# 5

# CÁLCULO DIFERENCIAL

## § 1. Concepto de derivada

**1. Definición de la derivada.** Supongamos que sobre cierto intervalo $X$ está definida la función $y = f(x)$. Tomemos todo punto $x_0 \in X$ y asignemos al argumento $x$ en el punto $x_0$ un incremento arbitrario $\Delta x$ tal que el punto $x_0 + \Delta x$ también pertenezca a $X$. La función obtiene el incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

**Definición.** *La derivada de una función $y = f(x)$ en el punto $x_0$ es para $\Delta x \to 0$ el límite de la razón entre el incremento de la función en este punto y el del argumento (a condición de que este límite exista).*

Para designar la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x_0$ se utilizan los símbolos $y'(x_0)$ o $f'(x_0)$ (se lee: «i griega prima en el punto $x_0$» o bien «efe prima en el punto $x_0$»).

Así pues. por definición,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Si para cierto valor $x_0$ se cumple la condición

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \left(\text{o bien } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty\right),$$

se dice que en el punto $x_0$ la función tiene una derivada infinita de signo más (o de signo menos). A diferencia de la derivada infinita la derivada de la función antes definida se denomina, a veces *derivada finita.*

Si la función $f(x)$ tiene una derivada finita en cada punto $x \in X$. La derivada $f'(x)$ puede considerarse como función de $x$, también definida sobre $X$.

De la definición de la derivada se deduce también el método de su cálculo.

○ **Ejemplo 1.** Hállese la derivada de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x = x_0$.

**Resolución.** Asignando al argumento $x$ en el punto $x_0$ el incremento $\Delta x$, determinemos el incremento correspondiente de la función:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$
$$= x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Escribamos la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}.$$

Hállese el límite de esta razón para $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0.$$

Por lo tanto, la derivada de la función $f(x)=x^2$ en el punto $x_0$ es igual al número $2x_0$, lo que en las designaciones adoptadas puede escribirse así: $f'(x_0)=2x_0$. ●

**Ejercicios.** Utilizando la definición de la derivada, hallar las derivadas de las funciones siguientes en el punto $x=x_0$: **1.** $f(x)=5x^2$. (*Resp.* $10x_0$.) **2.** $f(x)=x^3$. (*Resp.* $3x_0^2$.) **3.** $f(x)=\sqrt{x}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.\right)$ **4.** $f(x)=\frac{1}{x}$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{1}{x_0^2}.\right)$ **5.** $f(x)=\frac{1}{x^2}$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{2}{x_0^3}.\right)$ **6.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}.\right)$ **7.** $f(x)=\operatorname{sen}2x$. (*Resp.* $2\cos 2x_0$.) **8.** $f(x)=\cos\frac{x}{2}$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{\operatorname{sen}x_0/2}{2}.\right)$ **9.** $f(x)=\frac{1}{2x+1}$. $\left(\textit{Resp.}\ -\frac{2}{(2x_0+1)^2}.\right)$ **10.** $f(x)=\sqrt{1+3x}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{3}{2\sqrt{1+3x_0}}\right)$.

**2. Significado geométrico de la derivada.** Supongamos que la función $f(x)$ está definida y es continua sobre el intervalo $(a, b)$. Sea, luego, que el punto $M$ en la gráfica de la función corresponde a cierto valor del argumento $x_0$ y el punto $P$, al valor $x_0+\Delta x$, donde $\Delta x$ es el incremento del argumento. Tracemos por los puntos $M$ y $P$ la recta y llamémosla *secante*. Designemos con $\varphi(\Delta x)$ el ángulo entre la secante y el eje $Ox$ (fig. 137). Es evidente que este ángulo depende de $\Delta x$. Llamaremos *tangente $S$ a la gráfica de la función $f(x)$* en el punto $M$ la posición límite de la secante $MP$ siempre que el punto $P$ se aproxime indefinidamente en la gráfica al punto $M$ (o bien, que es lo mismo, para $\Delta x\to 0$). De la fig. 137 se deduce que

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\frac{PN}{MN}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Puesto que para $\Delta x\to 0$ la secante $MP$ se convierte en tangente, entonces

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\operatorname{tg}\varphi_0,$$

donde $\varphi_0$ es el ángulo que la tangente forma con el eje $Ox$. Por otro lado,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Por consiguiente, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi_0$. Ahora bien, la *función derivada* $f(x)$ *en el punto* $x_0$ *es igual al coeficiente angular* (pendiente) de la tangente a la gráfica de la función $f(x)$ *en el punto* $M(x_0; f(x_0))$.

○ **Ejemplo 2.** Hállese la pendiente de la tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $M(1/2; 1)$ y el ángulo comprendido entre la tangente en este punto y el eje $Ox$.

**Resolución.** Puesto que la pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $M(1/2; 1)$ es igual al valor de la

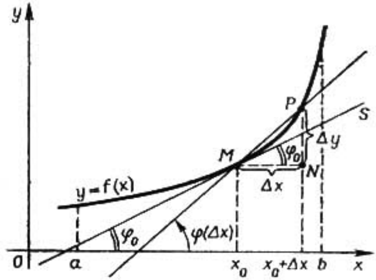


Fig. 137

derivada de esta función en el punto $x_0 = 1/2$, el problema se reduce precisamente a la determinación del valor de la derivada en este punto.

Antes hemos determinado (véase el ejemplo 1) que $f'(x_0) = (x^2)'|_{x=x_0} = 2x_0$. Sustituyendo $1/2$ en vez de $x_0$, obtenemos $f'(1/2) = 2 \cdot 1/2 = 1$. Por consiguiente, la pendiente de la tangente es igual a 1, o sea, $k = 1$ o bien $\operatorname{tg} \varphi_0 = 1$ ($\varphi_0$ es el ángulo comprendido entre la tangente y el eje $Ox$), de donde obtenemos el ángulo buscado: $\varphi_0 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$. ●

Si en cierto punto la derivada es igual a cero ($k = 0$), la tangente a la gráfica de la función en este punto es paralela al eje $Ox$ y en cambio, si la derivada se convierte en infinito ($k = \infty$), esto quiere decir que la tangente en este punto es paralela al eje $Oy$.

○ **Ejemplo 3.** Plantéese la ecuación de la tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $M(1/2; 1)$.

**Resolución.** Para formar la ecuación buscada de la tangente basta escribir la ecuación de la recta (conocida de la geometría analítica) que pasa por el punto dado $M(x_0; y_0)$ y tiene por coeficiente angular $k$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

y en vez de $k$ sustituir el valor de la función derivada $f'(x_0)$. Sustituyendo en la ecuación las coordenadas del punto $M(1/2; 1)$ y el valor de la función derivada $f'(x_0) = f'(1/2) = 1$ (véase el ejemplo 1), obtenemos la ecuación de la tangente buscada

$$y - 1 = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ o bien } y = x + \frac{1}{2}. \quad \bullet$$

**Ejercicio.** Escríbase la ecuación de la tangente a la parábola $f(x) = 4 - x^2$ en el punto de intersección de la misma con el eje $Ox$ para $x > 0$. Constrúyase la parábola y la tangente. (*Resp.* $y = -4x + 8$.)

○ **Ejemplo 4.** Escríbase la ecuación de la tangente trazada del punto $M(1; -3)$ a la parábola $f(x) = x^2$.

**Resolución.** La ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto $(x_0; f(x_0))$ tiene la forma

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Puesto que $f(x_0) = x_0^2$, $f'(x_0) = 2x_0$ (véase el ejemplo 1) y esta recta pasa por el punto $(x; y) = (1; -3)$, de (1) resulta

$$-3 - x_0^2 = 2x_0(1 - x_0).$$

De esta ecuación encontramos $x_0 = -1$ o bien $x_0 = 3$.

Si $x_0 = -1$, entonces $f(x_0) = x_0^2 = 1$, $f'(x_0) = 2x_0 = -2$ y la ecuación de la tangente toma la forma $y - 1 = -2(x + 1)$, o sea, $y = -2x - 1$.

Si $x_0 = 3$, entonces $f(x_0) = 9$, $f'(x_0) = 6$ y la ecuación de la tangente es tal: $y = 6x - 9$.

Ahora bien, por el punto $M(1; -3)$ se pueden trazar dos tangentes a la parábola dada. ●

**Ejercicio.** Escríbanse las ecuaciones de las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ que pasan por el punto $(2; 3/2)$. $\left(\textit{Resp. } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{4}x + 1.\right)$

Nótese que el significado geométrico de la derivada desempeña gran papel en la aclaración de muchos conceptos del análisis matemático y en la resolución de una serie de problemas geométricos.

**3. Significado físico de la derivada.** Supongamos que la función $y = f(t)$ describe la ley de movimiento de un punto material $M$ sobre la línea recta, o sea, $y = f(t)$ es el camino recorrido por el punto a partir del punto de referencia durante el tiempo $t$.

Entonces durante el tiempo $t_0$ el camino recorrido es $y = f(t_0)$ y durante el tiempo $t_1$, el camino es $y = f(t_1)$. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_1 - t_0$ el punto $M$ recorrerá el segmento del camino $\Delta y = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ (fig. 138). La razón $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ se llama *velocidad media del movimiento* ($v_{\text{med}}$) durante el tiempo $\Delta t$, y el límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ para $\Delta t \to 0$ determina la *velocidad instantánea* del punto en el instante de tiempo $t_0$ ($v_{\text{inst}}$).

○ **Ejemplo 5.** Hállese en el instante de tiempo $t_0$ las velocidades media e instantánea de un punto cuyo movimiento rectilíneo se da por la ecuación $y = \sqrt{t}$ (donde $y$ es el camino; $t$, el tiempo, $t \geqslant 0$).

**Resolución.** Durante el tiempo $t_0$ el punto recorrerá el camino $y = \sqrt{t_0}$ y durante el tiempo $t_1$, el camino $y = \sqrt{t_1}$. En el lapso

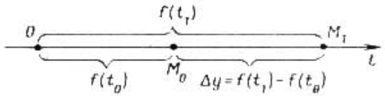


Fig. 138

$\Delta t = t_1 - t_0$ el punto recorrerá el segmento del camino $\Delta y = \sqrt{t_1} - \sqrt{t_0} = \sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}$. Entonces la velocidad media de movimiento del punto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ es igual a

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}}{\Delta t}$$

y la velocidad instantánea del movimiento en el instante de tiempo $t_0$

$$v_{\text{inst}} = y'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\sqrt{t_0 + \Delta t} - \sqrt{t_0})(\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})}{\Delta t(\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t_0 + \Delta t) - t_0}{\Delta t(\sqrt{t_0 + \Delta t} + \sqrt{t_0})} = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}. \quad ●$$

**El concepto de velocidad, tomado de la física, es cómodo al investigar el comportamiento de una función arbitraria. Cualquiera que sea la dependencia expresada por la función $y = f(x)$, la razón $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ es la velocidad media de variación de $y$ respecto a la variación de $x$ e $y'(x_0)$ es la velocidad instantánea de variación de $y$ para cierto $x = x_0$.**

○ **Ejemplo 6.** Hállese la velocidad de un cuerpo en caída libre en el vacío en cierto instante fijo de tiempo $t$.

**Resolución.** De la física se conoce que la ley de la caída libre de un cuerpo en el vacío se define por la fórmula $s = \frac{gt^2}{2}$, donde $g$ es una magnitud constante. Asignemos a cierto valor de $t$ el incremento $\Delta t$; entonces el camino recorrido $s$ obtendrá el incremento

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{2gt\Delta t + g(\Delta t)^2}{2}.$$

La velocidad media de la caída del cuerpo en el intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$ es igual a

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{2gt\Delta t + g(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = \frac{1}{2} g(2t+\Delta t)$$

y la velocidad de la caída del cuerpo en el instante de tiempo $t$

$$v = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} g(2t+\Delta t) = gt.$$

De aquí se deduce, en particular, que la velocidad de un cuerpo en caída libre es proporcional al tiempo de movimiento (de caída). ●

La importancia de la derivada consiste en que al estudiar todos los procesos y fenómenos de la naturaleza con su ayuda se puede estimar la velocidad de variación de las magnitudes vinculadas entre sí.

**4. Derivadas a la derecha y a la izquierda.** Por analogía con el concepto de límite derecho e izquierdo de la función se introducen los conceptos de las derivadas derecha e izquierda de las funciones $f(x)$ en el punto $x_0$.

**Definición.** *Se llama derivada derecha (izquierda) de la función $f(x)$ en el punto $x_0$ al valor límite derecho (izquierdo) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (a condición de que este valor límite exista).*

Designación: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left( f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$.

Si la función $f(x)$ tiene en el punto $x_0$ una derivada, ella tiene en este punto las derivadas a la derecha y a la izquierda que coinciden entre sí.

Al mismo tiempo existen funciones que tienen en el punto dado $x_0$ las derivadas derecha e izquierda pero no tienen la derivada en este punto. De ejemplo de tal función puede servir la función $f(x) = |x|$. Esta función tiene en el punto $x = 0$ la derivada a la derecha igual a $f'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ (para $x \geqslant 0$ $\Delta y = \Delta x$) y la derivada a la izquierda igual a $f'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ (para $x < 0$ $\Delta y = -\Delta x$), pero no tiene en el punto $x = 0$ una derivada, ya que $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, o sea, los límites laterales son distintos (véase el teorema 4.2). Geométricamente esto significa que la gráfica de la función $f(x) = |x|$ en el punto $O(0; 0)$ no tiene una tangente.

**Ejercicio.** Mostrar que la función $f(x) = 3|x| + 1$ no tiene una derivada en el punto $x = 0$.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dese la definición de la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x_0$
2. ¿Cuál es el significado geométrico de la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x_0$?
3. Dese la definición de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0; f(x_0))$ y escriba la ecuación de la tangente.
4. ¿Cuál es el significado físico de la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto $x_0$?
5. Dé la definición de la derivada derecha (izquierda) de la función $y = f(x)$ en el punto $x_0$. ¿Qué relación existe entre las derivadas laterales y la derivada de la función en el punto $x_0$? Cite un ejemplo de la función en la cual existen las derivadas derecha e izquierda en cierto punto, pero no existe la derivada en este punto.

## § 2. Concepto de derivabilidad de una función

**1. Concepto de derivabilidad de una función en un punto dado.** **Definición.** *La función $f(x)$ se llama derivable en el punto $x_0$ si su incremento $\Delta y$ en este punto se puede representar en la forma*

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{1}$$

*donde $A$ es cierto número que no depende de $\Delta x$ y $\alpha(\Delta x)$, la función del argumento $\Delta x$ la cual es infinitamente pequeña para $\Delta x \to 0$, o sea,* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Aclaremos ahora la relación existente entre la derivabilidad en un punto y la existencia de la derivada en este mismo punto.

**Teorema 5.1.** *Para que la función $f(x)$ sea derivable en un punto dado $x_0$ es necesario y suficiente que ella tenga en este punto una derivada finita.*

□ **Demostración. Necesidad.** Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en el punto dado $x_0$, o sea $\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$. Entonces, suponiendo que $\Delta x \neq 0$ y dividiendo la igualdad por $\Delta x$, resulta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A = f'(x_0).$$

De aquí se desprende que la derivada en el punto $x_0$ existe.

**Suficiencia.** Supongamos que existe la derivada $f'(x_0)$, o sea, existe $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Sea $f'(x_0) = A$. Entonces la función $\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - A$ es infinitamente pequeña para $\Delta x \to 0$ (véase el teorema 4.5). De la última igualdad tenemos

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Hemos obtenido la representación (1) y de este modo queda demostrado que la función $f(x)$ es derivable en el punto $x_0$. ■

Ahora bien, para las funciones de una variable la derivabilidad y la existencia de la derivada son conceptos equivalentes. Por eso la operación con la cual se halla la derivada se llama *derivación*.

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición, demostrar que la función $f(x) = x^2$ es derivable en el punto $x = x_0$.

**Resolución.** Escribamos el incremento de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x = x_0$ en la forma (1):

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x = 2x_0\,\Delta x + \\ + \alpha(\Delta x)\,\Delta x\ (A = f'(x_0))$$

(véase el teorema 5.1).

Es necesario mostrar que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Para esto escribamos el incremento de la función en el punto $x_0$ por otro método:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \\ = 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Igualando los segundos miembros, obtenemos $\alpha(\Delta x) = \Delta x$. Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, encontramos que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, lo que se quería mostrar. ●

**Ejercicio.** Utilizando la definición, mostrar que la función $f(x) = x^3$ es derivable en el punto $x = x_0$.

**2. Relación existente entre los conceptos de derivabilidad y de continuidad.**

**Teorema 5.2.** *Si la función $y = f(x)$ es derivable en un punto dado $x_0$, ella también es continua en este punto.*

□ **Demostración.** Puesto que la función $y = f(x)$ es derivable en el punto $x_0$, su incremento en este punto puede ser representado por la relación (1). Entonces, pasando al límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

lo que significa precisamente que la función $y = f(x)$ es continua en el punto $x_0$ conforme a la tercera definición de la continuidad de una función en el punto $x_0$. ■

**Observación.** La afirmación inversa no es justa. Una función puede ser continua en un punto, pero no tener una derivada en este punto.

○ De ejemplo de tal función sirve la función $f(x) = |x|$. Como es sabido, esta función es continua en el punto $x = 0$, pero, según se muestra en el subp. 4 del § 1, no tiene una derivada en este punto, o sea, no es derivable.

La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua sobre toda la recta numérica. Mostremos que en el punto $x = 0$ esta función no es derivable. En efecto, en el punto $x = 0$ al incremento del argumento $\Delta x$ le corresponde el incremento de la función $\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x}$. Por consiguiente.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty.$$

Esto quiere decir que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $x = 0$ no tiene una derivada finita, o sea, no es derivable. La gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $O(0, 0)$ tiene por su tangente el eje $Oy$ cuya pendiente $k = \operatorname{tg} \varphi_0$ no tiene un valor finito, o sea, «se *convierte en infinito*». ●

Si la función $f(x)$ tiene una derivada en cada punto de cierto intervalo en sentido lato (es derivable en cada punto de este intervalo), diremos que la función $f(x)$ tiene una derivada o que es derivable sobre el intervalo indicado.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dése la definición de la derivabilidad de una función en el punto $x_0$.
2. ¿Cuál es la relación entre el concepto de derivabilidad de la función en un punto y el de derivada de la función en este punto? Demuéstrese el teorema correspondiente.
3. *¿Cuál es la relación entre el concepto de derivabilidad de la función en* un punto y el de continuidad de la misma en este punto? Cítese el ejemplo de una función continua en un punto, pero no derivable en este punto.
4. ¿Puede ser continua en un punto una función que tiene la derivada en este mismo punto?

## § 3. Concepto de diferencial

**1. Definición de la diferencial y su significado geométrico.** Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en el punto $x_0$, o sea, el incremento $\Delta y$ se puede escribir en la forma de la suma de dos sumandos:

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. El primer sumando $A\,\Delta x$ es para $\Delta x \to 0$ la infinitésima del mismo orden con $\Delta x$ (muestre esto por sí mismo), es lineal respecto a $\Delta x$. El sumando $\alpha(\Delta x)\,\Delta x$ para $\Delta x \to 0$ es la infinitésima de un orden superior que $\Delta x$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 0\right)$. Ahora bien, el primer sumando es la parte principal del incremento de la función $f(x)$.

**Definición.** *Se llama diferencial de la función $f(x)$ en el punto $x_0$ a la parte principal, lineal respecto a $\Delta x$, del incremento de la función*

$$dy = A\,\Delta x. \tag{1}$$

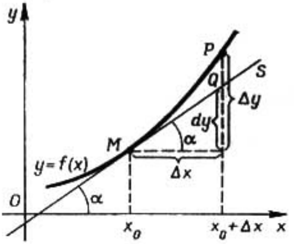


Fig. 139

Si se tiene en cuenta el teorema 5.1, es decir, si se toma en consideración que $A = f'(x_0)$, la fórmula (1) puede escribirse así

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x. \tag{2}$$

Llamaremos diferencial de la variable independiente $x$ al incremento de esta variable: $dx = \Delta x$. Finalmente la relación (2) toma la forma

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{3}$$

Con ayuda de la igualdad (3) la derivada $f'(x_0)$ puede calcularse como razón entre la diferencial de la función $dy$ y la $dx$ de la variable independiente, o sea,

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

La diferencial de la función tiene el significado geométrico.

Supongamos que el punto $M$ en la gráfica de la función $y = f(x)$ corresponde al valor del argumento $x_0$ y el punto $P$, al valor del argumento $x_0 + \Delta x$; la recta $MS$ es la tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $M$ y $\alpha$, el ángulo entre la tangente y el eje $Ox$. Sea, luego, $MN \parallel Ox$, $PN \parallel Oy$ y $Q$, el punto de intersección de la tangente $MS$ con la recta $PN$ (fig. 139). Entonces el incremento de la función $\Delta y$ es igual a la magnitud del segmento $NP$. Al mismo tiempo del triángulo rectangular $MNQ$ obtenemos $NQ = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\,\Delta x = dy$, o sea, la diferencial de la función $dy$ es igual a la magnitud del segmento $NQ$. De la consideración geométrica se ve que las magnitudes de los segmentos $NP$ y $NQ$ son diferentes.

Ahora bien, la diferencial $dy$ de la función $y = f(x)$ en el punto $x_0$ es igual al incremento «de la ordenada de la tangente» $MS$ a la gráfica de esta función en el punto $M(x_0; f(x_0))$ y el incremento de la función $\Delta y$ es el incremento «de la ordenada de la misma función» $y = f(x)$ en el punto $x_0$, incremento correspondiente al del argumento igual a $\Delta x$.

**2. Cálculos aproximados con ayuda de la diferencial.** De la definición de la diferencial se deduce que ésta depende linealmente de $\Delta x$ y es la parte principal del incremento de la función $\Delta y$. Al mismo tiempo $\Delta y$ depende de $\Delta x$ de un modo más complicado. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \times \times (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, mientras que

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}\right) \Delta x = 3x_0^2 \Delta x.$$

Además, para calcular la diferencial se puede hacer uso de la igualdad $dy = f'(x_0)\,dx$. En muchos problemas el incremento de la función en el punto dado se reemplaza, aproximadamente, por la diferencial de la función en este punto

$$\Delta y \approx dy.$$

Con tal reemplazo el error absoluto es igual a $|\Delta y - dy|$ y es para $\Delta x \to 0$ una infinitésima de grado superior que $\Delta x$.

En particular, si $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, entonces $\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 + + 3 \cdot 2 \cdot (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 = 1{,}261$, $dy = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$ y el error absoluto $|\Delta y - dy| = 0{,}061$.

**Ejercicio.** Hallar aproximadamente el incremento $\Delta y$ de la función $f(x) = x^2$ si $x_0 = 2$ y $\Delta x = 0{,}01$. (*Resp.* 0,04.)

○ **Ejemplo.** Mostremos que si el número $\alpha$ es pequeño, se puede utilizar la fórmula aproximada

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

**Resolución.** Efectivamente, tomemos la función $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces, al ser pequeños $\Delta x$,

$$\Delta y = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \approx dy$$

$$\text{o bien } \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \approx (\sqrt{x})' \big|_{x=x_0} \Delta x =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x_0+\Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}\right) \Delta x =$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x) - x_0}{\Delta x\,(\sqrt{x_0+\Delta x} + \sqrt{x_0})}\right) \Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,\Delta x,$$

de donde, poniendo $x_0 = 1$, $\Delta x = \alpha$, resulta

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

En particular, para $\alpha = 0{,}0003$ hallamos $\sqrt{1{,}0003} \approx 1{,}00015$. ●

**Ejercicio.** Deducir la fórmula aproximada $\sqrt{a^2+h} \approx a + h/(2a)$. Hallar aproximadamente $\sqrt{101}$, $\sqrt{1,04}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{33}$. (*Resp.* 10,05; 1,02; 6,41; 2,08; 2,01.)

Ahora examinemos las reglas de derivación y cálculo de las derivadas de funciones elementales simples. Nótese que al deducir las fórmulas y calcular prácticamente las derivadas no suele escribirse $x_0$ sino simplemente $x$, pero en este caso $x$ se considera fijo.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dése la definición de la diferencial de la función en el punto $x_0$.
2. ¿Por qué en la definición de la diferencial la expresión $A\Delta x$ se llama parte principal, lineal respecto a $\Delta x$, del incremento de la función $f(x)$?
3. ¿Cuál es el significado geométrico de la diferencial?

## § 4. Reglas de derivación de la suma, diferencia, producto y cociente

**Teorema 5.3.** *Si las funciones $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son derivables en un punto $x$, la suma, diferencia, producto y cociente de estas funciones (el cociente a condición de que $v(x) \neq 0$) también son derivables en este punto y tienen lugar las siguientes fórmulas:*

$$1.\ (u \pm v)' = u' \pm v', \quad 2.\ (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$3.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{1}$$

□ **Demostración.** Para deducir las fórmulas (1) utilicemos la definición de la derivada, la igualdad evidente $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y$ y el teorema 4.3. Analicemos por separado cada caso:

$$1.\ (u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

$$2.\ (u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x) + \Delta u]\,[v(x) + \Delta v] - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x)\,v(x)+\Delta u v(x)+u(x)\,\Delta v+\Delta u\Delta v-u(x)\,v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+$$

$$+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=v\cdot u'+uv'+0\cdot u'=u'v+uv',$$

ya que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ y los factores $u$ y $v$ son constantes y no dependen de $\Delta x$.

3. $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\,v(x)-u(x)\,v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)\,v(x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u]\,v(x)-u(x)\,[v(x)+\Delta v]}{\Delta x v(x)\,[v(x)+\Delta v]}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{uv+\Delta uv-uv-u\Delta v}{\Delta xv(v+\Delta v)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}=$$

$$=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \quad ■$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. *Dense las reglas de derivación de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.*

2. *¿Qué se puede decir si están cumplidas todas las suposiciones del teorema sobre las reglas de derivación, a excepción de la suposición $v(x)\neq 0$, es decir, que da cumplida la hipótesis de que $v(x)=0$?*

3. *¿Por qué al demostrar las reglas de derivación del producto y el cociente $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$?*

## § 5. Cálculo de las derivadas de funciones constante, potencial, de las funciones trigonométricas y de una función logarítmica

**1. Derivada de una función constante.** La derivada de la función *$y=f(x)=C$, donde $C$ es un número constante, se expresa por la fórmula*

$$y'=0.$$

□ **Demostración.** Para cualesquiera $x$ y $\Delta x$ tenemos $f(x+\Delta x)=C$ y $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=0$. De aquí para cada

$\Delta x \neq 0$ la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ y, por consiguiente,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0. \quad \blacksquare$$

**Observación.** El factor constante puede sacarse fuera del signo de la derivada, es decir, $(Cu)' = Cu'$. Efectivamente, si $v = C$ ($C$ = const), conforme a la fórmula 2 (véase el teorema 5.3) $(Cu)' = (C)'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'$, lo que se necesitaba demostrar.

**2. Derivada de una función potencial.** La derivada de la función $y = x^n$, *cuyo exponente* $n$ *es un número positivo entero, se expresa por la fórmula*

$$y' = nx^{n-1}.$$

□ **Demostración.** Utilizando la fórmula del binomio de Newton se puede escribir

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} n^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^2\right] - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Ahora bien, para $\Delta x \neq 0$ tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n+1)}{2!} x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

Puesto que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 0, \quad \ldots, \quad \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} = 0,$$

entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}. \quad \blacksquare$$

**Observación.** El caso de la función potencial cuyo exponente es todo número real se considerará en el subp. 2 del § 9.

**3. Derivadas de funciones trigonométricas.**

1) *La derivada de la función* $y = \operatorname{sen} x$ *se expresa por la fórmula*

$$y' = \cos x.$$

□ **Demostración.** Tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2).$$

Ahora bien, para $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen}(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cos(x + \Delta x/2).$$

Puesto que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\text{sen}\,(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=1$ (*primer límite notable*) y $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x$ en virtud de la continuidad de la función $\cos x$, entonces

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos x. \quad \blacksquare$$

2) *La derivada de la función* $y=\cos x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'=-\text{sen}\,x.$$

□ **Demostración.** Tenemos

$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\,\text{sen}\,(\Delta x/2)\,\text{sen}\,(x+\Delta x/2)$.

Ahora bien, para $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2\,\text{sen}\,(\Delta x/2)\,\text{sen}\,(x+\Delta x/2)}{\Delta x}=-\frac{\text{sen}\,(\Delta x/2)}{\Delta x/2}\,\text{sen}\,(x+\Delta x/2).$$

Puesto que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\text{sen}\,x$ en virtud de la continuidad de la función $\text{sen}\,x$, entonces

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\text{sen}\,x. \quad \blacksquare$$

3) *La derivada de la función* $y=\text{tg}\,x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}\left(x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi\right).$$

□ **Demostración.** Puesto que $\text{tg}\,x=\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$, conforme al teorema 5.3 resulta

$$y'=\frac{(\text{sen}\,x)'\cos x-\text{sen}\,x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\text{sen}\,x\,(-\text{sen}\,x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\text{sen}^2 x}{\cos^2 x},$$

por lo tanto,

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}. \quad \blacksquare$$

4) *La derivada de la función* $y=\text{ctg}\,x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'=-\frac{1}{\text{sen}^2 x}\,(x\neq n\pi).$$

□ **Demostración.** Puesto que $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, entonces, análogamente a lo precedente,

$$y' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - \cos x (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{(-\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x},$$

por lo tanto,

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \blacksquare$$

**4. Derivada de una función logarítmica.** *La derivada de la función* $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ *se expresa mediante la fórmula*

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

□ **Demostración.** Tenemos

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Así pues, para $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

o bien

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right].$$

Poniendo $\frac{x}{\Delta x} = h$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = e$$

(*segundo límite notable*) y puesto que la función logarítmica es continua, entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right] = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \blacksquare$$

**Corolario.** *Si* $y = \log_e x = \ln x$, *entonces* $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

○ **Ejemplo.** Utilizando las reglas y fórmulas de derivación, hallar la derivada de la función $f(x) = 5 + x^3 + 3x^2 + \operatorname{sen} x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + \log_2 x + 3 \ln x$.

**Resolución.** Tenemos

$$f'(x) = (5 + x^3 + 3x^2 + \operatorname{sen} x + \cos x + 2 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x + \log_2 x + 3 \ln x)' =$$

$$= (5)' + (x^3)' + 3(x^2)' + (\operatorname{sen} x)' + (\cos x)' + 2(\operatorname{tg} x)' - 3(\operatorname{ctg} x)' +$$

$$+ (\log_2 x)' + 3(\ln x)' = 3x^2 + 6x + \cos x - \operatorname{sen} x +$$

$$+ \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{x} \log_2 e + \frac{3}{x}. \bullet$$

**Ejercicios.** Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x)=4x^5-3\operatorname{sen} x+5\operatorname{ctg} x$. $\left(Resp.\ 20x^4-3\cos x-\frac{5}{\operatorname{sen}^2 x}.\right)$
2. $f(x)=\log_2 x+3\log_3 x$. $\left(Resp.\ \frac{\ln 24}{x\ln 2\ln 3}.\right)$
3. $f(x)=4\cos x-2\operatorname{tg} x+3$. $\left(Resp.\ -4\operatorname{sen} x-\frac{2}{\cos^2 x}.\right)$
4. $f(x)=5\ln x-7\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$. $\left(Resp.\ \frac{5}{x}+7\operatorname{sen} x-\right.$ $\left.-4\operatorname{ctg} 2x.\right)$
5. $f(x)=x\operatorname{sen} x$. $(Resp.\ \operatorname{sen} x+x\cos x.)$
6. $f(x)=x^2\operatorname{tg} x$. $(Resp.\ x(\operatorname{sen} 2x+x)\sec^2 x.)$
7. $f(x)=x^2\log_3 x$. $\left(Resp.\ x\frac{2\ln x+1}{\ln 3}.\right)$
8. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. $\left(Resp.\ \frac{4x}{(x^2+1)^2}.\right)$
9. $f(x)=\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}+x\operatorname{ctg} x$. $\left(Resp.\ \frac{\operatorname{sen} x-x^2+x\cos x(\operatorname{sen} x-\ln x)}{x\operatorname{sen}^2 x}.\right)$
10. $f(x)=\frac{\cos x}{1+2\operatorname{sen} x}$. $\left(Resp.\ -\frac{2+\operatorname{sen} x}{(1+2\operatorname{sen} x)^2}.\right)$
11. $f(x)=\frac{x\operatorname{tg} x}{1+x^2}$. $\left(Resp.\ \frac{(1+x^2)(\operatorname{sen} x\cos x+x)-x^2\operatorname{sen} 2x}{(1+x^2)^2\cos^2 x}.\right)$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dedúzcanse las fórmulas para las derivadas de las funciones constante, potencial, trigonométricas y de la función logarítmica.
2. ¿Por qué al deducir la fórmula de la derivada de una función logarítmica los signos de la función y del límite cambiaron de lugar?

## § 6. Teorema de la derivada de una función inversa

Sea que la función $y=f(x)$ satisface las hipótesis del teorema 4.15 de la función inversa y la función $x=\varphi(y)$ es inversa para ella. Entonces tiene lugar el siguiente teorema.

**Teorema 5.4.** *Si la función $y=f(x)$ tiene en el punto $x_0$ la derivada $f'(x_0)\neq 0$, la función inversa $x=\varphi(y)$ también tiene en el punto correspondiente $y_0=f(x_0)$ una derivada, con la particularidad de que*

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

□ **Demostración.** Asignemos al argumento $y$ de la función inversa $x=\varphi(y)$ cierto incremento $\Delta y\neq 0$ en el punto $y_0$. La función $x=\varphi(y)$ obtendrá cierto incremento $\Delta x$, con la particularidad de que, en virtud de crecimiento (o decrecimiento) de la función inversa, $\Delta x \neq 0$. Por consiguiente, se puede escribir

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Pasemos en esta igualdad al límite para $\Delta y \to 0$. Puesto que la función inversa $x=\varphi(y)$ es continua en el punto $y_0$ (véase el teorema 4.15), entonces $\Delta x \to 0$ para $\Delta y \to 0$. Pero para $\Delta x \to 0$ el límite del segundo miembro de la igualdad existe y es igual a $1/f'(x_0)$. Por lo tanto, existe también el límite del primer miembro de la igualdad el cual, por definición, es igual a $\varphi'(y_0)$. De esta manera, resulta

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \quad \blacksquare \qquad (1)$$

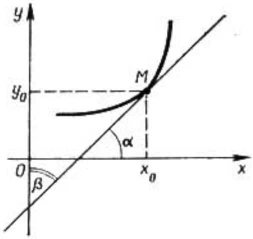


Fig. 140

El teorema demostrado tiene una interpretación geométrica sencilla. Consideremos en cierto entorno del punto $x_0$ la gráfica de la función $y=f(x)$ (o bien de la función inversa $x=\varphi(y)$). Supongamos que en esta gráfica al punto $x_0$ le corresponde el punto $M$ (fig. 140). Como es sabido, la derivada $f'(x_0)$ es igual a la tangente del ángulo $\alpha$ de inclinación de la recta tangente, que pasa por el punto $M$, al eje $Ox$. La derivada de la función inversa $\varphi'(y_0)$ es igual a la tangente del ángulo $\beta$ de inclinación de la misma recta tangente al eje $Oy$. Puesto que la suma de los ángulos $\alpha$ y $\beta$ vale $\pi/2$, la fórmula (1) expresa el siguiente hecho evidente:

$$\varphi'(y_0)=\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema sobre la derivada de la función inversa.
2. ¿Qué se puede decir de la derivada de la función inversa si $f'(x_0)=0$? Cítese un ejemplo de tal caso.
3. ¿Cuál es el significado geométrico del teorema sobre la derivada de la función inversa?

## § 7. Cálculo de las derivadas de una función exponencial y de funciones trigonométricas inversas

Apoyándonos en el teorema 5.4 demostrado anteriormente, continuemos el cálculo de las derivadas de funciones elementales simples.

**1. Derivada de una función exponencial.** *La derivada de la función* $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ *se expresa por la fórmula*

$$y' = a^x \ln a.$$

□ **Demostración.** La función exponencial $y = a^x$ es inversa para la función logarítmica $x = \log_a y$. Así pues,

$$x'(y) = \frac{1}{y} \log_a e$$

y en virtud del teorema 5.4 sobre la derivada de la función inversa y de la relación conocida de la matemática elemental $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, obtenemos

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a. \quad \blacksquare$$

**Corolario.** *Si* $y = e^x$, *entonces* $y' = (e^x)' = e^x$.

**2. Derivadas de funciones trigonométricas inversas.**

1) *La derivada de la función* $y = \operatorname{arcsen} x$ *se expresa mediante la fórmula*

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

□ **Demostración.** La función $y = \operatorname{arcsen} x$ es inversa para la función $x = \operatorname{sen} y$. Puesto que $x'(y) = \cos y$, conforme al teorema 5.4 sobre la derivada de la función inversa, resulta

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}.$$

La raíz se ha tomado con el signo más, porque $\cos y$ es positivo sobre el intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} y = x$, finalmente obtenemos

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \blacksquare$$

2) *La derivada de la función* $y = \arccos x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La **demostración** es análoga a la precedente.

3) *La derivada de la función* $y = \operatorname{arctg} x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

□ **Demostración.** La función $y = \operatorname{arctg} x$ es inversa para la función $x = \operatorname{tg} y$. Puesto que $x'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$, entonces

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 y.$$

Pero $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, por consiguiente,

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad \blacksquare$$

4) *La derivada de la función* $y = \operatorname{arcctg} x$ *se expresa por la fórmula*

$$y'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

La **demostración** es análoga a la precedente.

○ **Ejemplo.** Utilizando las reglas y fórmulas de derivación, hallar la derivada de la función $f(x) = 5^x + \operatorname{arcsen} x + 3 \arccos x + \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcctg} x$.

**Resolución.** Tenemos

$$f'(x) = (5^x + \operatorname{arcsen} x + 3 \arccos x + \operatorname{arctg} x - 3 \operatorname{arcctg} x)' =$$

$$= (5^x)' + (\operatorname{arcsen} x)' + 3(\arccos x)' + (\operatorname{arctg} x)' - 3(\operatorname{arcctg} x)' =$$

$$= 5^x \ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{1+x^2} =$$

$$= 5^x \ln 5 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{1+x^2}. \quad \bullet$$

**Ejercicios.** Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \operatorname{arcsen} x + 6^x + 5 \arccos x$. $\left(\textit{Resp. } 6^x \ln 6 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}.\right)$
2. $f(x) = x \arccos x$. $\left(\textit{Resp. } \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\right)$
3. $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$. $\left(\textit{Resp. } \frac{2}{1+x^2}.\right)$
4. $f(x) = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} x$. $\left(\textit{Resp. } 4e^x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\right)$
5. $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. $\left(\textit{Resp. } \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}.\right)$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Redúzcanse las fórmulas de las derivadas para la función exponencial y las funciones trigonométricas inversas.
2. ¿Por qué al deducir la fórmula de la derivada para la función exponencial la función $y = a^x$ es inversa para la función $x = \log_a y$?

## § 8. Regla de derivación de una función compuesta. Diferencial de una función compuesta

### 1. Regla de derivación de una función compuesta.

**Teorema 5.5.** *Si la función* $x = \varphi(t)$ *tiene una derivada en el punto* $t_0$ *y la función* $y = f(x)$ *tiene una derivada en el punto correspondiente* $x_0 = \varphi(t_0)$, *la función compuesta* $f[\varphi(t)]$ *tiene una derivada* *en el punto $t_0$ y es válida la siguiente fórmula:*

$$y'(t_0) = f'(x_0)\,\varphi'(t_0). \tag{1}$$

□ **Demostración.** Puesto que la función $y = f(x)$ se supone derivable en el punto $x_0$, el incremento de esta función puede escribirse en la forma

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{2}$$

donde $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Dividiendo la igualdad (2) por $\Delta t$, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3}$$

La igualdad (3) es válida para cualesquiera $\Delta x$ suficientemente pequeños. Tomemos $\Delta x$ igual al incremento de la función $x = \varphi(t)$, correspondiente al incremento $\Delta t$ del argumento $t$. Hagamos que en esta igualdad $\Delta t$ tienda a cero. Puesto que, según la hipótesis, la función $x = \varphi(t)$ tiene en el punto $t_0$ una derivada, ella es continua en este punto. Por consiguiente, conforme a la tercera definición de la continuidad de una función, $\Delta x \to 0$ cuando $\Delta t \to 0$. Pero en este caso también $\alpha(\Delta x)$ tenderá a cero, o sea, resulta

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \cdot \varphi'(t_0) = 0. \tag{4}$$

De la relación (4) se desprende la existencia del límite de todo el segundo miembro de la igualdad (3) para $\Delta t \to 0$, igual a $f'(x_0) \times \varphi'(t_0)$. Por lo tanto, existe el límite para $\Delta t \to 0$ también en el primer miembro de la igualdad (3), el cual, por definición de la derivada, es igual a la derivada de la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$. De este modo queda demostrada la derivabilidad de la función compuesta y determinada la validez de la fórmula (1). ■

**Observación.** En el teorema dado hemos considerado una función compuesta donde $y$ depende de $t$ por medio de la variable intermedia $x$. Es posible también una dependencia más complicada: con dos, tres y más variables independientes, pero la regla de derivación queda anterior.

Así, por ejemplo, si $y = f(x)$, donde $x = \varphi(u)$, $u = \psi(v)$ y $v = \chi(t)$, la derivada $y'(t)$ ha de buscarse con ayuda de la fórmula

$$y'(t) = y'(x)\,x'(u)\,u'(v)\,v'(t). \tag{5}$$

Consideremos los ejemplos de derivación de las funciones compuestas.

○ **Ejemplo 1.** Calcular la derivada de la función $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

**Resolución.** La función dada puede representarse en la forma $y = e^u$, donde $u = \operatorname{arctg} x$. Entonces, de acuerdo con la fórmula (1)

$$y'(x)=y'(u)\,u'(x)=e^u\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Reemplazando $u$ por $\operatorname{arctg} x$, finalmente obtenemos

$$y'=e^{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

**Ejemplo 2.** Calcular la derivada de la función $y=\operatorname{tg}^2(x^2+1)$.

**Resolución.** La función dada puede representarse en la forma $y=u^2$, donde $u=\operatorname{tg} v$ y $v=x^2+1$. Utilizando la fórmula (5), tenemos

$$y'(x)=y'(u)\,u'(v)\,v'(x)=(u^2)'\,(\operatorname{tg} v')\,(x^2+1)'=2u\sec^2 v\cdot 2x=$$
$$=2\operatorname{tg}(x^2+1)\sec^2(x^2+1)\cdot 2x=4x\operatorname{tg}(x^2+1)\sec^2(x^2+1).$$

Sin duda, no es indispensable hacer las notaciones tan detalladas. Por lo general, el resultado ha de escribirse inmediatamente, guardando sucesivamente en la memoria los argumentos intermedios.

Así, por ejemplo, el cálculo de la derivada en el último ejemplo se puede escribir en la siguiente forma:

$$y'(x)=2\operatorname{tg}(x^2+1)\frac{1}{\cos^2(x^2+1)}\cdot(x^2+1)'=$$
$$=2\operatorname{tg}(x^2+1)\sec^2(x^2+1)\cdot 2x=4x\operatorname{tg}(x^2+1)\sec^2(x^2+1).$$

**Ejercicios.** Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

1. $f(x)=\operatorname{sen} 3x$. (*Resp.* $3\cos 3x$.)
2. $f(x)=\operatorname{sen}(x^2+5x+2)$. (*Resp.* $(2x+5)\cos(x^2+5x+2)$.)
3. $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$. (*Resp.* $\operatorname{sen} 2x$.)
4. $f(x)=\operatorname{sen}^3 x$. (*Resp.* $3\operatorname{sen}^2 x\cos x$.)
5. $f(x)=\cos^{100} x$. (*Resp.* $-100\operatorname{sen} x\cos^{99} x$.)
6. $f(x)=\operatorname{tg}(x^2+3)$. $\left(\textit{Resp. } \dfrac{2x}{\cos^2(x^2+3)}.\right)$
7. $f(x)=\ln\operatorname{sen} x$. (*Resp.* $\operatorname{ctg} x$.)
8. $f(x)=\ln\operatorname{tg} 5x$. $\left(\textit{Resp. } \dfrac{10}{\operatorname{sen} 10x}.\right)$
9. $f(x)=e^{\operatorname{tg} x}$. (*Resp.* $e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x$.)
10. $f(x)=\ln(x^2+2x)$. $\left(\textit{Resp. } \dfrac{2(x+1)}{x(x+2)}.\right)$
11. $f(x)=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. (*Resp.* $\operatorname{arctg} x$.)
12. $f(x)=\operatorname{sen}^2 x^3$. (*Resp.* $3x^2\operatorname{sen} 2x^3$.)
13. $f(x)=\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5}$. $\left(\textit{Resp. } \dfrac{5}{8}\operatorname{tg} 2x\cdot\sec^{10} 2x.\right)$
14. $f(x)=\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x$. (*Resp.* $-\operatorname{sen} 4x$.)
15. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}+\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$. $\left(\textit{Resp. } \dfrac{-2\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}.\right)$
16. $f(x)=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}$. (*Resp.* $3\cdot 2^{3x}\ln 2+5x^4-2xe^{-x^2}$.)
17. $f(x)=x^2e^{-x}$. (*Resp.* $xe^{-x}(2-x)$.)
18. $f(x)=(x+2)e^{-x^2}$. (*Resp.* $e^{-x^2}(1-2x^2-4x)$.)

19. $f(x)=e^{\frac{1}{\cos x}}$. $\left(Resp.\ e^{\frac{1}{\cos x}}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.\right)$

20. $f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}}$. $\left(Resp.\ \frac{-e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}.\right)$

21. $f(x)=10^{3-\operatorname{sen}^3 2x}$. $(Resp.\ 10^{3-\operatorname{sen}^3 2x}\ln 10\cdot(-3\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}4x).)$

22. $f(x)=\operatorname{sen}(2^x)$. $(Resp.\ 2^x(\ln 2)\cos 2^x.)$

23. $f(x)=\arccos(1-2x)$. $\left(Resp.\ \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.\right)$

24. $f(x)=\operatorname{arcsen}(e^{4x})$. $\left(Resp.\ \frac{4e^{4x}}{\sqrt{1-e^{8x}}}.\right)$

25. $f(x)=\operatorname{arctg}\ln(5x+3)$. $\left(Resp.\ \frac{5}{(5x+3)[1+\ln^2(5x+3)]}.\right)$

26. $f(x)=\operatorname{arcctg}^2\frac{1}{x}$. $\left(Resp.\ \frac{2\operatorname{arcctg}(1/x)}{1+x^2}.\right)$

27. $f(x)=\operatorname{tg}\operatorname{sen}\cos x$. $\left(Resp.\ \frac{-\operatorname{sen}\cos(\cos x)}{\cos^2(\operatorname{sen}\cos x)}.\right)$

28. $f(x)=\ln^5\operatorname{sen} x$. $(Resp.\ 5\operatorname{ctg} x\cdot\ln^4\operatorname{sen} x.)$

**2. Diferencial de una función compuesta.** Usted ya sabe que si $x$ es una variable independiente, la diferencial de la función derivable $y=f(x)$ tiene la siguiente forma

$$dy=f'(x)\,dx. \tag{6}$$

□ Ahora vamos a mostrar que esta forma es universal y válida también en el caso cuando $x$ no es una variable independiente sino la función derivable de cierta variable independiente $t$, o sea, $y$ es una función compuesta de $t$. Efectivamente, sea $y=f(x)$ y $x=\varphi(t)$: $y=f[\varphi(t)]$. Entonces, puesto que el argumento $t$ es variable independiente, para la función compuesta indicada $y=f[\varphi(t)]$ y para la función $x=\varphi(t)$ las diferenciales son representables en la forma (6)

$$dy=\{f[\varphi(t)]\}'\,dt,\quad dx=\varphi'(t)\,dt. \tag{7}$$

Conforme a la regla de derivación de una función compuesta

$$\{f[\varphi(t)]\}'=f'(x)\cdot\varphi'(t). \tag{8}$$

Sustituyendo (8) en la primera de las fórmulas (7), resulta

$$dy=f'(x)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

y ya que, según la segunda fórmula (7), $\varphi'(t)\,dt=dx$, finalmente encontramos

$$dy=f'(x)\,dx$$

que coincide con (6), conforme se quería demostrar. ■

De esta manera, hemos obtenido que la fórmula (6) es justa también para la función compuesta. Esta propiedad de la dif de una función compuesta suele llamarse *invariancia de su forma*.

○ **Ejemplo 3.** Hallar la diferencial de la función compuesta $y = \operatorname{sen} x$, donde $x = t^2$.

**Resolución.** Por la fórmula (6) tenemos

$$dy = (\operatorname{sen} x)'\, dx = \cos x\, dx$$

y ya que $x = t^2$, $dx = (t^2)'\, dt = 2t\, dt$, entonces, sustituyendo en la expresión para $dy$, finalmente obtenemos

$$dy = 2t \cos t^2\, dt. \quad ●$$

Introduzcamos luego los conceptos de diferencial segunda y de diferenciales sucesivas de la función $y = f(x)$ que ya no poseen la propiedad de invariancia de la forma. Por eso la propiedad demostrada se llama también *invariancia de la forma de la diferencial primera*.

### PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de la derivada de una función compuesta.
2. ¿Es aplicable el teorema de la derivada de una función compuesta a la función $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ en el punto $x = 0$? ¿Existe la derivada de esta función en el punto $x = 0$?

## § 9. Derivada logarítmica. Derivada de una función potencial con todo exponente real. Tabla de las derivadas de las funciones elementales simples

**1. Concepto de derivada logarítmica de una función.** Calculemos la derivada de la función $y = \ln|x|$ $(x \neq 0)$. Puesto que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ y $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}$ (hemos obtenido la última igualdad basándonos en la regla de derivación de una función compuesta), la derivada de la función se expresa por la siguiente fórmula:

$$y' = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta la función obtenida (1), calculemos la derivada de la función compuesta $y = \ln|u|$, donde $u = f(x)$ es la función derivable. Tenemos

$$y' = (\ln|u|)' = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

o bien

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{2}$$

La derivada del logaritmo de la función $(\ln|f(x)|)'$ se llama precisamente *derivada logarítmica* de la función $f(x)$. Para simplificar la notación en caso de la derivación logarítmica el signo del módulo en la función $f(x)$ puede omitirse.

A título de ejemplo calculemos con ayuda de la derivada logarítmica la derivada de la función potencial-exponencial $y = u(x)^{v(x)}$, donde $u$ y $v$ son ciertas funciones de $x$ ($u > 0$) que tienen en el punto dado las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$.

Puesto que $\ln y = v(x) \ln u(x)$, por la fórmula (2) obtenemos

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Teniendo en cuenta que $y = u(x)^{v(x)}$, encontramos la siguiente fórmula para la derivada de la función potencial-exponencial:

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]. \tag{3}$$

○ **Ejemplo 1.** Calcular la derivada de la función $y = x^x$.

**Resolución.** La función dada puede representarse en la forma $y = u(x)^{v(x)}$, donde $u(x) = x$ y $v(x) = x$. Utilizando la fórmula (3), obtenemos

$$y' = x^x \left[ 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right] = x^x (\ln x + 1). \quad \bullet$$

**Ejercicios.** Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$. $\left( \textit{Resp.}\ x^{\operatorname{sen} x} \left[ \cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right]. \right)$
2. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x}$. $\left( \textit{Resp.}\ (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x} \left( \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right). \right)$
3. $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$. $\left( \textit{Resp.}\ (\cos x)^{\operatorname{sen} x} \left( \cos x \cdot \ln \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \right). \right)$

La derivada de la función potencial-exponencial $y = u(x)^{v(x)}$ puede ser calculada también por otro método. Representemos la función en la forma $y = e^{v(x) \ln u(x)}$ y calculemos $y'$:

$$y' = [e^{v(x) \ln u(x)}] = e^{v(x) \ln u(x)} [v(x) \ln u(x)]' =$$
$$= y \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

Sustituyendo $y = u(x)^{v(x)}$, retornamos a la fórmula (3).

La derivada logarítmica es muy cómoda para determinar la derivada de una función potencial con todo exponente real.

**2. Derivada de una función potencial con todo exponente real.** *La derivada de la función $y = x^\alpha$ ($\alpha$ es todo número real) se define por medio de la fórmula*

$$y' = \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{4}$$

□ **Demostración.** Puesto que $y = x^\alpha$, entonces

$$\ln y = \alpha \ln x.$$

Utilizando la fórmula (2), resulta

$$\frac{y'}{y}=[\alpha \ln x]'=\frac{\alpha}{x}.$$

De aquí, teniendo en cuenta que $y=x^{\alpha}$, obtenemos la fórmula para la derivada de la función potencial:

$$y'=(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}. \quad \blacksquare$$

○ **Ejemplo 2.** Calcular la derivada de la función $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$.

**Resolución.** Representemos la función dada en la forma $f(x)=(1+\cos^2 x)^{1/2}$. Utilizando la fórmula (4), obtenemos

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{1/2-1}\cdot 2\cos x\cdot(\cos x)'=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x)^{-1/2}2\cos x(-\operatorname{sen} x)=-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}. \quad \bullet$$

**Ejercicios.** Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x)=x^{1/x}$. (*Resp.* $x^{1/x-2}(1-\ln x)$.)
2. $f(x)=\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}+2$. $\left(Resp.\ \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}-\frac{10}{x^3}+\frac{9}{x^4}.\right)$
3. $f(x)=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. $\left(Resp.\ \frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right).\right)$
4. $f(x)=\sqrt[7]{x}\ln x$. $\left(Resp.\ \frac{\ln x+7}{7\sqrt[7]{x^6}}.\right)$
5. $f(x)=\sqrt{x}\operatorname{arcctg} x$. $\left(Resp.\ \frac{\operatorname{arcctg} x}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}.\right)$
6. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}.\right)$
7. $f(x)=\sqrt{2x-\operatorname{sen} 2x}$. $\left(Resp.\ \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2x-\operatorname{sen} 2x}}.\right)$
8. $f(x)=\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)$. $\left(Resp.\ \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.\right)$
9. $f(x)=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x\right)$. (*Resp.* $\sqrt{1-x^2}$.)
10. $f(x)=x\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}$. (*Resp.* $\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}$.)
11. $f(x)=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}+\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. $\left(Resp.\ \frac{-2\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}.\right)$
12. $f(x)=e^{\sqrt[7]{x^2}}$. $\left(Resp.\ \frac{2e^{\sqrt[7]{x^2}}}{7\sqrt[7]{x^5}}.\right)$
13. $f(x)=\ln\left(\operatorname{sen} x+\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}\right)$. $\left(Resp.\ \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}.\right)$
14. $f(x)=\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.\right)$

15. $f(x)=\sqrt[5]{\ln \operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{20}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{\sqrt[5]{\ln^4 \operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}}.\right)$

16. $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$. $\left(Resp.\ \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}.\right)$

17. $f(x)=\ln(x\operatorname{sen} x\cdot\sqrt{1-x^2})$. $\left(Resp.\ \frac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\frac{x}{1-x^2}.\right)$

18. $f(x)=\sqrt[5]{\operatorname{arctg} e^{5x}}$. $\left(Resp.\ \frac{e^{5x}}{(1+e^{10x})\cdot\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^4 e^{5x}}}.\right)$

Por lo tanto hemos calculado las derivadas de todas las funciones elementales simples y podemos hacer la siguiente tabla.

**3. Tabla de las derivadas de las funciones elementales simples.**

I. $(C)'=0$.

II. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, en particular, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$, en particular $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

IV. $(a^x)'=a^x\ln a$, en particular $(e^x)'=e^x$.

V. $(\operatorname{sen} x)'=\cos x$.

VI. $(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$.

VII. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

VIII. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

IX. $(\operatorname{arcsen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

La tabla indicada junto con las reglas de derivación de la suma, diferencia, producto y cociente, así como junto con la regla de derivación de una función compuesta constituye la base del cálculo diferencial.

De las reglas y fórmulas de derivación se puede sacar una conclusión importante: *la derivada de toda función elemental es también una función elemental.* Ahora bien, la operación de derivación no hace salir de la clase de funciones elementales.

En el subp. 1 del § 3 queda determinado que la diferencial $dy$ de la función $y=f(x)$ es siempre igual a la derivada de esta función $f'(x)$ multiplicada por la diferencial del argumento $dx$. Por eso las fórmulas citadas para determinar las derivadas pueden transformarse fácilmente en fórmulas para determinar las diferenciales de las funciones elementales simples:

1. $d(C) = 0 \cdot dx = 0$ ($C = \text{const}$).
2. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot dx$.
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e \cdot dx$.
4. $d(a^x) = a^x \ln a \cdot dx$.
5. $d(\text{sen}\, x) = \cos x\, dx$.
6. $d(\cos x) = -\text{sen}\, x\, dx$.
7. $d(\text{tg}\, x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$.
8. $d(\text{ctg}\, x) = -\frac{dx}{\text{sen}^2 x}$.
9. $d(\text{arcsen}\, x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $d(\text{arctg}\, x) = \frac{dx}{1+x^2}$.
12. $d(\text{arcctg}\, x) = -\frac{dx}{1+x^2}$.

Las fórmulas para determinar las diferenciales de la suma, diferencia, producto y cociente de las funciones tienen la forma

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d(uv) = u\, dv + v\, du;$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}.$$

Limitémonos por la deducción de la fórmula del producto. (Proponemos que el lector mismo deduzca las demás fórmulas.) Según la definición de la diferencial tenemos

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')\, dx = vu'\, dx + uv'\, dx = v du + u dv,$$

ya que $u'dx = du$ y $v'dx = dv$.

○ **Ejemplo 3.** Hallar la diferencial de la función $y = x^3$ sen $3x$.

**Resolución.** Según la fórmula recién demostrada tenemos

$$dy = x^3 d\,(\text{sen}\, 3x) + \text{sen}\, 3x\, d\,(x^3) = x^3\,(\text{sen}\, 3x)'\, dx +$$
$$+ \text{sen}\, 3x\,(x^3)'\, dx = x^3 3 \cos 3x\, dx +$$
$$+ \text{sen}\, 3x\, 3x^2\, dx = 3x^2\,(x \cos 3x + \text{sen}\, 3x)\, dx. \quad \bullet$$

### PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿En qué consiste el procedimiento de la derivación logarítmica?
2. Dedúzcase la fórmula de la derivada para una función potencial con todo exponente real.
3. ¿Por qué la operación de derivación no hace salir de la clase de funciones elementales?
4. Demuéstrese que $d(u \pm v) = du \pm dv$.

## § 10. Derivadas y diferenciales de orden superior

**1. Concepto de derivada de $n$-ésimo orden.** Como ya hemos señalado en el § 1 del capítulo dado, la misma derivada $f'(x)$ de la función $y = f(x)$ es cierta función del argumento $x$. Por consiguiente, respecto a ella se puede otra vez poner la cuestión acerca de la existencia de la derivada y su determinación.

Llamaremos $f'(x)$ *derivada de primer orden*.

La derivada de la derivada de cierta función se llama *derivada de segundo orden* (o *segunda derivada*). La derivada de la segunda derivada se denomina *derivada de tercer orden* (o *tercera derivada*), etc. Las derivadas, comenzando con la segunda, se llaman derivadas de orden superior y se designan $y''$, $y'''$, $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, . . ., $y^{(n)}$, . . ., o bien $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, . . ., $f^{(n)}(x)$, . . . .

La derivada de $n$-ésimo orden es derivada de la derivada de orden $(n-1)$ o sea, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Las derivadas de orden superior tienen amplia aplicación en la física. Aquí nos limitaremos por la interpretación física de la segunda derivada $f''(x)$. Si la función $y = f(x)$ describe la ley del movimiento de un punto material sobre la línea recta, entonces, como se sabe, la primera derivada $f'(x)$ es la velocidad instantánea del punto en el instante de tiempo $x$ y la segunda derivada en tal caso es igual a la velocidad de variación de la velocidad, o sea, a la aceleración del punto en movimiento en el instante $x$.

**Ejercicios.** Hallar las derivadas de segundo orden de las *siguientes funciones:* **1.** $f(x) = e^{-x^2}$. (*Resp.* $2e^{-x^2}(2x^2-1)$.) **2.** $f(x) = \operatorname{tg} x$. $\left(Resp.\ \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}.\right)$ **3.** $f(x) = \operatorname{ctg} x$. $\left(Resp.\ \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen}^3 x}.\right)$ **4.** $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$. $\left(Resp.\ \frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}.\right)$ **5.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. (*Resp.* $2 \cos 2x$.) **6.** $f(x) = \cos^2 x$. (*Resp.* $-2 \cos 2x$.) **7.** $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.\right)$ **8.** $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. $\left(Resp.\ \frac{2x}{(1+x^2)^2}.\right)$ **9.** $f(x) = \ln(2x-3)$. $\left(Resp.\ \frac{-4}{(2x-3)^2}.\right)$ Hallar las derivadas de tercer orden de *las siguientes funciones:* **1.** $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. $\left(Resp.\ \frac{4(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}.\right)$ **2.** $f(x) = xe^{-x}$. (*Resp.* $e^{-x}(3-x)$.) **3.** $f(x) = e^x \cos x$. (*Resp.* $-2e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$.) **4.** $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$. (*Resp.* $(6-x^2)\cos x - 6x \operatorname{sen} x$.) **5.** $f(x) = x^3 2^x$. (*Resp.* $2^x(x^3 \ln^3 2 + 9x^2 \ln^2 2 + 18x \ln 2 + 6)$.) **6.** $f(x) = x \ln x$. (*Resp.* $-1/x^2$.)

**2. $n$-ésimas derivadas de algunas funciones.**

1) *Calculemos la $n$-ésima derivada de la función potencial* $y = x^\alpha$ $(x > 0)$ ($\alpha$ cualquier número real). Derivando sucesivamente, tenemos [1])

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \ldots,\ y^{(n)} =$$
$$= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ \ldots\ [\alpha-(n-1)]\,x^{\alpha-n}.$$

[1]) Al deducir estrictamente las fórmulas de las $n$-ésimas derivadas conviene aplicar el método de inducción matemática.

En el caso particular, si $\alpha = m$, donde $m$ es un número natural, resulta

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(m-1)]\cdot 1 = m!,$$
$$(x^m)^{(n)} = 0 \quad \text{para} \quad n > m.$$

No es difícil notar que, conociendo la forma general de la $n$-ésima derivada, se puede escribir inmediatamente la derivada de todo orden sin calcular en este caso las derivadas precedentes.

Por ejemplo, $(x^3)^{(3)} = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$, $(x^3)^{(2)} = 3\cdot 2\cdot x = 6x$ y $(x^3)^{(4)} = 0$.

2) *Calculemos la n-ésima derivada de la función exponencial* $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$. Derivando sucesivamente, tenemos

$$y' = a^x \ln a, \quad y^{(2)} = a^x (\ln a)^2,$$
$$y^{(3)} = a^x (\ln a)^3, \ \ldots, \ y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

En particular, si $y = e^x$, para todo número $n$

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

3) *Calculemos la n-ésima derivada de la función* $y = \operatorname{sen} x$. Derivando sucesivamente, tenemos

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y^{(2)} = -\operatorname{sen} x =$$
$$= \operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(3)} = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \ \ldots, \ y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Ahora bien, la derivada de todo orden de $\operatorname{sen} x$ puede ser calculada mediante la fórmula

$$(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Por ejemplo, $(\operatorname{sen} x)^{(10)} = \operatorname{sen}\left(x + 10\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$.

4) Análogamente se obtiene *la fórmula de la n-ésima derivada de la función* $y = \cos x$:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

**Ejercicios.** Hallar las derivadas de $n$-ésimo orden de las siguientes funciones:

**1.** $f(x) = \ln x$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.\right)$

**2.** $f(x) = \operatorname{sen} 3x$. $\left(\textit{Resp.}\ 3^n\cdot\operatorname{sen}\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right).\right)$

**3.** $f(x) = e^{x/2}$. $(\textit{Resp.}\ e^{x/2}(1/2)^n.)$

**4.** $f(x) = 2^{3x}$. $(\textit{Resp.}\ 2^{3x}(3\ln 2)^n.)$

**5.** $f(x) = \cos^2 x$. $\left(\textit{Resp.}\ 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).\right)$

La función que tiene la $n$-ésima derivada en un punto $x$ se llama $n$ veces derivable en este punto. La función que tiene en el punto $x$ derivadas de todo orden se dice infinitamente derivable en este punto.

**3. Fórmula de Leibniz para la $n$-ésima derivada del producto de dos funciones.** Sea $y = uv$, donde $u$ y $v$ ciertas funciones de la variable $x$ que tienen derivadas de todo orden. Entonces

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv', \\ y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'', \\ y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = \\ &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''. \end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que los segundos miembros de los desarrollos se parecen a los desarrollos de distintas potencias del binomio $(a + b)^n$ según la fórmula del binomio de Newton, pero en vez de los exponentes están los números que determinan el orden de las derivadas y las mismas derivadas $u$ y $v$ pueden considerarse como «derivadas de orden nulo» $u^{(0)}$ y $v^{(0)}$. Teniendo esto en cuenta, escribamos, por analogía, la forma general de la $n$-ésima derivada del producto de dos funciones

$$\begin{aligned} y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (1) \end{aligned}$$

La fórmula (1) se llama *fórmula de Leibniz* [1]. Vamos a demostrar esta fórmula mediante el método de inducción matemática.

□ Para $n = 1$ la fórmula tiene el aspecto $(uv)' = u'v + uv'$, lo que coincide con la fórmula de derivación del producto de dos funciones. Para $n = 2$ y $n = 3$ ella también está comprobada. Por esta razón, suponiendo la validez de la fórmula (1) para cierto número $n$, demostrar su validez para $n + 1$. Con este fin derivemos esta fórmula, es decir, determinemos $y^{(n+1)} = (y^{(n)})'$:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + u^{(n)}v' + n[u^{(n)}v' + u^{(n-1)}v''] + \\ + \frac{n(n-1)}{2!}[u^{(n-1)}v'' + u^{(n-2)}v'''] + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}[u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \\ + u^{(n-k)}v^{(k+1)}] + \ldots + u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}. \end{aligned}$$

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 — 1716), filósofo y matemático alemán.

Suprimiendo paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + (n+1)\,u^{(n)}v' + \left(n + \frac{n(n-1)}{2!}\right)u^{(n-1)}v'' + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\right]\times$$

$$\times\, u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \ldots + (n+1)\,u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}.$$

Pero la expresión puesta en los corchetes podemos representar en la forma

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots 1}{(k-1)!\,(n-k+1)(n-k)(n-k-2)\ldots 1} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots 1}{k!\,(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots 1} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots 1}{k!\,(n-k+1)(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots 1} =$$

$$= \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)}{k!}.$$

Entonces

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + (n+1)\,u^{(n)}v' + \frac{(n+1)\cdot n}{2!}\,u^{(n-1)}v'' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!}\,u^{(n-k+1)}v^{(k)} + \ldots$$

$$\ldots + (n+1)\,u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}. \quad ■$$

○ **Ejemplo 1.** Calcular la derivada quinta de la función $y = x^5 e^x$.

**Resolución.** Suponiendo $u = x^5$ y $v = e^x$, encontramos $u' = 5x^4$, $u'' = 20x^3$, $u''' = 60x^2$, $u^{(4)} = 120x$, $u^{(5)} = 120$;

$$v' = v'' = v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = e^x.$$

Sustituyendo los valores hallados de las derivadas en la fórmula (1), obtenemos

$$y^{(5)} = 120e^x + 5\cdot 120xe^x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\,60x^2e^x +$$

$$+ \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\,20x^3e^x + 5\cdot 5x^4e^x + x^5e^x =$$

$$= e^x(120 + 600x + 600x^2 + 200x^3 + 25x^4 + x^5).$$

**Ejemplo 2.** Calcular la $n$-ésima ($n \geqslant 2$) derivada de la función $y = x^2 \cos x$.

**Resolución.** Suponiendo $u = \cos x$ y $v = x^2$, encontramos

$$u^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v''' = v^{(4)} = v^{(5)} = \ldots = 0.$$

Sustituyendo los valores hallados de las derivadas en la fórmula (1), obtenemos

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2n\cos\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]x + \frac{2n(n-1)}{1\cdot 2}\cos\left[x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right]. \quad \bullet$$

Existe una otra, más breve, deducción de la **fórmula de Leibniz**.

□ Escribámosla en la forma

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \tag{2}$$

donde $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)\,!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$, $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, $0! = 1$, $C_n^k$ son los coeficientes binomiales. Al igual que antes, hagamos uso del método de inducción. Para $n = 1$ la fórmula ya fue comprobada. Suponiendo su validez para cierto número $n$, vamos a demostrar la validez de la misma para $n + 1$. Tenemos

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(n-k)} v^{(k)})' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}.$$

Reemplacemos en la segunda suma $k$ por $k-1$. Resulta

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)}.$$

Entonces

$$(uv)^{(n+1)} = u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} =$$

$$= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1})\, u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)},$$

ya que $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$ y $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ para $1 \leqslant k \leqslant n$. La fórmula de Leibniz queda demostrada. ■

○ **Ejemplo 3.** Calcular $y^{(10)}$ de la función $y = x^2 e^{3x}$.

**Resolución.** Empleando la fórmula de Leibniz (2), obtenemos

$$(x^2 e^{3x})^{(10)} = x^2 (e^{3x})^{(10)} +$$
$$+ C_{10}^1 (x^2)' (e^{3x})^{(9)} + C_{10}^2 (x^2)^{(2)} (e^{3x})^{(8)} + \ldots + (x^2)^{(10)} e^{3x}.$$

Pero puesto que $(x^2)^{(n)} = 0$ para $n \geqslant 3$, $(e^{3x})^{(k)} = e^{3x} 3^k$, **entonces**

$$(x^2 e^{3x})^{(10)} = x^2 e^{3x} 3^{10} + 10 \cdot 2x e^{3x} 3^9 +$$
$$+ 45 \cdot 2 e^{3x} 3^8 = 3^9 e^{3x} (3x^2 + 20x + 30). \ \bullet$$

Es cómodo aplicar la fórmula de Leibniz cuando uno de los factores es polinomio de grado $n$. En este caso todos los términos de la fórmula de Leibniz, comenzando con $n + 2$, se anulan.

**4. Diferenciales de orden superior.** Consideremos ahora las diferenciales de orden superior. Para comodidad, junto con las designaciones de las diferenciales por los símbolos $dy$ y $dx$ utilizaremos también las designaciones $\delta y$ y $\delta x$.

Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en cada punto $x$ de cierto intervalo, entonces la diferencial de la misma

$$dy = f'(x)\, dx,$$

la cual llamaremos *diferencial de primer orden*, es la función de dos variables: del argumento $x$ y de su diferencial $dx$. Supongamos que la función $f'(x)$ es, a su vez, derivable en cierto punto $x$. Consideraremos $dx$ en la expresión para $dy$ como factor constante. Entonces la función $dy$ es una función sólo del argumento $x$ y la diferencial de la misma en el punto $x$ tiene la forma (al considerar la diferencial de $dy$ utilizaremos las designaciones para las diferenciales)

$$\delta(dy) = \delta [f'(x)\, dx] = [f'(x)\, dx]' \delta x = f''(x)\, dx \delta x.$$

La diferencia $\delta(dy)$ de la diferencial $dy$ en cierto punto $x$, tomada para $\delta x = dx$, se llama *diferencial de segundo orden* (*segunda diferencial*) de la función $f(x)$ en el punto $x$ y se designa $d^2y$, o sea,

$$d^2 y = f''(x)\,(dx)^2.$$

A su vez, la diferencial $\delta(d^2y)$ de la diferenical $d^2y$, tomada para $\delta x = dx$, se denomina *diferencial de tercer orden* (*tercera diferencial*) de la función $f(x)$ y se designa $d^3y$, etc. La diferencial $\delta(d^{(n-1)}y)$ de la diferencial $d^{n-1}y$, tomada para $\delta x = dx$, se llama *diferencial de n-ésimo orden* (*o n-ésima diferencial*) de la función $f(x)$ y se designa $d^n y$.

□ Mostremos que para la $n$-ésima diferencial de una función es válida la fórmula

$$d^n y = y^{(n)} (dx)^n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Para su demostración hagamos uso del método de inducción. Si $n=1$ y $n=2$, ella queda demostrada. Supongamos que esta fórmula es justa también para las diferenciales de orden $n-1$:

$$\mathrm{d}^{n-1}y = y^{(n-1)}(\mathrm{d}x)^{n-1}$$

y la función $y^{(n-1)}$ es, a su vez, derivable en cierto punto $x$. Entonces

$$\mathrm{d}^n y = \delta(\mathrm{d}^{n-1}y) = \delta[y^{(n-1)}(\mathrm{d}x)^{n-1}] =$$
$$= [y^{(n-1)}(\mathrm{d}x)^{n-1}]'\delta x = y^{(n)}\delta x(\mathrm{d}x)^{n-1},$$

suponiendo $\delta x = \mathrm{d}x$, obtenemos

$$\mathrm{d}^n y = \delta(\mathrm{d}^{n-1}y)|_{\delta x=\mathrm{d}x} = y^{(n)}(\mathrm{d}x)^n. \quad ■$$

De la fórmula (2) se desprende que para todo número de $n$ es válida la igualdad

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{(\mathrm{d}x)^n} \text{ o bien } y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},$$

o sea, la $n$-ésima derivada de la función $y=f(x)$ en cierto punto $x$ es igual a la razón entre la $n$-ésima diferencial de esta función en el punto $x$ y la diferencial del argumento de grado $n$.

○ **Ejemplo 4.** Calcular la diferencial $\mathrm{d}^3y$ de la función $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

**Resolución.** Diferenciando sucesivamente, obtenemos

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = (4x^3 - 6x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}[(4x^3-6x)\,\mathrm{d}x] = ([4x^3-6x)\,\mathrm{d}x]'\,\mathrm{d}x =$$
$$= (12x^2-6)(\mathrm{d}x)^2,$$
$$\mathrm{d}^3y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2y) = \mathrm{d}[(12x^2-6)(\mathrm{d}x)^2] =$$
$$= [(12x^2-6)(\mathrm{d}x)^2]'\,\mathrm{d}x = 24x(\mathrm{d}x)^3. \quad ●$$

Nótese que si $x$ no es una derivable independiente sino la función de cualquier variable $t$, la fórmula (2) no es justa (para $n>1$ no posee la propiedad de invariancia de la forma de diferenciales). En particular, para $n=2$, $\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(y'\,\mathrm{d}x) = \mathrm{d}y'\cdot\mathrm{d}x + y'\cdot\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = y''(\mathrm{d}x)^2 + y'\mathrm{d}^2x$ o bien $\mathrm{d}^2y = y''(\mathrm{d}x)^2 + y'\mathrm{d}^2x$.

Vemos que la forma de la diferencial segunda se ha cambiado, ha aparecido el sumando $y'\mathrm{d}^2x$. Si $x$ es una variable independiente, este sumando es igual a cero, ya que en este caso $\mathrm{d}x$ es una magnitud constante y, por consiguiente, $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}(\mathrm{d}x) = 0\cdot\mathrm{d}x = 0$.

**Ejercicios.** Hallar las diferenciales de orden superior de las siguientes funciones: **1.** $f(x) = 4^{-x^2}$; hallar $\mathrm{d}^2y$. (*Resp.* $4^{-x^2}2\ln 4\,(2x^2\ln 4 - 1)(\mathrm{d}x)^2$.) **2.** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$; hallar $\mathrm{d}^3y$. (*Resp.* $-4\operatorname{sen} 2x\,(\mathrm{d}x)^3$.)

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

**1.** ¿Por qué la derivada $f'(x)$ puede considerarse como función del argumento $x$?
**2.** Dese la definición de la derivada segunda de le función $y = f(x)$.
**3.** Cítese el ejemplo de una función en la cual existe $f'(x)$, pero no existe $f''(x)$.
**4.** ¿Es la derivada $f'(x)$ una función continua en un punto $x$ si en este punto existe $f''(x)$?
**5.** Dese la definición de la $n$-ésima derivada de la función $y = f(x)$.
**6.** Se sabe que la $n$-ésima derivada de la función $y = f(x)$ existe en el punto $x$. ¿Qué se puede decir de la existencia de derivadas de orden menor en este punto y en su entorno?
**7.** Dedúzcase la fórmula de Leibniz.
**8.** Dése la definición de la $n$-ésima diferencial de la función $y = f(x)$.

## § 11. Representación paramétrica de una función y su derivación

**1. Representación paramétrica de una función.** Sean dadas dos funciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1}$$

de una variable independiente $t$, definidas y continuas en un mismo intervalo. Si $x = \varphi(t)$ es estrictamente monótona, entonces la función inversa $t = \Phi(x)$ es unívoca, también continua y estrictamente monótona. Por eso $y$ puede considerarse como función dependiente de la variable $x$ mediante la variable $t$ llamada parámetro:

$$y = \psi[\Phi(x)].$$

En este caso se dice que la función $y = f(x)$ *está prefijada paramétricamente con ayuda de las ecuaciones* (1). Notemos que la función $\psi[\Phi(x)]$ es continua en virtud del teorema de la continuidad de una función compuesta.

○ **Ejemplo 1.** Sea $x = R\cos t$, $y = R\operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

Puesto que la función $x = R\cos t$ decrece para $0 \leqslant t \leqslant \pi$, las ecuaciones dadas definen paramétricamente la función $y$ de $x$. Si $t$ se expresa por $x$ de la primera ecuación y se sustituye en la segunda, se obtiene la función buscada de la variable $x$ en la forma explícita.

Más fácilmente se alcanza el objetivo si se nota que

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = R^2.$$

De aquí $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ o bien $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Puesto que la función $y = R\operatorname{sen} t$ no es negativa para $0 \leqslant t \leqslant \pi$, elegimos el signo más delante del radical: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Tomando $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$, obtenemos $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Así pues, vemos que cuando $t$ varía de 0 a $2\pi$, las fórmulas $x =$

$= R\cos t$ e $y = R\,\text{sen}\,t$ definen dos funciones de la variable $x$ cuyas gráficas forman una circunferencia completa.

**Ejemplo 2.** Sea $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

No es difícil comprender que las igualdades dadas son ecuaciones paramétricas de la elipse si recordamos que la elipse se obtiene de la ecuación de la circunferencia de radio $a$ contrayéndola $a/b$ veces a lo largo del eje $Oy$. Del ejemplo 1 se deduce que las igualdades $x = a \times \times \cos t$ e $y = a\,\text{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ son ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. De aquí está claro que las ecuaciones paramétricas de la elipse se obtienen de las ecuaciones paramétricas de la circunferencia, multiplicando la ordenada $y$ por $b/a$ y tienen la forma $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$. Existe una resolución todavía más sencilla. Excluyendo de estas ecuaciones el parámetro $t$ (resolviéndolas respecto a $\cos t$ y $\text{sen}\,t$, elevando al cuadrado las igualdades obtenidas y sumándolas), obtenemos

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es la ecuación de la elipse. ●

La representación paramétrica de la función tiene importancia sobre todo grande al estudiar el movimiento de un punto. Si el punto se mueve sobre un plano, sus coordenadas $x$, $y$ son funciones de tiempo $t$. Asignando estas funciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, determinaremos por completo el movimiento del punto. En cada lapso de tiempo en el cual la función $\varphi(t)$ es estrictamente monótona se puede, procediendo como antes, definir la función $y = \psi[\Phi(x)]$ cuya gráfica es la curva descrita durante este lapso de tiempo por el punto en movimiento. En el último ejemplo las funciones han descrito el movimiento del punto sobre la elipse.

**2. Derivación de la función prefijada paramétricamente.** Supongamos ahora que las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ tienen derivadas, con la particularidad de que $\varphi'(t) \neq 0$ sobre cierto intervalo. De la última desigualdad se desprende (como veremos en adelante) la monotonía estricta de la función $x = \varphi(t)$ (véase el teorema 5.12) y, por consiguiente, la univocidad de la función inversa $t = \Phi(x)$. Conforme al teorema 5.4 de la derivada de una función inversa la función $\Phi(x)$ tiene la derivada

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

y conforme al teorema 5.5 de la derivada de una función compuesta la función $y = \psi[\Phi(x)]$ tiene la derivada

$$y'_x = \psi(\Phi(x))\,\Phi'(x).$$

Por lo tanto,

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{o bien, más brevemente,} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Así pues, hemos demostrado que la derivada de una función representada paramétricamente se expresa por la fórmula

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (2)$$

○ **Ejemplo 3.** Hallar $y'_x$ si $x = R\cos t$, $y = R\,\mathrm{sen}\,t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.
**Resolución.** Según la fórmula (2) obtenemos

$$y'_x = \frac{R\cos t}{-R\,\mathrm{sen}\,t} = -\mathrm{ctg}\,t \quad (t \neq 0;\ \pi).$$

**Ejemplo 4.** Hallar $y'_x$ si $x = 2t + t^2$, $y = t^2 - 2t^3$.
**Resolución.** Mediante la fórmula (2) obtenemos

$$y'_x = \frac{2t-6t^2}{2+2t} = \frac{2t(1-3t)}{2(1+t)} = \frac{t(1-3t)}{1+t}. \quad ●$$

Supongamos que existen las segundas derivadas de la función $\varphi'(t)$ y $\psi'(t)$ en cierto punto $t$. Entonces se puede calcular la segunda derivada de la función representada paramétricamente. Notemos que la función $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, a su vez, está representada por las ecuaciones paramétricas

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \psi_1(t), \quad x = \varphi(t).$$

Por eso según la fórmula (2) tenemos

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi(t)}{(\varphi'(t))^2}}{\varphi'(t)} =$$
$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Aquí hemos utilizado la regla de derivación del cociente.

Así pues, queda obtenido que

$$y''_{xx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

o bien, más brevemente,

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}. \qquad (3)$$

Análogamente se puede obtener la derivada de $y$ respecto a $x$ de todo orden.

○ **Ejemplo 5.** Hallar $y''_{xx}$ si $x = \cos t$, $y = \mathrm{sen}\,t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.
**Resolución.** $y'_t = \cos t$, $y''_t = -\mathrm{sen}\,t$; $x'_t = -\mathrm{sen}\,t$, $x''_t = -\cos t$.
Sustituyendo en la fórmula (3), resulta

$$y''_{xx} = \frac{(-\mathrm{sen}\,t)(-\mathrm{sen}\,t) - (-\cos t)(\cos t)}{(-\mathrm{sen}\,t)^3} = \frac{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t}{(-\mathrm{sen}\,t)^3} = -\frac{1}{\mathrm{sen}^3 t}. \quad ●$$

**Ejercicios.** Para las siguientes funciones, dadas paramétricamente, hallar $y'_x$ e $y''_{xx}$:

**1.** $x = t^2$, $y = \frac{t^2}{3} - t$. $\left(Resp.\ \frac{t^2-1}{2t};\ \frac{1+t^2}{4t^3}.\right)$

**2.** $x = e^{2t}$, $y = e^{3t}$. $\left(Resp.\ \frac{3}{2}e^t;\ \frac{3}{4e^t}.\right)$

**3.** $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$. $\left(Resp.\ \operatorname{ctg}\frac{t}{2};\ -\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4(t/2)}.\right)$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué es la representación paramétrica de una función?
2. ¿A qué condiciones es válida la fórmula (2) para la derivada de una función prefijada paramétricamente?

## § 12. Teoremas fundamentales del cálculo diferencial

**Teorema 5.6. (teorema de Fermat)** [1]. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida sobre un intervalo $(a, b)$ y en cierto punto $x_0$ de este intervalo tiene el valor máximo o mínimo. Entonces si en el punto $x_0$ existe una derivada, ella es igual a cero, o sea, $f'(x_0) = 0$.*

□ **Demostración.** Supongamos, para precisar, que la función $f(x)$ tiene en el punto $x_0$ el valor máximo, o sea, $f(x) \leqslant f(x_0)$ para todo punto $x \in (a, b)$. Esto quiere decir que $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leqslant 0$ para todo punto $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Por eso si $\Delta x > 0$ $(x > x_0)$, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$, y, por consiguiente,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0,$$

en cambio, si $\Delta x < 0$ $(x < x_0)$, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$, por eso

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0,$$

o sea, la derivada a la derecha en el punto $x_0$ es no positiva y la derivada a la izquierda es no negativa. Según la hipótesis $f'(x_0)$ existe y, por lo tanto, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$. Esto es posible sólo en el caso cuando $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$. Pero entonces también $f'(x_0) = 0$.

Análogamente se considera el caso cuando en el punto $x_0$ la función $f(x)$ tiene el valor mínimo. ■

[1] Pierre de Fermat (1601 — 1665), matemático francés.

El significado geométrico del teorema de Fermat consiste en el hecho de que si en el punto $x_0$ la función derivable $f(x)$ tiene el valor máximo (mínimo), en el punto $(x_0; f(x_0))$ la tangente a la gráfica de la función $f(x)$ es paralela al eje $Ox$ (fig. 141).

**Observación.** El teorema no es justo si la función $f(x)$ se considera sobre un segmento $[a, b]$. Así, por ejemplo, la función $f(x) = x$ sobre el segmento $[0, 1]$ en el punto $x = 0$ toma el valor mínimo

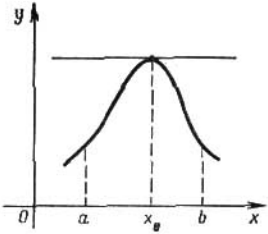


Fig. 141

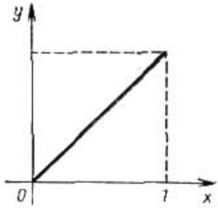


Fig. 142

y en el punto $x = 1$, el valor máximo; sin embargo, tanto en un punto como en el otro la derivada no se anula y es igual a la unidad (fig. 142).

**Teorema 5.7 (teorema de Rolle)** [1]. *Supongamos que sobre un segmento $[a, b]$ está definida la función $f(x)$, con la particularidad de que: 1) $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$; 2) $f(x)$ es derivable sobre $(a, b)$; 3) $f(a) = f(b)$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ en el cual $f'(c) = 0$.*

□ **Demostración.** Puesto que la función $f(x)$ es continua sobre $[a, b]$, según el segundo teorema de Weierstrass ella tiene sobre este segmento el valor máximo $M$ y el valor mínimo $m$, o sea, existen tales puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ en los cuales $f(x_1) = m$ y $f(x_2) = M$ y se cumplen las desigualdades

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Son posibles dos casos: 1) $M = m$; 2) $m < M$.

En el primer caso $f(x) = \text{const} = M = m$. Por eso la derivada $f'(x)$ es igual a cero en todo punto del segmento $[a, b]$ y el teorema queda demostrado.

En el segundo caso, puesto que $f(a) = f(b)$, al menos uno de dos valores $m$ o $M$ no se toma en los extremos del segmento $[a, b]$, o sea, existe un punto $c \in (a, b)$ en el cual la función $f(x)$ toma el valor máximo (mínimo) sobre el intervalo $(a, b)$. En este caso, ya que $f(x)$ es derivable en el punto $c$, del teorema de Fermat se deduce que $f'(c) = 0$. ■

[1]) Michel Rolle (1652 — 1719), matemático francés.

Geométricamente el teorema de Rolle significa que en el gráfico de una función, continua sobre un segmento $[a, b]$ y derivable dentro de él, la que tome en los extremos de este segmento valores iguales

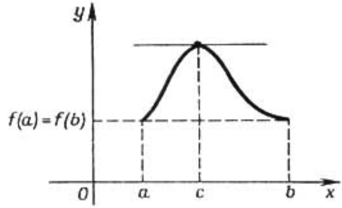


Fig. 143

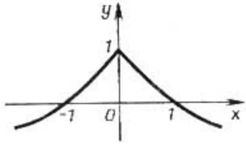


Fig. 144

existe un punto $(c; f(c))$ en el cual la tangente es paralela al eje $Ox$ (fig. 143). En el punto $c$ de la fig. 143 la función $f(x)$ toma el valor máximo.

○ **Ejemplo 1.** Averiguar si satisface o no las condiciones del teorema de Rolle la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ en el segmento $[-1, 1]$.

**Resolución.** La función $f(x) = 1 - \sqrt{x^2}$ es continua sobre toda la recta numérica, por consiguiente, también sobre el segmento

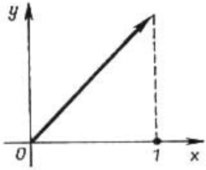


Fig. 145

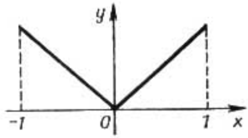


Fig. 146

$[-1, 1]$ (fig. 144). En los extremos de este segmento los valores de la función coinciden: $f(-1) = f(1) = 0$. Sin embargo, la derivada $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ en el punto $x = 0$ no existe. Pero puesto que este punto es un punto interior del segmento $[-1, 1]$, la condición de existencia de una derivada finita sobre el intervalo $(-1, 1)$, condición requerida en el teorema de Rolle, no se cumple. Por eso el teorema de Rolle es inaplicable a la función dada sobre el segmento $[-1, 1]$. En efecto $f'(x) \neq 0$ en el segmento $[-1, 1]$. ●

**Ejercicio.** En las figs. 142, 145 y 146 se muestran, respectivamente, las gráficas de las siguientes funciones: 1) $f(x) = x$,

$x \in [0, 1]$; 2) $f(x)$, igual a $x$ si $0 \leqslant x < 1$, e igual a 0 si $x = 1$; 3) $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$. ¿Satisfacen o no las hipótesis del teorema de Rolle las funciones dadas? Si no satisfacen, indique para cada función dos hipótesis que se cumplen y la tercera que no se cumple (explíquese, por qué).

**Teorema 5.8 (Teorema de Lagrange)** [1]. *Supongamos que en un segmento $[a, b]$ está definida la función $f(x)$ con la particularidad de que:* 1) *$f(x)$ es continua en $[a, b]$;* 2) *$f(x)$ es derivable en $(a, b)$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que sea válida la fórmula*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

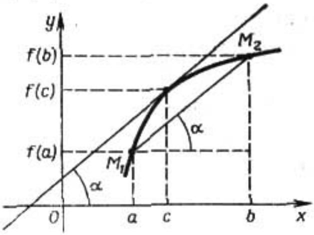


Fig. 147

□ **Demostración.** Introduzcamos para la consideración sobre $[a, b]$; una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

La función $F(x)$ satisface todas tres hipótesis del teorema de Rolle:

1) $F(x)$ es continua sobre $[a, b]$ (como diferencia de dos funciones continuas $f(x)$ y de la función lineal $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$);

2) $F(x)$ es derivable sobre $(a, b)$, o sea dentro de $[a, b]$ tiene una derivada igual a $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

3) $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$, o sea, $F(a) = F(b)$.

Por consiguiente, según el teorema de Rolle, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$, o sea, $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. De aquí resulta $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Aclaremos el significado geométrico del teorema de Lagrange (fig. 147). El valor de $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es el coeficiente angular (pendiente) de la secante que pasa por los puntos $M_1(a; f(a))$ y $M_2(b; f(b))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ y $f'(c)$ es el coeficiente angular de la tangente a la gráfica $y = f(x)$ en el punto $(c; f(c))$. Del teorema de Lagrange se deduce que existe un punto $c$ tal que la tangente a la gráfica en el punto $(c; f(c))$ sea paralela a la secante $M_1M_2$. Tales puntos pueden ser también varios, pero al menos uno siempre existe.

[1]) Joseph Louis Lagrange (1736 — 1813), matemático francés.

**Observación 1.** La igualdad

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),\ a<c<b \tag{1}$$

se llama *fórmula de Lagrange* o *fórmula del incremento finito.*

**Observación 2.** Puesto que el punto $c$ está entre los puntos $a$ y $b$, se puede escribir

$$c=a+\theta(b-a),\quad 0<\theta<1.$$

Aquí $\theta(b-a)$ es una parte de la longitud del segmento $[a, b]$. Teniendo esto en cuenta, la fórmula de Lagrange puede escribirse así:

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\qquad 0<\theta<1.$$

**Observación 3.** Si se pone $a=x$, $b=x+\Delta x$, resulta

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\,\Delta x,\ 0<\theta<1.$$

Tal notación de la fórmula de Lagrange es frecuentemente más cómoda que la notación (1).

El teorema de Lagrange es la base para demostrar muchas fórmulas y teoremas del análisis.

○ **Ejemplo 2.** Comprobar que la función $f(x)=2x-x^2$ satisface las hipótesis del teorema de Lagrange sobre el segmento $[1, 3]$ y hallar el punto $c$ que se encuentra en la fórmula de Lagrange.

**Resolución.** La función $f(x)=2x-x^2$ satisface las hipótesis del teorema de Lagrange, ya que es continua sobre el segmento $[1, 3]$ y tiene la derivada finita $f'(x)=2-2x$ en cada punto interior del segmento, o sea, es derivable sobre $(1, 3)$. Conforme al teorema de Lagrange entre dos puntos $x_1=1$ y $x_2=3$ existe el punto $x=c$ que satisface la igualdad

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

Sustituyendo el valor $x_1=1$ y $x_2=3$, obtenemos

$$f'(c)=2-2\cdot c=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(2\cdot 3-3^2)-(2\cdot 1-1^2)}{3-1}=\frac{-4}{2}$$

o bien $1-c=-1$, de donde encontramos $c=2$. ●

**Teorema 5.9 (teorema de Cauchy).** *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas sobre $[a, b]$ y derivables sobre $(a, b)$. Sea, además, $g'(x)\neq 0$. Entonces existe un punto $c\in(a, b)$ tal que sea válida la fórmula*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{2}$$

□ **Demostración.** Mostremos primero que $g(b)\neq g(a)$, o sea, que la fórmula (2) tiene sentido. Efectivamente, si se admite que $g(b)=g(a)$, entonces, conforme al teorema de Rolle, para la función $g(x)$ habrá un punto $\xi\in(a, b)$ en el cual $g'(\xi)=0$. Pero esto contradice la hipótesis de que $g'(x)\neq 0$ sobre $(a, b)$. Pasemos a la demostración de la fórmula (2).

Consideremos sobre $[a, b]$ una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)].$$

No es difícil notar que $F(x)$ sobre $[a, b]$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle. En efecto, $F(x)$ es continua sobre $[a, b]$, derivable sobre $(a, b)$ y, además, la sustitución de $x = a$ y $x = b$ da $F(a) = 0$ y $F(b) = 0$, o sea, $F(a) = F(b)$. Conforme al teorema de Rolle para $F(x)$ existe un punto $c$, $a < c < b$, tal que $F'(c) = 0$.

Puesto que $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) = g(a)} g'(x)$, entonces

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

De donde, teniendo en cuenta que $g'(c) \neq 0$, obtenemos la fórmula (2). ■

La fórmula (2) se llama *fórmula de Cauchy* o *fórmula generalizada del incremento finito.*

**Observación.** El teorema de Lagrange es el caso particular del de Cauchy si se pone $g(x) = x$.

□ **Ejemplo 3.** Comprobar que las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ satisfacen las hipótesis del teorema de Cauchy sobre el segmento $[1, 4]$ y hallar el punto $c$ que hay en la fórmula de Cauchy.

**Resolución.** Las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ satisfacen las hipótesis del teorema de Cauchy, ya que son continuas sobre el segmento $[1, 4]$, sus derivadas $f'(x) = 2x - 2$ y $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$ existen en todos los puntos del intervalo $(1, 4)$, o sea, son derivables sobre este intervalo y, además, $g'(x) \neq 0$ sobre $[1, 4]$. Conforme al teorema de Cauchy, entre dos puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$ existe el punto $x = c$ que satisface la igualdad

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Sustituyendo los valores $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$, obtenemos

$$\frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20}.$$

Resolviendo la ecuación, encontramos $c_1 = 2$ y $c_2 = 4$. Puesto que el punto $x = c$ debe satisfacer las desigualdades $1 < c < 4$, el punto buscado es $c_1 = 2$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de Fermat. ¿En qué consiste su significado geométrico?

2. ¿Es cierto el teorema si $f(x) = f(x_0)$ para algunos valores de $x \in (a, b)$?

3. Cítese el ejemplo de una función que tome el valor mínimo en un punto y no tenga derivada en este punto. ¿Qué se deduce de esto?

4. Enúnciese el teorema de Rolle y aclare su significado geométrico.

5. ¿Quedará válido el teorema de Rolle si se omite una de sus tres hipótesis? Cítese ejemplos respectivos.

6. Enúnciese el teorema de Lagrange y explíquese su significado geométrico.

7. Enúnciese el teorema de Cauchy.

8. Muéstrese que el teorema de Lagrange es el caso particular del teorema de Cauchy.

## § 13. Evaluación de las indeterminaciones. Regla de L'Hospital

Retornemos a la cuestión de evaluación de las indeterminaciones que se examinaba en el cap. 4. Aquí nos familiarizaremos con un método sencillo y muy eficaz de evaluar las indeterminaciones, llamado *regla de L'Hospital*.

**1. Evaluación de la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.** El siguiente teorema ofrece la regla de evaluación de la indeterminación dada.

**Teorema 5.10 (teorema de L'Hospital)** [1]**.** *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y derivables en cierto entorno del punto $a$, a excepción, quizás, del mismo punto $a$. Sea, luego, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$* [2] *y $g'(x) \neq 0$ en el entorno indicado del punto $a$. Entonces, si existe el límite de la razón de las derivadas $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito), existe también el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, con la particularidad de que es válida la fórmula*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□ **Demostración.** Sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria de los valores del argumento la cual converge hacia el punto $a$, con la particularidad de que $x_n \neq a$. Precisemos por completo las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto $a$, suponiéndolas iguales a cero, o sea, $f(a) = g(a) = 0$. Entonces, evidentemente, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas sobre $[a, x_n]$, derivables sobre $(a, x_n)$ y, según la hipótesis, $g'(x) \neq 0$.

---

[1] G.F. L'Hospital (1661 — 1704), matemático francés.

[2] El teorema queda válido también en el caso cuando $x \to a^-$ y $y \to a^+$.

Por lo tanto, para $f(x)$ y $g(x)$ están cumplidas todas las suposiciones del teorema de Cauchy sobre $[a, x_n]$, o sea, dentro de $[a, x_n]$ existe un punto $\xi_n$ tal que

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n).$$

Según hemos precisado, $f(a)=g(a)=0$, por lo tanto,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \quad \xi_n \in (a, x_n). \tag{1}$$

Sea ahora en la fórmula (1) $n \to \infty$. Entonces, evidentemente, $\xi_n \to a$ para $n \to \infty$ (fig 148). Puesto que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, el

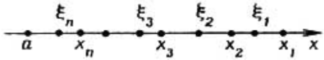


Fig. 148

segundo miembro de la fórmula (1) tiene para $n \to \infty$ el límite igual a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Por consiguiente, para $n \to \infty$ existe también el límite del primer miembro de la fórmula (1), con la particularidad de que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Puesto que $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria de los valores del argumento, la cual converge hacia $a$, de aquí sacamos la conclusión de que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe y } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \blacksquare$$

El teorema demostrado suele llamarse *regla de L'Hospital.*

○ **Ejemplo 1.** Hallar $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

**Resolución.** Las funciones $f(x)=x^2-1+\ln x$ y $g(x)=e^x-e$ están definidas en el entorno del punto $x=1$. Luego, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$, o sea, tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. El límite de la razón de sus derivadas existe:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1/x}{e^x}=\frac{3}{e},$$

con la particularidad de que $g'(x) = e^x \neq 0$. Por consiguiente, estas funciones satisfacen las hipótesis del teorema de L'Hospital según el cual $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ también existe y es igual a $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, o sea,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1/x}{e^x} = \frac{3}{e}. \; \bullet$$

**Observación 1.** Por lo general, al calcular los límites con ayuda de la regla de L'Hospital, se escriben solamente las transformaciones necesarias y la verificación del cumplimiento de las hipótesis se hace en el curso de cálculos. Si en este caso resulta que la razón de las derivadas $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ vuelve a representar una indeterminación y $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen los mismos requisitos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$, la regla de L'Hospital se emplea repetidamente.

● **Ejemplo 2.** Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

**Resolución.** Tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

En este ejemplo la regla de L'Hospital se ha empleado dos veces. ●

**Ejercicios.** Hallar: 1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{2}.\right)$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$. (*Resp.* 1). 3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{3}{5}.\right)$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. (*Resp.* 2.) 5. $\lim_{x\to 0} \frac{2-(e^x+e^{-x})\cdot\cos x}{x^4}$.
$\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{3}.\right)$ 6. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x-\operatorname{sen} x}$. (*Resp.* 1.)

**Observación 2.** El teorema queda justo también en el caso cuando $x\to\infty$, $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$. Por ejemplo, en efecto, supongamos, que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finito o infinito). Hagamos la sustitución $x = 1/t$; entonces $t\to 0$ para $x\to\infty$ y

$$f(x) = f(1/t)\to 0,\; g(x) = g(1/t)\to 0 \text{ para } t\to 0.$$

Aplicando a las funciones $f(1/t)$ y $g(1/t)$ el teorema 5.10 y la regla de derivación de una función compuesta, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

○ **Ejemplo 3.** Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi/2-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$.

**Resolución.** Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$, $\ln 1=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$. Aplicando la regla de L'Hospital, resulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1}\frac{2}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2-1}{x^2+1}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1-1/x^2}{1+1/x^2}=-\frac{1-0}{1+0}=-1. \bullet$$

**Ejercicios.** Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/x^2)}{\pi-2\operatorname{arctg}x}$. (*Resp.* 0.)
**2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2}{3}.\right)$

**2. Evaluación de la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.** Para esta indeterminación es válida la afirmación análoga al teorema 5.10, a saber: si en el enunciado del teorema sustituir la exigencia de $\lim\limits_{x\to a}f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ por la hipótesis de $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=$ $=\infty$, el téorema queda válido.

○ **Ejemplo 4.** Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

**Resolución.** Tenemos la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hospital $n$ veces, resulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\dots$$

$$\dots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}.$$

Aquí ya no hay ninguna indeterminación. Por esta razón

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0. \bullet$$

**Ejercicios.** Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$. (*Resp.* 0.) **2.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$. (*Resp.* 0.) **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$. (*Resp.* $+\infty$.) **4.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$. (*Resp.* 0.) **5.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$. (*Resp.* 1.) **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}$. (*Resp.* $+\infty$.) **7.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. (*Resp.* 1.)

**3. Otras formas de las indeterminaciones y su evaluación.** Como se sabe, *las indeterminaciones de la forma* $0\cdot\infty$ y $\infty-\infty$ pueden reducirse a las de la forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ y luego evaluarse con ayuda de la regla de L'Hospital.

○ **Ejemplo 5.** Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

**Resolución.** Tenemos una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$. Pero $x\ln x=\frac{\ln x}{1/x}$ y hemos obtenido la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Empleando la regla de L'Hospital, resulta

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0^+} x=0.$$

**Ejemplo 6.** Hallar $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

**Resolución.** Tenemos una indeterminación de la forma $\infty-\infty$. Pero $\sec x-\operatorname{tg} x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y hemos obtenido para la misma hipótesis de $x\to\pi/2$ la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hospital, resulta

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x}=0.$$

**Ejercicios.** Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x)$. (*Resp.* 1.) **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$. (*Resp.* 0.) **3.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$. $\left(\textit{Resp. } \frac{2}{\pi}.\right)$ **4.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$. $\left(\textit{Resp. } -\frac{1}{2}.\right)$ **5.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$. $\left(\textit{Resp. } -\frac{1}{2}.\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)$. (*Resp.* 0.)

Por último, consideremos *las indeterminaciones de la forma* $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$. Tales indeterminaciones tienen lugar al examinar las funciones $y=f(x)^{g(x)}$ si para $x\to a$ la función $f(x)$ tiende, respectivamente, a 0, 1 y $\infty$, mientras que $g(x)$ tiende, respectivamente a 0,

$\infty^0$ y 0. Estas indeterminaciones con ayuda de la identidad

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

se reducen a la indeterminación de la forma $0\cdot\infty$ la cual ya ha sido analizada.

● **Ejemplo 7.** Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

**Resolución.** Tenemos una indeterminación de la forma $0^0$. Pero $x^x = e^{x\ln x}$ y en el exponente hemos obtenido la indeterminación de la forma $0\cdot\infty$ que ya ha sido considerada (véase el ejemplo 5). Por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

**Ejemplo 8.** Hallar $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{1/e^x-1-x}$.

**Resolución.** Tenemos una indeterminación de la forma $1^\infty$. Pero $(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)} = e^{\ln(1+x^2)/(e^x-1-x)}$ y en el exponente hemos obtenido la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Empleando la fórmula de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}} = e^2.$$

**Ejemplo 9.** Hallar $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

**Resolución.** Tenemos una indeterminación de la forma $\infty^0$. Pero

$(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{2\cos x\ln\operatorname{tg} x} = e^{\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{1/\cos x}}$ y en el exponente hemos obtenido la indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hospital, encontramos

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}} = 2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\sec x} = 2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg} x} = 2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= 2\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x\cdot\operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg} x\sec^2 x} = \lim_{x\to\pi/2}\cos x = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/2} 2\cos x \ln \operatorname{tg} x} = e^0 = 1. \quad \bullet$$

**Ejercicios.** Hallar: **1.** $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)^x$. (*Resp.* 1.) **2.** $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} 2x}$. (*Resp.* 1.) **3.** $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\ln x}$. (*Resp.* 1.)

Recomendamos para adquirir los hábitos de evaluación de una indeterminación con ayuda de la regla de L'Hospital utilizar también los ejemplos dados en el cap. 4.

En conclusión examinemos un ejemplo cuando la regla de L'Hospital es inaplicable.

○ **Ejemplo 10.** Hallar $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x}$.

**Resolución.** Tenemos una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$. Sin embargo, aquí la regla de L'Hospital no se puede aplicar, es decir, el límite de la razón de las derivadas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}$$

no existe. Para evaluar la indeterminación dada dividamos el numerador y el denominador por $x$, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 +$$

$$+ \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1+0 = 1. \quad \bullet$$

## PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese el teorema de L'Hospital para los casos cuando $x \to a^-$ y $x \to a^+$.

2. Enúnciese la regla de L'Hospital para la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando $x \to a$.

3. Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ no existe. ¿Se deduce de aquí que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ que representa la indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ también no existe?

4. ¿Por qué en el teorema de L'Hospital no se exige que las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ existan obligatoriamente en el mismo punto $a$?

## § 14. Fórmula de Taylor

Analicemos una de las fórmulas principales del análisis matemático la cual tiene numerosas aplicaciones tanto en el mismo análisis como en las disciplinas contiguas.

**1. Fórmula de Taylor.**

**Teorema 5.11. (teorema de Taylor)** [1]. *Supongamos que la función $f(x)$ tiene en el punto $a$ y en cierto entorno suyo derivadas de orden $n+1$* [2]. *Sea $x$ todo valor del argumento del entorno indicado, $x \neq a$. Entonces entre los puntos $a$ y $x$ habrá un punto $\xi$ tal que sea válida la siguiente fórmula:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (1)$$

□ **Demostración.** Designemos con $\varphi(x, a)$ el polinomio respecto a $x$ de orden $n$ en el segundo miembro de la fórmula (1), es decir, pongamos

$$\varphi(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(Se llama *polinomio de Taylor de orden $n$* para la función $f(x)$.)

Luego, designemos con $R_{n+1}(x)$ la diferencia

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, a).$$

El teorema quedará demostrado si determinemos que

$$R_{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad a < \xi < x.$$

Fijemos todo valor de $x$ del entorno indicado. Para precisar, suponemos $x > a$. Designemos con $t$ la variable que varía sobre el segmento $a \leqslant t \leqslant x$ y consideremos sobre el segmento $[a, x]$ la función auxiliar

$$F(t) = f(x) - \varphi(x, t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{(n+1)}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \quad (2)$$

La función $F(t)$ satisface sobre $[a, x]$ todas las hipótesis del teorema de Rolle: 1) de la fórmula (2) y de las condiciones impuestas a la función $f(x)$ se deduce que $F(t)$ es continua y derivable sobre $[a, x]$, ya que $f(t)$ y sus derivadas hasta el orden $n$ son continuas y derivables sobre $[a, x]$;

---

[1] Brook Taylor (1685 — 1731), matemático inglés.

[2] De aquí se desprende que la misma función $f(x)$ y sus derivadas hasta el orden $n$ son continuas y derivables en este entorno.

2) suponiendo en (2) $t = a$, tenemos

$$F(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x) =$$
$$= R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x) = 0.$$

Suponiendo en (2) $t = x$, resulta

$$F(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(x-x) - \frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n - \frac{(x-x)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

Por lo tanto, la condición de $F(a) = F(x)$ queda cumplida.

En virtud del teorema de Rolle dentro del segmento $[a, x]$ existe un punto $\xi$ tal que

$$F'(\xi) = 0. \qquad (3)$$

Calculemos la derivada $F'(t)$. Derivando la igualdad (2) respecto a $t$, tenemos

$$F'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}\, 2\,(x-t) -$$
$$- \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\, n\,(x-t)^{n-1} -$$
$$- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{(n+1)}(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

No es difícil notar que todos los términos en el segundo miembro de la igualdad, a excepción de dos últimos, se eliminan recíprocamente. De esta manera,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}. \qquad (4)$$

Suponiendo en (4) $t = \xi$ y utilizando la igualdad (3), obtenemos

$$F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

De donde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad \blacksquare$$

La fórmula (1) se llama *fórmula de Taylor* y la expresión para $R_{n+1}(x)$, *término residual en la fórmula de Lagrange*. Éste puede ser escrito en otra forma. Puesto que el punto $\xi \in (a, x)$, habrá también tal número $\theta$ del intervalo $0 < \theta < 1$ que $\xi = a + \theta(x - a)$ y el término residual toma la forma

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$
$$0 < \theta < 1.$$

Esta fórma del término residual es la más usada en las aplicaciones.

**2. Otra notación de la fórmula de Taylor y del término residual.** La fórmula de Taylor (1) se escribe frecuentemente de otra manera. Pongamos en (1) $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$. Entonces obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1},$$
$$0 < \theta < 1. \tag{5}$$

Para $n = 0$ de (5) se obtiene la fórmula de Lagrange

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\,\Delta x.$$

Mostremos que si la función $f^{(n+1)}(x)$ está acotada en el entorno del punto $a$, el término residual $R_{n+1}(x)$ es infinitésimo de un orden superior que $(x - a)^n$ cuando $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!\,(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a) = 0,$$

ya que la función $f^{(n+1)}(\xi)$ está acotada y $(x - a) \to 0$ cuando $x \to a$. Así pues,

$$R_{n+1}(x) = o[(x-a)^n] \text{ para } x \to a. \tag{6}$$

La fórmula (6) se llama término residual en la forma de Peano [1]).

**3. Fórmula de Maclaurin.** Suele llamarse *fórmula de Maclaurin* [2]) a la de Taylor (1) cuando $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x).$$

El término residual se escribe:

1) *en la forma de Lagrange* $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$;

2) *en la forma de Peano* $R_{n+1}(x) = o(x^n)$.

**4. Desarrollo de algunas funciones elementales según la fórmula de Maclaurin.**

1) $f(x) = e^x$. Puesto que

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n+1)}(x) = e^x,$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n+1)}(0) = 1,$$

[1]) Giuseppe Peano (1858 — 1932), matemático italiano.
[2]) Colin Maclaurin (1698 — 1746), matemático escocés.

la fórmula de Maclaurin se escribe así:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \tag{7}$$

2) $f(x) = \operatorname{sen} x$. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{para } n \text{ impar,} \end{cases}$$

la fórmula de Maclaurin se escribe así:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}). \tag{8}$$

3) $f(x) = \cos x$. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ impar,} \\ (-1)^{n/2} & \text{para } n \text{ par,} \end{cases}$$

la fórmula de Maclaurin se escribe así:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}). \tag{9}$$

En la fórmula (8) hemos escrito el término residual en la forma $o(x^{2n})$ y no en la forma $o(x^{2n-1})$, ya que el término que va en pos del último es igual a cero (lo mismo se refiere a la fórmula (9)).

4) $f(x) = (1 + x)^\alpha$, donde $\alpha$ es un número real. Puesto que

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ \ldots\ (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n},$$
$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ \ldots\ (\alpha - n + 1),$$

la fórmula de Maclaurin tiene el aspecto

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ \ldots\ (\alpha - n + 1)}{n!}x^n + R_{n+1}^{(x)},$$

donde el término residual en la forma de Lagrange es igual a

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ \ldots\ (\alpha - n)}{(n+1)!}(1 + \theta x)^{\alpha - (n+1)}x^{n+1},$$
$$0 < \theta < 1.$$

En el caso particular, cuando $\alpha = n$ es un número natural, $f^{(n+1)}(x) = 0$, por lo tanto, $R_{n+1}(x) = 0$ y hemos obtenido la conocida fórmula del binomio de Newton

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \tag{10}$$

Si es necesario obtener el desarrollo del binomio $(a+x)^n$, se puede sacar $a^n$ fuera del paréntesis y hacer uso de la fórmula (10). En este caso obtenemos

$$(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n =$$

$$= a^n\left[1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right].$$

Por lo tanto, el caso general de binomio de Newton es un caso particular de la fórmula de Maclaurin.

Los desarrollos anteriormente citados muestran que con ayuda de la fórmula de Maclaurin las funciones pueden reemplazarse, con cierto grado de precisión, por los polinomios que son las funciones elementales más simples. Con los polinomios es cómodo cumplir las operaciones aritméticas, derivarlos; el polinomio es continuo en todo punto, etc. Las fórmulas de Taylor y de Maclaurin permiten sustituir aproximadamente por los polinomios también funciones más complicadas. Además, estas fórmulas tienen un amplio círculo de aplicaciones. Nos limitaremos a considerar dos de ellas.

**5. Utilización de la fórmula de Maclaurin para calcular los límites.** La fórmula de Taylor es un medio eficaz para calcular los límites de las funciones los cuales se necesita examinar con frecuencia al investigar las funciones.

Examinemos los ejemplos.

○ 1. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$. Según la fórmula (8) tomada para $n=2$ tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{o(x^4)}{x^3}}{1}=$$

$$=-\frac{1}{3!}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3}=-\frac{1}{3!}+0=-\frac{1}{6}.$$

2. Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\operatorname{sen} x}$. Mediante las fórmulas (7) — (9) obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^3\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)-1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}}{x^3(x+o(x))}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{24}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}{1+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{24}+0}{1+0}=\frac{1}{12}.$$

**3.** Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$. Según las fórmulas (7) y (8) tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - 2x}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{6} + 0} = 2. \quad \bullet$$

**6. Cálculo del número e.** En el subp. 2 del § 3, cap. 3 hemos introducido el número e como límite de la sucesión $\{(1 + 1/n)^n\}$ y hemos obtenido para e una estimación muy aproximada de la forma $2 \leqslant e \leqslant 3$.

Mostremos cómo el número e se calcula con toda precisión necesaria. Para esto escribamos la fórmula (7) con el término residual en la forma de Lagrange

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \qquad (11)$$

Si la función $e^x$ se reemplaza por su polinomio de Taylor de grado $n$, obtenemos la igualdad aproximada

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \qquad (12)$$

cuyo error absoluto

$$|R_{n+1}^{(x)}| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si se considera la función $e^x$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$, entonces

$$|R_{n+1}^{(x)}| \leqslant \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \qquad (13)$$

Suponiendo en (12) $x = 1$, obtenemos el valor aproximado del número

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

En este caso el valor absoluto es menor que $\frac{3}{(n+1)!}$. Si se necesita calcular el valor de e con exactitud hasta 0,001, el número $n$ se determina de la desigualdad

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001 \text{ o bien } (n+1)! > 3000$$

que se cumple para $n = 6$. Por consiguiente,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718$$

con precisión hasta 0,001.

Por lo tanto, la utilización de la fórmula de Maclaurin ofrece la posibilidad de calcular el número e con toda exactitud.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Enúnciese el teorema de Taylor.
2. ¿Qué se llama polinomio de Taylor de grado $n$ para la función $f(x)$?
3. Obténgase el término residual de la forma de Peano de la de Lagrange.
4. ¿Qué se llama fórmula de Maclaurin para la función $f(x)$? Escríbase los términos residuales de esta fórmula en las formas de Lagrange y de Peano.
5. ¿Por qué no se puede llamar polinomio de grado $n+1$ al segundo miembro de la fórmula de Taylor (1)?
6. ¿En qué caso se anula el término residual en la fórmula de Taylor? Cítese un ejemplo.
7. ¿Qué hipótesis falta en el enunciado del teorema de Taylor para deducir el término residual en la forma de Peano? Enúnciese esta hipótesis.

## § 15. Investigación del comportamiento de las funciones y construcción de las gráficas

**1. Criterio de monotonía de una función.**

**Teorema 5.12.** *Si una función $f(x)$ es derivable en el intervalo $(a, b)$ y $f'(x) \geqslant 0$, ($f'(x) \leqslant 0$) en $(a, b)$, la función $f(x)$ no decrece (no crece) en $(a, b)$.*

□ **Demostración.** Para precisar, consideremos el caso $f'(x) \geqslant 0$. Sean $x_1$ y $x_2$ dos puntos arbitrarios de $(a, b)$ y $x_1 < x_2$; entonces sobre el segmento $[x_1, x_2]$ se cumplen todas las hipótesis del teorema de Lagrange según el cual tenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ c \in (x_1, x_2).$$

Conforme a la suposición $f'(c) \geqslant 0$, $x_2 - x_1 > 0$, por eso $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ o bien $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, o sea la función $f(x)$ no decrece sobre $(a, b)$.

Para el caso de $f'(x) \leqslant 0$ la demostración es análoga. ■

**Observación.** Del mismo modo se puede demostrar que si $f'(x) > 0$ ($< 0$) en $(a, b)$, entonces $f(x)$ crece (decrece) en $(a, b)$.

○ **Ejemplo 1.** Determinar los intervalos en sentido lato en los cuales la función $f(x) = x^3 - 12x + 11$ crece y decrece.

**Resolución.** El dominio de definición de la función es toda la recta numérica. Encontramos la derivada de la función $f'(x) = 3x^2 - 12$. De la desigualdad $3x^2 - 12 > 0$ o bien $x^2 > 4$ o $\sqrt{x^2} > 2$, es decir, $|x| > 2$ (sea $x > 2$, sea $x < -2$), se deduce que la función dada crece en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$ y de la desigualdad $3x^2 - 12 < 0$, o $x^2 < 4$, o bien $\sqrt{x^2} < 2$, es decir, $|x| < 2$ $(-2 < x < 2)$, se deduce que la función dada decrece sobre el intervalo $(-2, 2)$. ●

**Ejercicios.** Determinar los intervalos en sentido lato en los cuales crecen y decrecen las siguientes funciones: **1.** $f(x) = 3x^2 - 2x$. (*Resp.* Crece sobre el intervalo $(1/3, +\infty)$ y decrece sobre el intervalo $(-\infty, 1/3)$.) **2.** $f(x) = 2 - 3x + x^3$. (*Resp.* Crece sobre $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, decrece en $(-1, 1)$.)

**2. Determinación de los puntos del extremo local de una función.**

**Definición.** *El punto $x_0$ se llama punto del máximo (mínimo) local estricto de la función $f(x)$ si para todos los valores de $x$ de cierto*

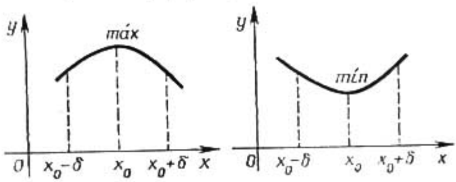


Fig. 149

*$\delta$-entorno del punto $x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) para $x \neq x_0$* (fig. 149).

El máximo local (máx) y el mínimo local (mín) se unen por el nombre común de *extremo local*.

De la definición se deduce que el concepto de extremo lleva el carácter local que se entiende así que en el caso del extremo la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) no está obligada a cumplirse para todos los valores de $x$ en el dominio de definición de la función sino debe cumplirse sólo en cierto entorno del punto $x_0$. Es evidente que la función puede tener varios máximos locales y varios mínimos locales, con la particularidad de que puede resultar que algún máximo local sea menor que cierto mínimo local.

**Teorema 5.13 (condición necesaria de un extremo local).** Si *la función $f(x)$ tiene en el punto $x_0$ un extremo local y es derivable en este punto, entonces $f'(x_0) = 0$.*

□ **Demostración.** Puesto que en el punto $x_0$ la función $f(x)$ tiene un extremo local, existe tal intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en el cual el valor $f(x_0)$ sea el máximo (mínimo) entre todos los otros valores de esta función. Entonces, conforme al teorema de Fermat, la derivada de la función en el punto $x_0$ es igual a cero, o sea, $f'(x_0) = 0$. ■

El teorema 5.13 tiene el siguiente significado geométrico. Si $x_1$, $x_2$ y $x_3$ son los puntos del extremo local y en los puntos correspondientes de la gráfica existen tangentes, estas tangentes son paralelas al eje $Ox$ (fig. 150).

A veces tales puntos se llaman *estacionarios*; los llamaremos *puntos de extremo posible*. Si el punto $x_0$ es punto de extremo posible, o sea $f'(x_0) = 0$, él puede también no ser punto de máximo (mínimo) local. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2 = 0$ para $x = 0$, pero, no obstante, en el punto $x = 0$ no hay un extremo local

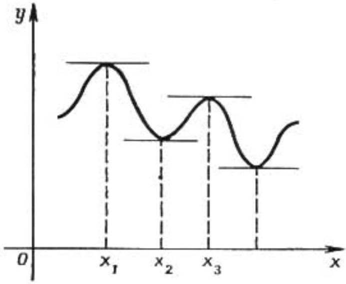


Fig. 150

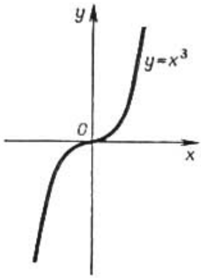


Fig. 151

(fig. 151). Precisamente por eso los hemos nombrado puntos de extremo posible y la condición de $f'(x_0) = 0$ es sólo necesaria. Vamos a determinar la condición suficiente de existencia del extremo local.

**Teorema 5.14 (condición suficiente de un extremo local).** *Supongamos que la función $f(x)$ es derivable en cierto δ-entorno del punto $x_0$. Entonces, si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para todos los valores de $x$ de $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) para todos los valores de $x$ de $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces en el punto $x_0$ la función $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) local; en cambio, si $f'(x)$ tiene en todo el δ-entorno del punto $x_0$ el mismo signo, en el punto $x_0$ no hay un extremo local.*

Con otras palabras, si al pasar por el punto $x_0$ $f'(x)$ cambia su signo de $+$ a $-$, $x_0$ es punto de máximo local, si en el punto $x_0$ $f'(x)$ cambia su signo de $-$ a $+$, $x_0$ es punto de mínimo local; en cambio, si en el punto $x_0$ el signo de $f'(x)$ queda sin variar, en el punto $x_0$ no existe un extremo.

□ **Demostración.** Supongamos que al pasar por el punto $x_0$ $f'(x)$ cambia su signo de $+$ a $-$ y sea $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Apliquemos la fórmula de Lagrange a la función $f(x)$ en el segmento $[x, x_0]$. Resulta

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x), \quad c \in (x, x_0).$$

Puesto que $f'(x) > 0$ sobre $(x_0 - \delta, x_0)$, entonces $f'(c) > 0$ y, además, $x_0 - x > 0$, por lo tanto,

$$f(x_0) - f(x) > 0 \text{ o bien } f(x_0) > f(x). \tag{1}$$

Consideremos ahora el intervalo a la derecha del punto $x_0$, o sea, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Apliquemos la fórmula de Lagrange a la función $f(x)$ sobre el segmento $[x_0, x]$. Obtenemos

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \quad c \in (x_0, x).$$

Puesto que $f'(x) < 0$ sobre $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces $f'(c) < 0$ y, además, $x - x_0 > 0$, por lo tanto,

$$f(x) - f(x_0) < 0 \text{ o bien } f(x_0) > f(x). \tag{2}$$

De las desigualdades (1) y (2) se deduce que en el entorno dado del punto $x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ para $x \neq x_0$

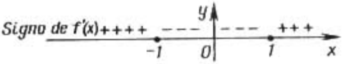


Fig. 152

y esto quiere decir que en el punto $x_0$ la función $f(x)$ tiene un máximo local.

Análogamente se considera el caso de cambio del signo de $f'(x)$ de $-$ a $+$.

Nos queda considerar el caso cuando $f'(x)$ no cambia su signo.

Sea $f'(x) > 0$ en cierto entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, conforme al teorema 5.12 (de acuerdo con el criterio de monotonía), la función $f(x)$ no decrece en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, o sea, para todos valores de $x < x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) < f(x_0)$ y para todos valores de $x > x_0$ se cumple la desigualdad $f(x) > f(x_0)$. Esto quiere decir que el punto $x_0$ no es punto de extremo local, o sea, al pasar por éste en el caso dado no se conserva el signo de diferencia $f(x) - f(x_0)$ en el entorno de este punto. ■

**Observación.** El teorema 5.14 queda válido si en el mismo punto $x_0$ la función $f(x)$ no es derivable sino sólo continua. De ejemplo de tal función sirve $f(x) = |x|$ la cual en el punto $x = 0$ es continua, pero no derivable.

○ A título de ejemplo consideremos la cuestión de la determinación de los puntos de extremo local de la función $f(x) = x^3 - 3x$. Encontramos la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Resolviendo la ecuación $3(x^2 - 1) = 0$, obtenemos dos puntos de extremo posible: $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$. Es cómodo realizar la investigación ulterior haciendo un dibujo auxiliar (fig. 152). Marcando en el dibujo los puntos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ e investigando el signo de $f'(x)$ en el entorno de estos puntos, obtenemos que en el punto $x_1 = -1$ $f(x)$ tiene un máximo local y en el punto $x_2 = 1$, un mínimo local. Nos queda hallar $y_{\text{máx}}$ e $y_{\text{mín}}$. Tenemos $y_{\text{máx}} = f(-1) = 2$, $y_{\text{mín}} = f(1) = -2$.

En la fig. 152 se ven también los intervalos de monotonía de $f(x)$: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, con la particularidad de que en los intervalos primero y tercero la función crece y en el segundo decrece. ●

**3. Problemas del máximo y del mínimo.** Los problemas en que se necesita hallar para qué valores del argumento cierta función toma el valor máximo (mínimo) desempeñan gran papel en la matemática y sus aplicaciones. *Desde el punto de vista matemático los problemas más sencillos son tales en los que la función es representada por*

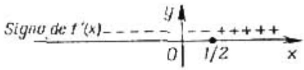


Fig. 153

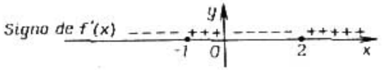


Fig. 154

*una fórmula y es en este caso derivable. Entonces para investigar las propiedades de la función, determinar los trozos de su crecimiento y decrecimiento y encontrar los puntos de local extremo la derivada tiene importancia esencial.*

○ **Ejemplo 2.** Hallar los máximos y mínimos de las funciones siguientes: 1) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}$; 2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$; 3) $f(x) = (x - 2)^5$.

**Resolución.** 1) El dominio de definición de la función dada es toda la recta numérica, ya que $x^2 - x + 3 > 0$ para cada $x$. Encontramos la derivada: $f'(x) = \dfrac{3(2x-1)}{(x^2 - x + 3)^2}$. Resolviendo la ecuación $3(2x - 1) = 0$, obtenemos el punto de extremo posible $x = 1/2$. Investigado el signo de $f'(x)$ en el dibujo auxiliar (fig. 153) en el entorno del punto $x = 1/2$, resulta que en este punto la función dada tiene un mínimo local y $f(1/2) = -1/11$, el valor mínimo de la función.

2) El dominio de definición de la función dada es toda la recta numérica. Encontramos la derivada: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$. Resolviendo la ecuación $12x(x^2 - x - 2) = 0$, obtenemos tres puntos de extremo posible: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Investigado el signo de $f'(x)$ (fig. 154) en el entorno de estos puntos, resulta que $x_1 = -1$ y $x_3 = 2$ son los puntos de mínimo local, $f(-1) = -3$ y $f(2) = -30$ son los valores mínimos de la función, $x_2 = 0$ es el

punto de máximo local y $f(0) = 2$, el valor máximo de la función en este punto.

3) El dominio de definición de la función dada es toda la recta numérica. Encontramos la derivada: $f'(x) = 5(x-2)^4$. La derivada se anula en el único punto $x = 2$. Puesto que $f'(x)$ es positiva tanto a la izquierda de este punto como a su derecha, o sea al pasar por el punto $x = 2$ no cambia de signo, la función dada no tiene puntos de extremo.

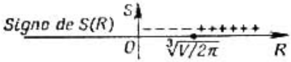


Fig. 155

**Ejemplo 3 (problema de la «mejor» lata de conservas).** Hallar la mejor variante de fabricación de una lata de conservas de volumen fijo $V$ que tiene la forma de cilindro circular recto y la superficie mínima $S$ (para su fabricación debe utilizarse la cantidad mínima de hojalata).

**Resolución.** Escribamos las fórmulas para el volumen de la lata y para el área de su superficie:

$$V = \pi R^2 \cdot h, \quad S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh.$$

Expresando la altura de la lata $h$ por el radio $h = V/(\pi R^2)$ y sustituyendo la expresión obtenida en la fórmula para la superficie, obtenemos

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}, \quad 0 < R < \infty.$$

Así pues, el problema de la «mejor» lata de conservas se reduce a la determinación de tal valor de $R$ con el cual alcanza su valor mínimo la función $S(R)$. Calculemos la derivada de la función $S(R)$:

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = \frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V).$$

Resolviendo la ecuación $\frac{2}{R^2}(2\pi R^3 - V) = 0$, obtenemos el punto de extremo posible $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$. Investiguemos el signo de la derivada en el entorno de este punto (fig. 155). Para $0 < R < \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ la derivada es negativa y la función $S(R)$ decrece, para $\sqrt[3]{V/(2\pi)} < R < +\infty$ la derivada es positiva y la función $S(R)$ crece. Por consiguiente, $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ es el punto de mínimo local y $S(\sqrt[3]{V/(2\pi)}) = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ es el valor mínimo de la función en este punto.

Así pues, el radio de la lata y su altura, mejores desde el punto de vista de la condición de mínimo de $S(R)$, se determinan por las fórmulas $R = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $h = 2R$, o sea, la altura de la «mejor» lata es igual a su diámetro.

Se puede ampliar el problema planteado. Por ejemplo, considerar otra variante: hallar la mejor forma de una lata de conservas de volumen fijo $V$ que tenga la longitud mínima de todas sus costuras $l$ (es necesario minimizar el trabajo de soldadura de las costuras). Resuelva este problema por sí mismo. Notemos que la longitud de las costuras se expresa por la fórmula $l = 4\pi R + h$ y el radio de la lata y su altura, siempre que éste tenga la longitud mínima de sus costuras, se determinan por las fórmulas: $R = \sqrt[3]{V/(2\pi^2)}$, $h = 2\pi R$. ●

**4. Sentido de convexidad y puntos de inflexión de la gráfica de una función.** Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable sobre

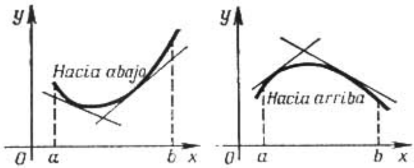


Fig. 156

el intervalo $(a, b)$. Entonces existe la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en todo punto $M(x; f(x))$ de esta gráfica $(a < x < b)$, con la particularidad de que la tangente no es paralela al eje $Oy$, puesto que su coeficiente angular, igual a $f'(x)$, es finito.

**Definición 1.** *Diremos que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene sobre $(a, b)$ una convexidad orientada hacia abajo (hacia arriba) si esta gráfica está dispuesta no inferior (no superior) a toda tangente a la gráfica de la función sobre $(a, b)$* (fig. 156).

De la definición se deduce que en el trozo de convexidad las tangentes a la gráfica de la función no se intersecan con la misma gráfica y tienen con éste sólo puntos de tangencia.

**Teorema 5.15.** *Si la función $y = f(x)$ tiene sobre el intervalo $(a, b)$ la derivada segunda $y\ f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$ en todos los puntos de $(a, b)$, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene en $(a, b)$ una convexidad orientada hacia abajo (hacia arriba).*

□ **Demostración.** Para precisar, consideremos el caso de $f''(x) \geqslant 0$ sobre $(a, b)$. Designemos con $c$ un punto arbitrario de $(a, b)$ (fig. 157). Se necesita demostrar que la gráfica de la función $y = f(x)$ está no inferiormente que la tangente que pasa por el punto $M(c, f(c))$.

Escribamos la ecuación de esta tangente, designando la ordenada corriente de sus puntos con $Y$: $Y - f(c) = f'(c)(x - c)$ o bien

$$Y = f(c) + f'(c)(x - c). \tag{3}$$

Desarrollemos la función $y = f(x)$ en el entorno del punto $c$ según la fórmula de Taylor para $n = 1$. Resulta

$$y = f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2, \quad \xi \in (c, x). \qquad (4)$$

Puesto, según la suposición, $f(x)$ tiene $f''(x)$ sobre $(a, b)$, entonces, conforme al teorema de Taylor, la fórmula (4) es válida para cada $x$ de $(a, b)$. Sustrayendo la igualdad (3) de la (4), tenemos

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2. \qquad (5)$$

Puesto que, según la hipótesis, $f''(x) \geqslant 0$ sobre $(a, b)$, el segundo miembro de la igualdad (5) no es negativo, o sea, $y - Y \geqslant 0$ para todos los valores de $x$ de $(a, b)$ o bien $y \geqslant Y$. La última desigualdad

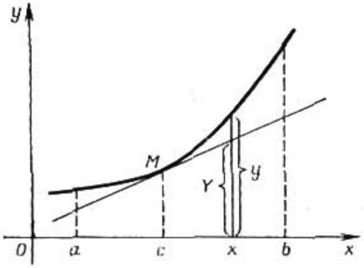


Fig. 157

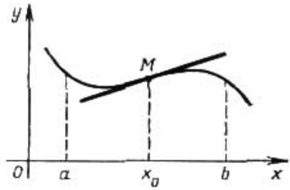


Fig. 158

demuestra precisamente que la gráfica de la función $y = f(x)$ está, por doquier dentro de los límites de $(a, b)$ no inferior que la tangente (3).

Análogamente se demuestra el teorema para el caso $f''(x) \leqslant 0$. ■

**Definición 2.** *El punto $M(x_0; f(x_0))$ se llama punto de inflexión de la gráfica de una función $y = f(x)$ si en el punto $M$ la gráfica tiene una tangente y existe tal entorno del punto $x_0$ dentro de los límites del cual la gráfica de la función $y = f(x)$, tiene, a la izquierda del punto $x_0$ y a su derecha, los sentidos opuestos de convexidad.*

Es evidente que en el punto de inflexión la tangente corta la gráfica de la función, ya que por un lado de este punto el gráfico se halla debajo de la tangente y por otro, por encima de ésta, o sea, en el entorno del punto de inflexión la gráfica de la función pasa geométricamente de un lado de la tangente a su otro lado y «se dobla» en ella (fig. 158).

**Teorema 5.16 (condición necesaria del punto de inflexión).** *Supongamos que la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene la inflexión en el* *punto $M(x_0; f(x_0))$ y la función $f(x)$ tiene en el punto $x_0$ la segunda derivada continua. Entonces $f''(x)$ se anula en el punto $x_0$, o sea, $f''(x_0) = 0$.*

□ **Demostración.** Supongamos lo inverso, o sea, admitamos que $f''(x_0) \neq 0$. Entonces, en virtud de la continuidad de la derivada segunda, conforme al teorema 4.9 sobre la estabilidad del signo de una función continua, existe cierto entorno del punto $x_0$ en el cual $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) y, por lo tanto, según el teorema 5.15, la

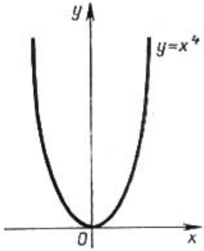


Fig. 159

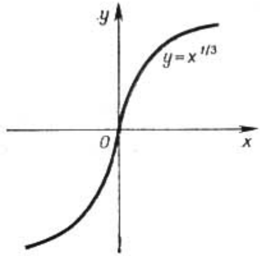


Fig. 160

gráfica de la función $y = f(x)$ tiene un sentido determinado de convexidad en este entorno. Pero esto contradice la existencia de la inflexión en el punto $M(x_0; f(x_0))$. La contradicción obtenida demuestra el teorema. ■

Cabe notar que no todo punto $M(x_0; f(x_0))$, para el cual $f''(x_0) = 0$, es punto de inflexión. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^4$ no tiene una inflexión en el punto $(0; 0)$, aunque $f''(x) = 12x^2 = 0$ para $x = 0$ (fig. 159). Por esta razón el hecho de que la segunda derivada vale cero es sólo la condición necesaria de inflexión. Llamaremos *críticos* los puntos $M(x_0; f(x_0))$ de la gráfica para los cuales $f''(x_0) = 0$. Es preciso investigar adicionalmente la cuestión sobre la existencia de la inflexión en cada punto crítico para lo cual conviene determinar la condición suficiente de inflexión.

**Teorema 5.17 (condición suficiente del punto de inflexión).** *Supongamos que la función $f(x)$ tiene la segunda derivada en cierto entorno del punto $x_0$. En este caso si dentro de los límites del entorno indicado $f''(x)$ tiene signos opuestos a la izquierda del punto $x_0$ y a su derecha, la gráfica $y = f(x)$ tiene una inflexión en el punto $M(x_0; f(x_0))$.*

□ **Demostración.** Del hecho de que $f''(x)$ tiene signos contrarios a la izquierda del punto $x_0$ y a su derecha, apoyándonos en el teorema 5.15 concluimos que el sentido de convexidad de la gráfica de la función es opuesto a la izquierda del punto $x_0$ y a su derecha. Esto significa precisamente la existencia de la inflexión en el punto $M(x_0; f(x_0))$. ■

**Observación.** El teorema queda cierto si $f(x)$ tiene la segunda derivada en cierto entorno del punto $x_0$, a excepción del mismo punto $x_0$, y existe la tangente a la gráfica de la función en el punto $M$. En este caso si dentro de los límites del entorno indicado $f''(x)$ tiene signos contrarios a la izquierda del punto $x_0$ y a su derecha, la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene una inflexión en el punto $M(x_0; f(x_0))$. La demostración de este hecho es análoga a la del teorema.

○ Examinemos un ejemplo: $f(x) = x^{1/3}$. Esta función tiene en el punto $x = 0$ una derivada infinita y la tangente a la gráfica de la

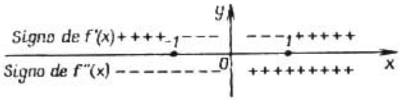


Fig. 161

función en el punto $O(0; 0)$ coincide con el eje $Oy$. En el punto $x = 0$ la segunda derivada no existe. No obstante, la gráfica de la función $y = x^{1/3}$ tiene una inflexión en el punto $O(0; 0)$, ya que la segunda derivada $f''(x) = -\frac{2}{9}\frac{1}{x^{5/3}}$ tiene a la izquierda del punto $x = 0$ y a su derecha signos opuestos (fig. 160). ●

Así pues, la cuestión sobre el sentido de convexidad y los puntos de inflexión de la gráfica de una función se investiga con ayuda de la segunda derivada.

○ A título de ejemplo vamos a continuar examinando la función $f(x) = x^3 - 3x$ (véase el subp. 2). Marcaremos el signo de la derivada segunda en un dibujo auxiliar (véase la fig. 152). Encontramos la derivada segunda $f''(x) = 6x$. De la ecuación $6x = 0$ obtenemos un punto crítico: $O(0; 0)$. Marcando el punto $x = 0$ en otro dibujo auxiliar (fig. 161) e investigando el signo de $f''(x)$ en el entorno de este punto, obtenemos: a la izquierda del punto $x = 0$ la derivada $f''(x) < 0$ (la gráfica está orientada con convexidad hacia arriba) y a su derecha $f''(x) > 0$ (el gráfico está orientado con convexidad hacia abajo), o sea, el punto $O(0, 0)$ es punto de inflexión del gráfico de la función en cuestión. Este gráfico está representado esquemáticamente en la fig. 162. ●

Vamos a demostrar ahora que la parte de la elipse $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$ situada en el semiplano superior $(y \geqslant 0)$ tiene sobre el intervalo $(-a, a)$ una convexidad orientada hacia arriba. En efecto, de la ecuación de la elipse obtenemos $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Luego encontramos

$$y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad y''=-\frac{ba}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

De la expresión para la derivada segunda se desprende que esta derivada es negativa sobre el intervalo $(-a, a)$. Por lo tanto, la curva dada sobre todo el intervalo $(-a, a)$ está orientada con la convexidad hacia arriba (véase la fig. 55).

Análogamente, se puede mostrar que la parte de la hipérbola $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right)$, situada en el semiplano superior sobre los intervalos $(a, +\infty)$ y $(-\infty, -a)$ tiene la convexidad orientada hacia arriba (proponemos que el lector haga esto por sí mismo).

**5. Asíntotas de la gráfica de una función.** Al investigar el comportamiento de una función en el infinito, o sea, cuando $x \to +\infty$ y

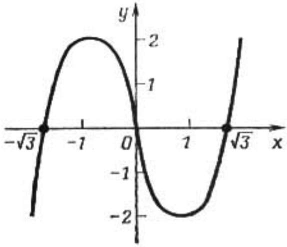


Fig. 162

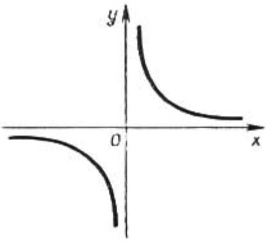


Fig. 163

cuando $x \to -\infty$ o en la proximidad de los puntos de discontinuidad de segunda especie resulta frecuentemente que el gráfico de la función se aproxima tan cerca como se quiera a una u otra recta. Tales rectas se llaman *asíntotas* [1]).

Existen tres tipos de asíntotas: *verticales, horizontales y oblicuas.*

**Definición 1.** *La recta $x = x_0$ se llama asíntota vertical de la gráfica de la función $y = f(x)$ si al menos uno de los valores límites $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ es igual a $+\infty$ o a $-\infty$.*

Por ejemplo, el gráfico de la función $y = f(x) = 1/x$ (fig. 163) tiene la asíntota vertical $x = 0$, ya que $f(x) \to +\infty$ para $x \to 0+$ y $f(x) \to -\infty$ para $x \to 0-$.

[1]) Con el concepto de asíntota ya nos hemos encontrado en la geometría analítica al considerar la hipérbola (véase el cap. 2, § 6, subp. 2).

**Definición 2.** *La recta* $y = A$ *se llama asíntota horizontal de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *para* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ *si* $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = A$.

Por ejemplo, la gráfica de la función anteriormente examinada $y = 1/x$ tiene la asíntota horizontal $y = 0$ para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$, ya que $1/x \to 0$ para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

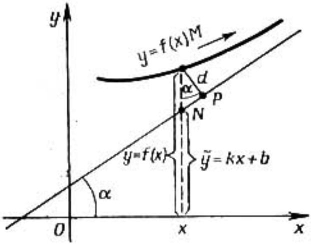


Fig. 164

**Definición 3.** *La recta* $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ *se llama asíntota oblicua de la gráfica de la función* $y = f(x)$ *para* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ *si la función* $f(x)$ *puede ser representada en la forma*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \qquad (6)$$

*donde* $\alpha(x) \to 0$ *cuando* $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Aclaremos el significado geométrico de la asíntota oblicua. Para precisar, consideremos el caso cuando $x \to +\infty$ (el caso $x \to -\infty$ se considera análogamente).

Sea $M(x; y)$ un punto de la gráfica de la función $y = f(x)$ y supongamos que la recta $\tilde{y} = kx + b$ es asíntota oblicua de la gráfica de la función para $x \to +\infty$. Designemos con $\tilde{y}$ la ordenada corriente del punto sobre la asíntota y con $N(x; \tilde{y})$ el punto sobre la asíntota (fig. 164). Entonces $|MN| = |y - \tilde{y}| = |f(x) - (kx + b)| = |\alpha(x)| \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Bajemos del punto $M$ la perpendicular $MP$ a la asíntota. La distancia $d$ entre el punto $M$ y la asíntota es igual a $|MP| = |MN| \cos\alpha$, donde $\alpha$ es el ángulo comprendido entre la asíntota y el eje $Ox$ y, por consiguiente, $\lim\limits_{x \to +\infty} d = 0$.

Por lo tanto, la distancia del punto $M(x; y)$ de la gráfica de la función a la asíntota tiende a cero cuando $x \to +\infty$, o sea, la gráfica de la función se aproxima indefinidamente a la asíntota para $x \to +\infty$.

Analicemos el método de determinación de la asíntota oblicua, o sea, el método de determinación de los números $k$ y $b$ en la ecuación de la asíntota. Dividiendo la igualdad (6) por $x$ y pasando al límite para $x \to +\infty$, obtenemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[ k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k,$$

ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{x}=0$. Así pues,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{7}$$

Luego, de la relación (6) tenemos

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)]=b.$$

De esta manera,

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]. \tag{8}$$

Hemos demostrado que si la recta $\tilde{y}=kx+b$ es asíntota oblicua, los números $k$ y $b$ se hallan según las fórmulas (7) y (8). Inversamente, si ambos límites (7) y (8) existen, y $k\neq 0$, la recta $\tilde{y}=kx+b$ es la asíntota oblicua de la gráfica de la función $y=f(x)$ cuando $x\to+\infty$. En efecto, suponiendo $\alpha(x)=f(x)-kx-b$ y utilizando la igualdad (8), obtenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$. Por consiguiente, es válida la igualdad $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, donde $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$, o sea, la recta $\tilde{y}=kx+b$ es la asíntota oblicua de la gráfica de la función para $x\to+\infty$.

Terminando el análisis de la asíntota oblicua, enunciemos el resultado obtenido en forma de un teorema.

**Teorema 5.18.** *Para que la gráfica de la función $y=f(x)$ tenga, cuando $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, la asíntota oblicua $y=kx+b$, es necesario y suficiente que existan dos límites*

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k \text{ y } \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=b.$$

Es conveniente buscar las asíntotas en el siguiente orden: 1) asíntotas verticales; 2) asíntotas horizontales; 3) asíntotas oblicuas.

○ **Ejemplo 4.** Hallar las asíntotas para la gráfica de la función $y=\frac{x^2+2x-3}{x}$.

**Resolución.** 1) Encontramos las asíntotas verticales. El punto $x=0$ es punto de discontinuidad de segunda especie de la función dada, con la particularidad de que $y\to+\infty$ cuando $x\to 0-$ e $y\to-\infty$ cuando $x\to 0+$. Por consiguiente, el eje de ordenadas $x=0$ es la asíntota vertical.

2) **Encontramos** las asíntotas horizontales:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{x^2+2x-3}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(x+2-\frac{3}{x}\right) = \underset{(-\infty)}{+\infty},$$

**por** lo tanto las asíntotas horizontales no existen.

3) Encontramos las asíntotas oblicuas:

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} [f(x)-kx] = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left[\frac{x^2-2x-3}{x} - x\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(\frac{2x-3}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(2-\frac{3}{x}\right) = 2.$$

Por consiguiente, la recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua de la gráfica de la función dada tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.

La gráfica de la función está representada esquemáticamente en la fig. 165.

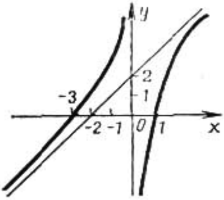


Fig. 165

**Ejemplo 5.** Demostrar que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene por sus asíntotas oblicuas las rectas $y = \pm \frac{b}{a} x$.

**Resolución.** Puesto que $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, entonces

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right] = \pm\frac{b}{a};$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} [f(x)-kx] = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left[\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \mp \frac{b}{a}x\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left[\pm\frac{b}{a}\ \sqrt{x^2-a^2}-x)\right] = \pm\frac{b}{a} \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x^2} = 0.$$

**Por consiguiente, las** rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son **asíntotas** oblicuas de **la** hipérbola dada tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.

**6. Esquema de investigación de la gráfica de una función.** En el subpárrafo dado conoceremos el esquema aproximado según el cual es conveniente investigar el comportamiento de una función y construir su gráfica. Para ilustrar aducimos ejemplos.

Es racional estudiar la función dada y construir su gráfica en el siguiente orden:

1) hallar el dominio de definición de la función;

2) hallar los puntos de intersección de la gráfica de la función con los ejes de coordenadas;

3) hallar las asíntotas;

4) hallar los puntos de extremo posible;

5) hallar los puntos críticos;

6) con ayuda de un dibujo auxiliar investigar el signo de las derivadas primera y segunda. Determinar los trozos de crecimiento y de decrecimiento de la función, hallar el sentido de convexidad de la gráfica, los puntos de extremo y los de inflexión;

7) construir la gráfica, teniendo en cuenta la investigación realizada en los subp. 1) a 6).

En este caso al iniciar la investigación es útil verificar si es par o impar la función dada para que durante la construcción se utilice la simetría de la gráfica respecto al eje de ordenadas o respecto al origen de coordenadas.

○ **Ejemplo 6.** Siguiendo el esquema recién expuesto, construir la gráfica de la función

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

**Resolución.** 1) El dominio de definición de la función es el conjunto de todos los números reales, salvo $x=1$ (en este caso el denominador se anula).

2) Puesto que la ecuación $x^2+1=0$ no tiene raíces reales, la gráfica de la función no tiene puntos de intersección con el eje $Ox$, pero corta el eje $Oy$ en el punto $(0; -1)$.

3) Aclaremos la cuestión sobre la existencia de las asíntotas. Investiguemos el comportamiento de la función cerca del punto de discontinuidad $x=1$. Puesto que $y\to-\infty$ para $x\to 1-$ e $y\to+\infty$ para $x\to 1+$, la recta $x=1$ es la asíntota vertical de la gráfica de la función.

Si $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, entonces $y\to+\infty$ $(y\to-\infty)$, por lo tanto la gráfica no tiene una asíntota horizontal. A continuación, de la existencia de los límites

$$k=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{x^2+1}{x^2-x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+1/x^2}{1-1/x}=1,$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\left[\frac{x^2+1}{x-1}-x\right]=$$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+x}{x-1}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{1+1/x}{1-1/x}=1$$

se desprende que para $x\to+\infty$ y para $x\to-\infty$ la gráfica de la función tiene una asíntota oblicua $y=x+1$.

4) Para hallar los puntos de extremo posible calculemos la primera derivada de la función:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Resolviendo la ecuación $x^2-2x-1=0$, obtenemos dos puntos de extremo posible: $x_1=1-\sqrt{2}$ y $x_2=1+\sqrt{2}$.

5) Para hallar los puntos críticos calculemos la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Puesto que $f''(x)$ no se anula, no hay puntos críticos.

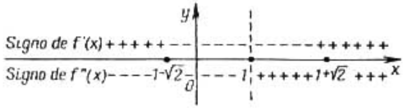


Fig. 166

6) Vamos a construir un dibujo auxiliar e investigar el signo de las derivadas primera y segunda (fig. 166). Resulta que la función crece sobre $(-\infty,\ 1-\sqrt{2})$, decrece sobre $(1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2})$ y vuelve a crecer sobre $(1+\sqrt{2},\ +\infty)$. Los puntos de extremo: *máximo* para $x=1-\sqrt{2}$, con la particularidad de que $f(1-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}$; *mínimo* para $x=1+\sqrt{2}$, con la particularidad de que $f(1+\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$. Sobre $(-\infty,\ 1)$ la gráfica tiene una convexidad orientada hacia arriba y sobre $(1,\ +\infty)$, una convexidad orientada hacia abajo.

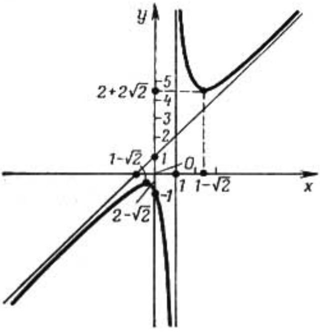


Fig. 167

7) Según los datos obtenidos construimos un esbozo del gráfico (fig. 167).

**Ejemplo 7.** Construir el gráfico de la función $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

**Resolución.** 1) El dominio de definición de la función es toda la recta numérica.

2) La gráfica de la función corta el eje $Ox$ en los puntos en que $(x-1)^2=0$, o sea, en el punto que tiene por abscisa $x=1$ y corta el eje $Oy$ en el punto que tiene por ordenada $y=1$.

3) Puesto que la función es continua sobre toda la recta numérica, no hay asíntotas verticales. Luego, de la existencia del límite

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3+x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x-2/x^2+1/x^3}{1+1/x^2}=\frac{0}{1}=0$$

se deduce que

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-0\cdot x]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x+1/x^2}{1+1/x^2}=\frac{1-0+0}{1+0}=1,$$

o sea, no hay asíntotas oblicuas y la recta $y=1$ es la asíntota horizontal.

4) Para hallar los puntos de extremo posible calculemos la derivada primera:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+1)-(x-1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}.$$

Resolviendo la ecuación $2x^2-2=0$, obtenemos dos puntos de extremo posible: $x_1=-1$, $x_2=1$.

5) Para hallar los puntos críticos calculemos la derivada segunda

$$f''(x)=\frac{4x(x^2+1)^2-(2x^2-2)\,2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4}=\frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Resolviendo la ecuación $4x(3-x^2)=0$, obtenemos tres puntos críticos: $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$.

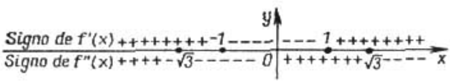


Fig. 168

6) Construimos un dibujo auxiliar (fig. 168) e investiguemos el signo de las derivadas primera y segunda.

Resulta que sobre $(-\infty,\ -1)$ la función crece, sobre $(-1,\ 1)$ decrece y sobre $(1,\ +\infty)$ vuelve a crecer. Los puntos de extremo: al pasar por el punto $x=-1$ la derivada $f'(x)$ cambia el signo de más a menos y al pasar por el punto $x = 1$ lo cambia de menos a más, por lo tanto en el punto $x = -1$ es el máximo y en el punto $x = 1$ es el mínimo, con la particularidad de que $f(-1) = 2$, $f(1) = 0$. En $(-\infty, -\sqrt{3})$ la gráfica está orientada con la convexidad hacia abajo, en $(-\sqrt{3}, 0)$ hacia arriba, en $(0, \sqrt{3})$ hacia abajo y en $(\sqrt{3}, +\infty)$ otra vez hacia arriba, por lo tanto, los puntos $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ son las abscisas de los puntos de inflexión, con la particularidad de que $f \times (-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}/2$; $f(0) = 1$, $f(\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}/2$.

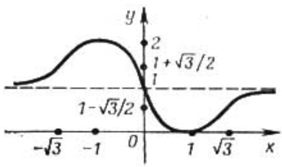


Fig. 169

7) Conforme a los datos obtenidos construimos la gráfica de la función (fig. 169). ●

**Ejercicios.** Construir las gráficas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$. (*Resp.* Para $x=1$ es el mínimo, $f(1)=2$; para $x=-1$ es el máximo, $f(-1)=-2$; $x=0$ es la asíntota vertical, $y=x$ es la asíntota oblicua.)

2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$. (*Resp.* Para $x=0$ es el máximo, $f(0)=0$; para $x=4$ es el mínimo, $f(4)=8$; $x=2$ es la asíntota vertical, $y=x+2$ es la asíntota oblicua.)

3. $f(x) = \dfrac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$. $\Big($*Resp.* Para $x=-3$ es el máximo, $f(-3)=-49/12$; para $x=1$ es el máximo, $f(1)=5/4$; para $x=2$ es el mínimo, $f(2)=9/8$; el punto $x=9/7$ es la abscisa del punto de inflexión; $f(9/7)=913/756$; $x=0$ es la asíntota vertical, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$ es la asíntota oblicua; $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ es el punto de intersección del gráfico con el eje $Ox$.$\Big)$

○ **Ejemplo 8.** Construir la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

**Resolución.** 1) La función está definida para $x > 0$, o sea, en el intervalo $0 < x + \infty$.

2) La gráfica de la función corta el eje $Ox$ en el punto en que $\ln x = 0$, o sea, en el punto que tiene por abscisa $x = 1$ y no tiene intersecciones con el eje $Oy$, ya que la función está definida para $x > 0$.

3) Como asíntota vertical sirve la recta $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ (demuéstrese esto por sí mismo). Encontramos las asín-

totas:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}.$$

Tenemos una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Empleando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} - 0 \cdot x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(aquí también hemos utilizado la regla de L'Hospital).

Por lo tanto, $k = b = 0$, o sea, no hay asíntotas oblicuas; la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal.


Fig. 170

4) Para encontrar los puntos de extremo posible calculemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Resolviendo la ecuación $1 - \ln x = 0$, obtenemos un punto de extremo posible: $x = e$.

5) Para encontrar los puntos críticos calculemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

Resolviendo la ecuación $2 \ln x - 3 = 0$, $\ln x = \frac{3}{2}$, $x = e^{3/2}$, obtenemos un punto crítico $x = e^{3/2}$.

6) En un dibujo auxiliar (fig. 170) investiguemos el signo de las derivadas primera y segunda.

Resulta que sobre $(0, e)$ la derivada $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1} = \frac{1 - 0}{1} = 1 > 0$, por lo tanto, la función crece; sobre $(e, +\infty)$ la derivada $f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{1 - 2 \ln e}{e^4} = \frac{1 - 2}{e^4} = -\frac{1}{e^4} < 0$, la función decrece. Los puntos de extremo: al pasar por el punto $x = e$ la derivada $f'(x)$ cambia el signo de más a menos, por lo tanto, en el punto $x = e$ es el máximo, con la particularidad de que $f(e) = \frac{1}{e}$. En $(0, e^{3/2})$ la derivada segunda $f''(e) = \frac{2 \ln e - 3}{e^3} =$

$= -\frac{1}{e^3} < 0$, la *gráfica tiene una convexidad orientada hacia* arriba y en $(e^{3/2}, +\infty)$ la derivada $f''(e^2) = \frac{2\ln e^2 - 3}{e^6} = \frac{1}{e^6} > 0$, la gráfica tiene otra convexidad orientada hacia abajo, por lo tanto, el punto $x = e^{3/2}$ es la abscisa del punto de inflexión, con la particularidad de que $f(e^{3/2}) = \frac{3}{2e^{3/2}}$. Así pues, el punto $\left(e^{3/2}; \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$ es el punto de inflexión de la gráfica de la función.

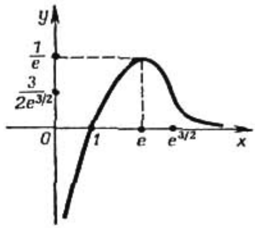

Fig. 171

7) A base de los datos obtenidos, construimos la gráfica de la función (fig. 171). ●

**Ejercicios.** Construir las gráficas de las siguientes funciones:
**1.** $f(x) = x \ln x$. (*Resp.* Para $x = 1/e$ es el mínimo, $f(1/e) = -1/e$; $(1; 0)$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje $Ox$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.)
**2.** $f(x) = x - \ln x$. (*Resp.* Para $x = 1$ es el mínimo, $f(1) = 1$; $x = 0$ es la asíntota vertical.)
**3.** $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. (*Resp.* Para $x = 1$ es el máximo, $f(1) = 1$; $x = 0$ es la asíntota vertical, $y = 0$ es la asíntota horizontal; $(e^{1/2}; 3/2e^{1/2})$ es el punto de inflexión, $(1/e; 0)$ es el punto de intersección de la gráfica con el eje $Ox$.)

○ **Ejemplo 9.** Construir la gráfica de la función $f(x) = x^2e^{-x}$.
**Resolución.** 1) El dominio de definición de la función es toda la recta numérica.

2) La gráfica de la función corta los ejes de coordenadas en el punto $O(0; 0)$.

3) Puesto que la función es continua sobre toda la recta numérica, no hay asíntotas verticales. Al buscar las asíntotas oblicuas es necesario considerar por separado los casos $x \to -\infty$, y $x \to +\infty$, tenemos

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = \infty$$

(demuéstrese esto por sí mismo).

Por consiguiente, para $x \to -\infty$ no hay una asíntota oblicua, y puesto que también $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^{-x} = +\infty$, tampoco existe una asíntota horizontal. Luego tenemos

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-0\cdot x]=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

(aquí hemos utilizado la regla de L'Hospital); por lo tanto, para $x\to+\infty$ no hay una asíntota oblicua, la recta $y=0$ es la asíntota horizontal.

4) Para encontrar los puntos de extremo posible, calculemos la derivada primera:

$$f'(x)=x(2-x)e^{-x}.$$

Resolviendo la ecuación $x(2-x)e^{-x}=0$ $(e^{-x}\neq 0)$, obtenemos dos puntos de extremo posible: $x_1=0$, $x_2=2$.

5) Para hallar los puntos críticos calculemos la segunda derivada:

$$f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}.$$

Resolviendo la ecuación $x^2-4x+2=0$, obtenemos dos puntos críticos: $x_1=2-\sqrt{2}$, $x_2=2+\sqrt{2}$.

6) Investiguemos los signos de las derivadas primera y segunda (fig. 172). Resulta que en $(-\infty, 0)$ la función decrece y en $(0, 2)$

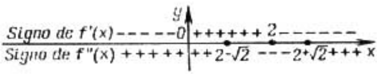


Fig. 172

crece y en $(2, +\infty)$ vuelve a decrecer. Los puntos de extremo: al pasar por el punto $x=0$ la derivada $f'(x)$ cambia el signo de menos a más y al pasar por el punto $x=2$, de más a menos, por lo tanto, en el punto $x=0$ es el mínimo y en el punto $x=2$ es el máximo, con la particularidad de que $f(0)=0$, $f(2)=4e^{-2}$. En $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ la gráfica está orientada con la convexidad hacia abajo, en $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ hacia arriba y en $(2+\sqrt{2}+\infty)$, otra vez hacia abajo, por lo tanto, $x=2-\sqrt{2}$, $x=2+\sqrt{2}$ son las abscisas de los puntos de inflexión, con la particularidad de que $f(2-\sqrt{2})=$ $=(2-\sqrt{2})^2e^{-(2-\sqrt{2})}$, $f(2+\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})^2e^{-(2+\sqrt{2})}$.

7) A base de los datos obtenidos construimos la gráfica de la función (fig. 173). ●

**Ejercicios.** Construir las gráficas de las siguientes funciones:
**1.** $f(x)=\frac{e^x}{x}$. (*Resp.* Para $x=1$ es el mínimo, $f(1)=e$; no hay puntos de inflexión; $x=0$ es la asíntota vertical; $y=0$ es la asíntota horizontal para $x\to-\infty$.)
**2.** $f(x)=x^2e^{1/x}$. (*Resp.* Para $x=1/2$ es el mínimo; $f(1/2)=1/4e^2$; no hay puntos de inflexión; $x=0$ es la asíntota vertical para $x\to 0+$, $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2e^{1/x}=0$.)
**3.** $f(x)=(1-x)e^x$. (*Resp.* Para $x=0$ es el máximo; $f(0)=1$; $(-1, 2/e)$ es el punto de inflexión; $y=0$ es la asíntota horizontal.)

○**Ejemplo 10.** Construir la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$.

**Resolución.** 1) El dominio de determinación de la función es el conjunto de los valores de $x$ que satisfacen la desigualdad $x^2-1\geqslant 0$ o bien $|x|\geqslant 1$, es decir, sea $x\leqslant -1$, sea $x\geqslant 1$. Con otras palabras, la función está definida en dos intervalos en sentido lato: $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$. En este caso no es difícil notar que sobre estos intervalos la función no es negativa.

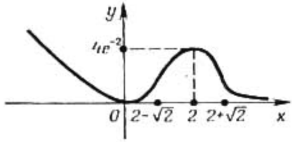

Fig. 173

2) El gráfico de la función no tiene puntos de intersección con los ejes de coordenadas, ya que $x\neq 0$ e $y\neq 0$.

3) Puesto que la función es continua en todos los puntos del dominio de definición, no hay, evidentemente, asíntotas verticales. Buscamos las asíntotas oblicuas:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}\right)}{x}=1+1=2;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}-2x]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[(\sqrt{x^2+1}-x)+(\sqrt{x^2-1}-x)]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0-0=0;$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+1/x^2} + \sqrt{1-1/x^2}\right)}{x} = -1 - 1 = -2;$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} + 2x] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} [(\sqrt{x^2+1} + x) + (\sqrt{x^2-1} + x)] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) + \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x} = 0 - 0 = 0.$$

Ahora bien, obtenemos que la gráfica de la función tiene dos distintas asíntotas oblicuas: $y = 2x$ para $x \to +\infty$, e $y = -2x$ para $x \to -\infty$.

Puesto que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, no hay asíntotas horizontales.

4) Para hallar los puntos de extremo posible calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x\left(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^4-1}}.$$

No existen puntos extremos, ya que el numerador de la fracción no se anula. Para $x = \pm 1$ la derivada $f'(x) = \infty$.

5) Para encontrar los puntos críticos calculemos la derivada segunda:

$$f''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} + \frac{\sqrt{x^2-1} - \dfrac{x \cdot 2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{(x^2-1)^{3/2} - (x^2+1)^{3/2}}{(x^4-1)\sqrt{x^4-1}}.$$

No hay puntos críticos, ya que el numerador de la fracción no se anula.

6) Investiguemos el signo de las derivadas primera y segunda (fig. 174). Resulta que sobre $(-\infty, -1]$ la función decrece y la gráfica tiene una convexidad orientada hacia arriba; en $[1, +\infty)$ la función crece y la gráfica tiene otra convexidad también orientada hacia arriba. No existen extremos ni puntos de inflexión. Hagamos un cálculo auxiliar: $f(\pm 1) = \sqrt{2}$.

7) A base de los datos obtenidos construimos la gráfica de la función (fig. 175).

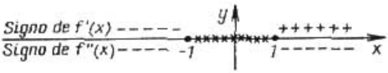


Fig. 174

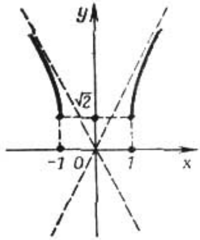


Fig. 175

**Ejercicio.** Construir la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}-$ $-\sqrt{x^2+1}$. (*Resp*. El dominio de definición: $|x|\geqslant 1$, no hay extremos ni puntos de inflexión; $y=0$ es la asíntota horizontal.)

## PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

**1.** Demuéstrese el teorema 5.12 para el caso de crecimiento de una función.

**2.** Dése la definición del extremo local de una función.

**3.** ¿Puede una función tener varios extremos locales?

**4.** ¿Puede el máximo local de cierta función resultar menor que cualquier mínimo local de la misma función?

**5.** Enúnciese el teorema que expresa la condición necesaria del extremo local. Citando un ejemplo, muéstrese que esta condición no es suficiente.

**6.** ¿Qué puntos se llaman puntos de extremo posible de una función?

**7.** Enúnciese el teorema que expresa la condición suficiente del extremo local.

**8.** Dése la definición del sentido de convexidad de la gráfica de una función.

**9.** Enúnciese el teorema con el cual se resuelve la cuestión sobre el sentido de convexidad de la gráfica de una función.

**10.** Dése la definición del punto de inflexión de la gráfica de una función.

**11.** Enúnciese la condición necesaria del punto de inflexión de la gráfica de una función. Citando un ejemplo, muéstrese que esta condición no es suficiente

**12.** ¿Qué puntos se llaman críticos?

**13.** Enúnciese la condición suficiente del punto de inflexión de la gráfica de una función.

**14.** ¿Puede una función tener el extremo en el punto de inflexión de la gráfica de la misma?

**15.** Dése las definiciones de las asíntotas vertical, horizontal y oblicua. Cite ejemplos.

**16.** *Demuéstrese la afirmación siguiente:* si la recta $y=kx+b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $y=f(x)$ para $x\to+\infty$, existen los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k;\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b \qquad (*)$$

e, inversamente, si ambos límites (*) existen, la recta $y = kx + b$ es la asíntota oblicua de la gráfica de la función $y = f(x)$ para $x \to +\infty$.

17. Exponga el esquema de construcción de la gráfica de una función.

# § 16. Problemas de control

5.1. ¿Con qué valores de $x$ las tangentes a la gráfica de la función $y = x^3 - x$ son paralelas a la recta $y = x$?

5.2. ¿Bajo qué ángulo al eje $Ox$ la curva $y = 2x^3 - x$ corta el eje $Oy$?

5.3. En los puntos (0; 0), (2; 1), (4; 0) están trazadas las tangentes a la parábola $y = \frac{4x - x^2}{4}$. Halle los ángulos de inclinación de las mismas al eje $Ox$.

5.4. Escríbase la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $y = \frac{x^3+1}{3}$ en el punto de intersección de la gráfica con el eje de abscisas.

5.5. Hállese el ángulo de inclinación que la tangente a la hipérbola $xy = 1$ en el punto (1; 1) tiene al eje $Ox$.

5.6. ¿Con qué valor de $a$ la curva $y = \frac{ax - x^3}{4}$ corta el eje $Ox$ bajo el ángulo 45° (al menos en uno de los puntos de intersección)?

5.7. ¿Es la recta $y = 3x - 4$ una tangente a la curva $y = x^3 - 2$?

5.8. Plantéese la ecuación de la tangente trazada del punto $M(-1; 3)$ a la hipérbola $y = 1/x$.

5.9. Se dan dos parábolas $y = 8 - 3x - 2x^2$ e $y = 2 + 9x - 2x^2$. Hállese la ecuación de la recta que toca a ambas parábolas.

5.10. Se dan dos rectas $y = -x$ e $y = 5x - 6$. Hállese los valores de los parámetros $a$ y $b$ con los cuales ambas rectas dadas tocan a la parábola $y = x^2 + ax + b$.

5.11. Una circunferencia se da por la ecuación $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Hállese las ecuaciones de las tangentes a esta circunferencia en los puntos de su intersección con el eje $Ox$.

5.12. Cítese un ejemplo (es decir, escríbase la fórmula y constrúyase con esmero la gráfica) de una función definida por doquier que tiene una derivada por doquier, salvo los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

5.13. Demuéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

no tiene una derivada en el punto $x = 0$.

5.14. Demuéstrese que la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \text{ es racional}, \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

tiene una derivada en el punto $x = 0$.

5.15. Hállese la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y mostrar que su derivada es discontinua en el punto $x = 0$.

5.16. Desarróllese la función $f(x) = \ln(1 + x)$ por la fórmula de Maclaurin con el término residual en la forma de Peano.

**5.17.** Desarróllese la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ por la fórmula de Maclaurin hasta el término con $x^3$, inclusivamente.

**5.18.** Desarróllese mediante la fórmula de Maclaurin las fórmulas siguientes hasta el término de orden indicado, inclusivamente:

a) $f(x) = e^{-x}$ hasta el término con $x^2$; b) $f(x) = e^{2x-x^2}$ hasta el término con $x^5$; c) $f(x) = \ln(\cos x)$ hasta el término con $x^4$; d) $f(x) = \operatorname{sen} \operatorname{sen} x$ hasta el término con $x^3$.

**5.19.** Con ayuda de la fórmula de Maclaurin hállese los límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{sen} x - 3x}{x^4}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cos x}{x^4}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x + x^2/2)}{x(\operatorname{sen} x - x)}$.