acotada superiormente sobre el intervalo $(0, 1)$, ya que no existe un número M tal que para cualquier $x \in (0, 1)$ se cumpla la desigualdad $\frac{1}{x} \leqslant M$. ●

Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida sobre cierto conjunto X y que Y es el conjunto de los valores de la misma y sea que ella está acotada superiormente (inferiormente) sobre el conjunto X. Entonces el número M (m) y todo número mayor (menor) se llama *cota superior* (*inferior*) *del conjunto de los valores de la función* Y y el número mínimo (máximo) entre los que limitan el conjunto Y superiormente (inferiormente) se denomina *cota superior* (*inferior*) *exacta de la función sobre el conjunto* X, la cual se designa $\sup\limits_X f(x)$, ($\inf\limits_X f(x)$).

Si el conjunto Y no está acotado superiormente (inferiormente) se escribe $\sup\limits_X f(x) = +\infty$ ($\inf\limits_X f(x) = -\infty$). En este caso para todo número A existe un punto $x' \in X$ tal que $f(x') > A$ ($f(x') < A$).

○ **Ejemplo.** La función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ en el intervalo $X = [0, +\infty)$ tiene la cota inferior exacta $m = 0$ y la cota superior exacta $M = 1$. Efectivamente, la función está acotada sobre este intervalo, ya que para cualquier $x \in [0, +\infty)$ se cumplen las desigualdades $0 \leqslant \frac{x}{1+x} < 1$ ($m = 0$, $M = 1$). Así pues, m y M son, respectivamente, las cotas inferior y superior del conjunto de los valores de la función $Y = [0, 1)$. Además, puesto que $f(x) \geqslant 0$, entonces $m = 0$ es la cota inferior exacta del conjunto de los valores de la función. Para demostrar que $M = 1$ es la cota superior exacta de la función $f(x)$ hagamos uso de la propiedad de la cota superior exacta: para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $x \in [0, +\infty)$ tal que $\frac{x}{1+x} > 1 - \varepsilon$ o bien $x > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, o sea, para x que satisface la última desigualdad se cumple la desigualdad $f(x) > 1 - \varepsilon$ y esto demuestra precisamente que $M = 1$ es la cota superior exacta de la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ o bien, en las designaciones adoptadas, $1 = \sup\limits_{[0, +\infty]} \frac{x}{1+x}$ y $0 = \inf\limits_{[0, +\infty]} \frac{x}{1+x}$. Nótese que la cota superior exacta $M = 1$ no pertenece al conjunto de los valores de la función Y; en cambio, la cota exacta inferior $m = 0$ pertenece a Y. ●

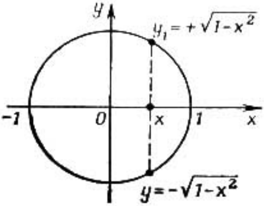

Fig. 77

Con las funciones pueden realizarse distintas operaciones aritméticas. Si se dan dos funciones f y g definidas sobre el mismo conjunto X y C es cierto número, la función $C \cdot f(x)$ se define como función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $C \cdot f(x)$; la función $f \pm g$, como función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x) \pm g(x)$; $f \cdot g$, como función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x) \cdot g(x)$; f/g, como función que toma en cada punto $x \in X$ el valor $f(x)/g(x)$ (para $g(x) \neq 0$).

Sobre el plano la función se representa en forma de una gráfica, o sea, en forma de un conjunto de los puntos $(x; y)$ cuyas coordenadas están ligadas por la relación $y = f(x)$ llamada *ecuación de la gráfica.*

La gráfica de una función puede representar cierta línea «continua» (curva o recta) y puede componerse de puntos aislados, por ejemplo, el gráfico de la función $y = n!$ (fig. 79).

Nótese que no toda línea es una gráfica de cualquier función. Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no es una gráfica de la función, ya que cada $x \in (-1, 1)$ entra no en un par sino en dos pares de números $(x; y)$ de este conjunto teniendo distintos valores de y: $y_1 = +\sqrt{1 - x^2}$ e $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$, lo que contradice la exigencia de univocidad en la definición de la función (fig. 77). Sin embargo, la parte de la circunferencia que está en el semiplano inferior es una gráfica de la función $y = -\sqrt{1 - x^2}$ y la otra parte de la circunferencia, situada en el semiplano superior, es una gráfica de la función $y = +\sqrt{1 - x^2}$.

2. Método de representación de las funciones. Representar la función f quiere decir que es necesario indicar cómo para cada valor del argumento x se encuentra el valor correspondiente de la función $f(x)$. Existen tres métodos principales de representar las funciones: *analítico*, *tabular* y *gráfico*.

1) **Método analítico.** Este método consiste en que la dependencia existente entre las variables se determina con ayuda de una fórmula que muestra qué operaciones y en qué orden han de cumplirse para

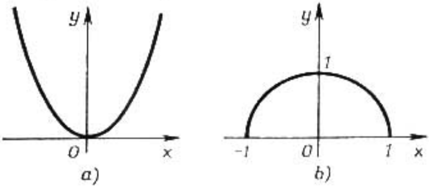

Fig. 78

obtener el valor de la función que corresponde al valor dado del argumento. Consideremos algunos ejemplos.

○ 1. La fórmula $y = x^2$ representa la función cuyo dominio de definición es la recta numérica $(-\infty, +\infty)$ y cuyo conjunto de los valores es la semirrecta $[0, +\infty)$ (fig. 78, *a*).

2. La fórmula $y = \sqrt{1 - x^2}$ asigna la función cuyo dominio de definición es el segmento $[-1, 1]$ y cuyo conjunto de los valores es el segmento $[0, 1]$ (fig. 78, *b*).

3. La fórmula $y = n!$ hace corresponder a cada número natural (o sea, a cada número positivo entero) n el número $y = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces $y = 3! = 6$. Por lo tanto, la fórmula $y = n!$ representa la función cuyo dominio de definición es $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ y cuyo conjunto de los valores es $\{1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots\}$ (fig. 79).

4. $$y = \operatorname{sgn} x\,^{1)} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La función dada está asignada con ayuda de varias fórmulas. Está definida sobre toda la recta numérica $(-\infty, +\infty)$ y el conjunto de sus valores se compone de tres números: -1, 0 y $+1$ (fig. 80).

5. La fórmula de Dirichlet [2] es

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número racional}, \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional}. \end{cases}$$

[1] El término sgn procede del lat. *signum*, o sea, signo.
[2] P.G. Dirichlet (1805—1859), matemático alemán.

Esta función está definida sobre toda la recta numérica $(-\infty, +\infty)$ y el conjunto de sus valores se compone de dos números: 0 y 1. ●

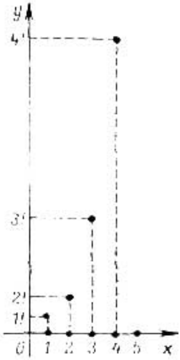

Fig. 79

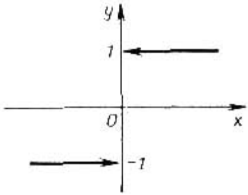

Fig. 80

Nótese que la función de Dirichlet no puede ser representada gráficamente.

2) **Método tabular.** Representemos la tabla siguiente:

x	0	0,1	0,2	3	0,6	4	0,8	1,5	2
y	−1	10	1	−2	−8	0,5	−2	5	7

Hagamos corresponder a cada x escrito en la primera fila de la tabla el número y que está debajo de este número x en la segunda fila y diremos que la función obtenida está asignada por la tabla. El dominio de definición de la función dada es el conjunto que se compone de nueve números x indicados en la primera fila de la tabla y el conjunto de sus valores es el conjunto que se compone de nueve números y escritos en su segunda fila.

Con ayuda de la tabla se puede asignar la función sólo si el número de valores del argumento es finito.

El método tabular se usa con frecuencia para representar las funciones. Así, son bien conocidas, por ejemplo, las tablas de las funciones trigonométricas, las tablas de los logaritmos y otras. De ejemplo del método tabular de representar una función sirve el horario del movimiento de un tren que determina el lugar donde se encuentra éste en diferentes instantes de tiempo.

3) **Método gráfico.** El método gráfico de representar una función suele utilizarse en la práctica de mediciones físicas, cuando la correspondencia entre las variables x e y se asigna con ayuda de una gráfica. Tal operación se llama de ordinario «lectura» de los valores de la gráfica. En muchos casos las gráficas son trazadas por aparatos autorregistradores. Por ejemplo, para medir la presión atmosférica a diferentes altitudes se usa un aparato autorregistrador especial llamado barógrafo, que traza una curva sobre una cinta en movimiento que indica la variación de la presión en función de la altitud.

Existen también otros procedimientos de representar funciones, por ejemplo, al realizar los cálculos en un ordenador las funciones se asignan con ayuda de **programas.**

3. Conceptos de funciones compuesta e inversa.

Definición 2. *Si sobre cierto conjunto X está definida la función $z = \varphi(x)$ con un conjunto de los valores Z y sobre el conjunto Z está definida la función $y = f(z)$, entonces la función $y = f[\varphi(x)]$ se llama función compuesta de x [o superposición (a veces composición) de las funciones $\varphi(x)$ y $f(z)$] y la variable z, variable intermedia de la función compuesta.*

○ **Ejemplo.** La función $y = \operatorname{sen} x^2$ es una función compuesta definida sobre toda la recta numérica, ya que $y = f(z) = \operatorname{sen} z$, $z = \varphi(x) = x^2$. ●

Definición 3. *Sean X e Y ciertos conjuntos y supongamos que se da la función f, o sea, el conjunto de los pares de números $(x; y)$ $(x \in X, y \in Y)$ en el cual cada número x entra en un y sólo un par y cada número y entra, al menos, en un par. Si en cada par de este conjunto los números x e y se cambian de lugar, obtenemos un conjunto de pares de los números $(y; x)$, el cual se llama función inversa φ a la función f.*

Designaremos la función inversa con el símbolo $x = \varphi(y)$.

Hablando en general, la función inversa no es una función, ya que cada número y puede formar parte no sólo de un par sino también de varios pares. Así, por ejemplo, para la función $y = x$ la función inversa $x = y$ es unívoca (cada número y entra en un par), para la función $y = x^2$ la función inversa $x = \pm\sqrt{y}$ es bivalente (cada número y entra en dos pares) y la función $x = \operatorname{Arcsen} y$ para la función $y = \operatorname{sen} x$ es multívoca (cada número y forma parte de un número infinito de pares). Geométricamente el hecho dado es evidente.

De la definición se deduce que si la función inversa es unívoca, o sea, es una función en el sentido ordinario, el conjunto de los valores Y de la función f sirve de dominio de definición de la función inversa φ y el dominio de definición X de la función f sirve de conjunto de los valores de la función inversa φ. Supongamos, por ejemplo, que la función $y = f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, el segmento $[\alpha, \beta]$ es el conjunto de los valores de la misma y cada $y \in [\alpha, \beta]$ corresponde exactamente a un número x de $[a, b]$. Entonces, por definición, sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ está definida la función inversa unívoca $x = \varphi(y)$ y de conjunto de sus valores sirve el segmento $[a, b]$ (fig. 81). De esta manera, la función $y = f(x)$ y la función inversa $x = \varphi(y)$ tienen la misma gráfica. Por ejemplo, la función $y = 5x$ y la función inversa $x = 1/5y$ se representan gráficamente por la misma recta.

Si los ejes Ox y Oy se cambian de lugar para lo cual es necesario girar en el espacio el plano Oxy alrededor de la bisectriz del cuadrante I en 180°, la nueva posición de la gráfica de la función inversa $x = \varphi(y)$ es la gráfica de la función $y = \varphi(x)$ (fig. 81).

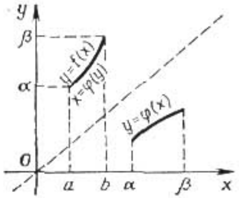

Fig. 81

Más adelante continuaremos considerando las funciones compuesta e inversa.

4. Clasificación de las funciones. La función constante $f(x) = C, C = \text{const}$, la función potencial x^α (α es todo número), la función exponencial a^x $(0 < a \neq 1)$, la función logarítmica $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ y las funciones trigonométricas inversas $\operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ se llaman *funciones elementales más simples* [1]).

Estas funciones desempeñan un importante papel para aclarar los conceptos fundamentales del análisis y constituyen la base para el estudio de funciones más complicadas.

Todas las funciones que se obtienen con ayuda de un número finito de operaciones aritméticas con las funciones elementales más simples, así como por la superposición de estas funciones constituyen la *clase de funciones elementales.* De ejemplos de funciones elementales sirven $f(x) = |x|$ $(|x| = \sqrt{x^2})$; $f(x) = \log^3 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}} + \operatorname{sen} 3x$; $f(x) = \ln |\operatorname{sen} 3x| - e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$, etc.

Tiene lugar la siguiente clasificación de las funciones elementales:

1) La función de la forma

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

donde $m \geqslant 0$ es un número entero y $a_0, a_1, \ldots, a_m$ *son cualesquiera* números, o sea, coeficientes $(a_0 \neq 0)$, se llama *función racional entera o polinomio de grado m.* El polinomio de primer grado se denomina también *función lineal.*

2) La función que es una relación de dos funciones racionales enteras

$$R(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

se llama *función racional fraccional.*

[1]) Se supone que el lector tenga una noción de las funciones elementales más simples al menos en el marco de la matemática elemental.

El *conjunto de las funciones racionales y racionales fraccionales* forma la *clase de funciones racionales.*

3) La función que está obtenida con ayuda de un número finito de superposiciones y cuatro operaciones aritméticas sobre las funcio-

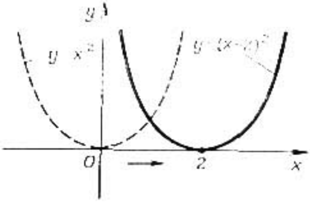

Fig. 82

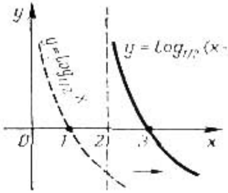

Fig. 83

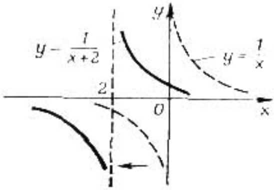

Fig. 84.

nes potenciales, tanto con exponentes enteros como con fraccionarios y que no es racional, se llama *irracional.*

Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x + \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}} - (\sqrt[5]{x} + x)^3$, etc., son funciones irracionales.

4) Toda función que no sea racional o irracional se denomina función *trascendente.* Tales, por ejemplo, son las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \operatorname{sen} x + x$, etc.

5. Construcción de las gráficas de funciones. Proponemos el siguiente método de construcción de las gráficas de funciones, que se basa en el empleo de algunas reglas de construcción valiéndose de las gráficas de funciones ya conocidas.

Supongamos que se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Construyamos la gráfica de la función $y = f(x - a)$. Esta gráfica puede ser obtenida del modo siguiente: partiendo del punto arbitrario x, en el que la ordenada $f(x)$ se conoce, determinaremos el punto x_1 en el cual la *ordenada* $f(x_1 - a)$ *tiene el mismo valor*, o sea, se cumple

la igualdad
$$f(x_1 - a) = f(x).$$
Para que se cumpla esta igualdad basta, evidentemente, que se cumpla la igualdad
$$x_1 - a = x,$$
de donde encontramos $x_1 = x + a$[1].

Regla 1. *Para obtener la gráfica de la función $y = f(x - a)$ a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ es necesario la gráfica de*

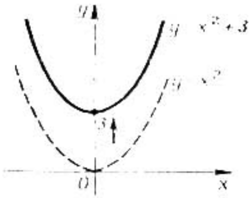

Fig. 85

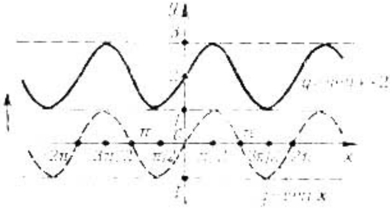

Fig. 86

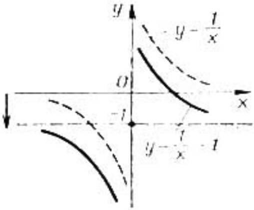

Fig. 87

la función $y = f(x)$ desplazarla a lo largo del eje Ox en a a la ***derecha****, si $a > 0$, o bien en* ***$|a|$ a la izquierda****, si $a < 0$.*

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la regla 1, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = (x - 2)^2$. **2.** $y = \log_{1/2}(x - 2)$. **3.** $y = \frac{1}{x+2}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 82, 83 y 84, respectivamente. ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = (x+2)^2$. **2.** $y = \log_{1/2}(x+2)$. **3.** $y = 3^{x+2}$. **4.** $y = \frac{1}{x-2}$. **5.** $y = \frac{1}{x+1}$. **6.** $y = \sqrt{x+1}$. **7.** $y = \sqrt{x-1}$. **8.** $y = \log_2(x-2)$. **9.** $y = \log_2(x+2)$. **10.** $y = \cos(x + \pi/6)$. **11.** $y = \operatorname{tg}(x - \pi/2)$. **12.** $y = \arccos(x - 2)$. **13.** $y = \operatorname{arcctg}(x - 1/4)$.

[1] En efecto, si $x_1 = x + a$, entonces $f(x_1 - a) = f(x + a - a) = f(x)$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Vamos a construir la gráfica de la función $y = f(x) + c$.

Regla 2. *Para obtener la ordenada de la gráfica de la función* $y = f(x) + c$ *en el punto* x *a partir de la ordenada de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *en el mismo punto, es necesario desplazar la gráfica de la función* $y = f(x)$ *a lo largo del eje* Oy *hacia arriba en* c, *si* $c > 0$, *o bien en* $|c|$ *hacia abajo, si* $c < 0$.

○ **Ejemplo 2.** Utilizando la regla 2, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = x^2 + 3$. **2.** $y = \operatorname{sen} x + 2$; $y = \frac{1}{x} - 1$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 85, 86 y 87, respectivamente. ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = x^2 - 3$. **2.** $y = \operatorname{sen} x - 2$. **3.** $y = \frac{1}{x} + 1$. **4.** $y = \sqrt{x} + 1$. **5.** $y = 3^x - 1$. **6.** $y = \log_{1/2} x + 1$. **7.** $y = \sqrt[3]{x} + 1$. **8.** $y = \operatorname{arctg} x + 1$. **9.** $y = (1/2)^x + 1$.

Se da la gráfica $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = -f(x)$.

Regla 3. *Para obtener la ordenada de la gráfica de la función* $y = -f(x)$ *en el punto* x *a partir de la ordenada de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *en el mismo punto, es necesario en la ordenada de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *cambiar el signo por el opuesto. Así pues, la gráfica de la función* $y = -f(x)$ *se obtiene a partir de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *mediante la reflexión directa respecto al eje* Ox.

○ **Ejemplo 3.** *Utilizando la regla 3, constrúyanse las gráficas de las funciones:* **1.** $y = -x^2$. **2.** $y = -\cos x$. **3.** $y = -\sqrt{x}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 88, 89 y 90, respectivamente. ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = -x^3$. **2.** $y = -\sqrt[3]{x}$. **3.** $y = -\frac{1}{x}$. **4.** $y = -3^x$. **5.** $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **6.** $y = -\log_3 x$. **7.** $y = -\operatorname{sen} x$. **8.** $y = -\operatorname{tg} x$. **9.** $y = -\operatorname{arcctg} x$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(-x)$.

Regla 4. *Para obtener la ordenada de la gráfica de la función* $y = f(-x)$ *en el punto* x *a partir de la ordenada de la gráfica* $y = f(x)$ *en el mismo punto, es necesario multiplicar el valor* x *por* -1. *Así pues, la gráfica de la función* $y = f(-x)$ *se obtiene a partir de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *mediante la reflexión directa respecto al eje* Oy.

○ **Ejemplo 4.** Utilizando la regla 4, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \sqrt{-x}$. **2.** $y = \log_2(-x)$. **3.** $y = 3^{-x}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 91, 92 y 93, respectivamente. ●

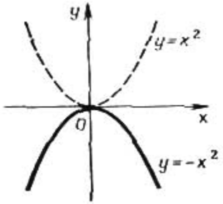

Fig. 88

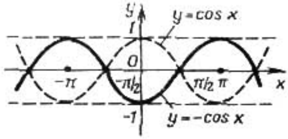

Fig. 89

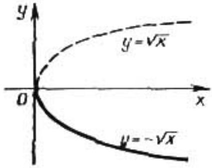

Fig. 90

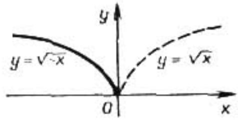

Fig. 91

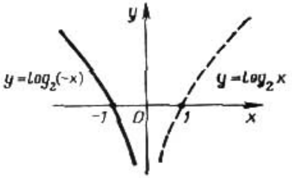

Fig. 92

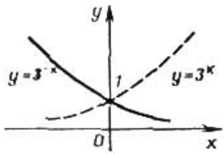

Fig. 93

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \log_{1/2}(-x)$. **2.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$. **3.** $y = \sqrt[3]{-x}$. **4.** $y = \operatorname{arcsen}(-x)$. **5.** $y = \operatorname{arcctg}(-x)$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = kf(x)$.

Regla 5. *Para obtener la ordenada de la gráfica de la función $y = kf(x)$ en el punto x a partir de la ordenada de la gráfica de la función $y = f(x)$ en el mismo punto, es necesario multiplicar el valor de la ordenada $f(x)$ por el número k.*

En este caso debido a la multiplicación de todos los valores de la función $f(x)$ por $k > 1$ las ordenadas de la gráfica de la función aumentan k veces y la gráfica de la función $y = f(x)$ «se estira» a partir del eje Ox k veces, mientras que debido a la multiplicación por k para $0 < k < 1$ las ordenadas de la gráfica de la función disminuyen k veces y la gráfica de la función $y = f(x)$ «se contrae» k veces hacia el eje Ox.

○ **Ejemplo 5.** Utilizando la regla 5, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = 2x^2$. **2.** $y = 2 \operatorname{sen} x$. **3.** $y = 1/2\sqrt{x}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las *figs.* 94, 95 y 96, *respectivamente.*

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \frac{1}{2}x^2$. **2.** $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$. **3.** $y = 2\sqrt{x}$. **4.** $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$. **5.** $y = \frac{3}{x}$. **6.** $y = \frac{1}{2}\log_{1/2} x$. **7.** $y = 2 \cdot 2^x$. **8.** $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$. **9.** $y = \frac{1}{2} \arccos x$. **10.** $y = 2 \operatorname{arctg} x$. **11.** $y = 2\log_{1/2} x$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(kx)$. Partiendo de un punto arbitrario x en el cual se conoce la ordenada $f(x)$ encontraremos el punto x_1 en el cual la gráfica de la función $y = f(kx_1)$ tiene la misma ordenada, o sea, se cumple la igualdad

$$f(x) = f(kx_1).$$

Para que esta igualdad se cumpla [1]) es, evidentemente, suficiente el cumplimiento de la igualdad $x = kx_1$, de donde encontramos $x_1 = \frac{1}{k}x$.

Regla 6. *Para construir la gráfica $y = f(kx)$ basta dividir el valor de x por el número k.*

En este caso debido a la división de todos los valores del argumento de la función $y = f(x)$ por $k > 1$ la gráfica de la función «se contrae» hacia el eje Oy $1/k$ veces y debido a la división por k para $0 < k < 1$ la gráfica de la función «se estira» a partir del eje Oy $1/k$ veces.

○ **Ejemplo 6.** Utilizando la regla 6, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \operatorname{sen} 2x$. **2.** $y = \arcsen 2x$. **3.** $y = \sqrt{(1/2)x}$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 97, 98 y 99, respectivamente.

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \operatorname{sen}(x/2)$. **2.** $y = \operatorname{arcsen}(x/2)$. **3.** $y = \sqrt{2x}$. **4.** $y = \sqrt[3]{8x}$. **5.** $y = 5^{x/2}$. **6.** $y = (0{,}5)^{3x}$. **7.** $y = \log_{1/3} 2x$. **8.** $y = \cos(x/2)$. **9.** $y = \operatorname{tg} 2x$. **10.** $y = \arccos 3x$.

Antes de enunciar la siguiente regla construyamos la gráfica de la función, empleando sucesivamente varias reglas.

[1]) Compruebe este hecho.

○ **Ejemplo 7.** Constrúyase la gráfica de la función $y = 2x^2 - 8x + 5$.

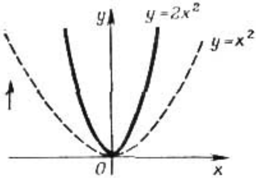

Fig. 94.

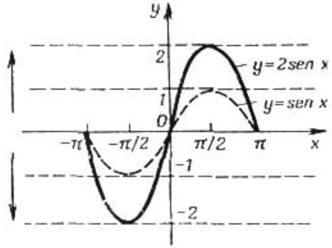

Fig. 95

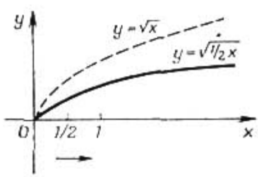

Fig. 96

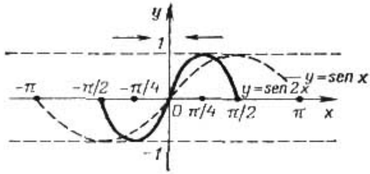

Fig. 97

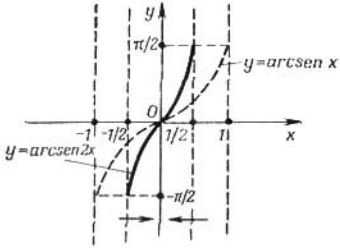

Fig. 98

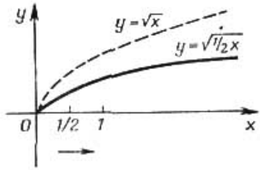

Fig. 99

Separando el cuadrado perfecto, transformemos el trinomio de segundo grado reduciéndolo a la forma

$$y = 2x^2 - 8x + 5 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2\left[(x-2)^2 - \frac{3}{2}\right] = 2(x-2)^2 - 3$$

y cumpliremos la construcción en la forma siguiente: 1) consideramos conocida la gráfica de la función $y = x^2$; 2) según la regla 5 construimos la gráfica de la función $y = 2x^2$; 3) según la regla 1 construimos la gráfica de la función $y = 2(x-2)^2$; 4) según la regla 2 construimos la gráfica de la función buscada $y = 2(x-2)^2 - 3$ (fig. 100).

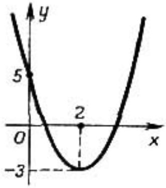

Fig. 100

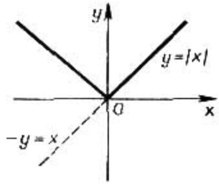

Fig. 101

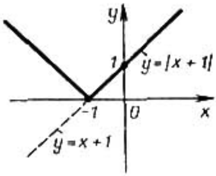

Fig. 102

Hemos obtenido la gráfica de la **parábola** $y = 2x^2$ **desplazado** 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia abajo. De un modo análogo se construye la gráfica de todo trinomio de segundo grado. ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = 2(x-5)^2 - 1$. **2.** $y = -2 - (1/2)(x+3)^2$. **3.** $y = x^2 - 4x + 1$. **4.** $y = 3x - x^2$. **5.** $y = 4 - 2x^2 - 2x$. **6.** $y = 4x - x^2 - 3$.

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyanse la gráfica de la función $y = |f(x)|$. Tenemos

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0^{1)}. \end{cases}$$

Regla 7. *Para obtener la gráfica de la función $y = |f(x)|$ a partir de la función $y = f(x)$ es necesario dejar sin cambios los trozos de la gráfica $y = f(x)$ que están por encima del eje Ox y reflejar en forma especular respecto al eje Ox los trozos inferiores a este eje.*

○ **Ejemplo 8.** Utilizando la regla 7, constrúyase la gráfica de la función $y = |x|$.

Construimos la gráfica de la función $y = x$ (fig. 101). Luego, dejamos sin variar el trozo de la gráfica $y = x$ que está situado por encima del eje Ox (para $x \geqslant 0$) y reflejamos en forma especular respecto al eje Ox el trozo inferior a este eje (para $x < 0$); como resultado obtenemos la gráfica de la función $y = |x|$.

Ejemplo 9. Constrúyase la gráfica de la función $y = |x + 1|$.

Construimos la gráfica de la función $y = x + 1$ (fig. 102). Luego dejamos sin variar el trozo de la gráfica $y = x + 1$ que está situado por encima del eje Ox (para $x \geqslant -1$) y reflejamos en forma especular

[1] Por desgracia, a veces se escribe una igualdad incorrecta

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

respecto al eje Ox el trozo inferior a este eje (para $x < -1$); como resultado obtenemos la gráfica de la función $y = |x+1|$. Se podría obtener esta misma gráfica construyendo primero la gráfica de la función $y = |x|$ y aplicando luego la regla 1.

Ejemplo 10. Constrúyase la gráfica de la función $y = |1 - |x||$.

Realicemos la construcción en el orden siguiente: 1) consideramos como conocida la gráfica de la función $y = |x|$ (véase la fig. 101); 2) construimos la gráfica $y = -|x|$ (según la regla 3); 3) construimos la gráfica $y = 1 - |x|$ (según la regla 2); 4) construimos la gráfica de la función buscada $y = |1 - |x||$ (según la regla 7). La gráfica de la función $y = |1 - |x||$ está construida en la fig. 103. ●

Se da la gráfica de la función $y = f(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(|x|)$. Puesto que $f(|-x|) = f(|x|)$, la función $y = f(|x|)$ es par, por lo tanto, su gráfica es simétrica respecto al eje Oy. Además, para $x \geqslant 0$ $f(|x|) = f(x)$.

Regla 8. *Para obtener la gráfica de la función $y = f(|x|)$ a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ es necesario construir la gráfica de la función $y = f(x)$ para $x \geqslant 0$ y reflejarla en forma especular respecto al eje Oy.*

○ **Ejemplo 11.** Utilizando la regla 8, constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \sqrt{|x|}$. **2.** $y = \log_3 |x|$. **3.** $y = \operatorname{sen} |x|$.

Las gráficas de las funciones dadas están construidas en las figs. 104, 105 y 106, respectivamente. ●

A veces las reglas 7 y 8 han de emplearse simultáneamente, o sea, deben construirse las gráficas de las funciones que tienen la forma $y = |f(|x|)|$.

○ **Ejemplo 12.** Constrúyase la gráfica de la función $y = |2x^2 - 8|x| + 5|$.

La gráfica de la función $y = 2x^2 - 8x + 5$ ya ha sido construida (véase la fig. 100). Notando que $x^2 = |x|^2$, construimos la gráfica de la función $y = 2x^2 - 8|x| + 5$ según la regla 8. Construimos una parte de la parábola $y = 2x^2 - 8x + 5$ para $x \geqslant 0$ y la reflejamos en forma especular respecto al eje Oy (fig. 107). Según la regla 7 construimos la gráfica del módulo (fig. 108). ●

En los ejemplos siguientes construiremos las gráficas utilizando diferentes reglas sin indicar qué reglas concretamente.

○ **E emplo 13.** Constrúyase la gráfica de la función $y = \left|\frac{x+5}{x+3}\right|$.

Separando la parte entera, reduzcamos la función lineal fraccional dada a la forma $y = \left|1 + \frac{2}{x+3}\right|$ y construyamos la gráfica en el orden siguiente: 1) consideramos como conocida la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$; 2) construimos la gráfica $y = \frac{1}{x+3}$;

3) construimos la gráfica $y=\frac{2}{x+3}$; 4) construimos la gráfica $y=1+\frac{2}{x+3}$; 5) construimos la gráfica $y=\left|1+\frac{2}{x+3}\right|$ (fig. 109).

Nótese que las gráficas intermedias pueden construirse tanto en una sola figura como en distintas. En el caso dado conviene cumplir

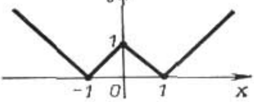

Fig. 103

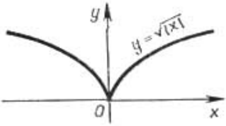

Fig. 104

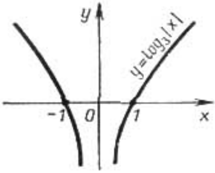

Fig. 105

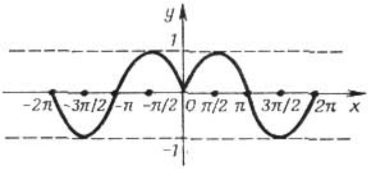

Fig 106

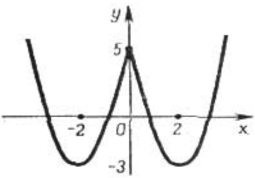

Fig. 107

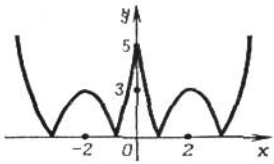

Fig. 108

esto, para mayor evidencia, en diferentes figuras (haga esto por sí mismo).

Ejemplo 14. Constrúyase la gráfica de la función $y=(1/4)^{3x-1}+1$.

Representemos la función en la forma $y=(1/4)^{3x-1}+1=(1/4)^{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+1$ y realicemos la construcción en el orden siguiente: 1) consideramos como conocida la gráfica de la función $y=(1/4)^{x}$; 2) construimos la gráfica $y=(1/4)^{3x}$; 3) construimos la gráfica $y=(1/4)^{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$; 4) construimos la gráfica $y=(1/4)^{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+1$ (fig. 110).

Ejemplo 15. Constrúyase la gráfica de la función $y=-\operatorname{arctg}(4x-1)$.

Representemos la función en la forma $y=-\operatorname{arctg}(4x-1)=-\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ y construyamos su gráfica en el orden siguiente: 1) consideramos como conocida la gráfica de la función

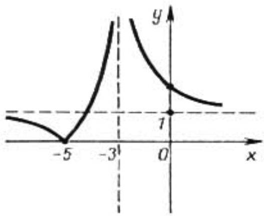

Fig. 109

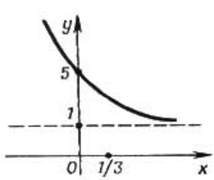

Fig. 110

$y=\operatorname{arctg}x$; 2) construimos la gráfica $y=\operatorname{arctg}4x$; 3) construimos la gráfica $y=\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$; 4) construimos la gráfica $y=-\operatorname{arctg}4\left(x-\frac{1}{4}\right)$ (fig. 111). ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y=1+\frac{1}{x+2}$. **2.** $y=\frac{1}{x+3}-1$. **3.** $y=\frac{4x+7}{2x-5}$. **4.** $y=\left|\frac{4-x}{5+2x}\right|$. **5.** $y=3^{x-2}$. **6.** $y=(0{,}25)^{x+3}$. **7.** $y=-2^{2x-1}$. **8.** $y=-(0{,}5)^{x+1}+1$. **9.** $y=2^{x+2}$. **10.** $y=-\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{3}$. **11.** $y=2\operatorname{arctg}(2x-1)$. **12.** $y=3\operatorname{arcctg}(3x+1)$. **13.** $y=2\arccos\frac{1-x}{2}$. **14.** $y=-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x+2}{2}$.

Consideremos ahora las reglas de adición, multiplicación y división de las gráficas.

Se dan las gráficas de las funciones $y_1=f(x)$ e $y_2=g(x)$. Constrúyase la gráfica de las funciones $y=f(x)+g(x)$ [1]).

---

[1]) La diferencia siempre puede reducirse a la suma: $y=f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)]$.

Regla 9. *Para obtener la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$ a partir de las gráficas de las funciones y_1 e y_2 es necesario adicionar los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones y_1 e y_2.*

○ **Ejemplo 16.** Utilizando la regla 9, constrúyase la gráfica de la función $y = x + \text{sen}\, x$.

La función y está definida sobre toda la recta numérica. Obtenemos su gráfica mediante la adición gráfica de los valores correspondientes de las ordenadas y_1 e y_2; $y = y_1 + y_2$.

Construimos las gráficas de las funciones $y_1 = x$ e $y_2 = \text{sen}\, x$ (líneas de trazos en la fig. 112). En los puntos $x = 0; \pm\pi; \pm 2\pi; \ldots$

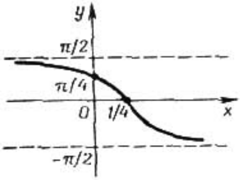

Fig. 111

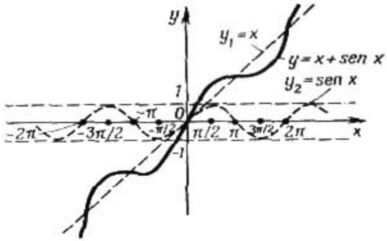

Fig. 112

tenemos $y_2 = 0$, $y_1 = x$ e $y = y_1 + 0 = x$, o sea, en estos puntos la gráfica de la función pasa por la recta $y_1 = x$. En los puntos $x = \pm\pi/2; \pm 3\pi/2; \ldots$ tenemos $y_2 = \pm 1$, $y_1 = x$ e $y = x \pm 1$, o sea, en ellos adicionamos $+1$ (respectivamente -1) a la ordenada $y_1 = x$. Marcando los puntos hallados y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la gráfica de la función buscada (línea continua en la fig. 112). ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = |x| + x$. **2.** $y = 3^x + 3^{-x}$. **3.** $y = \text{sen}\, x + |\text{sen}\, x|$. **4.** $y = x^2 + \frac{1}{x}$. **5.** $y = |x| + \frac{1}{x}$. **6.** $y = x + \cos x$.

Se dan las gráficas de las funciones $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f(x) \cdot g(x)$.

Regla 10. *Para obtener la gráfica de la función $y = f(x) \cdot g(x)$ a partir de las gráficas de las funciones y_1 e y_2 es necesario multiplicar los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones y_1 e y_2.*

○ **Ejemplo 17.** Utilizando la regla 10, constrúyase la gráfica de la función $y = x \cdot \text{sen}\, x$.

La función y está definida sobre toda la recta numérica. Puesto que las funciones $y_1 = x$ e $y_2 = \text{sen}\, x$ son impares, entonces la función y, como producto de las funciones impares, es par; por lo tanto, vamos a realizar la construcción para $x \geqslant 0$.

Construimos las gráficas de las funciones $y_1 = x$ e $y_2 =$ sen x. Obtenemos la gráfica de la función y mediante la multiplicación de las ordenadas respectivas y_1 e y_2: $y = y_1 \cdot y_2$. En los puntos $x = \pi; 2\pi; \ldots$ tenemos $y_2 = 0$ e $y = y_1 \cdot y_2 = 0$ y en los puntos $x = \pi/2; 3\pi/2; \ldots$ $y_2 = \pm 1$ e $y = y_1 \cdot (\pm 1) = \pm x$, o sea, los

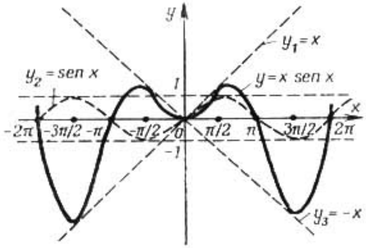

Fig. 113

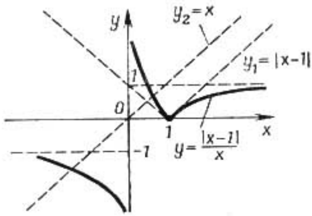

Fig. 114

puntos correspondientes de la gráfica de la función y están sobre las rectas $y_1 = x$ e $y_2 = -x$ y la gráfica «oscila» entre estas rectas para $x \to +\infty$. Ahora bien, para construir la gráfica dada es conveniente construir la gráfica de la función auxiliar $y_3 = -x$.

Para $x \to 0+$ (o sea, a la derecha) las funciones sen x y x son equivalentes (sen $x \sim x$) (véase el § 6), por eso $y = y_1 \cdot y_2 = x \cdot x = x^2$. Construyendo la parte de la gráfica para $x \geqslant 0$ y reflejándola respecto al eje Oy, obtenemos la gráfica buscada (fig. 113). ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones:
1. $y = |x|$ sen x. **2.** $y = x. |x|$. **3.** $y = x |$sen $x|$.
4. $y = x(x^2 - 1)$.

Se dan las gráficas de las funciones $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Regla 11. *Para obtener la gráfica de la función* $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a partir de las gráficas de las funciones* y_1 *e* y_2 *es necesario dividir los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones* y_1 *e* y_2 *en los puntos donde* $y_2 \neq 0$.

○ **Ejemplo 18.** Utilizando la regla 11, constrúyase la gráfica de la función $y = \dfrac{|x-1|}{x}$.

La función y está definida sobre toda la recta numérica, a excepción del punto $x = 0$. Construimos las gráficas de las funciones

$y_1 = |x-1|$ e $y_2 = x$ *(fig. 114). Obtenemos la gráfica de la función* y dividiendo los valores correspondientes de las ordenadas de las gráficas de las funciones y_1 e y_2 en todos los puntos, salvo $x = 0$.

De la figura se ve que para $x \to 0-$ (o sea, a la izquierda) $y_1 \to 1$, $y_2 \to 0$ e $y = y_1/y_2 \to -\infty$ y para $x \to 0+$ (o sea, a la derecha) $y_1 \to 1$, $y_2 \to 0$ e $y = y_1/y_2 \to +\infty$. Ahora bien, la recta $x = 0$ es la asíntota de la gráfica de la función y. La definición de la asíntota *se ha dado en el cap. 5, § 15, subp. 5.*

En el punto $x = 1$ tenemos $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ e $y = y_1/y_2 = 0$.

Para $x \to +\infty$ obtenemos $y = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \to 1$, por eso la recta $y = 1$ es la asíntota de la rama derecha de la gráfica de la función y y para $x \to -\infty$ tenemos $y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1 \to -1$, por eso la recta $y = -1$ es la asíntota de la rama izquierda de la gráfica de la función y. Representaremos las asíntotas mediante una línea de trazos.

De esta manera, la gráfica de la función buscada se compone de dos ramas representadas en la fig. 114 por una línea continua.

La gráfica de la función dada puede ser construida también por otro método. La función $y = \frac{|x-1|}{x}$ puede definirse por dos fórmulas:

$$y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & \text{para } x-1 \geqslant 0, \\ -\dfrac{(x-1)}{x} & \text{para } x-1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x} & \text{para } x \geqslant 1, \\ \dfrac{1-x}{x} & \text{para } x < 1. \end{cases}$$

Construyendo por separado las funciones lineales fraccionales $y = \frac{1-x}{x}$ e $y = \frac{x-1}{x}$ y *conservando sólo aquellas sus partes que corresponden a los intervalos indicados, obtenemos la gráfica buscada.* (Haga esto por sí mismo.) ●

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = \frac{x}{|x-1|}$. **2.** $y = \frac{|7x+2|}{2x+1}$. **3.** $y = \frac{2x+4}{|3x+5|}$. **4.** $y = \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}$. **5.** $y = \frac{1}{3^x + 3^{-x}}$. **6.** $y = \frac{1}{4^{3x-1}+2}$.

(**Indicación** para los ejercicios de 4 a 6: desígnese el denominador por $y_1(x)$, constrúyase primero la gráfica de la función $y_1(x)$ y luego la de la función $y = \frac{1}{y_1(x)}$.)

Nos queda considerar la regla de construcción de las gráficas de las funciones compuestas. El concepto de función compuesta está introducido en el subp. 3.

Se da la gráfica de la función $u = \varphi(x)$. Constrúyase la gráfica de la función $y = f[\varphi(x)]$.

Regla 12. *Para construir la gráfica de la función $y = f[\varphi(x)]$ es necesario primero construir la gráfica de la función $u = \varphi(x)$ y luego, conociendo las propiedades de la función $y = f(u)$, construir la gráfica de la función compuesta $y = f[\varphi(x)]$.*

○ **Ejemplo 19.** Utilizando la regla 12, vamos a construir la gráfica de la función $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

La función y está definida sobre toda la recta numérica, a excepción del punto $x = -1$. Primero construimos la gráfica

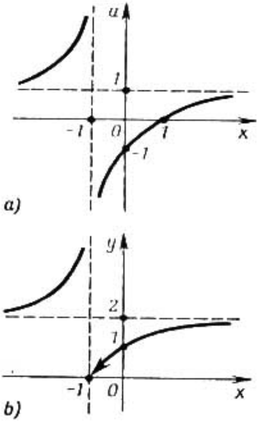

Fig. 115

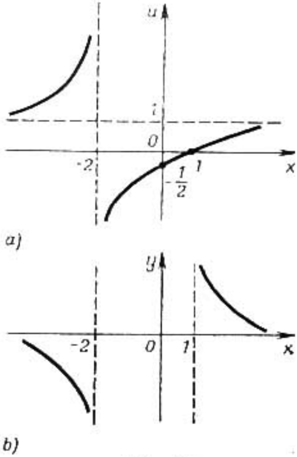

Fig. 116

de la función $u = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ (fig. 115, *a*) y luego, utilizando las propiedades de la función exponencial, construimos la gráfica de la función $y = 2^u = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Si $x \to -1-$, entonces $u \to +\infty$, $y = 2^u \to +\infty$.
Si $x \to -1+$, entonces $u \to -\infty$, $y = 2^u \to 0$.
Si $x \to -\infty$, entonces $u \to 1$, $y = 2^u \to 2$.
Si $x \to +\infty$, entonces $u \to 1$, $y = 2^u \to 2$.

Ahora bien, las rectas $x = -1$ e $y = 2$ son las asíntotas del gráfico de la función y. En el punto $x = 1$ tenemos $u = 0$, $y = 2^0 = 1$.

Basándonos en los datos obtenidos, construimos la gráfica buscada (fig. 115, *b*); la flecha está representada para mostrar que el punto $(-1; 0)$ no pertenece a la gráfica.

Ejemplo 20. Utilizando la regla 12, constrúyase la gráfica de la función $y=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$.

Construimos primero la gráfica de la función $u=\frac{x-1}{x+2}=$ $=1-\frac{3}{x+2}$ (fig. 116, *a*) y luego la gráfica de la función $y=$ $=\log_{1/2}u=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$. Por definición, la función logarítmica $y=\log_{1/2}u$ está definida sólo para aquellos valores de x para los cuales $u>0$, o sea, $\frac{x-1}{x+2}>0$ para x que satisfagan las desigualdades $-\infty<x<-2$ y $1<x<+\infty$, que son el dominio de determinación de la función $y=\log_{1/2}\frac{x-1}{x+2}$.

Si $x\to-\infty$, entonces $u\to 1$, $y=\log_{1/2}u\to 0$.

Si $x\to-2$, entonces $u\to+\infty$, $y=\log_{1/2}u\to-\infty$.

Si $x\to+\infty$, entonces $u\to 1$, $y=\log_{1/2}u\to 0$.

Si $x\to 1+$, entonces $u\to 0$, $y=\log_{1/2}u\to+\infty$.

Ahora bien, las rectas $x=-2$, $x=1$ e $y=0$ son las asíntotas de la gráfica de la función y. Basándonos en los datos obtenidos, construimos la gráfica buscada (fig. 116, *b*).

Ejemplo 21. Utilizando la regla 12, constrúyase la gráfica de la función $y=\arccos(1/x)$.

Como antes, primero construimos la gráfica de la función $u=1/x$ (fig. 117, *a*) y luego la gráfica de la función $y=\arccos u=\arccos(1/x)$. Por definición, la función $y=$ $=\arccos u$ está definida sólo para

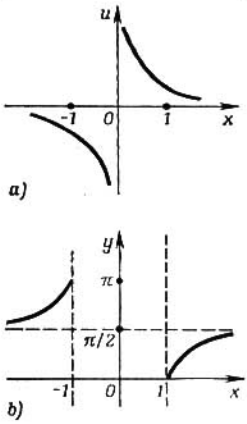

Fig. 117

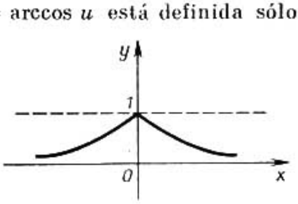

Fig. 118

aquellos x, para los cuales $-1\leqslant u\leqslant 1$, o sea, para x que satisfagan las desigualdades $-1\leqslant 1/x\leqslant 1$. Por lo tanto, en calidad de dominio de definición de la función $y = \arccos \frac{1}{x}$ sirven dos intervalos: $-\infty < x \leqslant -1$ y $1 \leqslant x < +\infty$.

Si $x = -1$, entonces $u = -1$, $y = \arccos(-1) = \pi$.

Si $x = +1$, entonces $u = +1$, $y = \arccos 1 = 0$.

Si $x \to -\infty$, entonces $u \to 0$, $y = \arccos u \to \pi/2$.

Si $x \to +\infty$, entonces $u \to 0$, $y = \arccos u \to \pi/2$.

De esta manera, la recta $y = \pi/2$ es la asíntota de la gráfica. Basándonos en los datos obtenidos, construimos la gráfica buscada (fig. 117, *b*). ●

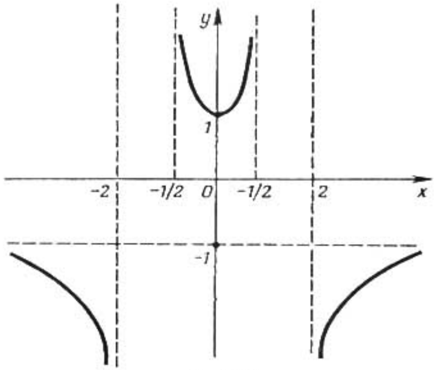

Fig. 119

Ejercicios. Constrúyanse las gráficas de las funciones: **1.** $y = 2^{|x|}$. **2.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. (*Resp.* Fig. 118.) **3.** $y = 2^{\frac{1}{x}}$. **4.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/x^2}$. **5.** $y = 1 + 3^{x/(x-1)}$. **6.** $y = 2^{x^2-2x}$. **7.** $y = 2^{\operatorname{tg} x}$. **8.** $y = 2^{\operatorname{sen} x}$. **9.** $y = 2^{x^2-4x+5}$. **10.** $y = \log_{1/2}(x - x^2)$. **11.** $y = \log_2 \frac{x+4}{2-x}$. **12.** $y = \log_2 |\operatorname{sen} x|$. **13.** $y = \log_{1/2} \cos x$. **14.** $y = \log_{1/2} |x^2 - 3x + 2|$. **15.** $y = \log_2 (\sqrt[3]{x+1} + 1)$. **16.** $y = \log_{1/2} \frac{2|x|-1}{|x|-2}$. (*Resp.* Fig. 119.) **17.** $y = \log_4 |x+2|$. **18.** $y = |\log_4 |x+2||$. **19.** $y = \frac{1}{2} \arcsen \frac{x-1}{x+1}$. **20.** $y = -2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x}$. **21.** $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$. **22.** $y = \frac{2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$. (*Resp.* Fig. 120. **Indicación.** Divídase previamente por $2^{1/x}$ el numerador de la fracción y su denominador).

En conclusión notemos que la habilidad para construir las gráficas de las funciones representadas por las fórmulas tiene no sólo una importancia teórica sino también práctica. El estudio de las funciones es más sencillo y evidente si se acompaña de un examen de las gráficas de estas funciones. He aquí por qué un ingeniero o colaborador científico, después de obtener la fórmula de una función que la interesa, en toqos los casos en que se necesita aclarar el carácter general de comportamiento de la función y sus particularidades comienza a construir el esquema de la gráfica de esta función.

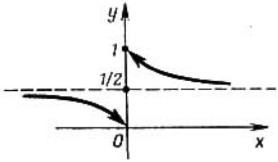

Fig. 120

Más adelante, con ayuda del cálculo diferencial, consideraremos métodos más exactos y más perfectos de construcción de las gráficas de funciones.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese la definición de función. ¿En qué consiste la univocidad de la función? ¿Qué se llama dominio de definición y dominio de los valores de una función? ¿Con ayuda de qué concepto se define la función?

2. ¿Qué se llama función constante?

3. Enúnciese la condición para que una función esté acotada.

4. Dése la definición de cota superior (inferior) exacta de una función.

5. ¿Qué significa la notación $\sup\limits_{X} f(x) = +\infty$ ($\inf\limits_{X} f(x) = -\infty$)?

6. ¿Qué se llama gráfica de una función? Cítense ejemplos de función y n función. Dese la interpretación geométrica.

7. ¿Qué significa representar una función? ¿Cuáles son los métodos de representación de la función?

8. Enúnciese la definición de función compuesta y de función inversa. Dense ejemplos.

9. Cítense las funciones elementales más simples.

10. ¿Qué función se llama elemental? Cítense ejemplos.

11. Cítense un ejemplo de una función no elemental.

12. Enúnciense las definiciones de las funciones racional, irracional y trascendente. Cítense ejemplos.

13. Descríbanse las etapas de construcción de la gráfica de la función $y = bf(kx + a) + c$, donde a, b, k, c son ciertos números, si se conoce el método de construcción de la gráfica de la función $y = f(x)$.

§ 2. Límite de una función

1. Límite de una función para $X \to X_0$. Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre cierto intervalo X [1]) y que el punto $x_0 \in X$ o bien $x_0 \notin X$. Tomemos de X la sucesión de los puntos distintos

[1]) Recuérdese que aquí X puede ser todo intervalo $[a, b]$, (a, b), $[a, b[$, $(-\infty, +\infty)$, etc.

de x_0.

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\tag{1}$$

que converge hacia x_0 [1]. Los valores de la función en los puntos de esta sucesión también forman la sucesión numérica

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots\tag{2}$$

y se puede hablar de la existencia de su límite.

Definición 1. *El número A se llama límite de la función $f(x)$ en el punto $x = x_0$ (o para $x \to x_0$), si para toda sucesión* (1) *que converge a x_0 de los valores del argumento x, distintos de x_0, la sucesión correspondiente* (2) *de los valores de la función converge a A.*

Simbólicamente esto se escribe así:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

La función $f(x)$ puede tener en el punto x_0 un solo límite. Esto se deduce del hecho de que la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene un solo límite.

Consideremos algunos ejemplos.

○ 1. La función $f(x) = C =$ const tiene un límite, igual a C, en cada punto x_0 de la recta numérica. En efecto, si (1) es cualquier sucesión convergente a x_0, la sucesión (2) tiene la forma $C, C, \ldots, C, \ldots$, o sea, $f(x_n) = C$. De aquí sacamos la conclusión de que $f(x_n) \to C$ para $n \to \infty$ o bien: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

2. La función $f(x) = x$ tiene en todo punto x_0 de la recta numérica un límite igual a x_0. En este caso las sucesiones (1) y (2) son idénticas, o sea, $f(x_n) = x_n$. Por consiguiente, si $x_n \to x_0$, entonces $f(x_n) \to x_0$ cuando $n \to \infty$ o bien

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = f(x_0) = x_0.$$

Notemos que es cómodo utilizar la definición 1 cuando se necesita demostrar que la función $f(x)$ no tiene un límite. Para esto hace falta mostrar que existen dos sucesiones $\{x_n'\}$ y $\{x_n''\}$ de los valores del argumento x tales que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = \lim\limits_{n \to \infty} x_n'' = a$, pero las sucesiones correspondientes $\{f(x_n')\}$ y $\{f(x_n'')\}$ de los valores de la función tienen distintos límites.

3. La función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (fig. 121), definida para todos los puntos $x \neq 0$, en el punto $x = 0$ no tiene límite. Efectivamente, tomemos dos sucesiones de los valores del argumento x: $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots, \frac{1}{n\pi}, \ldots$ y $\frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots, \frac{2}{(4n-3)\pi}, \ldots$ que conver-

[1] Se supone que tal sucesión existe.

gen a cero. Las sucesiones correspondientes de los valores de la función son $f\left(\frac{1}{\pi}\right)$, $f\left(\frac{1}{2\pi}\right)$, $f\left(\frac{1}{3\pi}\right)$, ..., $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)$, ... y $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$, $f\left(\frac{2}{5\pi}\right)$, $f\left(\frac{2}{9\pi}\right)$, ..., $f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right)$, ... Puesto que $f\left(\frac{1}{n\pi}\right)=$ $=\operatorname{sen} n\pi=0$ para todo n y $f\left(\frac{2}{(4n-3)\pi}\right)=\operatorname{sen}\frac{(4n-3)\pi}{2}=1$, entonces para la primera sucesión

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen} n\pi=0$$

y para la segunda sucesión

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\frac{(4n-3)\pi}{2}=1.$$

Por lo tanto, para dos convergentes a cero sucesiones de los valores del argumento x las sucesiones correspondientes de los valores

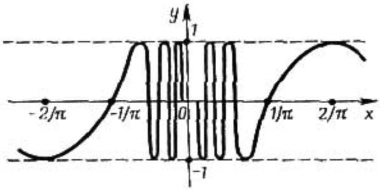

Fig. 121

de la función tienen distintos límites. Y esto, por definición de límite de una función, significa precisamente que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ no existe.

4. La función $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}$ tiene en el punto $x=0$ el límite igual a 1. En efecto, tomemos cualquier sucesión de los valores del argumento x que converja a cero, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ y $x_n\neq$ $\neq 0$, entonces, en virtud de los teoremas 3.7 a 3.9 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+x_n-1}{x_n-1}=\frac{(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2+\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}=\frac{0+0-1}{0-1}=1$$

(en este caso $x_n\neq 1$, ya que para $x=1$ la función que se considera no está definida). Ahora bien, existe $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$ y ya que éste no depende de la elección de la sucesión $\{x_n\}$ convergente a cero, entonces en virtud de la definición de límite de una función concluimos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

5. La función de Dirichlet, cuyos valores en los puntos racionales son iguales a la unidad y en los irracionales, a cero, no tiene límite en ningún punto x_0 de la recta numérica. Efectivamente, para una sucesión de los valores racionales del argumento que converja en el punto x_0 el límite de las sucesiones correspondientes de la función es igual a la unidad y para una sucesión de los valores irracionales del argumento que converja en el punto x_0 el límite de la sucesión correspondiente de los valores de la función es igual a cero. ●

Existe otra definición de límite de una función.

Definición 2. *El número A se llama límite de una función $f(x)$ en el punto $x = x_0$, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$, $x \neq x_0$, que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Las desigualdades $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ pueden escribirse en la forma $0 < |x - x_0| < \delta$.

La primera definición se funda en el concepto de límite de una sucesión numérica y por eso suele llamarse definición *«en el lenguaje de las sucesiones»*. La segunda definición se llama definición *«en el lenguaje $\varepsilon - \delta$»*.

Teorema 4.1. *Las definiciones primera y segunda de límite de una función son equivalentes* [1]).

□ **Demostración.** 1) Sea A el límite de $f(x)$ en el punto x_0 conforme a la primera definición. Mostremos que A es el límite conforme a la segunda definición. Supongamos lo contrario, o sea, que A no es el límite de esta función conforme a la segunda definición. Esto quiere decir que no para todo número $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal $\delta > 0$ que de la desigualdad $0 < |x - x_0| < \delta$ se deduzca la igualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$, o sea, existe tal $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ para el cual cualquier $\delta > 0$ que se tome habrá al menos un punto $x \neq x_0$ tal que $|x - x_0| < \delta$, pero $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$. Elegiremos en calidad de δ sucesivamente los números

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

Entonces

para $\delta = 1$ en X existe tal $x_1 \neq x_0$ que
$|x_1 - x_0| < 1$ y $|f(x_1) - A| \geqslant \varepsilon_0$;
para $\delta = 1/2$ en X existe tal $x_2 \neq x_0$ que
$|x_2 - x_0| < 1/2$ y $|f(x_2) - A| \geqslant \varepsilon_0$;
para $\delta = 1/3$ en X existe tal $x_3 \neq x_0$ que
$|x_3 - x_0| < 1/3$ y $|f(x_3) - A| \geqslant \varepsilon_0$;
. . . .

[1]) O sea, si la función tiene un límite en el punto x_0 según una de las definiciones, ella tendrá el mismo límite también según la segunda definición.

para $\delta = 1/n$ en X existe tal $x_n \neq x_0$ que
$|x_n - x_0| < 1/n$ y $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$.
. . . .

Como resultado obtenemos una sucesión de puntos distintos de x_0

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$$

que converge al punto x_0, ya que $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por eso, conforme a la primera definición de límite de una función, a sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de los valores de la función converge hacia el número A. Por lo tanto, para ε_0 habrá un número de orden N tal que para todos los números $n > N$ se cumple la desigualdad $|f(x_n) - A| < \varepsilon_0$. Pero esto no puede ser, ya que para todos los puntos x_n se cumple la desigualdad $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$. La contradicción obtenida demuestra que el número A es el límite de *la función $f(x)$ en el punto x_0 conforme a la segunda definición.*

2) Sea ahora A el límite de $f(x)$ en el punto x_0 conforme a la segunda definición. Esto quiere decir que para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que de la desigualdad $0 < |x - x_0| < \delta$ se deduce la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Mostremos que A es el límite de $f(x)$ conforme a la primera definición. Tomemos cualquier sucesión de los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ que converja al punto x_0 $(x_n \neq x_0)$. Entonces para el valor indicado de $\delta > 0$, *correspondiente a ε conforme a la segunda definición, habrá N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $|x_n - x_0| < \delta$. Pero al mismo* tiempo, en virtud de la segunda definición, se cumple también la desigualdad $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Y ya que ε ha sido elegido arbitrariamente, esto precisamente significa que $f(x_n) \to A$ para toda sucesión $\{x_n\}$ que converja en el punto x_0 $(x_n \neq x_0)$, o sea, el número A es el límite de $f(x)$ en el punto x_0 conforme a la primer definición. ■

Una vez que hemos establecido la equivalencia de ambas definiciones de límite de una función, se pueden usar cualesquiera de ellas en dependencia de cuál es más cómoda para resolver uno u otro problema.

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición 2, demuéstrese que la función $f(x) = 3x - 2$ en el punto $x = 1$ tiene límite igual a 1, o sea, $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$.

Resolución. Tomemos cualquier $\varepsilon > 0$. El problema consiste en hallar mediante este ε un $\delta > 0$ tal para el cual de la desigualdad $|x - 1| < \delta$ resulte la desigualdad $|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Transformando la última desigualdad, obtenemos

$$|3(x - 1)| < \varepsilon \quad \text{o bien} \quad |x - 1| < \varepsilon/3.$$

De aquí se ve que si se toma $\delta \leqslant \varepsilon/3$, para todos los puntos x que satisfagan la desigualdad $|x-1|<\delta$ se cumple la desigualdad requerida $|f(x)-1|<\varepsilon$. Esto precisamente quiere decir que $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$. En particular, si $\varepsilon=1$, entonces $\delta\leqslant 1/3$, si $\varepsilon=1/2$, entonces $\delta\leqslant 1/6$, si $\varepsilon=0{,}01$, entonces $\delta\leqslant 0{,}03$, etc.; así pues, δ depende de ε. Por eso en la definición de límite se escribe, a veces, $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Ejemplo 2. Utilizando la definición 2, demuéstrese que la función $f(x)=x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, definida para todos los puntos $x\neq 0$, en el punto $x=0$ tiene un límite igual a 0, o sea, $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$.

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon>0$. Al igual que antes, mediante este número ε hace falta hallar un número $\delta>0$ tal, para el cual de la desigualdad $|x-0|<\delta$ se desprenda la desigualdad $|f(x)-0|=\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Transformando la última desigualdad, resulta $\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|<$ $<\varepsilon\ \left(\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|\leqslant 1 \text{ para } x\neq 0\right)$. De aquí se ve que si se toma $\delta\leqslant\varepsilon$, entonces, tan pronto como $|x|<\delta$, es válida la desigualdad $\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$.

Ejercicios. Utilizando la definición 2, demuéstrese que: **1.** $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$. **2.** $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. **4.** $\lim\limits_{x\to x_0}C=$ $=C\ (f(x)=C=\text{const})$. **5.** $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

Notemos que la definición de límite de una función «en el lenguaje de las sucesiones» se llama también definición de límite de una función según Heine [1]) y la definición de límite de una función» en el lenguaje $\varepsilon-\delta$», definición de límite de una función según Cauchy [2]).

2. Límite de una función para $x\to x_0-$ y para $x\to x_0+$. A continuación usaremos el concepto de límites laterales de una función que se definen del modo siguiente.

Definición 3. *El número A se llama límite derecho (izquierdo) de la función $f(x)$ en el punto x_0, si para toda sucesión* (1) *que converge a x_0, cuyos elementos x_n son mayores (menores) que x_0, la sucesión correspondiente* (2) *converge a A.*

Designación: $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=A\ \left(\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A\right)$.

○ En calidad de ejemplo consideremos la función $f(x)=\operatorname{sgn}x$ [3]). Esta función tiene en el punto $x=0$ los límites derecho e izquierdo:

---

[1]) H. Heine (1821 — 1881), matemático alemán.
[2]) O. Cauchy (1789 — 1857), matemático francés.
[3]) La definición de la función sgn x está dada en el subp. 2 del § 1.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$. En efecto, si (1) es toda sucesión convergente a cero de los valores del argumento de esta función, cuyos elementos x_n son mayores que cero ($x_n > 0$), entonces $\operatorname{sgn} x_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$. De un modo análogo se determina que $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$. ●

Se puede dar una definición equivalente de los límites laterales de la función «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$»: *el número A se llama límite derecho (izquierdo) de la función $f(x)$ en el punto x_0, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x que satisfagan las desigualdades $x_0 < x < x_0 + \delta$ ($x_0 - \delta < x < x_0$) se cumpla la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

La relación entre los límites laterales y el límite de la función se establece por el teorema siguiente.

Teorema 4.2. *La función $f(x)$ tiene en el punto x_0 un límite si, y sólo si, en este punto existen tanto el límite derecho como el izquierdo y ellos son iguales. En este caso el límite de la función es igual a los límites unilaterales.*

□ **Demostración.** Sea $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x) = \lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x) = A$. Entonces, según la definición de límite de una función por la izquierda y por la derecha, para todo número $\varepsilon > 0$ existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que para todos los x que satisfacen las desigualdades $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ y para todos los puntos x que satisfacen las desigualdades $x_0 < x < x_0 + \delta_2$ se cumpla la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces para todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se cumple la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Y esto, según la definición 2, precisamente significa que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Inversamente, sea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Entonces, conforme a la definición del límite de una función en el punto x_0, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se cumple la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Así pues, tanto para $x_0 - \delta < x < x_0$ como para $x_0 < x < x_0 + \delta$ es válida la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. Y esto, según la definición de límites unilaterales, significa precisamente que

$$\lim_{x\to x_{0-}} f(x) = \lim_{x\to x_{0+}} (x) = A. \blacksquare$$

○ **Ejemplo 3.** Demuéstrese que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{para } x\leqslant 0,\\ x+1 & \text{para } x>0 \end{cases}$$

no tiene límite en el punto $x=0$ (fig. 122).

Resolución. La función $f(x)$ está definida sobre toda la recta numérica. Para $x\leqslant 0$ la función se representa por la función $f(x)=$ $=x^2$. Puesto que el límite de la función x^2 en el punto $x=0$ es igual a cero (demuéstrese esto por sí mismo), entonces, según el teorema 4.2, el límite izquierdo de la función dada en este punto también es igual a cero, o sea,

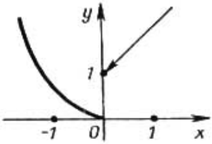

Fig. 122

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2=\lim_{x\to 0} x^2=0.$$

De un modo análogo se demuestra que el límite derecho de la función dada en el punto $x=0$ vale 1, o sea, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$. Por consiguiente, la función dada tiene en el punto $x=0$ los límites derecho e izquierdo, pero ellos no son iguales. Conforme al teorema 4.2 esto significa precisamente que en el punto $x=0$ la función no tiene límite, o sea, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe. ●

Ejercicio. Demuéstrese que la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{para } x\leqslant 1,\\ x+3 & \text{para } x>1 \end{cases}$$

en el punto $x=1$ no tiene límite.

○ **Ejemplo 4.** Demuéstrese que la función

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{para } x<0,\\ \operatorname{sen} x & \text{para } x>0 \end{cases}$$

en el punto $x=0$ tiene límite.

○ **Resolución.** La función $f(x)$ está definida sobre toda la recta numérica, a excepción del punto $x=0$. Calculemos en el punto $x=0$ los límites unilaterales de la función $f(x)$. Tenemos $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ (véase el ejemplo 2 del subp. 1); $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x=0$ (véase el ejemplo 3 del § 3). Por lo tanto, en el punto $x=0$ la función dada tiene los límites derecho e izquierdo y ellos son iguales entre sí.

Conforme al teorema 4.2 esto significa que la función tiene en el punto $x = 0$ un límite y éste es igual a cero, o sea, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. ●

3. Límite de una función para $x\to\infty$, para $x\to-\infty$ y para $x\to+\infty$. Además, de los conceptos considerados de límite de una función para $x\to x_0$ y de límites unilaterales existe también el concepto de límite de una función cuando el argumento tiende hacia el infinito.

Definición 4. *El número A se llama límite de la función $f(x)$ para $x\to\infty$, si para toda sucesión infinitamente grande (1) de los valores del argumento la sucesión correspondiente (2) de los valores de la función converge a A.*

Designación: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

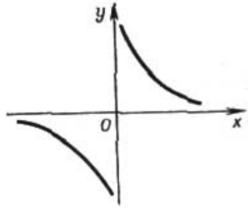

Fig. 123

Definición 5. *El número A se llama límite de la función $f(x)$ para $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), si para toda sucesión infinitamente grande (1) de los valores del argumento, cuyos elementos x_n son positivos (negativos), la sucesión correspondiente (2) de los valores de la función converge a A.*

Designación: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A\right)$[1].

○ Consideremos un ejemplo. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Esta función tiene, cuando $x\to\infty$, un límite igual a cero. Efectivamente, si $\{x_n\}$ es la sucesión infinitamente grande de los valores del argumento, la sucesión correspondiente de los valores de la función $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}, \ldots$ conforme al teorema 3.1 es infinitamente pequeña y por eso tiene un límite igual a cero, o sea, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ (fig. 123). ●

Las definiciones 4 y 5 se dan «en el lenguaje de las sucesiones». Puede darse las definiciones equivalentes «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$». Recomendamos que el lector haga esto por sí mismo. A título de ejemplo enunciemos la definición de límite de una función para $x\to+\infty$.

Definición 6. *El número A se llama límite de la función $f(x)$*

[1]) Si los límites de la función $f(x)$ para $x\to+\infty$ y para $x\to-\infty$ son iguales a A, se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ $(A = 0)$.

para $x \to +\infty$, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número δ tal que para todos los puntos $x \in X$ que satisfacen la desigualdad $x > \delta$ se cumpla la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$.

○ **Ejemplo 5.** Utilizando la definición correspondiente del límite «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$» demostrar que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Resolución. La igualdad $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$» significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que de la desigualdad $|x| > \delta$ se deduce la desigualdad $\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{|2x+1|} < \varepsilon$ o bien $|2x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$. Determinemos los valores de x para los cuales se cumple la última desigualdad. Puesto que $|2x+1| > |2x| - 1$, basta resolver la inecuación $|2x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, de donde obtenemos $|x| > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Si se toma $\delta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$, entonces para todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x| > \delta$ se cumplirá la desigualdad $\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Y esto significa que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 6. Utilizando la definición respectiva de límite «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$», demuéstrese que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$.

Resolución. La igualdad $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$ «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$» quiere decir que para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número δ tal que de la desigualdad $x > \delta$ resulta la desigualdad $\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| = \frac{14}{|3x+9|} < \varepsilon$. Determinemos los valores de x para los cuales se cumple la última desigualdad. Puesto que $x > 0$, entonces, resolviendo la inecuación $\frac{14}{3x+9} < \varepsilon$, obtenemos $x > \frac{14 - 9\varepsilon}{3\varepsilon}$. Si se pone $\delta = \frac{14 - 9\varepsilon}{3\varepsilon}$, entonces para todos los x que satisfacen la desigualdad $x > \delta$ se cumplirá la desigualdad $\left|\frac{5x+1}{3x+9} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$. Y esto quiere decir que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$. ●

Ejercicios. Utilizando la definición respectiva de límite «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$», demuéstrese que: **1.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{3x+2} = \frac{1}{3}$. **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{3x+2} = \frac{2}{3}$. 3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$. **4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$. **5.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

○ **Ejemplo 7.** Demuéstrese que la función sen x no tiene límite cuando $x \to +\infty$.

Resolución. Demuéstrese que la función dada no satisface la definición 5. Para esto indiquemos una tal sucesión infinitamente grande $\{x_n\}$ de los valores del argumento, cuyos elementos son positivos, que la sucesión $\{\text{sen } x_n\}$ de los valores de la función sea divergente. Pongamos $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$. Entonces $x_n \to +\infty$ para $n \to \infty$, la sucesión $\{\text{sen } x_n\}$ toma los valores $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$, y la sucesión $\{(-1)^n\}$ (véase la observación para el teorema 3.6) diverge, y esto es lo que se quería demostrar. ●

Ejercicio. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ no existe.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciense dos definiciones de límite de una función. ¿Qué significa la equivalencia de estas definiciones?
2. Cítese un ejemplo de una función que no tenga límite en el punto dado.
3. ¿A qué condiciones de la existencia de los límites unilaterales de una función se deduce la existencia del límite de una función e inversamente?
4. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$?
5. Enúnciense dos definiciones de límite de una función para $x \to +\infty$.
6. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to+\infty} x$ no existe.

§ 3. Teoremas de los límites de funciones

La definición de límite de una función «en el lenguaje de las sucesiones» ofrece la posibilidad de extender los teoremas antes demostrados de los límites de sucesiones a las funciones. Mostremos esto citando como ejemplos dos teoremas.

Teorema 4.3. *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen en el punto x_0 los límites B y C. Entonces las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ (para $C \neq 0$) tienen en el punto x_0 los límites iguales a $B \pm C$, $B\cdot C$ y $\frac{B}{C}$, respectivamente.*

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$) una sucesión arbitraria, convergente a x_0, de los valores del argumento de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Las sucesiones correspondientes $\{f(x_n)\}$ y $\{g(x_n)\}$ de los valores de estas funciones tienen los límites B y C. Pero entonces, en virtud de los teoremas 3.7 a 3.9, las sucesiones $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}$ y $\left\{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ (para $C \neq 0$) tienen los límites iguales a $B \pm C$, $B\cdot C$ y $\frac{B}{C}$, respectivamente. Conforme a la definición 1 de límite de una función esto quiere decir que

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = B \pm C, \quad \lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = B\cdot C,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{C}. \quad \blacksquare$$

Corolario. *El factor constante puede sacarse fuera del signo del límite, o sea* $\lim\limits_{x\to x_0} [C\cdot g(x)] = C \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, *donde* $f(x) = C$ *es el factor constante.*

En efecto, $\lim\limits_{x\to x_0} [Cg(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = C \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, ya que $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ (véase el ejemplo 1 del subp. 1 del § 2).

Teorema 4.4. *Supongamos que las funciones* $f(x)$, $g(x)$ *y* $h(x)$ *están definidas en cierto entorno del punto* x_0, *a excepción, quizás, del mismo punto* x_0, *y las funciones* $f(x)$, $h(x)$ *tienen en el punto* x_0 *un límite igual a* A, *o sea,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A.$$

Supongamos, además, que se cumplen las desigualdades $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. *Entonces,*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A.$$

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$ una sucesión arbitraria, convergente a x_0, de los valores del argumento de las funciones $f(x)$ y $h(x)$. Las sucesiones correspondientes $\{f(x_n)\}$ y $\{h(x_n)\}$ de los valores de estas funciones tienen un límite igual a A, o sea, $f(x_n) \to A$, $h(x_n) \to A$ para $n \to \infty$. Utilizando las desigualdades dadas en la hipótesis del teorema, se puede escribir

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

De aquí según el teorema 3.11 se desprende que $g(x_n) \to A$.

En virtud de la definición 1 de límite de una función esto quiere decir que

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = A. \quad \blacksquare$$

Observación. Los teoremas 4.3 y 4.4 son justos también en el caso cuando x_0 es uno de los símbolos ∞, $+\infty$ o bien $-\infty$.

○ **Ejemplo 1.** Hállese $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2 + x + 5)$.

Resolución. En virtud del teorema 4.3 (límite de la suma y del producto) tenemos

$$\lim_{x\to 1}(3x^2+x+5)=\lim_{x\to 1}3x^2+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}5=$$
$$=3\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}x+5=3\cdot 1\cdot 1+1+5=9,$$

ya que $\lim\limits_{x\to 1} x=1$ (véase el ejemplo 2, subp. 1 del § 2).

Ejemplo 2. Hállese $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Resolución. El límite del numerador

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}x+1=1\cdot 1+1+1=3$$

y el límite del denominador

$$\lim_{x\to 1}(x^2-x+1)=\lim_{x\to 1}x\cdot\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}x+1=1\cdot 1-1+1=1.$$

Ya que el límite del denominador no es igual a cero, entonces, aplicando el teorema 4.3 (límite del cociente), finalmente obtenemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+1)}=\frac{3}{1}=3.$$

Ejemplo 3. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x=0$.

Resolución. Sea $0<x<\pi/2$. Tomemos el arco $\overset{\frown}{AM}$ de la circunferencia de radio unitario y el ángulo cuya medida en radianes es igual a x (véase la fig. 124). Entonces $\overset{\frown}{AM}=x$, $KM=\operatorname{sen} x$. Puesto que $0<KM<\overset{\frown}{AM}$, entonces

$$0<\operatorname{sen} x<x \qquad (1)$$

y ya que $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ (véase el ejemplo 2, subp. 1 del § 2), de las desigualdades (1) y del teorema 4.4 se deduce que $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x=0$

Demuéstrese por sí mismo que $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sen} x=0$.

Ejemplo 4. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$.

Resolución. Para todo $x\neq 0$ se cumplen las desigualdades

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}<1+\frac{1}{x^2}.$$

Tenemos $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ (demuéstrese esto por sí mismo). Según el teorema 4.4 obtenemos que $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=$ $=1$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciense los teoremas 4.3 y 4.4 de límite de una función.
2. Demuéstrese el teorema 4.3. para $x\to+\infty$. ¿Dónde en la demostración del teorema se ha utilizado que $C\neq 0$?

§ 4. Dos límites notables

1. Primer límite notable:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

□ Demostremos la igualdad dada. Consideremos el arco de una circunferencia de radio $R = 1$ con un ángulo central, cuya medida en radianes es igual a x $(0<x<\pi/2)$ (fig. 124). Entonces

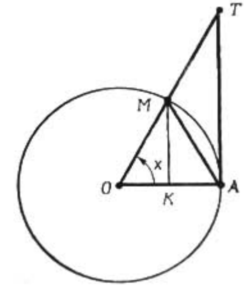

Fig. 124

$$OA = 1, \quad \operatorname{sen} x = MK, \quad \operatorname{tg} x = AT. \quad (1)$$

Es evidente que el área del triángulo OAM es menor que el área del sector OAM la cual, a su vez, es menor que el área del triángulo OAT o bien, lo que es lo mismo, $\frac{1}{2}OA\cdot MK<\frac{1}{2}OA\cdot\overset{\frown}{AM}<\frac{1}{2}OA\cdot AT$. Tomando en consideración las igualdades (1), la última relación puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

de donde resulta

$$\operatorname{sen} x< x<\operatorname{tg} x. \quad (2)$$

Dividiendo estas desigualdades por $\operatorname{sen} x$, obtenemos $1>\frac{\operatorname{sen} x}{x}>$ $>\cos x$, de donde encontramos $0<1-\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1-\cos x$. Puesto que $\operatorname{sen}\frac{x}{2}<1$, entonces $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}<\operatorname{sen}\frac{x}{2}$. Por eso, teniendo en cuenta la primera desigualdad (2), para todos los puntos x que satisfacen las desigualdades $0 < x < \pi/2$ resulta

$$1-\cos x = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2} < 2\,\mathrm{sen}\,\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} = x.$$

Así pues, $0 < 1-\frac{\mathrm{sen}\,x}{x} < x$ para $0 < x < \pi/2$.

Tomemos todo número $\varepsilon > 0$ y pongamos $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Entonces para todos los puntos x que satisfacen las desigualdades $0 < x < \delta$ se cumplirá la desigualdad $x < \varepsilon$, por eso

$$0 < 1-\frac{\mathrm{sen}\,x}{x} < \varepsilon,$$

de donde

$$\left|1-\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\right| < \varepsilon.$$

Esto quiere decir que 1 es el límite derecho de la función $\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$ en el punto $x=0$, o sea, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=1$. Nótese que ahora la función $f(x)=\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$ es par, ya que $f(-x)=\frac{\mathrm{sen}\,(-x)}{-x}=\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=$ $=f(x)$. Por eso también el límite izquierdo de la función $\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$ en el punto $x=0$ es igual a 1. De aquí, en virtud del teorema 4.2, se desprende que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=1$. ■

Observación. Utilizando las desigualdades $\mathrm{sen}\,x < x$ y $1-$ $-\cos x < x$ para $0 < x < \pi/2$, obtenidas durante la consideración del primer límite magnífico, es fácil demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{sen}\,x = 0$. (Hágase esto por sí mismo.)

Con ayuda del primer límite notable se calculan muchos otros límites.

○ **Ejemplo 1.** Hállese $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

Resolución. El denominador de la fracción para $x\to 0$ tiende a cero. Por eso el teorema 4.3 aquí es inaplicable. Para hallar el límite transformemos la fracción dada:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{sen}^2\,(x/2)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(x/2)}{x/2}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,(x/2)}{x/2}\lim_{x\to 0}\mathrm{sen}\,\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

Ejemplo 2. Hállese $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

Ejemplo 3. Hállese $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{sen} 4x}$.

Resolución. Tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\operatorname{sen} 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5/4}{\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}=\frac{5/4}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}=\frac{5/4}{1}=1{,}25. \quad\bullet$$

2. Segundo límite notable:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

$\square$ Como se sabe, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$ (véase el cap. 3, § 3, subp. 2). Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$. Efectivamente, sea $x>1$. Pongamos $n=[x]$; entonces $x=n+\alpha$, donde n es el número natural y α satisface la condición $0\leqslant\alpha<1$. Puesto que $n\leqslant x<n+1$, $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{1}{n}$, entonces

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Para $x\to+\infty$ $(n\to\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}=\frac{\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e}.$$

De donde según el teorema 4.4 obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

Sea ahora $x<-1$. Pongamos $x=-y$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$$

para $x\to-\infty$.

Uniendo ambos casos, finalmente tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \ \blacksquare$$

El segundo límite notable tiene amplia aplicación. Con su ayuda se encuentran muchos otros límites.

○ **Ejemplo 4.** Hállese $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Resolución. Reemplacemos la variable, suponiendo $1/x=\alpha$. Entonces es evidente que $\alpha\to\infty$ para $x\to 0$. Por eso

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = e.$$

Ejemplo 5. Hállese $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

Resolución. Pongamos $x=3t$. Entonces cuando $x\to\infty$ $t\to\infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\cdot e\cdot e=e^3. \ \bullet$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrense los límites notables primero y segundo.
2. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

§ 5. Funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes

1. Funciones infinitamente pequeñas.

Definición 1. *La función $f(x)$ se llama función infinitamente pequeña (o simplemente infinitésima) en el punto $x=x_0$ (o para $x\to x_0$) si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Análogamente se determinan las funciones infinitamente pequeñas para $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to x_{0-}$ y $x\to x_{0+}$.

Puesto que el límite de una función infinitamente pequeña es igual a cero, o sea, $|f(x)-A|=|f(x)-0|=|f(x)|$, se puede dar una definición equivalente de la función infinitamente pequeña «**en el lenguaje** $\varepsilon-\delta$»: *la función $f(x)$ se llama infinitamente pequeña* *en el punto* $x = x_0$, *si para todo número* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que para todos los puntos* $x \in X$, $x \neq x_0$, *que satisfacen la igualdad* $|x - x_0| < \delta$ *se cumple la desigualdad* $|f(x)| < \varepsilon$ *y* **«en el lenguaje de las sucesiones»:** *la función* $f(x)$ *se llama infinitamente pequeña en el punto* $x = x_0$, *si para toda sucesión* $\{x_n\}$ *convergente a* x_0 *de los valores del argumento, distintos de* x_0, *la sucesión correspondiente* $\{f(x_n)\}$ *es infinitamente pequeña.*

Al igual que las sucesiones infinitamente pequeñas, las funciones infinitamente pequeñas desempeñan un papel esencial: el concepto general de límite de una función puede ser reducido al concepto de infinitésima.

Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema 4.5. *Para el cumplimiento de la igualdad* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *es necesario y suficiente que la función*

$$\alpha(x) = f(x) - A$$

sea infinitésima cuando $x \to x_0$.

□ **Demostración. Necesidad.** Sea $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Consideremos la diferencia $f(x) - A = \alpha(x)$ y mostremos que $\alpha(x)$ es una función infinitamente pequeña cuando $x \to x_0$. Efectivamente, los límites de cada una de las funciones $f(x)$ y A para $x \to x_0$ son iguales a A y por eso, en virtud del teorema 4.3,

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - A] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0.$$

Suficiencia. Sea $f(x) - A = \alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ es una función infinitamente pequeña cuando $x \to x_0$. Mostremos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Puesto que $f(x) = A + \alpha(x)$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [A + \alpha(x)] = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A. \quad \blacksquare$$

Del teorema 4.5 obtenemos la representación especial para una función que tenga en el punto $x = x_0$ un límite igual a A:

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ donde } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

En este caso se dice de ordinario que la función $f(x)$ en el entorno del punto x_0 se distingue de A en una función infinitamente pequeña.

Las funciones infinitamente pequeñas poseen las mismas propiedades que las sucesiones infinitamente pequeñas. Es válido el teorema siguiente.

Teorema 4.6. *La suma algebraica y el producto de un número finito de funciones infinitamente pequeñas para $x \to x_0$, así como el producto de una función infinitamente pequeña por una función acotada son funciones infinitamente pequeñas para $x \to x_0$.*

Este teorema se deduce inmediatamente de la primera definición de límite de una función y de los teoremas 3.2 a 3.4.

Todo lo dicho de las funciones infinitamente pequeñas para $x \to x_0$ es válido también para las funciones infinitamente pequeñas cuando $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0$, y $x \to x_{0+}$.

○ **Ejemplo 1.** Demuéstrese que la función $f(x) = (x-1) \operatorname{sen} \frac{1}{x-1}$ cuando $x \to 1$ es infinitésima, o sea, $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) \operatorname{sen} \frac{1}{x-1} = 0$.

Resolución. Puesto que $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$ (demuéstrese esto por sí mismo), entonces, según la definición 1, la función $(x-1)$ es infinitésima para $x \to 1$ y puesto que la función $\operatorname{sen} \frac{1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ está acotada $\left(\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x-1} \right| \leqslant 1 \right)$, entonces la función $f(x)$ dada no es más que el producto de una función infinitamente pequeña por una función acotada. Según el teorema 4.6. esto quiere decir que $f(x)$ es una función infinitamente pequeña para $x \to 1$, o sea, $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) \operatorname{sen} \frac{1}{x-1} = 0$. ●

2. Funciones infinitamente grandes.

Definición 2. *La función $f(x)$ se llama función infinitamente grande (o simplemente infinita) en el punto $x = x_0$ (o bien para $x \to x_0$), si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$ $x \neq x_0$, que satisfacen la desigualdad $|x - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x)| > \varepsilon$.*

En este caso se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ y se dice que la *función tiende al infinito para $x \to x_0$* o tiene un *límite infinito en el punto $x = x_0$*.

En cambio, si se cumple la desigualdad $f(x) > \varepsilon$ $(f(x) < -\varepsilon)$, se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$ y se dice que la *función tiene en el punto x_0 un límite infinito, igual a* $+\infty$ $(-\infty)$.

Por analogía con los límites unilaterales finitos se definen también los límites unilaterales infinitos:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_{0-}} f(x) = -\infty.$$

Así, por ejemplo, se escribe $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x) = +\infty$ si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$ que satisfacen las desigualdades $x_0 < x < x_0 + \delta$ se cumple la desigualdad $f(x) > \varepsilon$.

«En el lenguaje de las sucesiones» la misma definición se escribe así: $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x) = +\infty$ si para toda sucesión $\{x_n\}$, convergente a x_0, de los valores del argumento x, cuyos elementos x_n son mayores que x_0, la sucesión correspondiente $\{f(x_n)\}$ de los valores de la función es una función infinitamente grande de signo positivo.

Recomendamos que el lector dé la definición exacta de semejantes límites por sí mismo.

De un modo análogo se definen las funciones infinitamente grandes para $x \to \infty$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. Así, por ejemplo, la función $f(x)$ se llama infinitamente grande para $x \to \infty$, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$ que satisfacen la desigualdad $|x| > \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x)| > \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

En cambio, si se cumple la desigualdad $f(x) > \varepsilon$ ($f(x) < -\varepsilon$), se escribe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$).

Proponemos que el lector enuncie de manera independiente la *definición de la función infinitamente grande cuando* $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

En conclusión mostremos que entre las funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes existe la misma relación que entre las sucesiones respectivas, o sea, la función inversa a la infinitésima es *infinitamente grande y al contrario.*

En efecto, sea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $f(x) \neq 0$ para $x \neq x_0$. Demostremos que $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Asignemos un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Puesto que $f(x)$ es una función infinitamente pequeña en el punto x_0, entonces para el número $1/\varepsilon$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $x \in X$, que satisfacen las desigualdades $0 < |x - x_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|f(x)| < \frac{1}{\varepsilon}$. Pero entonces para los mismos puntos x se cumple la desigualdad $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \varepsilon$, o sea, $\frac{1}{f(x)}$ es la función infinitamente grande en el punto $x = x_0$, y esto es lo que se quería demostrar. (Recomendamos que el lector demuestre por cuenta propia la afirmación inversa.)

○ **Ejemplo 2.** Utilizando la definición 2, demuéstrese que la función $f(x)=\frac{1}{x-1}$ para $x\to 1$ es **infinitamente grande**, o sea, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty$.

Resolución. Según la definición es necesario demostrar que para todo número $\varepsilon>0$ existe un número $\delta>0$ tal que de la desigualdad $|x-1|<\delta$ se desprende la desigualdad $|f(x)|>\varepsilon$, o sea, $\left|\frac{1}{x-1}\right|>\varepsilon$.

Tomemos cualquier $\varepsilon>0$ y resolvamos la inecuación $\left|\frac{1}{x-1}\right|>\varepsilon$. Resulta $|x-1|<1/\varepsilon$. Ahora bien, en calidad de δ se puede tomar el número $1/\varepsilon$.

Así pues, para todo número $\varepsilon>0$ existe $\delta=1/\varepsilon$ tal que para todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $|x-1|<\delta$ se cumple la desigualdad $|f(x)|>\varepsilon$. Esto significa precisamente que la función dada $f(x)$ es infinitamente grande cuando $x\to 1$.

Ejemplo 3. Demuéstrese que la función $f(x)=\log_a x$ $(a>1)$ para $x\to+\infty$ es infinitamente grande, o sea, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$.

Resolución. Es necesario mostrar que para todo número $\varepsilon>0$ existe un número $\delta>0$ tal que de la desigualdad $x>\delta$ se desprende la desigualdad $\log_a x>\varepsilon$.

Tomemos todo número $\varepsilon>0$ y consideremos la desigualdad $\log_a x>\varepsilon$. Si se toma $\delta=a^\varepsilon$, para $x>\delta$ se cumplirá la desigualdad $\log_a x>\varepsilon$ y esto quiere decir que la función dada $f(x)$ es infinitamente grande cuando $x\to+\infty$.

Ejemplo 4. Sea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$.

Resolución. Es necesario demostrar que para todo número $\varepsilon>0$ existe un número $\delta>0$ tal que de la desigualdad $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$ se desprende la desigualdad $f(x)+g(x)>\varepsilon$, o sea, la función $f(x)+g(x)$ satisfaga la definición de la función infinitamente grande de signo positivo en el punto x_0.

Mostremos previamente que si la función $f(x)$ tiene un límite para $x\to x_0$, *entonces existe el δ'-entorno del punto x_0 en el cual*

$$|f(x)|<M,\tag{1}$$

donde M es cierto número positivo. Efectivamente, según los datos del problema $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, entonces en virtud de la definición de límite de una función para $\varepsilon=1$ existe $\delta'>0$ tal que de la desigualdad $|x-x_0|<\delta'$, $x\neq x_0$, se desprende la desigualdad $|f(x)-A|<1$. Puesto que $|f(x)-A|\geqslant|f(x)|-|A|$ (véase el teorema 1.4), entonces $|f(x)|-|A|<1$, de donde $|f(x)|<|A|+1=M$, que es lo que se quería mostrar.

Tomemos ahora todo número $\varepsilon > 0$. Puesto que según los datos del problema $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces, de acuerdo con la definición de la función infinitamente grande cuando $x \to x_0$, para el número $\varepsilon + M > 0$ existe $\delta > 0$ $(\delta \leqslant \delta')$ tal que de la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, se desprende la desigualdad

$$g(x) > \varepsilon + M. \qquad (2)$$

De las desigualdades (1) y (2) obtenemos que para $|x - x_0| < \delta \leqslant \delta'$ es válida la desigualdad $f(x) + g(x) \geqslant g(x) - |f(x)| > \varepsilon + M - M = \varepsilon$ y esto quiere decir que la función $f(x) + g(x)$ satisface la definición de la función infinitamente grande para $x \to x_0$, o sea $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese la definición de función infinitamente pequeña: a) para $x \to x_0$; b) para $x \to \infty$. Cítense ejemplos de tales funciones.
2. ¿Qué relación existe entre el concepto de límite de una función y el de función infinitamente pequeña?
3. Enúnciese la definición de función infinitamente grande: a) para $x \to x_0$; b) para $x \to \infty$.
4. ¿Qué significan las notaciones: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$? Dense las definiciones correspondientes.
5. ¿Qué relación existe entre las funciones infinitamente pequeña e infinitamente grande?

§ 6. Comparación de las funciones infinitamente pequeñas e infinitamente grandes

Ya sabemos que la suma, diferencia y producto de las funciones infinitamente pequeñas son funciones infinitamente pequeñas. Hablando en general, esto no se puede decir del cociente: la división de una infinitésima por otra puede dar diferentes resultados. Así, por ejemplo, si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = 2x$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

En cambio, si $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^2$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Consideremos las reglas de comparación de las funciones infinitamente pequeñas.

Supongamos que para $x \to x_0$ las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimas. Entonces:

1) si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, $\alpha(x)$ se llama *infinitésima de un orden superior* a $\beta(x)$ (se dice también que $\alpha(x)$ tiene un *orden de pequeñez superior* a $\beta(x)$ para $x \to x_0$);

2) si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ (A es un número), entonces $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman *infinitésimas del mismo orden* (tienen "la misma velocidad" al tender a cero);

3) si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, entonces $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se llaman *infinitésimas equivalentes*. La equivalencia se designa así: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. En algunos casos resulta insuficiente saber que una de las dos infinitésimas es infinitésima de orden superior que la otra. Es necesario, además, estimar cuán alto es este orden. Por eso se introduce la **regla** siguiente:

4) *si* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, *entonces* $\alpha(x)$ *se denomina infinitésima de n-ésimo orden respecto a* $\beta(x)$.

Existen reglas análogas para comparar las funciones infinitamente pequeñas cuando $x \to \infty$, cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$, así como para $x \to x_0$ por la derecha y por la izquierda.

○ Consideremos algunos ejemplos.

1. Las funciones $\operatorname{sen} x$ y x son para $x \to 0$ infinitésimas equivalentes, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

2. Las funciones $\operatorname{sen} 3x$ y $\operatorname{sen} x$ son para $x \to 0$ infinitésimas del mismo orden, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{(3 \cdot \operatorname{sen} 3x)}{(3x)}}{(\operatorname{sen} x)/x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 3.$$

3. La función $\alpha(x) = 1 - \cos x$ es para $x \to 0$ infinitésima de segundo orden de pequeñez respecto a la infinitésima x, ya que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 (x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2}. \quad ●$$

Al comparar las funciones infinitamente pequeñas se utiliza frecuentemente el símbolo o («o pequeña»). Si la función $\alpha(x)$ en el punto x_0 es infinitésima de orden superior de la infinitésima $\beta(x)$ en este mismo punto, esto se escribe convencionalmente así:

$$\alpha(x) = o(\beta(x)).$$

Nótese también que si las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimas en el punto x_0, la función $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ tiene un orden de pequeñez superior a cada uno de los factores. En efecto,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$$

y *por eso* $\alpha(x)\beta(x)=o(\beta(x))$, $\alpha(x)\beta(x)=o(\alpha(x))$.

Para las funciones infinitamente grandes tienen lugar las reglas de comparación análogas.

Vamos a considerar algunos ejemplos.

○ *1. Las funciones* $\alpha(x)=\frac{1+x}{x}$ y $\beta(x)=\frac{1}{x}$ *son para* $x\to 0$ infinitas equivalentes, ya que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1.$$

En este caso se dice también que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ tienen el *mismo orden de crecimiento* para $x\to 0$.

2. La función $\alpha(x)=x^2+4$ es para $x\to\infty$ infinita de un orden inferior de $\beta(x)=x^3-2$ (tiene un orden de crecimiento inferior), ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4/x^2}{x-2/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

3. Las funciones infinitamente grandes para $x\to\infty$ $\alpha(x)=2x^2+1$ y $\beta(x)=x^2-1$ tienen el mismo orden de crecimiento, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+1/x^2}{1-1/x^2}=2.$$

4. La función $\alpha(x)=x^4+x+1$ es para $x\to\infty$ infinita de segundo orden respecto a la infinita $\beta(x)=x^2+1$, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{(x^2+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{x^4+2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x^3+1/x^4}{1+2/x^2+1/x^4}=1.$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué significa comparar dos funciones infinitamente pequeñas?
2. Cítense ejemplos de una función infinitamente pequeña $\alpha(x)$: a) del mismo orden de pequeñez que la función $\beta(x)$ en el punto x_0; b) equivalente a la función $\beta(x)$ en el punto x_0; c) de un orden de pequeñez inferior de $\beta(x)$ para $x\to x_0$.
3. ¿Qué significa la notación simbólica $\alpha(x)=o(\beta(x))$ para $x\to x_0$?
4. Demuéstrese que: a) $x^3=o(x^2)$ para $x\to 0$; b) $(x-1)^2=o(x-1)$ para $x\to 1$.

5. ¿Es justa la igualdad $x^3 = o(\beta(x))$ para $x \to 0$ si $\beta(x) = x^3 \operatorname{sen} x$?
6. Demuéstrese que $1/x^4 = o(1/x^3)$ para $x \to \infty$.
7. ¿Es justa la igualdad $\frac{1}{x^4} = o(\beta(x))$ para $x \to \infty$ si $\beta(x) = \frac{1}{x^3 \operatorname{sen} x}$?
8. Demuéstrese que $\operatorname{sen} x - x = o(x)$ para $x \to 0$.
9. *Compárense las siguientes funciones infinitamente grandes para* $x \to \infty$: a) $\alpha(x) = x^2 + 5x$ y $\beta(x) = x^3 + 2x^2$; b) $\alpha(x) = 2x^2 + 1$ y $\beta(x) = (x-1)^2$; c) $\alpha(x) = \sqrt{x+1}$ y $\beta(x) = \sqrt{x}$.

§ 7. Cálculo de los límites de funciones

Nos hemos familiarizado con el concepto de límite de una función $f(x)$ para $x \to x_0$, $x \to x_0 -$, $x \to x_0 +$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, *así como con la aplicación inmediata del* **teorema 4.3 de límites de la suma, producto y cociente de dos funciones** $f(x)$ **y** $g(x)$, **que tienen límites finitos, para el cálculo de límites, etc. Nos queda considerar** los casos que no se abarcan por los métodos antes examinados.

Diremos que la relación de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la *indeterminación* de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, si el numerador de la fracción y su denominador tienden simultáneamente a cero o al infinito cuando $x \to x_0$, $x \to x_0 +$, $x \to x_0 -$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to \infty$. En estos casos no se puede decir nada determinado sobre el límite de la relación $f(x)/g(x)$, ya que este límite puede ser igual a cero, al infinito, a un número distinto del cero y puede no existir absolutamente. Evaluar *estas indeterminaciones quiere decir calcular el límite de la relación* $\frac{f(x)}{g(x)}$, si es que éste existe, o determinar que no existe. En ejemplos concretos veremos cómo se hace esto.

○ **Ejemplo 1.** Hállese $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$.

Resolución. No se puede aplicar inmediatamente el teorema 4.3 (límite del cociente), ya que el límite del denominador para $x \to -2$ es igual a cero. Aquí el límite del numerador para $x \to -2$ también es igual a cero. Por consiguiente, tenemos la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Es necesario, como se dice, *evaluar esta indeterminación.* Para esto descompongamos en factores el numerador y el denominador y simplifiquemos lo obtenido eliminando el factor común $x+2$ que anula el denominador de la fracción y su numerador. Esto se puede hacer, ya que según la definición de límite de una función *el valor de la función en el punto* $x = -2$ *no entra en el conjunto de* los valores de la función. Obtenemos

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+4}{x^2-2x+4}.$$

Puesto que ahora el denominador no es igual a cero, la indeterminación $\frac{0}{0}$ queda evaluada. Empleando el teorema 4.3, encontramos finalmente

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\frac{\lim\limits_{x\to-2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to-2}(x^2-2x+4)}=\frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}. \bullet$$

Al calcular los límites de la relación de dos polinomios para $x\to\infty$, $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$, para evaluar la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ es necesario dividir el numerador de la fracción y su denominador por x de grado mayor; de esta división el valor de la fracción no cambia. En este caso si en el numerador y en el denominador los polinomios son del mismo grado, el límite es igual a la relación de los coeficientes con grados mayores y si son de un grado diferente, el límite es igual a 0 o bien a ∞.

○ **Ejemplo 2.** Hállese $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividiendo por x^2 el numerador de la fracción y su denominador y aplicando luego el teorema 4.3, resulta

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2/x+3/x^2}{2+3/x+4/x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+2/x+3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+3/x+4/x^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}(2/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}(2/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)}=\frac{1+0+0}{2+0+0}=\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+3x+4}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividiendo por x^2 el numerador de la fracción y su denominador y empleando luego el teorema 4.3, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+3/x^2}{2+3/x+4/x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x+3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+3/x+4/x^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}(3/x)+\lim\limits_{x\to\infty}(4/x^2)}=\frac{0+0}{2+0+0}=\frac{0}{2}=0.$$

Ejemplo 4. Hállese $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dividiendo por x^3 el numerador de la fracción y su denominador, resulta

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+5/x^3}{1/x+3/x^3}=\infty,$$

ya que para $x\to\infty$ la función $h(x)=1+5/x^3$ tiene un límite igual a 1, la función $\frac{1}{h(x)}$ está acotada (demuéstrese esto por sí mismo), la función $g(x)=1/x+3/x^3$ es infinitamente pequeña (demuéstrese también esto por sí mismo y $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}g(x)\times\times\frac{1}{h(x)}=0$ (producto de la función acotada por la infinitamente pequeña), o sea, la función dada, como inversa, es una función infinitamente grande para $x\to\infty$. ●

Ejercicios. Hállese: **1.** $\lim_{x\to1}\frac{x^5+x+1}{x^6+x^3+1}$. **2.** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+6}$. **3.** $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$. **4.** $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+1}{3x^4+3x+4}$. **5.** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^3-4x}{x^3+2x^2+4}$. **6.** $\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}$.

Continuaremos el cálculo de los límites de funciones después de examinar el concepto de continuidad de una función.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué significan las notaciones: $x\to x_0$, $x\to x_0-$, $x\to x_0+$, $x\to+\infty$ $x\to-\infty$ y $x\to\infty$?
2. ¿En qué casos se habla de la existencia de la indeterminación que tiene la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$?
3. ¿Qué significan las palabras: «la indeterminación queda evaluada»?
4. ¿Por qué $x\neq x_0$ para $x\to x_0$?

§ 8. Concepto de continuidad de una función

El concepto de continuidad de una función es uno de los más fundamentales del análisis matemático.

1. Definición de continuidad de una función. Supongamos que sobre cierto intervalo X está definida la función $f(x)$ y el punto x_0 pertenece a este intervalo [1]).

[1]) Nótese que esto no se necesitaba cuando considerábamos el límite de la función $f(x)$ en el punto x_0. En esto radica la diferencia entre el concepto de continuidad de una función y el de su límite.

Definición 1. *La función $f(x)$ se llama continua en el punto x_0 si el límite de la función y su valor en este punto son iguales, o sea,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Puesto que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, la relación (1) se puede escribir en la forma siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

o sea, para una función continua los signos de la función y del límite pueden permutarse.

Se puede dar una definición equivalente de la continuidad de una función «en el lenguaje de las sucesiones»: *la función $f(x)$ se llama continua en el punto x_0 si para toda sucesión de los valores del argumento x: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, convergente a x_0, la sucesión de los valores correspondientes de la función $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ $\ldots, f(x_n), \ldots$ converge a $f(x_0)$.*

Por analogía con la definición de límite de una función se puede enunciar la definición de continuidad de una función «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$».

Definición 2. *La función $f(x)$ se llama continua en el punto x_0, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos x que satisfacen la igualdad $|x - x_0| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

La equivalencia de estas definiciones es evidente.

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición 1, demuéstrese la continuidad de la función $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ en el punto $x = 1$.

Resolución. Primero determinamos el límite de la función dada para $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 + 2x + 1) = 3 \lim_{x \to 1} x^2 + 2 \lim_{x \to 1} x + 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 6.$$

Luego calculemos el valor de la función en el punto $x = 1$:

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 6.$$

Comparando los resultados obtenidos, vemos que el límite de la función y su valor en el punto $x = 1$ son iguales, o sea, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Según la definición 1 esto quiere decir que la función dada es continua en el punto $x = 1$. Análogamente, se puede mostrar que esta función es continua en todo punto de la recta numérica. ●

Si $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$), entonces la función $f(x)$ se denomina *continua en el punto x_0 por la derecha (por la izquier-*

da). Si la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 por la izquierda y por la derecha, ella es *continua en este punto*. En efecto, en virtud del teorema 4.2, en el caso dado el límite de la función en el punto x_0 es igual al valor de la misma en este punto.

Demos, por último, una definición más de la continuidad de una función la cual, en realidad, es la paráfrasis de la primera definición. Traslademos en la igualdad (1) $f(x_0)$ al primer miembro e introduzcamos $f(x_0)$ bajo el signo del límite. Puesto que las condiciones $x \to x_0$ y $(x - x_0) \to 0$ son equivalentes, resulta

$$\lim_{(x-x_0)\to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \qquad (2)$$

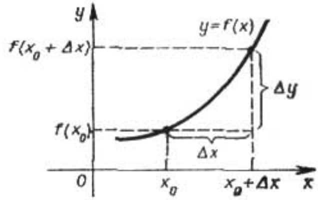

Fig. 125

La diferencia $x - x_0$ se llama *incremento del argumento x en el punto x_0* y, por regla general, se designa Δx (se lee: «delta equis») y la diferencia $f(x) - f(x_0)$, incremento de la función en el punto x_0, provocado por el incremento del argumento Δx, y se designa Δy. Por lo tanto,

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Nótese que Δy es la función del argumento Δx para el punto fijo x_0. El significado geométrico de los incrementos está claro de la fig. 125. En las nuevas designaciones la igualdad (2) toma la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (3)$$

La relación (3) es precisamente una definición más de la continuidad de la función, la cual puede enunciarse así.

Definición 3. *La función $f(x)$ se llama continua en el punto x_0 si su incremento en este punto es una función infinitamente pequeña para $\Delta x \to 0$.*

Para el uso práctico la última definición es, a veces, más cómoda y a continuación la utilizaremos también.

○ **Ejemplo 2.** Investíguese si es continua o no la función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es un número racional,} \\ 0, \text{ si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

Resolución. Tomemos cualquier punto x_0 sobre la recta numérica. Son posibles dos casos: 1) el número x_0 es racional y 2) el número x_0 es irracional.

En el primer caso 1) $f(x_0) = 1$. En todo entorno del punto racional existen puntos irracionales en los cuales $f(x) = 0$. Por consiguiente, en todo entorno del punto x_0 hay puntos x en los cuales el incremento de la función $\Delta y = f(x) - f(x_0) = 0 - 1 = -1$.

En el caso 2) $f(x_0) = 0$. En todo entorno del punto irracional hay puntos racionales en los cuales $f(x) = 1$. Por lo tanto, en todo entorno del punto x_0 hay puntos x en los cuales el incremento de la función $\Delta y = f(x) - f(x_0) = 1 - 0 = 1$.

Ahora bien, el incremento de la función Δy puede tomar tanto el valor igual a 1 como el valor igual a -1, o sea, no tiende a cero para $\Delta x \to 0$. Según la definición 3 esto significa que la función de Dirichlet no es continua en el punto x_0. Y puesto que el punto x_0 fue elegido arbitrariamente, entonces con ello se demuestra que la función de Dirichlet no es continua en cada punto y, por lo tanto, sobre toda la recta numérica. ●

2. Operaciones aritméticas con funciones continuas.

Teorema 4.7. *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el punto x_0. Entonces las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ son también continuas en este punto (la última función, para $g(x_0) \neq 0$).*

□ **Demostración.** Puesto que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el punto x_0 tienen en este punto límites iguales a $f(x_0)$ y $g(x_0)$, entonces, según el teorema 4.3, los límites de las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ existen y son iguales a $f(x_0) \pm g(x_0)$, $f(x_0)\cdot g(x_0)$ y $f(x_0)/g(x_0)$, respectivamente. Pero estas magnitudes son iguales a los valores de las funciones correspondientes en el punto x_0. Por consiguiente, según la definición 1, las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ son continuas en el punto x_0. ■

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciense tres definiciones de la continuidad de una función en el punto x_0.
2. ¿En qué consiste la diferencia entre el concepto de continuidad de una función y el de límite de una función en el punto x_0?
3. ¿Por qué de la continuidad de una función por la izquierda y por la derecha en el punto x_0 se deduce la continuidad de una función en este punto? ¿En virtud de qué teorema?
4. Enúnciese el teorema de las operaciones aritméticas con funciones continuas.

§ 9. Continuidad de algunas funciones elementales

Una de las propiedades importantes de las funciones elementales es su continuidad en cada punto del dominio de su definición. Con ejemplos de algunas funciones, vamos a verificar este hecho al utilizar la definición de continuidad de las funciones en un punto y el teorema 4.7.

1. Continuidad de las funciones racionales. Un ejemplo elemental de una función continua en todo punto x_0 de la recta numérica es la función constante $f(x) = C$. Efectivamente, en este caso $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C = f(x_0)$ (véase el ejemplo 1, subp. 1 del § 2), o sea, la función constante es continua en cada punto de la recta numérica.

La función $f(x) = x$ es también continua en cada punto x_0 de la recta numérica, ya que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x = f(x_0)$ (véase el ejemplo 2, subp. 1 del § 2), o sea, el límite de la función en el punto x_0 es igual a su valor en este punto. De lo dicho y del teorema 4.7 se desprende que en todo punto x_0 las funciones $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, $x^4 = x^3 \cdot x$, ..., $x^n = x^{n-1} \cdot x$ (n es un número natural) son continuas. Como ya sabemos, la función $f(x) = x^n$ se dice potencial y la función de la forma

$$P(x) = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n,$$

donde $n \geqslant 0$ es un número entero y C_0, C_1, C_2, ..., C_n son cualesquiera números, se llama polinomio.

Cada uno de los sumandos $C_0 x^n$, $C_1 x^{n-1}$, $C_2 x^{n-2}$, ..., C_n es producto de dos funciones continuas (constante y potencial). Conforme al teorema 4.7 este producto es continuo en todo punto x. De este modo el polinomio $P(x)$ es la suma de las funciones continuas en todo punto x y, por consiguiente, es continuo en cada punto x.

La función racional fraccional, o sea, la función de la forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, es continua en todos los puntos x en los cuales su denominador no es igual a cero (o sea, en todos los puntos, a excepción de las raíces del denominador), como cociente de las funciones continuas.

Por ejemplo, la función $R(x) = \dfrac{3x^2 + 7x - 1}{x^2 - 1}$ es continua en todos los puntos x distintos de $+1$ y -1.

2. Continuidad de las funciones trigonométricas. Consideremos las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$. Mostremos que la función $\operatorname{sen} x$ es continua en todo punto x. Hagamos uso de la definición 3 de continuidad de una función. Asignando al argumento x el incremento Δx, obtenemos el incremento de la función

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$$

o bien

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}.$$

Pasando al límite en los miembros primero y segundo de la igualdad para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \to 0}\left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\right] = 0,$$

y que

$$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\Delta x = 0\ ^{1)},$$

y el producto de una función acotada por una infinitamente pequeña es una infinitésima. Ahora bien, la función $\operatorname{sen} x$ es continua en todo punto x. La continuidad de la función $\cos x$ en todo punto x se demuestra de un modo análogo.

Según el teorema 4.7, de la continuidad de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se deduce la continuidad de las funciones $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ en todos los puntos donde $\cos x \neq 0$, o sea, en todos los puntos, salvo $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, y la de las funciones $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ en *todos los puntos, salvo* $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. Continuidad de la función $f(x) = |x|$. La función $f(x) = |x|$ cuyo gráfico está representado en la fig. 101 está definida y es continua en todos los puntos de la recta numérica. Efectivamente, en los puntos de la semirrecta $(0, +\infty)$ ella es continua, ya que para $x > 0$ $f(x) = x$ (véase el subp. 1). En los puntos de la semirrecta $(-\infty, 0)$ la función $f(x)$ es también continua, ya que $f(x) = -x$ para $x < 0$, puede ser representada como el producto de dos funciones continuas (-1) y x, y se puede aplicar el teorema 4.7 de la continuidad del producto. Para determinar la continuidad de la función $|x|$ en el punto $x = 0$, calculemos los límites laterales

---

1) Aquí ha sido utilizado el primer límite notable que se obtiene como resultado de la sustitución de la variable $t = \Delta x/2$; $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \lim\limits_{t \to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ $\left(\text{es evidente que } t = \frac{\Delta x}{2} \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0\right)$.

de la función en este punto:

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = -\lim_{x\to 0^-} x = 0;$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Así pues, los límites de la función en el punto $x = 0$ por la izquierda y por la derecha coinciden y son iguales al valor de la función en este punto. De aquí se desprende que la función $|x|$ es continua en *el punto $x = 0$ y, por lo tanto, es continua en todos los puntos de la recta numérica.*

Así pues, nos hemos convencido de que las funciones consideradas son continuas en cada punto del dominio de su definición. En virtud del teorema 4.7 de la continuidad de la suma, diferencia, producto y *cociente se puede afirmar que las funciones obtenidas de ellas mediante un número finito de operaciones aritméticas son también funciones continuas en cada punto del dominio de su definición.*

Diremos que la función $f(x)$ es continua en el intervalo (a, b) si es continua en cada punto de este intervalo; es continua sobre el *segmento $[a, b]$ si es continua en el intervalo (a, b), y es continua* en el punto a por la derecha y en el punto b por la izquierda, o sea,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

4. Continuación del cálculo de los límites de funciones. Después de que hemos determinado que las funciones elementales poseen propiedad de continuidad en cada punto del dominio de su definición, se abren amplias posibilidades para calcular los límites de las funciones elementales.

○ **Ejemplo 1.** Hállese $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos 2x}$.

Resolución. Puesto que la función $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos 2x}$ es continua en el punto $x = \pi/2$, o sea, el límite de la función y su valor en este punto son iguales, entonces, pasando al límite, resulta

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos 2x} = \frac{1+\operatorname{sen}(\pi/2)}{1-\cos(2\pi/2)} = \frac{1+1}{1-(-1)} = 1.$$

Ejemplo 2. Hállese $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$ y no *es continua en este punto. Por eso, al igual que en el ejemplo precedente,* no se puede pasar inmediatamente al límite. Para encontrar el límite es necesario transformar idénticamente la función $f(x)$ de un modo tal que ella para $x \neq 0$ coincida con cierta función $F(x)$ continua en el punto $x = 0$, o sea, hallar una función continua $F(x)$ tal que $f(x) = F(x)$ para $x \neq 0$ o bien $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0)$. Para esto multipliquemos el numerador de la fracción y su denominador por la suma $\sqrt{x+1} + 1$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$
$$= \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = F(x).$$

Ahora bien, $f(x) = F(x)$ para $x \neq 0$. Pero la función $F(x)$ es continua en el punto $x = 0$. Por eso

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3. Hállese $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x}$.

Resolución. Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ no está definida en el punto $x = \pi/4$. Para hallar el límite transformamos la fracción:

$$\frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} 2x - (1 + \cos 2x)}{\operatorname{sen} x - \cos x} =$$
$$= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x - 2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \frac{2\cos x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 2\cos x.$$

Para $x \neq \pi/4$ tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 2\cos x.$$

Pero la función $2\cos x$ es continua en el punto $x = \pi/4$. Por eso, pasando al límite, resulta

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \lim_{x\to\pi/4} 2\cos x =$$
$$= 2\lim_{x\to\pi/4} \cos x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \quad \bullet$$

Al calcular los límites de las funciones para $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to \infty$, que contienen los radicales, es necesario examinar el valor aritmético de la raíz $\sqrt{x^2} = |x|$ para $x > 0$ y $x < 0$.

○ **Ejemplo 4.** Hállese: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Resolución. En todos los casos tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

1) Para $x>0$ tenemos $\sqrt{x^2}=x$, por eso

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x(1+1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x^2}=\frac{1}{1}=1.$$

2) Para $x<0$ tenemos $\sqrt{x^2}=-x$, por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x(1+1/x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+1/x^2}}{x(1+1/x)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x}=-\frac{1}{1}=-1.$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ no existe, ya que los límites para $x\to+\infty$ y para $x\to-\infty$ son diferentes.

Ejemplo 5. Hállese $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para $x<0$ $\sqrt{x^2}=-x$, $\sqrt[3]{x^3}=x$, por eso

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3(1+1/x^3)}-\sqrt{x^2(4-1/x^2)}}{x(1+7/x)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+1/x^3}-|x|\sqrt{4-1/x^2}}{x(1+7/x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt[3]{1+1/x^3}+x\sqrt{4-1/x^2}}{x(1+7/x)}=$$

$$=\frac{1+2}{1}=\frac{3}{1}=3.$$ ●

Diremos que la suma de dos funciones infinitamente grandes de signos opuestos es una indeterminación de la forma $\infty-\infty$.

En este caso no se puede decir nada determinado del límite de la suma, ya que este límite puede ser igual a cero, al infinito, a un número distinto del cero y puede no existir en absoluto.

○ **Ejemplo 6.** *Hállese:* 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

Resolución. 1) Tenemos una indeterminación de la forma $\infty-\infty$. Para hallar el límite multipliquemos y dividamos por la suma $\sqrt{x^2+4x}+x$, y *como resultado obtendremos*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}.$$

Tenemos ahora una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para evaluar la indeterminación dada dividamos la fracción por x y luego pasemos al límite. Resulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2(1+4/x)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\sqrt{1+4/x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+4/x}+1}=\frac{4}{1+1}=2;$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)=+\infty$, ya que la suma de dos funciones infinitamente grandes es una función infinitamente grande (demuéstrese esto por sí mismo).

De 1) y 2) se deduce, en particular, que $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$ no existe. ●

Diremos que el producto de una función infinitamente pequeña por una infinitamente grande es una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$.

○ **Ejemplo 7.** Hállese $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Resolución. Tenemos una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$. Para hallar el límite reemplacemos la variable, poniendo $1-x=y$. Puesto que $\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$, entonces para $x\to1$ la nueva *variable* $y\to0$. *Además, si* $1-x=y$, *entonces* $x=1-y$. *Por* consiguiente,

$$\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{y\to0}y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y)=\lim_{y\to0}y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right)=$$

$$=\lim_{y\to0}y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y=\lim_{y\to0}y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}\cos\frac{\pi}{2}y=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}\lim_{y\to0}\cos\frac{\pi}{2}y=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}\cdot1=\lim_{y\to0}\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}.$$

Se obtuvo una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aquí es cómodo utilizar el primer límite notable. Para esto transformemos la fracción:

$$\frac{y}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}=\frac{1}{\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y\right)\Big/y}=\frac{2/\pi}{\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y\right)\Big/\left(\frac{\pi}{2}y\right)}.$$

Finalmente tenemos

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=\frac{2/\pi}{\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}y}{\frac{\pi}{2}y}\right)}=\frac{2/\pi}{1}=\frac{2}{\pi}. \quad \bullet$$

Notemos que la evaluación de las indeterminaciones no es, en una serie de casos, cosa simple. Se necesita cierta intelectiva y, desde luego, práctica en la resolución de un gran número de problemas.

Así pues, nos hemos familiarizado con las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$ y $0\cdot\infty$. Existen también otras indeterminaciones. Las conoceremos después de considerar la regla de L'Hospital.

Ejercicios. Hállese: **1.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$. (*Resp.* 10.) **2.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{2}{3}.\right)$ **3.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. (*Resp.* 1.) **4.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{5}.\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{sen}4x}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{2}.\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{\cos 2x}$. $\left(\textit{Resp. } -\frac{1}{\sqrt{2}}.\right)$ **7.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$. (*Resp.* -12.) **8.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$. (*Resp.* -1.) **9.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x^2}$. (*Resp.* 4.) **10.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\operatorname{sen}x}$. (*Resp.* 2.) **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^3}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{2}.\right)$ **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}7x}{\sqrt{x+1}-1}$. (*Resp.* 14.) **13.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}{2x}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{2}.\right)$ **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{\sqrt{1+x\operatorname{sen}x}-\cos x}$. (*Resp.* 9.) **15.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\operatorname{sen}(x-1)}$. (**Indicación:** hacer la sustitución $x-1=y$.) (*Resp.* 3.) **16.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{3x+5}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{1}{3}.\right)$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}}$. (*Resp.* 3.) 18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$. $\left(Resp.\ -\frac{1}{3}.\right)$ 19. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x-4})$. (*Resp.* 3.) 20. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3x+1})$. $\left(Resp.\ -\frac{3}{2}.\right)$ 21. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$. $\left(Resp.\ -\frac{1}{2}.\right)$ 22. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})$. (*Resp.* 0.) 23. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$. (*Resp.* 1.) 24. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n\times\operatorname{sen}\dfrac{x}{3^n}$. (*Resp.* x.) 25. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2+x+1})$. (*Resp.* $-\infty$.)

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese que la función $f(x)=\cos x$ es continua en todo punto x.
2. ¿Por qué se puede afirmar que la función $f(x)=\dfrac{x^5+x^4+x^3-5}{x^2+5}$ es continua sobre toda la recta numérica?

§ 10. Definición y clasificación de los puntos de discontinuidad de una función

Definición. *El punto x_0 se llama punto de discontinuidad de la función $f(x)$, si $f(x)$ en el punto x_0 no es continua.*

Las discontinuidades de las funciones se clasifican del modo siguiente.

Discontinuidad de segunda especie. El punto x_0 se llama *punto de discontinuidad de primera especie* de la función $f(x)$, si en este punto la función $f(x)$ tiene límites derecho e izquierdo finitos, pero no iguales uno al otro:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

○ **Ejemplo.** Para la función $f(x)=\operatorname{sgn} x$ el punto $x=0$ es un punto de discontinuidad de primera especie (véase la fig. 80), ya que

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn} x=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn} x=-1. \ \bullet$$

Discontinuidad de primera especie. El punto x_0 se llama *punto de discontinuidad de segunda especie* de la función $f(x)$, si en este punto la función $f(x)$ no tiene al menos uno de los límites laterales o al menos uno de los límites laterales es infinito.

○ **Ejemplo.** Para la función $f(x)=1/x$ el punto $x=0$ es un punto de discontinuidad de segunda especie (véase la fig. 123), ya que

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty. \quad \bullet$$

En el ejemplo 2, subp. 1 del § 8 hemos determinado que la función de Dirichlet no es continua en todo punto x_0 de la recta numérica y en el ejemplo 5, subp. 2 del § 2 hemos mostrado que la función de Dirichlet no tiene límite en todo punto x_0. Por consiguiente, nos queda sacar la conclusión de que en todo punto x_0 la función de Dirichlet tiene una discontinuidad de segunda especie.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué puntos se llaman puntos de discontinuidad de una función?
2. Dense las definiciones de los puntos de discontinuidad de primera y segunda especie.
3. Señálese en qué punto la discontinuidad tiene la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y de qué especie es esta discontinuidad.

§ 11. Teorema de la continuidad de una función compuesta

Teorema 4.8. *Supongamos que la función $z = \varphi(x)$ es continua en el punto x_0 y la función $y = f(z)$ es continua en el punto $z_0 = \varphi(x_0)$. Entonces la función compuesta $y = f[\varphi(x)]$ es continua en el punto x_0.*

□ **Demostración.** Tomemos de X cualquier sucesión de los puntos

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

que converja en el punto x_0. Entonces, en virtud de la continuidad de la función $z = \varphi(x)$ en el punto x_0, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0) = z_0,$$

o sea, la sucesión respectiva de los puntos $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ converge hacia el punto z_0. Al mismo tiempo, en virtud de la continuidad de la función $f(z)$ en el punto z_0, resulta $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$, o sea,

$$\lim_{n\to\infty} f[\varphi(x_n)] = f[\varphi(x_0)].$$

Por consiguiente, el límite de la función $f[\varphi(x)]$ en el punto x_0 es igual al valor de la misma en este punto, lo que demuestra precisamente la continuidad de la función compuesta $f[\varphi(x)]$ en el punto x_0. ■

○ **Ejemplo.** Demuéstrese la continuidad de la función $y = \operatorname{sen} x^2$ en el punto $x = 0$.

Resolución. Puesto que la función $z = x^2$ es continua en el punto $x = 0$ y la función $y = \operatorname{sen} z$ es continua en el punto $z = 0$, según el teorema demostrado la función compuesta $y = \operatorname{sen} x^2$ es continua en el punto $x = 0$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dése la definición de la función compuesta.
2. Enúnciese el teorema de la continuidad de la función compuesta.
3. Demuéstrese la continuidad de la función $y = \operatorname{sen} 3x$ sobre toda la recta numérica.

§ 12. Propiedades fundamentales de las funciones continuas

1. Teorema sobre la estabilidad del signo de una función continua.
Teorema 4.9. *Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 y $f(x_0) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todos los*

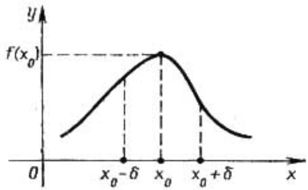

Fig. 126

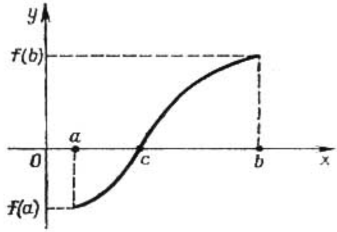

Fig. 127

puntos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la función $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x_0)$.

□ **Demostración.** Supongamos que $f(x_0) > 0$ (fig. 126). Entonces, en virtud de la segunda definición de la continuidad de una función, para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ se cumple para todos los x que satisfacen la condición $|x - x_0| < \delta$ o bien, lo que es lo mismo, se cumplen las desigualdades

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \tag{1}$$

para todos los puntos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Tomemos $\varepsilon = f(x_0)$. Entonces de la desigualdad izquierda (1) obtenemos $f(x) > 0$ para todos los puntos $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, que es lo que se quería demostrar.

En cambio si $f(x_0) < 0$, consideremos la función $-f(x)$. Puesto que $-f(x_0) > 0$, entonces, según lo demostrado, existe el δ-entorno del punto x_0 en el cual $-f(x) > 0$ y, por consiguiente, $f(x) < 0$. ■

2. Paso de una función continua por todo el valor intermedio. Consideremos el teorema del paso de una función continua por el valor nulo al cambiar los signos.

Teorema 4.10. (primer teorema de Bolzano — Cauchy)[1]. *Supongamos que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y en los extremos del segmento tiene valores de signos opuestos. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ en el cual $f(c) = 0$.*

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (fig. 127). Dividamos el segmento $[a, b]$ por la mitad. Si el valor de la función en el punto medio del segmento $[a, b]$ es igual a cero, el teorema quedará demostrado. En el caso contrario elijamos entre los segmentos obtenidos el segmento en cuyos extremos la función tiene valores de signos opuestos y designémoslo por $[a_1, b_1]$. Bisequemos el segmento $[a_1, b_1]$, elijamos el segmento en cuyos extremos la función $f(x)$ tiene valores de signos opuestos y designémoslo por $[a_2, b_2]$, etc. Continuando este proceso indefinidamente, obtenemos la sucesión

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

de los segmentos encajados, con la particularidad de que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ para $n \to \infty$ y en los extremos de cada segmento $[a_n, b_n]$ la función tiene valores de signos opuestos.

Según el teorema 3.13 de los segmentos encajados existe el punto c perteneciente a todos los segmentos. Demuéstrese que $f(c) = 0$. Efectivamente, si admitimos que $f(c) > 0$, conforme al teorema 4.9 de la estabilidad del signo de una función continua existe el entorno del punto c en el cual $f(x) > 0$. Al ser n suficientemente grande en este entorno llegará a parar el segmento $[a_n, b_n]$ en el cual, por lo tanto, será $f(x) > 0$ y esto contradice la elección de la sucesión de los segmentos encajados. Análogamente se demuestra que $f(c)$ no puede ser menor que cero. Nos queda admitir que $f(c) = 0$. En este caso es evidente que el punto $c \in (a, b)$. ■

El teorema demostrado tiene un significado geométrico sencillo: al pasar de un semiplano, cuya frontera es el eje Ox, al otro la curva continua corta a este eje.

Téngase presente que al demostrar el teorema 4.10 hemos empleado el método de bisección de un segmento. A continuación utilizaremos reiteradamente este método.

Consideremos el teorema del paso de una función continua por cualquier valor intermedio.

Teorema 4.11 (segundo teorema de Bolzano — Cauchy). *Supongamos que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, con la particularidad de que $f(a) = A$, $f(b) = B$. Supongamos, luego, que C es todo número comprendido entre A y B. Entonces sobre el segmento $[a, b]$ habrá un punto c tal que $f(c) = C$.*

[1] B. Bolzano (1781—1848), matemático checo.

Con otras palabras, al pasar de un valor a otro, la función continua toma también todos los valores intermedios.

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que $A < B$ y $A < C < B$ (fig. 128). Consideremos una función auxiliar

$$\varphi(x) = f(x) - C.$$

Esta función es continua sobre el segmento $[a, b]$ (como diferencia de las funciones continuas) y toma en los extremos de este segmento valores de signos opuestos:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

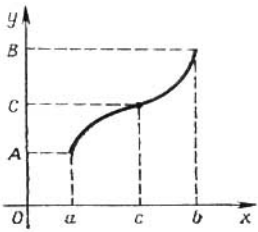

Fig. 128

Conforme al teorema 4.10 existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $\varphi(c) = f(c) - C = 0$, o sea, $f(c) - C = 0$. De aquí $f(c) = C$. ■

Corolario. *Si la función $f(x)$ está definida y es continua sobre cierto intervalo X, el conjunto de sus valores Y también es cierto intervalo.*

□ **Demostración.** Sea $m = \inf\limits_X f(x)$, $M = \sup\limits_X f(x)$, donde m y M son los números que se llaman, respectivamente, *cotas inferior exacta y superior exacta de la función* [1]).

Tomemos todo y de Y, no igual a m ni a M, y elijamos dos valores y_1 e y_2 de la función $f(x)$ de un modo tal que se cumplan las desigualdades $m \leqslant y_1 < y < y_2 \leqslant M$. La existencia de tales valores de la función $f(x)$ se deduce de la definición de las cotas exactas (si $M = +\infty$ ($m = -\infty$), entonces $y_2 < M$ ($m < y_1$)). En este caso según el teorema 4.11 de los valores intermedios de una función continua existe un punto x tal que $f(x) = y$. Por lo tanto, el conjunto Y es cierto intervalo (finito o infinito) que tiene por extremos m y M, los cuales, según el caso concreto, pueden pertenecerle o no pertenecerle. ■

Los teoremas demostrados tienen gran importancia teórica y práctica.

○ **Ejemplo 1.** Demuéstrese que la ecuación $x^5 - 18x + 2 = 0$ tiene una raíz sobre el segmento $[-1, 1]$.

Resolución. Pongamos $f(x) = x^5 - 18x + 2$. Esta función es continua sobre el segmento $[-1, 1]$ y en sus extremos toma los valores de signos opuestos: $f(-1) = 19 > 0$, $f(1) = -15 < 0$. Por consiguiente, satisface las hipótesis del teorema 4.10, según el cual existe

---

[1]) Recuérdese que se llama cota superior (inferior) exacta de la función $f(x)$, definida sobre X, a la cota mínima (máxima) entre las cotas superiores (inferiores) que limitan Y por arriba (por abajo).

al menos un punto c $(-1 < c < 1)$ en el cual $f(c) = 0$. El número c es precisamente la raíz de la ecuación dada.

Ejemplo 2. Demuéstrese que la función $f(x) = x^3/4 - \operatorname{sen} \pi x + 3$ toma un valor igual a 3, dentro del segmento $[-2, +2]$.

Resolución. La función dada satisface las hipótesis del teorema 4.11. Es continua sobre el segmento $[-2, +2]$ y en los extremos de este segmento toma distintos valores: $f(-2) = 1$, $f(2) = 5$. Puesto que $1 < 3 < 5$, entonces, conforme al teorema 4.11, dentro del segmento $[-2, +2]$ *existe el punto* c en el cual la función toma el valor igual a 3, o sea, $f(c) = 3$. ●

3. Teorema del carácter acotado de una función continua sobre un segmento. Recuérdese que la función $f(x)$ se llama acotada sobre el segmento $[a, b]$ si existe un número $M > 0$ tal que para todos los puntos $x \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|f(x)| \leqslant M$ o bien $-M \leqslant f(x) \leqslant M$, o sea, el gráfico de la función $f(x)$ no sale de la franja limitada por las rectas $y = M$ e $y = -M$ (fig. 129).

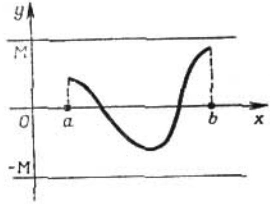

Fig. 129

Teorema 4.12 (primer teorema de Weierstrass) [1]**.** *Si la función $f(x)$ está definida y es continua sobre el segmento $[a, b]$, ella está acotada sobre este segmento.*

Demostremos previamente el siguiente lema.

Lema. *La función $f(x)$, continua en el punto x_0, está acotada en cierto entorno suyo.*

□ **Demostración.** Tomemos $\varepsilon = 1$. Entonces, conforme a la segunda definición de la continuidad de una función en un punto, para ε dado existe $\delta > 0$ tal que para todos los $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se cumple la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < 1$.

Utilizando esta desigualdad, obtenemos $|f(x)| = |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|$, o sea, $|f(x)| < M$, donde $M = 1 + |f(x_0)|$. De aquí sacamos la conclusión de que la función $f(x)$ está acotada en el δ-entorno del punto x_0. ■

□ **Demostración del teorema.** Supongamos lo inverso, o sea, admitamos que la función $f(x)$ no está acotada sobre el segmento $[a, b]$. Bisequemos el segmento $[a, b]$, entonces al menos sobre uno de los dos segmentos obtenidos la función $f(x)$ no está acotada (en el caso contrario ella estaría acotada sobre $[a, b]$). Designemos este segmento por $[a_1, b_1]$. Bisequemos el segmento $[a_1, b_1]$ y designemos por $[a_2, b_2]$ aquél de los segmentos sobre el cual la función $f(x)$ no está acotada, etc. Continuando este proceso indefinidamente,

[1] Karl Weierstrass (1815 — 1897), matemático alemán.

obtenemos la sucesión

$$[a,\ b] \supset [a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \ldots \supset [a_n,\ b_n] \supset \ldots$$

de los segmentos encajados, en cada uno de los cuales $f(x)$ no está acotada, con la particularidad de que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ para $n \to \infty$.

Conforme al teorema 3.13 de los segmentos encajados existe el punto c perteneciente a todos los segmentos. Según la hipótesis la función $f(x)$ está definida y es continua en el punto c, por lo tanto, según el lema demostrado, en cierto entorno del punto c ella está acotada. Cuando n es suficientemente grande, en este entorno se encuentra el segmento $[a_n,\ b_n]$ sobre el cual la función $f(x)$ también está acotada, lo que contradice la elección de la sucesión de los segmentos encajados. La contradicción obtenida demuestra el teorema. ■

Observación. El teorema no es cierto si el segmento $[a,\ b]$ se reemplaza por el intervalo $(a,\ b)$. Así, por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua sobre el intervalo $(0,\ 1)$, pero no está acotada, ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

La demostración del teorema para el intervalo «no pasa» en el lugar, donde se afirma que en el punto c la función está definida y es continua. Para el intervalo el punto c puede coincidir con su extremo y entonces la función $f(x)$ no quedará definida ni será continua en el punto c.

4. Teorema acerca de cómo una función, que es continua sobre un segmento, alcanza sus cotas exactas. En el caso cuando las cotas exactas de una función son los valores de la misma, se dice que la función *alcanza sus cotas exactas*. Sin embargo, como se sabe (véase el teorema 1.1) no a todo conjunto pertenecen sus cotas exactas. El ejemplo siguiente muestra que las cotas exactas de una función no siempre se alcanzan.

○ Supongamos que en el segmento $[0,\ b]$, $b \geqslant 1$, está definida la función $f(x) = x - [x]$ cuyo gráfico está representado en la fig. 130. De conjunto de valores de la misma sirve el semiintervalo $[0,\ 1)$. La función está acotada superior e inferiormente y tiene sobre el segmento dado la cota superior exacta, igual a 1 y la cota inferior exacta, igual a 0. Es evidente que la función toma el valor igual a 0, pero no toma el valor igual a 1. Por lo tanto, se puede decir que la función alcanza su cota exacta inferior y no alcanza la superior exacta. ●

Surge la pregunta ¿cuál es la condición con la que la función alcanza sus cotas exactas? El siguiente teorema da la respuesta.

Teorema 4.13 (segundo teorema de Weierstrass). *Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a,\ b]$, ella alcanza sobre este seg-*

mento sus cotas exactas, o sea, existen puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tales que* (fig. 131)

$$f(x_1) = M = \sup_{[a, b]} f(x), \quad f(x_2) = m = \inf_{[a, b]} f(x).$$

□ **Demostración.** Puesto que la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, entonces, conforme al teorema 4.12, ella está acotada sobre este segmento. Por consiguiente, según el teorema 1.1

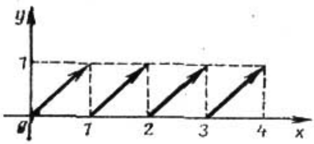

Fig. 130

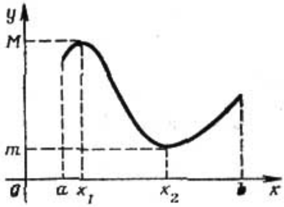

Fig. 131

existen la cota superior exacta M y la cota inferior exacta m de la *función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$.*

Mostremos que la función $f(x)$ alcanza M, o sea, existe tal punto $x_1 \in [a, b]$ que $f(x_1) = M$. Vamos a razonar mediante la reducción al absurdo. Supongamos que la función $f(x)$ no toma en ningún punto $[a, b]$ el valor igual a M. Entonces para todos los puntos $x \in [a, b]$ es válida la desigualdad $f(x) < M$.

Consideremos sobre el segmento $[a, b]$ una función auxiliar, positiva por doquier,

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Según el teorema 4.7 la función $F(x)$ es continua como cociente de dos funciones continuas. En este caso, conforme al teorema 4.12, la función $F(x)$ está acotada, o sea, habrá un número positivo μ tal que para todos los puntos $x \in [a, b]$

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant \mu, \text{ de donde } f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu}.$$

Se obtuvo que un número $M - 1/\mu$, menor que M, es la cota superior de $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Pero esto contradice el hecho de que el número M es la cota superior exacta, o sea, la cota superior mínima de la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. La contradicción obtenida demuestra precisamente que existe el punto $x_1 \in [a, b]$ en el cual $f(x_1) = M$.

De un modo análogo se demuestra que la función $f(x)$ alcanza sobre $[a, b]$ su cota inferior exacta m. ■

Observación. Una vez demostrado que la función $f(x)$, continua sobre el segmento $[a, b]$, alcanza sobre este segmento sus cotas exactas superior M e inferior m, la cota superior exacta puede llamarse *valor máximo* y la cota inferior exacta, *valor mínimo* de la función $f(x)$ sobre este segmento; entonces el teorema 4.13 se puede enunciar en la forma siguiente: *una función continua sobre un segmento tiene sobre este segmento los valores máximo y mínimo.*

○ **Ejemplo 3.** Demuéstrese que la función $f(x) = 2^{|x|} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} + (x^2 - 5x + 6) \operatorname{sen} \sqrt{x^2+1}$ está acotada sobre el segmento $[0, 1]$ y existen tales valores de x con los cuales la función toma sobre este segmento los valores máximo y mínimo.

Resolución. Puesto que las funciones $2^{|x|} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$, $(x^2 - 5x + 6)$, $\operatorname{sen} \sqrt{x^2+1}$ son continuas sobre el segmento $[0, 1]$, entonces, conforme al teorema 4.7, la función dada $f(x)$ es continua sobre este segmento. Por consiguiente, según el teorema 4.12 ella está acotada sobre el segmento $[0, 1]$ y según el teorema 4.13, existen sobre este segmento los valores x_1 y x_2 en los que la función toma el valor máximo $(f(x_1) = \sup\limits_{[0, 1]} f(x))$ y el valor mínimo $(f(x_2) = \inf\limits_{[0, 1]} f(x))$. ●

5. Concepto de continuidad uniforme de una función. La propiedad de *continuidad uniforme* es una propiedad importante de la función continua sobre un segmento. Esta propiedad se utiliza ampliamente para demostrar varios teoremas fundamentales.

Sea $f(x)$ una función continua sobre cierto intervalo X y sea el punto $x_0 \in X$. Puesto que la función $f(x)$ es continua en el punto x_0, entonces, según la segunda definición de continuidad, para todo número $\varepsilon > 0$ habrá $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ para $|x - x_0| < \delta$. Está claro que δ depende de ε, pero δ depende también de x_0. Al variar x_0 dentro de los límites del intervalo en cuestión (al ser constante ε) el número δ es distinto para diferentes x_0. Cuanto «más abrupto» sea el gráfico de la función $f(x)$ en el entorno del punto x_0, tanto menor será δ correspondiente a este punto (fig. 132).

De esta manera, para ε dado a cada punto x del intervalo en cuestión corresponde cierto número $\delta > 0$. Si hubiera un número finito de puntos, se podría del conjunto finito de los números δ elegir el número δ positivo mínimo que dependiera sólo de ε y fuera «útil» para todos los puntos x. Hablando en general, no se puede hacer esto para un número infinito de puntos, ya que a estos puntos corresponde un conjunto infinito de números δ, entre los cuales también pueden haber tan pequeños como se quiera.

Surge la pregunta ¿existen o no funciones continuas, definidas sobre ciertos intervalos, para las cuales según todo número $\delta > 0$

se podría hallar $\varepsilon > 0$ no dependiente de x, o sea, δ sería común para todos los puntos x del intervalo en cuestión. Esta pregunta conduce al concepto de continuidad uniforme de una función.

Definición. *La función $f(x)$ se llama uniformemente continua sobre cierto intervalo X, si para todo número $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos $x', x'' \in X$ que satisfacen la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.*

Por definición, δ depende sólo de ε y es común para todos los puntos x', x'' del intervalo X.

El concepto de continuidad uniforme de una función pertenece a los problemas más complicadas y difíciles de comprender del análisis matemático.

El concepto de continuidad uniforme de una función sobre el intervalo X se distingue del de continuidad sobre este intervalo

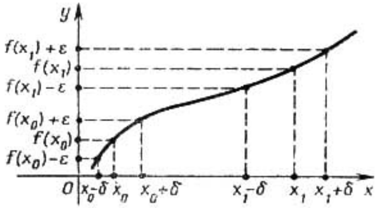

Fig. 132

por el hecho de que la magnitud δ depende sólo de ε y no depende de x (para todo número $\varepsilon > 0$ existe un «propio» número $\delta > 0$, común para todos los puntos $x \in X$), mientras que en caso de una continuidad «ordinaria» δ depende de ε y de x. En este caso, como hemos mostrado anteriormente, δ en dependencia de x puede tomar valores tan pequeños como se quiera.

De la definición de continuidad uniforme se desprende que si la función $f(x)$ es uniformemente continua sobre cierto intervalo X, ella es también verdaderamente continua sobre este intervalo, o sea, continua en todo punto $x_0 \in X$. En efecto, tomando en la definición como x' el punto fijo dado $x_0 \in X$ y como x'' todo punto de este intervalo, llegaremos a la definición de continuidad de la función $f(x)$ en el punto x_0. La afirmación inversa no es cierta (piense ¿por qué?).

Consideremos los ejemplos de las funciones que poseen o no poseen la propiedad de continuidad uniforme sobre el intervalo dado X.

○ **Ejemplo 4.** Utilizando la definición de continuidad uniforme, demuéstrese que la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no es uniformemente continua sobre el intervalo $(0, 1)$.

Resolución. El gráfico de la función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ está representado en la fig. 121. La función es continua sobre el intervalo $(0, 1)$, *pero no es uniformemente continua sobre éste.* Para convencerse de esto basta demostrar que para cierto número $\varepsilon > 0$ y para todo número $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera existe al menos un par de puntos x' y x'' del intervalo $(0, 1)$ tales que $|x'' - x'| < \delta$, pero $|f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon$.

Tomemos $\varepsilon = 1$ y consideremos dos sucesiones de puntos pertenecientes al intervalo $(0, 1)$, o sea, $\{x'_n\}$ y $\{x''_n\}$ con elementos generales

$$x'_n = 1\Big/\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{y} \quad x''_n = 1\Big/\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

con la particularidad de que $f(x''_n) = 1$ y $f(x'_n) = -1$. Ambas estas sucesiones y, por lo tanto, sus diferencias son infinitamente pequeñas. *Por eso para todo número $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera existe un número de orden n tal que $|x''_n - x'_n| < \delta$, mientras que para todo número de orden n*

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)\right| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon = 1.$$

Esto demuestra precisamente que la función en cuestión no es uniformemente continua sobre el intervalo $(0, 1)$.

Ejemplo 5. Utilizando la definición de continuidad uniforme, demostrar que *la función $f(x) = x$ es uniformemente continua sobre* toda la recta numérica.

Resolución. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Entonces de la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se deduce la desigualdad $|f(x'') - f(x')| = |x'' - x'| < \varepsilon$, que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 6. Utilizando la definición de continuidad uniforme, demuéstrese que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua sobre toda la recta numérica [1]).

Resolución. Para cerciorarse de esto basta mostrar que para cierto número $\varepsilon > 0$ y para todo número $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera habrá al menos un par de puntos x' y x'' tales que

$$|x'' - x'| < \delta, \ \text{pero} \ |f(x'') - f(x')| \geqslant \varepsilon.$$

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y consideremos dos sucesiones de puntos $\{x'_n\}$ y $\{x''_n\}$ que tienen por elementos generales $x'_n = \sqrt{n}$ y $x''_n = \sqrt{n+1}$

[1]) *Aunque esta función es continua en cada punto de la recta numérica.*

$(n=1, 2, \ldots)$. Entonces

$$|x_n'' - x_n'| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$$

para $n \to \infty$ y

$$|f(x_n'') - f(x_n')| = |x_n''^2 - x_n'^2| = n+1-n = 1.$$

Por consiguiente, para todo número $\delta > 0$ tan pequeño como se quiera habrá un par de puntos x_n' y x_n'' tales que $|x_n'' - x_n'| < \delta$, mientras que $|f(x_n'') - f(x_n')| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$ y esto demuestra precisamente que la función en cuestión no es uniformemente continua sobre toda la recta numérica. ●

El teorema siguiente determina la condición en la que una función continua es también uniformemente continua.

6. Teorema de la continuidad uniforme de una función. Teorema 4.14 (teorema de Cantor) [1]. *Si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, ella también es uniformemente continua sobre éste.*

□ **Demostración.** Demostremos primero que si la función $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, entonces para todo número $\varepsilon > 0$ el segmento $[a, b]$ puede partirse en un número finito de segmentos, dos cualesquiera de los cuales o no tienen puntos comunes o tienen sólo un punto de frontera común y sobre cada uno de los cuales para cualesquiera dos puntos x' y x'' se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.

Supongamos lo inverso, o sea, admitamos que exista $\varepsilon > 0$ para el cual tal partición del segmento $[a, b]$ no es posible. Bisequemos el segmento $[a, b]$ y elijamos aquél de los segmentos para el cual tal partición es imposible. Designémoslo por $[a_1, b_1]$. Bisequemos ahora el segmento $[a_1, b_1]$ y escojamos aquél de los segmentos para el cual tal partición es imposible, etc. Continuando este proceso indefinidamente, obtenemos la sucesión de los segmentos encajados

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

que poseen la propiedad de que ninguno de ellos se puede partir en un número finito de segmentos, en cada uno de los cuales se cumple para cualesquiera dos puntos x y x'' la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Conforme al teorema 3.13 de los segmentos encajados existe un punto c perteneciente a todos los segmentos. Puesto que la función $f(x)$ es continua en el punto c, para un número ε dado habrá δ tal que $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo punto x del δ-entorno del

[1]) Georg Cantor (1845 — 1918), matemático alemán, fundador de la moderna teoría de los conjuntos.

punto c. Entonces para cualesquiera dos puntos x' y x'' del **δ-entorno** del punto c se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| = |(f(x'') - f(c)) + (f(c) - f(x'))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'') - f(c)| + |f(c) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \varepsilon,$$

o sea,

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Al δ-entorno del punto c, al ser suficientemente grande n, va a parar el segmento $[a_n, b_n]$ y, por consiguiente, para todos dos puntos x y x'' de este segmento es válida la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, lo que contradice la elección de la sucesión de los segmentos encajados.

Pasemos ahora inmediatamente a la demostración del teorema. Según lo recién demostrado, para todo número $\varepsilon > 0$ existe la partición del segmento $[a, b]$ en un número finito de segmentos, en cada uno de los cuales la diferencia entre cualesquiera dos valores de la función $f(x)$ es, en valor absoluto, menor que $\varepsilon/2$. Designemos con δ la longitud del menor entre los segmentos de partición y consideremos cualesquiera dos puntos x' y x'' del segmento $[a, b]$ que estén alejados uno de otro a una distancia menor que δ, o sea, $|x'' - x'| < \delta$. Son posibles dos casos: 1) los puntos x' y x'' pertenecen a un mismo segmento de partición; 2) los puntos x' y x'' pertenecen a dos segmentos de partición vecinos. En el primer caso $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; en el segundo caso, designando por x_0 el punto común de frontera tenemos

$$|f(x'') - f(x')| = |(f(x'') - f(x_0)) + (f(x_0) - f(x'))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así pues, para todo número $\varepsilon > 0$ habrá $\delta > 0$ tal que para dos puntos cualesquiera x' y x'' del segmento $[a, b]$ que satisfacen la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, tal como se quería demostrar. ■

Observación. El teorema no es cierto si el segmento $[a, b]$ se reemplaza por el intervalo o semiintervalo.

○ **Ejemplo.** Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$ sobre el intervalo $(0, 1)$. La función dada es continua sobre el intervalo $(0, 1)$, pero no es uniformemente continua sobre éste. Esto se desprende del hecho de que para todo número fijo $\varepsilon > 0$, cualquiera que se tome $\delta > 0$, siempre habrá puntos x' y x'' suficientemente próximos a cero, la distancia entre los cuales es menor que δ y el módulo de la diferencia $|f(x'') - f(x')|$, menor que ε (fig. 133). ●

El teorema de Cantor ofrece la posibilidad de afirmar de una vez que la función $f(x)$ es uniformemente continua sobre el segmento

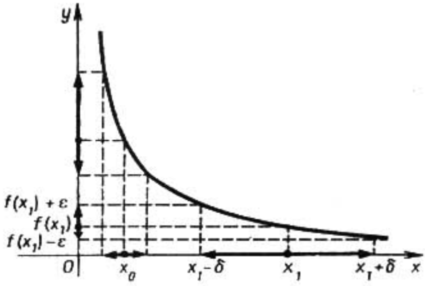

Fig. 133

$[a, b]$, si queda determinada la continuidad de la función sobre este segmento.

○ **Ejemplo 7.** Demuéstrese que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua sobre el intervalo $(-1, 1)$[1], haciendo esto por dos métodos: 1) utilizando el teorema de Cantor; 2) utilizando la definición de la continuidad uniforme.

Resolución. Método I. Consideremos la función $f(x) = x^2$ sobre el segmento $[-1, 1]$. Ella es continua sobre este segmento y, por consiguiente, conforme al teorema de Cantor, es uniformemente continua sobre éste. De aquí se desprende que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua sobre el intervalo $(-1, 1)$. En efecto, el intervalo $(-1, 1)$ es un subconjunto del segmento $[-1, 1]$, o sea, $(-1, 1) \subset [-1, 1]$ y puesto que la desigualdad $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ se cumple para cualesquiera $x', x'' \in [-1, 1]$ que satisfacen la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$, entonces ella se cumple también para cualesquiera $x', x'' \in (-1, 1)$ que satisfacen la misma desigualdad, tal como se quería demostrar.

Método II. Tomemos dos puntos cualesquiera x' y x'' del intervalo $(-1, 1)$. Entonces

$$|f(x'') - f(x')| = |x''^2 - x'^2| = |(x'' + x')(x'' - x')| = |x'' + x'|\,|x'' - x'| < 2\,|x'' - x'|,$$

ya que el módulo de la suma $|x'' + x'|$ está limitado por el número 2.

[1]) Aunque esta función no es uniformemente continua sobre toda la recta numérica (véase el ejemplo 6).

Tomemos ahora todo número $\varepsilon > 0$ y pongamos $\delta = \varepsilon/2$. Entonces para todos $x', x'' \in (-1, 1)$ que satisfacen la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(x'') - f(x')| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto significa precisamente, según la definición de la continuidad uniforme, que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua sobre el intervalo $(-1, 1)$. ●

En conclusión nótese que el teorema de Cantor tiene una importancia teórica primordial. Con su ayuda ha sido demostrada una serie de teoremas fundamentales.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de la estabilidad del signo de una función continua.
2. ¿Se puede afirmar que si la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 y $f(x_0) = 0$, la función $f(x)$: a) tiene un signo determinado en cierto entorno del punto x_0; b) no tiene un signo determinado en ningún entorno del punto x_0? Cítense los ejemplos respectivos.
3. Enúnciese el primer teorema de Bolzano — Cauchy.
4. ¿Se puede afirmar que si la función $f(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$ y en los extremos del segmento tiene valores de un mismo signo, entonces sobre $[a, b]$ no hay tal punto en el cual la función se anule? Cítese un ejemplo.
5. Enúnciese el primer teorema de Weierstrass.
6. ¿Puede una función continua sobre un intervalo estar acotada sobre este intervalo?
7. ¿Puede una función no acotada sobre un segmento o sobre un intervalo ser continua sobre estos intervalos?
8. ¿Puede una función acotada sobre un segmento tomar los valores de sus cotas exactas?
9. Enúnciese el segundo teorema de Weierstrass.
10. ¿Puede una función continua sobre un intervalo alcanzar sobre este intervalo sus cotas exactas?
11. Dése la definición de concepto de continuidad uniforme de una función.
12. ¿En qué consiste la distinción entre el concepto de continuidad uniforme y el de continuidad de una función?
13. Enúnciese el teorema de Cantor.
14. ¿Puede una función continua sobre un intervalo ser uniformemente continua sobre este intervalo y, viceversa, puede una función uniformemente continua sobre un intervalo ser continua?
15. ¿Es la función $f(x) = x^2$ uniformemente continua sobre el intervalo $(1, 5)$?

§ 13. Teorema de la continuidad de una función inversa

Introduzcamos varios conceptos preliminares. Diremos que la función $f(x)$ *no decrece* (*no crece*) sobre el conjunto X si para todos puntos $x_1, x_2 \in X$ que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Las funciones no decrecientes y no crecientes llevan el nombre común de *funciones monótonas*.

Si para todos puntos $x_1, x_2 \in X$ que satisfacen la condición $x_1 < x_2$ es válida la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, entonces la función $f(x)$ se llama *creciente* (*decreciente*) sobre el conjunto X. Las funciones crecientes y decrecientes se llaman también *estrictamente monótonas*.

○ **Ejemplos. 1.** La función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ es no decreciente sobre toda la recta numérica.

2. La función $f(x) = x$ es creciente sobre toda la recta numérica. ●

Teorema 4.15. *Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida, es estrictamente monótona y continua sobre cierto intervalo X y sea Y*

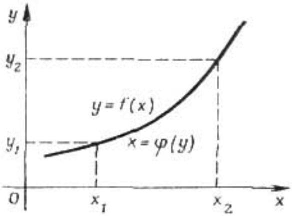

Fig. 134

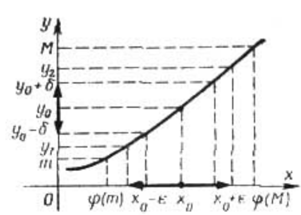

Fig. 135

el conjunto de sus valores. Entonces sobre el conjunto Y la función inversa $x = \varphi(y)$ es unívoca, estrictamente monótona y continua.

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que la función $f(x)$ crece sobre X, o sea, para todos puntos $x_1, x_2 \in X$ que satisfacen la condición de que $x_1 < x_2$ se cumple la desigualdad $y_1 < y_2$ $(y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2))$ (fig. 134).

La univocidad de la función inversa $x = \varphi(y)$ se deduce del hecho de que en virtud del crecimiento de la función $y = f(x)$ sobre X es válida la desigualdad $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$ para $x_1 \neq x_2$ y, y, por lo tanto, a cada $y \in Y$ corresponde el único valor de $x \in X$.

Demostremos ahora que la función inversa $x = \varphi(y)$ crece sobre Y. *Efectivamente, si $y_1 < y_2$, entonces también $x_1 < x_2$* $(x_1 = \varphi(y_1)$ y $x_2 = \varphi(y_2))$, ya que si existiera $x_1 \geqslant x_2$, del crecimiento de $f(x)$ se deduciría que $y_1 \geqslant y_2$, lo que contradiría la suposición de que $y_1 < y_2$. Por lo tanto, el hecho de que la función inversa $x = \varphi(y)$ es estrictamente monótona queda establecido.

Y, por último, mostremos que la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua sobre Y. En virtud del corolario del teorema 4.11 el conjunto Y es un intervalo que tiene por extremos m y M, donde $m = \inf\limits_X f(x)$, $M = \sup\limits_X f(x)$. Sea $y_0 \in Y$, $x_0 = \varphi(y_0)$. Consideremos primero el caso cuando $m < y_0 < M$ (fig. 135). En este caso el punto x_0 es, evidentemente, el punto interior del intervalo en sentido lato X.

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $(x_0 - \varepsilon) \in X$ y $(x_0 + \varepsilon) \in X$ y pongamos $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ e $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Entonces, en virtud del crecimiento de la función $f(x)$, resulta

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

Tomemos ahora $\delta > 0$ tal que se cumplan las desigualdades $y_1 \leqslant y_0 - \delta$ e $y_0 + \delta \leqslant y_2$. *En este caso, si y satisface las desigualdades*

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta,$$

entonces

$$y_1 < y < y_2$$

y, por lo tanto, en virtud de crecimiento de $\varphi(y)$, tenemos

$$\varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2).$$

Teniendo en cuenta que $\varphi(y_1) = x_0 - \varepsilon = \varphi(y_0) - \varepsilon$ y $\varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon = \varphi(y_0) + \varepsilon$, obtenemos $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon$, a condición de que $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$.

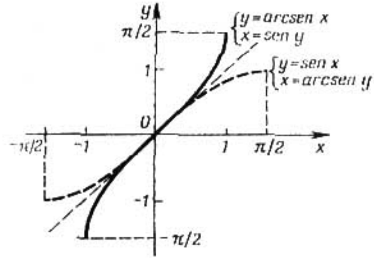

Fig. 136

Así pues, queda demostrado que para todo número suficientemente pequeño $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos los puntos y que satisfacen la desigualdad $|y - y_0| < \delta$, se cumple la desigualdad $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, o sea, la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua en el punto y_0. Pero y_0 es un punto arbitrario del intervalo (m, M). Esto quiere decir que la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua sobre (m, M).

Si $m \in Y$ o $M \in Y$, entonces, razonando de un modo análogo, se puede demostrar la continuidad de $\varphi(y)$ por la derecha en el punto m y por la izquierda en el punto M.

Por consiguiente, queda demostrado el hecho de que la función inversa $x = \varphi(y)$ es continua sobre Y.

En caso de decrecimiento de la función $f(x)$ el teorema se demuestra de un modo análogo. ■

Observación. Si la función inversa $x = \varphi(y)$ es unívoca, entonces, evidentemente, la función $y = f(x)$ es inversa para la función $x = \varphi(y)$. Tales funciones se llaman también *recíprocamente inversas*.

○ **Ejemplo.** La función $y = \operatorname{sen} x$ sobre el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$ crece, es continua y de conjunto de sus valores sirve el segmento $[-1, 1]$. Conforme al teorema 4.15 sobre el segmento $[-1, 1]$ existe una función inversa, continua y creciente, con el conjunto de los valores $[-\pi/2, \pi/2]$. Esta función inversa se designa $x = \operatorname{arcsen} y$. Su gráfica coincide con a de la función $y = \operatorname{sen} x$ que se considera para $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (fig. 136).

Si ahora x e y se cambian de lugar, o sea, si se considera la función $y = \operatorname{arcsen} x$, obtenemos la gráfica representada en la fig. 136 con línea continua. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Cítese un ejemplo de la función no monótona.
2. Dése la definición de la función inversa.
3. ¿En qué se diferencia una función de una función inversa? Ilústrese esto geométricamente.
4. ¿En qué caso una función inversa es una función en sentido corriente y qué se deduce de esto?
5. Enúnciese el teorema de la continuidad de la función inversa.
6. Hállese la función que es inversa a la función $y = \cos x$ dada sobre el segmento $[0, \pi]$. Determínese el dominio de definición y el conjunto de los valores de la función inversa y dibújese su gráfica.
7. ¿Se puede considerar la función $y = \operatorname{sen} x$ como inversa a la función $y = \operatorname{arcsen} x$?