6

CÁLCULO INTEGRAL

§ 1. Primitiva e integral indefinida

1. Concepto de función primitiva. Uno de los problemas fundamentales del cálculo diferencial consiste en determinar la derivada de una función dada. Variadas cuestiones del análisis matemático y sus numerosas aplicaciones en la geometría, la mecánica, la física y la técnica conducen a la resolución del problema inverso: dada una función $f(x)$, hallar tal función $F(x)$ cuya derivada sea igual a la función $f(x)$, o sea, $F'(x) = f(x)$.

La reconstrucción de una función a partir de su derivada conocida es uno de los problemas fundamentales del cálculo integral.

Definición 1. *La función $F(x)$ se llama primitiva para la función $f(x)$ en cierto intervalo X si para todos los valores de x de este intervalo se cumple la igualdad $F'(x) = f(x)$.*

Examinemos algunos ejemplos.

○ **1.** La función $F(x) = \operatorname{sen} x$ es primitiva para la función $f(x) = \cos x$ sobre toda la recta, ya que para todo valor de x $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

2. La función $F(x) = x^3$ es primitiva para la función $f(x) = 3x^2$ sobre toda la recta, ya que en cada punto x $(x^3)' = 3x^2$.

3. La función $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ es primitiva para la función $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo $(-1, +1)$, ya que en todo punto x de este intervalo $(\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ●

El problema de determinar para la función dada $f(x)$ su primitiva no se resuelve unívocamente. Efectivamente, si $F(x)$ es primitiva para $f(x)$, o sea, $F'(x) = f(x)$, entonces la función $F(x) + C$ donde C es una constante arbitraria, también es derivada para $f(x)$, ya que $[F(x) + C]' = f(x)$ para todo número C. Por ejemplo, para $f(x) = \cos x$ de primitiva sirve no sólo $\operatorname{sen} x$, sino también la función $\operatorname{sen} x + C$, ya que $(\operatorname{sen} x + C)' = \cos x$.

Mostremos ahora que el conjunto de las funciones $F(x) + C$, donde $F(x)$ es cierta primitiva para la función $f(x)$ y C es una constante arbitraria, agota todas las primitivas para la función $f(x)$.

Lema 6.1. *La función cuya derivada sobre cierto intervalo X es igual a cero es constante en este intervalo.*

□ **Demostración.** Supongamos que en todos los puntos del intervalo X la función derivada $f(x)$ es igual a cero, o sea, $f'(x) = 0$. Entonces para todos dos puntos $x_1, x_2 \in X$, según el teorema de Lagrange,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Puesto que $f'(\xi) = 0$, entonces $f(x_2) = f(x_1)$. Esto significa precisamente que en todos los puntos del intervalo los valores de la función son iguales, o sea, $f(x) = C$, donde C es cierto número. ■

Teorema 6.1. *Si $F(x)$ es primitiva para una función $f(x)$ en cierto intervalo X, toda otra primitiva para $f(x)$ en el mismo intervalo puede ser representada en la forma $F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria.*

□ **Demostración.** Sea $\Phi(x)$ toda otra primitiva para la función $f(x)$ sobre el intervalo X, o sea, $\Phi'(x) = f(x)$. Entonces para cada $x \in X$

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

y esto quiere decir (según el lema 6.1) que la función $\Phi(x) - F(x)$ es constante, o sea, $\Phi(x) - F(x) = C$, donde C es cierto número. Por consiguiente, $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Del teorema demostrado se deduce que el conjunto de las funciones $F(x) + C$, donde $F(x)$ es una de las primitivas para la función $f(x)$ y C, la constante arbitraria, agota toda la familia de las funciones primitivas para $f(x)$.

2. Integral indefinida.

Definición 2. *Si la función $F(x)$ es primitiva para una función $f(x)$, el conjunto de las funciones $F(x) + C$, donde C es la constante arbitraria, se llama integral indefinida de la función $f(x)$ y se designa con símbolo*

$$\int f(x)\,dx\,^{1)} = F(x) + C. \tag{1}$$

En este caso la función $f(x)$ se llama *función subintegral*; $f(x)\,dx$, *expresión subintegral* o *integrando* y la variable x, *variable de integración.*

Por lo tanto, el símbolo $\int f(x)\,dx$ designa el conjunto de todas las primitivas para la función $f(x)$.

La reconstrucción de una función a partir de su derivada o bien, que es lo mismo, la determinación de una integral indefinida a partir de la función subintegral dada se llama *integración* de esta función. La integración es la operación inversa a la derivación (diferenciación). Para asegurarse de que la integración esté cumplida correcta-

[1]) Se lee: «la integral indefinida de $f(x)$ respecto a dx».

mente, basta derivar el resultado y obtener en este caso la función subintegral.

○ **Ejemplo 1.** Verificar que $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$.

Resolución. Derivando el resultado de integración $(x^3 + C)' = 3x^2$, obtenemos la función subintegral. Por consiguiente la integración está cumplida correctamente. ●

Ejercicios. Verificar que: **1.** $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.

2. $\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$. **3.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

4. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$. **5.** $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. **7.** $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

En relación con el concepto de primitiva surge la pregunta: ¿para qué funciones existen primitivas (y, por lo tanto, también integrales indefinidas)? Aquí sólo señalemos que en el § 4 quedará demostrado que toda función continua sobre un segmento tiene sobre este segmento una primitiva (por consiguiente, también una integral indefinida). A continuación supondremos que todas las funciones que están bajo el signo integral son continuas y la fórmula (1) tiene sentido. En caso de una función discontinua consideraremos su integración sólo en aquellos intervalos en los cuales ésta es continua.

Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ es definida y continua para todos los valores de x distintos de cero, o sea, tiene una discontinuidad en el punto $x = 0$ y es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Si $x > 0$, para $f(x) = 1/x$ una de las primitivas es $F(x) = \ln x$, ya que $(\ln x)' = 1/x$. Por lo tanto, para $x > 0$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C.$$

Si $x < 0$, una de las primitivas para $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln(-x)$, ya que $[\ln(-x)]' = (1/-x)\cdot(-1) = 1/x$. Por lo tanto, para $x < 0$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + C.$$

Uniendo ambos casos, obtenemos la fórmula

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x + C & \text{para } x > 0 \\ \ln(-x) + C & \text{para } x < 0 \end{cases} = \ln|x| + C.$$

Geométricamente la integral indefinida es un conjunto (familia) de las curvas que no son sino las gráficas de las primitivas

$y = F(x) + C$. Si $y = F(x)$ es cualquier curva, entonces, conforme al teorema 6.1, todas las otras curvas se obtienen de ella por el desplazamiento paralelo a lo largo del eje Oy (fig. 176). En este caso, si $y = F(x)$ es primitiva para $f(x)$, o sea $F'(x) = f(x)$, según el significado geométrico de la derivada la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente en cada punto con la abscisa x de la curva $y = F(x)$ es igual a $f(x)$. Todas las demás curvas tendrán en cada punto con la abscisa x las rectas tangentes que tienen el mismo coeficiente angular que la recta tangente de $f(x)$.

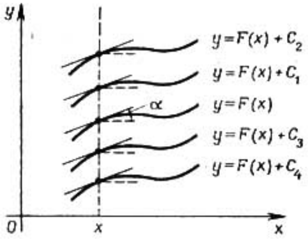


Fig. 176

○ **Ejemplo 2.** ¿Qué familia de curvas forman las primitivas $y = F(x) + C$ si el coeficiente angular de la tangente en cada punto con la abscisa x de la curva $y = F(x)$ es igual a $f(x) = x^2$?

Resolución. Tenemos $F'(x) = f(x) = x^2$. Conforme a la definición de la integral indefinida

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C.$$

Por consiguiente, las curvas forman una familia de parábolas cúbicas $y = \frac{x^3}{3} + C$. ●

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Dése la definición de la función primitiva. Cítese ejemplos.
2. ¿En qué consiste el significado de la operación de integración?
3. Explíquese por qué al integrar aparece una constante arbitraria.
4. Dése la definición de la integral indefinida.
5. ¿En qué consiste el significado geométrico de la integral indefinida?

§ 2. Propiedades fundamentales de la integral indefinida

De la definición de la integral indefinida se deducen inmediatamente sus propiedades siguientes.

1°. *La derivada de una integral indefinida es igual a la función subintegral; la diferencial de una integral definida es igual a la expresión subintegral, o sea,*

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \quad \text{y} \quad \mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□ Efectivamente, $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ y

$$d\int f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = f(x)\,dx. \blacksquare$$

2°. *La integral indefinida de la diferencial de cierta función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria, o sea,*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

□ En efecto, puesto que $dF(x) = F'(x)\,dx$, entonces

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C. \blacksquare$$

3°. *El factor constante puede sacarse del signo integral, o sea, si* k = const $\neq 0$, *entonces*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

□ Efectivamente, sea $F(x)$ la primitiva para la función $f(x)$, o sea, $F'(x) = f(x)$. Entonces $kF(x)$ es la primitiva para la función $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. De la definición se desprende que

$$k\int f(x)\,dx = k[F(x)+C] = kF(x) + C_1 = \int kf(x)\,dx,$$

donde $C_1 = kC$. ■

4°. *La integral indefinida de una suma algebraica de dos funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de estas funciones tomadas por separado, o sea,*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

□ En efecto, sean $F(x)$ y $G(x)$ primitivas para las funciones $f(x)$ y $g(x)$: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Entonces, las funciones $F(x) \pm G(x)$ son primitivas para las funciones $f(x) \pm g(x)$. Por consiguiente,

$$\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = [F(x)+C_1] \pm [G(x)+C_2] =$$
$$= [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C =$$
$$= \int [f(x) \pm g(x)]\,dx. \blacksquare$$

Note que esta propiedad es válida para todo número finito de funciones que se suman.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Nombre las propiedades fundamentales de la integral indefinida.
2. Demuéstrese la propiedad 4ª para la suma de tres funciones.

§ 3. Tabla de integrales principales

Aquí se da la tabla de integrales principales. Una parte de las fórmulas de esta tabla se deduce inmediatamente de la definición de la integración como operación inversa a la derivación (diferenciación) y de la tabla de derivadas. La validez de las demás fórmulas se puede comprobar fácilmente por la derivación.

I $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$,

II $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

III $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$,

IV $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$,

V $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(0 < a \neq 1$,

VI $\int e^x\,dx = e^x + C$,

VII $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$,

VIII $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$,

IX $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,

X $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,

XI $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$,

XII $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$,

XIII $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$,

XIV $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$.

Las integrales contenidas en esta tabla suelen llamarse *integrales tabulares*.

Notemos algunos casos particulares de la fórmula I:

$$\int 1\cdot dx = x + C \ (\alpha = 0); \quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \ (\alpha = 1);$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \ \left(\alpha = -\frac{1}{2}\right).$$

En la fórmula II en vez de $\int \frac{1}{x}\,dx$ para brevedad está escrito

$$\int \frac{dx}{x}; \text{ en general, } \int \frac{dx}{\varphi(x)} \text{ significa } \int \frac{1}{\varphi(x)}\,dx.$$

Citemos una fórmula evidente más: $\int 0\cdot dx = C$, o sea, *las primitivas de una función que es idénticamente igual a cero son constantes.*

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿De qué modo se hace la tabla de integrales principales?
2. Señálese las integrales tabulares que se han obtenido de la tabla de derivadas por la operación inversa a la derivación.

§ 4. Métodos fundamentales de integración

1. Integración inmediata. El cálculo de las integrales con ayuda de la tabla de integrales elementales y con ayuda de las propiedades fundamentales de las integrales indefinidas ha recibido el nombre de *integración inmediata.*

○ **Ejemplo 1.** Calcular la integral $\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right) dx$.

Resolución. Aplicando las propiedades 3º y 4º, tenemos

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right) dx =$$
$$= 5\int \cos x\, dx + 2\int dx - 3\int x^2\, dx + \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Luego, utilizando, respectivamente, las fórmulas VIII, I, II, III de la tabla de integrales principales, encontramos

$$5\int \cos x\, dx = 5(\operatorname{sen} x + C_1) = 5\operatorname{sen} x + 5C_1;$$
$$2\int dx = 2(x + C_2) = 2x + 2C_2,$$
$$3\int x^2\, dx = 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + C_3\right) = x^3 + 3C_3; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_4;$$
$$4\int \frac{dx}{x^2+1} = 4(\operatorname{arctg} x + C_5) = 4\operatorname{arctg} x + 4C_5.$$

De esta manera,

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right) dx = 5\operatorname{sen} x + 2x - x^3 + \ln|x| -$$
$$- 4\operatorname{arctg} x + (5C_1 + 2C_2 + 3C_3 + C_4 + 4C_5).$$

Por lo general, todas las constantes arbitrarias se suman y el resultado se designa con una letra: $C = 5C_1 + 2C_2 + 3C_3 + C_4 + 4C_5$, por eso finalmente resulta

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right) dx =$$
$$= 5\operatorname{sen} x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

La validez del resultado obtenido se comprueba fácilmente por la derivación (haga esto por sí mismo.)

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Resolución. La integral es tabular. Por esta razón se puede pasar a la integración inmediata. Con ayuda de la fórmula XIV, donde $a = 4$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \arcsen \frac{x}{4} + C. \quad \bullet$$

En la práctica es un caso bastante raro cuando se logra calcular inmediatamente las integrales con ayuda de la tabla. Previamente se necesita transformar idénticamente la expresión subintegral de un modo tal que como resultado se obtengan integrales tabulares.

○ **Ejemplo 3.** Calcular la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$.

Resolución. La integral no es tabular, por eso vamos a transformarla. Puesto que $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$, la integral puede escribirse en la forma

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx.$$

Aplicando la propiedad 4ª, tenemos

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Hemos encontrado dos integrales tabulares. Según las fórmulas IX y X encontramos

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Ejemplo 4. Calcular la integral $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

Resolución. Puesto que $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, entonces

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx.$$

Mediante las fórmulas IX y I obtenemos

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Ejemplo 5. Calcular la integral $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx$.

Resolución. Puesto que $1+2x^2=(1+x^2)+x^2$, entonces

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx+$$
$$+\int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Según las fórmulas I y III obtenemos

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C. \quad ●$$

Así pues, vemos que para la integración no basta conocer solamente las fórmulas y saber emplearlas sino se necesita, además, la experiencia que se adquiere paulatinamente en el proceso de resolución de los problemas.

Ejercicios. Aplicando el método de integración inmediata, calcular las integrales siguientes:

1. $\int (x^2+3x^3+x+1)\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^3}{3}+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C.\right)$

2. $\int \left(x^4+\sqrt{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^5}{5}+\frac{5}{6}x^5\sqrt{x}+\right.$ $\left.+2x\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\ln|x|+C.\right)$

3. $\int \left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$. $(\textit{Resp.}\ 2\operatorname{arctg} x-3\arcsin x+C.)$

4. $\int (2^x+3^x)\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{2^x}{\ln 2}+\frac{3^x}{\ln x}+C.\right)$

5. $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$. $\left(\textit{Resp.}\ 2e^x+\frac{1}{2x^2}+C.\right)$

6. $\int (\operatorname{sen} x+5\cos x)\,dx$. $(\textit{Resp.}\ -\cos x+5\operatorname{sen} x+C.)$

7. $\int \left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$. $(\textit{Resp.}\ x-\cos x+C.)$

8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. $(\textit{Resp.}\ -(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)+C.)$

9. $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x+C.\right)$

10. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$. $(\textit{Resp.}\ 3\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x+C.)$

11. $\int \frac{1-\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$. $(\textit{Resp.}\ \cos x-\operatorname{ctg} x+C.)$

12. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$. $(\textit{Resp.}\ -(\operatorname{ctg} x+x)+C.)$

13. $\int \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\,dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{1}{2}(x-\operatorname{sen} x)+C.\right)$

14. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. (*Resp.* $\arcsin x -$
$-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C.$)

15. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$. (*Resp.* $x-\operatorname{arctg} x+C.$)

16. $\int \left(\frac{1}{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx$. $\Big($*Resp.* $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+$
$+\ln|x+\sqrt{x^2+5}|+C.\Big)$

17. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{x^2+3}\right)dx$. $\Big($*Resp.* $\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times$
$\times\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.\Big)$

18. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$. $\Big($*Resp.* $x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\Big)$

2. Método de sustitución. En muchos casos la introducción de una nueva variable de integración permite reducir la determinación de una integral dada a la determinación de la integral tabular, o sea, pasar a la integración inmediata. Tal método se llama *método de sustitución* o *método de cambio de una variable*. Se basa en el siguiente teorema.

Teorema 6.2. *Supongamos que una función $x=\varphi(t)$ está definida y derivable en cierto intervalo T y sea X el conjunto de los valores de esta función en el cual está definida una función $f(x)$, o sea, en T está definida la función compuesta $f[\varphi(t)]$. Entonces si sobre el conjunto X la función $f(x)$ tiene una primitiva $F(x)$, es válida la fórmula*

$$\int f(x)\,dx|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

□ **Demostración.** Puesto que la primitiva $F(x)$ está definida sobre el mismo conjunto que la función $f(x)$ y existe la función compuesta $f[\varphi(t)]$, existe también la función compuesta $F[\varphi(t)]$. Entonces, conforme a la regla de derivación de una función compuesta, teniendo en cuenta que $F'(x)=f(x)$, obtenemos

$$(F[\varphi(t)])'=(F[\varphi(t)])'_x\,\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t),$$

o sea, la función $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ tiene sobre el conjunto T la primitiva $F[\varphi(t)]$ y, por consiguiente,

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=F[\varphi(t)]+C.$$

Notando que $F[\varphi(t)]+C=(F(x)+C)|_{x=\varphi(t)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)}$, finalmente tenemos

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

o sea, la fórmula buscada (1). ■

La fórmula (1) se denomina *fórmula de cambio de la variable en la integral indefinida.*

De la fórmula (1) se deduce que para calcular la integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ con ayuda de la sustitución $x=\varphi(t)$ es necesario en la función $f(x)$ reemplazar x por $\varphi(t)$ y poner $\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. En este caso obtenemos la función buscada expresada por la variable t. Para retornar a la variable x hace falta reemplazar t por el valor $t=\psi(x)$ que se obtiene de la relación $x=\varphi(t)$.

Si la función $x=\varphi(t)$ tiene la función inversa $t=\psi(x)$, de (1) se deduce la fórmula

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t|_{t=\psi(x)},$$

o sea, la fórmula (1) puede emplearse también en el orden inverso, o sea, de derecha a izquierda. Para esto, en adición a las hipótesis del teorema basta exigir que la función $x=\varphi(t)$ sea estrictamente monótona.

○ **Ejemplo 6.** Calcular la integral $\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$.

Resolución 6. La integral no es tabular aunque se parece a la integral $\int \cos x\,\mathrm{d}x$. Por eso para calcularla es natural que se haga la sustitución, suponiendo $t=3x$; entonces $\mathrm{d}t=(3x)'\,\mathrm{d}x=3\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$. Según la fórmula (1) obtenemos

$$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t,$$

es decir, una integral tabular. Aplicando la fórmula VIII de la tabla de integrales principales, encontramos

$$\frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\operatorname{sen} t+C.$$

Retornando a la variable x, finalmente resulta

$$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+C.$$

La integral dada puede ser calculada también inmediatamente, reemplazando $\mathrm{d}x$ por $\frac{1}{3}\mathrm{d}\,(3x)$, o sea, introduciendo bajo el signo de la diferencial el factor 3 y dividiendo por éste la integral. Como resultado obtenemos

$$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos 3x\mathrm{d}\,(3x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,3x + C.$$

Aquí se ha empleado la sustitución $t = 3x$. Este procedimiento económico y sencillo se utilizará reiteradamente en adelante. ●

La transformación idéntica de la expresión subintegral con la separación de la diferencial de una nueva variable de integración es un cambio más simple de la variable. De este modo se establece también la fórmula general

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(x)\,\mathrm{d}\,(ax).$$

○ **Ejemplo 7.** Calcular la integral $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Resolución. Calculemos la integral dada inmediatamente, separando la diferencial de una nueva variable de integración. Tenemos

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1/2\,\mathrm{d}\,(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-1/2\,\mathrm{d}\,(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}\,(1-x^2) =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\,(1-x^2)^{1/2} + C = -(1-x^2)^{1/2} + C.$$

La integral dada se calcula con ayuda de la sustitución $t = 1 - x^2$. (Cumple esto por sí mismo.) ●

Existe un otro procedimiento no complicado, pero muy eficaz que permite simplificar el cálculo de integrales. Si el numerador de la función subintegral $f(x)$ es igual a la derivada del denominador, es válida la fórmula

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C. \qquad (2)$$

Efectivamente, utilizando la sustitución $t = f(x)$ y $\mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x$, tenemos

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

○ **Ejemplo 8.** Calcular la integral $\int \mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{d}x$.

Resolución. Puesto que $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, la integral puede escribirse en la forma

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx.$$

Notando que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, mediante la fórmula (2) obtenemos

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x}\, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C.$$

La integral dada puede calcularse también con ayuda de la sustitución $t = \operatorname{sen} x$, e inmediatamente, separando la diferencial de una nueva variable. (Cumple esto por sí mismo.)

Ejemplo 9. Calcular la integral $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx$.

Resolución. Suponemos $t = e^x$, $x = \ln t$. De aquí $dx = (\ln t)'\, dt = \frac{dt}{t}$. Por consiguiente,

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{t-1}{t+1} \frac{dt}{t} = \int \frac{2t - (t+1)}{(t+1)\, t}\, dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2\int \frac{d\,(t+1)}{t+1} - \int \frac{dt}{t} = 2 \ln (1+t) - \ln t + C.$$

Retornando a la variable x, finalmente obtenemos

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = 2 \ln (1 + e^x) - x + C.$$

Ejemplo 10. Calcular la integral $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\, dx$.

Resolución. Pongamos $x - 1 = t$, por lo tanto, $x = t + 1$. De aquí $dx = (t+1)'\, dt = dt$; entonces

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\, dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\, dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + 3t + 3 \ln |t| - \frac{1}{t} + C.$$

Retornando a la variable x, finalmente resulta

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\, dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Ejemplo 11. Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Resolución. Tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2 + (\sqrt[6]{x})^3}.$$

Pongamos $t=\sqrt[6]{x}$; entonces $x=t^6$, $dx=6t^5\,dt$. Encontramos

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}=\int \frac{6t^5\,dt}{t^2+t^3}=6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}.$$

Separando por la división la parte entera de la fracción, obtenemos

$$6\int \frac{t^3\,dt}{t+1}=6\int \left[(t^2-t+1)\,dt-\int \frac{dt}{t+1}\right]=$$
$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]+C.$$

Finalmente tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C. \quad \bullet$$

Y, en general, si la expresión subintegral no contiene otras raíces, salvo la raíz $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, donde a, b, c y d son ciertos números $\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\right)$; m, el número natural, conviene emplear la sustitución $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

○ **Ejemplo 12.** Calcular la integral $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}$.

Resolución. Hecha la sustitución $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, resulta $t^2=$ $=\frac{1+x}{1-x}$, $\quad 1-x=\frac{2}{t^2+1}$, $\quad x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $\quad dx=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)'dt=$ $=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$. Luego tenemos

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}=2\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=$$
$$=2\int dt-2\int \frac{dt}{t^2+1}=2t-2\operatorname{arctg} t+C=$$
$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Ejemplo 13. Calcular la integral $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\,dx$.

Resolución. Pongamos $t=\sqrt{4x+1}$; entonces $t^2=4x+1$, $x=$ $=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}$, $dx=\frac{1}{2}t\,dt$. Encontramos

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}\,dx=\int \frac{\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}+5}{t}\cdot\frac{1}{2}t\,dt=\int \left(\frac{3}{8}t^2+\frac{17}{8}\right)dt=$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{17}{8} t + C = \frac{1}{8} \sqrt{4x+1}\,(4x+18) + C =$$
$$= \frac{1}{4}(2x+9)\sqrt{4x+1} + C. \quad \bullet$$

Es necesario observar que una elección acertada de la sustitución representa de ordinario algunas dificultades. Para superarlas felizmente es necesario dominar bien la técnica de derivación y conocer bien las integrales tabulares.

○ **Ejemplo 14.** Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Resolución. Pongamos $\sqrt{x^2+a} + x = t$, de donde $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}} + 1\right) \times$ $\times\, dx = dt$; así pues,

$$dx = \frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x}\, dt,$$

de suerte que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sqrt{x^2+a} + x| + C\ ^{1)}.$$

Ejemplo 15. Calcular la integral $\int \operatorname{sen}^n x \cos x\, dx$.

Resolución. Pongamos $t = \operatorname{sen} x$, de donde $dt = \cos x\, dx$. Entonces

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x\, dx = \int t^n\, dt =$$
$$= \begin{cases} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1} + C & \text{para } n \neq -1, \\ \ln|t| + C = \ln|\operatorname{sen} x| + C & \text{para } n = -1. \end{cases}$$

Ejemplo 16. Calcular la integral $\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^n}$, $n \neq 1$.

Resolución. Pongamos $x^2 + 1 = t$, $2x\, dx = dt$, por lo tanto,

$$\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C =$$
$$= -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C.$$

Para $n = 1$ obtenemos análogamente

$$\int \frac{x\, dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C. \quad \bullet$$

---

[1]) Aquí está calculada la integral tabular XII.

Notemos que en los ejemplos 15 y 16 las integrales pueden calcularse inmediatamente por medio de la separación de la diferencial de una nueva variable. Cerciórese de esto.

Ejercicios. Aplicando el método de cambio de la variable, calcular las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}(3x+5)\,dx$. $\left(Resp.\ -\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C.\right)$

2. $\int e^{2x}\,dx$. $\left(Resp.\ \frac{1}{2}e^{2x}+C.\right)$

3. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. $(Resp.\ -\ln|\cos x|+C.)$

4. $\int e^{-x^2}x\,dx$. $\left(Resp.\ -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.\right)$

5. $\int \frac{e^{4x}}{e^x-1}\,dx$. $\left(Resp.\ \frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+\ln|e^x-1|+C.\right)$

6. $\int \frac{x^4\,dx}{x^5+7}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{5}\ln|x^5+7|+C.\right)$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x+C.\right)$

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$. $\Big(Resp.\ 6\Big(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x}-\sqrt{x}+$
$+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\Big)+C.\Big)$

9. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$. $(Resp.\ x+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C.$

10. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ $(t=1+\ln x)$. $(Resp.\ \ln|1+\ln x|+C.)$

11. $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$. $(Resp.\ -e^{\cos x}+C.)$

12. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}$. $\left(Resp.\ \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+C.\right)$

13. $\int x(5x-7)^{50}\,dx$. $\Big(Resp.\ \frac{1}{25}\Big[\frac{1}{52}(5x-7)^{52}+$
$+\frac{7}{51}(5x-7)^{51}\Big]+C.\Big)$

14. $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$. $(Resp.\ x-2\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C.)$

15. $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}}\,dx$. $\left(Resp.\ \frac{2(44-15x)}{27}\cdot\sqrt{1-3x}+C.\right)$

16. $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}\,dx$ $(t=x^3-8)$. $\left(Resp.\ \frac{5}{18}(x^3-8)^{6/5}+C.\right)$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ $(t=\sqrt{e^x+1})$. $\left(Resp.\ \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C.\right)$

18. $\int \frac{3^{1/x}\,dx}{x^2}$ $\left(t=\frac{1}{x}\right)$. $\left(Resp.\ -\frac{3^{1/x}}{\ln 3}+C.\right)$

19. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx$ $(t=\operatorname{arctg} x)$. $\left(Resp.\ \frac{(\operatorname{arctg} x)^{101}}{101}+C.\right)$

20. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$. $\left(Resp.\ \operatorname{arcsen}\frac{e^x}{2}+C.\right)$

21. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. $(Resp.\ 2\operatorname{sen}\sqrt{x}+C.)$

22. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$. $\left(Resp.\ \frac{1}{4\arccos^4 x}+C.\right)$

En el proceso de integración es necesario, en ocasiones, aplicar varias veces el método de cambio de la variable.

○ **Ejemplo 17.** Calcular la integral $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$.

Resolución. Pongamos $x=a\operatorname{sen} t$ $(-\pi/2\leqslant t\leqslant\pi/2)$. La función $x=a\operatorname{sen} t$ es monótona y tiene la derivada continua x'_t. En este caso, cuando t varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$, la variable x varía de $-a$ a a. Luego tenemos $dx=a\cos t\,dt$. Por consiguiente,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\,a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt.$$

Otra vez hemos obtenido una integral que no es tabular. Transformémosla. Puesto que $\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)$, entonces

$$a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2t\,dt.$$

La primera de las dos últimas integrales es tabular y se calcula inmediatamente:

$$\frac{a^2}{2}\int dt=\frac{a^2}{2}t+C_1.$$

Para calcular la segunda integral hagamos la sustitución $u=2t$. Entonces $du=2\,dt$, $dt=\frac{du}{2}$ y

$$\frac{a^2}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{a^2}{4}\int\cos u\,du=\frac{a^2}{4}\operatorname{sen} u+C_2=\frac{a^2}{4}\operatorname{sen} 2t+C_2.$$

Por lo tanto,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right]+C,$$

donde $C = C_1 + C_2$. Para retornar a la variable x, de la igualdad $x = a \operatorname{sen} t$ obtenemos

$$\operatorname{sen} t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad t = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$$

Sustituyendo, finalmente resulta

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C. \quad \bullet$$

3. Método de integración por partes. El método de integración por partes está fundado en el uso de la fórmula de derivación del producto de dos funciones.

Teorema 6.3. *Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ están definidas y son derivables en cierto intervalo X y supongamos que la función $u'(x)\, v(x)$ tiene una primitiva sobre este intervalo, o sea, existe $\int v(x)\, u'(x)\, dx$. Entonces sobre el intervalo X la función $u(x)\, v'(x)$ también tiene una primitiva y es válida la fórmula*

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx. \tag{2}$$

□ **Demostración.** De la igualdad

$$[u(x)\, v(x)]' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

se deduce

$$u(x)\, v'(x) = [u(x)\, v(x)]' - u'(x)\, v(x).$$

La primitiva de la función $[u(x)\, v(x)]'$ en el intervalo X es la función $u(x)v(x)$. La función $u'(x)\, v(x)$ tiene una primitiva en X según la hipótesis del teorema. Por consiguiente, también la función $u(x)\, v'(x)$ tiene una primitiva en el intervalo X (como diferencia de las funciones derivables). Integrando la última igualdad, obtenemos la fórmula (2). ■

La fórmula (2) se llama *fórmula de integración por partes en una integral indefinida.*

Puesto que $v'(x)\, dx = dv$, $u'(x)\, dx = du$, se puede escribirla en la forma

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \tag{3}$$

Esta fórmula permite reducir el cálculo de $\int u\, dv$ al cálculo de la integral $\int v\, du$ la cual puede resultar más sencilla para la integración.

○ **Ejemplo 18.** Calcular la integral $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Resolución. Pongamos $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Entonces

$$du = (\operatorname{arctg} x)' \, dx = \frac{dx}{1+x^2}; \quad \int dv = \int dx, \quad v = x$$

(aquí en calidad de v se puede tomar cada una de las primitivas que tienen la forma $x + C$, donde C es la constante arbitraria. Hemos tomado $v = x$, o sea, $C = 0$). Según la fórmula (3) tenemos

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{du}{}^{1)} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}.$$

Puesto que

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

finalmente resulta

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \quad \bullet$$

Ha de notar que el método de integración por partes representa ciertas dificultades para los principiantes. En la fórmula (3) no se puede elegir u y dv arbitrariamente, de lo contrario se puede obtener una integral más complicada que la inicial.

○ **Ejemplo 19.** Calcular la integral $\int x e^x dx$.

Resolución. A distinción del ejemplo precedente aquí la situación es por completo no clara. Se puede poner $u = e^x$, $dv = x \, dx$, o $u = x$, $dv = e^x dx$, o, por último, $u = xe^x$, $dv = dx$. Pongamos, por ejemplo, $u = e^x$, $dv = x \, dx$. Entonces

$$du = (e^x)' \, dx = e^x \, dx; \quad \int dv = \int x \, dx, \quad v = \frac{1}{2} x^2.$$

Con ayuda de la fórmula (3) obtenemos

$$\int x e^x \, dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x \, dx.$$

Vemos que hemos llegado a una integral más complicada. Así pues, en el caso dado la elección de u y dv es desafortunada. Lo mismo se obtendrá si se pone $u = xe^x$, $dv = dx$. (Convéncese de esto por sí mismo.) Nos queda considerar el último caso.

---

1) La integral dada puede ser calculada por la sustitución $t = 1 + x^2$ (haga esto por sí mismo) o inmediatamente, separando la integral de una nueva variable al reemplazar $x \, dx$ por $\frac{1}{2} d(x^2 + 1)$ lo que precisamente hemos hecho.

Suponiendo $u = x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, encontramos

$$\mathrm{d}u = (x')\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x; \quad \int \mathrm{d}v = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \quad v = \mathrm{e}^x.$$

Según la fórmula (3) obtenemos

$$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

La integral inicial queda calculada. Por lo tanto, en el caso dado u y $\mathrm{d}v$ se han escogido justamente. ●

Con frecuencia el método de integración por partes ha de aplicarse reiteradas veces.

○ **Ejemplo 20.** Calcular la integral $\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$.

Resolución. Pongamos $u = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$ [1]. Entonces

$$\mathrm{d}u = (\mathrm{e}^x)'\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x; \quad \int \mathrm{d}v = \int \cos x\,\mathrm{d}x, \quad v = \operatorname{sen} x.$$

Mediante la fórmula (3) tenemos

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Calculamos repetidamente la integral obtenida, integrando por partes al poner $u = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$, de donde hallamos $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x$, $v = -\cos x$. Entonces

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Sustituyendo el valor de la integral obtenida en la expresión (4), encontramos

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x - \left(-\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x + \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Transponiendo la integral del segundo miembro de la igualdad al primer miembro, obtenemos

$$2\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C_1$$

y finalmente resulta

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + C,$$

donde $C = \frac{C_1}{2}$. (Puesto que C es la constante arbitraria, $C_1/2$ también es una constante arbitraria.) ●

---

[1]) Aquí se puede poner también $u = \cos x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

La práctica muestra que la mayor parte de las integrales que se calculan, integrando por partes puede ser dividida en tres grupos:

1) *En el primer grupo figuran las integrales de la forma*

$$\int P(x) \operatorname{arctg} x \, dx, \quad \int P(x) \operatorname{arcctg} x \, dx, \quad \int P(x) \ln x \, dx,$$

$$\int P(x) \operatorname{arcsen} x \, dx, \quad \int P(x) \arccos x \, dx,$$

donde $P(x)$ es el polinomio. Para calcularlas conviene poner u igual a una de las funciones indicadas anteriormente y $dv = P(x)\,dx$ (véase el ejemplo 18).

2) *En el segundo grupo figuran las integrales de la forma*

$$\int P(x) e^{kx} \, dx, \quad \int P(x) \operatorname{sen} kx \, dx, \quad \int P(x) \cos kx \, dx,$$

donde $P(x)$ es el polinomio y k, cierto número. Para calcularlas conviene poner $u = P(x)$ y $dv = e^{kx}\,dx$, $dv = \operatorname{sen} kx\,dx$, $dv = \cos kx \times \times dx$, respectivamente (véase el ejemplo 19).

3) *En el tercer grupo figuran las integrales de la forma*

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx,$$

donde a y b son ciertos números. Estas integrales se calculan integrando por partes dos veces (véase el ejemplo 20).

Desde luego, los tres grupos indicados no agotan las integrales que van calculadas con ayuda del método de integración por partes.

○ **Ejemplo 21.** Calcular la integral $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Resolución. Esta integral no forma parte de alguno de los tres grupos mencionados. Sin embargo, suponiendo $u = x$, $dv = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, encontramos $du = dx$, $v = -\operatorname{ctg} x$. Con ayuda de la fórmula (3) obtenemos

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -x \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x \, dx = -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{d(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln |\operatorname{sen} x| + C.$$

Análogamente se calcula la integral $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. ●

Ejercicios. Con ayuda del método de integración **por** partes calcular las siguientes integrales:

1. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.\right)$
2. $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$. $\left(\textit{Resp.}\ x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.\right)$

3. $\int \ln x\,dx$. (*Resp.* $x \ln x - x + C$.)

4. $\int x \ln x\,dx$. $\left(\text{\textit{Resp.}}\ \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.\right)$

5. $\int x \cos^2 x\,dx$. $\left(\text{\textit{Resp.}}\ \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.\right)$

6. $\int x \operatorname{sen} x\,dx$. (*Resp.* $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$.)

7. $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$. (*Resp.* $-x^2\cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) + C$).

8. $\int x^2 e^x\,dx$. (*Resp.* $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.)

9. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$. $\left(\text{\textit{Resp.}}\ \frac{e^{2x}(3 \operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x)}{13} + C.\right)$

10. $\int (4x^3 + 6x - 7)\ln x\,dx$. $\Big(\text{\textit{Resp.}}\ (x^4 + 3x^2 - 7x)\ln x - \Big(\frac{x^4}{4} +$ $+ \frac{3x^2}{2} - 7x\Big) + C.\Big)$

11. $\int (x^3 + 1)\cos x\,dx$. (*Resp.* $(x^3 - 6x + 1)\operatorname{sen} x + (3x^2 - 6) \times$ $\times \cos x + C$.)

12. $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})\,dx$. $\Big(\text{\textit{Resp.}}\ x\ln(\sqrt{1-x} +$ $+\sqrt{1+x}) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arcsen x + C.\Big)$

Integrando, con frecuencia se necesita emplear primero el método de cambio de la variable y luego el de integración por partes.

○ **Ejemplo 22.** Calcular la integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1) - 2\ln x]}{x^4}\,dx.$$

Resolución. Esta integral no forma parte de alguno de los tres grupos de integrales que se calculan integrando por partes. Transformémosla con ayuda del método de cambio de la variable. Pongamos $t = 1 + \frac{1}{x^2}$. Entonces $dt = -\frac{2\,dx}{x^3}$, de donde $\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\,dt$. Después de hacer transformaciones poco complicadas y la sustitución obtenemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1) - 2\ln x]}{x^4}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\ln\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\ln t\,dt.$$

Vemos que hemos llegado a la integral que se calcula fácilmente, integrando por partes. Suponiendo $u = \ln t$, $dv = \sqrt{t}\,dt$, enconramos $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$, $v = \frac{2}{3} t \sqrt{t}$. Por consiguiente,

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} t\sqrt{t}\ln t - \frac{2}{3}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} t\sqrt{t}\ln t - \frac{4}{9} t\sqrt{t}\right] + C.$$

Por último, retornando a la variable x, finalmente obtenemos

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}\,[\ln(x^2+1) - 2\ln x]}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}\right] + C = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{9x^3}\left[2 - 3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] + C. \ \bullet$$

Ejercicio. Calcular la integral $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (poner $t = \sqrt{x}$). (*Resp.* $2(\sqrt{x} - 1)\,e^{\sqrt{x}} + C$.)

Calculemos la integral $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ con ayuda de la integración por partes (anteriormente (véase el ejemplo 17 del subp. 2) esta integral ha sido calculada con ayuda del método de cambio de la variable).

Pongamos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$; entonces $\mathrm{d}u = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$. Por lo tanto,

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{5}$$

Agreguemos y sustrayamos a^2 en el numerador de la función subintegral en el segundo miembro de la igualdad. Entonces, dividiendo por $\sqrt{a^2 - x^2}$, obtenemos

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= a^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^2 \arcsen \frac{x}{a} - I.$$

Sustituyendo esta expresión en (5), resulta

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a} - \quad .$$

Uniendo ambas integrales $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$ en el primer miembro, tenemos

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a}.$$

De aquí finalmente encontramos

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a}+C.$$

En conclusión calculemos la integral

$$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

(n es un número entero positivo) la cual necesitaremos en el siguiente párrafo. Para $n=1$ tenemos

$$I_1 = \operatorname{arctg} x + C.$$

Sea $n>1$. Reemplazando en el numerador la unidad por la diferencia $(x^2+1)-x^2$, obtenemos

$$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}-\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}.$$

En la segunda integral pongamos

$$u=x,\quad du=dx$$

$$dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n},\quad v=\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}=-\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}$$

(véase el ejemplo 16 del subp. 2), por eso

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}=-\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}},$$

por consiguiente,

$$I_n=I_{n-1}+\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}-\frac{1}{2n-2}I_{n-1},$$

o sea,

$$I_n=\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}\quad (n>1). \qquad (6)$$

Las fórmulas del tipo (6) se llaman *recurrentes*. Permiten reducir el cálculo de la integral I_n al de la integral I_{n-1} con índice menor en unidad y, a su vez, el cálculo de I_{n-1} al de I_{n-2}, etc. Como resultado llegaremos a la integral conocida I_1 y quedará calculada la integral I_n.

○ **Ejemplo 23.** Calcular $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Resolución. Según la fórmula recurrente (6) encontramos

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1},\quad \int \frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg} x;$$

finalmente resulta

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C. \quad \bullet$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿En qué consiste el método de integración inmediata?
2. Escríbase la fórmula de cambio de una variable en la integral indefinida. ¿Para qué condiciones esta fórmula es válida?
3. Escríbase la fórmula de integración por partes. ¿Para qué condiciones esta fórmula es válida?
4. ¿Qué integrales se calculan lo más cómodamente mediante la integración por partes?
5. ¿Para qué sirven las fórmulas recurrentes?

§ 5. Integración de las funciones racionales

Una clase importante de funciones cuyas integrales se expresan siempre por funciones elementales es formada por las funciones racionales, o sea, por las funciones que pueden representarse en forma de la fracción

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Si el grado del polinomio en el nominador es igual al grado del polinomio en el denominador o mayor que el último grado, entonces, al cumplir la división, obtenemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

donde $W(x)$ es cierto polinomio y $R(x)$, un polinomio cuyo grado es menor que el de $Q(x)$.

○ **Ejemplos.**

1. $\dfrac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1} = x^2+3-\dfrac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}$.

2. $\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1} = x+\dfrac{1}{x^2+1}$. ●

En el álgebra superior se demuestra que cada polinomio $Q(x)$ puede representarse en la forma del producto

$$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma),$$

donde A es el coeficiente del polinomio $Q(x)$ de grado mayor, α, β, ..., γ son las raíces de la ecuación $Q(x)=0$. Los factores $(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma)$ se llaman *factores elementales*. Si entre *ellos hay tales que coincidan, obtenemos la representación*

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \ldots (x-\gamma)^t, \tag{2}$$

donde $r, s, \ldots, t$ son números enteros que se denominan *multiplicidades* correspondientes a las raíces $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, con la particularidad de que $r+s+\ldots+t=n$; aquí n designa el grado del polinomio $Q(x)$.

Así, por ejemplo, el polinomio $Q(x)=5(x-1)^2(x+4)^3$ tiene las siguientes raíces; $\alpha=1$, $\beta=-4$. En este caso el número 2 es multiplicidad de la raíz 1 y el número 3, multiplicidad de la raíz (-4).

Entre las raíces de la representación (2) pueden haber también complejas. En el álgebra superior se demuestra que si $\alpha=a+bi-r$ es una raíz compleja múltipla del polinomio con coeficientes reales, este último tiene también una r-múltipla raíz $\bar{\alpha}=a-bi$ conjugada con la raíz antes mencionada. Con otras palabras, si de la representación (2) forma parte el factor $(x-\alpha)^r$, ella contiene también el factor $(x-\bar{\alpha})^r$. Multiplicando estos dos factores, obtenemos

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^r(x-\bar{\alpha})^r &= \{[x-(a+bi)][x-(a-bi)]\}^r = \\ &= [x^2-x(a+bi)-x(a-bi)+a^2+b^2]^r = \\ &= [x^2-2ax+a^2+b^2]^r = (x^2+2px+q)^r,\end{aligned}$$

donde $p=-a$, $q=a^2+b^2$, $p^2-q<0$.

Así pues, el producto de los correspondientes factores a las raíces complejas conjugadas puede representarse en la forma de un trinomio de segundo grado de coeficientes reales. Procediendo de un modo análogo con las demás raíces complejas, escribamos la representación (2) en la forma

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s \ldots (x^2+2px+q)^t(x^2+2ux+v)^n \ldots . \tag{3}$$

En el álgebra superior se demuestra el siguiente teorema: *si una función racional* $\frac{R(x)}{Q(x)}$ *en la relación* (1) *tiene en el numerador un grado del polinomio menor que el grado del polinomio en el denominador y el polinomio* $Q(x)$ *está representado en la forma* (3), *esta función puede ser representada únicamente en la forma*

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+ \\ &+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2}+\ldots+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}+\ldots,\end{aligned} \tag{4}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$ *son ciertos números. El desarrollo* (4) *se llama desarrollo de una función racional en fracciones elementales.*

La igualdad (4) tiene lugar para todos los valores de x que no sean raíces reales del polinomio $Q(x)$.

Para determinar los números $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots$, multipliquemos ambos miembros del desarrollo (4) por $Q(x)$. Puesto que la igualdad entre el polinomio $R(x)$ y el que se obtendrá en el segundo miembro es válida para todos los valores de x, los coeficientes de los grados iguales de x son iguales entre sí. De este modo obtendremos varias ecuaciones de primer grado de las cuales determinaremos los números desconocidos $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots$. El método expuesto de determinación del desarrollo de una función racional se llama *método de coeficientes indeterminados.*

○ **Ejemplo 1.** Desarrollar la función racional $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ en fracciones elementales.

Resolución. Puesto que $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, según la fórmula (4) tenemos

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por x^2-5x+6, resulta

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3), \text{ o bien}$$
$$2x-1=(A+B)x-2A-3B.$$

Igualando los coeficientes de los grados iguales de x, obtenemos las ecuaciones de primer grado: $\begin{cases} A+B=2, \\ 2A+3B=1, \end{cases}$ de donde $A=5$, $B=-3$.

Así pues,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}.$$

Ejemplo 2. Hallar el desarrollo de la función racional $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ en fracciones elementales.

Resolución. Puesto que el trinomio de segundo grado x^2+1 tiene raíces complejas, según la fórmula (4) tenemos

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $x(x^2+1)^2$, obtenemos

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x$$

o bien

$$x^2 - 1 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + \\ + (C + E)x + A.$$

Comparando los coeficientes de x^0, x^1, x^2, x^3 y x^4, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^4: A + B = 0, \\ x^3: C = 0, \\ x^2: 2A + B + D = 1, \\ x^1: C + E = 0, \\ x^0: A = -1. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontramos $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 2$, $E = 0$, por eso el desarrollo buscado tiene la forma

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}. \quad \bullet$$

De lo expuesto se deduce que el problema de integración de la función racional (1) se reduce a la integración de la función racional $w(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$ cuya integral es tabular

$$\int w(x)\,\mathrm{d}x = a_0\frac{x^{m+1}}{m+1} + a_1\frac{x^m}{m} + \ldots + a_mx + C$$

y a la integración de la función racional $\frac{R(x)}{Q(x)}$ lo que, a su vez, se reduce a la determinación de las integrales de los cuatro siguientes tipos:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-\alpha| + C.$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}} + C \quad (r > 1)$ [1].

III. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,\mathrm{d}x.$

IV. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,\mathrm{d}x \quad (r > 1).$

En este caso el polinomio $x^2 + 2px + q$ no tiene raíces reales, ya que $p^2 - q < 0$.

Calculemos la integral de tipo III que figura entre las que se encuentran con frecuencia en la práctica.

Separemos del trinomio en el denominador el cuadrado perfecto:

$$x^2 + 2px + q = (x + p)^2 + q - p^2.$$

---

[1]) Las integrales de tipo I y II se calculan, integrando con ayuda de la sustitución $t = x - \alpha$.

Este desarrollo sugiere la sustitución $x+p=t$, $x=t-p$, $dx=dt$. Luego, $q-p^2=h>0$ y pasemos a la variable t. Como resultado la integral se transforma reduciéndose a la forma

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}\,dx=\int \frac{At+B-Ap}{t^2+h}\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}A\int \frac{2t\,dt}{t^2+h}+(B-Ap)\int \frac{dt}{t^2+h}.$$

En el segundo miembro la primera integral se calcula inmediatamente

$$\int \frac{2t\,dt}{t^2+h}=\ln|t^2+h|+C=\ln|x^2+2px+q|+C.$$

La segunda integral se calcula con ayuda de la fórmula XIII de la tabla de integrales principales.

○ **Ejemplo 3.** Calcular la integral $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx$.

Resolución. Separemos en el denominador el cuadrado perfecto: $x^2+4x+9=(x+2)^2+5$. Hagamos la sustitución $x+2=t$, $x=t-2$, $dx=dt$; como resultado obtenemos

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx=\int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5}\,dx=\int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5}\,dt=\int \frac{6t-7}{t^2+5}\,dt=$$
$$=3\int \frac{2t\,dt}{t^2+5}-7\int \frac{dt}{t^2+5}=3\ln(t^2+5)-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C.$$

Retornando a la variable x, resulta

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}\,dx=3\ln(x^2+4x+9)-\frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C. \quad ●$$

Ahora pasemos a calcular la integral de tipo IV $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx$, $q-p^2>0$, $r>1$. Introduzcamos una nueva variable:

$$z=\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}},\quad x=z\sqrt{q-p^2}-p,\quad dx=\sqrt{q-p^2}\,dz. \tag{5}$$

Luego tenemos

$$z^2+1=\frac{(x+p)^2}{q-p^2}+1=\frac{x^2+2px+q}{q-p^2}. \tag{6}$$

De esta manera, utilizando la sustitución (5) y tomando en consideración (6), obtenemos

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}\,dx=\int \frac{A[z\sqrt{q-p^2}-p]+B}{(z^2+1)^r(q-p^2)^r}\sqrt{q-p^2}\,dz=$$
$$=\int \frac{Mz+N}{(z^2+1)^r}\,dz=M\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^r}+N\int \frac{dz}{(z^2+1)^r},$$

donde M y N son los números constantes cuyos valores están claros si se examina la penúltima igualdad. A la segunda integral de la última igualdad se le puede aplicar la fórmula recurrente (véase el § 4, subp. 3, fórmula (6)), poniendo en la primera de las integrales $z^2+1=t$, resulta

$$M\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^r}=\frac{M}{2}\int \frac{dt}{t^r}=-\frac{M}{2(r-1)}\cdot\frac{1}{t^{r-1}}+C=$$
$$=-\frac{M}{2(r-1)}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^{r-1}}+C.$$

○ **Ejemplo 4.** Calcular la integral $\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx$.

Resolución. Pongamos $z=\frac{x-1}{\sqrt{5-1}}=\frac{x-1}{2}$, de donde $x=1+$ $+2z$, $dx=2\,dz$ y $x^2-2x+5=4(z^2+1)$, por consiguiente,

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=\int \frac{5(1+2z)+3}{4^2(z^2+1)^2}\,2\,dz=$$
$$=\int \frac{10z+8}{8(z^2+1)^2}\,dz=\frac{5}{4}\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}+\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Pero

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{z^2+1},$$
$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}=\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{z^2+1}+\frac{z}{2(z^2+1)}+$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C=\frac{4z-5}{8(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C.$$

Retornando ahora a la variable x, obtenemos

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\,dx=\frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C. \quad ●$$

Así pues queda determinado que la integración de toda función racional se reduce a la integración del polinomio y de un número finito de fracciones elementales cuyas integrales se expresan por funciones racionales, logaritmos y arcos tangentes. Con otras palabras, toda función racional se integra en funciones elementales.

Ejercicios. Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx$. (*Resp.* $2\ln|x-2|-\ln|x-3|+C$.)

2. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$. (*Resp.* $\ln|x-2|+\ln|x+5|+C$.)

3. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}\,dx$. (*Resp.* $3\ln|x|+\ln|x-1|-$
$-\ln|x+1|+C$.)

4. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$. $\Big($*Resp.* $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+$
$+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.\Big)$

$\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}\,dx$. $\Big($*Resp.* $\frac{x^3}{3}+x^2-x+\frac{4}{\sqrt{3}}\times$
$\times\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.\Big)$

6. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx$. $\Big($*Resp.* $\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+10)-\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+$
$+C.\Big)$

7. $\int \frac{dx}{x^3+1}$. $\Big($*Resp.* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.\Big)$

8. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$. $\Big($*Resp.* $-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+$
$+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.\Big)$

9. $\int \frac{dx}{x^4-1}$. $\Big($*Resp.* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.\Big)$

10. $\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}\,dx$. $\Big($*Resp.* $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+$
$+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.\Big)$

11. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$. $\Big($*Resp.* $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\operatorname{arctg}(x+1)+C.\Big)$

En conclusión note que los métodos de integración considerados no agotan todas las clases de las funciones elementales integrables de modo analítico. Al mismo tiempo de lo expuesto se desprende que técnicamente la integración es más complicada que la derivación. Se necesitan ciertos hábitos e inventiva que no se adquieren sino por la práctica de resolución de un gran número de problemas. Además, si la derivación no nos lleva fuera de la clase de las funciones elementales, al integrar existen tales funciones elementales (por ejemplo e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, etc.) cuyas primitivas no son funciones elementales.

Tales primitivas están bien estudiadas, sus valores están calculados aproximadamente, para ellas están hechas tablas y gráficas.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Cómo una función racional se desarrolla en fracciones elementales?
2. ¿Qué es el método de coeficientes indeterminados?
3. ¿A las integrales de qué tipos conduce la integración de una función racional?
4. *Cítese un ejemplo de las funciones elementales cuyas primitivas no son funciones elementales.*

§ 6. Integral definida

1. Definición de la integral definida. Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida sobre el segmento $[a, b]$, $a < b$. Dividamos este segmento en n partes arbitrarias por los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$$
$$\ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots$$
$$\ldots < x_n = b.$$

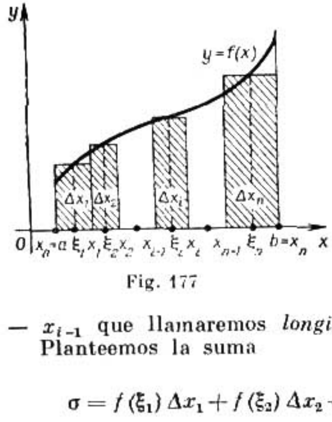


Fig. 177

Designemos esta partición con τ y llamaremos *puntos de partición* los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. En cada uno de los segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$ escojamos un punto arbitrario ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$. Con Δx_i designemos la diferencia $x_i - x_{i-1}$ que llamaremos *longitud* del segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$.

Planteemos la suma

$$\sigma = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (1)$$

que denominaremos *suma integral* para la función $f(x)$ sobre $[a, b]$, correspondiente a la partición dada de $[a, b]$ en segmentos parciales y a la opción dada de los puntos arbitrarios ξ_i. El significado geométrico de la suma σ es evidente: es una suma de las áreas de los rectángulos que tienen por bases $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ y por alturas $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$ si $f(x) \geqslant 0$ (fig. 177).

Designemos con λ la longitud del mayor segmento parcial de partición τ: $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\}$.

Definición. *Si existe el límite finito I de la suma integral* (1) *para $\lambda \to 0$, este límite se llama integral definida* [1] *de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y se designa del modo siguiente:*

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ }^{2)} \tag{2}$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

En este caso la función $f(x)$ llámase *integrable en* $[a, b]$. Los números a y b se denominan *límites de integración inferior* y *superior*, respectivamente; $f(x)$ se llama *función subintegral* y x, *variable de integración*.

Es necesario hacer varias aclaraciones, ya que tiene lugar un paso límite no del todo ordinario. La definición dada de la integral definida se parece, por su forma, a la primera definición del límite de una función «en el lenguaje de las sucesiones, donde en vez de la función está la suma integral (1) la cual es una variable que depende de λ. Efectivamente, supongamos que el segmento $[a, b]$ se divide sucesivamente en partes primero por un procedimiento, luego por segundo, por tercero, etc. Entonces la longitud del segmento mayor en cada caso disminuye $\lambda \to 0$[3]) cuando $n \to \infty$. Así pues, obtenemos una sucesión de particiones $\{\tau_n\}$ en la cual $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ y se puede dar la definición de la integral definida «en el lenguaje de las sucesiones» ya conocido: *la función $f(x)$ se llama integrable en $[a, b]$ si para toda sucesión de particiones $\{\tau_n\}$ en la cual $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ la sucesión correspondiente de las sumas integrales $\{\sigma_n\}$ tiende siempre hacia un mismo límite $I = \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n$.*

Se puede dar la definición de la integral definida también «en el lenguaje $\varepsilon - \delta$»: *el número I se denomina integral definida de la función $f(x)$ en un segmento $[a, b]$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda < \delta$ (o sea, el segmento está partido en partes cuya longitud $\Delta x_i < \delta$) independientemente de la opción de los puntos ξ_i se cumpla*

---

[1]) En algunos manuales, donde la integral indefinida como conjunto de las funciones de la forma $F(x) + C$ se llama «primitiva» la integral definida se denomina sencillamente «integral».

[2]) Se lee: «la integral definida de $f(x)$ entre a y b respecto a $\mathrm{d}x$».

[3]) En vez de $\lambda \to 0$ sería incorrecto escribir $n \to \infty$, ya que se puede citar un ejemplo (piense ¿qué ejemplo?) cuando el aumento de los puntos de partición de $[a, b]$ no significa obligatoriamente que todos los valores Δx_i decrecen indefinidamente; en cambio, si $\lambda \to 0$, todos los valores $\Delta x_i \to 0$ y obligatoriamente $n \to \infty$.

la desigualdad

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I\right| < \varepsilon.$$

Se puede demostrar la equivalencia de ambas definiciones por analogía con la de dos definiciones del límite de una función. La definición dada «en el lenguaje de las sucesiones» ofrece la posibilidad de extender los conceptos fundamentales de la teoría de los límites a este nuevo tipo del límite.

De la definición de la integral definida se desprende que la magnitud de la integral (2) depende únicamente del tipo de las funciones $f(x)$, y de los números a y b. Por consiguiente, si se prefijan $f(x)$ y los límites de integración la integral (2) se define unívocamente y es cierto número.

○ **Ejemplo 1.** Utilizando la definición, calcular la integral $\int\limits_a^b C\,dx$, donde C es cierto número.

Resolución. Partamos el segmento $[a, b]$ en n partes arbitrarias por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ y planteemos la suma integral correspondiente (1). Puesto que la función subintegral $f(x) = C$ es constante, para toda opción de los puntos intermedios ξ_i obtenemos la suma integral de la forma

$$\sigma = C\Delta x_1 + C\Delta x_2 + \ldots + C\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i.$$

Luego tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= C\,[(x_i - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_n)] = C\,(b-a).$$

Vemos que la suma integral para la función dada no depende de la partición ni de la elección de los puntos ξ_i y es igual a $C\,(b - a)$. Por consiguiente, su límite para $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ es igual a la misma magnitud.

Así pues, por definición

$$\int\limits_a^b C\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C\,(b-a).$$

Ejemplo 2. Utilizando la definición, calcular la integral $\int\limits_0^1 x\,dx$.

Resolución. Partamos el segmento [0, 1] en n partes iguales (en el caso dado esto es cómodo) por los puntos $0 = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = 1$. La longitud de cada segmento parcial $\Delta x_i = 1/n$. En este caso si $n \to \infty$, entonces $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} = \frac{1}{n} \to 0$ y al contrario. En calidad de puntos intermedios ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ tomemos los extremos derechos de los segmentos parciales: $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n$. Planteemos la suma integral correspondiente (1):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

Calculemos el límite de la suma integral para $n \to \infty$. Obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 1/n}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, según la definición,

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i = \frac{1}{2}. \quad \bullet$$

Ejercicio. En el ejemplo 2, muéstrese que para otra opción de los puntos intermedios ξ_i $\left(\text{por ejemplo, } \xi_i = \frac{i-1}{n} \text{ son los extremos izquierdos de los segmentos parciales}\right)$ el límite de la suma integral y, por lo tanto, la magnitud de la integral dada no cambian.

2. Propiedades fundamentales de la integral definida. La integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ fue introducida para el caso $a < b$. Generalicemos el concepto de integral definida para el caso cuando $a = b$ y $a > b$.

1°. *Si* $a = b$, *entonces, por definición, suponemos*

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

Si $a > b$, *entonces, también por definición,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

2°. *Cualesquiera que sean los números a, b y c, siempre tiene lugar la igualdad*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

(aquí y a continuación se supone que las integrales que forman parte de las fórmulas a demostrar existen).

□ **Demostración.** Admitamos primero que $a < c < b$. Puesto que el límite de la suma integral σ no depende del método de partición del segmento $[a, b]$, llevaremos a cabo la partición de un modo tal que el punto c siempre sea un punto de partición de $[a, b]$. Si, por ejemplo, $c = x_m$, entonces σ se puede partir en dos sumas:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

En la última igualdad, pasando al límite para $\lambda \to 0$, obtendremos precisamente la igualdad (5).

La esencia de la propiedad demostrada consiste en que la integral definida sobre todo el segmento es igual a la suma de las integrales sobre las partes del mismo.

Para otra disposición de los puntos a, b y c la demostración se reduce fácilmente al caso considerado. Supongamos, por ejemplo, $a < b < c$; entonces, según lo demostrado, tenemos

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

de donde, teniendo en cuenta (2), obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

o sea, otra vez hemos llegado a la ecuación (5). ■

3°. *El factor constante puede sacarse fuera del signo de la integral definida, o sea,*

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

□ **Demostración.** Efectivamente, para toda partición del segmento $[a, b]$ y para toda opción de los puntos ξ_i

$$\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\,\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Pasando al límite para $\lambda \to 0$, tenemos

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} k \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= k \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = k \int_a^b f(x)\,dx,$$

o sea, queda obtenida la igualdad (6). ■

4°. *La integral definida de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales, o sea,*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x\,dx).$$

□ **Demostración.** En efecto, para toda partición del segmento $[a, b]$ y toda opción de los puntos ξ_i

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Puesto que

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b g(x)\,dx,$$

obtenemos que

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \quad ■$$

Observación. La propiedad 4ª tiene lugar para todo número finito de sumandos.

3. Estimaciones de las integrales. Fórmula da valor medio.

1°. *Si por doquier sobre el segmento $[a, b]$ la función $f(x) \geqslant 0$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

□ **Demostración.** En efecto, toda suma integral σ para la función $f(x)$ en $[a, b]$ no es negativa, ya que

$$f(\xi_i) \geqslant 0, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pasando al límite para $\lambda \to 0$ en la desigualdad $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geqslant 0$, obtenemos

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0. \blacksquare$$

2°. *Si por doquier en el segmento* $[a, b]$ $f(x) \leqslant g(x)$, *entonces*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

$\square$ **Demostración.** Aplicando la estimación 1ª a la función $g(x) - f(x) \geqslant 0$, tenemos

$$\int\limits_b^a [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Pero, conforme a la propiedad 4ª,

$$\int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

de donde obtenemos la desigualdad (7). $\blacksquare$

3°. *Para la función $f(x)$ definida en el segmento $[a, b]$ tiene lugar la desigualdad*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Demostración. Aplicando la estimación 2ª a las desigualdades evidentes

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

e integrándolas término a término, al tener en cuenta la propiedad 3ª, resulta

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

lo que es equivalente a la desigualdad (8). $\blacksquare$

Corolario. *Si por doquier en el segmento* $[a, b]$, $a < b$, $|f(x)| \leqslant k$, *entonces*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant k(b - a). \tag{9}$$

☐ Efectivamente, de la desigualdad $|f(x)| \leqslant k$ y de las estimaciones 2ª y 3ª se deduce que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b k\,dx = k\int_a^b dx,$$

de aquí, tomando en consideración que

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a, \tag{10}$$

obtenemos la relación (9). ■

4°. *Si m y M son, respectivamente, los valores mínimo y máximo de la función $f(x)$ en un segmento $[a, b]$, $a < b$, entonces*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{11}$$

☐ **Demostración.** Según la hipótesis para cada $x \in [a, b]$ tenemos

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Aplicando la estimación 2ª a estas desigualdades e integrándolas término a término, resulta

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx,$$

de donde, teniendo en cuenta (10), obtenemos las desigualdades (11). ■

Teorema 6.4. (del valor medio). *Si la función $f(x)$ es continua en un segmento $[a, b]$, entonces en este segmento existe un punto c tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{12}$$

La fórmula (12) *se llama fórmula del valor medio.*

☐ **Demostración.** Puesto que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, conforme al segundo teorema de Weierstrass existen números m y M tales que

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \leqslant f(x) \leqslant M = \max_{[a,b]} f(x).$$

De aquí, según la estimación 4ª, encontramos

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

y, por consiguiente,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M.$$

Pongamos

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \mu \quad (m \leqslant \mu \leqslant M).$$

Puesto que μ está comprendida entre los valores mínimo y máximo de la función continua $f(x)$ en $[a, b]$ (fig. 178), conforme al teorema 4.11 sobre el paso de una función por todo valor medio existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \mu$. Por eso

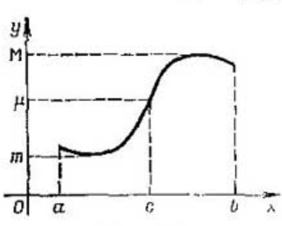


Fig. 178

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c),$$

lo que es equivalente a la igualdad (12). ■

La magnitud $f(c)$ en la fórmula (12) se llama *valor medio de la función $f(x)$ en el segmento* $[a, b]$.

Observación. El teorema del valor medio tiene un significado geométrico claro: la magnitud de la integral definida para $f(x) \geqslant 0$ es igual al área del rectángulo que tiene por altura $f(c)$ y por base $b - a$.

4. Condiciones de existencia de la integral definida.

Teorema 6.5 (condición necesaria de la integrabilidad de una función). *Si la función $f(x)$ es integrable en un segmento $[a, b]$, ella está acotada en este segmento.*

□ **Demostración.** Supongamos lo inverso, o sea, admitamos que $f(x)$ no esté acotada en $[a, b]$. Mostremos que en este caso la suma integral σ puede, a costa de la opción de los puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, hacerse tan grande como se quiera para toda partición del segmento $[a, b]$.

Efectivamente, puesto que $f(x)$ no está acotada en $[a, b]$, para toda partición del segmento $[a, b]$ ella posee esta propiedad aunque sea en un solo segmento parcial, digamos en Δx_1. Entonces escojamos en los demás segmentos $\Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$ arbitrariamente los puntos $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ y designemos

$$\sigma' = f(\xi_2)\,\Delta x_2 + f(\xi_3)\,\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Luego tomemos ξ_1 en Δx_1 tal que

$$|f(\xi_1)| \geqslant \frac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1},$$

donde M es todo número dado que a ciencia cierta es positivo. Esto se puede hacer, puesto que $f(x)$ no está acotada sobre Δx_1. Entonces

$$|f(\xi_1)|\,\Delta x_1 \geqslant |\sigma'| + M \text{ y } |\sigma| = |f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \sigma'| \geqslant |f(\xi_1)|\,\Delta x_1 + |\sigma'| \geqslant M$$

o sea, la suma integral σ es, en valor absoluto, mayor que todo número prefijado. Por esta razón la suma integral σ no tiene un límite finito y esto significa que la integral definida de una función no acotada no existe. ■

Observación. El teorema inverso no es justo, o sea, la condición de que la función $f(x)$ esté acotada es necesaria pero no suficiente para su integrabilidad. Aclaremos esta afirmación, citando un ejemplo. Consideremos la función de Dirichlet en el segmento $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

La función de Dirichlet está, evidentemente, acotada. Sin embargo, no es integrable en $[0, 1]$. Mostremos esto. Si para toda partición del segmento $[0, 1]$ se eligen los puntos ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ como racionales, resulta

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

y si se toman ξ_i como irracionales, se tiene

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Así pues, en caso de la partición en segmentos tan pequeños como se quiera la suma integral puede tomar tanto el valor igual a 0 como el valor igual a 1. Por eso para $\lambda \to 0$ la suma integral σ no tiene un límite.

Por lo tanto, es evidente que para la existencia de la integral definida de cierta función $f(x)$ esta última, además de estar acotada, debe poseer propiedades adicionales que aseguren su integrabilidad.

Teorema 6.6 (condición suficiente de integrabilidad de una función). *Si la función $f(x)$ es continua en un segmento $[a, b]$, ella es integrable en éste, o sea, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda < \delta$ se cumpla la desigualdad*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I \right| < \varepsilon. \tag{13}$$

□ **Demostración.** Puesto que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, conforme al teorema de Cantor ella es también uniformemente continua en este segmento, por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada dos puntos x' y $x'' \in [a, b]$ due satisfagan la desigualdad $|x'' - x'| < \delta$ se cumple la desigualqad

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{14}$$

Mostremos que esto es precisamente tal δ con que la desigualdad (13) se cumple para $\lambda < \delta$.

Sea τ la partición del segmento $[a, b]$ en segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$ cuya longitud $\Delta x_i \leqslant \lambda < \delta$. Aplicando el teorema del valor medio a cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, resulta

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = f(\xi_i^*)\,\Delta x_i, \quad x_{i-1} \leqslant \xi_i^* \leqslant x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Sumando estas igualdades concernientes a todos los segmentos parciales $[x_{i-1}, x_i]$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sigma^*,$$

donde $\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\,\Delta x_i$. Tomemos ahora en cada uno de los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ un punto arbitrario ξ_i. Entonces

$$\sigma - \int_a^b f(x)\,dx = \sigma - \sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\,\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\xi_i^*)]\,\Delta x_i.$$

Puesto que $|\xi_i - \xi_i^*| \leqslant \Delta x_i \leqslant \lambda < \delta$, entonces, tomando en consideración la desigualdad (14), obtenemos

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

o sea la desigualdad requerida (13). ■

Como se deduce del teorema, la condición de continuidad de la función en el segmento $[a, b]$ es la condición suficiente de su integrabilidad. Sin embargo, esto no significa que la integral definida existe sólo para funciones continuas. La clase de funciones integrables es mucho más amplia. Por ejemplo, se puede demostrar que existe una integral definida de las funciones que tienen un número finito de los puntos de discontinuidad [1]).

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué es la partición del segmento $[a, b]$?
2. ¿Qué es la suma integral de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ y en qué consiste el significado geométrico de esta suma?
3. Dese la definición de la integral definida como límite de la suma integral. ¿Por qué en vez de $\lambda \to 0$ no se puede escribir $n \to \infty$?
4. Enúnciense las propiedades fundamentales de la integral definida. Demuéstrese la propiedad 2ª para el caso en que los puntos se disponen del modo siguiente: $b < c < a$.
5. Nombre las estimaciones de las integrales.
6. Sea $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$. ¿Se deduce de aquí que $f(x) \geqslant 0$ sobre $[a, b]$?
7. Enúnciese el teorema del valor medio.
8. ¿Por qué en la fórmula del valor medio (12) el punto c no puede considerarse arbitrario?
9. Cítese un ejemplo cuando la fórmula (12) es válida para todo punto $c \in [a, b]$.
10. Enúnciese la condición necesaria de integrabilidad de una función.
11. ¿Es integrable toda función acotada? Arguméntese la respuesta citando un ejemplo.
12. Enúnciese la condición suficiente de integrabilidad de una función.
13. Cítese el ejemplo de una función integrable.

§ 7. Integral definida con límite superior variable

Hasta ahora hemos considerado la integral definida con los límites de integración constantes a y b. Si varía, por ejemplo, el límite superior, sin salir del segmento $[a, b]$, la magnitud de la integral cambiará. Con otras palabras, la integral con el límite superior variable es la función de su límite superior.

Así pues, si tenemos la integral

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt, \text{ [2]) } \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

con el límite inferior constante a y con el límite superior variable x, la magnitud de esta integral es función del límite superior x. Desig-

[1]) Véase el libro: *V. S. Shipachev*. Matemática superior. M., 1985, *en ruso*.
[2]) Para comodidad, aquí la variable de integración se designa con letra t, ya que con letra x está designado el límite superior de integración.

nemos esta función con $\Phi(x)$ (fig. 179), o sea, pongamos

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

y llamémosla *integral con el límite superior variable*. Geométricamente la función $\Phi(x)$ es el área rayada de un trapecio curvilíneo (fig. 179) si $f(x)>0$. En este caso la función $\Phi(x)$ es creciente, ya que con el crecimiento de x el área del trapecio curvilíneo aumenta.

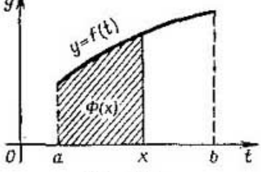


Fig. 179

Ahora consideremos el teorema fundamental de los cálculos diferencial e integral que establece la relación entre la derivada y la integral.

Teorema 6.7. *La derivada de la integral de una función continua respecto al límite superior variable existe y es igual al valor de la función subintegral en el punto igual al límite superior, o sea,*

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x). \tag{2}$$

□ **Demostración.** Tomemos todo valor $x\in[a,b]$ y le asignemos un incremento $\Delta x\neq 0$ tal que $x+\Delta x\in[a,b]$, o sea, $a\leqslant x+\Delta x\leqslant$ $\leqslant b$. Entonces la función $\Phi(x)$, definida por la expresión (1), obtendrá un nuevo valor

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Conforme a la propiedad 2ª de la integral definida (véase el subp. 2 del § 6) tenemos

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

De aquí encontramos el incremento de la función $\Phi(x)$:

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Aplicando el teorema 6.4, resulta

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\,\Delta x,$$

donde c es el número comprendido entre x y $x + \Delta x$. Dividamos ambos miembros de la igualdad por Δx:

$$\frac{\Phi (x+\Delta x)-\Phi (x)}{\Delta x} = f (c).$$

Si ahora $\Delta x \to 0$, entonces $c \to x$; en este caso, en virtud de la continuidad de la función $f(x)$ en $[a, b]$, $f(c) \to f(x)$. Por esta razón, pasando al límite en la última igualdad para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi (x+\Delta x)-\Phi (x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

o bien $\Phi' (x) = f(x)$. ■

Por lo tanto, queda determinado que toda función $f(x)$ continua en un segmento $[a, b]$ tiene una primitiva en este segmento, con la particularidad de que la función $\Phi (x)$ (la integral con el límite superior variable) es primitiva para $f(x)$. Puesto que toda otra primitiva para la función $f(x)$ puede distinguirse de $\Phi (x)$ sólo en constante (véase el teorema 6.1), queda establecida la relación entre las integrales indefinida y definida:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C,$$

donde C es la constante arbitraria.

En particular, del teorema se deduce que $\Phi (x)$ es una función continua sobre el segmento $[a, b]$. (Explíquese ¿por qué?) El caso cuando la integral definida tiene el límite inferior variable y el límite superior constante se reduce fácilmente al examinado con ayuda de la propiedad 1ª (véase la fórmula (4), § 6).

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué función se llama integral con el límite superior variable? ¿En qué consiste su significado geométrico?
2. ¿A qué es igual la derivada de la integral respecto a su límite superior? Demuéstrese el teorema respectivo y explíquese por qué éste se considera fundamental en el cálculo diferencial e integral.

§ 8. Fórmula de Newton—Leibniz

El cálculo de las integrales definidas mediante el método fundado en la determinación de la integral como límite de la suma integral representa grandes dificultades. Por esta razón existe un otro método, prácticamente más cómodo, de calcular las integrales definidas, método basado en estrecha ligazón existente entre los conceptos de integrales indefinida y definida.

Teorema 6.8 (teorema fundamental del cálculo integral). *Supongamos que la función $f(x)$ es continua en un segmento $[a, b]$. Entonces, si la función $F(x)$ es cierta primitiva de dicha función sobre este segmento, es válida la siguiente fórmula:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

La fórmula (1) *se llama fórmula de Newton—Leibniz.*

□ **Demostración.** Sea $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces, conforme al teorema 6.7, la función $\Phi(x)$ es primitiva para la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$. Así pues, $F(x)$ y $\Phi(x)$ son dos primitivas de la misma función $f(x)$ sobre $[a, b]$. Puesto que las primitivas se distinguen en constante (véase el teorema 6.1), o sea,

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

tiene lugar la igualdad

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

donde C es cierto número. Sustituyendo en esta igualdad el valor de $x = a$ y utilizando la propiedad 1ª (véase la fórmula (3) del § 6), tenemos

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a),$$

o sea, para cada $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Suponiendo aquí $x = b$, obtenemos la fórmula (1). ■

La diferencia $F(b) - F(a)$ suele escribirse convencionalmente en la forma

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{o bien} \quad [F(x)]_a^b;$$

entonces la fórmula (1) se escribe así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Cabe subrayar una vez más que en la fórmula (1) como $F(x)$ puede tomarse toda primitiva de la función $f(x)$ en la familia $F(x) + C$.

Así pues, la fórmula obtenida (1) establece, por un lado, la relación entre las integrales definida e indefinida y, por otro lado, ofrece un método sencillo para calcular la integral definida: *la integral definida de una función continua es igual a la diferencia de valores de toda primitiva suya calculados para los límites de integración superior e inferior*. Esta fórmula abre amplias posibilidades para el cálculo de las integrales definidas, ya que el problema de calcular una integral definida se reduce al de calcular una integral indefinida que hemos considerado con bastante plenitud.

○ **Ejemplo 1.** Calcular la integral $\int\limits_a^b \operatorname{sen} x \, dx$.

Resolución. Puesto que en calidad de una de las primitivas para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ sirve la función $F(x) = -\cos x$, entonces, aplicando la fórmula de Newton — Leibniz, resulta

$$\int\limits_a^b \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b.$$

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int\limits_0^1 x^2 \, dx$.

Resolución. Según la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\int\limits_0^1 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}. \quad \bullet$$

Ejercicios. Calcular las siguientes integrales:

1. $\int\limits_0^2 (3x^2 - 1)\, dx$. (*Resp.* 6). 2. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$. (*Resp.* $\ln 2$.)

3. $\int\limits_1^2 e^x \, dx$. (*Resp.* $e(e-1)$.) 4. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

(*Resp.* $\ln(3+\sqrt{10})$.) 5. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$. (*Resp.* 2.)

6. $\int\limits_a^b x^n \, dx$ $(n \neq -1)$. $\left(\textit{Resp.} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.\right)$

El siguiente ejemplo muestra que la utilización formal de la fórmula de Newton — Leibniz, sin tener en cuenta las condiciones de su aplicabilidad, puede llevar a un resultado falso.

○ **Ejemplo 3.** Calcular la integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

Resolución. Según la fórmula de Newton — Leibniz tenemos

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Aquí la fórmula de Newton — Leibniz está empleada correctamente, ya que la función $F(x) = \operatorname{arctg} x$ es continua sobre el segmento $[-1, 1]$ y la igualdad $F'(x) = f(x)$ se cumple en todo este segmento. En cambio, si en calidad de primitiva de la función se toma $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$, la aplicación formal de la fórmula de Newton — Leibniz conduce a la igualdad

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arcctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Hemos obtenido un resultado falso, ya que $\pi/2 \neq -\pi/2$. El error se debe a que para $x = 0$ la función $F(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ es discontinua y no puede ser primitiva. La fórmula de Newton — Leibniz ha de emplearse cuando la primitiva $F(x)$ es continua en el segmento asignado. ●

Observación. La fórmula de Newton — Leibniz fue deducida suponiendo que la función subintegral $f(x)$ es continua. A ciertas condiciones la fórmula de Newton — Leibniz puede emplearse también para las funciones discontinuas.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese la fórmula de Newton — Leibniz.
2. ¿Por qué la fórmula de Newton — Leibniz se considera fundamental para el cálculo integral?

§ 9. Cambio de la variable en la integral definida

Teorema 6.9. *Sea $f(x)$ una función continua sobre el segmento $[a, b]$. Entonces si:* 1) *la función $x = \varphi(t)$ es derivable en $[\alpha, \beta]$ y $\varphi'(t)$ es continua sobre $[\alpha, \beta]$;* 2) *el segmento $[a, b]$ es conjunto de los* *valores de la función* $x = \varphi(t)$; 3) $\varphi(\alpha) = a$ *y* $\varphi(\beta) = b$ (fig. 180), *es válida la fórmula*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

☐ **Demostración.** Según la fórmula de Newton — Leibniz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

donde $F(x)$ es cualquier primitiva para la función $f(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Por otro lado, examinemos la función compuesta $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$. Conforme a la regla de derivación de una función compuesta encontramos

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

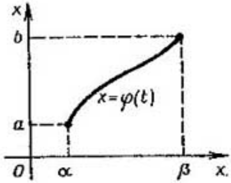


Fig. 180

De aquí se deduce que la función $\Phi(t)$ es primitiva para la función $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$, continua sobre $[\alpha, \beta]$, y por eso de acuerdo con la fórmula de Newton — Leibniz resulta

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

La fórmula (1) se llama *fórmula de cambio de la variable* o *de sustitución en la integral definida.*

Observación 1. Si al calcular una integral indefinida con ayuda de cambio de la variable debemos retornar de la nueva variable t a la vieja variable x, esto se puede no hacer, calculando una integral definida, ya que el objetivo consiste en hallar un número que en virtud de la fórmula demostrada sea igual a valor de cada una de las integrales consideradas.

○ **Ejemplo 1.** Calcular la integral $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Resolución. Consideremos la sustitución $x = a$ sen t, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$. Tal cambio de la variable satisface todas las hipótesis del teorema 6.9. Efectivamente, en primer lugar, $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$ es continua en el segmento $[0, a]$, en segundo lugar, la función $x = a \operatorname{sen} t$ es derivable en $[0, \pi/2]$ y $x'_t = a \cos t$ es continua en $[0, \pi/2]$ y, en tercer lugar, al variar t de 0 a $\pi/2$ la función $x = a \operatorname{sen} t$ crece de 0 a a, con la particularidad de que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\pi/2) = a$. Puesto que $\mathrm{d}x = (a \operatorname{sen} t)'\,\mathrm{d}t = a \cos t\,\mathrm{d}t$, entonces, aplicando la fórmula (1), obtenemos

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a^4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}. \quad \bullet$$

Observación 2. Al utilizar la fórmula (1) es necesario comprobar el cumplimiento de las hipótesis citadas en el teorema. Si estas hipótesis se infringen, el cambio de la variable según la fórmula indicada puede llevar a un resultado erróneo.

○ **Ejemplo 2.** Calcular la integral $\int_0^\pi \mathrm{d}x$.

Resolución. Tenemos $\int_0^\pi \mathrm{d}x = x\Big|_0^\pi = \pi$. Por otro lado,

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)}.$$

La sustitución $t = \operatorname{tg} x$ conduce formalmente al siguiente resultado

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = 0.$$

Hemos obtenido un resultado falso, ya que $\pi \neq 0$. Esto se debe al hecho de que la función $t = \operatorname{tg} x$ es discontinua para $x = \pi/2$ y no satisface las suposiciones del teorema 6.9.

Ejercicio. 1) Hallar el error cometido al calcular la integral de una manera siguiente:

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=\left|\begin{array}{c} x=\dfrac{1}{t}\ ;\ dx=-\dfrac{dt}{t^2} \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x & -2 & 2 \\ \hline t & -1/2 & 1/2 \\ \hline\end{array}\end{array}\right|^{1)}=$$

$$=-\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dt}{t^2\left(4+\frac{1}{t^2}\right)}=-\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dt}{4t^2+1}=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2t\,\Big|_{-1/2}^{1/2}=$$

$$=-\frac{\pi}{4}.$$

(El resultado es evidentemente erróneo, la integral de la función $\left(\frac{1}{4+x^2}>0\right)$ que en todas las partes es positiva resulta igual al número negativo $-\pi/4$.) 2) Calcular la integral dada. (*Resp.* $\pi/4$.)

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿A qué condiciones es válida la fórmula de cambio de la variable en la integral definida?
2. ¿Por qué al cambiar la variable en una integral definida se puede no retornar a la vieja variable?
3. Cítese un ejemplo cuando el incumplimiento de las hipótesis del teorema 6.9 conduciría a un resultado erróneo.

§ 10. Fórmula de integración por partes en la integral definida

Teorema 6.10. *Si las funciones* $u(x)$ *y* $v(x)$ *son continuas junto con sus derivadas* $u'(x)$ *y* $v'(x)$ *en un segmento* $[a, b]$, *es válida la fórmula*

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du. \tag{1}$$

[1]) Aquí las líneas verticales separan las notaciones auxiliares. El cambio de los límites de integración es cómodo escribirlo en forma de una tabla

x	a	b
t	α	β

□ **Demostración.** Puesto que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ tienen, según la hipótesis, derivadas, entonces por la regla de derivación del producto

$$[u(x)\, v(x)]' = u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x).$$

De aquí se desprende que la función $u(x)\, v(x)$ es primitiva para la función $u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x)$. Como la función $u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, la integral de ella existe, o sea, esta función es integrable sobre dicho segmento y por la fórmula de Newton — Leibniz

$$\int_a^b [u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x)]\, \mathrm{d}x = [u(x)\, v(x)]_a^b.$$

De aquí, conforme a la propiedad 4ª de las integrales definidas (véase el subp. 2 del § 6), resulta

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\, u'(x)\, \mathrm{d}x = [u(x)\, v(x)]_a^b$$

o bien, lo que es lo mismo,

$$\int_a^b u\, \mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, \mathrm{d}u,$$

o sea, obtenemos la fórmula (1). ■

La fórmula (1) se llama *fórmula de integración por partes en la integral definida.*

○ **Ejemplo 1.** Calcular $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\, \mathrm{d}x$.

Resolución. Pongamos $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, de aquí $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $v = x$ y por la fórmula (1) encontramos

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\, \mathrm{d}x = x \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\, \frac{\mathrm{d}x}{x} = [x \ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = \mathbf{1}.$$

Ejemplo 2. Calcular $\int_1^2 x\mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$.

Resolución. Pongamos $u = x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$, de aquí $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \mathrm{e}^x$ y por la fórmula (1) tenemos

$$\int_1^2 x\mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x\Big|_1^2 - \int_1^2 \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x (x - 1)]_1^2 = \mathrm{e}^2.$$

Ejemplo 3. Calcular $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Resolución. Pongamos $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, de aquí $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$ y según la fórmula (1) resulta

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^2} =$$

$$= \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}. \quad \bullet$$

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. Demuéstrese la fórmula de integración por partes en la integral definida.
2. ¿Dónde concretamente se ha utilizado en la demostración la hipótesis de continuidad de las derivadas de las funciones $u(x)$ y $v(x)$?

§ 11. Algunas aplicaciones de la integral definida en la física y en la geometría

1. Área de un trapecio curvilíneo. Supongamos que en el plano Oxy se da una figura limitada por el segmento $[a, b]$ del eje Ox, por las rectas $x = a$, $x = b$ y por la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$ en $[a, b]$. Tal figura se llama trapecio curvilíneo cuya área S [1]) puede ser calculada según la fórmula

$$S \approx \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

□ **Demostración.** Dividamos arbitrariamente el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, escojamos en cada segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, un punto ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ y examinemos la figura escalonada (fig. 181). Supondremos que su área es aproximadamente igual al área S del trapecio curvilíneo

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\, \Delta x_i,$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por lo tanto, hemos obtenido la suma integral σ para la integral (1). Puesto que la función $f(x)$ es continua en

[1]) El concepto de área de una figura plana arbitraria (así como el de volumen de un cuerpo y de área de una superficie) se considera en todo manual completo del análisis matemático.

el segmento $[a, b]$, el límite de esta suma existe para $\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ y el área S del trapecio curvilíneo es numéricamente igual a la integral definida de la función $f(x)$ en $[a, b]$:

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

Así pues, *la integral definida de la función continua no negativa $f(x)$ en $[a, b]$ es numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo que*

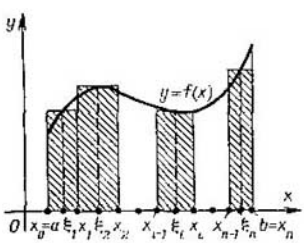


Fig. 181

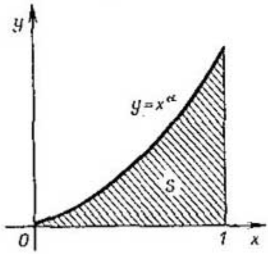


Fig. 182

tiene por base $[a, b]$ y está limitado superiormente por la gráfica de la función $y = f(x)$. En esto consiste el significado geométrico de la integral definida.

○ **Ejemplo 1.** Hallar el área de una figura limitada por la gráfica de la función $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$, por la recta $x = 1$ y por el eje Ox (fig. 182).

Resolución. Por la fórmula (1) tenemos

$$S = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

En este caso si $\alpha = 1$, entonces $S = 1/2$; si $\alpha = 2$, entonces $S = 1/3$, etc. ●

Problemas más complicados referentes al cálculo de las áreas se resuelven utilizando la propiedad de aditividad del área: se puede partir la figura en partes disjuntas y calcular el área de toda la figura como suma de las partes de estas áreas.

○ **Ejemplo 2.** Hallar el área S de una figura limitada por las líneas $y = x$, $y = 1/x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

Resolución. La figura dada puede ser examinada como trapecio curvilíneo limitado por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 3$ y por la gráfica de la función que en el segmento $[0, 1]$ es igual a x

y en el segmento $[1, 3]$, a $1/x^2$. No es fácil escribir la primitiva de tal función. Por esta razón dividamos el trapecio curvilíneo dado en dos partes por la recta $x = 1$ (fig. 183). Las área de estas partes pueden encontrarse fácilmente según la fórmula (1):

$$S_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^3 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Conforme a la propiedad de aditividad del área, $S = S_1 + S_2 = 7/6$. ●

Para calcular las áreas de las figuras es útil, a veces, una propiedad más del área que se llama *invariación respecto a los desplazamientos*: las figuras iguales tienen iguales áreas.

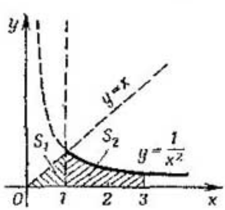


Fig. 183

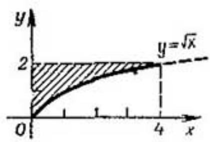


Fig. 184

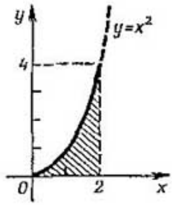


Fig. 185

○ **Ejemplo 3.** Hallar el área S de la figura limitada por las líneas $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$.

Resolución. La figura dada (fig. 184) será un trapecio curvilíneo si se refleja respecto a la recta $y = x$ (fig. 185). En este caso la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ se aplica en la gráfica de la función inversa $y = x^2$ y la recta $y = 2$, en recta $x = 2$. Puesto que las figuras simétricas son iguales, tienen iguales áreas, por eso según la fórmula (1) tenemos

$$S = \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Observación. Otra solución de este problema puede encontrarse observando que la figura dada se complementa por un trapecio curvilíneo (de abajo) hasta obtener un rectángulo cuya área vale 8. Por esta razón

$$S = 8 - \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left(8 - \frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

Esta solución es un ejemplo más cuando se utiliza la propiedad de aditividad del área: la figura dada se representa como «diferencia» de dos figuras más sencillas.

El procedimiento de calcular las áreas, considerado en la observación, puede enunciarse en una forma más general. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ se prefijan dos funciones continuas $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$, con la particularidad de que para todos los valores de x de este segmento $y_1 \leqslant y_2$. Hallemos el área de la figura

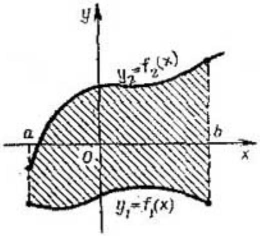


Fig. 186

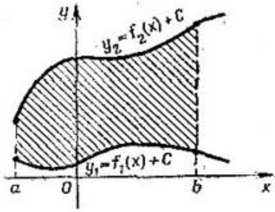


Fig. 187

limitada por las gráficas de estas funciones, así como por las rectas $x = a$ y $x = b$ (fig. 186).

Si ambas funciones son no negativas, el área de la figura dada es igual a la diferencia de áreas de los trapecios curvilíneos limitados arriba por las gráficas de las funciones $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$, respectivamente, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje de abscisas. Por consiguiente, el área S de la figura dada puede encontrarse así:

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (2)$$

La fórmula (2) es válida para todas funciones continuas $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$, no obligatoriamente positivas. Efectivamente, si las funciones y_1 e y_2 pueden tomar también valores negativos (como antes $y_1 \leqslant y_2$) (fig. 186), añadiremos a ambas funciones una misma constante C que elegiremos tan grande que las gráficas de las funciones $y_3 = f_1 + C$ e $y_4 = f_2 + C$ resulten superiores que el eje de abscisas (fig. 187). La figura 187 se obtiene de la figura 186 por la traslación paralela y por esta razón tiene la misma área. A la figura

187 le es aplicable la fórmula (2):

$$S = \int_a^b [f_2(x) + C]\,dx - \int_a^b [f_1(x) + C]\,dx =$$

$$= \int_a^b [(f_2(x) + C) - (f_1(x) + C)]\,dx.$$

Puesto que $(f_2(x) + C) - (f_1(x) + C) = f_2(x) - f_1(x)$, la fórmula (2) es justa también para la figura 186.

○ **Ejemplo 4. Hallar el área de una figura limitada por las gráficas de las funciones $y_1 = f_1(x) = x$ e $y_2 = f_2(x) = 2 - x^2$ (fig. 188).**

Resolución. En la fig. 188 se ve que de límites de integración sirven las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones dadas. Encontrémoslas. Para esto resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$$

Como resultado obtenemos $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Encontramos ahora el área buscada con ayuda de la fórmula (2):

$$S = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Ejemplo 5. Hallar el área comprendida entre la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, la tangente a ella en el punto (3; 5) y el eje Oy.

Resolución. La ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en el punto (3; 5) tiene la forma $y - 5 = f'(3)(x - 3)$. Puesto que $f'(x) = 2x - 2$ y $f'(3) = 2\cdot 3 - 2 = 4$, obtenemos la ecuación de la tangente $y - 5 = 4(x - 3)$ o bien $y = 4x - 7$. Como las ramas de la parábola están orientadas hacia arriba, ella se halla por encima de la tangente, o sea, $x^2 - 2x + 2 \geqslant 4x - 7$ sobre el segmento [0, 3] (fig. 189) Según la fórmula (2) encontramos el área buscada:

$$S = \int_0^3 [x^2 - 2x + 2 - (4x - 7)]\,dx =$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = 9. \quad \bullet$$

Ejercicios. Calcular las áreas de las figuras limitadas por las líneas:

1. $y=4-x^2$, $y=0$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{32}{3}.\right)$ **2.** $y^2=2px$, $x=h$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{4}{3}h\sqrt{2ph}.\right)$ **3.** $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$. (*Resp.* 1.) **4.** $y=x^2$, $y=2-x^2$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{8}{3}.\right)$ **5.** $y=\operatorname{sen} 3x$, $y=0$, donde $0\leqslant x\leqslant \pi/3$. (*Resp.* 2/3.) **6.** $xy=4$, $x=4$, $y=4$, $x=0$, $y=0$. (*Resp.* $4\ln(4e)$.)

Para calcular el área de un trapecio curvilíneo en el caso en que la frontera superior se da por las ecuaciones paramétricas $x=\varphi(t)$,

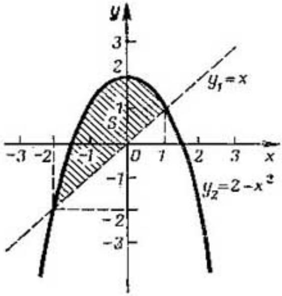


Fig. 188

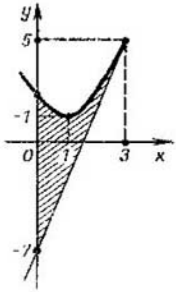


Fig. 189

$y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ en la fórmula (1) es necesario hacer el cambio de la variable, poniendo $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$. Entonces resulta

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt, \tag{3}$$

donde α y β son los valores del parámetro t correspondientes a los valores de $x=a$ y $x=b$, o sea, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

○ **Ejemplo 6.** Hallar el área de una figura limitada por una onda de la cicloide [1]) $x=a(t-\operatorname{sen} t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, y por el eje Ox (fig. 190).

[1]) La cicloide es una curva plana descrita por el punto M de una circunferencia de radio a cuando ésta rueda, sin deslizarse, sobre una recta.

Resolución. Según la fórmula (3) tenemos

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\operatorname{sen} t+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2. \quad \bullet$$

Sería interesante obtener con ayuda de la integración la conocida fórmula para el área de un círculo de radio R.

○ **Ejemplo 7.** Mostrar que el área S de un círculo de radio R es igual a πR^2.

Resolución. Planteemos la integral deseada. Para esto introduzcamos el sistema de coordenadas Oxy y examinemos el círculo de radio R que tiene por centro el origen de coordenadas (fig. 191). Este

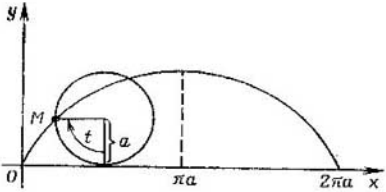


Fig. 190

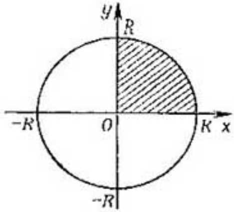


Fig. 191

círculo es conjunto de los puntos $(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la relación $x^2+y^2\leqslant R^2$. Una cuarta parte del círculo en el cuadrante I es un trapecio curvilíneo limitado por el gráfico de la función $y=\sqrt{R^2-x^2}$, el eje Ox y las rectas $x=0$ y $x=R$. Por consiguiente,

$$\frac{S}{4}=\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Vamos a calcular esta integral. Hagamos la sustitución $x=R$ sen t, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$. Verifiquemos la validez de tal sustitución de la variable, o sea, aclaremos si se cumplen o no las hipótesis del teorema 6.9. Tenemos:

1) la función $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ es continua en el segmento $[0,\ R]$ y la función $x=\varphi(t)=R\operatorname{sen} t$ es derivable en el segmento $[0,\ \pi/2]$: su derivada $\varphi'(t)=R\cos t$ es continua en este segmento:

2) al crecer t de 0 a $\pi/2$ la función $\varphi(t) = R$ sen t crece de 0 a R, o sea, el conjunto de los valores de la función $x = \varphi(t)$ es el segmento $[0, R]$;

3) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi/2) = R$.

Por lo tanto, la sustitución $x = R$ sen t satisface todas las hipótesis del teorema 6.9. Aplicando la fórmula (1) del § 9, encontramos

$$\frac{S}{4} = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 t}\, R \cos t\, dt =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{R^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

De suerte que hemos obtenido la fórmula del área del círculo: $S = \pi R^2$. ●

2. Área de un sector curvilíneo. Supongamos que la curva AB está prefijada en coordenadas polares por la ecuación

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

con la particularidad de que la función $\rho(\varphi)$ es continua y no negativa en el segmento $[\alpha, \beta]$. Llamaremos *sector curvilíneo* a una figura plana limitada por la curva AB y dos radios polares que constituyen con el eje polar los ángulos α y β (fig. 192). El área del sector curvilíneo puede ser calculada por la fórmula

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{4}$$

□ **Demostración.** Dividamos arbitrariamente el segmento $[\alpha, \beta]$ en n partes por los puntos $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta$, escojamos sobre cada segmento parcial $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ un punto arbitrario ξ_i ($\varphi_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant \varphi_i$) y construyamos los sectores circulares de radios $\rho(\xi_i)$.

Como resultado hemos obtenido una figura en forma de abanico cuya área puede considerarse igual, aproximadamente, al área S del sector curvilíneo:

$$S \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\, \Delta\varphi_i,$$

donde $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Así pues, hemos obtenido la suma integral σ para la integral (4). Puesto que la función $\rho^2(\varphi)$ es continua sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, el límite de esta suma existe cuando $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta\varphi_i\} \to 0$ y el área del sector curvilíneo es numéricamente igual a la integral definida de la función $\rho^2(\varphi)$ en el segmento $[\alpha, \beta]$:

$$S=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

De aquí se deduce la validez de la fórmula (4). ■

○ **Ejemplo 8.** Calcular el área de una figura limitada por el eje polar y por la primera espira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$, donde a es un número entero (fig. 193).

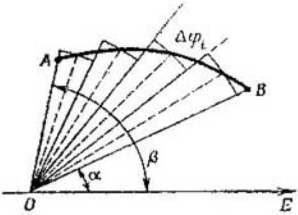


Fig. 192

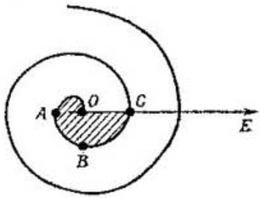


Fig. 193

Resolución. Al variar φ de 0 a 2π el radio polar describirá una curva que limita el sector curvilíneo $OABC$. Por eso según la fórmula (4) tenemos

$$S_{OABC}=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\,\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\,\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4}{3}\,\pi^3a^2. \quad ●$$

Notemos que el punto C está alejado del polo a una distancia $\rho = 2\pi a$. Por esta razón el círculo de radio OC tiene el área igual a $\pi\cdot OC^2 = 4\pi^3a^2 = 3\cdot\frac{4}{3}\pi^3a^2 = 3S_{OABC}$, o sea, el área de la figura limitada por el eje polar y la primera espira de la espiral de Arquímedes es igual a 1/3 parte del círculo cuyo radio es igual al mayor de los radios polares de la espira. Esta conclusión fue sacada aún por Arquímedes.

3. Longitud del arco de una curva. Supongamos que la curva plana AB se prefija mediante la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, donde $f(x)$ es una función continua en el segmento $[a, b]$. Partamos la curva AB en n partes arbitrarias por los puntos $A = M_0, M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B$ en el sentido de A a B. Uniendo estos puntos por las cuerdas, obtendremos cierta línea quebrada inscrita cuyo perímetro se designa con P (fig. 194). Designemos con l_i la longitud de un lado $M_{i-1}M_i$ de la línea quebrada y con μ, la longitud del mayor de sus lados: $\mu = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{l_i\}$.

Definición. *El número L se llama límite de los perímetros P para* $\mu \to 0$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para toda quebrada en la*

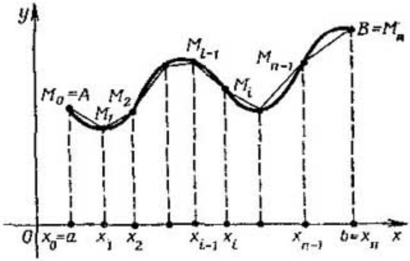


Fig. 194

cual $\mu < \delta$ *se cumpla la desigualdad*

$$| L - P | < \varepsilon.$$

Si existe el límite finito L del parámetro P de una línea quebrada inscrita en la curva cuando $\mu \to 0$, este límite se denomina *longitud del arco* $\widetilde{AB}$:

$$L = \lim_{\mu \to 0} P.$$

Si la función $f(x)$ es continua junto con $f'(x)$ en el segmento $[a, b]$, la longitud del arco $\widetilde{AB}$ se expresa por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (5)$$

☐ **Demostración.** Designemos con x_i y $f(x_i)$ las coordenadas del punto M_i, así que para las abscisas de estos puntos obtenemos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Entonces la longitud de un lado de la quebrada es igual a

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Según la fórmula de Lagrange tenemos

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$
$$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i.$$

Por consiguiente,

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Así pues, el perímetro de toda la quebrada es igual a

$$P=\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i,$$

o sea, hemos obtenido la suma integral σ para la integral (5). Como la función $\sqrt{1+f'^2(x)}$ es continua en el segmento $[a, b]$, el límite de esta suma para $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ existe y es igual a la integral definida (5). Puesto que $\lambda\leqslant\mu$ [1]), entonces $\lambda\to 0$ cuando $\mu\to 0$. Por consiguiente,

$$L=\lim_{\mu\to 0} P=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i=$$

$$=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \quad ■$$

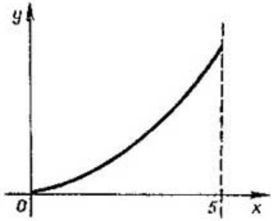


Fig. 195

○ **Ejemplo 9.** Calcular la longitud del arco de una parábola semicúbica $y=x^{3/2}$ de $x=0$ a $x=5$ (fig. 195).

Resolución. De la ecuación $y=x^{3/2}$ obtenemos $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. De tal modo, según la fórmula (5) resulta

$$L=\int_0^5 \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\int_0^5 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=$$

$$=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5=\frac{335}{27}. \quad ●$$

Al calcular la longitud del arco en el caso en que la curva AB se asigna por las ecuaciones paramétricas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, donde α y β son los valores del parámetro t correspondientes a los valores de $x=a$ y $x=b$, o sea, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ en la fórmula $L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ es necesario hacer el cambio de la variable, poniendo $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$. Resulta

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)\,dt=$$

$$=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \qquad (6)$$

[1]) $l_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$, de donde $|\Delta x_i|\leqslant l_i$.

○ **Ejemplo 10.** Calcular la longitud del arco de una onda de la cicloide:

$x = a(t - \text{sen}\, t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (véase la fig. 190).

Resolución. De la ecuación de la cicloide obtenemos $\varphi'(t) = a(1 - \cos t)$, $\psi'(t) = a\,\text{sen}\, t$. Cuando x recorra el segmento $[0, 2\pi a]$ el parámetro t recorrerá el segmento $[0, 2\pi]$. Por consiguiente, la longitud buscada del arco es igual a

$$L = \int_0^{2\pi a} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \text{sen}^2\, t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \text{sen}\, \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \quad \bullet$$

Al calcular la longitud del arco en el caso en que la curva AB se da en coordenadas polares por la ecuación $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, donde $\rho(\varphi)$ tiene la derivada continua $\rho'(\varphi)$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$ y a los puntos A y B corresponden los valores de α y β, pasando de las coordenadas polares (véase el cap. 2, § 3, fórmula (1)) a las rectangulares, obtenemos la representación paramétrica de la curva AB por las ecuaciones $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho\, \text{sen}\, \varphi$ con el parámetro φ. Entonces

$$x'(\varphi) = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho\, \text{sen}\, \varphi,$$

$$y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\, \text{sen}\, \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi$$

y la fórmula (6) se escribe así:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi, \tag{7}$$

donde α y β son los valores del parámetro φ.

○ **Ejemplo 11.** Calcular la longitud de la primera espira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ (véase la fig. 193).

Resolución. La primera vuelta de la espiral de Arquímedes se forma al variar el ángulo polar φ de 0 a 2π. Entonces, según la fórmula (7), la longitud buscada del arco es igual a

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{\varphi^2+1}; & du=\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi \\ dv=d\varphi, & v=\varphi. \end{matrix}\right|=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi\right]=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi\right]=$$

$$=a\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right]=a\left[\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]_0^{2\pi}=$$

$$=a\left[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right].$$

Esta integral está calculada integrando por partes (véase el § 10).

Ejemplo 12. Mostrar que la longitud L de una circunferencia de radio R es igual a $2\pi R$.

Resolución. La gráfica de la función $y=\sqrt{R^2-x^2}$ para $0\leqslant x\leqslant R/\sqrt{2}$ es una octava parte de la circunferencia (fig. 191). Por consiguiente,

$$\frac{L}{8}=\int_0^{R/\sqrt{2}}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Puesto que $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, entonces $1+[f'(x)]^2=\frac{R^2}{R^2-x^2}$. Por eso, según la fórmula (5), resulta

$$\frac{L}{8}=R\int_0^{R/\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Al igual que en el ejemplo 7 hagamos el cambio de la variable: $x=R\operatorname{sen} t$, donde $0\leqslant t\leqslant\pi/4$. Entonces según la fórmula (1) del cambio de la variable, dada en el § 9, tenemos

$$\frac{L}{8}=R\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}t=\frac{\pi R}{4},$$

de donde llegamos al resultado deseado. ●

Observación. Aunque en el ejemplo 12 fuera más cómodo considerar la integral dentro de los límites de 0 a R, hemos procedido de otro modo. Esto se debe al hecho de que al deducir la fórmula de la longitud del arco se suponía que la función $y=f(x)$ tiene una derivada continua en todo el segmento $[a, b]$; en el caso dado para $x=R$ la derivada de la función $y=\sqrt{R^2-x^2}$ se convierte en infinito.

En conclusión examinemos el concepto de diferencial de un arco que es interesante de por sí.

Si en la fórmula (5) el límite superior b se reemplaza por la variable x, la longitud del arco llegará a ser función del límite superior y la fórmula (5) se escribirá así:

$$l(x)=\int_a^x\sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

donde $l(x)$ es la longitud variable del arco. Puesto que aquí la función subintegral es continua, entonces, conforme al teorema 6.7 sobre la derivada de la integral respecto al límite superior variable, tenemos

$$l'(x)=\left(\int_a^x\sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t\right)'_x=\sqrt{1+f'^2(x)},$$

de donde se deduce la fórmula para la integral del arco

$$\mathrm{d}l=l'(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{o bien} \quad \mathrm{d}l=\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

puesto que $y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, entonces $\mathrm{d}l=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ y finalmente resulta

$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}. \tag{9}$$

La fórmula (9) permite dar una interpretación geométrica sencilla de la diferencial del arco $\mathrm{d}l$. Elevando al cuadrado, obtenemos $(\mathrm{d}l)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$. Teniendo en cuenta que la diferencial de la función $y=f(x)$ es igual al incremento de la ordenada de la tangente (véase el cap. V, § 3, subp. 1), resulta que la diferencial del arco $\mathrm{d}l$ (fig. 196) es igual a la longitud del segmento de la tangente a la curva entre el punto de tangencia $M(x; y)$ y el punto $P(x+\mathrm{d}x; y+\mathrm{d}y)$ o sea, es igual a la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos $|dx|$ y $|dy|$ y la igualdad $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ representa el teorema de Pitágoras.

4. Área de una superficie de revolución. Supongamos que la curva AB se da por la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ y la función $y = f(x)$ es no negativa y continua junto con su primera derivada en

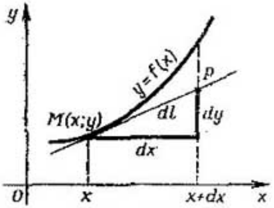


Fig. 196

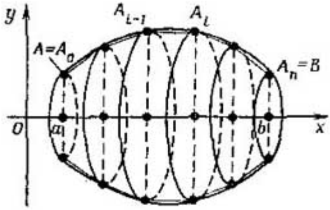


Fig. 197

el segmento $[a, b]$. Entonces la superficie engendrada por la revolución de la curva AB alrededor del eje Ox tiene el área S que puede ser calculada según la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{10}$$

□ **Demostración.** Tomemos en la curva AB un punto M con una abscisa x. Entonces la longitud del arco AM se determina mediante la fórmula

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt.$$

Puesto que la función $l(x)$ es creciente ($\sqrt{1 + f'^2(x)} > 0$) y continua ($l(x)$ es derivable) en el segmento $[a, b]$ entonces, conforme al teorema 4.15, en este segmento para ella existe la función inversa $x = \varphi(l)$. Pero entonces $y = f(x) = f[\varphi(l)] = \psi(l)$ es una función compuesta respecto a l, continua en $[0, L]$, donde L es la longitud de la curva AB. Por lo tanto, la curva AB puede ser representada de modo paramétrico mediante las ecuaciones $x = \varphi(l)$, $y = \psi(l)$, $0 \leqslant l \leqslant L$, donde l es el parámetro.

Dividamos la curva AB en n partes por los puntos $A = A_0$, $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_n = B$ (fig. 197). Designemos con $\Delta l = l_i - l_{i-1}$ la longitud del arco parcial $A_{i-1}A_i$. Al girar la curva AB en torno al eje Ox obtenemos la superficie compuesta por n superficies laterales que son, aproximadamente, iguales a las superficies laterales de los conos truncados (cilindros). El área de la superficie lateral del i-ésimo cono truncado (cilindro) es igual al producto de la longitud de la circunferencia $2\pi R$ (R vale la semisuma de los radios de las bases superior e inferior del cono) por la longitud de la generatriz (de la cuerda $A_{i-1}A_i$). Por esta razón si ponemos $R = y(\xi_i)$, $l_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant l_i$ y la longitud de la cuerda $A_{i-1}A_i$ igual a Δl_i, obtenemos que la superficie S_i de la superficie lateral es, aproximadamente, igual a

$$S_i \approx 2\pi y(\xi_i)\,\Delta l_i.$$

El área de toda la superficie de revolución es igual, aproximadamente, a la suma de las áreas de las superficies laterales S_i, o sea,

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(\xi_i)\,\Delta l_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i.$$

Por otro lado, esta suma es suma integral. Puesto que la función $y(l)$ es continua sobre $[0, L]$, el límite de está suma para $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \{\Delta l_i\} \to 0$ existe y es igual a la integral definida de la función $y(l)$ en $[0, L]$. Por consiguiente,

$$S = \lim_{\lambda\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i = 2\pi \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\,\Delta l_i$$

o bien

$$S = 2\pi \int_0^L y(l)\,\mathrm{d}l. \tag{11}$$

En la integral (11) pasemos de la variable de integración l a la variable x. Estas variables están relacionadas por la fórmula $l(x) = \int_a^x \sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t$. Si $l = 0$, $x = a$ y si $l = L$, $x = b$. Y como $y = y(l) = f(x)$ y $\mathrm{d}l = \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$ (véase la fórmula (8)), de la fórmula (11) finalmente obtenemos

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \quad \blacksquare$$

Observación. Si la superficie dada se obtiene, girando la curva AB, asignada por la ecuación $x = \varphi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, alrededor del eje Oy, su superficie

$$S = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y.$$

○ **Ejemplo 13.** Una parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos que se encuentran uno de otro a una distancia H se llama *zona esférica* de altura H. Calcular el área de la superficie de una zona esférica si el radio de la esfera es igual a R y la altura de la zona es igual a H (fig. 198).

Resolución. La superficie de la zona esférica puede considerarse como superficie de un cuerpo obtenido por girar el arco de la

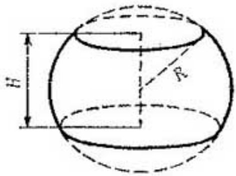


Fig. 198

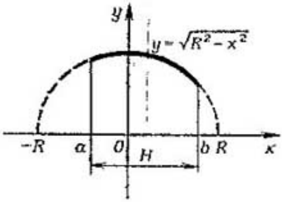


Fig. 199

circunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$, donde $a\leqslant x\leqslant b$, $b-a=H$, alrededor del eje Ox (fig. 199). Puesto que $y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, entonces $1+[f'(x)]^2=\frac{R^2}{R^2-x^2}$; por esta razón según la fórmula (10),

$$S=2\pi\int_a^b \sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=2\pi R\int_a^b dx=2\pi R(b-a)=2\pi RH.$$

De suerte que el área de la superficie S de la zona esférica se calcula por la fórmula $S=2\pi RH$. Si $H\to 2R$, en el límite obtenemos el área de la superficie de toda la esfera: $S=4\pi R^2$. ●

Observación. De la solución del ejemplo 13 se deduce, verbigracia, que si alrededor de la esfera está circunscrito un cilindro, la superficie de la zona esférica comprendida entre dos planos que son perpendiculares al eje del cilindro es igual a la parte de la superficie del cilindro comprendida entre estos mismos planos.

Si la superficie se obtiene girando en torno al eje Ox la curva AB representada por las ecuaciones paramétricas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, con la particularidad de que $\psi(t)\geqslant 0$, $\varphi(t)$ varía de a a b al variar t de α a β, entonces, realizando en la integral (10) el cambio de la variable con ayuda de las fórmulas $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, obtenemos

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt. \tag{12}$$

Por último, si la curva está prefijada por la ecuación en coordenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, donde $\rho(\varphi)$ tiene una derivada continua en el segmento $[\alpha, \beta]$, este caso, como ya hemos señalado en el subp. 3, con ayuda de las fórmulas de paso $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$,

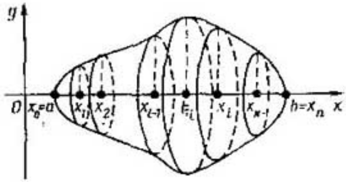


Fig. 200

$y = \rho(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi$ se reduce a la forma paramétrica de representación de la curva y la fórmula (12) se escribe así:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

○ **Ejemplo 14.** Calcular el área S de la superficie obtenida por la revolución de la cicloide $x = a(t - \mathrm{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ en torno al eje Ox (véase la fig. 190).

Resolución. Según la fórmula (12) tenemos

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{(a\,\mathrm{sen}\,t)^2 + [a(1 - \cos t)]^2}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2. \quad \bullet$$

5. Volumen de un cuerpo. Como ya se sabe, con ayuda de la integral definida pueden ser calculadas las áreas de las figuras y las longitudes de las curvas. La determinación de los volúmenes de ciertos cuerpos puede también reducirse al cálculo de las integrales definidas.

Examinemos cierto cuerpo (fig. 200) y calculemos su volumen V. Admitamos que están conocidas las áreas de secciones de este cuerpo por los planos perpendiculares al eje Ox. Con la variación de x el área de la sección también variará, o sea, será cierta función de x. Designemos esta función con $S(x)$ y la consideraremos función continua en un segmento $[a, b]$. Entonces el volumen del cuerpo

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{13}$$

□ **Demostración.** Dividamos arbitrariamente el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Tracemos por estos puntos los planos perpendiculares al eje Ox. Estos planos partirán el cuerpo en n capas. Determinemos el volumen de la i-ésima capa engendrada por las secciones de abscisas x_{i-1} y x_i. Su volumen V_i es, aproximadamente, igual al volumen del cilindro recto cuya base coincide con la sección del cuerpo correspondiente a cualquier punto ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$ y, por consiguiente, tiene el área $S(\xi_i)$ y cuya altura es igual a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, o sea,

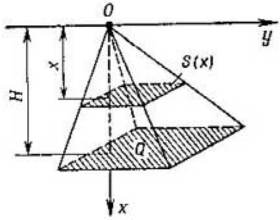


Fig. 201

$$V_i \approx S(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

La suma de los volúmenes de todas las n capas es, aproximadamente igual al volumen V del cuerpo dado:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Por lo tanto, hemos obtenido la suma integral para la integral (13). Puesto que la función $S(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, el límite de esta suma para $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ existe y es igual a la integral definida (13). Así pues,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b S(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

○ **Ejemplo 15.** Calcular el volumen de una pirámide cuya altura es igual a H y área de la base, a Q.

Resolución. Introduzcamos el sistema de coordenadas Oxy de un modo tal que el origen de coordenadas esté en el vértice de la pirámide y el eje Ox pase, a lo largo de la altura H, del vértice a la base (fig. 201). Cortemos la pirámide por un plano paralelo a la base. Designemos con x, $0 \leqslant x \leqslant H$, la distancia entre el vértice de la pirámide y el plano secante y con $S(x)$ el área de la sección. Determinemos la función $S(x)$. Para esto utilicemos la propiedad de las secciones de una pirámide paralelas a la base (esta propiedad se enuncia en manuales de geometría elemental) y escribamos la proporción

$$\frac{S(x)}{Q}=\frac{x^2}{H^2},$$

de donde encontramos

$$S(x)=\frac{Q}{H^2}x^2.$$

Sustituyendo la última igualdad en la fórmula (13), tenemos

$$V=\int_0^H S(x)\,dx=\int_0^H \frac{Q}{H^2}x^2\,dx=\frac{Q}{H^2}\int_0^H x^2\,dx=$$
$$=\frac{Q}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{QH^3}{3H^2}=\frac{1}{3}QH.$$

Así pues, hemos obtenido la fórmula del volumen de la pirámide: $V=\frac{1}{3}QH$. ●

En el caso particular en que el cuerpo está engendrado girando en torno al eje Ox un trapecio curvilíneo representado por la función continua $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, el volumen del cuerpo de revolución se

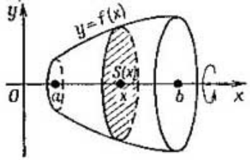


Fig. 202

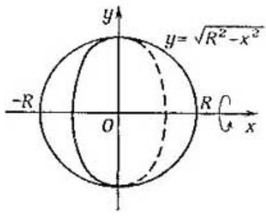


Fig. 203

calcula según la fórmula

$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx. \tag{14}$$

Efectivamente, la sección del cuerpo de revolución por un plano que es perpendicular al eje Ox y pasa por el punto x no es más que el círculo de radio $f(x)$ (fig. 202). Por esta razón el área de esta sección (el área del círculo) es igual a $\pi(f(x))^2$. Por lo tanto, para el cuerpo de revolución dado el área de la sección $S(x)=\pi(f(x))^2$.

De la fórmula (13) obtenemos que

$$V=\int_a^b \pi (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Observación. Si el trapecio curvilíneo $0\leqslant x\leqslant \varphi(y)$, $a\leqslant y\leqslant b$, gira alrededor del eje Oy, el volumen del cuerpo de revolución

$$V=\pi\int_a^b (\varphi(y))^2\,dy=\pi\int_a^b x^2\,dy.$$

○ **Ejemplo 16.** Calcular el volumen de una esfera de radio R.

Resolución. La esfera de radio R se obtiene girando la semicircunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$ alrededor del eje Ox (fig. 203), por eso el volumen V de la esfera se puede hallar con ayuda de la fórmula (14). Utilizando la simetría de esta esfera respecto al eje Oy, encontramos

$$V=\pi\int_{-R}^{R} (f(x))^2\,dx=2\pi\int_0^R \left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2 dx=$$

$$=2\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Así pues, hemos obtenido la fórmula del volumen de una esfera: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. ●

Ejercicios. Calcular los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de una figura limitada por las líneas: **1.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, donde $y\geqslant 0$, alrededor del eje Ox. (*Resp.* $4/3\pi ab^2$.) **2.** $y^2=2px$, $x=h$ alrededor del eje Ox. (*Resp.* πph^2.) **3.** $y=\operatorname{sen} x$, $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, alrededor de cada una de las siguientes rectas: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $x=2\pi$; 4) $x=-1$; 5) $x=-2$; 6) $y=1$; 7) $y=-2$. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{\pi}{2};\ 2\pi^2;\ 6\pi^2;\ 2\pi(\pi+2);\ 2\pi(\pi+4);\ \frac{\pi(8-\pi)}{2};\ \frac{\pi(\pi+16)}{2}.\right)$ **4.** $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, alrededor del eje Ox (*Resp.* $3\pi/10$.) **5.** $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ alrededor: 1) del eje Ox; 2) del eje Oy. $\left(\textit{Resp.}\ \frac{\pi(e^2-1)}{2};\ 2\pi.\right)$ **6.** $y=x^3$, $y=1$, $x=0$ alrededor: 1) del eje Ox; 2) del eje Oy. (*Resp.* $6\pi/7$; $3\pi/5$.) **7.** $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$ alrededor de cada una de las siguientes rectas: 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $y=-1$; 4) $x=1$; 5) $x=-1$; 6) $y=1$. $\left(\textit{Resp.}\ \pi(e-2);\ \frac{\pi(e^2+1)}{2};\ \pi e;\ \frac{\pi(e^2-3)}{2};\right.$

$\frac{\pi(e^2+5)}{2}$; $\pi(4-e)$.) 8. $x^2-y^2=4$, $y=2$, $y=0$ alrededor del eje Ox. $\left(Resp.\ \frac{32\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).\right)$ 9. $y=4/x$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ alrededor: 1) del eje Ox; 2) del eje Oy (*Resp.* 12π; 24π.) 10. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$ alrededor: 1) del eje Ox; 2) del eje Oy. $\left(Resp.\ \frac{\pi(\pi+2)}{4};\ \pi\ln 2.\right)$

6. Centro de gravedad de una curva y de un trapecio curvilíneo. Centro de gravedad de un sistema de puntos materiales. Supongamos que sobre el plano Oxy está prefijado un sistema de puntos materiales: $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2\ (x_2;\ y_2)$, . . ., $A_n\ (x_n;\ y_n)$ cuyas masas son iguales a m_1, m_2, . . ., m_n, respectivamente.

La suma de los productos de las masas de estos puntos por sus ordenadas se llama *momento estático* M_x de este sistema respecto al eje Ox:

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n.$$

De modo análogo se define el momento estático M_y del sistema respecto al eje Oy:

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n.$$

El punto que tiene por coordenadas $\left(\frac{M_y}{m};\ \frac{M_x}{m}\right)$, donde $m = m_1 + \ldots + m_n$, se denomina *centro de gravedad*[1]) del sistema.

Se puede mostrar que el centro de gravedad posee la propiedad siguiente: si en dicho centro se coloca una masa igual a la suma de masas de todos los puntos del sistema, el momento estático de esta masa respecto a todo eje es igual al momento estático de todo el sistema respecto a este eje.

De aquí se desprende que la posición del centro de gravedad del sistema no depende de la opción del sistema de coordenadas.

○ **Ejemplo 17.** Mostrar que el centro de gravedad del sistema constituido por tres puntos P, Q y R en los cuales están concentradas las masas unitarias ($m_P = m_Q = m_R = 1$) se halla en el punto de intersección de las medianas del triángulo (fig. 204).

Resolución. Vamos a convencernos, por ejemplo, de que el centro de gravedad está sobre la mediana PM. Introduzcamos el sistema de coordenadas en el plano del triángulo PQR de un modo tal que su centro (0; 0) se halle en el punto P y el eje Ox pase por la recta PM. En este caso si la ordenada del punto Q es igual a y_0, la ordenada del punto R es igual a $(-y_0)$. De aquí se deduce que la ordenada

[1]) No distinguimos los conceptos de «centro de gravedad» y de «centro de masas».

y_C del centro de gravedad C es igual a

$$y_C = \frac{0 \cdot 1 + y_0 \cdot 1 - y_0 \cdot 1}{2} = 0.$$

Así pues, el punto C está sobre el eje Ox (recta PM). Razonando análogamente, podemos mostrar que el centro de gravedad C se halla sobre las medianas QL y RN. Por consiguiente, C es el punto de intersección de las medianas. ●

Supongamos ahora que las masas no están concentradas en puntos aislados sino se hallan situadas «de una manera continua» llenando

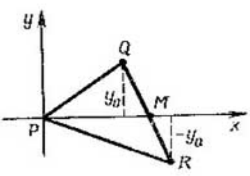


Fig. 204

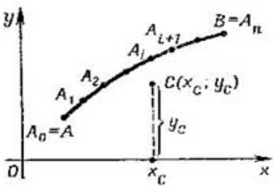


Fig. 205

una línea o figura plana. En este caso para determinar el momento estático en vez de la suma se necesitará la integral.

Centro de gravedad de una curva. Consideremos cierta figura plan a AB. Supondremos que: 1) la curva se da paramétricamente por las ecuaciones $x = \varphi(l)$ e $y = \psi(l)$, $0 \leqslant l \leqslant L$, donde el parámetro l es la longitud del arco que va medida a partir del punto A; L, la longitud de toda la curva AB y las funciones $\varphi(l)$ y $\psi(l)$ son continuas en el segmento $[0, L]$; 2) la curva es homogénea, o sea, su densidad lineal ρ (la masa que toca como parte para la unidad de longitud) es constante y, por sencillez, es igual a la unidad.

Determinemos los momentos estáticos de esta curva respecto a los ejes Ox y Oy y su centro de gravedad (fig. 205). Para esto dividamos la curva AB en n partes por los puntos $A = A_0(x_0; y_0)$, $A_1(x_1; y_1)$, . . ., $A_i(x_i; y_i)$, $A_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$, . . ., $A_n(x_n; y_n) = B$ y supongamos que a estos puntos corresponden los valores de $l_0 = 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_i < l_{i+1} < \ldots < l_n = L$ del parámetro l. Designemos la longitud del arco A_iA_{i+1} con $\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$ y la masa de este arco con m_i. Entonces la masa $m_i = \rho \Delta l_i = \Delta l_i$ $(\rho = 1)$. Concentremos la masa de cada una de las partes A_iA_{i+1} en un punto cualquiera suyo, por ejemplo, en el punto $A_i(x_i; y_i)$. En este caso toda la curva AB puede ser sustituida, aproximadamente, por el sistema de los puntos materiales $A_0, A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n$. Entonces el momento estático M_x de la curva AB es, aproximadamente, igual a la suma de los momentos estáticos del sistema de los puntos materiales respecto al eje Ox:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta l_i.$$

Por otro lado, esta suma es suma integral para la función $y = \psi(l)$ y como la función es continua en el segmento $[0, L]$, el límite de esta suma para $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta l_i\} \to 0$ existe y es igual a la integral definida de la función $y = \psi(l)$ sobre $[0, L]$. Por consiguiente,

$$M_x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta l_i = \int_0^L y \, dl.$$

Análogamente encontramos

$$M_y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta l_i = \int_0^L x \, dl.$$

Puesto que la masa de toda la curva $m = \rho L = L$ $(\rho = 1)$, por la definición del centro de gravedad resulta

$$x_c = \frac{\int_0^L x \, dl}{L}; \quad y_c = \frac{\int_0^L y \, dl}{L}.$$

En el caso particular en que la curva AB se asigna por la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ y la diferencial del arco $dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ (véase la fórmula (8)), las coordenadas del centro de gravedad de la curva AB se calculan mediante las fórmulas

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2}\, dx}{L}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx}{L}. \tag{15}$$

De la fórmula para y_c se deduce que $L \cdot y_c = \int\limits_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx$, de donde, multiplicando ambos miembros de la igualdad por 2π, obtenemos

$$2\pi y_c \cdot L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

El segundo miembro de la última igualdad es el área de la superficie obtenida por la revolución de la curva AB alrededor del eje Ox (véase la fórmula (10)) y la expresión $2\pi y_c$ presente en el primer miembro es la longitud de la circunferencia de radio y_c.

Por lo tanto, está obtenido el siguiente teorema.

Primer teorema de Guldin [1]. *El área de la superficie de un cuerpo obtenido, girando el arco de una curva plana alrededor de cierto eje, que no la corta y está situado en su plano es igual a la longitud de este arco multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita con esta revolución por el centro de gravedad de la curva.*

○ **Ejemplo 18.** Hallar el área de la superficie lateral de un cono.

Resolución. Un cono puede ser representado como cuerpo engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de un

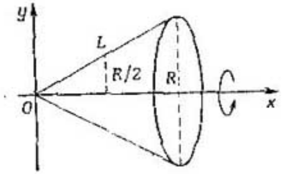


Fig. 206

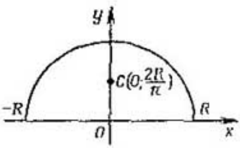


Fig. 207

cateto suyo. Supongamos que el cateto dado está obtenido, girando un triángulo rectángulo, que tienen por hipotenusa L y por cateto R en torno al otro cateto. Introduzcamos el sistema de coordenadas de un modo tal que el eje de revolución sea eje de abscisas (fig. 206). Es evidente que el centro de gravedad del segmento está en su punto medio. Por eso el centro de gravedad de la generatriz del cono —de la hipotenusa del triángulo rectángulo— describe una circunferencia de radio $R/2$. Aplicando el primer teorema de Guldin, obtenemos el área S de la superficie lateral del cono: $S = L\cdot 2\pi R/2 = \pi RL$.

Ejemplo 19. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de una semicircunferencia de radio R que tiene por centro el origen de coordenadas; la semicircunferencia está en el semiplano superior a condición de que $\rho = 1$ (fig. 207).

Resolución. Puesto que la semicircunferencia está situada simétricamente respecto a la recta $x = 0$, el centro de gravedad del arco se encuentra sobre esta recta y $x_c = 0$. El área S de la superficie lateral de un cuerpo engendrado por la revolución de la semicircunferencia de longitud $L = \pi R$ alrededor del eje Ox es igual a $4\pi R^2$. Empleando el primer teorema de Guldin, obtenemos $2\pi y_c\cdot \pi R = 4\pi R^2$, de donde hallamos $y_c = 2R/\pi$. ●

Centro de gravedad de un trapecio curvilíneo. Análogamente al concepto de centro de gravedad de una curva se introduce el de centro de gravedad de un trapecio curvilíneo $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

[1] Paul Guldin (1577 — 1643), matemático suizo. Ambos teoremas citados los conocía aún en el siglo III de n.e. el eminente matemático griego Páppos.

Supondremos que: 1) la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$; 2) en este trapecio están distribuidas las masas de una manera tal que su densidad superficial ρ (la masa que toca como parte para la unidad del área) es constante y, por sencillez, pongámosla igual a la unidad. Entonces la masa de toda parte del trapecio se medirá por su área.

Determinemos los momentos estáticos de este trapecio respecto a los ejes Ox y Oy y su centro de gravedad (fig. 208). Para esto dividamos el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ y el trapecio curvilíneo por las rectas $x = x_i$ en n partes respectivas. Reemplacemos cada trapecio elemental por un rectángulo de base igual a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y de altura igual a $f(\xi_i)$, donde ξ_i es el punto medio $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la masa $m_i = \rho f(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_i)\,\Delta x_i$ $(\rho = 1)$ es igual al área del i-ésimo rectángulo. De la mecánica es sabido que el centro de gravedad de un rectángulo está en el punto de intersección de sus diagonales y, por lo tanto, las coordenadas del centro de gravedad del i-ésimo rectángulo son iguales a ξ_i y $\frac{1}{2} f(\xi_i)$, respectivamente (véase la fig. 208). Concentremos la masa de cada i-ésimo rectángulo en su centro. Entonces todo el trapecio se sustituirá, aproximadamente, por el sistema de los puntos materiales: $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n$ (de los i-ésimos centros de gravedad de los rectángulos). Los momentos estáticos del i-ésimo rectángulo respecto a los ejes Ox y Oy son, respectivamente, iguales a

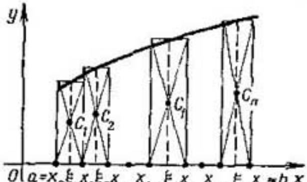


Fig. 208

$$f(\xi_i)\,\Delta x_i \cdot \frac{1}{2} f(\xi_i) = \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{y} \quad f(\xi_i)\,\Delta x_i \xi_i$$

y los momentos estáticos M_x y M_y del trapecio dado son aproximadamente iguales a las sumas de los momentos estáticos de todos los rectángulos respecto a los ejes Ox y Oy:

$$M_x \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{y} \quad M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Por otro lado, estas sumas son sumas integrales y como las funciones $f^2(x)$ y $xf(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$, los límites de estas sumas para $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ existen y son iguales a las integrales definidas. Por consiguiente,

$$M_x = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\, \Delta x_i = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\, dx$$

$$\text{y} \quad M_y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Puesto que la masa de todo el trapecio es igual a

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx = S,$$

donde S es el área de todo el trapecio, para hallar las coordenadas del centro de gravedad del trapecio, según la definición del centro de gravedad, es necesario dividir los valores de los momentos estáticos M_x y M_y por el área de todo el trapecio:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{S} \quad \text{e} \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\, dx}{S}.$$

Al igual que en el caso centro de gravedad de una curva, se puede obtener para la ordenada y_c del centro de gravedad de un trapecio curvilíneo el siguiente corolario geométrico:

$$2\pi y_c S = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Teniendo en cuenta que $2\pi y_c$ es la longitud de la circunferencia de radio y_c y $\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$, el volumen del cuerpo obtenido por la revolución del trapecio curvilíneo alrededor del eje Ox es válido el siguiente teorema.

Segundo teorema de Guldin. *El volumen del cuerpo de revolución de un trapecio curvilíneo alrededor del eje que no lo corta y está situado en el mismo plano es igual al producto del área de este trapecio por la longitud de la circunferencia descrita con esta revolución por el centro de gravedad del trapecio.*,

○ **Ejemplo 20.** Hallar el centro de gravedad de una onda de la cicloide $x = a\ (t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, a condición de que $\rho = 1$ (véase la fig. 190).

Resolución. El volumen del cuerpo obtenido como resultado de la revolución de una onda de la cicloide en torno al eje Ox es igual a

$$V=\pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=5\pi^2a^3.$$

El área de una onda de la cicloide $S=3\pi a^2$ (véase el ejemplo 5). Sea y_c la ordenada del centro de gravedad. Conforme al segundo teorema de Guldin $2\pi y_c\cdot S=V$, de donde $y_c=5a/6$. De la simetría de una onda de la cicloide respecto a la recta $x=\pi a$ se desprende que la abscisa del centro de gravedad $x_c=\pi a$.

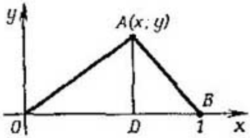


Fig. 209

Ejemplo 21. Hallar el centro de gravedad de una placa triangular homogénea.

Resolución. Introduzcamos el sistema de coordenadas Oxy según se muestra en la fig. 209 de una manera tal que su origen esté en uno de los vértices de la placa y el otro vértice tenga las coordenadas (1; 0); supongamos que el tercer vértice tiene las coordenadas $(x;\ y)$.

Determinemos la ordenada del centro de gravedad de la placa, utilizando el segundo teorema de Guldin. Es evidente que el área del triángulo es igual a $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot y=y/2$; el volumen del cuerpo obtenido como resultado de la revolución del triángulo OAB en torno al eje Ox es igual a la suma de los volúmenes de los conos obtenidos como resultado de la revolución de los lados OA y AB, respectivamente, y es igual a

$$\frac{1}{3}\pi\,|AD|^2\cdot(|OD|+|DB|)=\frac{1}{3}\pi y^2\cdot 1=\frac{1}{3}\pi y^2.$$

Conforme al segundo teorema de Guldin, $2\pi y_c\cdot\frac{y}{2}=\frac{1}{3}\pi y^2$, de donde $y_c=\frac{y}{3}$.

Así pues, el centro de gravedad de la placa está a una distancia de $y/3$ a partir del lado OB. Análogamente se puede mostrar que dicho centro se encuentra a una distancia igual a $\frac{1}{3}$ partes de alturas respectivas a partir de otros lados del triángulo. Por lo tanto, el centro de gravedad de una placa triangular homogénea se halla en el punto de intersección de las medianas del triángulo. ●

Ejercicio. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de un semicírculo que tiene por centro el origen de coordenadas y está en el semiplano superior, a condición de que $\rho=1$. $\left(Resp.\ \ x_c=0,\ \ y_c=\frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi}.\right)$

7. Trabajo de una fuerza variable. Supongamos que un punto material se traslada bajo la acción de una fuerza F que está orientada a lo largo del eje Ox y tiene una magnitud variable dependiente de x. Se necesita determinar el trabajo A que la fuerza F realiza al trasladarse el punto material a lo largo del eje Ox del punto $x = a$ al punto $x = b$ $(a < b)$. Se supone que la función $F(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ (fig. 210).

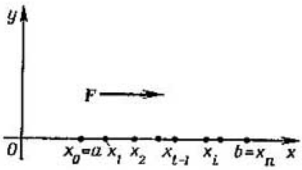


Fig. 210

Dividamos arbitrariamente el segmento $[a, b]$ en n partes por los puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Escojamos en cada segmento parcial $[x_{i-1}, x_i]$ el punto ξ_i. La fuerza que actúa sobre un punto material en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ varía de un punto a otro. No obstante, si la longitud del segmento es pequeña, el valor de la fuerza en los puntos del segmento $[x_{i-1}, x_i]$ poco se distingue de su valor en todo punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ya que $F(x)$ es continua. Por esta razón el trabajo A_i realizado por la fuerza F en el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ puede considerarse, aproximadamente, igual al trabajo realizado en el mismo segmento por la fuerza constante $F(\xi_i)$, o sea,

$$A_i \approx F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Razonando análogamente para cada segmento de partición, obtenemos el valor aproximado del trabajo A que la fuerza F realiza en todo el segmento

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Por otro lado, la suma dada en el segundo miembro de la igualdad es suma integral para la función $F(x)$. Puesto que la función $F(x)$ es continua sobre el segmento $[a, b]$, el límite de esta suma para $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\} \to 0$ existe y es igual a la integral definida de la función $F(x)$ sobre el segmento $[a, b]$. Por lo tanto,

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{16}$$

Ejemplo 22. Determinar el trabajo A necesario para lanzar un cuerpo de masa m desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba a una altura h (fig. 211).

Resolución. Designemos con F la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el cuerpo. Sea m_T la masa de la Tierra. Según la ley de Newton

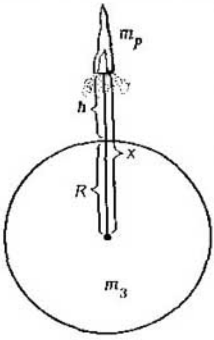


Fig. 211

$$F=G\frac{mm_T}{x^2},$$

donde x es la distancia del cuerpo al centro de la Tierra. Suponiendo $Gmm_T=k$, obtenemos $F(x)=k/x^2$, $R\leqslant x\leqslant h+R$, donde R es el radio de la Tierra. Para $x=R$ la fuerza $F(R)$ es igual al peso del cuerpo $P=mg$, o sea, $\frac{k}{R^2}=P$, de donde $k=PR^2$ y $F(x)=\frac{PR^2}{x^2}$. Así pues, según la fórmula (16) resulta

$$A=\int_R^{R+h}F(x)\,dx=PR^2\int_R^{R+h}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=-PR^2\frac{1}{x}\Big|_R^{R+h}=\frac{PRh}{R+h}.$$

Ejercicio. Una carga eléctrica e_1 colocada en el origen de coordenadas repele otra carga del mismo signo e_2 trasladándola del punto $x=a$ al punto $x=b$ $(a<b)$. Determinar el trabajo A realizado por la fuerza F al trasladar la carga e_2. (*Resp.* $A=$ $=ke_1e_2(1/a-1/b)$.) (*Indicación*: las cargas eléctricas se repelen con una fuerza $F(x)=k\frac{e_1e_2}{x^2}$, donde k es constante; e_1 y e_2, los valores de las cargas; x, la distancia entre ellas.)

De los problemas analizados se deduce que para su resolución fue aplicado el mismo método: el valor aproximado de la magnitud buscada se representaba en forma de la suma integral y luego, pasando al límite, se obtenía el valor exacto en forma de la integral. Con ayuda de este mismo método se puede resolver varios otros problemas de la mecánica, la física y la técnica.

PREGUNTAS DE AUTOCONTROL

1. ¿Qué se llama trapecio curvilíneo?
2. ¿En qué consiste el significado geométrico de la integral definida?
3. ¿Según cuáles fórmulas se calculan las áreas de figuras: a) en coordenadas rectangulares; b) en coordenadas polares; c) en caso de una representación paramétrica de la frontera?
4. ¿Qué es la propiedad de aditividad de un área?
5. Dése la definición del límite de los perímetros de una quebrada para $\mu\to 0$.
6. ¿Qué se llama longitud del arco de una curva?
7. ¿Con qué fórmulas se calcula la longitud del arco de una curva: a) en coordenadas rectangulares; b) representada paramétricamente; c) en coordenadas polares?

8. ¿Qué es la diferencial de un arco? ¿En qué consiste el significado geométrico de la diferencial de un arco?

9. ¿Con qué fórmulas se calcula el área de una superficie de revolución: a) en coordenadas rectangulares; b) en caso de una representación paramétrica de la curva; c) en coordenadas polares?

10. ¿Con qué fórmula se calcula: a) el volumen de un cuerpo con secciones transversales conocidas; b) el volumen de un cuerpo de revolución?

11. ¿Qué son los momentos estáticos de un sistema de puntos materiales respecto a los ejes de coordenadas?

12. ¿Qué se llama centro de gravedad de un sistema de puntos materiales?

13. ¿Con qué fórmulas se calcula el centro de gravedad de una curva: a) representada paramétricamente; b) en coordenadas rectangulares?

14. Enúnciese el primer teorema de Guldin.

15. ¿Con qué fórmulas se calcula el centro de gravedad de un trapecio curvilíneo?

16. Enúnciese el segundo teorema de Guldin.

17. Formúlese el método general de resolución de los problemas con ayuda de la integral definida.

§ 12. Problemas de control

En los problemas 6.1 a 6.3 es necesario calcular las integrales indicadas.

6.1. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$. 6.2. $\int\limits_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

6.3. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$. 6.4. Calcule la integral $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt[3]{\cos x}\,dx$ sin encontrar la primitiva de la función subintegral.

En los problemas 6.5 a 6.7 se necesita hallar las áreas de una figura limitada por las líneas indicadas.

6.5. La parábola $y=-x^2+4x-3$ y las tangentes a ella trazadas por los puntos $(0; -3)$ y $(3; 0)$.

6.6. La sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ y la parábola $y=x^2-\pi x$.

6.7. La línea $y=|x|+1$, las rectas $y=0$, $x=-2$ y $x=1$.

6.8. Se llama *capa esférica* el cuerpo obtenido por la revolución de un trapecio curvilíneo limitado por el arco de la circunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$, las rectas $x=a$ y $x=b$ $(-R<a<b<R)$ y el eje Ox, alrededor del eje Ox (fig. 212) [1]. Hállese el volumen de la capa esférica comprendida en la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ entre los planos $x=2$ y $x=3$.

6.9. Se llama *segmento esférico* el cuerpo obtenido al girar el arco de una circunferencia alrededor del diámetro de circunferencia perpendicular a la cuerda que subtiende el arco. Determínese el volumen de un segmento esférico, conociendo el radio R de la circunferencia y la altura H del segmento, o sea, la longitud del trozo del eje de revolución que está dentro del segmento (fig. 213).

[1] Hemos llamado zona esférica la superficie de este cuerpo y la hemos buscado en el ejemplo 13 del § 11.

6.10. Se llama *sector esférico* el cuerpo engendrado por la revolución de un sector circular alrededor de uno de sus radios de frontera. Determine el volumen de un sector esférico, conociendo el radio R de la esfera y la altura H del sector (fig. 214).

6.11. El pequeño Sergio llenó una cacerola cilíndrica de pequeña cantidad de mijo limpio y preguntó a señora Ludmila, su vecina: «¿Cuánta agua hay que echar para que se obtenga una papilla gustosa?» —«Es una cosa muy sencilla —respondió la vecina—. Inclina la cacerola de ese modo; golpea para que el mijo se remueva y cubra una mitad del fondo, exactamente. Ahora marque en la pared de la cacerola un punto próximo al nivel que alcanza el mijo. ¡Hasta este nivel hay que echar precisamente agua!» (fig. 215) —«Pero se puede llenar la cacerola de una cantidad mayor o menor de mijo y las cacerolas suelen ser diferentes: anchas y estrechas» —dudó Sergio. —«No importa, ¡mi método es útil en todo caso!» —respondió la señora Ludmila.

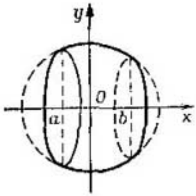


Fig. 212

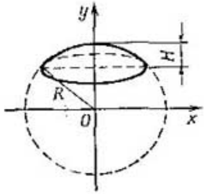


Fig. 213

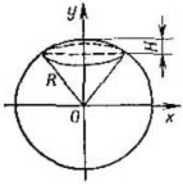


Fig. 214

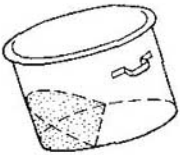


Fig. 215

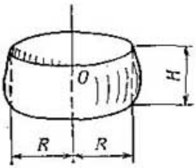


Fig. 216

a) Demuéstrese que la señora Ludmila tiene razón: según su receta la relación entre los volúmenes de agua y de mijo resulta igual para toda cacerola cilíndrica.

b) ¿A qué es igual esta relación?

6.12. Un orfebre ha recibido el encargo de producir un anillo de oro de anchura H que tenga la forma de un cuerpo limitado por la esfera con centro O y por la superficie de un cilindro de radio R cuyo eje pase por el punto O (fig. 216). El artífice ha hecho tal anillo, pero ha escogido R demasiado pequeño. ¿Cuánto oro tiene que añadir si se necesita aumentar R m veces, dejando la anchura H de antes (el peso específico del oro se considera conocido)?

En los problemas 6.13 y 6.14 es necesario hallar: a) el área de la figura limitada por las líneas dadas; b) el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución de esta figura alrededor del eje Ox.

6.13. Las parábolas $x = 1 - 3y^2$ y $x = -2y^2$.

6.14. La curva $y = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2)$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

6.15. Hallar la longitud del arco de una parábola semicúbica $y = x^{3/2}$, donde $x \in [0, 4]$.

6.16. Se prefijan: la parábola $x = y^2$ y las rectas $y = 0$, $x = a$, donde $a > 0$. Hállese: a) el área de la figura limitada por las curvas dadas; b) su volumen; c) el área de la superficie del cuerpo engendrado por la revolución de esta figura alrededor del eje Ox. Calculando el área de la superficie considerar primero $0 < b \leqslant x \leqslant a$, luego tender b a 0.

En los problemas **6.17** y **6.18** se necesita hallar con ayuda de los teoremas de Guldin y partiendo de las consideraciones de simetría los centros de gravedad de los cuerpos materiales indicados.

6.17. El arco de una circunferencia de radio R el cual contrae un ángulo central de 2α.

6.18. El sector circular de ángulo 2α entre los radios de magnitud R que lo limitan.

6.19. Se llama *toro* un cuerpo engendrado por la revolución de un círculo alrededor del eje que no lo interseca. Hállese: a) el volumen del toro; b) el área de la superficie del toro engendrado por la revolución del círculo $(x - 2)^2 + y^2 \leqslant 1$ alrededor del eje Oy.

6.20. Calcular el trabajo A que ha de ser realizado para estirar un muelle en 0,05 m si se sabe que la fuerza que estira el muelle en x m es igual a $F(x) = kx$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad que depende de la elasticidad del muelle y que para estirar el muelle en 0,01 m se necesita una fuerza igual a 1 kgf.

RESPUESTAS, RESOLUCIONES E INDICACIONES PARA LOS PROBLEMAS DE CONTROL

(Son posibles otras resoluciones de problemas, distintas de las aquí citadas)

1.1. Resolución. Puesto que para cada $x \in (0, 1)$ se cumplen las desigualdades $0 < x < 1$, el conjunto dado está acotado. Por eso el número 1 y, por consiguiente, todo número mayor es su cota superior, mientras que el número 0 y todo número menor es su cota inferior.

Más aún, el número 1 es la cota superior exacta del conjunto dado, o sea, $\sup (0, 1) = 1$, ya que para cada $\varepsilon > 0$ siempre habrá $x \in (0, 1)$ tal que se cumpla la desigualdad $x > 1 - \varepsilon$. Efectivamente, sea $\varepsilon = 2$, entonces existe $x \in (0, 1)$ tal que se cumple la desigualdad $x > -1$; sea $\varepsilon = 1$, entonces existe $x \in (0, 1)$ tal que se cumple la desigualdad $x > 0$; sea $\varepsilon = 1/2$, entonces existe $x \in (0, 1)$ tal que se cumple la desigualdad $x > 1/2$, etc. Y esto, según la propiedad de la cota superior exacta, significa que $\sup (0, 1) = 1$.

Análogamente se puede mostrar que $\inf (0, 1) = 0$. (Hágase esto por sí mismo.)

1.2. Resolución. Admitamos lo inverso, por ejemplo, que el conjunto dado X está acotado superiormente. Entonces, en virtud del teorema 1.1, tiene la cota superior exacta. Designémosla con c, o sea, $\sup X = c$. Conforme a la propiedad de la cota superior exacta para $\varepsilon = 1$ habrá un tal número *entero* $x \in X$ que se cumpla la desigualdad $x > c - 1$. Pero entonces $x + 1 > c$ y como $x + 1 \in X$, esto quiere decir que c no es la cota superior exacta del conjunto X. Por lo tanto, queda obtenida la contradicción que demuestra que el conjunto dado no está acotado superiormente.

De manera análoga se demuestra que el conjunto X no está acotado inferiormente. (Hágase esto por sí mismo.)

1.3. Indicación. El hecho de que el conjunto X no está acotado superiormente se deduce de la afirmación demostrada en el problema 1.2.

1.4. Resolución. Efectivamente, en virtud de la afirmación del problema 1.2 para el número b/a habrá un tal número entero n que $b/a < n$. Este número n es buscado, ya que multiplicando la desigualdad $b/a < n$ por un número positivo a, obtenemos $an > b$, conforme se quería demostrar.

1.5. Resolución. Sea $\sup X = A$, $\sup Y = B$. Se necesita demostrar que $B \leqslant A$. Supongamos lo inverso, o sea, que $B > A$. Entonces, según la propiedad de la cota superior exacta, para cada $\varepsilon > 0$ habrá un número $y \in Y$ tal que $y > B - \varepsilon$. Como $B - A > 0$, tomemos $\varepsilon = B - A$. Resulta $y > B - \varepsilon = B - B + A$, o sea, $y > A$. Pero $y \in Y$ e $Y \subset X$, por lo tanto, $y \in X$. Según la definición de $\sup X$ todo número $y \leqslant A$. Pero admitiendo que $B > A$, se puede hallar un número $y \in X$ tal que $y > A$. La contradicción obtenida demuestra precisamente que $B \leqslant A$ o $\sup X \geqslant \sup Y$.

Es posible también otra demostración. Como $Y \subset X$, para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ se cumplen las desigualdades $x \leqslant \sup X$, $y \leqslant \sup X$ e $y \leqslant \sup Y$. Pero $\sup Y$ es el menor entre los números que acotan el conjunto Y superiormente y $\sup X$ es uno de los números que acotan el conjunto Y superiormente, por consiguiente, $\sup Y \leqslant \sup X$. De modo análogo se demuestra que $\inf Y \geqslant \inf X$. (Hágase esto por sí mismo.)

1.6. Resolución. Sea $\sup \{z \mid z = x + y;\ x \in X,\ y \in Y\} = C$, $\sup X = A$, $\sup Y = B$. Conforme a la definición de la cota superior, para cada $x \in X$ y para cada $y \in Y$ se cumple la desigualdad $C \geqslant z$ o $C \geqslant x + y$. Por otro lado, según la propiedad de la cota superior exacta para cada $\varepsilon > 0$ habrá $x \in X$ e $y \in Y$ tales que se cumplan las desigualdades $x > A - \varepsilon/2$ e $y > B - \varepsilon/2$. De aquí resulta $x + y > A + B - \varepsilon$. Y puesto que $C \geqslant x + y > A + B - \varepsilon$, $C > A + B - \varepsilon$, entonces $C \geqslant A + B$.

Mostremos ahora que $C = A + B$. Efectivamente, tenemos $z = x + y$, $x = z - y$, pero, conforme a la definición de la cota superior, $A \geqslant x = z - y$ o bien $A \geqslant z - y$, de donde $y \geqslant z - A$. Por otro lado, $B \geqslant y \geqslant z - A$, $B \geqslant z - A$ o $B + A \geqslant z$. Según la propiedad de la cota superior exacta, para cada $\varepsilon > 0$ habrá z tal que $z > C - \varepsilon$. Por eso $B + A > C - \varepsilon$, de donde resulta $B + A \geqslant C$. Así pues, $B + A \leqslant C \leqslant B + A$; queda tomar $C = B + A$.

Análogamente se puede demostrar que $\inf \{z \mid z = x + y;\ x \in X,\ y \in Y\} = \inf X + \inf Y$. (Hágase esto por sí mismo.)

1.7. $x < -1$ o bien $x \geqslant 1$.

Indicación. La igualdad dada es válida para aquellos valores de x para los cuales $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$.

1.8. $x \geqslant 5$.

Resolución. La igualdad $|x + y| = |x| + |y|$ es válida sólo cuando x e y tienen el mismo signo. Como $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 > 0$ para todos los valores de x, la igualdad dada es válida para aquellos valores de x para los cuales $x - 5 \geqslant 0$, de aquí $x \geqslant 5$.

1.9. $x = -\pi/2 + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Resolución. La igualdad dada es válida para aquellos valores de x para los cuales $\operatorname{sen} x < 0$. Por esta razón tenemos: $-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 2$ o bien $\operatorname{sen} x = -1$, de donde $x = -\pi/2 + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1.10. $|x| \geqslant \sqrt{3}$.

Resolución. La igualdad $|x - y| = |x| - |y|$ es válida sólo cuando x e y tienen el mismo signo y $|x| \geqslant |y|$. En el caso dado la igualdad es válida para aquellos valores de x para los cuales $x^4 - 4 \geqslant x^2 + 2$ o bien $x^2 - 2 \geqslant 1$, de donde $|x| \geqslant \sqrt{3}$.

1.11. 1) $x = 0$; 2) $x = 2/5$ y $x = 2$; 3) $x = 1/2$.

1) **Resolución.** Tenemos $|x+4| = \begin{cases} (x+4) & \text{si } x \geqslant -4, \\ -(x+4) & \text{si } x < -4, \end{cases}$

$$|x-4| = \begin{cases} (x-4) & \text{si } x \geqslant 4, \\ -(x-4) & \text{si } x < 4. \end{cases}$$

Por consiguiente, para $x < -4$ resulta $-(4 + x) = -(x - 4)$, de donde $8 = 0$ —la igualdad incorrecta— no hay soluciones; para $-4 \leqslant x < 4$ obtenemos $(x + 4) = -(x - 4)$, de donde $x = 0$; para $x \geqslant 4$ tenemos $x + 4 = x - 4$, de donde $8 = 0$ —la igualdad incorrecta— no hay soluciones. Ahora bien, $x = 0$ es la solución de la ecuación dada [1]).

2) **Resolución.** Tenemos

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1, \\ -(x-1) & \text{si } x < 1, \end{cases} \quad |1-2x| =$$

$$= \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \leqslant 1/2, \\ -(1-2x) & \text{si } x > 1/2, \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

[1]) Aquí hemos utilizado un procedimiento especial: «el método de los intervalos».

Por lo tanto, para $x < 0$ resulta $-(x-1)+1-2x = -2x$, de donde $x = 2$, es decir, no hay soluciones, ya que $2 \notin (-\infty, 0)$; para $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ obtenemos $-(x-1)+1-2x = 2x$, de donde $x = 2/5$ es la solución de la ecuación, ya que $\frac{2}{5} \in [0, 1/2]$; para $1/2 < x < 1$ resulta $-(x-1)-(1-2x) = 2x$, de donde $x = 0$, es decir, no hay soluciones; para $1 \leqslant x < +\infty$ tenemos $x-1-(1-2x) = 2x$, de donde $x = 2$ es la solución de la ecuación. Así pues, $x = 2/5$ y $x = 2$ son las soluciones de la ecuación dada.

3) **Resolución.** Tenemos: a) $|3-2x|-1 = 2|x|$; b) $|3-2x|-1 = -2|x|$.

a)

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x \text{ si } x \leqslant 3/2, \\ -(3-2x) \text{ si } x > 3/2, \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0, \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Por lo consiguiente, para $x < 0$ resulta $3-2x-1 = -2x$, de donde $2 = 0$ —la igualdad incorrecta— no hay soluciones; para $0 \leqslant x \leqslant 3/2$ obtenemos $3-2x-1 = 2x$, de donde $x = 1/2$ es la solución de la ecuación; para $3/2 < x < +\infty$ tenemos $-3+2x-1 = 2x$, de donde $4 = 0$ —la igualdad incorrecta— no hay soluciones.

No es difícil verificar que en el caso b) la igualdad no tiene una solución. Por lo tanto, $x = 1/2$ es la solución de la ecuación dada.

1.12. $x < 0$ o bien $0 < x < 3$.

Resolución. La desigualdad $|a-b| > |a|-|b|$ es válida cuando: 1) los números a y b son de signos opuestos; 2) $|a| < |b|$. En el caso 1), ya que $x^2 > 0$, la desigualdad tiene lugar para los valores de x para los cuales $3x < 0$, o sea, para $x < 0$. En el caso 2) la desigualdad se cumple para aquellos valores de x para los cuales $x^2 < 3x$ o bien $x^2-3x < 0$, $x(x-3) < 0$. Son posibles ambos casos: ora $\begin{cases} x < 0 \\ x-3 > 0, \end{cases}$ ora $\begin{cases} x > 0, \\ x-3 < 0. \end{cases}$ El primer sistema no tiene soluciones, el segundo tiene una solución $0 < x < 3$. De esta manera, obtenemos la respuesta $x < 0$ o bien $0 < x < 3$.

1.13. $x < -4$ o bien $x > 4$.

1.14. Resolución. Tenemos: 1) para $n = 1$ la afirmación es justa, ya que $4^1 = 4 > 1 = 1^2$; 2) suponiendo la certeza de la afirmación dada para cierto n, demostremos que $4^{n+1} > (n+1)^2$. Efectivamente, puesto que $4^{n+1} = 4 \cdot 4^n > 4n^2$ y $n^2 \geqslant n$ y $n^2 \geqslant 1$, entonces $4n^2 \geqslant n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Finalmente obtenemos $4^{n+1} > (n+1)^2$, lo que se quería demostrar.

1.15. Resolución. Tenemos: 1) para $n = 4$ la afirmación es justa, puesto que $4! = 24 > 16 = 2^4$; 2) suponiendo la certeza de la afirmación dada para cierto $n > 4$, demostremos que $(n+1)! > 2^{n+1}$. Efectivamente, $(n+1)! = n!\,(n+1) > 2^n(n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$, ya que $n+1 > 2$ para $n \geqslant 4$. Finalmente resulta $(n+1)! > 2^{n+1}$, lo que se quería demostrar.

1.16. Resolución. Tenemos: 1) para $n = 2$ la afirmación es justa. En efecto, $\sqrt{2} < 1 + 1/\sqrt{2} < 2\sqrt{2}$ o bien $2 < \sqrt{2}+1 < 4$. Esto es justo, puesto que $1 < \sqrt{2} < 2$; 2) suponiendo la certeza de la afirmación dada para cierto $n > 2$, demostremos que

$$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Para demostrar la validez de la desigualdad

$$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

basta convencerse de que

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Efectivamente, esto es justo, ya que

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Longleftrightarrow^{1)} n+1 < \sqrt{n(n+1)} + 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow n^2 < (\sqrt{n(n+1)})^2 = n^2 + n \Longleftrightarrow 0 < n,$$

lo que es evidente para $n \geqslant 2$. Análogamente, para demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$$

basta cerciorarse de que

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Esta desigualdad es justa, puesto que

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \Longleftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} + 1 <$$

$$< 2(n+1) \Longleftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Longleftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \Longleftrightarrow 0 < 1$$

Por lo tanto, la afirmación dada queda demostrada.

1.17. $1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Resolución. Designemos la suma buscada con S_n. Entonces

$$S_n = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1^2+1}{2} + \frac{2^2+2}{2} + \ldots + \frac{n^2+n}{2} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1 + 2 + \ldots + n}{2} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Observación. La fórmula $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ queda demostrada en el § 6 (véase el ejemplo 3) y Ud debía demostrar por sí mismo la fórmula $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.18. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$.

---

[1]) El signo $\Longleftrightarrow$ designa la equivalencia. Por ejemplo, la notación $A \Longleftrightarrow B$ significa que de A se desprende B y, viceversa, de B se desprende A.

Resolución. Designemos la suma buscada con S_n y representemos $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ en la forma $\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}$. Entonces

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\ldots-\frac{1}{2(2n-1)}+$$
$$+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Para convencerse de que la suma queda determinada correctamente hagamos uso del método de inducción matemática. Tenemos:

1) para $n=1$ la afirmación es justa, ya que

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6};$$

2) admitamos que para cierto n es justa la igualdad

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)};$$

entonces

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}-$$
$$-\frac{1}{2(2n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{2n+3-2}{2(2n+1)(2n+3)}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+3)}.$$

De esta manera, por el método de inducción matemática hemos confirmado la validez de la fórmula buscada $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$.

2.8. c) $|b|$; $|a|$. **Indicación.** Hágase uso de la fórmula F — 3 [1]).

2.9. 1) La longitud del lado del cuadrado $a=\sqrt{17}$ (unid.); 2) $S_{ABCD}=$ $=17$ (unid. [2]); 3) los puntos medios de los lados del cuadrado son: M (3,5; 3) (el punto medio del lado AB); N (1; 4; 5) (el punto medio del lado BC); K (−0,5; 2) (el punto medio del lado CD); L (2; 0,5) (el punto medio del lado AD).

Resolución. 1) La longitud de un lado del cuadrado:

$$a=|AD|=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{17}\ \text{(unid)}.$$

2) El área del cuadrado $S_{ABCD}=a^2=17$ (unid. [2]).

3) Encontramos las coordenadas de los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA según la fórmula para las coordenadas del punto medio del segmento (véase el corolario citado en la pág. 42). Sea M $(x_M;\ y_M)\in[AB]$, $|AM|=$ $=|MB|$. Entonces el punto M divide el segmento AB en la razón $\lambda=\frac{|AM|}{|MB|}=$

---

[1]) Aquí y en adelante en este capítulo la alegación «F — 3» designa la fórmula 3 del § 5. Análogamente se designan otras fórmulas de este párrafo: F — 4, F — 5, etc.

$= 1$, por esta razón conforme a F — 5,

$$x_M = \frac{3+4}{2} = 3\frac{1}{2}; \quad y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Análogamente obtenemos las demás respuestas.

2.10. $x_c = 2$; $y_c = 1$.

Resolución. El centro de gravedad de la placa que tiene la forma de un triángulo está en el punto de intersección de las medianas del triángulo (fig. 217). Sea D el punto medio del lado BC del triángulo ABC. Entonces el punto D divide el segmento BC en la razón $\lambda = 1$, por eso, conforme a F — 5, las coordenadas del punto D son tales:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \quad \text{e} \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}.$$

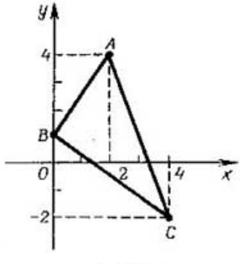


Fig. 217

Las medianas del triángulo se intersecan en el mismo punto que divide cada una de ellas en la razón $\lambda = 1/2$. Designando con x_C e y_C las coordenadas del centro de gravedad de la placa buscada y empleando la fórmula F — 5, obtenemos

$$x_c = \frac{x_D + \frac{1}{2}x_A}{1+1/2} = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 2}{3/2} = \frac{6}{3} = 2;$$

$$y_c = \frac{y_D + \frac{1}{2}y_A}{1+1/2} = \frac{-1/2+\frac{1}{2}\cdot 4}{3/2} = \frac{3}{3} = 1,$$

Por lo tanto, $x_c = 2$; $y_c = 1$.

2.11. Los vértices tienen las coordenadas M (0; —3); N (—4; 5) y K (8; 1).

Resolución. Sean A el punto medio del lado MN; B, el punto medio del lado NK; C el punto medio del lado KM en el triángulo MNK. Entonces, conforme a F — 5 (para $\lambda = 1$),

$$x_A = \frac{x_M + x_N}{2}; \quad x_B = \frac{x_N + x_K}{2}; \quad x_C = \frac{x_K + x_M}{2};$$

$$y_A = \frac{y_M + y_N}{2}; \quad y_B = \frac{y_N + y_K}{2}; \quad y_C = \frac{y_K + y_M}{2}.$$

Sustituyendo en estas ecuaciones las coordenadas de los puntos A, B y C, llegamos a dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_M + x_N = -4, & (1) \\ x_N + x_K = 4, & (2) \\ x_K + x_M = 8, & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_M + y_N = 2, \\ y_N + y_K = 6, \\ y_K + y_M = -2. \end{cases}$$

Sumando término a término las ecuaciones (1), (2) y (3), obtenemos $4 = x_M + x_N + x_K$. Sustrayendo sucesivamente de la última ecuación las ecuaciones 1), (2) y (3), encontramos: $x_K = 8$, $x_M = 0$, $x_N = -4$. Ejecutando las operaciones análogas con las ecuaciones del segundo sistema, hallamos: $y_K = 1$, $y_M = -3$, $y_N = 5$.

2.12. El punto C debe tener las coordenadas $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$.

Resolución. Sea O el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo $ABCD$: entonces este punto es punto medio de las diagonales. Puesto que O es el punto medio del segmento BD, conforme a F — 5 ($\lambda = 1$) (fig. 218)

$$x_0 = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \ (1) \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} \ (2).$$

Como O es el punto medio del segmento AC, análogamente encontramos

$$x_0 = \frac{x_A + x_C}{2} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

De aquí resulta $x_C = 2x_0 - x_A$ e $y_C = 2y_0 - y_A$. Sustituyendo en estas igualdades los valores de x_0 e y_0 encontrados en (1) y (2), obtenemos la respuesta.

Observación. Este problema se resuelve más fácilmente por la composición de los vectores con las coordenadas dadas.

2.13. C (32; 0) o bien C (—8; 0).

Resolución. Sea $C\ (x_C;\ y_C)$ el vértice buscado. Según los datos, $y_C = 0$. De acuerdo con la fórmula del área del triángulo F — 4 tenemos

$$10 = \frac{1}{2} \left| (-2-5)(0-1) - (x_C - 5)(2-1) \right|$$

de donde $|12 - x_C| = 20$. Por lo tanto, $12 - x_C = 20$ o bien $12 - x_C = -20$, por eso $x_C = -8$ o bien $x_C = 32$.

2.14. El área del cuadrilátero es igual a 13 (unid.^{2}).

Resolución. Puesto que (fig. 219) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$ y según la fórmula F — 4, $S_{ABC} = 13/2$, $S_{ACD} = 13/2$, entonces $S_{ABCD} = 13$ (unid.^{2}).

2.15. Las coordenadas rectangulares del punto son iguales a $(2 + 5\sqrt{3};\ 8)$.

Resolución. Como en el triángulo rectángulo $O'AB$ (fig. 220) $\widehat{AO'B} = 30°$, entonces $|AB| = \frac{1}{2}|O'A| = 5$, por esta razón

$$|O'B| = \sqrt{|O'A|^2 - |AB|^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Luego, } x_A = 2 + |O'B| = 2 + 5\sqrt{3}, \quad y_A = 3 + |AB| = 3 + 5 = 8.$$

2.16. La distancia es igual a $\sqrt{34}$ (unid. de long.).

Resolución. Sea O el polo, A y B los puntos dados (fig. 221). El triángulo AOB es rectangular, por eso

$$|AB| = \sqrt{|AO|^2 + |BO|^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}.$$

2.17. Véanse las figs. 222 a 230.

Indicaciones y resoluciones. 2) En el caso de $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$ la ecuación $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$ toma la forma $1 = 1$ y en el caso de $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}$ toma la siguiente forma: $-1 = -1$, por consiguiente, todos los puntos que están en los cuadrantes I y III (sin fronteras, ya que $x \neq 0$, $y \neq 0$) pertenecen al conjunto buscado. Si x e y tienen signos opuestos (o sea para los puntos de los cuadrantes II y IV), obtenemos la igualdad incorrecta $1 = -1$, por lo tanto, en los cuadrantes II y IV no hay puntos del conjunto buscado (fig. 225).

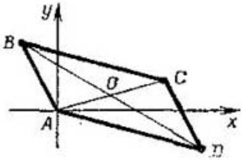


Fig. 218

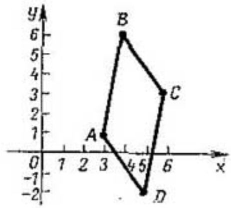


Fig. 219

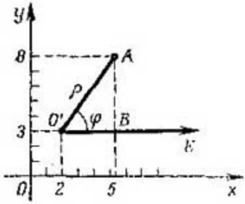


Fig. 220

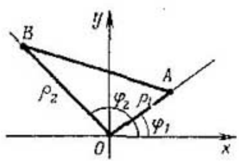


Fig. 221

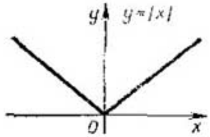


Fig. 222

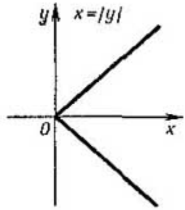


Fig. 223

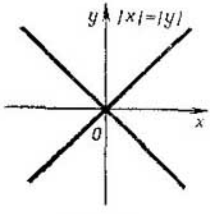


Fig. 224

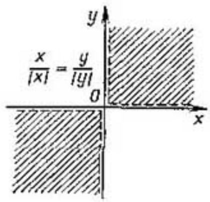


Fig. 225

4) $(x-y)(x-2y)=0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x-y=0, \\ x-2y=0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y=x, \\ y=x/2, \end{array} \right.$ de donde obtenemos que de conjunto buscado sirve la unión de las rectas $y = x$ e $y = x/2$ (fig. 226).

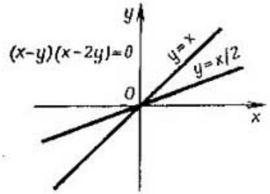


Fig. 226

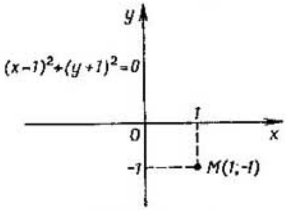


Fig. 227

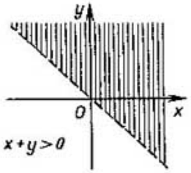


Fig. 228

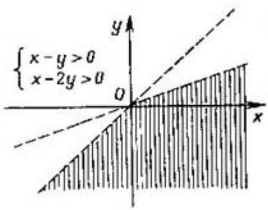


Fig. 229

5) La suma de los cuadrados puede ser igual a cero sólo cuando cada sumando es igual a cero, por consiguiente,

$$(x-1)^2+(y+1)^2=0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x-1=0, \\ y+1=0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x=1, \\ y=-1, \end{array} \right.$$

o sea, el conjunto buscado es el punto M (1; —1) (fig. 227).

6) $x+y>0 \iff y>-x$, de donde se desprende que al conjunto buscado pertenecen todos los puntos que estén «más arriba» que la recta $y = -x$ (fig. 228).

9) $\left\{ \begin{array}{l} x-y>0 \\ x-2y>0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y<x, \\ y<x/2 \end{array} \right.$ por eso al conjunto buscado pertenecen los puntos que son la intersección de los semiplanos $y<x$ e $y<x/2$ (fig. 229).

10) $(x-y)(x-2y)>0$.

El caso de $\left\{ \begin{array}{l} x-y>0, \\ x-2y>0 \end{array} \right.$ está examinado en el problema 9); análogamente se considera el caso de $\left\{ \begin{array}{l} x-y<0, \\ x-2y<0, \end{array} \right.$ o sea, el conjunto buscado es un par de ángulos verticales (fig. 230) sin fronteras.

2.18. a) $y=0$; b) $y=x+10$; c) $|x|=2$.

Indicaciones y resoluciones. a) El mismo punto A (1; 0) está en el eje de abscisas, $y=0$.

b) La ecuación de la recta paralela a la recta $y = x$ tiene la forma $y = x + b$, donde b es un número constante. El punto B (—3; 7) se halla en esta recta, por esta razón $7 = -3 + b$, de donde $b = 10$. Así pues, la recta buscada tiene la ecuación $y = x + 10$.

c) El conjunto de los puntos que se encuentran a la distancia 2 a partir del eje Oy es un par de rectas que son paralelas al eje Oy y pasan por los puntos (—2; 0) y (2; 0). Las ecuaciones de estas rectas son $x = -2$ o $x = 2$.

2.19. a) $(y-3x)(y-x+3)=0$; b) $(y-x)[(x+1)^2+(y-2)^2]=0$; c) $y \geqslant x$; d) $0<y<1$; e) $\begin{cases} 0<x<1, \\ 0<y<1. \end{cases}$

2.20. Resolución. Utilizando F — 9, escribamos la ecuación de la recta (AB) [1] $\frac{y+6}{400+6} = \frac{x-3}{-200-3}$, de donde $y = -2x$. Las coordenadas del punto C satisfacen la ecuación de la recta (AB). En efecto, $-2000 = -2\cdot 1000$. Por lo tanto, $C \in (AB)$, o sea, los puntos A, B y C están sobre la misma recta.

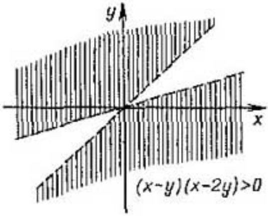


Fig. 230

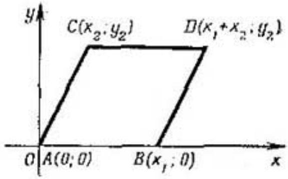


Fig. 231

2.22. Resolución. Introduzcamos el sistema rectangular de coordenadas con el origen situado en el vértice A del paralelogramo y con el eje de abscisas orientado a lo largo de la recta (AB) del punto A al punto B (fig. 231). Escribamos las coordenadas de los vértices del paralelogramo: A (0; 0), B $(x_1;\ 0)$, C $(x_2;\ y_2)$, D $(x_1 + x_2;\ y_2)$ (véase el problema 12). Utilizando la fórmula F — 3, determinemos las longitudes de los lados del paralelogramo y de sus diagonales:

$$|AC| = \sqrt{(x_2-0)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{x_2^2+y_2^2};$$
$$|AB| = \sqrt{(x_1-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{x_1^2};$$
$$|BD| = |AC| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}; \quad |CD| = |AB| = \sqrt{x_1^2};$$
$$|AD| = \sqrt{(x_1+x_2-0)^2+(x_2-0)^2} = \sqrt{(x_1+x_2)^2+y_2^2};$$
$$|CB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+y_2^2}.$$

Ahora se puede comprobar que la suma de los cuadrados de las longitudes de todos los lados del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales. En efecto,

$$|AC|^2 + |AB|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 =$$
$$= (x_2^2 + y_2^2) + x_1^2 + (x_2^2 + y_2^2) + x_1^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_2^2;$$
$$|AD|^2 + |CB|^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_2^2) +$$
$$+ (x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_2^2.$$

[1] La notación (AB) designa la recta que pasa por los puntos A y B.

2.23. a) El punto N no está sobre la circunferencia dada.

Resolución. Escribamos la ecuación de la circunferencia dada (véase F — 13): $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. Sustituyamos en ella las coordenadas del punto. Tenemos $(-1+4{,}1)^2+(+2+1{,}9)^2=25$. Suprimiendo los paréntesis, obtenemos la igualdad incorrecta $24{,}82=25$.

2.24. $a=1$ o bien $a=-5$.

Resolución. Utilizando la fórmula F — 13, escribamos la ecuación de la circunferencia dada $(x+2)^2+(y-3)^2=25$. Puesto que el punto $A\ (a;\ -1)$ está en la circunferencia dada, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la circunferencia, o sea,

$$(a+2)^2+(-1-3)^2=25.$$

Resolviendo la última ecuación, obtenemos dos valores de a: $a_1=1$, $a_2=-5$.

2.25. (AB): $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$; (BC): $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$; (CD): $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$; (AD): $y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.

Resolución. Determinemos las coordenadas de los puntos B y D:

$$|OB|=|AO|\operatorname{tg}60°,\quad |AO|=1,\quad |OB|=1\cdot\operatorname{tg}60°=\sqrt{3};$$

$$|OD|=|OB|=\sqrt{3};\quad B\,(0;\ \sqrt{3}),\quad D\,(0;\ -\sqrt{3}).$$

Según la fórmula F — 9 escribamos las ecuaciones de las rectas (AB), (BC), (CD) y (AD).

$$(AB)\colon\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1;\quad -\sqrt{3}x+y=\sqrt{3};\ y=\sqrt{3}x+\sqrt{3};$$

$$(AD)\colon\ \frac{x}{-1}+\frac{y}{-\sqrt{3}}=1;\ \sqrt{3}x+y=-\sqrt{3};\quad y=-\sqrt{3}x-\sqrt{3};$$

$$(CD)\colon\ \frac{x}{1}+\frac{y}{-\sqrt{3}}=1;\ -\sqrt{3}x+y=-\sqrt{3};\ y=\sqrt{3}x-\sqrt{3};$$

$$(BC)\colon\ \frac{x}{1}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1;\ \sqrt{3}+y=\sqrt{3};\ y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}.$$

2.26. $y=x-5$.

Resolución. La bisectriz de los cuadrantes I y III tiene la ecuación $y=x$. La recta buscada es, según los datos, paralela a esta bisectriz, por eso la ecuación de la recta tiene la forma $y=x+b$. Teniendo en cuenta que el punto $A\ (0;\ -5)$ está sobre la recta $y=x+b$, determinemos el valor de b: $-5=0+b$; $b=-5$. Por lo tanto, la ecuación de la recta buscada tiene la forma $y=x-5$.

2.27. a) $y=2x+2$.

Resolución. Puesto que la recta buscada es paralela a la recta $y=2x+1$, su ecuación tiene la forma $y=2x+b$. Teniendo en cuenta que el punto $M\ (0;\ 2)$ pertenece a la recta buscada, encontramos el valor de b: $2=2\cdot0+b$; $b=2$. Así pues, la recta buscada tiene la ecuación $y=2x+2$.

2.28. 1) La ecuación de la altura AD $y=2x+6$; 2) la longitud de la altura AD es igual a $12/\sqrt{5}$ (unid.); 3) $S_{AOB}=12$ (unid. ^{2}).

Resolución. Determinemos las abscisas de los puntos A y B. Sustituyendo en la ecuación $2x+y-6=0$ las ordenadas y_A e y_B, obtenemos $2x+6-6=0$, $2x-2-6=0$, de donde $x_A=0$ y $x_B=4$ (fig. 232). Utilizando la fórmula F—9, escribamos la ecuación de la recta (OB); $\frac{y}{-2}=\frac{x}{4}$ o bien $y=-\frac{1}{2}x$. Luego, en virtud de la fórmula F — 7, escribamos la ecuación de la recta (AD): $y - 6 = k(x - 0)$, $y = kx + 6$. Puesto que, según los datos, la recta (AD) es perpendicular a la recta (BD), conforme a F — 10 b) k en la ecuación de la recta (AD) es igual a 2. Por consiguiente, la ecuación de la altura buscada AD tiene la forma $y = 2x + 6$. Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = -1/2x, \\ y = 2x + 6, \end{cases}$ encontramos las coordenadas del punto D: $x_D = -12/5$, $y_D = 6/5$. Según la fórmula F — 3 $|AD| = 12\sqrt{5}$ y según la fórmula F — 4 $S_{AOB} = 12$ (unid.²).

2.29. $2x + 7y - 5 = 0$.

Resolución. Notemos que el punto $A\ (-1;\ 1)$ pertenece a la recta $x + 2y - 1 = 0$ (fig. 233).

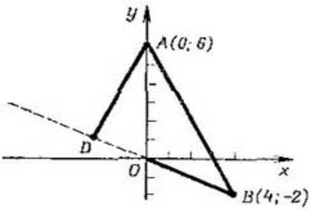


Fig. 232

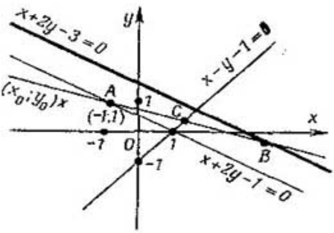


Fig. 233

1) Supongamos que la recta buscada corta la recta $x + 2y - 3 = 0$ en el punto $B\ (x_0;\ y_0)$. Entonces $x_0 + 2y_0 - 3 = 0$.

2) Las coordenadas $(x_C;\ y_C)$ del punto medio C del segmento AB pueden ser determinadas mediante la fórmula F — 5 (para $\lambda = 1$):

$$x_C = \frac{-1 + x_0}{2}, \quad y_C = \frac{1 + y_0}{2}.$$

El punto C pertenece a la recta $x - y - 1 = 0$ y, por consiguiente, $x_C - y_C - 1 = 0$ o bien $\frac{-1 + x_0}{2} - \frac{1 + y_0}{2} - 1 = 0$, o sea, $x_0 - y_0 = 4$.

3) Las coordenadas $(x_0;\ y_0)$ del punto B se obtienen del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 = 3, \\ x_0 - y_0 = 4, \end{cases}$$

de donde $x_0 = 11/3$, $y_0 = -1/3$.

4) La ecuación de la recta buscada (AB), donde $A\ (-1;\ 1)$ y $B\ (11/3;\ -1/3)$, se encuentra según la fórmula F — 7:

$$\frac{x + 1}{11/3 + 1} = \frac{y - 1}{-1/3 - 1} \quad \text{o bien} \quad 2x + 7y - 5 = 0.$$

2.30. $x - 7y + 6 = 0$ y $7x + y + 4 = 0$.

Resolución. Según los datos es necesario hallar el conjunto de todos los puntos $M\ (x;\ y)$ equidistantes de las rectas L_1 (la ecuación $3x + 4y - 1 = 0$) y L_2 (la ecuación $4x - 3y + 5 = 0$), o sea, tales que la distancia d_1 del punto $M\ (x;\ y)$ a la recta L_1 es igual a la distancia d_2 del punto $M\ (x;\ y)$ a la recta

L_2 $(d_1 = d_2)$. Conforme a F — 11,

$$d_1 = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{9+16}}, \quad d_2 = \frac{|4x-3y+5|}{\sqrt{16+9}}.$$

Por lo tanto, el conjunto buscado de los puntos M $(x; y)$ se prefija mediante la ecuación

$$\frac{|4x-3y+5|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{25}}, \text{ o sea,}$$

$$|4x-3y+5| = |3x+4y-1|.$$

La última ecuación es equivalente a las dos ecuaciones siguientes: $4x - 3y + 5 = 3x + 4y - 1$ o bien $4x - 3y + 5 = -3x - 4y + 1$, o sea, $x - 7y + 6 = 0$ o bien $7x + y + 4 = 0$.

2.31. Para todos los valores de a. El conjunto de los puntos M es una recta perpendicular al segmento AB.

Resolución. Introduzcamos el sistema rectangular de coordenadas con el centro situado en el punto medio del segmento AB y con el eje de abscisas orientado del punto A al punto B (fig. 234). Sea $|AB| = d$, entonces tenemos $A = (-d/2; 0)$, B $(d/2; 0)$. Sea M $(x; y)$ el punto del conjunto buscado. Según la fórmula F — 3,

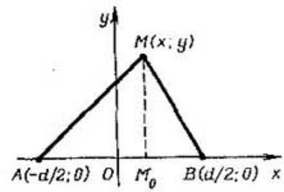


Fig. 234

$$|AM|^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$|BM|^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2,$$

de donde $|AM|^2 - |BM|^2 = 2xd$. Por otro lado, según los datos $|AM|^2 - |BM|^2 = a$ y de este modo el conjunto buscado se define por la ecuación $2xd = a$. Es evidente que esta recta es perpendicular al eje de abscisas y lo corta en el punto que tiene por coordenadas $(a/2d; 0)$.

2.32. $(0; 1)$ o bien $(3/5; -4/5)$.

Resolución. El punto buscado A $(x_0; y_0)$ se encuentra en la circunferencia dada, por esta razón las coordenadas están ligadas por la relación $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Además, según los datos, el punto A $(x_0; y_0)$ es equidistante de los puntos $(1; 3)$ y $(-2; 2)$; por eso, según F — 3,

$$(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 3)^2 = (x_0 + 2)^2 + (y_0 - 2)^2.$$

De esta manera, las coordenadas del punto A $(x_0; y_0)$ pueden obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1, \\ (x_0-1)^2 + (y_0-3)^2 = (x_0+2)^2 + (y_0-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 1, \\ y_0 = 1 - 3x_0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} x_0 = 3/5, \\ y_0 = -4/5. \end{cases}$$

2.33. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Resolución. Notemos que puesto que $1^2 + 2^2 = 5$ es una igualdad correcta, el punto A $(1; 2)$ está en la circunferencia dada. Según F — 9, la recta (OA) tiene la ecuación $y = 2x$.

La tangente buscada es perpendicular al radio de la circunferencia trazado al punto de tangencia A, o sea, a la recta (OA). Por esta razón, según F — 10 b), el coeficiente angular de la tangente buscada es igual a $(-1/2)$ y, por consiguiente, su ecuación tiene la forma $y=-\frac{1}{2}x+b$.

Para determinar b hagamos uso del hecho de que el punto A (1; 2) pertenece a la tangente, es decir, sus coordenadas satisfacen la ecuación de la tangente: $2=-\frac{1}{2}\cdot 1+b$. De aquí $b=\frac{5}{2}$.

Así pues, la ecuación de la tangente a la circunferencia dada en el punto A (1; 2) tiene la forma $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

2.34. $y=\frac{a}{b}x$.

Resolución. Dos puntos de intersección de las dos circunferencias dadas satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2+y^2=2ax, \\ x^2+y^2=2by \end{cases}$$

y, por consiguiente, la condición de $2ax=2by$, o sea, están sobre la recta $ax=by$. Notemos que para $a\neq 0$ y $b\neq 0$ el sistema tiene dos soluciones (0; 0) y $\left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2},\ \frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right)$, por eso las circunferencias tienen una cuerda común.

2.35. $x+y-3-3\sqrt{2}=0$ y $x+y-3+3\sqrt{2}=0$.

Resolución. Reduzcamos las ecuaciones dadas a la forma canónica

$$(x^2+y^2=6x) \Longleftrightarrow ((x-3)^2+y^2=3^2) \text{ y } (x^2+y^2=6y) \Longleftrightarrow (x^2+(y-3)^2=3^2).$$

Las circunferencias tienen radios iguales, por lo tanto, si se traza la recta por sus centros, las tangentes comunes serán paralelas a esta recta y alejadas de ella a una distancia igual al radio (fig. 235). La ecuación de la recta que pasa por los centros O_1 (3; 0) y O_2 (0; 3) es la siguiente:

$$\frac{x-3}{0-3}=\frac{y-0}{3-0} \Longleftrightarrow x+y-3=0.$$

Por consiguiente, las tangentes buscadas son conjunto de los puntos $(x;\ y)$ alejados a partir de la recta $x+y-3=0$ a una distancia igual a 3. Según F — 11,

$$\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}=3,$$

de donde obtenemos la respuesta.

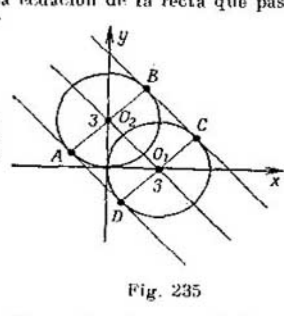


Fig. 235

2.36. $y=\frac{1}{4}x^2$.

Resolución. La parábola pasa por el origen de coordenadas y es simétrica respecto al eje Oy, por esta razón, según F — 16, la ecuación de la misma tiene la forma $x^2=2py$. Teniendo en cuenta que el punto (6; 9) pertenece a la parábola, encontramos el valor de p: $6^2=2p9$, $p=2$. De suerte que la parábola buscada tiene la ecuación $x^2=4y$ o bien $y=\frac{1}{4}x^2$.

2.37. $\frac{x^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1$.

Resolución. Las ordenadas y_1 de los puntos de la curva obtenida son dos veces menor que las ordenadas y de los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=36$ con las mismas abscisas, o sea, $y_1=\frac{1}{2}y$, de donde $y=2y_1$. Por eso la ecuación de la nueva curva tiene la forma

$$x^2+(2y_1)^2=36 \iff \frac{x^2}{36}+\frac{y_1^2}{9}=1.$$

La curva obtenida es elipse.

2.38. $a=\sqrt{10}$; $b=\sqrt{6}$.

Resolución. Transformemos la ecuación dada, reduciéndola a la forma canónica

$$3x^2+5y^2-30=0 \iff \frac{3x^2}{30}+\frac{5y^2}{30}=1 \iff \frac{x^2}{(\sqrt{10})^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{6})^2}=1.$$

Por lo tanto, el semieje mayor de la elipse $a=\sqrt{10}$, el semieje menor $b=\sqrt{6}$.

2.39. $\frac{x^2}{65}+\frac{4y^2}{65}=1$.

Resolución. La ecuación de la elipse simétrica respecto a los ejes Ox y Oy es la siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Teniendo en cuenta que los puntos (1; 4) y (7; 2) están en la elipse, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1, \\ \dfrac{49}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $a=\sqrt{65}$, $b=\frac{1}{2}\sqrt{65}$. Sustituyendo los valores encontrados de a y b en la ecuación general de la elipse, obtenemos $\frac{x^2}{65}+\frac{4y^2}{65}=1$.

2.40. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.

Resolución. La elipse dada tiene los semiejes $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{5}$ y los focos en los puntos $F_1(c;\ 0)$ y $F_2(-c;\ 0)$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$. La hipérbola buscada tiene los focos en los puntos $F_1'(c_1;\ 0)$ y $F_2'(-c;\ 0)$, donde $c_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}$. Según los datos, $c_1=a$ y $a_1=c$. Por eso tenemos $a=\sqrt{c^2-b_1^2}$, de donde

$$a^2=c^2-b_1^2 \iff a^2=(a^2-b^2)-b_1^2 \iff b^2=b_1^2 \iff b_1=b.$$

Así pues, la ecuación de la hipérbola buscada

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1 \iff \frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1.$$

2.41. $2x-5y+19=0$.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la circunferencia a la forma canónica:

$$x^2+y^2+4x-6y-17=0 \iff (x+2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{30})^2.$$

De esta manera, el centro de la circunferencia está en el punto $(-2; 3)$ y, por lo tanto, la recta buscada (el diámetro de la circunferencia) pasa por este punto.

La recta buscada es perpendicular a la recta $5x+2y-13=0$, o sea, a la recta $y=-\frac{5}{2}x+\frac{13}{2}$, por eso, según F — 10 b), el coeficiente angular de la recta buscada es igual a 2/5. De suerte que la ecuación de esta recta tiene la forma $y=\frac{2}{5}x+b$. El valor de b se encuentra utilizando el hecho de que el punto $(-2; 3)$ pertenece a la recta buscada: $3=\frac{2}{5}\cdot(-2)+b$, de donde $b=\frac{19}{5}$. Por lo tanto, la ecuación del diámetro $y=\frac{2}{5}x+\frac{19}{5}$ o bien $2x-5y+19=0$.

2.42. a) 7.

Resolución. La circunferencia dada $x^2+y^2=9$ tiene por centro el origen de coordenadas $O\ (0, 0)$ y el radio igual a 3. Unamos el punto M_0 con el origen

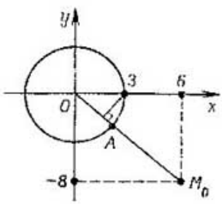


Fig. 236

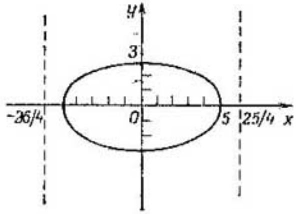


Fig. 237

de coordenadas. Supongamos que el segmento M_0O corta a la circunferencia dada en el punto A (fig. 236). Entonces $|M_0A|$ es la distancia buscada.

Determinemos $|M_0A|$. Teniendo en cuenta que $|OA|=3$, resulta $|M_0A|=|M_0O|-3$, o sea, $|M_0A|=\sqrt{6^2+(-8)^2}-3=7$.

2.43. a) Corta.

Resolución. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x^2+y^2-3x+2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3, \\ x(5x-11)=0. \end{cases}$$

Resulta $x=0$, $y=-3$ y $x=11/5$, $y=7/5$. Así pues, la circunferencia dada se interseca con la recta dada en dos puntos: $A_1\ (0; -3)$ y $A_2\ (11/5; 7/5)$.

2.44. a) $a=5$, $b=3$; b) $F_1\ (-4; 0)$, $F_2\ (4; 0)$; c) $\varepsilon=4/5$; d) $x=-25/4$ y $x=25/4$.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la elipse a la forma canónica

$$9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

a) Los semiejes de la elipse $a=5$, $b=3$ (fig. 237).

b) Las coordenadas de los focos $F_1\ (-c; 0)$, $F_2\ (c; 0)$, o sea, $F_1\ (-4; 0)$, $F_2\ (4; 0)$, ya que $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.

c) La excentricidad: $\varepsilon=c/a$, o sea, $\varepsilon=4/5$.

d) Las ecuaciones de las directrices $x=-a/\varepsilon$ y $x=a/\varepsilon$, o sea, $x=-25/4$ y $x=25/4$.

2.45. a) Corta.

Resolución. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x-3. \\ x(73x-192)=0. \end{cases}$$

Resulta $x=0$, $y=-3$ y $x=192/73$, $y=165/73$. De suerte que la recta dada corta esta elipse en dos puntos: B_1 (0; -3) y B_2 (192/73; 165/73).

2.46. a) $a=3$, $b=4$; b) F_1 (-5; 0), F_2 (5; 0); c) $\varepsilon=5/3$; d) $y=\dfrac{4}{3}x$ e $y=-\dfrac{4}{3}x$; e) $x=-\dfrac{9}{5}$ y $x=\dfrac{9}{5}$.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la hipérbola a la forma canónica

$$16x^2-9y^2=144 \iff \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1.$$

a) Los semiejes de la hipérbola: $a=3$, $b=4$ (fig. 238).

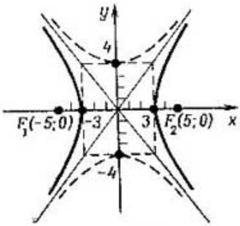
b) Las coordenadas de los focos: F_1 (-5; 0), F_2 (5; 0), ya que $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$.

c) La excentricidad: $\varepsilon=c/a$, o sea, $\varepsilon=5/3$.

d) La ecuación de las asíntotas: $y=\dfrac{b}{a}x$ e $y=-\dfrac{b}{a}x$, o sea, $y=\dfrac{4}{3}x$ e $y=-\dfrac{4}{3}x$.

e) Las ecuaciones de las directrices: $x=-a/\varepsilon$ y $x=a/\varepsilon$, o sea, $x=-9/5$ y $x=9/5$.

La hipérbola dada está representada en la fig. 238.



Fg. 238

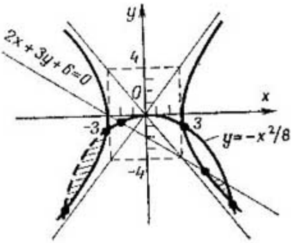


Fig. 239

2.47. c) $\varepsilon=5/4$; e) $y=16/5$ e $y=-16/5$.

Resolución. Reduciendo la ecuación de la hipérbola a la forma canónica

$$16x^2-9y^2=-144 \iff \frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1,$$

obtenemos que los semiejes de la hipérbola $a=4$, $b=3$, las coordenadas de los focos F_1 (0; -5) y F_2 (0; 5), de donde la excentricidad $\varepsilon=c/a=5/4$. Entonces las ecuaciones de las directrices tendrán la forma $y=-16/5$ e $y=16/5$.

2.48. f) El conjunto buscado está representado en la fig. 239.

Indicación. Transformemos las inecuaciones del sistema dado reduciéndolas a una forma cómoda para la construcción:

$$\begin{cases} x^2+8y<0, \\ 2x+3y+6<0, \\ 16x^2-9y^2\geqslant 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<-\dfrac{x^2}{8}, & (1) \\ y<-2-\dfrac{2x}{3}, & (2) \\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}\geqslant 1. & (3) \end{cases}$$

La inecuación (1) define el conjunto de los puntos del plano que están «más abajo» que la parábola $y=-x^2/8$. La inecuación (2) define el conjunto de los puntos que están «más abajo» que la recta $y=-2-2x/3$. Por último, la inecuación (3) define el conjunto de los puntos del plano que están «a la derecha» de la rama derecha de la hipérbola y «a la izquierda» de su rama izquierda, incluyendo los puntos que se hallan sobre la misma hipérbola.

2.49. Si $C<0$, es un conjunto vacío; si $C=0$, es un par de rectas dadas; si $C>0$, son dos hipérbolas conjugadas.

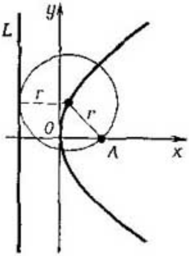


Fig. 240

Resolución. Elijamos el sistema de coordenadas de un modo tal que el eje Ox sea la bisectriz de un par de ángulos verticales formados por las rectas dadas y el origen de coordenadas coincida con el punto de su intersección. Entonces las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 tienen la forma $y=kx$ e $y=-kx$, respectivamente.

Sea $M(x;\ y)$ el punto arbitrario del conjunto buscado, entonces, según F — 11, tenemos

$$d_1=\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}, \quad d_2=\frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+1}},$$

donde d_1 y d_2 son las distancias del punto $M(x;\ y)$ a las rectas L_1 y L_2, respectivamente, y los datos del problema pueden escribirse en la forma

$$\frac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{|kx+y|}{\sqrt{k^2+2}}=C \text{ (const)}$$

o bien

$$|(kx-y)(kx+y)|=C_1, \text{ donde } C_1=(k^2+1)\cdot C.$$

Si $C_1<0$, el conjunto buscado de los puntos es vacío.

Si $C_1=0$, el conjunto de los puntos son dos rectas dadas $y=\pm kx$.

Si $C_1>0$, el conjunto de los puntos son dos hipérbolas $k^2x^2-y^2=C_1$ e $y^2-k^2x^2=C_1$.

2.50. La parábola.

Resolución. Puesto que para todo punto del conjunto buscado las distancias del punto dado al punto A y a la recta L son iguales (al radio de la circunferencia), entonces, por definición, el conjunto de todos tales puntos es parábola que tiene por foco el punto A y por directriz L (fig. 240).

3.1. $x_{90}=-1$; $x_{885}=1$.

Resolución. La sucesión dada es periódica cuyo período es igual a seis: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=-1$, $x_6=-1$, $x_7=0$, ... Por eso $x_{90}=x_{15\cdot6}=x_6=-1$, $x_{885}=x_{147\cdot6+3}=x_3=1$.

3.2. Resolución. La sucesión dada tiene la forma 3; $3^{\sqrt{2}}$; $3^{\sqrt{3}}$; ...; $3^{\sqrt{n}}$; ... . Para la demostración utilicemos la definición de la sucesión infinitamente grande. Tomemos todo número $A > 0$. De la desigualdad $|x_n| = |3^{\sqrt{n}}| > A$ obtenemos la desigualdad $|3^{\sqrt{n}}| = 3^{\sqrt{n}} > A$. Logaritmando, encontramos $\sqrt{n}\log 3 > \log A$, $\sqrt{n} > \frac{\log A}{\log 3}$, de donde $n > \left(\frac{\log A}{\log 3}\right)^2$. Si se toma $N = \left[\left(\frac{\log A}{\log 3}\right)^2\right]$, para todos los números $n > N$ se cumple la desigualdad $|x_n| > A$, o sea, conforme a la definición de la sucesión infinitamente grande, la sucesión $\{3^{\sqrt{n}}\}$ es infinitamente grande.

3.3. Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$-\frac{1}{3};\ \frac{2}{5\sqrt{2}+1};\ -\frac{2}{5\sqrt{3}+1};\ \frac{2}{5\sqrt{4}+1};\ \ldots;\ \frac{2}{5\sqrt{n}+1};\ \ldots .$$

Para la demostración utilicemos la definición de la sucesión infinitamente pequeña. Tomemos todo número $\varepsilon > 0$. De la desigualdad

$$|\alpha_n| = \left|\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n}+1}\right| = \frac{2}{5\sqrt{n}+1} < \frac{2}{5\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

obtenemos la desigualdad $\sqrt{n} > 1/\varepsilon$, de donde $n > 1/\varepsilon^2$. Si se toma $N = [1/\varepsilon^2]$, para todos los números $n > N$ se cumplirá la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$, o sea, según la definición de la sucesión infinitamente pequeña, la sucesión $\left\{\frac{(-1)^n 2}{5\sqrt{n}+1}\right\}$ es infinitamente pequeña.

3.4. Resolución.

☐ **Demostración.** Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinitamente pequeña. Tomemos todo número $A > 0$ y pongamos $\varepsilon = 1/A$. Conforme a la definición de la sucesión infinitamente pequeña, para éste número ε existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumple la desigualdad $|\alpha_n| < \varepsilon$. Entonces

$$|x_n| = \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = A, \text{ o sea,}$$

$|x_n| > A$ para todos los números $n > N$. Pero esto, según la definición de la sucesión infinitamente grande, quiere decir que la sucesión $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ es infinitamente grande. ■

3.5. Resolución. La sucesión dada tiene la forma 1; 2; $\frac{1}{3}$; 4; $\frac{1}{5}$; ... ...; $n^{(-1)^n}$; ... . Tomemos un número $A > 1$. Entonces la desigualdad $|x_n| > A$ no tiene lugar para todos los elementos x_n con números de orden impares: x_1, x_3, x_5, ... Esto precisamente significa que $\{n^{(-1)^n}\}$ no es infinitamente grande.

3.6. Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$1+\frac{1}{2};\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2};\ \ldots;\ 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n};\ \ldots .$$

Para la demostración utilicemos la definición del límite de la sucesión, pero previamente con ayuda de la fórmula de la progresión geométrica representemos la expresión del elemento general de la sucesión en la forma

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n} \quad \text{o bien} \quad x_n-2=-\frac{1}{2^n}.$$

Tomemos todo número $\varepsilon>0$. Entonces de la desigualdad $|x_n-2|=\left|-\frac{1}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$ obtenemos la desigualdad $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$ o bien, logaritmando, $n\log_2 2>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$, de donde $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$. Si se toma $N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$, para todos los números $n>N$ se cumplirá la desigualdad $|x_n-2|<\varepsilon$. Por lo tanto, conforme a la definición del límite de la sucesión, la sucesión $\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right\}$ convergo y su límite es igual a 2, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

3.7. Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$\frac{1}{2}, \ \frac{2}{2^2}; \ \frac{3}{2^3}; \ \ldots; \ \frac{n}{2^n}; \ \ldots .$$

Para la demostración utilicemos la definición del límite de la sucesión, pero previamente con ayuda de la fórmula del binomio de Newton estimemos la expresión del elemento general de la sucesión dada. Tenemos

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+1>n+\frac{n(n-1)}{2}>\frac{n^2}{2}.$$

Por consiguiente,

$$|x_n|=\frac{n}{2^n}<\frac{n}{n^2/2}=\frac{2}{n}.$$

Tomemos todo número $\varepsilon>0$. Entonces de la desigualdad $|x_n-0|\frac{n}{|2^n|}<\frac{2}{n}<\varepsilon$ obtenemos la desigualdad $n>2/\varepsilon$. Si se toma $N=[2/\varepsilon]$, para todos los números $n>N$ se cumplirá la desigualdad $|x_n-0|<\varepsilon$, o sea, conforme a la definición del límite de la sucesión, la sucesión $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ converge y su límite es igual a 0, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Notemos que la sucesión dada es infinitamente pequeña.

3.8. Resolución. Mostremos que para todo número $\varepsilon>0$ existe un número N tal que para $n>N$ se cumpla la desigualdad $|x_n|=|\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}|<\varepsilon$, o sea, es válida la definición de la sucesión infinitamente pequeña. Puesto que

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}},$$

entonces

$$|x_n|=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

De aquí se deduce que para todo número $\varepsilon > 0$, si $n > N = [1 + 1/\varepsilon^2]$ se cumple la desigualdad $|x_n| < \varepsilon$. De este modo queda demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0$. Podríamos para la demostración utilizar también la definición del límite de la sucesión. (Hágase esto por sí mismo.)

3.9. Resolución. Efectivamente, según la definición del límite de la sucesión, para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número de orden N tal que para $n > N$ se cumpla la desigualdad $|x_n - a| < \varepsilon$. Pero, conforme a la propiedad del valor absoluto de un número (véase el ejemplo 2 del § 5, cap. 1), $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$ y, por consiguiente, para $n > N$ se cumple la desigualdad $||x_n| - |a|| < \varepsilon$, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

3.10. La sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ es infinitamente grande.

Resolución. Según el teorema 3.1 la sucesión $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ es infinitamente pequeña, según el teorema 3.6 la sucesión $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ está acotada, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{a}$ (demuestre esto por sí mismo) y según el teorema 3.4 el producto $\left\{\frac{1}{x_n}\right\} \cdot \left\{\frac{1}{y_n}\right\} = \left\{\frac{1}{x_n y_n}\right\}$ es una sucesión infinitamente pequeña; según el teorema 3.1 la sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ es infinitamente grande. Notemos que el problema dado es la continuación del ejemplo 5, § 2.

3.11. 1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ e $\{y_n\} = \{n^2\}$; 2) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$; 3) $\{x_n\} = \{1/n\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$; 4) $\{x_n\} = \{(-1)^n/n\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$. (Argumente las respuestas.)

3.12. La sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ diverge.

Resolución. Razonemos por reducción al absurdo. Designemos $z_n = x_n \cdot y_n$ y supongamos que la sucesión $\{z_n\}$ converja. Puesto que, según los datos, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \neq 0$, entonces, conforme al teorema 3.9, la sucesión $\{x_n\} = \{z_n/y_n\}$ converge. Pero esto contradice a los datos. Por consiguiente, la sucesión $\{x_n \cdot y_n\}$ diverge.

3.13. Las sucesiones $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n \cdot y_n\}$ pueden convergir ($\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ e $\{y_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$) o divergir ($\{x_n\} = \{n\}$ e $\{y_n\} = \{n\}$).

3.14. 1) $-5/4$; 2) ∞; 3) 0; 4) $-1/2$; 5) $-5/4$.

3.15. Resolución. Se puede utilizar el hecho de que partiendo de cierto número n se cumplen las desigualdades $1/n < a < n$. Entonces $\sqrt[n]{1/n} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$. Pero puesto que $\sqrt[n]{n} \to 1$ y $\sqrt[n]{1/n} = 1/\sqrt[n]{n} \to 1$ para $n \to \infty$ (véase el ejemplo 3 del § 2), conforme al teorema 3.11 obtenemos que también $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

3.16. 5.

Resolución. Utilicemos el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ (véase el problema 3.15), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3n^{10}} = 5 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{10}} = 5 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^{10} = 5 \cdot 1 \cdot 1^{10} = 5.$$

3.17. 1.
Resolución. Transformemos la expresión del elemento general de la sucesión:

$$x_n=\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}=$$

$$=\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.$$

Demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=1$. Efectivamente, para todos los números $n>1$ se cumplen las desigualdades

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n} \quad \text{y} \quad 1-\frac{1}{n}<\sqrt{1-\frac{1}{n}}<1.$$

Pero como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ (demuéstrese esto por sí mismo), conforme al teorema 3.11 obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=1$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1.$$

3.18. 0.
Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$\frac{2}{1!}\ ;\ \frac{2^2}{2!}\ ;\ \frac{2^3}{3!}\ ;\ \ldots;\ \frac{2^n}{n!}\ ;\ \ldots.$$

Decrece monótonamente, ya que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!}=\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{n!\,(n+1)\,2^n}=\frac{2}{n+1}<1$$

para $n>1$, o sea, $x_{n+1}<x_n$ y está acotada superiormente, verbigracia, por el elemento x_1. Además, puesto que $x_n>0$, la sucesión está acotada inferiormente. Por consiguiente, la sucesión dada es monótona y está acotada. Conforme al teorema 3.12 ella converge. Designemos su límite con a y determinémoslo. Para esto utilicemos el hecho de que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{n+1} \quad \text{o bien} \quad x_{n+1}=\frac{2}{n+1}\,x_n.$$

En la última igualdad pasando al límite para $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}\cdot x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n$$

obtenemos $a=0\cdot a$, de donde $a=0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

3.19. 2.

Resolución. La sucesión dada tiene la forma

$$x_1=\sqrt{2};\ x_2=\sqrt{2\sqrt{2}};\ x_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}};\ \ldots;$$

$$x_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ raíces}};\ \ldots .$$

Comprobemos primero el hecho de que el límite exista. Es evidente que $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$, o sea, la sucesión dada es monótona creciente y está acotada inferiormente por el elemento x_1. Por el método de inducción demostremos que $x_n < 2$ para todo número n, o sea, la sucesión está acotada superiormente. En efecto como $x_1 = \sqrt{2} < 2$, entonces $x_2 = \sqrt{2x_1} < \sqrt{2\cdot 2} = 2$; $x_3 = \sqrt{2\cdot x_2} < \sqrt{2\cdot 2} = 2$; $\ldots$. Supongamos que $x_n < 2$. Entonces $x_{n+1} = \sqrt{2\cdot x_n} < \sqrt{2\cdot 2} = 2$. Y puesto que $x_1 < 2$, para todos los números n $x_n < 2$, lo que se quería demostrar. Por lo tanto, queda determinado que la sucesión dada es monótona y está acotada. Según el teorema 3.12 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe.

Partiendo del hecho de que el límite existe, determinemos ahora su valor. Para esto elevemos al cuadrado la igualdad $x_{n+1} = \sqrt{2\cdot x_n}$: $x_{n+1}^2 = 2x_n$. En este caso, si la sucesión $\{x_n\}$ tiene el límite a, pasando al límite para $n \to \infty$ en la última igualdad

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2x_n = \lim_{n\to\infty} 2 \lim_{n\to\infty} x_n,$$

obtenemos la desigualdad $a^2 = 2a$, de donde $a = 0$ o bien $a = 2$. Pero puesto que según lo demostrado la sucesión $\{x_n\}$ crece y al mismo tiempo para todo número n $x_n < 2$, entonces $a = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

5.1. $x = \pm\sqrt{2/3}$.

Resolución. Puesto que la tangente es paralela a la recta $y = x$, su coeficiente angular (pendiente) es igual a 1, o sea, al coeficiente angular de esta recta. Por otro lado, el coeficiente angular de la tangente en el punto x_0 es igual a $f'(x_0)$.

Así pues, es necesario hallar a qué valores de x es justa la igualdad $f'(x) = 1$. Como $f(x) = x^3 - x$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, obtenemos la ecuación $3x^2 - 1 = 1$. De aquí $x = \pm\sqrt{2/3}$.

5.2. $-45°$.

Resolución. El coeficiente angular buscado es igual al valor de la derivada de la función en el punto $x = 0$ (en el punto de intersección de la gráfica con el eje Oy). Puesto que $f(x) = 2x^3 - x$, entonces $f'(x) = 6x^2 - 1$ y $f'(0) = -1$.

5.3. $45°$; $0°$; $-45°$.

Resolución. Los coeficientes angulares buscados son iguales a los valores de la derivada en los puntos 0; 2; 4. Como $f(x) = \dfrac{4x - x^2}{4}$, entonces $f'(x) = \dfrac{4-2x}{4}$. Respectivamente, tenemos: $f'(0) = 1$; $f'(2) = 0$; $f'(4) = -1$.

5.4. $y = x + 1$.

Resolución. Los puntos de intersección con el eje de abscisas se obtienen de la condición de que $y_0 = 0$, o sea, $(x_0^3 + 1)/3 = 0$. De aquí $x_0 = -1$. La ecuación de la tangente que pasa por el punto de la gráfica $(x_0;\ y_0)$ tiene la forma $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Puesto que $f(x) = \dfrac{x^3+1}{3}$, entonces $f'(x) = x^2$ y $f'(x_0) = 1$. Obtenemos la ecuación de la tangente $y = x + 1$.

5.5. $-45°$.

Resolución. El coeficiente angular buscado es igual al valor de la derivada para $x = 1$. Como $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f'(1) = -1$.

5.6. $a = 4$.

Resolución. Obtenemos los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas de la ecuación $\frac{ax_0 - x_0^3}{4} = 0$; de aquí $x_0 = 0$ o bien (para $a \geqslant 0$) $x_0 = \pm\sqrt{a}$. En estos puntos los coeficientes angulares son iguales a $f'(x_0)$. Puesto que $f(x) = (ax - x^3)/4$, entonces $f'(x) = (a - 3x^2)/4$. De aquí $f'(0) = a/4$ o bien (para $a \geqslant 0$) $f'(\pm\sqrt{a}) = -a/2$.

Según los datos, $f'(x_0) = 1$. Por lo tanto, $a = 4$ o bien (para $a \geqslant 0$) $a = -2$. El valor de $a = -2$ no corresponde.

5.7. La recta $y = 3x - 4$ es tangente a la curva $y = x^3 - 2$.

Resolución. Si la recta $y = 3x - 4$ es tangente a la curva $y = x^3 - 2$ en el punto $(a; a^3 - 2)$, entonces $f'(a) = 3$. De aquí $3a^2 = 3$, por consiguiente, $a = \pm 1$. La tangente que pasa por el punto de la curva con la abscisa a tiene la ecuación $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Para $a = 1$ resulta $y + 1 = 3(x - 1)$, de donde $y = 3x - 4$.

5.8. $y = -x + 2$; $y = -9x - 6$.

Resolución. La ecuación de la tangente que pasa por el punto de la hipérbola $(a; 1/a)$, $y - 1/a = f'(a)(x - a)$. Puesto que $f(x) = 1/x$, entonces $f'(x) = -1/x^2$ y $f'(a) = -1/a^2$. Así pues, la ecuación de la tangente tiene la forma $y - 1/a = -(1/a^2)(x - a)$, de donde

$$y = \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}. \qquad (*)$$

Según los datos, esta recta pasa por el punto $(-1; 3)$, o sea, $3 = 1/a^2 + 2/a$. De aquí $3a^2 - 2a - 1 = 0$; por lo tanto, $a_1 = 1$, $a_2 = -1/3$. Sustituyendo estos valores en $(*)$, obtenemos la respuesta.

5.9. $y = x + 10$.

Resolución. Supongamos que la recta buscada pasa por el punto $(a; 8 - 3a - 2a^2)$ en la primera parábola. La ecuación general de la tangente es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Puesto que $f(x) = 8 - 3x - 2x^2$, entonces $f'(x) = -3 - 4x$ y $f'(a) = -3 - 4a$. Así pues, la recta dada tiene la ecuación $y = 8 - 3a - 2a^2 - (3 + 4a)(x - a)$, o sea, $y = -(4a + 3)x + 2a^2 + 8$. Supongamos ahora que la recta pasa por el punto $(b; 2 + 9b - 2b^2)$ en la segunda parábola. Razonando análogamente, obtenemos que la ecuación de la recta es $y = -(4b - 9)\cdot x + 2b^2 + 2$. Las dos ecuaciones obtenidas deben definir la misma recta. Por lo tanto,

$$\begin{cases} 4a + 3 = 4b - 9, \\ 2a^2 + 8 = 2b^2 + 2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontramos $a = -1$. De esta manera, la ecuación de la recta buscada es $y = x + 10$.

5.10. $a = 0$; $b = 1/4$.

Resolución. La ecuación de la tangente a la parábola en el punto $(c; c^2 + ac + b)$ es la siguiente: $y = c^2 + ac + b + f'(c)(x - c)$, con la particularidad de que $f'(x) = 2x + a$, o sea, $f'(c) = 2c + a$. Por esta razón la ecuación de la tangente es $y = (a + 2c)x + b - c^2$.

Si de tangente sirve la recta $y = -x$, obtenemos

$$\begin{cases} a + 2c = -1, \\ b - c^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = \dfrac{-(a+1)}{2}, \\ c^2 = b \end{cases} \iff \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = b \iff a^2 + 2a + 1 = 4b. \qquad (*)$$

En el segundo caso la tangente es la recta $y = 5x - 6$. Entonces

$$\begin{cases} a+2c=5 \\ b-c^2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{5-a}{2}, \\ c^2=b+6 \end{cases} \Leftrightarrow a^2-10a+1=4b. \qquad (**)$$

De (*) y (**) obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a^2+2a+1=4b, \\ a^2-10a+1=4b. \end{cases}$$

Sustrayendo de la primera ecuación la segunda, tenemos $a = 0$ y $b = 1/4$.

5.11. $x = 0$ y $x = 4$.

Resolución. Reduzcamos la ecuación de la circunferencia a la forma canónica: $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$, de donde $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Así pues, el centro de la circunferencia —el punto (2; 0)— está en el eje de abscisas. Por eso las tangentes a la circunferencia en los puntos de intersección con el eje de abscisas son verticales. Como el radio vale 2, estas tangentes pasan por los puntos (0; 0) y (4; 0).

5.12. Resolución. La función $y = |x|$ no tiene la derivada sólo en el punto $x = 0$ y las funciones $y = |x - 1|$, $y = |x - 2|$ no las tienen en los puntos $x = 1$ y $x = 2$, respectivamente. Por eso a los datos del problema les satisface, por ejemplo, la función $y = |x| + |x - 1| + |x - 2|$.

5.13. Resolución. Puesto que la función $f(x)$ se define por diferentes fórmulas en los intervalos $(-\infty; 0)$ y $[0, +\infty)$ que tienen un extremo común $x = 0$, es necesario calcular las derivadas derecha e izquierda en el punto $x = 0$. Tenemos

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(0+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{x\to 0^-}\Delta x=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(0+\Delta x)-\operatorname{sen}0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Puesto que las derivadas derecha e izquierda son diferentes, la función dada no tiene una derivada en el punto $x = 0$, lo que se quería demostrar.

5.14. Resolución. Supongamos que Δx tiende a cero, tomando los valores racionales. Entonces $\Delta y = \operatorname{sen}(0 + \Delta x) - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\Delta x$ y, por consiguiente,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x}=1.$$

En cambio, si $\Delta x \to 0$ tomando los valores irracionales, $\Delta y = (0 + \Delta x) - 0 = \Delta x$ y, por lo tanto,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Ambos límites coinciden, por esta razón la función dada tiene una derivada en el punto $x = 0$, lo que se quería demostrar.

5.15. Resolución. En el caso en que la función $f(x)$ no se define por una sola sino por varias funciones la derivada ha de calcularse, a veces, inmediatamente partiendo de la definición de la misma.

En el caso dado para $x \neq 0$ la derivada de la función $f(x)$ existe y se calcula por las fórmulas y las reglas de derivación:

$$f'(x)=\left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)'=(x^2)' \operatorname{sen} \frac{1}{x}+$$
$$+x^2\left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{x}\right)'=2x \operatorname{sen} \frac{1}{x}-\cos \frac{1}{x}.$$

En cambio, en el punto $x=0$ la derivada se encuentra inmediatamente según la definición:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^2 \operatorname{sen}(1/\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} \Delta x \operatorname{sen}(1/\Delta x)=0$$

(el producto de una función infinitamente pequeña por otra acotada es un infinitesimal). De esta manera,

$$f'(x)=\begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x) & \text{si} \quad x\neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$$

De aquí se desprende, en particular, que la función $f(x)$ es derivable en toda la recta numérica.

Mostremos ahora que la derivada $f'(x)$ es discontinua en el punto $x=0$. En efecto, como $\lim\limits_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}(1/x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/x)$ no existe, tampoco $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existe. De aquí se deduce que la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ es discontinua.

5.16. **Resolución.** Puesto que

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}; \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!, \quad f(0)=\ln 1=0,$$

la fórmula de Maclaurin se escribe así:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

5.17. **Resolución.** Puesto que

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=\cos^{-2} x; \qquad f(0)=0, \quad f'(0)=1;$$
$$f''(x)=2\cos^{-3} x \operatorname{sen} x; \qquad f''(0)=0;$$
$$f'''(x)=6\cos^{-4} x \operatorname{sen}^2 x+2\cos^{-2} x; \quad f'''(0)=2,$$

por la fórmula de Maclaurin tenemos

$$\operatorname{tg} x=x+x^3/3+o(x^3).$$

Note que en realidad el término residual tiene la forma $o(x^4)$, ya que $f^{(4)}(0)=0$ (compruebe esto por sí mismo).

5.18. a) $e^{-x}=1-x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$; b) $e^{2x-x^2}=1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{6}x^4-\dfrac{1}{15}x^5+o(x^5)$; c) $\ln(\cos x)=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)$; d) $\operatorname{sen} \operatorname{sen} x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$.

5.19. a) 0; b) 1; c) 0; d) $-1/12$; e) $1/3$; f) $-1/4$.

Indicación. Al calcular los límites semejantes es necesario desarrollar las funciones según la fórmula de Maclaurin en el numerador y el denominador hasta un término del mismo orden. Así, por ejemplo, en los ejemplos *a*), d) y e) hasta el término con x^4.

6.1. $4\pi/3+\sqrt{3}$.

Resolución. Apliquemos la sustitución $x=\varphi(t)=2\operatorname{sen} t$, considerando que $-\pi/3\leqslant t\leqslant\pi/3$. Sobre el segmento $[-\pi/3, \pi/3]$ la función $\varphi(t)=2\operatorname{sen} t$ satisface todas las hipótesis del teorema sobre el cambio de la variable, ya que es continuamente derivable, monótona y $\varphi(-\pi/3)=-\sqrt{3}$, $\varphi(\pi/3)=\sqrt{3}$. Notemos que $\sqrt{4-x^2}=2|\cos t|=2\cos t$ ($|\cos t|=\cos t$, ya que para $-\pi/3\leqslant t\leqslant\pi/3$ en los cuadrantes I y IV, $\cos t>0$), $\varphi'(t)=2\cos t$. Por esta razón

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2 t\,dt=$$

$$=2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}.$$

6.2. $32/3$.

Resolución. Hagamos la sustitución $t=\sqrt{1+x}$. Expresando de aquí x, obtenemos que $x=\varphi(t)=t^2-1$; como $t=2$ para $x=3$ y para $x=8$ tenemos $t=3$, consideraremos que la función $x=\varphi(t)$ está definida en el segmento $[2, 3]$. Puesto que la función $\varphi(t)$ satisface todas las hipótesis del teorema sobre el cambio de la variable, resulta

$$\int_3^8\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}=2\int_2^3(t^2-1)\,dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_2^3=\frac{32}{3}.$$

6.3. $\sqrt{3}/32$

Resolución. Hagamos uso de la sustitución $x=g(t)=\frac{2}{\cos t}=2\sec t$, donde $0\leqslant t\leqslant\pi/3$. Entonces $g'(t)=2\frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}$. Puesto que en el segmento $[0, \pi/3]$ la función $x=g(t)$ satisface todas las hipótesis del teorema sobre el cambio de la variable,

$$\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt. \qquad (*)$$

Para calcular la última integral notemos que si en la fórmula de cambio de la variable $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ en la integral a la izquierda se pone $f(x)=x^2$ y $x=\varphi(t)=\operatorname{sen} t$, entonces

$$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)=\operatorname{sen}^2 t\cos t,$$

o sea, en la integral del segundo miembro de la igualdad $(*)$ la función subintegral es igual a $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$. Por esta razón, utilizando la fórmula de cambio de la derivable de derecha a izquierda, obtenemos

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2} u^2\,du=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{3}}{32}.$$

6.4. 0.

Resolución. En virtud de las fórmulas de reducción, $\cos(\pi-x)=-\cos x$. Por eso $\sqrt[3]{\cos(\pi-x)}=-\sqrt[3]{\cos x}$ y las figuras que tienen las áreas S_1 y S_2 (fig. 241) son simétricas respecto al punto $\pi/2$ en el eje de abscisas, quiere decir $S_1=S_2$. Por otro lado, utilizando la fórmula (5) del § 6, tenemos

$$\int_0^{\pi}\sqrt[3]{\cos x}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt[3]{\cos x}\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt[3]{\cos x}\,dx.$$

Puesto que $\int_0^{\pi/2}\sqrt[3]{\cos x}\,dx=S_1$ y $\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt[3]{\cos x}\,dx=-S_2$, resulta

$$\int_0^{\pi}\sqrt[3]{\cos x}\,dx=S_1-S_2=0.$$

6.5. $S=9/4$.

Resolución. Cerciorémonos de que los puntos dados están en la parábola: $-3=-0^2+4\cdot 0-3$; $0=-3^2+4\cdot 3-3$. Determinemos las ecuaciones de las tangentes. Sustituyendo en la ecuación de la tangente

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

primero $x_0=0$, $f(x_0)=-3$ y $f'(x_0)=-2x_0+4=4$ y luego $x_0=3$, $f(x_0)=0$ y $f'(x_0)=-2$, obtenemos $y=4x-3$ o $y=-2x+6$. Encontramos el punto de intersección de las tangentes:

$$\begin{cases} y=4x-3\\ y=-2x+6,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=3/2,\\ y=3.\end{cases}$$

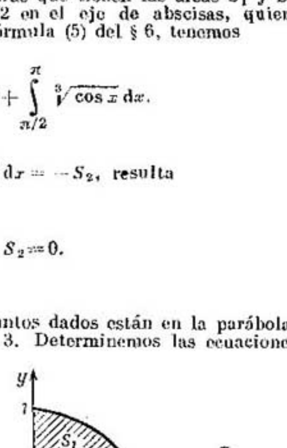


Fig. 241

Determinemos el área de la figura obtenida (fig. 242):

$$S=\int_0^{3/2}[(4x-3)-(x^2+4x-3)]\,dx+\int_{3/2}^{3}[(-2x+6)-(-x^2+4x-3)]\,dx=$$

$$=\int_0^{3/2}x^2\,dx+\int_{3/2}^{3}(x-3)^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{3/2}+\frac{(x-3)^3}{3}\Big|_{3/2}^{3}=\frac{9}{4}.$$

6.6. $S=2+\pi^3/6$.

Resolución. Notando que $x=0$ y $x=\pi$ son las raíces de la función $y=x^2-\pi x$ y construyendo las gráficas de las líneas dadas, o sea, la sinusoide y la parábola (fig. 243), encontramos el área S de la figura prefijada:

$$S=\int_0^{\pi}[\operatorname{sen}x-(x^2-\pi x)]\,dx=\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}x-x^2+\pi x)\,dx=$$

$$=[-\cos x-x^3/3+\pi x^2/2]_0^{\pi}=[(1-\pi^3/3+\pi^3/2)-(-1)]=2+\pi^3/6.$$

6.7. $S=11/2$.

Resolución. Como $y=|x|+1=\begin{cases} x+1 & \text{para } x\in[0,+\infty), \\ -x+1 & \text{para } x\in(-\infty,0), \end{cases}$ entonces,

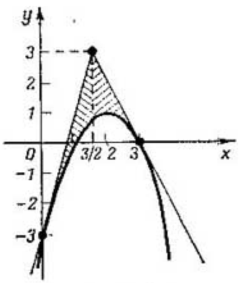


Fig. 242

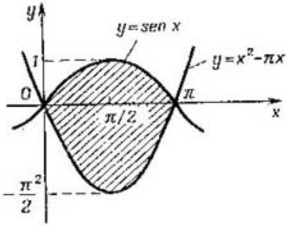


Fig. 243

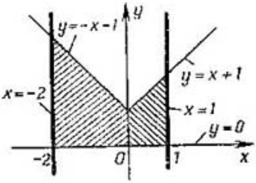


Fig. 244

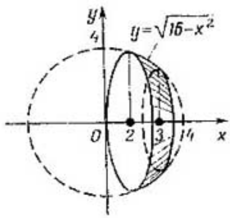


Fig. 245

dividiendo la figura dada en dos partes (fig. 244), encontramos el área:

$$S=\int_{-2}^{0}(-x+1)\,dx+\int_0^1(x+1)\,dx=(-x^2/2+x)\Big|_{-2}^{0}+(x^2/2+x)\Big|_0^1=$$

$$=[0-(-(-2)^2/2+(-2)]+[(1/2+1)-0]=11/2.$$

6.8. $V=\dfrac{29}{3}\pi$.

Resolución. La capa esférica dada puede ser representada como cuerpo engendrado por la revolución del trapecio curvilíneo alrededor del eje Ox (fig. 245) y limitado por las líneas $y=\sqrt{16-x^2}$, $x=2$, $x=3$ y por el eje Ox. Por eso, según la fórmula $V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx$, para el volumen V de esta capa esférica tenemos

$$V=\pi\int_2^3 (16-x^2)\,dx=\pi\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_2^3=\frac{29}{3}\pi.$$

6.9. $V=\dfrac{\pi H^2}{3}(3R-H)$.

Resolución. El segmento esférico (véase la fig. 213) puede considerarse como cuerpo que se engendra por la revolución en torno al eje Ox de un trapecio curvilíneo formado por el arco de la circunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$, las rectas $x=-R$ y $x=-R+H$ y el eje Ox (fig. 246). Por eso según la fórmula $V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx$, donde V es el volumen del cuerpo engendrado por la revolución del trapecio curvilíneo $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, alrededor del eje Ox, el volu-

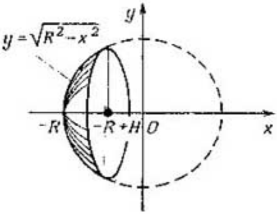


Fig. 246

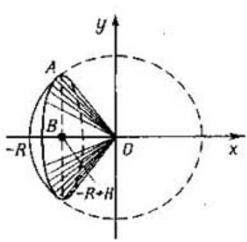


Fig. 247

men del segmento esférico se puede hallar así:

$$V=\pi\int_{-R}^{-R+H}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{-R+H}=\frac{\pi H^2}{3}(3R-H).$$

Observación. La fórmula del volumen del segmento esférico se puede obtener de la fórmula del volumen de la capa esférica:

$$V=\pi\int_a^b (R^2-x^2)\,dx$$

si se hace que a tienda hacia $-R$.

6.10. $V=2\pi R^2H/3$.

Resolución. El volumen del sector esférico puede obtenerse sumando el volumen del segmento esférico (véase el problema 6.9) y el del cono $(1/3)\pi\,|AB|^2\,|OB|$ (fig. 247); obtenemos que $|AB|=\sqrt{R^2-(-R+H)^2}=\sqrt{2RH-H^2}$; $|OB|=R-H$. Por lo tanto, para el volumen del sector esférico

$$V=\frac{\pi H^2(3R-H)}{3}+\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)(R-H)=\frac{2\pi R^2H}{3}.$$

6.11. **Resolución**. Supondremos que el mijo limpio llene una parte cualquiera de la cacerola sin lugares vacíos, al igual que un líquido. Admitamos que el radio de la base (del fondo) de la cacerola cilíndrica es igual a R y el mijo cargado ha subido hasta la altura H (fig. 248). Determinemos el volumen del espacio ocupado por el mijo. Para esto hagamos uso de la fórmula $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$, donde V es el volumen del cuerpo cuyas secciones transversales tienen el área $S(x)$. Sea O el centro de la base del cilindro; orientemos el eje Ox a lo largo del

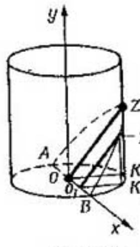


Fig. 248

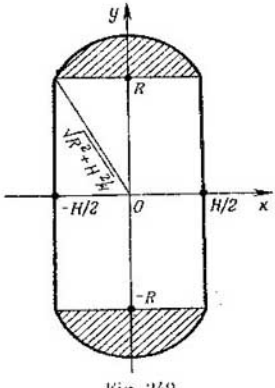


Fig. 249

diámetro de la base AB. Determinemos el área $S(x)$ de sección del cuerpo buscado por el plano que es perpendicular al eje Ox y pasa por el punto de este eje con coordenada x. Si el plano corta el cuerpo por el triángulo $O_1Z_1K_1$, entonces $\Delta O_1Z_1K_1\sim\Delta OZK$ (fig. 248), de donde $l:R=h:H$ (aquí $|OK|=R$, $|ZK|=H$, $|O_1K_1|=l$, $|K_1Z_1|=h$). Puesto que $l^2=R^2-x^2$, entonces $S(x)=\frac{1}{2}lh=\frac{1}{2}\frac{H}{R}l^2=\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)$. De esta manera, el volumen V_1 del mijo es igual a

$$V_1=2\int\limits_0^R\frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{H}{R}\int\limits_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}HR^2.$$

El volumen total V de agua y de mijo es igual al volumen del cilindro cuyo radio es R y altura H; por esta razón $V=\pi R^2H$; la razón entre el volumen V_2 de agua y el volumen V_1 de mijo es igual a

$$V_2:V_1=(V-V_1):V_1=\left(\pi-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{2}-1\approx3{,}7$$

y no depende de la cantidad de mijo ni del tamaño de la cacerola. Así pues, suponiendo que el mijo llena por completo, sin claros, el volumen, hemos resuelto ambas partes del problema.

6.12. No se necesitará añadir alguna cantidad de oro.

Resolución. Determinemos el volumen del anillo. Mediante la fórmula $V=\pi\int\limits_a^b y^2(x)\,dx$, donde V es el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de un trapecio curvilíneo $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, en torno al eje Ox, determinemos el volumen buscado V como diferencia entre el volumen del cuerpo engendrado por la revolución del trapecio curvilíneo $0\leqslant y\leqslant\sqrt{(R^2+H^2/4)-x^2}$,

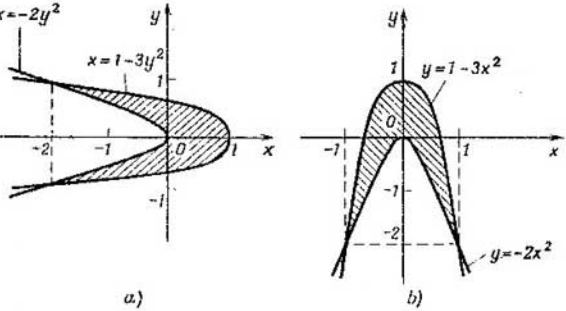


Fig. 250

$-H/2\leqslant x\leqslant H/2$, y el volumen del cilindro engendrado por la revolución de la recta $y=R$ en torno al eje Ox (fig. 249). Por lo tanto,

$$V=\pi\int\limits_{-H/2}^{H/2}\left[\left(R^2+\frac{H^2}{4}\right)-x^2\right]dx-\pi\int\limits_{-H/2}^{H/2}R^2\,dx=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{H/2}\left(\frac{H^2}{4}-x^2\right)dx=2\pi\left(\frac{H^2}{4}x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{H/2}=\frac{\pi H^3}{6}.$$

Ahora bien, el volumen del anillo no depende del radio R y depende sólo de la altura H, por eso el orfebre no tiene que agregar oro.

6.13. a) $S=4/3$; b) $V=\pi/2$.

Resolución. a) El eje de abscisas es eje de las parábolas dadas. Evidentemente, de las ecuaciones de las parábolas obtenemos que para la primera de ellas $3y^2=1-x\geqslant 0$, por esta razón $x\leqslant 1$; de manera análoga, para la segunda parábola tenemos $x\leqslant 0$. Determinemos adicionalmente algunos puntos de las gráficas y construyámoslos (fig. 250, *a*). Reflejemos simétricamente las gráficas obtenidas respecto a la recta $y=x$. Hemos obtenido las gráficas de las funciones $y=1-3x^2$ e $y=-2x^2$ (fig. 250, *b*). De la ecuación

$$1-3x^2=-2x^2$$

determinemos las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas obtenidas: $x = \pm 1$. Utilizando la simetría de las parábolas respecto al eje Oy, determinemos el área S de la figura buscada (es igual al área de la figura representada en la fig. 250, *b* que es simétrica a ella respecto a la recta $y = x$):

$$S = \int_{-1}^{1} [(1-3x^2)-(-2x^2)]\,dx = 2\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx = 2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

b) Determinemos la abscisa de los puntos de intersección de las gráficas dadas (véase la fig. 250, *a*) del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = 1-3y^2 \\ x = -2y^2 \end{cases}$, tenemos $x = -2$. El volumen del cuerpo buscado puede ser hallado como diferencia de los volúmenes de los cuerpos engendrados por la revolución de dos trapecios curvilíneos en torno al eje Ox. El primero de los trapecios está engendrado por la parte de la parábola $x = 1 - 3y^2$ situada por encima del eje Ox, la ecuación de este trozo es $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{3}}$, así como por las rectas $x = -2$, $x = 1$ y el eje Ox. El segundo trapecio está engendrado por la parábola $y = \sqrt{-\dfrac{x}{2}}$, las rectas $x = -2$, $x = 0$ y el eje Ox. Hallamos el volumen:

$$V = \pi\left[\int_{-2}^{1}\left(\frac{1-x}{3}\right)dx - \int_{-2}^{0}\left(-\frac{x}{2}\right)dx\right] = $$

$$= \pi\left[\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{6}\right)\Big]_{-2}^{1} + \frac{x^2}{4}\Big|_{-2}^{0}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

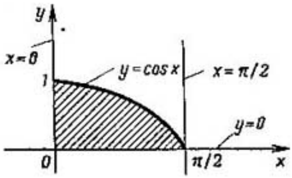


Fig. 251

6.14. a) $S = 1$; b) $V = \pi^2/4$.

Resolución. a) Puesto que $\cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2) = \cos x$, la figura dada es un trapecio curvilíneo limitado por las líneas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/2$ (fig. 251). Determinemos su área:

$$S = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\,\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

b) Calculemos el volumen del cuerpo de revolución

$$V = \pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \pi\left[\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx\right].$$

Para encontrar la última integral se puede hacer la sustitución de la variable según la fórmula $x = t/2$. Entonces

$$\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\,\Big|_0^{\pi} = 0.$$

6.15. $L = 8/27\,(10\sqrt{10}-1)$.

Resolución. Hagamos uso de la fórmula $L=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, donde L es la longitud del arco de la curva $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$. Puesto que $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$, entonces $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$. La longitud del arco

$$L=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx.$$

Después de la sustitución $1+\frac{9x}{4}=t$, o sea, $x=\frac{4t-1}{9}$ obtenemos

$$L=\int_1^{10} \sqrt{t}\cdot\frac{4}{9}\,dt=\frac{4}{9}\int_1^{10} t^{1/2}\,dt=\frac{4}{9}\,\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_1^{10}=\frac{8}{27}\,(10\sqrt{10}-1).$$

6.16. a) $S=2a\sqrt{a}/3$; b) $V=\pi a^2/2$; c) $S=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\frac{1}{8}\right]$.

Resolución. a) La figura dada está rayada en la fig. 252, *a*. Está limitada

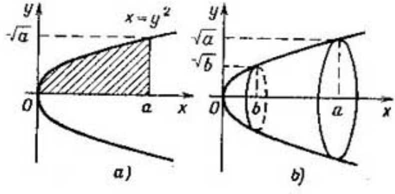


Fig. 252

superiormente por la parábola $y=\sqrt{x}$. Determinemos el área de la figura:

$$S=\int_0^a \sqrt{x}\,dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^a=\frac{2a\sqrt{a}}{3}.$$

b) Determinemos el volumen V del cuerpo de revolución:

$$V=\pi\int_0^a (\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int_0^a x\,dx=\pi\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{\pi a^2}{2}.$$

c) Sea $b>0$. Determinemos primero el área S_b de la superficie engendrada por la revolución del trapecio curvilíneo limitado por la parábola $y=\sqrt{x}$ y por las rectas $x=b$, $x=a$, $y=0$ (fig. 252, *b*). Como $y'=1/(2\sqrt{x})$, entonces

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+1/(4x)}$. Según la fórmula $S=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, donde S es el área de la superficie del cuerpo engendrado por la revolución del trapecio curvilíneo $0\leqslant y\leqslant f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, en torno al eje Ox, el área de la superficie en cuestión S_b se puede hallar así:

$$S_b=2\pi\int\limits_b^a \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx=2\pi\int\limits_b^a\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx=2\pi\left.\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^{3/2}}{3/2}\right|_b^a=$$

$$=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\left(b+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right].$$

Ahora, haciendo tender b hacia 0, obtenemos

$$S=\frac{4\pi}{3}\left[\left(a+\frac{1}{4}\right)^{3/2}-\frac{1}{8}\right].$$

6.17. $y_C=\dfrac{R\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$.

Resolución. El arco es simétrico respecto al radio que pasa por su punto medio, por eso el centro de gravedad está en este radio. Introduzcamos el sistema de coordenadas según se muestra en la fig. 253; supongamos que el arco gira

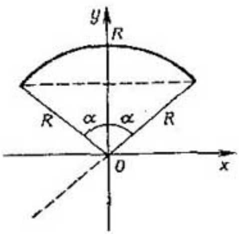


Fig. 253

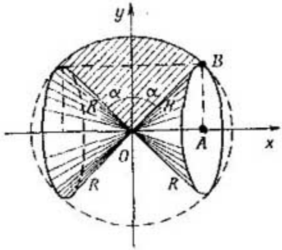


Fig. 254

alrededor del eje Ox. En este caso el arco describirá la superficie de la zona esférica (véase el ejemplo 13, § 11). La superficie del arco es igual a $2\pi RH$, donde H es la altura de la zona que en el caso dado es igual a la longitud de la cuerda que subtiende el arco dado; es evidente que $H=2R\operatorname{sen}\alpha$. Puesto que la longitud del arco dado es igual a $2R\alpha$, entonces, designando la ordenada del centro de gravedad por y_C, en virtud del primer teorema de Guldin, obtenemos

$$4\pi R^2\operatorname{sen}\alpha=2\pi y_C\cdot 2R\alpha,\ \text{de donde}\ y_C=\frac{R\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}.$$

Observación. De la respuesta obtenida se deduce que el centro de gravedad de la semicircunferencia $y=\sqrt{R^2-x^2}$ está en el punto $(0;\ 2R/\pi)$.

6.18. $y_C=\dfrac{2R\operatorname{sen}\alpha}{3\alpha}$.

Resolución. Introduzcamos el sistema de coordenadas según se muestra en la fig. 254.

En virtud de la simetría del sector respecto al eje Oy el centro de gravedad está sobre este eje. Para resolver el problema hagamos uso del segundo teorema de Guldin. Determinemos primero el volumen del cuerpo engendrado por la revolución del sector dado en torno al eje Ox. La ecuación del arco del sector $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; las abscisas de los extremos del arco son, evidentemente, iguales a $\pm R$ sen α y las ordenadas de estos extremos valen $R \cos \alpha$. Determinemos

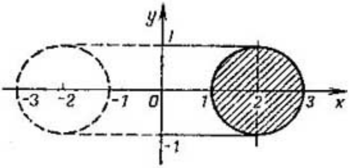


Fig. 255

el volumen del cuerpo buscado como diferencia entre el volumen de la capa esférica engendrada al girar el trapecio curvilíneo. limitado por el arco $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, las rectas $x = \pm R$ sen α y el eje Ox, y los volúmenes de dos conos iguales engendrados por la revolución de los radios extremos del sector (fig. 254):

$$V = \pi \int\limits_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{R \operatorname{sen} \alpha} (R^2 - x^2)\, dx - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \,|AB|^2\, |OA| =$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{R \operatorname{sen} \alpha} (R^2 - x^2)\, dx - \frac{2}{3} \pi R^2 \cos^2 \alpha R \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{R \operatorname{sen} \alpha} - \frac{2\pi R^3 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{sen} \alpha.$$

Puesto que el área del sector dado es igual a $R^2\alpha$, entonces, designando con y_C la ordenada del centro de gravedad, en virtud del segundo teorema de Guldin obtenemos

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \operatorname{sen} \alpha = R^2\alpha \cdot 2\pi y_C, \text{ de donde } \quad y_C = \frac{2R \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}.$$

Observación. De la respuesta obtenida se deduce que el centro de gravedad del semicírculo $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$ está en el punto $(0;\ 4R/(3\pi))$.

6.19. a) $V = 4\pi^2$; b) $S = 8\pi^2$.

Resolución. a) Hagamos uso del segundo teorema de Guldin. El área del círculo dado es igual a π, su centro de gravedad —el punto $(2; 0)$— al girar describe la circunferencia de 4π de largo, por eso el volumen del toro $V = \pi \cdot 4\pi = 4\pi^2$.

b) Hagamos uso del primer teorema de Guldin. Determinemos primero el área S_1 de la superficie engendrada por la revolución de la semicircunferencia «derecha» $x = 2 + \sqrt{1 - y^2}$ en torno al eje Oy (fig. 255). Puesto que la longitud de esta semicircunferencia vale π y su centro de gravedad, o sea, el punto

$(2 + 2/\pi;\ 0)$ [1]) describe la circunferencia de $2\pi\,(2 + 2/\pi)$ de largo (fig. 255), entonces el área

$$S_1 = \pi \cdot 2\pi \left(2 + \frac{2}{\pi}\right) = 4\pi\,(\pi + 1).$$

Análogamente encontramos el área S_2 de la superficie engendrada por la revolución de la semicircunferencia «izquierda» (su centro de gravedad es el punto $(2 - 2/\pi;\ 0)$): $S_2 = 4\pi\,(\pi - 1)$. Ahora bien, el área de la superficie del toro dado

$$S = S_1 + S_2 = 8\pi^2.$$

6.20. $A = 0{,}125$ kgfm.

Resolución. Determinemos primero el valor del coeficiente de proporcionalidad k. Puesto que, en virtud de los datos del problema, para $x = 0{,}01$ m $F\,(0{,}01) = 1$ kgfm, o sea, $1 = k \cdot 0{,}01$, el coeficiente de proporcionalidad $k = \frac{1}{0{,}01} = 100$. Por consiguiente, la fuerza que estira el muelle de $x = 0$ a $x = 0{,}05$ m se expresa por la fórmula $F\,(x) = 100 \cdot x$. Según la fórmula $A = \int\limits_a^b F\,(x)\,dx$, donde A es el trabajo realizado por la fuerza $F\,(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, el trabajo buscado se puede hallar así:

$$A = \int\limits_a^b F(x)\,dx = \int\limits_0^{0,05} 100x\,dx = 100\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,05} = 100\,\frac{(0{,}05)^2}{2} = 0{,}125 \text{ kgfm}.$$

---

[1]) Véase la observación para el problema 6.17.

Indice alfabético de materias