

**V. A. Gorbátov**

**FUNDAMENTOS  
DE LA MATEMÁTICA DISCRETA**



FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA  
DISCRETA

В. А. Горбатов

ОСНОВЫ  
ДИСКРЕТНОЙ  
МАТЕМАТИКИ

МОСКВА  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»

V. A. Gorbátov

# FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA DISCRETA



Editorial Mir  
Moscú

Traducido del ruso por María A. Andriánova,  
licenciada en matemáticas aplicadas

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000620-6

© Издательство «Высшая школа», 1986  
© traducción al español, editorial Mir, 1988

# Índice

Prefacio .....	7
Introducción .....	8
Capítulo 1. <b>Sistemas algebraicos</b> .....	11
§ 1.1. Conjunto, función, operación. Modos de su prefijación .....	11
§ 1.2. Concepto del álgebra. Álgebras fundamentales .....	16
§ 1.3. Relaciones binarias, procedimientos de su planteamiento y sus propiedades .....	26
§ 1.4. Retículo .....	32
§ 1.5. Modelo. Álgebra de relaciones .....	41
§ 1.6. Axiomática de la teoría de los conjuntos. Minimización de la representación de los conjuntos .....	51
§ 1.7. Problemas y ejercicios .....	55
Comentarios .....	56
Capítulo 2. <b>Lógica matemática</b> .....	56
§ 2.1. Lógica de enunciaciones .....	59
§ 2.2. Minimización de las funciones booleanas en la clase de las FND .....	65
§ 2.3. Completitud .....	73
§ 2.4. Síntesis de los circuitos lógicos .....	85
§ 2.5. Cálculo de las enunciaciones .....	91
§ 2.6. Cálculo de los predicados .....	95
§ 2.7. Problemas y ejercicios .....	101
Comentarios .....	102
Capítulo 3. <b>Teoría de los grafos y mografos</b> .....	102
§ 3.1. Grafo ponderado y su planteamiento matricial .....	108
§ 3.2. Conexión y conexión fuerte de un grafo .....	116
§ 3.3. Ciclomática .....	120
§ 3.4. Diferenciación de los grafos y mografos .....	129
§ 3.5. Estabilidad, cubrimientos y combinaciones en pares .....	140
§ 3.6. Encaje de los grafos .....	155
§ 3.7. Coloración de los vértices y de las aristas del grafo. Caracterización de la propiedad de arista .....	165
§ 3.8. Caracterización de la coloración de los grafos .....	178
§ 3.9. Problemas y ejercicios .....	180
Comentarios .....	181
Capítulo 4. <b>Teoría de las gramáticas formales y de los dispositivos automáticos</b> .....	181
§ 4.1. Gramáticas formales .....	188
§ 4.2. Etapas principales del diseño de los dispositivos automáticos .....	195
§ 4.3. Fundamentos aritméticos de los dispositivos automáticos operacionales .....	205
§ 4.4. Etapa algorítmico del diseño .....	212
§ 4.5. Diseño abstracto del dispositivo automático .....	226
§ 4.6. Codificación de los estados interiores .....	233
§ 4.7. Diseño estructural de los dispositivos automáticos .....	253
§ 4.8. Simulación de los sistemas de autómatas mediante las redes de Petri .....	

---

§ 4.9. Problemas y ejercicios .....	266
Comentarios .....	270
Capítulo 5. Teoría aplicada de los algoritmos. Análisis de caracterización .....	271
§ 5.1. Principios del análisis de caracterización. Construcción de los algoritmos combinatorios .....	271
§ 5.2. Caracterización de la ordenación parcial del mografo .....	285
§ 5.3. Caracterización de la conexión de salida de los circuitos lógicos. Minimización estructural .....	295
§ 5.4. Caracterización de la descomposición del grafo de transiciones en el producto cartesiano parcial .....	312
§ 5.5. Caracterización y métodos del emplazamiento óptimo de los datos en la memoria del ordenador .....	322
§ 5.6. Problemas y ejercicios .....	334
Comentarios .....	335
Bibliografía .....	336
Índice alfabético de materias .....	337



## Prefacio

La creación de los sistemas automatizados integrados modernos semejantes a los de proyección automatizada (SPA), de producción automatizada flexible (SPAF), sistemas automatizados de mando (SAM), sistemas automatizados de investigaciones científicas (SAIC), es inconcebible sin la introducción acelerada de los resultados del progreso científico-técnico, especialmente de los logrados en la esfera de las matemáticas.

Para crear y explotar los sistemas automatizados integrados, de uso en complejo, de procesamiento de la información y sus componentes (apoyo matemático, paquetes de programas aplicados, bancos distribuidos de los datos, sistemas incorporados de microprocesores, redes de transmisión de los datos, sistemas con partición de recursos y procesamiento distribuido de la información) es necesario conocer la matemática discreta, cuya particularidad principal es la ausencia del paso límite y la continuidad, lo que es característico para la matemática clásica.

El libro comprende cinco capítulos e incluye las partes principales de la matemática discreta moderna: los sistemas algebraicos, la lógica matemática, la teoría de grafos y mografos (hipergrafos), la teoría de autómatas y gramáticas formales, la teoría aplicada de algoritmos y el análisis de caracterización. Al final de cada capítulo se ofrecen problemas y ejercicios de dificultad distinta destinados para fijar los conceptos introducidos, algoritmos y construcciones examinados. El último capítulo se dedica a la parte central de la matemática discreta, es decir, al análisis de caracterización, la solución de cuyos problemas es la base en el diseño de los algoritmos óptimos y de apoyos eficientes matemático, de programas de información y técnico para los sistemas automatizados integrados, de uso en complejo, modernos de procesamiento de la información.

*El autor*

## Introducción

El resultado final del trabajo del ingeniero matemático y del de sistemas es un algoritmo realizado mediante un procedimiento de programas, de aparatos o de programas y aparatos. La eficiencia de los medios de cálculo utilizados se define en grado considerable por la optimicidad del algoritmo elaborado, la cual se estima por la complejidad temporal y capacitiva. Como complejidad temporal se toma el tiempo de trabajo del algoritmo, como capacitiva, la capacidad de memoria necesaria para resolver el problema. Las complejidades temporal y capacitiva son funciones de la dimensión del problema. Actualmente, debido a la amplia aplicación de la técnica de cálculo en las distintas esferas de la actividad humana, adquieren cada vez mayor importancia los cálculos sobre estructuras discretas, o sea, los cálculos combinatorios. Numerosas publicaciones se dedican a la investigación de algoritmos sobre estructuras discretas.

El análisis de las dificultades habidas durante la búsqueda de algoritmos eficaces de la resolución de los problemas de la matemática discreta condujo a la enunciación del problema teórico y metodológico central de la matemática discreta, es decir, a la posibilidad de excluir el sondeo de variantes cuando se resuelven los problemas sobre estructuras discretas. Fue presentada la hipótesis que para una amplia clase de problemas de la matemática discreta, de interés para la práctica, no existe un algoritmo eficaz para resolverlos y cuya densidad de trabajo sea una función polinomial de la dimensión del problema. Estos problemas forman la clase de los problemas *NP*-completos, cuya densidad de trabajo para resolverlos se estima por una función exponencial. Según esta hipótesis, los problemas de la dimensión real (equivalente a unas centenas) no pueden ser resueltos eficazmente, incluso mediante los ordenadores de generaciones futuras. En realidad, si imaginémos un ordenador, para el cual los símbolos del sistema de cálculo utilizado o de la lógica se simulan por los distintos estados de átomos, con la particularidad de que la masa del ordenador es igual a la de la Tierra, entonces, basándose en las leyes generales de la física este ordenador no podrá procesar más de  $10^{73}$  órdenes binarios de la información ni siquiera durante todas las épocas geológicas. Por lo contrario, resolviendo los problemas *NP*-completos de la dimensión real el volumen de la información procesada supera el valor de  $10^{73}$ . Este hecho suscitó el pesimismo entre

los matemáticos teóricos que centraron la atención principalmente en la investigación del nivel conceptual de la matemática discreta. Los especialistas en matemáticas aplicadas orientaron sus esfuerzos a diseñar algoritmos para resolver problemas de la matemática discreta, lo que se debe a la necesidad práctica del movimiento acelerado "desde el contenido del sentido físico de un problema hacia las construcciones algorítmicas" y, también, hacia un amplio empleo de los ordenadores.

Al resolver el problema de reducción del sondeo de variantes existen grupos de algoritmos: heurísticos y de caracterización. Entre los heurísticos figuran algoritmos de la clase amplia a partir de los FBI-algoritmos (FBI significa fuerza brutal e ignorancia) hasta los "astutos", "ávidos" y otros algoritmos heurísticos. El nombre de algoritmo corresponde al tipo de heurística que determina el procedimiento de la lucha contra el sondeo. Es imposible por principio estimar cómo dista la resolución obtenida por medio de un algoritmo heurístico de la calidad de resolución minimal en el sentido del valor de la funcional. Son libres de este defecto esencial los algoritmos de caracterización, cuya estructura fue propuesta por el autor en los años 60. A base de la caracterización de transformaciones combinatorias realizadas se puede hallar la resolución minimal sin buscar todas las resoluciones equivalentes, excepto su sondeo. El algoritmo de caracterización de la resolución del problema consta de un procedimiento de formación de la equivalencia y de la obtención real de la resolución. El primer procedimiento consiste en la transformación de la información inicial en la forma que permite, sin construir de hecho la resolución, calcular la funcional de su calidad. La densidad de trabajo de los algoritmos de caracterización para problemas prácticos se estima por las funciones polinomiales, cuya potencia no supera 3—5. Dos razones explican la divergencia de los resultados obtenidos por los matemáticos teóricos. En primer término, los matemáticos teóricos estiman la densidad de trabajo de los algoritmos de la resolución de un problema combinatorio por una dependencia exponencial, partiendo del peor caso que, como regla, es artificial y no tiene lugar en la práctica. En segundo término, ellos demuestran estimaciones asintóticas, es decir, consideran el paso límite cuando  $n \rightarrow \infty$  ( $n$  es la dimensión del problema). Pero, en la práctica, la dimensión del problema es un valor finito. Por ejemplo, para obtener la estimación exponencial de la laboriosidad en la coloración de los vértices de un grafo arbitrario hay que basarse en conocer el número máximo  $f(n)$  de subgrafos vacíos en un grafo de  $n$  vértices:

$$f(n) = \begin{cases} 3^{n/3}, & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 \cdot 3^{(n-4)/3}, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 \cdot 3^{(n-2)/3}, & n \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

sín embargo, esta dependencia es válida solamente para los grafos de una clase única que son complementos de los grafos de Moon—Moser hasta los completos. La resolución de los problemas combinatorios no debe considerarse en general, sino tomando en cuenta la información concreta inicial.

“Del mismo modo que el don de la palabra nos enriquece con opiniones de otras personas, el lenguaje de los signos matemáticos es un medio todavía más perfecto, más exacto y claro..”

N. I. Lobachevski

## CAPÍTULO 1

# Sistemas algebraicos

### § 1.1. Conjunto, función, operación.

#### Modos de su prefijación

Cualquiera noción de la matemática discreta puede definirse empleando el concepto de conjunto.

Por *conjunto* se comprende la unión, en un todo común, de los objetos muy diferentes por nuestra intuición o nuestro pensamiento. Esta definición intuitiva del concepto de conjunto fue dada por Cantor, fundador de la teoría de los conjuntos. En las matemáticas este concepto es primario y, por consiguiente, no tiene definición rigurosa que satisfice las exigencias modernas. Los objetos que forman un conjunto los denominaremos *elementos* del conjunto y, como regla, los designaremos con las letras minúsculas del alfabeto latino. Si el elemento  $m$  pertenece al conjunto  $M$  utilizaremos la denotación  $m \in M$ , en caso contrario, la denotación  $m \notin M$ , donde el signo de pertenencia de un elemento a un conjunto  $\in$  es una estilización de la primera letra de la palabra griega *εστι* (ser, estar).

Un conjunto que contiene un número finito de elementos se denomina *finito*. Pero, si un conjunto no contiene cualesquier elementos éste se denomina *vacío* y se denota con  $\emptyset$ .

Un conjunto puede ser prefijado mediante diversos procedimientos al enumerar los elementos (conjuntos finitos) o al indicar sus propiedades (con ello, para prefijar un conjunto se usan las llaves { }). Por ejemplo, el conjunto  $M$  de las cifras del alfabeto decimal puede estar planteado en la forma

$$M = \{0, 1, \dots, 9\} \text{ o } M = \{i/i \text{ es entero, } 0 \leq i \leq 9\},$$

donde a la derecha de la raya inclinada se indica la propiedad de los elementos de este conjunto. El conjunto  $M$  de los números pares puede escribirse en la forma  $M = \{m/m \text{ es un número par}\}$ .

El conjunto  $M'$  se denomina *subconjunto* del conjunto  $M$  si, y sólo si, todo elemento del conjunto  $M'$  pertenece al conjunto  $M$ :

$$M' \subset M \leftrightarrow (m \in M' \rightarrow m \in M),$$

donde  $\subset$  es el signo de inclusión del subconjunto;  $\rightarrow$  es "si..., entonces...";  $\leftrightarrow$  es "si, y sólo si...". En particular, los conjuntos  $M'$  y  $M$  pueden coincidir.

No inclusión del conjunto  $M'$  en el conjunto  $M$  se denota así:  $M' \not\subset M$ .

Es obvio, que si el conjunto  $M_a$  es un subconjunto del conjunto  $M_b$  y el conjunto  $M_b$  es un subconjunto del conjunto  $M_a$ , ambos estos conjuntos constan de los mismos elementos. Tales conjuntos se llaman *equivalentes*:  $M_a = M_b$ . Pero, si el conjunto  $M'$  es un subconjunto del conjunto  $M$ , mientras que el conjunto  $M$  no es un subconjunto del conjunto  $M'$ , entonces el conjunto  $M'$  se denomina *subconjunto propio* del conjunto  $M$ . Para designar este hecho utilizaremos el símbolo doble de inclusión de subconjuntos  $\subset \subset$ , es decir, escribiremos  $M' \subset \subset M$ .

Para cada conjunto  $M$  existe un conjunto, cuyos elementos son los subconjuntos del conjunto  $M$  y sólo ellos. Tal conjunto lo denominaremos *familia del conjunto  $M$*  o *booleano* de este conjunto y lo denotaremos con  $B(M)$ , mientras que el conjunto  $M$  se denominará *universal*, *universo* o *espacio* y se designará con  $\mathbf{1}$ .

Examinemos la formación del booleano  $B(\mathbf{1})$  de un universo  $\mathbf{1} = \{y, x, a\}$ . El primer conjunto es el conjunto vacío  $\emptyset$  que no contiene ningún elemento. Después formemos  $\binom{|\mathbf{1}|}{1} \left[ \binom{|\mathbf{1}|}{1} \right]$ , es decir, el número de combinaciones de  $|\mathbf{1}|$  elementos tomados 1 a 1 de los conjuntos que contienen un elemento cada uno, luego  $\binom{|\mathbf{1}|}{2}$  conjuntos, cada uno de los cuales contiene dos elementos, ..., y, por fin, el conjunto que contiene todos los elementos del conjunto  $\mathbf{1}$ . Aquí,  $|\mathbf{1}|$  es el número de elementos del conjunto finito  $M$ , lo que en adelante denominaremos *potencia de un conjunto*.

Evidentemente que la potencia  $|B(M)|$  de un booleano de un universo  $M$  es igual a  $2^{|M|}$ :

$$|B(M)| = 2^{|M|}.$$

En el caso examinado

$$B(\mathbf{1}) = \{\emptyset, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{a, y\}, \{y, x, a\}\}.$$

Frecuentemente, un conjunto se prefija también en forma gráfica con ayuda de *diagramas de Euler*. Por ejemplo, en la fig. 1.1 se expone el conjunto  $\{\{a, b, c\}, \{b, d, e\}\}$  en el espacio  $\mathbf{1} = \{a, b, c, d, e\}$ , donde la línea cerrada llamada *círculo de Euler* corresponde a uno de los conjuntos considerados y limita sus elementos, con ello, el marco, en cuyo ángulo superior derecho se sitúa  $\mathbf{1}$ , limita los elementos del espacio. Otras formas de prefijar los conjuntos se examinarán a medida que sea necesario.

Uno de los conceptos importantes de la teoría de los conjuntos es el concepto del producto cartesiano de conjuntos.

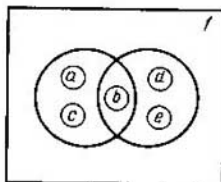


Fig. 1.1

Un conjunto  $M$  de tipo

$$M = \{(m_i, m_j) / m_i \in M_a, m_j \in M_b\}$$

se denomina *producto cartesiano*  $M_a \times M_b$  de los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$ . Aquí y en adelante mediante los paréntesis ( ) se denota una *sucesión*, es decir, un conjunto con el orden fijado de elementos.

El subconjunto  $F \subset M_x \times M_y$  se llama *función*, si para cada uno de los elementos  $x$ ,  $x \in M_x$  no existe más de un elemento  $y \in M_y$ , de tipo  $(x, y) \in F$ ; con ello si para cada elemento  $x$  existe un elemento  $y$  de tipo  $(x, y) \in F$ , la función se denomina *completamente definida* (*definida en todos los puntos*), en caso contrario, *parcialmente definida* (*incompletamente definida*). El conjunto  $M_x$  forma *campo de definición de la función*  $F$ , el conjunto  $M_y$  es el *campo de valores de la función*  $F$ . Frecuentemente, en vez de la denotación  $(x, y) \in F$ , se utiliza la denotación  $y = F(x)$ ; en esto caso el elemento  $x$  se llama *argumento* o *variable*, mientras que  $y$  se llama *valor de la función*  $F$ .

Comparemos con el producto cartesiano de dos conjuntos un retículo rectangular, cuyos nodos corresponden biunívocamente a los elementos del producto cartesiano. En las figuras el subconjunto del producto cartesiano señalemos rayando los elementos respectivos.

**Ejemplo 1.1.** En la fig. 1.2 (a) está representado un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos  $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y  $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$  que no es función; en la fig. 1.2 (b), un subconjunto que es una función completamente definida; en la fig. 1.2 (c), un subconjunto que es una función completamente definida; en la fig. 1.2 (d), un subconjunto que es una función parcialmente definida.

El número de argumentos determina el *tipo-ádico de la función*. Anteriormente han sido examinados las funciones monádicas (de un argumento).

Por analogía con el concepto del producto cartesiano de dos conjuntos definamos el producto cartesiano de  $n$  conjuntos.

Llámanse *producto cartesiano*.

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \prod_{i=1}^n M_i$$

de los conjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_n$  el conjunto

$$M = \{(m_1, m_2, \dots, m_n) / m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, \dots, m_n \in M_n\}.$$

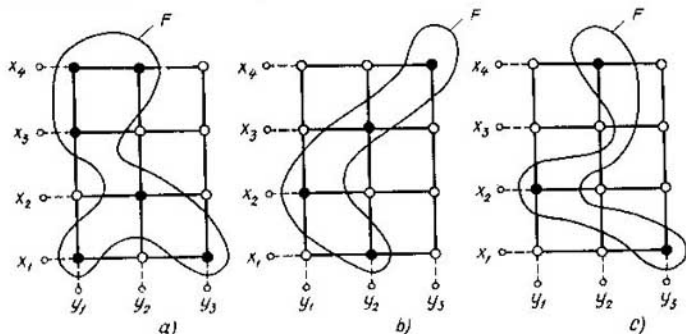


Fig. 1.2

Los elementos del producto cartesiano  $M_1 \times M_2 \times M_n$  son todas las posibles sucesiones, cada una de las cuales consta de  $n$  elementos, con la particularidad de que el primer elemento pertenece al conjunto  $M_1$ , el segundo, al conjunto  $M_2, \dots$ , el elemento  $n$ -ésimo, al conjunto  $M_n$ .

Si el conjunto  $M_x$  en la definición de la función  $y = F(x)$  es el producto cartesiano de los conjuntos  $M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n}$ , obtenemos la definición de la función  $n$ -ádica  $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Un caso particular de la función  $n$ -ádica  $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la operación  $n$ -ádica. Por operación  $n$ -ádica  $O_n$  en el conjunto  $M$  se comprende una función  $n$ -ádica  $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , cuyos campos de definición de los argumentos y el campo de valores de la función coinciden:  $M_{x_1} = M_{x_2} = \dots = M_{x_n} = M_y$ . De este modo, una operación  $n$ -ádica respecto a  $n$  elementos del conjunto  $M$  determina el elemento  $(n + 1)$ -ésimo del mismo conjunto.

Examinemos el espacio  $\mathbf{1}$  y, en él, definamos cuatro operaciones sobre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

La *unión*  $M_a \cup M_b$  de dos conjuntos  $M_a$  y  $M_b$  es un conjunto  $M$  compuesto de los elementos del conjunto  $M_a$  y de los elementos del conjunto  $M_b$ :

$$M = M_a \cup M_b = \{m_i/m_i \in M_a, M_b\}.$$

La *intersección*  $M_a \cap M_b$  de dos conjuntos  $M_a$  y  $M_b$  es un conjunto  $M$  compuesto de los elementos pertenecientes tanto al conjunto  $M_a$ , como al conjunto  $M_b$ :

$$M = M_a \cap M_b = \{m_i/m_i \in M_a \text{ y } m_i \in M_b\};$$

a menudo la conjunción "y" se sustituye por el signo  $\&$ :

$$M = M_a \cap M_b = \{m_i/m_i \in M_a \& m_i \in M_b\}.$$



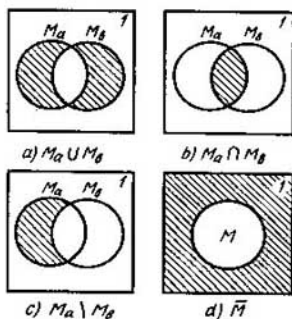


Fig. 1.3

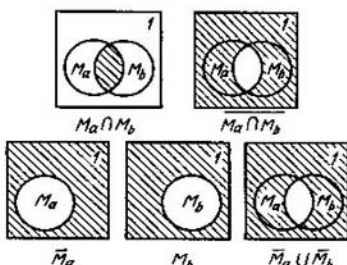


Fig. 1.4

La *diferencia*  $M_a \setminus M_b$  de los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$  es un conjunto  $M$  compuesto de los elementos pertenecientes al conjunto  $M_a$  y no pertenecientes al conjunto  $M_b$ :

$$M = M_a \setminus M_b = \{m_i/m_i \in M_a \& m_i \notin M_b\}.$$

Las operaciones introducidas son binádicas. Consideremos la operación de complemento que es monádica.

El complemento  $\bar{M}$  de un conjunto  $M$  es el conjunto

$$\bar{M} = \{m_i/m_i \notin M\}.$$

Las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento se ilustran en la fig. 1.3 (a, b, c y d), respectivamente; el conjunto resultante de cada operación está representado mediante una zona rayada.

Empleando estas operaciones se puede expresar unos conjuntos por medio de otros, con ello, en primer lugar, se cumple la operación monádica de complemento, luego la de intersección y sólo después la de unión (de diferencia). Para cambiar este orden en la expresión se emplean los paréntesis.

**Ejemplo 1.2.** Examinemos la operación de complemento de un conjunto que es la intersección de los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$ . Su resultado coincide con la unión de los complementos de estos conjuntos

$$M = \overline{M_a \cap M_b} = \bar{M}_a \cup \bar{M}_b;$$

se puede cerciorarse de esto con ayuda de los diagramas de Euler (fig. 1.4).

De tal modo, un conjunto puede ser prefijado mediante una expresión que tiene identificadores (índices) de conjuntos, operaciones y, tal vez, paréntesis. Semejante modo de prefijar un conjunto se llama *analítico*.

## § 1.2. Concepto del álgebra. Álgebras fundamentales

Llámanse *álgebra*  $A$  una colección  $\langle \quad \rangle$  del conjunto  $M$  con operaciones prefijadas en éste  $S = \{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n_1}, f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n_2}, \dots, f_{m1}, f_{m2}, \dots, f_{mn_m}\}$ ,  $A = \langle M, S \rangle$ , donde el conjunto  $M$  es el *portador* y  $S$  es la *signatura* del álgebra. El primer índice inferior del identificador de la operación señala su *tipo-ádica*.

*Observación.* Para identificar un todo único que contiene objetos de distinta estructura matemática, por ejemplo, un conjunto y operaciones en él, se propuso utilizar el término *colección* y designarlo con los paréntesis angulares  $\langle \quad \rangle$ .

Consideremos *álgebras fundamentales*. El álgebra de tipo  $\langle M, f_2 \rangle$  se denomina *grupoide*.

Si  $f_2$  es una operación de tipo de multiplicación ( $\times$ ), el grupoide se llama *multiplicativo*; si  $f_2$  es una operación de tipo de adición ( $+$ ), se llama *aditivo*.

Sea  $A = \langle M, f_2 \rangle$  un grupoide; designemos la operación  $f_2$  mediante  $\circ$ . Entonces un elemento  $e \in M$  se denomina *elemento neutral derecho* del grupoide  $A$ , si para cualquier  $m \in M$  se cumple la igualdad  $m \circ e = m$ ; el elemento  $e \in M$  del grupoide  $A = \langle M, \circ \rangle$  se denomina *elemento neutral izquierdo*, si para todos los  $m \in M$  se cumple la igualdad  $e \circ m = m$ . En estas definiciones se utilizaron las expresiones "todos los elementos", "cualquier elemento". En adelante, para abreviar, emplearemos el símbolo  $\forall$  (la letra volcada  $A$ , la primera letra de la palabra inglesa All, es decir, todo) en vez de las palabras "todos" o "cualquier". Si un elemento  $e$ ,  $e \in M$ , del grupoide  $A = \langle M, \circ \rangle$  es simultáneamente elemento neutral izquierdo y derecho, se llama *elemento neutral bilateral* o simplemente *elemento neutral*. Ningún grupoide puede tener más de un elemento neutral. En efecto, si

$$m \circ e = e \circ m = m \text{ y } m \circ e' = e' \circ m = m$$

es válido para todos los  $m \in M$ , entonces

$$e' = e' \circ e = e.$$

Si el grupoide  $\langle M, \circ \rangle$  es multiplicativo, el elemento neutral se llama *unidad* y se denota por 1; si es aditivo, el elemento neutral se llama *cero* y se designa por 0.

El grupoide  $A = \langle M, \circ \rangle$  se denomina *idempotente*, si su signatura satisface la ley de idempotencia

$$(\forall m \in M)(m \circ m = m).$$

El grupoide  $\langle M, \circ \rangle$ , cuya signatura satisface la ley conmutativa,

$$(\forall x, y \in M)(x \circ y = y \circ x),$$

se denomina *conmutativo* o *abeliano*. El grupoide  $\langle M, \circ \rangle$ , en el cual se cumple la ley asociativa,

$$(\forall x, y, z \in M)(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z),$$

se denomina *asociativo* o *semigrupo*.

El semigrupo  $\langle M, \circ \rangle$ , en el cual se cumplen operaciones inversas (para cualesquiera  $a, b \in M$  cada una de las ecuaciones  $a \circ x = b, y \circ a = b$  tiene solución única), se llama *grupo*.

Ilustremos este concepto de grupo tomando como ejemplo un *grupo de sustituciones* que contiene seis elementos. El grupo de sustituciones fue investigado, resolviendo ecuaciones en radicales, por Galois, célebre matemático francés. Llámase *sustitución* de  $n$ -ésimo grado una aplicación biunívoca de un conjunto de  $n$  elementos sobre sí.

Consideremos tres elementos:  $x_1, x_2, x_3$ . Existen seis permutaciones de tres elementos:  $x_1x_2x_3, x_2x_3x_1, x_1x_3x_2, x_3x_1x_2, x_2x_1x_3, x_3x_2x_1$ . Escribamos dos permutaciones de tres elementos una debajo de otra:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

Esta denotación significa que  $x_1$ , pasa en  $x_2$ ,  $x_2$  en  $x_3$ ,  $x_3$  en  $x_1$ .

El número de posibles sustituciones equivale al número de permutaciones. Introduzcamos las siguientes designaciones para seis sustituciones posibles:

$$a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Introduzcamos la operación de multiplicación  $\times$  sobre las sustituciones. Se denomina *producto* de sustituciones una sustitución obtenida como resultado del cumplimiento sucesivo de las sustituciones multiplicadas, de la primera, al inicio, y, luego, de la segunda. Por ejemplo,

$$c \times b = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = e.$$

La tabla 1.1 determina la expresión  $\alpha \times \beta$ ,  $\alpha, \beta = a, b, c, d, e, f$ .

Tabla 1.1

$\alpha$	$\beta$					
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$b$	$b$	$a$	$d$	$c$	$f$	$e$
$c$	$c$	$e$	$a$	$f$	$b$	$d$
$d$	$d$	$f$	$b$	$e$	$a$	$c$
$e$	$e$	$c$	$f$	$a$	$d$	$b$
$f$	$f$	$d$	$e$	$b$	$c$	$a$

En el álgebra considerada  $\langle M, \times \rangle$  se cumple la ley asociativa, pero no se cumple la ley conmutativa.

El álgebra  $\langle M, \times, + \rangle$  que según la multiplicación es el grupoide multiplicativo y según la adición, el grupo abeliano, con la particularidad de que la multiplicación y la adición están ligadas mediante las leyes *distributivas*

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a,$$

se denomina *anillo*. Un anillo, en el cual todos los elementos diferentes de cero componen un grupo según la multiplicación se llama *cuerpo*. Un cuerpo, cuyo grupo multiplicativo es abeliano, se denomina *campo*.

Examinemos el álgebra de conjuntos (álgebra de Cantor)

$$A_k = \langle B(1), \cup, \cap, \bar{\phantom{x}} \rangle,$$

cuyo portador es booleano de un conjunto universal  $\mathbf{1}$  y cuya signatura son las operaciones de unión  $\cup$ , de intersección  $\cap$  y de complemento  $\bar{\phantom{x}}$ . Para las operaciones del álgebra de Cantor se cumplen las siguientes leyes:

*conmutativa de unión y de intersección*

$$M_a \cup M_b = M_b \cup M_a, \quad M_a \cap M_b = M_b \cap M_a;$$

*asociativa de unión y de intersección*

$$M_a \cup (M_b \cup M_c) = (M_a \cup M_b) \cup M_c,$$

$$M_a \cap (M_b \cap M_c) = (M_a \cap M_b) \cap M_c,$$

*distributiva de intersección respecto a la unión y de unión respecto a la intersección*

$$M_a \cap (M_b \cup M_c) = M_a \cap M_b \cup M_a \cap M_c,$$

$$M_a \cup (M_b \cap M_c) = (M_a \cup M_b) \cap (M_a \cup M_c);$$

*de idempotencia de unión y de intersección*

$$M_a \cup M_a = M_a, \quad M_a \cap M_a = M_a;$$

*de operación con los conjuntos universal  $\mathbf{1}$  y vacío  $\emptyset$*

$$M \cup \emptyset = M, \quad M \cap \emptyset = \emptyset, \quad M \cup \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad M \cap \mathbf{1} = M, \quad M \cup \bar{M} = \mathbf{1},$$

$$M \cap \bar{M} = \emptyset;$$

*propuesta por De Morgan*

$$\overline{M_a \cap M_b} = \bar{M}_a \cup \bar{M}_b, \quad \overline{M_a \cup M_b} = \bar{M}_a \cap \bar{M}_b$$

*y de complemento doble*

$$\overline{\bar{M}} = M.$$

El álgebra de Cantor es un semigrupo abeliano según la operación aditiva de unión y multiplicativa de intersección, ya que para estas operaciones se cumplen las leyes conmutativa y asociativa, pero no es un grupo, dado que las ecuaciones  $M_a \cup X = M_b$ ,  $M_a \cap X = M_b$  no

tienen soluciones, por ejemplo, para el caso cuando los conjuntos no se intersecan:  $M_a \cap M_b = \emptyset$ . Por consiguiente, el álgebra de Cantor según las operaciones binádicas  $\cup$  y  $\cap$  no es un anillo. Esta álgebra pertenece a otra clase de álgebras fundamentales, o sea a la clase de retículos que se examina a continuación.

### § 1.3. Relaciones binarias, procedimientos de su planteamiento y sus propiedades

El concepto fundamental de la matemática discreta es el de *relación* que se utiliza para designar la ligazón entre objetos o nociones.

Llámase *cuadrado del conjunto*  $M$  el producto cartesiano de dos conjuntos equivalentes entre sí:  $M \times M = M^2$ . Se denomina *relación binaria*  $T$  en el conjunto  $M$  un subconjunto de su cuadrado:  $T \subset M^2$ . Se dice que los elementos  $m_i$  y  $m_j$  están en relación  $T$ , si  $(m_i, m_j) \in T$ . La colección del conjunto  $M$  y la relación binaria  $T \subset M^2$ , prefijada en él, se denomina *grafo*  $G$ :

$$G = \langle M, T \rangle,$$

donde  $M$  es el *portador del grafo* (conjunto de los *vértices*);  $T$  es la *signatura del grafo* (conjunto de los *arcos*).

Consideremos el planteamiento de la relación binaria empleando una *matriz de adyacencia* y un *conjunto cociente*.

En el planteamiento matricial se emplea una tabla de dos dimensiones, es decir, la matriz de adyacencia, poniendo un elemento del conjunto  $M$  en correspondencia biunívoca a cada fila (columna) de la misma. Entonces cada célula  $(i, j)$  corresponde biunívocamente a los elementos del conjunto  $M^2$ . Una célula  $(i, j)$  que corresponde a un elemento perteneciente a  $T \subset M^2$  se distingue de algún modo, por ejemplo, la dejan ennegrecida o con una unidad puesta en ella; las otras células se quedan blancas o con ceros inscritos en éstas.

Consideremos un esquema en bloque, propuesto por von Neumann y perteneciente a un ordenador que consta de un conjunto de dispositivos

$$M = \{a, b, c, d, e\},$$

donde  $a$  es un dispositivo de entrada,  $b$  es un dispositivo aritmético (procesor),  $c$  es un bloque de mando,  $d$  es una unidad de memoria y  $e$ , es un dispositivo de salida.

Examinemos el cambio de información entre los dispositivos  $m_i$  y  $m_j$  que están en la relación  $T$ , si la información pasa del dispositivo  $m_i$  en el dispositivo  $m_j$ . Esta relación puede ser prefijada en forma de una matriz de adyacencia:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$

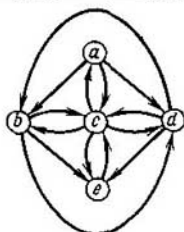


Fig. 1.5

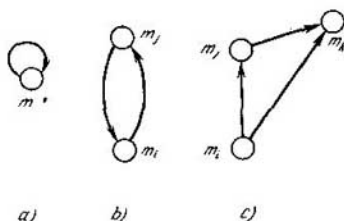


Fig. 1.6

El grafo  $G$ , que se prefija mediante la relación  $T$  examinada, se ofrece en la fig. 1.5. En esta figura (y también en adelante) los vértices del grafo se representan en forma de círculos (a veces, de puntos), los arcos, en forma de flechas que salen de  $m_i$  y entran en  $m_j$ , si  $(m_i, m_j) \in T$ ; con ello, el vértice  $m_i$  es el *origen de arco* y el  $m_j$ , su fin.

Consideremos el planteamiento de la relación binaria empleando el conjunto cociente.

Llámanse *entorno de radio unidad del elemento*  $m_i \in M$  un conjunto de elementos  $m_j \in M$  tales que  $(m_i, m_j) \in T$ ,  $T \subset M^2$ . A menudo en vez del término *entorno de radio unidad* se utiliza el término *sección*.

Un conjunto de entornos de radio unidad tomados para todos los elementos del conjunto  $M$ , al prefijar en él una relación  $T \subset M^2$ , se denomina *conjunto cociente*  $M/T$  del conjunto  $M$  respecto a la relación  $T$ . El conjunto cociente  $M/T$  determina completamente la relación  $T$ .

Prefijemos el conjunto cociente para el ejemplo considerado en forma de dos filas. En la primera se colocan los elementos del conjunto  $M$ , en la segunda debajo de cada elemento se anota el entorno de radio unidad de éste. Entonces, la segunda fila prefija el conjunto cociente de  $M$  respecto a  $T$ :

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & \\ \{b, c, d\} & \{c, d, e\} & \{a, b, d, e\} & \{b, c, e\} & \{c\} & \end{array}$$

La relación binaria prefijada por el grafo  $G = \langle M, T \rangle$  (fig. 1.5) puede ser planteada mediante la enumeración de sus arcos:

$$\begin{aligned} M &= \{a, b, c, d, e\}, \quad T = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), \\ & (b, e), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, c), (d, b), \\ & (d, e), (e, c)\}. \end{aligned}$$

Examinemos las propiedades más importantes de las relaciones binarias.

Una relación  $T$  en el conjunto  $M$  se llama *reflexiva*, si para cada elemento  $m \in M$  es válido que  $(m, m) \in T$ . Al prefijar la relación mediante la matriz de adyacencia, el carácter reflexivo se caracteriza por el hecho de que todos los elementos de la diagonal principal están marcados (equivalen a 1 o son

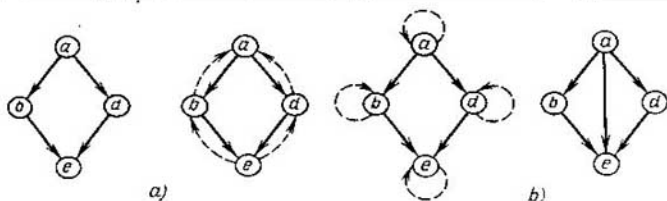


Fig. 1.7

ennegrecidos); al prefijar la relación por medio del grafo, cada elemento tiene *lazo*, es decir, arco de tipo  $(m, m)$  (fig. 1.6, a).

La relación  $T$  en el conjunto  $M$  se llama *simétrica* si de  $(m_i, m_j) \in T$  se desprende  $(m_j, m_i) \in T$ ,  $m_i \neq m_j$ .

La matriz de adyacencia de la relación simétrica es simétrica respecto a la diagonal principal, mientras que al prefijar la relación en forma del grafo la consecuencia del carácter simétrico es que entre cualquier par de vértices, que se encuentran en la relación  $T$ , existen dos arcos dirigidos contrariamente (fig. 1.6, b).

La relación  $T$  en el conjunto  $M$  se llama *transitiva*, si de  $(m_i, m_j) \in T$  y  $(m_j, m_k) \in T$  se desprende  $(m_i, m_k) \in T$ ,  $m_i, m_j, m_k \in M$ ;  $m_i \neq m_j$ ,  $m_i \neq m_k$ ,  $m_j \neq m_k$ .

En el grafo, que prefija una relación transitiva  $T$ , para cualquier par de arcos tales que el extremo del primero coincide con el origen del segundo existe un arco tercero que tiene origen común con el primero y extremo común con el segundo (fig. 1.6, c), o sea el *arco de cierre transitivo*.

La relación  $T'$  prefijada por el grafo parcial  $G'$  del grafo  $G$  (véase la fig. 1.5) se hace simétrica una vez quitados los arcos  $(a, b)$ ,  $(a, d)$ ,  $(b, e)$  y  $(d, e)$ .

Se denomina *grafo parcial*  $G'$  del grafo  $G = \langle V, U \rangle$  el grafo de tipo  $G' = \langle V, U' \rangle$ ,  $U' \subset U$ .

La relación  $T''$ , prefijada mediante el grafo parcial  $G''$  del grafo  $G$  (fig. 1.5) obtenido una vez quitados todos los arcos, excepto  $(a, b)$ ,  $(a, d)$ ,  $(b, e)$  y  $(d, e)$  (fig. 1.7, a) no posee propiedades del carácter simétrico ( $\sigma$ ), ni del reflexivo ( $\rho$ ), ni del transitivo ( $\eta$ ). Apreciemos a cuál de estas propiedades se aproxima más la relación  $T''$ . La *proximidad*  $\Delta(T, \alpha)$  de la relación  $T$  a la propiedad  $\alpha$  la apreciaremos por el número minimal de arcos que hay que quitar o agregar al grafo que plantea esta relación, para que este grafo prefije la relación  $T$  que posee la propiedad  $\alpha$ ,  $\alpha = \sigma, \rho, \eta$ . Para el ejemplo examinado (fig. 1.7, b).

$$\Delta(T'', \sigma) = 4, \Delta(T'', \rho) = 4, \Delta(T'', \eta) = 1.$$

Empleando estas propiedades definamos la *relación binaria de ordenación* que tiene gran importancia teórica y práctica.

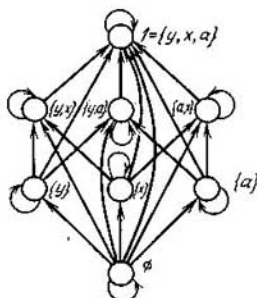


Fig. 1.8

La relación binaria  $R$  en el conjunto  $M$ , la que tiene las propiedades:

*reflexiva*

$(\forall a \in M) ((a, a) \in R)$ ;

*antisimétrica*

$(\forall a, b \in M) (((a, b) \in R \text{ y } (b, a) \in R) \leftrightarrow a = b)$ ;

*transitiva*

$(\forall a, b, c \in M) (((a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in R) \leftrightarrow (a, c) \in R)$ ,

se llama *relación de ordenación* y se designa con  $\leq$ . La relación binaria en el conjunto  $M$  es antirreflexiva, antisimétrica y transitiva llámase *relación de ordenación estricta* y se designa con  $<$ . La relación reflexiva y transitiva  $R$  en el conjunto  $M$  se denomina *relación de suborden*.

Examinemos la relación de inclusión  $\subset$ . Es reflexiva:  $M_i \subset M_i$  (el conjunto  $M_i$  incluye a sí mismo); si  $M_i \subset M_j$  y  $M_j \subset M_i$ , entonces  $M_i = M_j$  y, por consiguiente, ésta es antisimétrica; si  $M_i \subset M_j$  y  $M_j \subset M_k$ , entonces  $M_i \subset M_k$  y la relación  $\subset$  es transitiva. La relación de inclusión  $\subset$  es la de ordenación  $\leq$ . Un conjunto  $M$ , con la relación de ordenación  $\leq$  prefijada en él, se llama *ordenado* mediante esta relación.

Si cualesquiera dos elementos  $m_i$  y  $m_j$  de un conjunto ordenado están en la relación de ordenación  $m_i \leq m_j$  o  $m_j \leq m_i$  este conjunto se denomina *linealmente ordenado*, es caso contrario, *parcialmente ordenado*.

Un ejemplo del conjunto parcialmente ordenado se ofrece en la fig. 1.8 (como relación  $\leq$  se examina la relación de inclusión  $\subset$ ).

Con frecuencia un conjunto parcialmente ordenado se representa en forma de grafos  $H = \langle V, \leq \rangle$  que tienen omitidos todos los lazos y arcos de cierre transitivo. El grafo  $H = \langle V, \leq \rangle$  que prefija un conjunto parcialmente ordenado con los lazos alejados y los arcos de cierre transitivo omitidos se denomina *diagrama de Hasse*  $H$ . En la fig. 1.9,  $a$  se representa el diagrama de Hasse  $H$  que expresa el conjunto parcialmente ordenado mostrado en la fig. 1.8. El diagrama de Hasse es conocido desde fines del siglo XIX



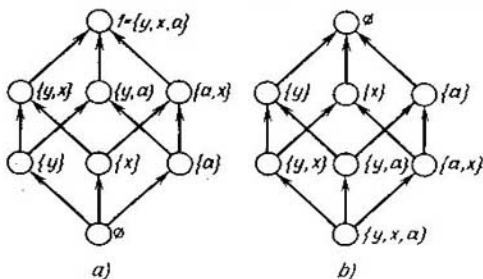


Fig. 1.9

a)

b)

y durante muchos años se aplicaba en la genealogía para prefijar el parentesco. El concepto de mayor directo se plantea con facilidad en un conjunto parcialmente ordenado por la siguiente definición:  $m_i$  cubre  $m_j$ , esto significa que  $m_j < m_i$  y no existe ningún elemento  $m_x$  tal que  $m_j < m_x < m_i$ .

Consideremos el subconjunto  $M'$  del conjunto ordenado  $M$ . Si existe un elemento  $m_\alpha \in M$  tal que  $m_i \leq m_\alpha$  para cualquier elemento  $m_i$  del subconjunto  $M'$ , este elemento se denomina *mayorante* del subconjunto  $M'$ . De modo análogo, si existe un elemento  $m_\beta \in M'$  tal que  $m_\beta \leq m_i$  para cualquier elemento  $m_i$  del subconjunto  $M'$ , el elemento  $m_\beta$  se llama *menorante* del subconjunto  $M'$ . En el diagrama de Hasse  $H$  (fig. 1.9, a) el elemento  $\{x\}$  es la menorante del subconjunto  $\{\{y, x\}, \{a, x\}, \{y, x, a\}\}$ , el elemento  $\{a, x\}$  es la mayorante del subconjunto  $\{\{x\}, \{a\}, \emptyset\}$ .

Si la mayorante  $m_\alpha$  de un subconjunto  $M'$  pertenece a  $M'$ ,  $m \in M'$ , se llama *elemento maximal*  $m_{\max}$  de este subconjunto. De modo análogo, si la menorante  $m_\beta$  de un subconjunto  $M'$  pertenece a  $M'$ ,  $m_\beta \in M'$ , se denomina *elemento minimal*  $m_{\min}$  del subconjunto  $M'$ . En el diagrama de Hasse  $H$  (fig. 1.9, a) los elementos minimal y maximal del subconjunto  $\{\{x\}, \{y, x\}, \{a, x\}, \{y, x, a\}\}$  son  $\{x\}$ ,  $\{y, x, a\}$ , respectivamente. Para un par de elementos de un conjunto linealmente ordenado siempre existen elementos maximal (equivalente a uno de ellos) y minimal (equivalente al otro elemento). Un par de elementos de un conjunto linealmente ordenado se llaman con frecuencia *comparables*, o sea, elementos  $m_i, m_j$ , para los cuales  $m_i \leq m_j$  o  $m_j \leq m_i$ .

Si un conjunto de mayorantes (menorantes) tiene, a su vez, elemento maximal (minimal), llámase *cota superior (inferior)* del subconjunto  $M'$  y se denota por medio de  $\sup M'$  ( $\inf M'$ ).

La cota superior (inferior) del subconjunto  $M'$  que pertenece a  $M'$  se denomina *elemento máximo (mínimo)* del subconjunto  $M'$ .

**Teorema 1.1.** *Un conjunto ordenado  $M$  no contiene más de un elemento máximo (mínimo).*

□ Demostremos el teorema para el caso de elemento máximo. Efectiva-

mente, si  $m_\alpha, m_\beta$  son dos elementos máximos,  $m_\alpha \leq m_\beta$  y  $m_\beta \leq m_\alpha$ , de donde  $m_\alpha = m_\beta$  debido a la antisimetría de  $\leq$ . Para el elemento mínimo la demostración es análoga. ■

Si el elemento máximo de un conjunto ordenado  $M$  existe, lo denominaremos *unidad* y denotaremos por medio de 1. Si el elemento mínimo de un conjunto ordenado  $M$  existe, lo denominaremos *cero* y denotaremos por medio de 0.

En una familia ordenada del conjunto  $M$  el conjunto vacío corresponde al elemento cero y  $M$ , al elemento unidad.

Un elemento que cubre 0 en el conjunto parcialmente ordenado  $M$ , es decir, el elemento minimal en un subconjunto del conjunto  $M$  obtenido por medio de excluir 0, se denomina *átomo* o *punto*. Al prefijar una familia del conjunto  $M$  por un grafo al punto (átomo) se le corresponde un elemento del universo.

Por *isomorfismo* entre dos conjuntos ordenados  $M$  y  $M^*$  comprendemos una correspondencia biunívoca  $\eta$  entre  $M$  y  $M^*$ , tal que de  $m_i \leq m_j$  se desprende  $\eta(m_i) \leq \eta(m_j)$  y de  $\eta(m_i) \leq \eta(m_j)$  se desprende  $m_i \leq m_j$ .

Dos conjuntos ordenados  $M$  y  $M^*$  se denominan *isomorfos* si, y sólo si, entre ellos existe el isomorfismo.

Por relación  $\bar{R}$  inversa de  $R$  se comprende una relación tal que  $(m_i, m_j) \in \bar{R}$  si, y sólo si,  $(m_j, m_i) \in R$ .

*Principio de dualidad.* La relación inversa de la relación de ordenación también es la relación de ordenación.

Se llama *dual* el conjunto parcialmente ordenado  $M$  el conjunto parcialmente ordenado  $\bar{M}$  definido sobre el mismo portador empleando la relación inversa. En la fig. 1.9 (b) se ofrece el diagrama dual al diagrama de Hasse (fig. 1.9, a). Muchas veces el principio de dualidad se formula del modo siguiente: *si el teorema es válido para los conjuntos parcialmente ordenados también es válido su teorema dual.*

Es evidente que el subconjunto  $M'$  del conjunto ordenado  $M$  es el conjunto ordenado y si es lineal, el subconjunto  $M'$  es *cadena*  $M'$  en  $M$ . Una de las características numéricas importantes de la cadena  $M'$  es su *longitud*  $l$ , igual a  $|M'| - 1$ , donde  $|M'|$  es la potencia del portador del subconjunto linealmente ordenado  $M'$ . Cada cadena de longitud  $l$  es isomorfa a la cadena de los números reales  $1, 2, \dots, l + 1$ .

Llámase *altura*  $d(m_i)$  del elemento  $m_i$  de un conjunto ordenado  $M$  el máximo de la longitud  $l_{\max}$  de las cadenas  $m_0 < m_1 < \dots < m_i$  en  $M$ , para los cuales  $m_i$  es el elemento máximo ( $m_0$  es el elemento mínimo del conjunto  $M$ ).

Se llama *longitud*  $d(M)$  de un conjunto ordenado  $M$  el máximo de longitudes de las cadenas en  $M$ . En otras palabras, se llama longitud  $d(M)$  de un conjunto ordenado el máximo de alturas  $d_i(m_i)$  de sus elementos  $d(M) = \max d_i(m_i), m_i \in M$ .

Se denomina *cota superior mínima* una cota superior que es menor que cualquier otra cota superior. La *cota inferior máxima* se define de manera análoga. Es obvio, que un subconjunto de un conjunto ordenado no tiene más de una cota superior mínima y una cota inferior máxima.

Otra relación binaria importante es la relación de *equivalencia*  $\infty$ . La relación binaria  $\infty$  que posee propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se llama relación de *equivalencia*.

Denominaremos *clase de equivalencia*  $K(m_a)$  del elemento  $m_a$  un conjunto de todos los elementos  $m_i$ , cada una de los cuales está en relación de equivalencia con este elemento (conjunto de elementos equivalentes)  $K(m_a) = \{m_i / m_i \infty m_a\}$ .

Según la propiedad reflexiva de la relación  $\infty$ ,  $m_a \in K(m_a)$ . De la propiedad transitiva de la relación de equivalencia  $(m_a \infty m_b) \& (m_b \infty m_c) \rightarrow m_a \infty m_c$  se desprende que  $K(m_a) \supset K(m_b)$  y de la propiedad simétrica se deduce que  $m_a \infty m_b \rightarrow K(m_a) = K(m_b)$ .

Las dos clases de equivalencia diferentes  $K(m_x)$  y  $K(m_y)$ ,  $m_x \notin m_y$ , no se intersecan:  $K(m_x) \cap K(m_y) = \emptyset$ , ya que en caso contrario éstas coincidirían. En efecto, sea que existe un elemento  $m_z$  perteneciente a estas clases:  $m_z \in K(m_x)$  y  $K(m_y)$ , pero entonces, debido a las propiedades dadas anteriormente,  $K(m_x) = K(m_z) = K(m_y)$ . O sea, si existe un elemento  $m_z$  perteneciente a dos clases de equivalencia  $K(m_x)$  y  $K(m_y)$ , entonces  $K(m_x) = K(m_y)$ , lo que se puede escribir como

$$(\exists m_z \in K(m_x), K(m_y)) \rightarrow K(m_x) = K(m_y),$$

empleando la designación  $\exists$  en lugar de la palabra "existe" ( $\exists$  es la primera letra vuelta de la palabra inglesa *Existi*, es decir, existe).

La representación del conjunto  $M$  en forma de subconjuntos que no se intersecan dos a dos  $\{M_i\}$  la denominaremos *partición* de este conjunto:

$$\bigcup_i M_i = M, M_{i_a} \cap M_{i_b} = \emptyset, i_a \neq i_b.$$

Por lo tanto, las clases de equivalencia forman una partición del conjunto. En calidad de prueba para reconocer la relación de equivalencia, prefijada por una matriz de adyacencia, puede aparecer la reducción de la matriz de adyacencia a la forma representada en la fig. 1.10. Tal reducción se reali-

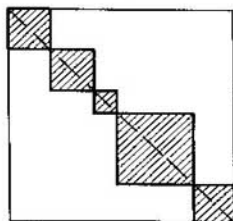


Fig. 1.10

za empleando la permutación de filas (columnas). En la fig. 1.10, se sitúan junto a la diagonal principal las submatrices compuestas de unidades (están rayadas), los otros elementos de la matriz son iguales a cero. Toda submatriz rayada corresponde a una clase de equivalencia.

## § 1.4. Retículo

Al usar la noción del conjunto parcialmente ordenado, definamos el concepto del retículo. Llámase *retículo* un conjunto ordenado  $\langle M, \leq \rangle$ , en el cual cualesquiera dos elementos  $m_i, m_j$  tienen cota inferior máxima o *intersección*  $m_i \cap m_j$  y cota superior mínima o *unión*  $m_i \cup m_j$ . Es obvio, que el conjunto ordenado  $\bar{M}$ , dual al retículo  $M$ , es el retículo, en el cual la intersección y la unión cambian de papeles.

Un conjunto ordenado, en el cual cualquier subconjunto tiene cotas inferior máxima y superior mínima se denomina *retículo completo*. Evidentemente, si en retículo todas las cadenas son finitas, cualquier subconjunto en éste tiene cotas superior mínima e inferior máxima.

En calidad de ejercicio hallemos la intersección y la unión de ciertos elementos del retículo determinado por el diagrama de Hasse  $H$  (véase la fig. 1.9, a):

$$\begin{aligned} \{y\} \cup \{x\} &= \{y, x\}, & 1 \cup \emptyset &= 1, \\ \{y\} \cap \{a, y\} &= \{y\}, & \{y, x\} \cap \{a\} &= \emptyset \\ \{y, x\} \cap \{a, x\} &= \{x\}, & \{y\} \cup \{a, x\} &= 1. \end{aligned}$$

El retículo puede ser definido también como el álgebra  $A = \langle M, \cup, \cap \rangle$ , cuya signatura posee las siguientes propiedades:

*idempotente*

$$m \cup m = m, \quad m \cap m = m; \tag{1.1}$$

*conmutativa*

$$m_i \cup m_j = m_j \cup m_i, \quad m_i \cap m_j = m_j \cap m_i; \tag{1.2}$$

*asociativa*

$$\begin{aligned} (m_i \cup m_j) \cup m_k &= m_i \cup (m_j \cup m_k), \\ (m_i \cap m_j) \cap m_k &= m_i \cap (m_j \cap m_k); \end{aligned} \tag{1.3}$$

*de absorción*

$$m_i \cup (m_i \cap m_j) = m_i, \quad m_i \cap (m_i \cup m_j) = m_i. \tag{1.4}$$

Aquí  $\cup$  es la operación de determinar la *cota superior mínima* de elementos (*de unión*);  $\cap$  es la operación de determinar la *cota inferior máxima* de elementos (*de intersección*).

Ahora demostremos que las dos definiciones del concepto *retículo* son equivalentes. Supongamos que sea dado un retículo definido por medio de un conjunto parcialmente ordenado. Entonces, es obvio, que se cumplen las propiedades idempotente y conmutativa. Comprobemos si se cumple la propiedad asociativa, por ejemplo, para la unión  $\cup$ . Como  $\cup$  es una cota

superior mínima, se tiene

$$\begin{aligned}(m_i \cup m_j) \cup m_k &\geq m_i \cup m_j \geq m_i, \\ (m_i \cup m_j) \cup m_k &\geq m_i \cup m_j \geq m_j, \\ (m_i \cup m_j) \cup m_k &\geq m_k.\end{aligned}$$

De modo análogo tenemos:

$$\begin{aligned}(m_i \cup m_j) \cup m_k &\geq m_j \cup m_k, \\ (m_i \cup m_j) \cup m_k &\geq m_i \cup (m_j \cup m_k), \\ m_i \cup (m_j \cup m_k) &\geq (m_i \cup m_j) \cup m_k.\end{aligned}$$

La propiedad asociativa queda demostrada.

Demostremos la validez de la propiedad de absorción:

$$m_i \cup (m_i \cap m_j) \geq m_i,$$

ya que el resultado de la unión es la cota superior mínima;  $m_i \leq m_i$ ,  $m_i \geq m_i \cap m_j$  puesto que  $m_i \cap m_j$  es la cota inferior máxima. Entonces,  $m_i \geq m_i \cup (m_i \cap m_j)$ , porque  $\cup$  es la cota superior mínima. Debido al principio de dualidad, la afirmación es válida también para la intersección.

Ahora, sea que el reticulo está definido como álgebra con operaciones  $\cap$  y  $\cup$  que satisfacen las condiciones (1.1)—(1.4). Señalemos de antemano que si  $m_i, m_j \in M$ , entonces las igualdades

$$m_i \cap m_j = m_i, \quad m_i \cup m_j = m_j \tag{1.5}$$

pueden o no pueden cumplirse simultáneamente. En efecto, si  $m_i \cap m_j = m_i$ , debido a las propiedades (1.4) y (1.2) se tiene

$$m_i \cup m_j = (m_i \cap m_j) \cup m_j = m_j;$$

si  $m_i \cup m_j = m_j$ , según (1.4)  $m_i \cap m_j = m_i \cap (m_i \cup m_j) = m_i$

Si para los elementos  $m_i$  y  $m_j$  tienen lugar las igualdades (1.5), pongamos  $m_i \leq m_j$ . De esta manera, en el conjunto  $M$  está introducida la ordenación parcial. En efecto, en virtud de la propiedad (1.1),  $m_i \leq m_j$ .

Luego, si  $m_i \leq m_j$  y  $m_j \leq m_k$ , o sea  $m_i \cap m_j = m_i$ ,  $m_j \cap m_k = m_j$ , entonces debido a la propiedad (1.3),  $m_i \cap m_k = (m_i \cap m_j) \cap m_k = m_i \cap (m_j \cap m_k) = m_i \cap m_j = m_i$ , es decir,  $m_i \leq m_k$ .

En fin, si  $m_i \leq m_j$  y  $m_j \leq m_i$ , o sea,  $m_i \cap m_j = m_i$ ,  $m_j \cap m_i = m_j$ , según la propiedad (1.2),  $m_i = m_j$ .

Demostremos que se cumple la condición de la cota inferior máxima. De la igualdad  $(m_i \cap m_j) \cap m_i = m_i \cap (m_i \cap m_j) = (m_i \cap m_i) \cap m_j = m_i \cap m_j$  se deduce que  $m_i \cap m_j \leq m_i$ . De modo análogo tenemos  $m_i \cap m_j \leq m_j$ .

Sin embargo, si en  $M$  tomamos un elemento arbitrario  $m_\alpha$  que satisface las condiciones  $m_\alpha \leq m_i$ ,  $m_\alpha \leq m_j$ , o sea,  $m_\alpha \cap m_i = m_\alpha$ ,  $m_\alpha \cap m_j = m_\alpha$ , se tiene  $m_\alpha \cap (m_i \cap m_j) = (m_\alpha \cap m_i) \cap m_j = m_\alpha \cap m_j = m_\alpha$ , de donde  $m_\alpha \leq m_i \cap m_j$ . Por consiguiente, el elemento  $m_i \cap m_j$  es la cota inferior máxima.

En virtud del principio de dualidad obtenemos que  $m_i \cup m_j$  es la cota superior mínima en el álgebra a examinar.

En calidad de ejercicio calculemos el valor de cierta fórmula  $F$  considerando el retículo como el álgebra. Tenemos

$$F(a, b) = ((a \cap (a \cup b)) \cap ((a \cup (a \cap b)) \cap (a \cup b))) \cup 0 \cup a = (a \cap (a \cap (a \cup b))) \cup 0 \cup a = (a \cap a) \cup 0 \cup a = a \cup 0 \cup a = a \cup a = a.$$

Al simplificar  $F(a, b)$  habían empleadas las propiedades (1.4), (1.1) y (1.2).

Aquí y a continuación denominaremos *cero* y *unidad estructurales* 0 y 1 en el retículo.

Definamos la propiedad distributiva en un retículo. Se llama *subretículo*  $A'$  del retículo  $A$  un subconjunto del retículo  $A$  que junto con cada par de elementos  $m_i, m_j$  de  $A$  contiene, también,  $m_i \cup m_j$  y  $m_i \cap m_j$ . Llámase *intervalo*  $I$ , determinado por los elementos  $m_\alpha$  y  $m_\beta$  en el retículo  $A$ , un subretículo  $A'$  del retículo  $A$  con el elemento máximo  $m_\beta$  y el elemento mínimo  $m_\alpha$ :

$$I = [m_\alpha, m_\beta] = \{m_i \in A' / m_\alpha \leq m_i \leq m_\beta\}.$$

En un retículo  $A$  con el cero y la unidad estructurales dos elementos  $m_\alpha$  y  $m_\beta$  se denominan *complementarios* si

$$m_\alpha \cap m_\beta = 0, m_\alpha \cup m_\beta = 1.$$

Un elemento  $\bar{m}$  complementario a  $m$  se denomina también *complemento* del elemento  $m$  en el retículo  $A$ . Dos elementos que tienen un complemento común en el retículo  $A$  se llaman *ligados* en  $A$ .

Una clase importante de retículos representa la de retículos distributivos. El retículo  $A$  se llama *distributivo*, si satisface las siguientes identidades:

$$(m_i \cup m_j) \cap m_k = m_i \cap m_k \cup m_j \cap m_k$$

y

$$m_k \cap (m_i \cup m_j) = m_k \cap m_i \cup m_k \cap m_j$$

para todos los  $m_i, m_j, m_k \in M$ .

Según la propiedad conmutativa de intersección es suficiente cumplir una de estas identidades para definir el retículo distributivo.

Citemos el *criterio de distributividad de un retículo*: el retículo  $A$  es *distributivo* si, y sólo si, en todo intervalo  $I$  del retículo  $A$  cualesquiera dos elementos conexos en  $I$  son iguales.

Este criterio se lo puede expresar en una forma más cómoda para cálculos, si se muestra la estructura de subretículos, cuya existencia pone el retículo fuera de la clase de los distributivos.

Introduzcamos el concepto de retículos de Dedekind (modulares). El retículo  $A$  se llama *de Dedekind* si, y sólo si,  $(m_i \cup m_j) \cap m_k = (m_j \cap m_k) \cup m_i$  para todos los  $m_i, m_j, m_k \in A$ , tales que  $m_j \leq m_k$ .

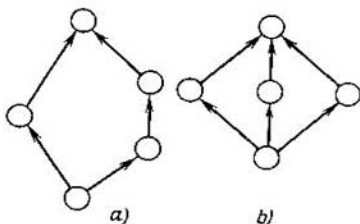


Fig. 1.11

*Criterio del carácter de Dedekind de un retículo: el retículo  $A$  es de Dedekind si, y sólo si, éste no contiene subretículo isomorfo al retículo  $A_m$  (fig. 1.11, a).*

El retículo  $A_m$  contiene un elemento de altura nula, dos de altura unidad, uno de altura 2 y otro de 3.

Al emplear el criterio de modularidad de retículos formulemos el criterio de distributividad en una forma más cómoda para cálculos: *un retículo es distributivo si, y sólo si, no contiene subretículo isomorfo a  $A_m$ , o sea, es de Dedekind, y no contiene subretículo isomorfo al subretículo  $A_g$  (fig. 1.11, b).* El retículo  $A_g$  contiene tres cadenas de longitud 2 compuestas de un elemento de altura nula, tres elementos de altura unidad y de un elemento de altura 2.

El retículo  $A$  representado por el diagrama de Hasse  $H$  (véase la fig. 1.9, a) es de Dedekind y también distributiva.

En un retículo  $A$  con el cero y la unidad estructurales, en el cual cada elemento  $m$  tiene el complemento  $\bar{m}$ , puede considerarse dada la operación monaria  $f_1(m) = \bar{m}$ . El retículo  $A$  se denomina *retículo con complementos*, si posee el cero estructural y una operación monaria  $f_1(m) = \bar{m}$ , tal que

$$\bar{\bar{m}} = m; \quad (1.6)$$

$$\overline{m_i \cup m_j} = \bar{m}_i \cap \bar{m}_j; \quad (1.7)$$

$$m \cap \bar{m} = 0. \quad (1.8)$$

En virtud de (1.6) y (1.7), una de las operaciones  $\cup, \cap$  puede ser representada por medio de otra. Por consiguiente, el retículo con complementos puede definirse como álgebra, cuya signatura se compone de  $\cup, \bar{\phantom{x}}$ .

Señalemos unos corolarios de las identidades (1.6)—(1.8). Tenemos  $0 \leq m$  para todos los  $m \in M$ ; por consiguiente,  $0 \cap m = 0$ .

Si hacemos  $1 = \bar{0}$  y  $0 \cap m = 0$ ,  $0 \cup m = m$  insertamos en (1.7), obtenemos  $1 \cap m = m$ ,  $1 \cup m = 1$ . Por consiguiente, 1 es el elemento máximo del retículo, o sea, es la unidad estructural.

Según las identidades (1.8) y (1.7).

$$m \cup \bar{m} = 1.$$

Un retículo distributivo con complementos se denomina *álgebra de Boole*.

Se denomina *isomorfismo*  $\eta$  entre las álgebras  $A_1 = \langle M_1, S_1 \rangle$  y  $A_2 = \langle M_2, S_2 \rangle$  una correspondencia biunívoca entre los elementos de portadores y signaturas, tal que

$$f_i(m_{a_1}, m_{a_2}, \dots, m_{a_k}) = m_{a_i} \triangleq \eta(f_i)(\eta(m_{a_1}), \eta(m_{a_2}), \dots,$$

$$\eta(m_{a_{k+1}})) = \eta(m_{a_k}),$$

$$m_{a_j} \in M_1, \eta(m_{a_j}) \in M_2, j = 1, 2, \dots, k, f_i \in S_1, \eta(f_i) \in S_2.$$

Las álgebras, entre las cuales existe isomorfismo, se llaman *isomorfas*. Todas las leyes del álgebra  $A_1$  son válidas también en el álgebra  $A_2$  isomorfa a la primera.

**Teorema 1.2. (teorema de Stone).** *El álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Cantor.*

Para las álgebras consideradas tiene lugar el siguiente isomorfismo:

$$a \cup b \leftrightarrow M_a \cup M_b, a \cap b \leftrightarrow M_a \cap M_b, \bar{a} \leftrightarrow \overline{M_a},$$

donde en los miembros izquierdos de las expresiones figuran las operaciones teórico-reticulares y en los derechos, de la teoría de conjuntos. Estas operaciones tienen la misma denotación. Por eso, para distinguirlas designaremos los argumentos de operaciones teórico-reticulares mediante letras minúsculas y los argumentos de operaciones de la teoría de conjuntos por medio de letras mayúsculas del alfabeto latino.

En la fig. 1.12 se representa un retículo distributivo con complementos, en el cual los resultados de la actuación de las operaciones teórico-reticulares de unión, intersección y complemento se determinan en las tablas (tablas 1.2, a, b, y c).

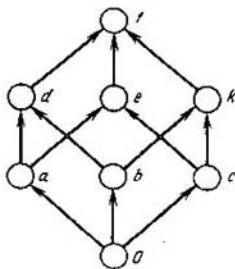


Fig. 1.12



Tabla 1.2,  $a \alpha \cup \beta$ 

$\alpha$	$\beta$							
	0	a	b	c	d	e	k	1
0	0	a	b	c	d	e	k	1
a	a	a	d	e	d	e	1	1
b	b	d	b	k	d	1	k	1
c	c	e	k	c	1	e	k	1
d	d	d	d	1	d	1	1	1
e	e	e	1	e	1	e	1	1
k	k	1	k	k	1	1	k	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 1.2,  $b \alpha \cap \beta$ 

$\alpha$	$\beta$							
	0	a	b	c	d	e	k	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	a	a	0	a
b	0	0	b	0	b	0	b	b
c	0	0	0	c	0	c	c	c
d	0	a	b	0	d	a	b	d
e	0	a	0	c	a	e	c	e
k	0	0	b	c	b	c	k	k
1	0	a	b	c	d	e	k	1

Tabla 1.2, c

$\alpha$	$\bar{\alpha}$	Comentarios
0	1	$0 \cup 1 = 1, 0 \cap 1 = 0$
a	k	$a \cup k = 1, a \cap k = 0$
b	e	$b \cup e = 1, b \cap e = 0$
c	d	$c \cup d = 1, c \cap d = 0$
e	b	$e \cup b = 1, e \cap b = 0$
k	a	$k \cup a = 1, k \cap a = 0$
1	0	$1 \cup 0 = 1, 1 \cap 0 = 0$

A los elementos  $\alpha$  y  $\bar{\alpha}$  les corresponden los vértices del diagrama  $H$  que distan maximalmente (en el sentido de la longitud de la cadena que une estos elementos).

### § 1.5. Modelo. Álgebra de relaciones

Definamos la *relación n-aria* análogamente a la relación binaria.

Un producto cartesiano de  $n$  conjuntos  $M$ , iguales entre sí, se denomina *n-ésima potencia  $M^n$  del conjunto  $M$* . Por *relación n-aria  $T$*  en el conjunto  $M$  se comprende un subconjunto  $T$  de su *n-ésima potencia  $T \subset M^n$* . Si elementos  $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n} \in M, (m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) \in T$ , se dice que los elementos  $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}$  están en la relación  $T$ . Cualquiera relación *n-aria* puede ser prefijada en la forma de una *lista*, cuyos elementos son las sucesiones (*cortejos*) determinadas por esta relación.

Consideremos la propiedad *simétrica* de relaciones *n-arias* que permiten emplear eficazmente relaciones *n-arias* para la formalización de muchos problemas prácticos. Se llama *simétrica* tal relación *n-aria  $T$*  en el conjunto  $M$  tal, que si  $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) \in T$ , entonces cualesquiera sucesión  $(m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_n})$  obtenida de  $(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n})$  permutando los elementos está también en la relación  $T$ :  $(m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_n}) \in T$ .

En esencia, una relación *n-aria* que posee la propiedad simétrica prefija los subconjuntos compuestos de  $n$  elementos, es decir, subconjuntos de potencia  $n$ . A continuación, una relación *n-aria* que tiene la propiedad simétrica la denominaremos *relación S-rica (S-relación)* y, si se trata de una *S-relación*, simplemente relación *S* o relación verbal. Los elementos de un conjunto  $M$ , en el cual está determinada una *S-relación*, los llamaremos letras y los subconjuntos determinados, por la *S-relación*, los denominaremos palabras y los designaremos con la letra griega  $\mu_i$  con el índice inferior.

Se puede prefijar *S-relación* en formas más cómodas: mediante la matriz de incidencia y el grafo modelo (mografo).

Llámase *matriz de incidencia  $Q = [q_{ij}]$*  una matriz de dos dimensiones, a cada columna de la cual le corresponde biunívocamente una letra, a cada

fila, una palabra determinada por la  $S$ -relación y

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } m_j \in \mu_i \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la 3-relación en el conjunto  $M = \{a, b, c, j, m, o\}$  que determina las palabras  $\mu_1 = \{a, j, o\}$ ,  $\mu_2 = \{a, m, o\}$ ,  $\mu_3 = \{o, c, a\}$ ,  $\mu_4 = \{b, o, j\}$  puede ser fijada, empleando la matriz de incidencia  $Q$ , del modo siguiente:

$$Q = \begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & j & m & o \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Si la relación  $S$  determina el subconjunto  $M' \subset M^S$ , llamaremos *potencia* de la relación  $S$  el número  $s$ .

No se puede fijar la  $S$ -relación de potencia arbitraria empleando un grafo, cuyo portador coincide con el conjunto de letras (véase el teorema 1.3).

Diremos que un arco  $u$  es *incidente* a un vértice  $v$ , si  $v$  es su origen o su extremo. Llámase *subgrafo  $G'$  de un grafo  $G$*  el grafo  $G'$  obtenido del grafo  $G$  después de eliminar unos vértices y sus arcos incidentes. Un grafo se llama *completo*, si todos sus vértices son adyacentes dos a dos.

**Teorema 1.3.** Si por lo menos tres palabras distintas determinadas por una relación  $S$  corresponden a un subgrafo completo de un grafo  $G$  el grafo  $G$  no fija la relación  $S$ .

□ Al fijar una relación verbal por un grafo asociaremos la palabra determinada con un subgrafo completo del grafo  $G$ . Entonces, el teorema queda obvio. En efecto, es suficiente considerar el siguiente ejemplo. Sea que una 3-relación en el conjunto  $M = \{a, s, o, l\}$  determina las palabras  $\mu_1 = \{s, o, l\}$ ,  $\mu_2 = \{l, o, a\}$ ,  $\mu_3 = \{a, s, o\}$ , a las cuales corresponde el grafo  $G$  representado en la fig. 1.13, *a*. Esto es un grafo completo de cuatro vértices. Éste puede fijar la palabra  $\{a, s, o, l\}$  o las palabras  $\{s, o, l\}$ ,  $\{l, o, a\}$ ,  $\{a, o, s\}$  o las palabras  $\{s, o\}$ ,  $\{l, o\}$ ,  $\{s, l\}$ ,  $\{a, l\}$ ,  $\{s, a\}$ ,  $\{a, o\}$ , es decir, tiene lugar la multiformalidad. ■

Para fijar unívocamente las relaciones verbales, es necesario poner en correspondencia a cada letra (vértice) un conjunto de identificadores de las palabras que contienen esa letra. Entonces, a cualquiera palabra le corresponde biunívocamente un subgrafo completo, a cada vértice del cual corresponde el identificador de esta misma palabra. Tal subgrafo completo, correspondiente a la palabra, lo denominaremos a continuación *elemento*. El proceso de poner en correspondencia a cada letra un conjunto de identificadores de las palabras que contienen esa letra, lo llamaremos *modelización del grafo  $G$* . Como resultado de modelización del grafo  $G$ , a

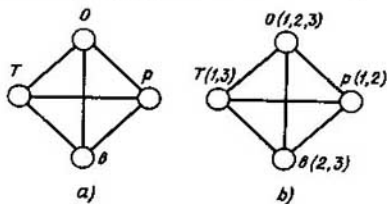


Fig. 1.13

cada vértice corresponde biunívocamente una letra ponderada por un conjunto de identificadores de las palabras que la contienen, con ello, dos vértices son *adyacentes* (se unen mediante una línea no orientada es decir, la *arista*), si les corresponde por lo menos un identificador común. Una función obtenida por este modo en el grafo, cuyo campo de definición son los vértices del grafo y cuyo campo de valores son los conjuntos de identificadores de las palabras, la denominaremos *grafo modelo (mografo)* y la denotaremos con  $G^M = \langle (V, W), U \rangle$ . Aquí  $W$  es el conjunto de identificadores de palabras.

Los mografos  $G_1^M$  y  $G_2^M$  que prefijan, respectivamente, las relaciones  $S_1 = \{\{s, o, l\}, \{l, o, a\}, \{a, o, s\}\}$  en el conjunto  $M_1 = \{a, s, o, l\}$  y  $S_2 = \{\underbrace{\{a, j, o\}}_1, \underbrace{\{a, m, o\}}_2, \underbrace{\{o, c, a\}}_3, \underbrace{\{b, o, j\}}_4\}$  en el conjunto  $M_2 = \{a, b, c, j, m, o\}$  se ofrecen en las figs. 1.13, b y 1.14, a.

Para prefijar  $S$ -relaciones se utiliza también el término *hipergrafo*. Cuando lo representan geoméricamente, sus letras se ponen en correspondencia biunívoca a los vértices y sus palabras, a los círculos de Euler que abarcan las letras que integran la palabra correspondiente.

La interpretación geométrica del hipergrafo que determina la colección  $\langle M, S_2 \rangle$ ,  $M = \{a, b, c, j, m, o\}$ ,

$S_2 = \{\{a, j, o\}, \{a, m, o\}, \{o, c, a\}, \{b, o, j\}\}$

está representada en la fig. 1.14 b.

Empleando un grafo se puede prefijar unívocamente una  $S$ -relación, si en calidad de portador del grafo tomamos tanto el conjunto de letras, como el conjunto de identificadores de palabras. Tal representación de  $S$ -relación se realiza por medio de un grafo *de dos partes*.

Un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  se denomina de *dos partes*, si su portador está partido en dos subconjuntos  $V^+$ ,  $V^-$  que no tienen vértices comunes y el origen de cada arco  $u \in U$  pertenece al subconjunto  $V^+$ , y sólo a él, mientras que su extremo pertenece al subconjunto  $V^-$ , y sólo a él. Al prefijar  $S$ -relaciones a los elementos del subconjunto  $V^+$  en un grafo de dos partes  $G = \langle V, U \rangle$  se les ponen en correspondencia biunívoca las letras, a

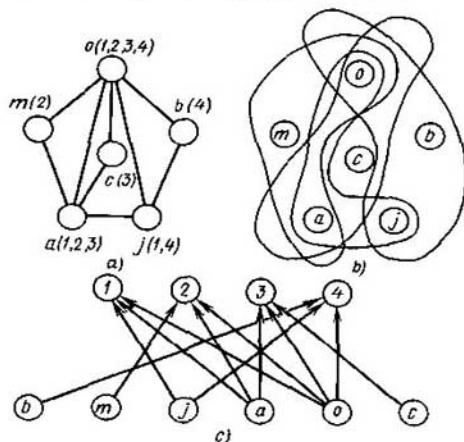


Fig. 1.14

los elementos del subconjunto  $V^-$ , es decir, los identificadores de las palabras y  $(v_\alpha, v_\beta) \in U$  si, y sólo si, el vértice  $v_\alpha$  corresponde a una letra que figura en la palabra  $v_\beta$ . El grafo de dos partes que prefija la 3-relación  $S_\beta = \underbrace{\{\{a, j, o\}\}}_1, \underbrace{\{\{a, m, o\}\}}_2, \underbrace{\{\{o, c, a\}\}}_3, \underbrace{\{\{b, a, j\}\}}_4$  en el conjunto  $\{a, b, c,$

$j, m, o\}$  está representado en la fig. 1.14 c.

Uno de los principales conceptos de la matemática discreta es el concepto de modelo. Llámase *modelo*  $\Psi$  una colección del conjunto  $M$  con las relaciones prefijadas en él.

$$S = \{R_{11}, R_{12}, \dots, R_{1n_1}, R_{21}, R_{22}, \dots, R_{2n_2}, \dots, R_{m1}, R_{m2}, \dots, \dots, R_{mn_n}\},$$

donde el conjunto  $M$  es el *portador del modelo* y las relaciones prefijadas  $R_{ia}, R_{ia} \in M^i$  forman la *signatura del modelo*  $\Psi = \langle M, S \rangle$ .

La potencia del portador determina el *tipo-ario de la relación*. Dos relaciones  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  con la misma potencia se llaman *compatibles según la unión* o simplemente *compatibles*.

Está claro que la operación  $n$ -ádica  $f_n(m_1, m_2, \dots, m_n) = m_{n+1}$  puede ser examinada como una relación  $(n + 1)$ -aria  $R_{n+1}$ .

Denominaremos, según A. I. Máltsev, *sistema algebraico* una colección del conjunto  $M$  con las operaciones y relaciones prefijadas en él.

Un caso particular del sistema algebraico es *álgebra de relaciones* y su extensión, *álgebra relacional*.

Examinemos el álgebra de relaciones, cuyo portador es un conjunto de relaciones y la signatura son las operaciones de unión, intersección, diferencia y del producto cartesiano extenso de relaciones.

La unión  $R_\alpha \cup R_\beta$  de dos relaciones compatibles  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  es el conjunto de todos los cortejos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a una de estas relaciones. La unión de las relaciones

$$R_\alpha = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e)\} \text{ y}$$

$$R_\beta = \{(a, b, d), (b, d, e), (c, d, e)\} \text{ es}$$

$$R_\alpha \cup R_\beta = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e), (b, d, e), (c, d, e)\}.$$

Las relaciones consideradas son compatibles, ya que sus potencias son iguales:  $s(R_\alpha) = s(R_\beta) = 3$ ,  $R_\alpha, R_\beta \subset M^3$ ,  $M = \{a, b, c, d, e\}$ .

La intersección  $R_\alpha \cap R_\beta$  de dos relaciones compatibles  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  es el conjunto de todos los cortejos pertenecientes tanto a la relación  $R_\alpha$ , como a la relación  $R_\beta$ . La intersección de las relaciones  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  es

$$R_\alpha \cap R_\beta = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e)\} \cap \{(a, b, d),$$

$$(b, d, e), (c, d, e)\} = \{(a, b, d)\}.$$

La diferencia  $R_\alpha \setminus R_\beta$  de dos relaciones compatibles  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  es el conjunto de todos los cortejos pertenecientes a la relación  $R_\alpha$  y no pertenecientes a la  $R_\beta$ . Así, por ejemplo,  $R_\alpha \setminus R_\beta = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e)\} \setminus \{(a, b, d), (b, d, e), (c, d, e)\} = \{(a, b, c), (b, c, e)\}$ .

El producto cartesiano extenso  $R_\alpha \times R_\beta$  de dos relaciones  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  es el conjunto de todos los cortejos  $\pi$  tales que  $\pi$  es concatenación del cortejo  $a \in R_\alpha$  y del cortejo  $b \in R_\beta$  (concatenación de cortejos  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  y  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  es el cortejo  $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$ ). Por ejemplo, para las relaciones examinadas  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  el producto cartesiano extenso es

$$R_\alpha \times R_\beta = \{(a, b), (c, d), (a, e)\} \times \{(a, b, c),$$

$$(b, d, e)\} = \{(a, b, a, b, c), (a, b, b, d, e), (c, d, a, b, c),$$

$$(c, d, b, d, e), (a, e, a, b, c), (a, e, b, d, e)\}.$$

Los conceptos del modelo y del álgebra de relaciones tienen amplio empleo para formalizar los objetos reales. Consideremos cómo se utiliza el álgebra de relaciones para elaborar el apoyo de información, es decir, una base relacional de datos.

La construcción de una base relacional de datos se asienta en una tabla bidimensional, cada columna de la cual corresponde a un dominio (o a un atributo correspondiente a una parte del dominio) y cada fila, a un cortejo de atributos que están en la relación  $R$ .

Consideremos una relación 5-aria  $R_5$  (exámenes) (tabla 1.3).

Tabla 1.3

$R_5$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$
1	K5-01	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	03 ENERO	AULA 210
2	K5-02	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. PETROV	03 ENERO	AULA 211
3	K5-03	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	03 ENERO	AULA 211
4	K5-04	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	05 ENERO	AULA 210
5	K5-01	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	09 ENERO	AULA 210
6	K5-02	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	09 ENERO	AULA 211
7	K5-03	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	10 ENERO	AULA 211
8	K5-04	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV	10 ENERO	AULA 210

La tabla 1.3 determina una relación de un modelo relacional de datos. La relación  $R_5$  es un subconjunto del producto cartesiano  $D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4 \times D_5$ , cuyo factor es el dominio  $D_i$ . Los elementos del dominio  $D_i$  representan valores de atributos. El dominio  $D_1$  (grupo) contiene valores K5-01, K5-02, K5-03 y K5-04:

$$D_1 = \{K5-01, K5-02, K5-03, K5-04\};$$

de modo análogo tenemos dominios:

$D_2$  (asignatura):

$D_2 = \{\text{TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS, LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA, FÍSICA, LENGUAJES ALGORÍTMICOS}\};$

$D_3$  (examinador):

$D_3 = \{\text{PROF. IVANOV, PROF. PETROV, PROF. SÍDOROV}\};$

$D_4$  (fecha):

$D_4 = \{\text{ENERO 03, ENERO 05, ENERO 09, ENERO 10}\};$

$D_5$  (aula):

$D_5 = \{\text{AULA 210, AULA 211}\}.$

El orden de las columnas está fijado, las filas, en el caso común, se sitúan arbitrariamente. Las cifras de la primera columna 1, 2, ..., 8 identifican los elementos de la relación  $R_5$ .

Definamos *álgebra relacional* para transformar relaciones. El portador del álgebra relacional es un conjunto de relaciones. La signatura, excepto las operaciones introducidas (la unión, la intersección, la diferencia y el producto cartesiano extenso de relaciones) incluye operaciones especiales en las relaciones: elección, proyección y agrupación.

La operación de *elección* es un procedimiento de la construcción de un subconjunto "horizontal" de una relación, o sea, un subconjunto de cortejos que poseen una propiedad planteada.

**Ejemplo 1.3.** Empleando la operación de elección construir una relación  $R_5'$  (el horario de exámenes del Prof. Ivanov). El resultado de la operación de elección son las filas, en las cuales el dominio  $D_3$  se representa por el valor Prof. Ivanov; son las filas 1, 6 y 8 (tabla 1.4).

Tabla 1.4

$R_5$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$
1	K5-01	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	03 ENERO	AULA 210
6	K5-02	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	09 ENERO	AULA 211
8	K5-04	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV	10 ENERO	AULA 210

Para definir proyecciones de las relaciones en el álgebra relacional el conjunto se parte en dos subconjuntos en el caso de la relación binaria y en  $n$  subconjuntos en el caso de la relación  $n$ -aria:

$$R_2 \subset M^2, M = A \cup B, A \cap B = \emptyset, R_2 \subset A \times B;$$

$$R_n \subset M^n, M = \bigcup_{i=1}^n A_i; A_{i_a} \cap A_{i_b} = \emptyset,$$

$$i_a, i_b (i_a \neq i_b) \in \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, R_n \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

Llámase *proyección*  $\text{Pr}(R_2/A)$  de una relación binaria  $R_2, R_2 \subset A \times B$  sobre  $A$  un conjunto de elementos  $\{a_i/(a_i, b_i) \in R_2\}$ .

Llámase *proyección*  $\text{Pr}(R_n/A_i, A_{i_2}, \dots, A_{i_m})$  de una relación  $n$ -aria  $R_n \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n, n \geq m$ , sobre  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$  un conjunto de cortejos  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ , donde  $a_{i_1} \in A_{i_1}, a_{i_2} \in A_{i_2}, \dots, a_{i_m} \in A_{i_m}$ , cada uno de los cuales es una parte de un elemento de la relación  $n$ -aria  $R_n$ .

La operación de proyección determina la construcción de un subconjunto "vertical" de una relación, es decir, de un conjunto de un subconjunto de cortejos que se obtiene eligiendo unos y excluyendo otros dominios.

**Ejemplo 1.4.** Una proyección  $\text{Pr}(R_5/D_2, D_3)$  engendra un conjunto de pares, cada uno de los cuales determina la asignatura y al examinador (tabla 1.5).



Tabla 1.5.

$R_2$	$D_2$	$D_3$
	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV
	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. PETROV
	FÍSICA	PROF. SÍDOROV
	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV
	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV

En la tabla 1.5, las filas iguales se unen en una sola.

La *operación de agrupación* de dos tablas que tienen un dominio común permite construir una tabla, cada fila de la cual se forma uniendo dos filas de las tablas de partida. En las tablas prefijadas se toman las filas de un mismo valor que integran un dominio común; una columna se pone en correspondencia al dominio común.

**Ejemplo 1.5.** Por dos tablas prefijadas (tablas 1.6, *a* y 1.6, *b*) hallemos el resultado de la operación de agrupación según el dominio  $D_1$  (tabla 1.6, *c*).

Tabla 1.6, *a*

$R_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$
	K5-01	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	03 ENERO	AULA 210
	K5-02	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. PETROV	03 ENERO	AULA 211
	K5-03	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	05 ENERO	AULA 211
	K5-04	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	05 ENERO	AULA 210

Tabla 1.6, *b*

$R_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$
	K5-01	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	09 ENERO	AULA 210
	K5-04	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV	10 ENERO	AULA 210

Tabla 1.6, a

$R_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$
	K5-02	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	09 ENERO	AULA 211
	K5-03	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	10 ENERO	AULA 211

Tabla 1.6, c

$R_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D_5$	$D_2'$	$D_3'$	$D_4'$	$D_5'$
	K5-01	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	03 ENERO	AULA 210	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	09 ENERO	AULA 210
	K5-02	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. PETROV	03 ENERO	AULA 211	TEORÍA DE LOS AUTÓMATAS	PROF. IVANOV	09 ENERO	AULA 211
	K5-03	FÍSICA	PROF. SÍDOROV	05 ENERO	AULA 211	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	10 ENERO	AULA 211
	K5-04	LENGUAJES ALGORÍTMICOS	PROF. PETROV	05 ENERO	AULA 210	LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA	PROF. IVANOV	10 ENERO	AULA 210

De manera análoga, como por la condición de "igualdad", se puede definir la operación de agrupación por otras condiciones de comparación:  $>$ ,  $\geq$ ,  $\neq$ ,  $<$ ,  $\leq$ . Por ejemplo, definamos la operación de agrupación por la condición "mayor que" ( $>$ ).

Se llama *agrupación por la condición "mayor que" de la relación  $R_a$  respecto al atributo  $X$  y de la relación  $R_b$  según el atributo  $Y$*  (los atributos  $X$  y  $Y$  son de un mismo dominio común para las relaciones  $R_a$  y  $R_b$ ),  $X > Y$ , un conjunto de todos los cortejos  $\pi_i$  tales que  $\pi_i$  es la concatenación del cortejo  $a_i$  perteneciente a  $R_a$  y del cortejo  $b_i$  perteneciente a  $R_b$ , donde  $X$  es una parte de  $a_i$ , mientras que  $Y$  es una parte de  $b_i$  y  $X > Y$ .

En una base de datos, un pedido será cumplido tanto más rápido cuanto menos operaciones sobre relaciones contiene. De este modo, es de interés práctico un problema que se examina a continuación de simplificación de expresión de un conjunto por medio de operaciones introducidas.

## § 1.6. AXIOMÁTICA DE LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS. MINIMIZACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN DE LOS CONJUNTOS

Al emplear el enfoque axiomático construiremos formalmente una teoría de conjuntos a base de los siguientes axiomas.

**Axioma de existencia.** *Existe por lo menos un conjunto.*

**Axioma de voluminosidad (de extensionalidad).** *Si los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$  se componen de los mismos elementos, ellos coinciden (son iguales):  $M_a = M_b$ .*

**Axioma de unión.** *Para los conjuntos arbitrarios  $M_a$  y  $M_b$  existe un conjunto, cuyos elementos son todos los elementos del conjunto  $M_a$  y todos los elementos del conjunto  $M_b$  y que no contiene ningún otro elemento.*

De los axiomas de voluminosidad y de unión se deduce que para los conjuntos arbitrarios  $M_a$  y  $M_b$  el conjunto que satisface las condiciones del axioma de unión es único. En efecto, si existieran tales dos conjuntos  $M_{c_1}$  y  $M_{c_2}$ , contendrían los mismos elementos (todos los elementos pertenecientes al conjunto  $M_a$  y todos los elementos del conjunto  $M_b$ ). Por esta razón, en virtud del axioma de voluminosidad,  $M_{c_1} = M_{c_2} = M_c$ . Este único conjunto  $M_c$  se llamará *unión* de los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$  y se denotará  $M_c = M_a \cup M_b$ .

**Axioma de diferencia.** *Para los conjuntos arbitrarios  $M_a$  y  $M_b$  existe un conjunto, cuyos elementos son aquellos, y sólo aquellos, elementos del conjunto  $M_a$  que no son elementos del conjunto  $M_b$ .*

De modo análogo, de la segunda y la cuarta axioma deducimos que para los conjuntos arbitrarios  $M_a$  y  $M_b$  existe exactamente un conjunto que contiene elementos del conjunto  $M_a$  no pertenecientes al conjunto  $M_b$ . Este conjunto  $M_c$  se denominará *diferencia* de los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$ :  $M_c = M_a \setminus M_b$ .

**Axioma de potencia.** *Para cada conjunto  $M$  existe una familia de conjuntos  $B(M)$  (booleano), cuyos elementos son todos los subconjuntos  $M_i$ ,  $M_i \subset M$ , y sólo éstos.*

**Axioma de existencia del conjunto vacío.** *Existe tal conjunto  $\emptyset$  que ningún elemento le pertenece.*

Si las operaciones y los conceptos de la teoría de los conjuntos fueron introducidos intuitivamente, el enfoque axiomático permite definir formalmente estos conceptos y operaciones de la teoría de los conjuntos basándose en los seis axiomas introducidos.

Con ayuda de las operaciones de unión y de diferencia, empleando los axiomas introducidos, definamos otras tres operaciones sobre los conjuntos.

*La intersección* de los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$  se determina mediante la

fórmula

$$M_a \cap M_b = M_a \setminus (M_a \setminus M_b).$$

Se puede mostrar que los elementos de intersección  $M_a \cap M_b$  son aquellos, y sólo aquellos, que pertenecen al conjunto  $M_a$  y también al conjunto  $M_b$ .

El complemento  $\overline{M}$  del conjunto  $M$  se define por la fórmula

$$\overline{M} = 1 \setminus M.$$

La diferencia simétrica de los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$  se determina por medio de la fórmula

$$M_a \setminus \cdot M_b = (M_a \setminus M_b) \cup (M_b \setminus M_a).$$

A base de la axiomática introducida puede ser demostrada la validez de las leyes aducidas anteriormente que determinan las propiedades de la signatura del álgebra de los conjuntos (las leyes idempotente, conmutativa, asociativa, distributiva, de operación con constantes, de complemento doble y las leyes propuestas por De Morgan) y también de las siguientes leyes:

*ley distributiva de intersección respecto a la diferencia*

$$M_a \cap (M_b \setminus M_c) = M_a \cap M_b \setminus M_a \cap M_c;$$

*ley conmutativa de diferencia simétrica*

$$M_a \setminus \cdot M_b = M_b \setminus \cdot M_a;$$

*ley asociativa de la diferencia simétrica*

$$M_a \setminus \cdot (M_b \setminus \cdot M_c) = (M_a \setminus \cdot M_b) \setminus \cdot M_c;$$

*ley distributiva de intersección respecto a la diferencia simétrica*

$$M_a \cap (M_b \setminus \cdot M_c) = M_a \cap M_b \setminus \cdot M_a \cap M_c;$$

*leyes de encolamiento*

$$M_a \cap M_b \cup M_a \cap \overline{M_b} = M_a, (M_a \cup M_b) \cap (M_a \cup \overline{M_b}) = M_a;$$

*leyes de absorción*

$$M_a \cup M_a \cap M_b = M_a, M_a \cap (M_a \cup M_b) = M_a;$$

*leyes de Poretski*

$$M_a \cup \overline{M_a} \cap M_b = M_a \cup M_b,$$

$$M_a \cap (\overline{M_a} \cup M_b) = M_a \cap M_b.$$

Empleando estas leyes examinemos el problema de minimización de la representación del conjunto  $M$  mediante las operaciones  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\overline{\phantom{x}}$ .

Como *complejidad de la representación del conjunto  $M$*  comprendemos el número de símbolos  $M_i, \overline{M}_i$  en la expresión que lo prefija.

\* Sea que en el espacio  $\mathbf{1} = \{M_1, M_2, M_3\}$  se prefija un conjunto de la forma

$$M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3 \cup \overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap M_2 \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap \overline{M_2} \cap M_3.$$

A base de las leyes idempotente, conmutativa y asociativa de unión, obtenemos

$$M(M_1, M_2, M_3) (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap M_3) \cup (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup \overline{M_1} \cap M_2 \cap \overline{M_3}) \cup (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) \cup (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap M_2 \cap \overline{M_3}) \cup (\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap \overline{M_2} \cap M_3).$$

Al usar las leyes conmutativas de intersección y de encolamiento, tenemos  $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cup \overline{M_1} \cap \overline{M_3} \cup \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap M_2$ .

Según las leyes conmutativas de unión y intersección y la ley de encolamiento obtenemos  $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cup \overline{M_3} \cup \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap M_2$ . En virtud de las leyes conmutativas de intersección y absorción tenemos  $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cup \overline{M_3} \cup M_1 \cap M_2$ . La complejidad de la representación del conjunto prefijado disminuyó de 21 a 5.

Denominaremos *estrategia de transformaciones* la sucesión de aplicación de las leyes. La complejidad de la representación de un conjunto que se obtiene aplicando estas leyes (cada una de las cuales determina una transformación equivalente) depende de la estrategia utilizada. Hablemos una estrategia que engendra siempre la expresión minimal de un conjunto prefijado.

Consideremos una álgebra  $A = \langle \mathbf{B}(1), \cup, \cap, - \rangle$  y determinemos los conjuntos que pueden engendrarse (formarse) de conjuntos arbitrarios  $M_1, M_2, \dots, M_n$  llamados *generatrices* del espacio  $\mathbf{1}$  empleando las operaciones  $\cup, \cap, -$ .

A continuación un conjunto

$$M_i^{\sigma_i} = \begin{cases} M_i & \text{para } \sigma_i = 1, \\ \overline{M_i} & \text{para } \sigma_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

lo denominaremos *terma primaria*. Un conjunto de tipo

$$\bigcap_{i=1}^n M_i^{\sigma_i} = M_1^{\sigma_1} \cap M_2^{\sigma_2} \cap \dots \cap M_n^{\sigma_n}, \quad \sigma_i = 0, 1.$$

lo llamaremos *constituyente*.

El número común de distintas constituyentes no supera  $2^n$ . A cada constituyente se le puede poner en correspondencia un juego binario de longitud  $n$ , el número de estos juegos equivale a  $2^n$ . Si unas constituyentes son iguales a  $\emptyset$ , el número común de constituyentes es menor que  $2^n$ , con ello, entre los conjuntos existen al menos dos tales que pueden expresarse uno por medio del otro, es decir, dependientes. Por ejemplo, si  $n = 2$  y  $M_2 = \overline{M_1}$ , existen sólo dos constituyentes distintas de  $\emptyset$

$$\begin{aligned} \emptyset &= M_1^0 \cap M_2^0 = M_1^1 \cap M_2^1, \\ C_1 &= M_1^0 \cap M_2^1, \quad C_2 = M_1^1 \cap M_2^0. \end{aligned}$$

**Lema 1.1.** *La intersección de dos constituyentes distintas es vacía.*

□ En efecto, si las constituyentes  $C_a = \bigcap_{i=1}^n M_i^{\sigma_i}$  y  $C_b = \bigcap_{i=1}^n M_i^{\sigma_i'}$  son diversas, entonces  $\sigma_k \neq \sigma_k'$  por lo menos, para un  $k$ ,  $k \leq n$ . Pero, entonces,  $M_k^{\sigma_k} \cap M_k^{\sigma_k'} = \emptyset$  y, por consiguiente,  $C_a \cap C_b = \emptyset$ . ■

**Lema 1.2.** *La unión de todas las constituyentes equivale a 1.*

□ Representemos 1 en la forma

$$1 = \bigcap_{i=1}^n (M_i^0 \cup M_i^1)$$

y, abriendo el paréntesis, obtenemos la unión de todas las constituyentes en el segundo miembro de la igualdad. ■

**Lema 1.3.** *El conjunto  $M_i$  equivale a la unión de las constituyentes, cada una de las cuales contiene  $M_i^1$ .*

□ Según el lema 1.2,

$$1 = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_l = \bigcup_{i=1}^l C_i,$$

donde  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , es una constituyente. Determinemos la intersección de los miembros primero y segundo de esta expresión con  $M_i$ . Tenemos

$$M_i = (M_i \cap C_1) \cup (M_i \cap C_2) \cup \dots \cup (M_i \cap C_l).$$

Si  $C_j$  contiene  $M_i^0$  en calidad de argumento de intersección, se tiene  $M_i \cap C_j = \emptyset$ . Pero, si  $C_j$  contiene  $M_i^1$ , se tiene  $C_j \cap M_i = C_j$ . Por consiguiente,  $M_i$  es la unión de aquellas constituyentes que contienen  $M_i^1$  en calidad de factor. ■

**Teorema 1.4.** *Cada conjunto no vacío formado de los conjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_n$  empleando las operaciones  $\cup, \cap, \bar{\phantom{x}}$  es la unión de cierto número de constituyentes.*

□ En virtud del lema 1.3, el teorema es válido para los conjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Por consiguiente, es suficiente demostrar que si conjuntos arbitrarios  $M_a$  y  $M_b$  pueden representarse en forma de la unión de cierto número de constituyentes, los conjuntos  $M_a \cup M_b$ ,  $M_a \cap M_b$  y  $\overline{M_a}$ , si no son vacíos, pueden también representarse en forma de unión de las constituyentes.

Sea que los conjuntos  $M_a$  y  $M_b$  son representables en forma de la unión de constituyentes  $M_a = C_{a_1} \cup C_{a_2} \cup \dots \cup C_{a_s}$  y  $M_b = C_{b_1} \cup C_{b_2} \cup \dots \cup C_{b_r}$ . Entonces el conjunto  $M_a \cup M_b$  puede representarse evidentemente en forma de unión de las constituyentes.

Según la ley de distributividad,  $M_a \cap M_b = (C_{a_1} \cap C_{b_1}) \cup \dots \cup (C_{a_s} \cap C_{b_r})$ . Además, si  $C_{a_s} \neq C_{b_r}$ , de acuerdo con el lema 1.1,  $C_{a_s} \cap C_{b_r} = \emptyset$ , en caso contrario,  $C_{a_s} = C_{b_r}$ . Por consiguiente, la intersección  $M_a \cap M_b$  o bien es vacía, o bien es representable en forma de unión de las cons-

tituyentes. Demostremos que el conjunto  $\overline{M}$  es también representable en forma de unión de las constituyentes, si  $M = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ .

Debido a la ley correspondiente a De Morgan,

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \overline{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k} = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \dots \cap \overline{C_k} = \overline{M_1^{\sigma_1} \cap M_2^{\sigma_2} \cap \dots} \\ &\dots \cap \overline{M_n^{\sigma_n}} = \overline{M_1^{\sigma_1} \cap M_2^{\sigma_2} \cap \dots \cap M_n^{\sigma_n}} = \overline{M_1^{\sigma_1}} \cap \overline{M_2^{\sigma_2}} \cap \dots \\ &\dots \cap \overline{M_n^{\sigma_n}} = (\overline{M_1^{\sigma_1}} \cup \overline{M_2^{\sigma_2}} \cup \dots \cup \overline{M_n^{\sigma_n}}) \cap (\overline{M_1^{\sigma_1}} \cup \overline{M_2^{\sigma_2}} \cup \dots \\ &\dots \cup \overline{M_n^{\sigma_n}}) \cap \dots \cap (\overline{M_1^{\sigma_1}} \cup \overline{M_2^{\sigma_2}} \cup \dots \cup \overline{M_n^{\sigma_n}}). \end{aligned}$$

Abriendo el paréntesis y empleando las relaciones  $M_\alpha \cap \overline{M_\alpha} = \emptyset$ ,  $M_\alpha \cup \overline{M_\alpha} = 1$  y también añadiendo el factor  $M_\beta \cup \overline{M_\beta}$  a las intersecciones que no tienen índice inferior  $\beta$ , llegamos a que el conjunto  $\overline{M}$  es también representable en forma de unión de las constituyentes. ■

**Teorema 1.5.** De  $n$  conjuntos en el álgebra  $A = \langle B(1), \cup, \cap, \bar{\ } \rangle$  se puede formar no más de  $2^{2^n}$  conjuntos.

□ Debido al teorema 1.4, cada conjunto  $M$  es la unión de constituyentes, el número de las cuales no supera  $2^n$ ; por consiguiente, el número de distintas uniones no supera  $2^{2^n}$ . Además, si los conjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_n$  son independientes, es decir, todas las constituyentes se distinguen del conjunto vacío, el número de constituyentes diversas es igual a  $2^n$  y el número de conjuntos formados por éstas en forma de su unión es igual a  $2^{2^n}$  (teniendo en cuenta el conjunto vacío). ■

La introducción del concepto de la constituyente permite fijar un conjunto  $M$ , para los conjuntos independientes fijados  $M_1, M_2, \dots, M_n$  del conjunto universal  $1$ , en forma de unión de las constituyentes:

$$M = \bigcap_j \bigcup_{i=1}^n M_i^{\sigma_i}.$$

Cada conjunto fijado  $M_i \subset 1$  divide el espacio en dos partes: propiamente  $M_i$  y  $\overline{M}_i$ . Para los conjuntos independientes  $M_i \in \{M_i / i = 1, \dots, n\}$  el espacio se parte en  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$  regiones. Cada región es la intersección de  $n$  conjuntos  $M_i$  o  $\overline{M}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ponemos en correspondencia a esta región un vector binario  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , en el cual  $\sigma_i = 1$ , si la intersección  $C = \bigcap_i M_i^{\sigma_i}$  contiene  $M_i$  y  $\sigma_i = 0$ , si contiene  $\overline{M}_i$  y también el equivalente decimal

$$d(C) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \cdot 2^{i-1}.$$

Cualquier conjunto  $M$  en el espacio  $1$  puede representarse en forma de unión de estas regiones. Al conjunto  $M$  le pongamos en correspondencia

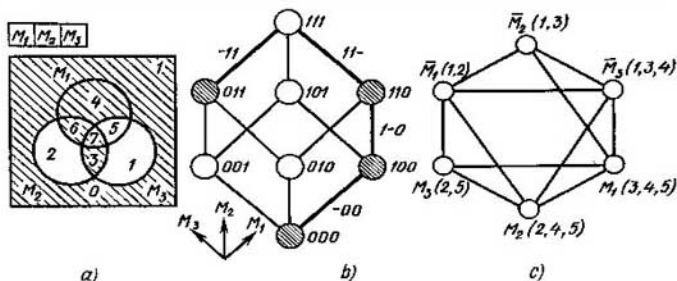


Fig. 1.15

un vector binario de la longitud  $2^n$ , en el cual al orden  $i$ -ésimo le corresponde una región con el equivalente decimal, igual a  $i$ . Representemos el vector que determina el conjunto en forma de equivalente decimal:

$$d(M) = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i 2^i, \quad c_i = 0, 1.$$

Por consiguiente, el conjunto  $M$  en el espacio puede prefijarse en forma de equivalente decimal correspondiente.

En el espacio tridimensional  $1 = \{M_1, M_2, M_3\}$ , consideremos, por ejemplo, un conjunto  $M(M_1, M_2, M_3)$  con el equivalente decimal  $d(M) = 217$ . Tenemos  $217 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ .

Al conjunto  $M$  le corresponde un vector binario  $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$  que determina la inclusión de regiones en el conjunto  $M$  (fig. 1.15, a).

Además del diagrama de Euler, el espacio puede ser prefijado en forma de hipercubo o cubo  $n$ -dimensional ( $n$ -dimensión del espacio, igual al número de conjuntos fijados).

Se llama *hipercubo (cubo  $n$ -dimensional)* un grafo  $H$ , cada vértice del cual corresponde biunívocamente a una región del espacio y dos vértices se unen por una arista, si corresponden a regiones colindantes (que tienen la frontera común). Los vectores binarios puestos en correspondencia a estas regiones se distinguen en un, y sólo en un, orden.

El hipercubo para el ejemplo considerado se representa en la fig. 1.15, b (los vértices correspondientes a las constituyentes del conjunto  $M$  están rayadas).

Frecuentemente un conjunto  $M$  se prefija en forma de una tabla binaria, a cada fila de la cual le corresponde biunívocamente una constituyente. El conjunto de filas de la tabla está ordenado linealmente según el crecimiento del equivalente decimal de un juego binario correspondiente. Los conjuntos que forman el espacio corresponden a las columnas. La última columna se pone en correspondencia al conjunto  $M$  y la unidad indica que la constituyente correspondiente entra en el conjunto  $M$ . En el caso dado tenemos la tabla 1.7.



Analíticamente el conjunto  $M$  se prefija en forma

$$M = \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cup \\ \cup M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup \\ \cup M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

o en forma de moografo

$$G^M = \langle V, S_3 \rangle,$$

$$V = \{M_i, \overline{M}_i / i = 1, 2, 3\}, S_3 \subset V^3,$$

$$S_3 = \{ \underbrace{[\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3]}_1, \underbrace{[\overline{M}_1, M_2, M_3]}_2, \dots \}$$

$$\underbrace{[M_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3]}_3, \underbrace{[M_1, M_2, \overline{M}_3]}_4, \underbrace{[M_1, M_2, M_3]}_5 \} \text{ (fig. 1.15, c),}$$

Tabla 1.7.

$d(C)$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

En el álgebra considerada  $A = \langle B(1), \cup, \cap, \bar{\ } \rangle$  las operaciones son dependientes. En efecto, debido a la ley según De Morgan se puede construir todo conjunto de  $2^{2^n}$  conjuntos empleando el álgebra  $A = \langle B(1), \cup, \bar{\ } \rangle$ . Las álgebras  $A = \langle B(1), \cup, \bar{\ } \rangle$ ,  $A = \langle B(1), \cap, \bar{\ } \rangle$  son equivalentes en el sentido de engendrar cualquier conjunto de  $2^{2^n}$  conjuntos. Ellas pueden sustituirse por las álgebras  $A = \langle B(1), \cup, \setminus, 1 \rangle$ ,  $A = \langle B(1), \cap, \setminus, 1 \rangle$ , respectivamente, en virtud de la fórmula  $\overline{M} = 1 \setminus M$ , donde el universo 1 se examina como operación 0 ádica.

Debido a las igualdades

$$M_a \cup M_b = (M_a \setminus M_b) \cup (M_a \cap M_b),$$

$$M_a \setminus M_b = M_a \setminus (M_a \cap M_b)$$

el álgebra  $\langle B(1), \cup, \setminus, 1 \rangle$  puede ser sustituida por el álgebra de tipo  $\langle B(1), \cap, \setminus, 1 \rangle$ .

Examinemos el problema de minimización de la representación de los conjuntos en el álgebra de Cantor. La intersección de los conjuntos distintos dos a dos  $\cap M_i^{a_i}$  se llama *elemental*. La expresión que prefija el conjunto  $M_i$  en forma de unión de intersecciones elementales diversas se llama *forma normal de Cantor* (FNC) del conjunto  $M$ . La unión de constituyentes del conjunto  $M$  se denomina *FNC perfecta del conjunto M*.

Llábase *FNC minimal del conjunto M* la FNC de este conjunto la que tiene la complejidad minimal.

Consideremos el *método de Quine* que utilizaremos para obtener una FNC minimal del conjunto  $M$ . Este método consiste en el cumplimiento sucesivo de tales etapas.

1. *Formación de los intervalos maximales*. Se denomina *intervalo del conjunto M* un conjunto de constituyentes del conjunto  $M$  que forman un hipercubo (de cierta dimensión).

Es obvio, que la potencia de un intervalo es igual a 2 en una potencia (o sea,  $2^0$ ,  $2^1$ , etc.).

Por ejemplo, escribamos un conjunto de intervalos para el ejemplo considerado anteriormente:  $\{000, 100, 110, 011, 111, -00, 1-0, 11-, -11\}$ . Aquí y en adelante “-” significa que en conjunto correspondiente a este orden está ausente en la intersección, es decir, después de la unión de constituyentes correspondientes se hizo encolamiento por este conjunto. Por ejemplo, el intervalo  $-00$  correspondiente al conjunto de constituyentes  $000$  y  $100$  se obtiene como resultado de la transformación  $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cup M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 = M_2 \cap M_3$ .

El intervalo  $I_\alpha$  se denomina *intervalo maximal*  $I_{\text{máx}}$  del conjunto  $M$ , si no existe otro intervalo  $I_\beta$  de este conjunto que contenga el intervalo  $I_\alpha$ ,  $I_\alpha \not\subset I_\beta$ .

En el caso dado hay cuatro intervalos maximales:  $-00, 1-0, 11-, -11$ ; cada uno de éstos forma un hipercubo de dimensión (arista).

La intersección  $\bigcap_i M_i^{\sigma_i}$  que corresponde a un intervalo maximal del conjunto  $M$  se denomina *implicante simple* de este conjunto.

La unión de las implicantes simples del conjunto  $M$  se llama *FNC abreviada del conjunto M*.

El número de terms primarias que forman una implicante simple se denomina *rango de una implicante simple* y una intersección elemental se llama *rango de un intervalo correspondiente*.

Al formar intervalos maximales, un conjunto de intervalos que tienen un mismo rango se parte en zonas con la particularidad de que  $i$ -ésima zona contiene intervalos, a los cuales corresponden juegos con  $i$  unidades en cada uno. Entonces la formación de intervalos maximales se reduce a comparar elementos solamente de zonas *vecinas*, cuyos números difieren en la unidad. Si los intervalos construidos no son maximales, el proceso de comparación continúa.

Los resultados de la comparación para el caso considerado se ofrecen en la fig. 1.16.

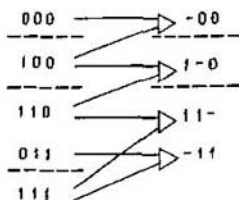


Fig. 1.16

LA FNC abreviada del conjunto  $M(M_1, M_2, M_3)$  tiene la forma

$$M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap \overline{M_3} \cup M_1 \cap M_2 \cup M_2 \cap M_3.$$

La primera etapa del método se termina al construir la FNC abreviada del conjunto  $M$ .

Llámase FNC *tope del conjunto*  $M$  una FNC de este conjunto, la que no determina  $M$  al omitir aunque no sea más que una terma primaria.

**Lema 1.4.** La FNC *minimal del conjunto*  $M$  es de forma *tope*.

□ La complejidad de la FNC minimal del conjunto  $M$  no se puede disminuir por eliminar una terma primaria. Por consiguiente, esta forma es de *tope*. ■

**Lema 1.5.** La FNC *tope del conjunto*  $M$  se compone de las *implicantes simples* de este conjunto.

□ Si al menos una intersección corresponde a un intervalo no maximal del conjunto  $M$ , se puede cambiar esta intersección por una *implicante simple* eliminando las *termas primarias* correspondientes, sin salir de la clase de las FNC equivalentes (que dan un mismo conjunto) del conjunto  $M$ , lo que contradice a la definición de la FNC *tope*. ■

**Teorema 1.6.** La FNC *tope del conjunto*  $M$ , inclusive la FNC *minimal*, se contiene en la FNC abreviada de este conjunto.

□ La FNC *tope del conjunto*  $M$ , inclusive la FNC *minimal*, debido al lema 1.5, consta de las *implicantes simples*. La FNC abreviada del conjunto  $M$  incluye todas las *implicantes simples*. Por consiguiente, la FNC *tope* (minimal) del conjunto  $M$  se contiene en la FNC abreviada de este conjunto. ■

En virtud del teorema 1.6, la construcción de la FNC *tope del conjunto*  $M$  se reduce al cubrimiento de una tabla bidimensional.

Llámase *cubrimiento de las columnas por las filas en una tabla bidimensional* tal conjunto de filas, en el cual para cada columna existe por lo menos una fila de este conjunto, intersecándose con la cual esta columna tiene unidad, con la particularidad de que al eliminar aunque no sea más que un elemento de este conjunto de filas, la propiedad indicada no se cumple.

2. *Construcción y cubrimiento de la tabla de Quine.* La tabla de Quine es una tabla bidimensional, a cada fila de la cual le corresponde unívocamente un intervalo maximal y a cada columna, una constituyente, mientras que en el lugar de intersección de la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna se encuentra la unidad, si la  $j$ -ésima constituyente se incluye en el  $i$ -ésimo intervalo maximal. En el caso contrario no se escribe nada o se pone 0 en la célula  $(i, j)$ .

Para el caso considerado, la tabla de Quine tiene tal forma:

Tabla 1.8

Intervalo maximal	Constituyente				
	000	100	110	011	111
-00	1	1			
1-0		1	1		
11-			1		1
-11				1	1

Un intervalo maximal se denomina *obligatorio*, si existe una constituyente que pertenece a él, y sólo a él. Un conjunto de intervalos obligatorios forma el *núcleo del cubrimiento*.

En nuestro caso el núcleo del cubrimiento es el conjunto  $\{-00, -11\}$  que cubre la primera, la segunda, la cuarta y la quinta columnas. Para formar un cubrimiento, se puede tomar ora la segunda, ora la tercera fila. Como resultado obtenemos dos cubrimientos:  $\{-00, -11, 1-0\}$ ,  $\{-00, -11, 11-\}$ , cada uno de los cuales es minimal y tiene la complejidad 6. Para mayor precisión elijamos el primero de los cubrimientos que corresponde a la FNC minimal que prefija el conjunto  $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M_2} \cap \overline{M_3} \cup M_2 \cap M_3 \cup M_1 \cap M_3$ . Como resultado de la simplificación, la complejidad  $L(M)$  disminuyó de 15 a 6.

La FNC minimal se determina como resultado del sondeo de todos los cubrimientos realizado empleando la transformación de una forma multiplicativo-aditiva en una forma aditivo-multiplicativa.

Para el ejemplo considerado identifiquemos cuatro filas de la tabla 1.8 por las letras  $a, b, c, d$ , respectivamente. Escribamos un conjunto de filas, cada elemento del cual cubre  $j$ -ésima columna:

$$j = 1 \rightarrow A_1 = \{a\}, \quad j = 2 \rightarrow A_2 = \{a, b\},$$

$$j = 3 \rightarrow A_3 = \{b, c\}, \quad j = 4 \rightarrow A_4 = \{d\}, \quad j = 5 \rightarrow A_5 = \{c, d\}.$$

El cubrimiento de columnas con las filas de esta tabla es un conjunto de filas que cubre todas las columnas de la tabla, y al eliminar aunque no sea más que una de estas filas, existirá una columna no cubierta. Por consiguiente, si se representa cada uno de los conjuntos  $A_j$  en forma de la unión de sus elementos y se halla la intersección de todos los conjuntos  $A_j$ ,  $\bigcap_j A_j$ , cada intersección en la forma aditiva obtenida corresponde a un cubrimiento y el número de todos los cubrimientos es igual al número de distintas

intersecciones en la forma aditivo-multiplicativa obtenida:

$$\begin{aligned} \bigcap_j A_j &= a \cap (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap d \cap (c \cup d) = \\ &= a \cap (b \cup c) \cap d = a \cap b \cap d \cup a \cap c \cap d. \end{aligned}$$

Las intersecciones obtenidas  $a \cap b \cap d$  y  $a \cap c \cap d$  engendran dos cubrimientos:  $\{-00, 1-0, -11\}$  y  $\{-00, 11-, -11\}$ ; cada uno de los últimos corresponde a FNC minimal del conjunto prefijado  $M$ .

La disminución sucesiva de la complejidad de expresión que determina un conjunto prefijado es posible en caso de pasar de la clase de FNC a la de formas paréntesis de Cantor (FPC). Una expresión que determina el conjunto  $M$  se denomina *forma paréntesis de Cantor* si, excepto las *termas primarias* y los signos de operaciones de unión e intersección, la integran los paréntesis ( $\cdot$ ).

En el ejemplo examinado la complejidad de representación del conjunto, igual a 6, disminuye hasta 5 debido al empleo de la ley distributiva de intersección respecto a la unión  $M(M_1, M_2, M_3) = \overline{M_3} \cap (M_1 \cup \overline{M_2}) \cup M_2 \cap M_3$ .

La transformación de una forma multiplicativo-aditiva en aditivo-multiplicativa se denomina *método de Petrick* que puede definirse por un *algoritmo* correspondiente.

*Definición intuitiva (ingenua) de algoritmo.* Un conjunto de reglas que poseen las propiedades *de masa* (invariabilidad respecto a la información de entrada), *determinatividad* (univocidad de la aplicación de estas reglas a cada paso), *resultatividad* (obtención, después de haber aplicado estas reglas, de una información que es resultado) y *elementalidad* (está ausente la necesidad de precisar ulteriormente las reglas) se denomina *algoritmo*.

## § 1.7. Problemas y ejercicios

1.1. Demostrar que

$$A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A \leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \leftrightarrow \overline{A} \cup B = 1.$$

1.2. Demostrar que

$$A \cap (B \setminus A) = \emptyset, \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

1.3. Resolver un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

donde  $A, B, C$  son los conjuntos prefijados y  $B \subset A \subset C$ .

1.4. Demostrar que

$$A = B \leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset.$$

1.5. Demostrar que si las relaciones  $R_1$  y  $R_2$  son reflexivas, las relaciones  $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2$  son también reflexivas.

1.6. Demostrar que si las relaciones  $R_1$  y  $R_2$  son simétricas, las relaciones  $R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2$  son también simétricas.

1.7. Demostrar que un conjunto finito de potencia  $n$  contiene  $\frac{n!}{p!(n-p)!}$  subconjuntos distintos de potencia  $p \leq n$ .

1.8. Demostrar que  $\bigcup_i M_i$  es el conjunto mínimo que comprende todos los conjuntos  $M_i$ .

1.9. Demostrar que  $\bigcap_i M_i$  es el conjunto máximo que se contiene en todos los  $M_i$ .

1.10. Demostrar que si  $M_a, M_b, M_c$  y  $M_d$  no son vacíos, se tiene

a)  $M_a \subset M_b$  y  $M_c \subset M_d \leftrightarrow M_a \times M_c \subset M_b \times M_d$ ;

b)  $M_a = M_b$  y  $M_c = M_d \leftrightarrow M_a \times M_c = M_b \times M_d$ ;

1.11. Demostrar que

$$\bigcap_{i=1}^n M_{a_i} \times \bigcap_{i=1}^n M_{b_i} = \bigcap_{i=1}^n (M_{a_i} \times M_{b_i}).$$

1.12. Demostrar que

$$(M_a \times M_b) \cup (M_c \times M_d) \subset (M_a \cup M_c) \times (M_b \cup M_d).$$

Verificar en qué caso tiene lugar la igualdad en esta fórmula.

1.13. Demostrar que

a)  $(M_a \cup M_b) \times M_c = (M_a \times M_c) \cup (M_b \times M_c)$ ;

b)  $M_a \times (M_b \cup M_c) = (M_a \times M_b) \cup (M_a \times M_c)$

c)  $(M_a \cup M_b) \times (M_c \cup M_d) =$   
 $= (M_a \times M_c) \cup (M_b \times M_c) \cup (M_a \times M_d) \cup (M_b \times M_d)$ ;

d)  $\bigcup_{i=1}^n M_{a_i} \times \bigcup_{j=1}^n M_{b_j} = \bigcup_{i,j=1,\dots,n} (M_{a_i} \times M_{b_j})$ ;

e)  $\bigcap_{i=1}^n M_{a_i} \times \bigcap_{j=1}^n M_{b_j} = \bigcap_{i,j=1,\dots,n} (M_{a_i} \times M_{b_j})$ .

1.14. Construir una relación binaria:

- a) reflexiva, simétrica, intransitiva;  
 b) reflexiva, transitiva, asimétrica;  
 c) irreflexiva, antisimétrica, transitiva;  
 d) reflexiva, antisimétrica, intransitiva.

1.15. ¿Cuáles entre las siguientes relaciones son unívocas, cuáles son inversamente unívocas y cuáles son biunívocas:

$(x, y) \in R \leftrightarrow y$  es el padre de  $x$ ,

$(x, y) \in R \leftrightarrow y$  es el hijo de  $x$ ,

$(x, y) \in R \leftrightarrow x = y^2$ ,

$(x, y) \in R \leftrightarrow x^2 = y$ ,

$(x, y) \in R \leftrightarrow |x + 5| > |3 - y|$ ?

1.16. Hallar el número de todas las posibles relaciones binarias antisimétricas entre los elementos de un conjunto finito que se compone de  $n$  elementos.

1.17. Sean  $M$  un conjunto de todos los paralelogramos en un plano,  $A_1$ , un conjunto de cuadrados,  $A_2$ , un conjunto de rectángulos,  $A_3$ , un conjunto de rombos en un plano. Hallar los resultados de las siguientes relaciones:  $A_i \cup A_j$ ,  $A_i \cap A_j$ ,  $A_i \cap \overline{A_j}$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ .

1.18. Demostrar que dos conjuntos son iguales si, y sólo si, los resultados de su intersección y su unión coinciden.

1.19. Es sabido que entre 100 estudiantes 28 son los aficionados a la pintura, 42, al deporte, 30, a la música, 10, a la pintura y el deporte, 8, a la pintura y la música, 5 al deporte y la música, 3 a la pintura, el deporte y la música. Determinar:

- a) el número de estudiantes aficionados solamente al deporte;  
b) no aficionados a la nada.

1.20. Verificar si el álgebra, cuyo portador es  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  y cuya signatura es operación de adición según el módulo  $p$ , forma un grupo.

1.21. Dilucidar si una álgebra, cuyo portador es  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  y cuya signatura es operación de multiplicación según el módulo  $p$ , forma un grupo.

1.22. ¿Representa un campo el álgebra, cuyo portador es  $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  y cuya signatura son operaciones de adición y de multiplicación según el módulo  $p$ ?

1.23. Demostrar que en el conjunto de números enteros de 1 a  $k$ , la relación  $\leq$  puede ser prefijada por una matriz triangular de adyacencia.

1.24. Demostrar que cualquier subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado no tiene más que una cota superior y una inferior.

1.25. Para un conjunto de vectores binarios de longitud 4 construir un grafo que prefija la relación  $X_a \leq X_b \leftrightarrow (\forall x_{a_i}, x_{b_i}) (x_{a_i} \leq x_{b_i})$ . Dilucidar, si este grafo prefija el álgebra de Boole. Si prefija el resultado de operaciones de multiplicación y adición.

1.26. Designemos mediante  $\langle M_a \times M_b, \varrho \rangle = R_a \times R_b$ ,  $R_a = \langle M_a, \leq \rangle$ ,  $R_b = \langle M_b, \leq \rangle$  un conjunto, para el cual  $(m_a, m_b) \varrho (m_a, m_b) \leftrightarrow m_a \leq m_a \& m_b \leq m_b$ . Demostrar que:

- a)  $R_a \times R_b$  es un conjunto parcialmente ordenado;  
b)  $R_a \times R_b$  es una cadena solamente en el caso cuando  $R_a$  o  $R_b$  consta de un elemento.

1.27. Demostrar que toda cadena es un retículo distributivo.

1.28. Un intervalo  $[a, b]$  de un conjunto parcialmente ordenado se compone de todos los elementos  $x$  que satisfacen la condición  $a \leq x \leq b$ . Demostrar que: a) la intersección de dos intervalos es intervalo (tal vez, vacío); b) en un retículo cualquier intervalo es subretículo.

1.29. Examinemos la unión del conjunto de los números mutuamente simples  $M$  y un conjunto de todos los productos, cuyos factores son elementos del conjunto  $M$ . En esta unión definamos la adición y la multiplicación como cálculo del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, respectivamente. Verificar si la colección de la unión de conjuntos examinados y operaciones de adición y multiplicación es el álgebra de Boole.

1.30. Demostrar que en todo anillo conmutativo

$$(a + b)^n = a^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + b^n.$$

1.31. Demostrar que en todo anillo conmutativo

$$a^m a^n = a^{m+n}, (ab)^n = a^n b^n, (a^m)^n = a^{mn}.$$

1.32. Al examinar la colección  $\langle 0, +, \cdot \rangle$ , donde  $0 + 0 = 0$  y  $0 \cdot 0 = 0$ , y averiguar si es un anillo; un cuerpo; un campo.

1.33. Demostrar que el número minimal de cadenas en la representación de un conjunto finito parcialmente ordenado en forma de suma de las cadenas es igual al número maximal de elementos no comparables dos a dos.

1.34. Demostrar que en cada retículo se tiene:

- a)  $(a \leq b) \& (c \leq d) \rightarrow a \cup c \leq b \cup d$ ; e)  $(a \leq b) \& (a \leq c) \rightarrow a \leq b \cap c$ ;  
b)  $(a \leq b) \& (c \leq b) \rightarrow a \cup c \leq b$ ; f)  $(a \leq b) \rightarrow (\forall c) (a \cap c \leq b \cap c)$ .  
c)  $(a \leq b) \rightarrow (\forall c) (a \cup c \leq b \cup c)$ ;  
d)  $(a \leq b) \& (c \leq d) \rightarrow a \cap c \leq b \cap d$ ;

1.35. Demostrar que en cada retículo para cualesquier elementos  $a, b, c$ :

$$a) a \cup b \cap c \leq (a \cup b) \cap (a \cup c);$$

$$b) a \cap (b \cup c) \geq a \cap b \cup a \cap c;$$

$$c) a \leq b \rightarrow a \cup b \cap c \leq (a \cup c) \cap b.$$

1.36. Demostrar que un retículo es modular si, y sólo si, para cualesquier elementos  $a, b, c$  se tiene

$$a \cap b \cup c \cap (a \cup b) = (a \cap c \cup b) \cap (a \cup b).$$

1.37. Demostrar que un retículo es distributivo si, y sólo si, para cualesquiera tres elementos  $a, b, c$  se tiene

$$a \cap (b \cup c) \cup b \cap c = (c \cup a \cap b) \cap (a \cup b).$$

1.38. Hallar un conjunto de "figuras prohibidas" que pone un conjunto parcialmente ordenado fuera de la clase de retículos.

1.39. Un *espacio métrico* es una colección del conjunto  $M$  con una *distancia* prefijada en él  $s(m_a, m_b)$  entre cualesquier dos elementos  $m_a, m_b \in M$  que satisfacen las siguientes condiciones:

$$s(m_a, m_b) > 0, \text{ si } m_a \neq m_b \text{ y } s(m_a, m_a) = 0, \text{ si los elementos coinciden;}$$

$$s(m_a, m_b) = s(m_b, m_a);$$

$$s(m_a, m_b) + s(m_b, m_c) \geq s(m_a, m_c) \text{ (la condición triangular).}$$

Prefijar una métrica en un hipercubo y averiguar lo que representa.

1.40. Demostrar que en la FNC perfecta del conjunto  $M$  la igualdad no se rompe, si cambia cada operación de unión por la de diferencia simétrica.

1.41. Verificar, si la forma  $M(M_1, M_2, M_3) = M_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3 \cup M_1 \cap M_1 \cap M_3 \cup \bar{M}_2$  es perfecta.

1.42. Verificar, si la forma  $M(M_1, M_2, M_3) = M_1 \cap \bar{M}_2 \cup M_1 \cap \bar{M}_3 \cup \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3 \cup \bar{M}_1 \cap M_3$  es abreviada.

1.43. Averiguar, si se puede transmitir una sucesión de símbolos en el canal de transmisión en forma de mografo.

1.44. En la clase de las formas normales de Cantor minimizar el conjunto  $M$ , dado como la unión de sus constituyentes:  $M(M_1, M_2, M_3, M_4) = \cup(0, 2, 7, 8, 11, 14, 15)$ , donde los números decimales son equivalentes numéricos de vectores binarios que determinan las constituyentes correspondientes de este conjunto.

1.45. Determinar la complejidad de la forma de paréntesis minimal del conjunto  $M$  prefijado por su forma normal:

$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cup M_1 \cap M_2 \cap M_5 \cup M_1 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_6 \cup M_2 \cap \\ \cap M_4 \cap M_5 \cap M_6.$$

1.46. Hallar el número de las FNC tope del conjunto

$$M(M_1, M_2, M_3, M_4) = \bar{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cup \bar{M}_1 \bar{M}_4 \cap M_4 \cup M_2 \cap \\ \cap \bar{M}_3 \cup \bar{M}_1 \cap \bar{M}_4 \cup M_1 \cap \bar{M}_3 \cap M_4.$$

1.47. Determinar el rango (número de constituyentes) del conjunto

$$M(M_1, M_2, \dots, M_6) = (M_4 \cap M_6 \cup M_1 \cap M_2) \cap (M_1 \cap M_3 \cup \\ \cup M_5 \cap M_6).$$

1.48. Hallar la FNC minimal del conjunto  $M$ , determinado en un espacio cuadrimensional:  $M = \cup(1 - 00, -110, 0101, -0 - 1, 0010, -01 - , 0 - 0 - )$ .

1.49. Determinar la disminución de la potencia de la signatura de un mografo  $G^M(M)$  que determina el conjunto  $M(M_1, M_2, M_3, M_4) = \cup(0, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15)$  después de la minimización en la clase de FNC.



1.50. Determinar la disminución de la potencia del portador de un mografo  $G^M(M)$  que determina el conjunto  $M(M_1, M_2, M_3, M_4) = \cup(0, 1, 2, 3, 5, 11, 15)$  después de la minimización en la clase de FNC.

1.51. Hallar la forma de paréntesis minimal de la representación de un conjunto  $M(M_1, M_2, M_3, M_4)$  que contiene intervalos  $0 - 01, 01 - 1, 110 - , 01 - 0$  y no contiene intervalos  $10 - 1, 111 - y 00 - 0$ .

## Comentarios

La teoría de los conjuntos fue reconocida oficialmente en 1897, en el Primer Congreso Internacional de Matemáticos, en el cual Hadamard y Hurwitz dieron numerosos ejemplos de la aplicación de esta teoría en el análisis matemático. La teoría de los conjuntos fue la base de la creación de los sistemas algebraicos que tienen gran aplicación práctica en el diseño del apoyo matemático de los ordenadores. A. I. Máltzev y J. D. Birkhoff hicieron gran aporte al desarrollo de la teoría de los sistemas algebraicos. La teoría de los modelos, cuya signatura posee la propiedad de simetría (modelos simétricos), se desarrolla de modo especialmente tempestuoso. Esta clase de modelos permite considerar eficazmente el objeto investigado como una "caja negra". Los elementos (constructivos o funcionales) del objeto forman el portador del modelo y su signatura determina su interrelación. Para fijar los modelos de esta clase en forma óptima, fue propuesto el concepto de *mografo*, tres años más tarde fue "introducido" de nuevo en Francia e identificado por el término de *hipergrafo*.

Los conceptos algebraicos son muy eficientes para proyectar los sistemas complejos de mando, ordenadores, sistemas de cálculo y redes de los ordenadores, bancos de datos y paquetes de programas aplicados. A mediados de los años 70 fue hecho un gran paso por el camino de resolver el superproblema de "enunciar qué hacer sin detallar cómo". Este paso fue hecho empleando el *lenguaje de conjuntos*, SETL, en el cual la construcción principal es un conjunto que permite simular objetos complejos en el programa.

Para profundizar los conocimientos de los sistemas algebraicos, recomendamos la literatura adicional enumerada en la bibliografía.

"...la práctica del hombre, que se repite mil millones de veces, se consolida en la conciencia del hombre mediante las figuras de la lógica. Precisamente (y sólo) debido a esta repetición de mil millones de veces, estas figuras tienen la estabilidad de un prejuicio, un carácter axiomático"

V. I. Lenin, "Cuadernos filosóficos"

## CAPÍTULO 2

### Lógica matemática

#### § 2.1. Lógica de enunciaciones.

Se denomina *enunciación* una oración narrativa, sobre la cual se puede decir que en un momento dado es verdadero o falso, pero no es la primera ni la otra simultáneamente. La "veracidad" y la "falsedad" de una oración es el verdadero valor de la enunciación. Ponemos en correspondencia a cada enunciación una variable igual a 1, si la enunciación es *verdadera* o igual a 0, si es *falsa*. Si  $P$  y  $Q$  son ciertas enunciaciones se puede formar las enunciaciones  $P$  o  $Q$ ,  $P$  y  $Q$ , no  $P$  introduciendo las operaciones de *disyunción*  $\vee$ , de *conjunción*  $\&$  y de *negación*. Los resultados de estas operaciones se prefijan por las tablas de veracidad ("disyunción", tabla 2.1, a; "conjunción", tabla 2.1, b; "negación", tabla 2.1, c), a cada fila de las cuales corresponde biunívocamente un juego de valores de las enunciaciones componentes y el correspondiente valor de la enunciación compuesta.

Tabla 2.1, a

$P$	$Q$	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabla 2.1, b

$P$	$Q$	$P \& Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 2.1, c

$P$	$\bar{P}$
0	1
1	0

Las operaciones de disyunción, conjunción y negación se leen como "O", "Y" y "NO", respectivamente.

Señalemos las leyes principales que determinan estas operaciones:  
*idempotente de disyunción y conjunción*

$$a \vee a = a, a \& a = a; \quad (2.1)$$

*conmutativa de disyunción y conjunción*

$$a \vee b = b \vee a, a \& b = b \& a; \quad (2.2)$$

*asociativa de disyunción y conjunción*

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, a \& (b \& c) = (a \& b) \& c; \quad (2.3)$$

*distributiva de conjunción respecto a la disyunción y de disyunción respecto a la conjunción*

$$a \& (b \vee c) = a \& b \vee a \& c; \quad (2.4 a)$$

(Nota. No ponemos los paréntesis en la expresión  $a \& b \vee a \& c$ , ya que la conjunción  $\&$ , como una operación multiplicativa, es mayor que la disyunción (que es una operación aditiva) y se cumple en primer lugar.)

$$a \vee b \& c = (a \vee b) \& (a \vee c); \quad (2.4 b)$$

*de negación doble*

$$\overline{\overline{a}} = a; \quad (2.5)$$

*según De Morgan*

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \& \overline{b}, \quad \overline{a \& b} = \overline{a} \vee \overline{b}; \quad (2.6)$$

*de encolamiento*

$$a \& b \vee a \& \overline{b} = a, \quad (a \vee b) \& (a \vee \overline{b}) = a \quad (2.7)$$

*de absorción*

$$a \vee a \& b = a, \quad a \& (a \vee b) = a; \quad (2.8)$$

*leyes que determinan las operaciones con las constantes 0 y 1:*

$$\begin{aligned} a \vee 0 &= a, \quad a \& 0 = 0, \quad a \vee 1 = 1 \\ a \& 1 &= a, \quad a \vee \overline{a} = 1, \quad a \& \overline{a} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Todo enunciado compuesto con ayuda de las operaciones  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\overline{\quad}$  tiene cierto valor veraz que depende de los valores de las enunciaciones componentes. Cualequier enunciación  $f$  puede ser prefijada en forma de una *tabla de veracidad*. Si el valor de la enunciación  $f$  depende de  $n$  enunciaciones componentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la tabla de veracidad contiene  $2^n$  filas. Una enunciación componente  $x_i$  se denominará *enunciación atómica* o simplemente *variable*  $x_i$  examinando con esto la enunciación compuesta como una función  $f$  de  $n$  variables. La función  $f$  que toma uno de dos valores, 0 ó 1, y depende de  $n$  variables, cada una de las cuales toma uno de dos valores, 0 ó 1, se denominará *función booleana*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variables.

Por ejemplo, examinemos un dispositivo que fija la aprobación de una resolución por un comité de los "tres". Cada miembro del comité aprieta su tecla, si aprueba la resolución; si la mayoría de los miembros están de acuerdo, la resolución se aprueba, lo que se fija por el dispositivo registrador. El dispositivo realiza la enunciación  $f(x_1, x_2, x_3)$ , cuya tabla de veracidad tiene forma de la tabla 2.2.

Tabla 2.2

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

Se puede construir el cálculo de enunciaciones empleando las correspondientes tablas de veracidad. Con ello, es evidente que el álgebra de enunciaciones es isomorfa al álgebra de Boole  $\langle M, \vee, \&, \bar{\phantom{x}} \rangle$ , los elementos de cuyo portador toman valores 0 ó 1 y la signatura  $\vee, \&, \bar{\phantom{x}}$  posee las propiedades de operaciones de los retículos distributivos con complementos. El álgebra de Boole es la más simple en la clase de las álgebras booleanas; es una álgebra booleana de dos elementos. El álgebra de enunciaciones y las leyes que determinan su signatura pueden obtenerse, si consideramos formalmente el caso límite de retículos: un retículo de dos elementos, en el cual  $a \cup b = b$ , cuando  $a \leq b$ . Este retículo se transforma en el álgebra booleana, si ponemos  $\bar{a} = b$ ,  $\bar{b} = a$ . Uno de los elementos del álgebra booleana es 0, ya que el álgebra booleana es un retículo con complementos y por esta razón segundo elemento de esta álgebra es 1.

En virtud de los teoremas 1.2 y 1.4, cada enunciación y su correspondiente función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  puede representarse en forma de disyunción de constituyentes

$$\bigvee_{i=1}^n x_i^{\sigma_i},$$

donde

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i & \text{cuando } \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i & \text{cuando } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Para el ejemplo a examinar  $f(x_1, x_2, x_3)$  puede representarse en forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

A continuación la representación de una función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en forma de disyunción de constituyentes se denominará *forma normal disyuntiva (FND) perfecta de la función*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Llamaremos *terma primaria* una variable o su negación.

El número de termas primarias que llevan una forma que prefija una función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se denomina *complejidad  $L(f)$  de esta forma*.

La complejidad de la FND perfecta de la función  $f(x_1, x_2, x_3)$  de la votación es igual a 12. Disminuyamos la complejidad de esta función

empleando identidades principales del álgebra de Boole. Según las propiedades idempotentes de la disyunción, se tiene

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Utilizando las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva obtenemos

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_1)x_2 x_3 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2)x_1 x_3 \vee (x_3 \vee \bar{x}_3)x_1 x_2.$$

Finalmente tenemos

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 = x_3(x_2 \vee x_1) \vee x_1 x_2.$$

A consecuencia obtenemos la complejidad  $L(f)$  de la función  $f(x_1, x_2, x_3)$ , igual a 5.

Las funciones  $f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $f_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se llaman *iguales*, si sobre cada uno de los juegos binarios  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

$$f_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = f_\beta(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

## § 2.2. Minimización de las funciones booleanas en la clase de las FND

Empleando el isomorfismo del álgebra de Boole y del álgebra de conjuntos se puede aplicar con éxito el método de tablas implicantes, para minimizar las funciones booleanas.

Examinemos con anticipación una descomposición de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  respecto a  $k$  variables (con precisión respecto a  $x_1, x_2, \dots, x_k$ ): *descomposición de Shannon*.

**Teorema 2.1.** *Cualquiera función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es representable en forma de descomposición de Shannon:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\text{por todos} \\ \text{los juegos} \\ (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)}} \left( \bigwedge_{i=1}^k x_i^{\sigma_i} \right) f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (2.10)$$

donde  $\sigma_i = 0, 1$ ;  $i = 1, \dots, k$ ,  $x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i & \text{cuando } \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i & \text{cuando } \sigma_i = 0. \end{cases}$

□ Empleando el método de inducción completa, demostremos que  $x_i^{\sigma_i} = 1 \leftrightarrow x_i = \sigma_i$  (tabla 2.3).

Tabla 2.3

$x_i$	$\sigma_i$	$x_i^{\sigma_i}$	$x_i$	$\sigma_i$	$x_i^{\sigma_i}$
0	0	$\bar{0} = 1$	1	0	$\bar{1} = 0$
0	1	0	1	1	1

En vez de las primeras  $k$  variables sustuyamos arbitrariamente sus valores:  $x_1 = \sigma_1^*$ ,  $x_2 = \sigma_2^*$ , ...,  $x_k = \sigma_k^*$ . Entonces el primer miembro de la fórmula que se demuestra es igual a  $f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_k^*, x_{k+1}, \dots, x_n)$ . El segundo miembro es la disyunción de  $2^k$  conjunciones de tipo  $x_1^{\sigma_1^*} x_2^{\sigma_2^*}, \dots, x_k^{\sigma_k^*} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  que se parten en dos clases mediante esta sustitución. La primera clase incluye la conjunción, para la cual el juego  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$  coincide con el juego  $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_k^*)$ :

$$\begin{aligned} & (\sigma_1^*)^{\sigma_1^*} (\sigma_2^*)^{\sigma_2^*} \dots (\sigma_k^*)^{\sigma_k^*} f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_k^*, x_{k+1}, \dots, \\ & \dots, x_n) = 1 \cdot 1 \dots 1 \cdot f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_k^*, x_{k+1}, \dots, \\ & \dots, x_n) = f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_k^*, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Esta conjunción es igual al primer miembro de la fórmula. La segunda clase incluye  $2^k - 1$  conjunciones, cada una de las cuales tiene  $\sigma_i^* \neq \sigma_i$  por lo menos en una variable  $x_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Por consiguiente, cada una de ellas es igual a cero.

Entonces, en virtud de la ley que caracteriza operaciones con las constantes,  $a \vee 0 = a$ , obtenemos que los miembros segundo y derecho de las fórmulas son iguales entre sí para cualesquiera sustitución de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . ■

**Corolario.** Una descomposición límite de Shannon ( $k=n$ ) de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , distinta de cero, tiene forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\text{por todos} \\ \text{los juegos} \\ (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ \text{sobre los cuales} \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1}} \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\sigma_i} \quad (2.11)$$

La descomposición límite de Shannon de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es su *forma normal disyuntiva perfecta*.

En el álgebra de Boole es válido el principio de dualidad puesto que, como fue demostrado en el capítulo 1, ella es un retículo distributivo con complemento. Debido a este principio, tenemos las siguientes descomposiciones duales de Shannon de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ :

según a  $k$  variables

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{\text{por todos} \\ \text{los juegos} \\ (\sigma_1, \\ \sigma_2, \dots, \sigma_k)}} \left( \bigvee_{i=1}^k \overline{x_i^{\sigma_i}} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \right); \quad (2.12)$$

## la descomposición límite dual

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \& \left( \bigvee_{i=1}^n x_i^{\sigma_i} \right) \quad (2.13a)$$

por todos  
los juegos  
( $\sigma_1, \sigma_2, \dots,$   
 $\sigma_n$ )  
sobre los  
cuales  $f(\sigma_1,$   
 $\sigma_2, \dots,$   
 $\dots, \sigma_n) = 0$

La descomposición límite de Shannon de la función booleana  $f(x_1, \dots, x_2, \dots, x_n)$  es su *fórmula normal conjuntiva (FNCj) perfecta*.

**Ejemplo 2.1** Construyamos las FND y FNCj perfectas de la función booleana  $f(x_1, x_2, x_3)$  prefijada según la tabla de veracidad (tabla 2.4).

Tabla 2.4

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1

Las FND y FNCj perfectos de esta función tienen, respectivamente, la forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3;$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \\ (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

En adelante se considerará la teoría de la FND, de la cual es fácil construir la teoría de la FNCj basándose en el principio de dualidad.

Prefijemos una función booleana  $f(x_1, x_2, x_n)$  con ayuda de un hipercono, a cada vértice del cual le corresponde biunívocamente un juego binario ( $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ); los vértices están ordenados por niveles: el  $i$ -ésimo nivel contiene  $\binom{n}{i}$  vértices, a los cuales les corresponden los juegos binarios que contienen  $i$  unidades; los vértices se unen por una arista, si sus juegos binarios correspondientes se distinguen en un, y sólo en un, orden.

Los juegos binarios se prefijan con frecuencia por equivalentes decimales ( $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ )  $\leftrightarrow \sum_{i=1}^n \sigma_i 2^{n-i}$  y la función booleana, por la enumeración de equivalentes decimales que corresponden a las constituyentes (a las conjunciones de la descomposición límite de Shannon). Por ejemplo,  $f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 1, 2, 3, 7)$  (tabla 2.5).

Tabla 2.5

Equivalen- te decimal	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$	Equivalen- te decimal	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	1	4	1	0	0	0
1	0	0	1	1	5	1	0	1	0
2	0	1	0	1	6	1	1	0	0
3	0	1	1	1	7	1	1	1	1

Los vértices, en los cuales  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$  y que forman un hipercubo engendran el *intervalo unitario* de esta función. Un intervalo unitario  $I_a$  de una función booleana  $f$  se denomina *maximal*, si no existe ningún intervalo unitario  $I_b$  que incluye  $I_a$ .

En el ejemplo dado los intervalos unitarios son los conjuntos de vértices:  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{7\}$ ,  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{3, 7\}$ ,  $\{0, 1, 2, 3\}$ ; los intervalos maximales son  $\{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\{3, 7\}$ .

La conjunción que corresponde al intervalo unitario maximal de la función  $f$  se denomina *implicante simple* de esta función:

$$\{0, 1, 2, 3\} \leftrightarrow \bar{x}_1, \{3, 7\} \leftrightarrow x_2 x_3.$$

Prefijaremos un intervalo unitario por la enumeración de vértices y, también, con ayuda de una sucesión de símbolos 0, 1-, donde el guión significa que en la conjunción está ausente la variable correspondiente:  $\{0, 1, 2, 3\} \leftrightarrow 0 - -$ ,  $\{3, 7\} \leftrightarrow - 11$ .

La disyunción de todas las implicantes simples de una función booleana se denomina FND *abreviada* de esta función.

El paso de la FND perfecta a la abreviada es unívoco y se realiza empleando la comparación de dos a dos entre las constituyentes de los niveles vecinos (cuyos números difieren en unidad).

Tienen gran importancia las *funciones booleanas débilmente definidas*  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que poseen las siguientes propiedades:

- 1) el número de variables  $n$  es grande;
- 2) la potencia de la unión de las regiones unitaria  $V_1$  y nula  $V_0$  es mucho menor que  $2^n$ , donde estas regiones se forman mediante los vértices, en los cuales la función es igual a 1 y 0, respectivamente;
- 3) las regiones unitaria y nula se prefijan por los intervalos correspondientes.

El conjunto de los vértices de un hipercubo, sobre los cuales una función es igual a 0 y que forman un hipercubo, se denomina *intervalo nulo*. La FND abreviada de las funciones débilmente definidas se construye con ayuda de la tabla de distinciones.

Llámanse *tabla de distinciones* una tabla bidimensional de orden  $n \times |V_0|$ , a cada fila de la cual le corresponde biunívocamente un orden



del intervalo unitario, que se examina y a una columna, el intervalo nulo. En la intersección de la  $i$ -ésima fila con la  $j$ -ésima columna está el resultado de la operación:

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0, & 1 \oplus 0 &= 1 & - \oplus 0 &= 0, \\ 0 \oplus 1 &= 1, & 1 \oplus 1 &= 0 & - \oplus 1 &= 0, \\ 0 \oplus - &= 0, & 1 \oplus - &= 0 & - \oplus - &= 0, \end{aligned}$$

con la particularidad de que en calidad del primer argumento se toma el valor del  $i$ -ésimo orden del intervalo unitario y del segundo, el valor del  $i$ -ésimo orden del intervalo nulo correspondiente a la  $j$ -ésima columna.

La formación de intervalos maximales se reduce al cubrimiento de las columnas por las filas de la tabla de distinciones. En efecto, los intervalos maximales en las funciones débilmente definidas constan de los vértices de las regiones unitaria e incompletamente definida. La unidad en una célula  $(i, j)$  de la tabla de distinciones muestra que si dejamos el  $i$ -ésimo orden en la conjunción, el  $j$ -ésimo intervalo nulo no se incluye en el hipercubo que corresponde a esta conjunción. Por consiguiente, el cubrimiento de las columnas por las filas engendra un intervalo maximal de la función booleana débilmente definida, que se examina.

**Ejemplo 2.2.** Consideremos como se halla la FND minimal de la función booleana

$$f(x_1, x_2, \dots, x_7) = \begin{cases} 1 & \text{en los intervalos } 0-0-0-0, 11-0-01, 0- -001-, \\ 0 & \text{en los intervalos } 10-0-01, 00- -10-, 1101-0-, \end{cases}$$

o una función prefijada con ayuda de equivalentes decimales de los elementos minimales y maximales de los correspondientes intervalos que se obtienen sustituyendo los códigos nulo 00...0 y unitario 11...1 en vez de guiones,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_7) = \begin{cases} 1 & \text{en los intervalos } (0, 42), (97, 117), (2, 51); \\ 0 & \text{en los intervalos } (65, 85), (4, 29), (104, 109). \end{cases}$$

Formemos un conjunto de intervalos maximales  $\{I_{\text{máx}}\}$ , que contienen un intervalo unitario  $(0, 42)$ , por la tabla de distinciones (tabla 2.6, a), cuyas filas se identifican por las letras a, b, c, d, e, g, h.

Tabla 2.6, a

Intervalo unitario		Intervalos nulos		
		(65, 85)	(4, 29)	(104, 109)
a	0	1	0	1
b	-	0	0	0
c	0	0	0	0
d	-	0	0	0
e	0	0	1	0
g	-	0	0	0
h	0	1	0	0

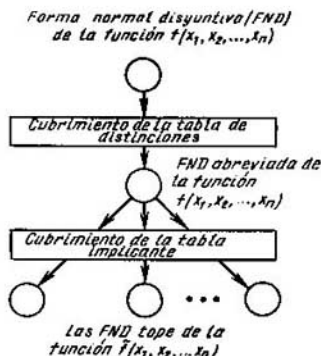


Fig. 2.1

Al emplear el método de Petrick hallamos todos los cubrimientos de esta tabla ( $a \vee b$ )  $ea = ae$ . Tenemos un cubrimiento que corresponde al intervalo maximal  $0 - - - 0 - - (0, 59)$ , al cual le corresponde la implicante simple  $\bar{x}_1 \bar{x}_5$ .

De modo análogo hallamos conjuntos de intervalos maximales que contienen los demás intervalos unitarios:

$$[I_{\text{máx}} \supset (97, 117)] = \{(32, 119)\} \rightarrow x_2 \bar{x}_4;$$

$$[I_{\text{máx}} \supset (2, 51)] = \{(0, 59), (2, 123)\} \leftrightarrow \bar{x}_1 \bar{x}_5, \bar{x}_5 x_6.$$

Como resultado se ha obtenido la FND abreviada de la función booleana  $\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_7)$  que ya es completamente definida. La región unitaria  $\bar{V}_1$  de la función  $\bar{f}$  contiene la región unitaria  $V_1$  de la función  $f$ ,  $\bar{V}_1 \supset V_1$ , la región nula  $\bar{V}_0$  de la función  $\bar{f}$  comprende la región  $V_0$  de la función  $f$ ,  $\bar{V}_0 \supset V_0$ :

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_7) = \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5 x_6.$$

La formación de los intervalos maximales y la construcción de la FND abreviada de la función  $\bar{f}$  es la primera etapa de la minimización en la clase de las FND. La segunda etapa es el paso de la FND abreviada de la función  $\bar{f}$  a la FND tope de esta función (fig. 2.1).

Se llama FND tope de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una FND que no determina la función  $f$  con una exactitud de región incompletamente definida cuando se elimina aunque más no sea que una terma primaria arbitraria  $x^0$ . La FND tope de una función booleana se obtiene como resultado del cubrimiento de las columnas por las filas de una tabla implicante (una tabla bidimensional, en la cual a cada fila le corresponde biunívocamente un intervalo maximal, y a cada columna, un intervalo unitario, mientras que en la intersección de una  $i$ -ésima fila con una  $j$ -ésima columna se encuentra 1, si el  $j$ -ésimo intervalo se incluye en el  $i$ -ésimo intervalo maximal, en el caso contrario en la intersección se encuentra 0).

Construyamos una tabla implicante para el ejemplo considerado (tabla 2.6, b).

Tabla 2.6, b

Intervalos unitarios maximales de la función $f$	Intervalos unitarios de la función $f$		
	(0, 42)	(97, 117)	(2, 51)
(0, 59)	1	0	1
(32, 119)	0	1	0
(2, 123)	0	0	1

La tabla tiene un cubrimiento que se forma por la primera y la segunda filas. Este cubrimiento engendra la FND tope de la función  $\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_7) = x_1x_3 \vee x_2x_4$ .

Teóricamente, cuando  $n \rightarrow \infty$ , el número de las FND tope de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  crece como el número de todas las distintas funciones booleanas de  $n$  variables  $2^{2^n}$ . De modo práctico el número de las FND tope aumenta con más lentitud que  $2^{2^n}$  a costa de un gran número de los vértices incompletamente definidos del hipercubo. El sondeo de todas las FND tope de la función booleana  $f$  determina la selección de la FND minimal de esta función.

En el ejemplo a examinar existe una FND tope; por consiguiente, es la FND minimal de la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_7)$ :

$$f(a, b, c, d) = \overline{ad} \vee \overline{bc},$$

donde  $a = x_1$ ,  $b = x_2$ ,  $c = x_4$ ,  $d = x_5$ . Contando con esta definición suplementaria, la función depende de cuatro variables.

Una función booleana obtenida de la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fijando una  $i$ -ésima variable,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , llámase *residual*. Si  $x_i = 1$ , la función residual se denomina *unitaria*, si  $x_i = 0$ , *nula*.

La función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  depende *insustancialmente* de la  $i$ -ésima variable, si sus funciones residuales respecto a esta variable son iguales.

## § 2.3. Completitud

Cualesquiera enunciación compleja puede representarse en la forma de una expresión que contiene enunciaciones simples (variables)  $x_i$ , operaciones de disyunción, conjunción, negación y, tal vez, paréntesis ( $()$ ). Consideremos qué propiedades deben satisfacer las operaciones por cuyo medio se puede expresar cualquiera enunciación compleja.

Simularemos la conjunción y la disyunción por la conexión en serie y en paralelo, respectivamente, de los elementos clave (para la exactitud: semiconductores), simularemos la negación por la inserción de carga en el

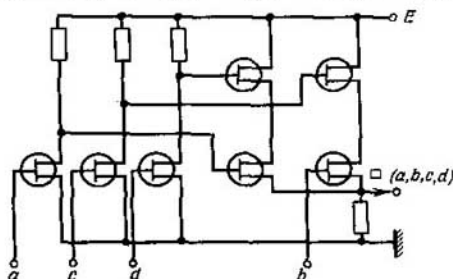


Fig. 2.2

circuito colector del transistor. Entonces la función booleana, obtenida a fines del párrafo anterior, se realiza en forma de un módulo integral con el circuito de sustitución representado en la fig. 2.2. Designemos la operación que se realiza por este elemento mediante  $\square(a, b, c, d)$  y consideremos el álgebra de enunciación de tipo  $\langle M, \square \rangle$ , donde  $M$  son las enunciaciones lógicas y  $\square(a, b, c, d) = ad \vee bc$ .

Establezcamos, si se puede representar cualesquiera función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en forma de superposición del sistema  $S = \{ \square \}$ , como lo es posible en el caso del sistema  $\{ \vee, \&, - \}$ .

Llámanse *superposición* del sistema  $S = \{ \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{k_1}), \varphi_2(x_1, \dots, x_2, \dots, x_{k_2}), \dots, \varphi_l(x_1, x_2, \dots, x_{k_l})$  cualesquiera función  $f$  obtenida:

- de  $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{k_j})$  cambiando las denominaciones de las variables,  $\varphi_j \in S$ ;
- sustituyendo algunas variables de una función  $\varphi_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{k_\alpha})$  por las funciones  $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_{k_j})$ ,  $\varphi_\alpha, \varphi_j \in S$ ;
- aplicando repetidamente los puntos a) y b).

Un sistema  $S$  se llama *completa en  $P_k$* , si cualesquiera función  $f$ ,  $f \in P_k$ , es representable en forma de superposición de este sistema y se denomina *base*, si la completitud de  $S$  se pierde, cuando se elimina, por lo menos, una función, donde  $P_k$  es una lógica de  $k$  signos.

Expresemos la disyunción y la negación mediante  $\square(a, b, c, d)$ ; entonces, debido a la descomposición de Shannon y la ley propuesta por De Morgan, cualquiera función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  puede expresarse por medio de  $S = \{ \square \}$ :

$$\bar{\alpha} = \square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha);$$

$$a \vee b = \overline{\alpha\alpha} \vee \overline{\beta\beta} = \square(\bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) =$$

$$\square(\square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha), \beta, \square(\beta, \beta, \beta, \beta), \square(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)).$$

En el caso general para establecer la completitud de un sistema  $S$  de funciones booleanas  $f_i(S \text{ en } P_2)$  se utiliza el criterio de completitud de Post—Yablonski.

Definamos con anticipación cinco clases de funciones booleanas.

Llámanse *clase*  $K_0$  de funciones booleanas  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que conservan la constante 0 un conjunto de funciones de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)/f_i(0, 0, \dots, 0) = 0\}.$$

Se denomina *clase*  $K_1$  de funciones booleanas  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que conservan la constante 1 un conjunto de funciones de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)/f_i(1, 1, \dots, 1) = 1\}.$$

Tomando como ejemplo el sistema  $S = \{\square\}$  examinemos los tests de reconocimiento de funciones que poseen estas propiedades:

$$\square(a, b, c, d) = \overline{ad} \vee \overline{bc},$$

$$\square(0, 0, 0, 0) = \overline{00} \vee \overline{00} = 1 \vee 0 = 1, \quad \square(a, b, c, d) \notin K_0,$$

$$\square(1, 1, 1, 1) = \overline{11} \vee \overline{11} = 0 \vee 0 = 0, \quad \square(a, b, c, d) \notin K_1.$$

Se llama *clase*  $K_l$  de funciones booleanas lineales  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un conjunto de funciones de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)/f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus \sum c_i x_i\},$$

$$c_0, c_i = 0, 1; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

donde  $\oplus, \sum$  son los signos de la operación "adición según el módulo dos":

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1; \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

Establezcamos si la función booleana  $\square(a, b, c, d)$  es lineal.

Supongamos que ésta es lineal y, por consiguiente, representable en la forma

$$\square(a, b, c, d) = c_0 \oplus c_a a \oplus c_b b \oplus c_c c \oplus c_d d.$$

Hallemos coeficientes incógnitos  $c_0, c_a, c_b, c_c, c_d$ , partiendo de la suposición de linealidad de esta función. Fijemos un juego 0000:

$$\square(0, 0, 0, 0) = 1,$$

$$c_0 \oplus c_a 0 \oplus c_b 0 \oplus c_c 0 \oplus c_d 0 = c_0, \quad c_0 = 1.$$

De manera análoga definamos los coeficientes  $c_a, c_b, c_c, c_d$ , fijando respectivamente los juegos 1000, 0100, 0010, 0001. Tenemos:

$$\square(1, 0, 0, 0) = \overline{1} \cdot \overline{0} \vee 0 \cdot \overline{0} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$1 \oplus c_a \cdot 1 \oplus c_b \cdot 0 \oplus c_c \cdot 0 \oplus c_d \cdot 0 = 1 \oplus c_a,$$

$$1 \oplus c_a = 0, \quad c_a = 1;$$

$$\square(0, 1, 0, 0) = \overline{0} \cdot \overline{0} \vee 1 \cdot \overline{0} = 1 \vee 1 = 1,$$

$$1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus c_b \cdot 1 \oplus c_c \cdot 0 \oplus c_d \cdot 0 = 1 \oplus c_b,$$

$$1 \oplus c_b = 1, \quad c_b = 0;$$

$$\square(0, 0, 1, 0) = \overline{0} \cdot \overline{0} \vee 0 \cdot \overline{1} = 1 \vee 0 = 1,$$

$$1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 0 \oplus c_c \cdot 1 \oplus c_d \cdot 0 = 1 \oplus c_c,$$

$$1 \oplus c_c = 1, \quad c_c = 0;$$

$$\square(0, 0, 0, 1) = \bar{0} \cdot \bar{1} \vee 0 \cdot \bar{0} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$1 \oplus 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 0 \oplus c_d \cdot 1 = 0,$$

$$1 \oplus c_d = 0, \quad c_d = 1.$$

De modo definitivo obtenemos

$$\square(a, b, c, d) = 1 \oplus a \oplus d.$$

Esta igualdad no se mantiene en cada uno de los demás 11 puntos. En efecto, en el punto (1, 1, 1, 1) tenemos

$$\square(1, 1, 1, 1) = \bar{1} \cdot \bar{1} \vee 1 \cdot \bar{1} = 0 \vee 0 = 0,$$

$$1 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \quad 0 \neq 1.$$

Por consiguiente, la suposición hecha es inválida. La función  $\square(a, b, c, d)$  es no lineal:  $\square(a, b, c, d) \notin K_1$ .

Se denomina *clase  $K_a$  de funciones booleanas autoduales*  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un conjunto de funciones booleanas de la forma

$$[f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)/f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)].$$

Consideremos la propiedad de autodualidad de la función booleana  $\square(a, b, c, d)$ . Construyamos una tabla (tabla 2.7)  $2 \times 2^n$  ( $n = 4$ ) que en la primera fila tiene equivalentes decimales correspondientes a los juegos  $(a, b, c, d)$ , en la segunda, valores de la función  $\square(a, b, c, d)$  que corresponden a estos juegos.

Tabla 2.7

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0

Una función es autodual, si sobre cualquier par de juegos *contrarios* (juegos para los cuales la suma de sus equivalentes decimales es igual a  $2^n - 1$ ) la función toma los valores contrarios.

La función  $\square(a, b, c, d)$  no es autodual:  $\square(7) = \square(8)$ .

Se denomina *clase  $K_m$  de funciones booleanas monótonas*  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un conjunto de funciones booleanas de la forma

$$\{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)/(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*) \geq (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \leftrightarrow \sigma_i^* \geq \sigma_i, i = 1, 2, \dots, n) \rightarrow f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*) \geq f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)\}.$$

Para realizar los tests de monotonía de la función  $\square(a, b, c, d)$  construiremos un hipercubo y analizaremos la distribución de valores de esta función en él (fig. 2.3). Si existe al menos una arista, a cuyos fines se les ponen en correspondencia los juegos binarios

$(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$  y  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  de tipo

$(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*) \geq (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , para los cuales

$f(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*) < f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , tal función

booleana no es monótona. En otras palabras, en el hipercubo existe por lo menos un 0 que cubre 1.

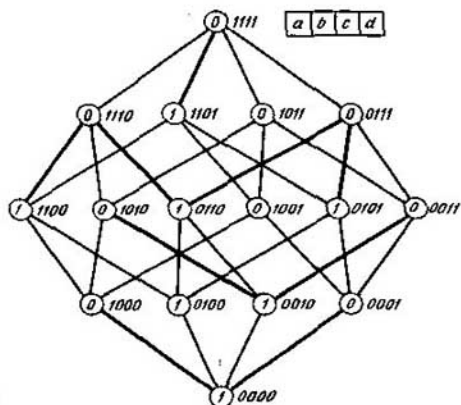


Fig. 2.3

La función booleana a examinar  $\square(a, b, c, d)$  no es monótona (fig. 2.3):

$$(1, 0, 0, 0) \geq (0, 0, 0, 0),$$

$$f(1, 0, 0, 0) < f(0, 0, 0, 0).$$

*Criterio de completitud.* El sistema  $S$  de funciones booleanas  $f_i$  es completo si, y sólo si, se cumplen cinco condiciones: existen una función  $f_i \in S$  que no conserva la constante cero:  $f_i \neq K_0$ ; una función  $f_i \in S$  que no conserva la constante unidad  $f_i \notin K_1$ ; una función no lineal, una función no autodual y una función no monótona en el sistema  $S$ .

Al usar el criterio de completitud y el método de Petrick en  $P_2$  construiremos las bases posibles con operaciones cero-, mono- y biádica.

Construiremos todas las funciones booleanas de dos variables (tabla 2.8).

Tabla 2.8.

Variables		Funciones booleanas															
$x_1$	$x_2$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

El índice  $i$  de una variable funcional  $f_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 15$ , es igual a un juego equivalente decimal de valores de esta función leído de arriba abajo. Señalemos estas funciones booleanas.

La función  $f_0(x_1, x_2) = 0$  es la *constante cero*.

La función  $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$  es la *conjunción*.

La función  $f_2(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2 = x_1 \vee x_2 = x_1 \rightarrow x_2 = x_1 \uparrow x_2$  es la *coimplicación izquierda* (se lee "no si  $x_1$ , entonces  $x_2$ ", el prefijo *co* proviene de la palabra latina *conversus* que significa *inverso*).

La función  $f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 \bar{x}_2$ .

La función  $f_4(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \downarrow x_2$  es la *coimplicación derecha*.

La función  $f_5(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_2$ .

La función  $f_6(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2$  es la *adición según el módulo dos* o la función de *no equivalencia*.

La función  $f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$  es la *disyunción*.

La función  $f_8(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \circ x_2$  es la *función de Webb*.

La función  $f_9(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 \infty x_2$  es la función de *equivalencia*.

La función  $f_{10}(x_1, x_2) = \bar{x}_2$  es la *negación*.

La función  $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_2 \vee x_1 = x_1 \leftarrow x_2$  es la *implicación derecha* (se lee "si  $x_2$ , entonces  $x_1$ ").

La función  $f_{12}(x_1, x_2) = \bar{x}_1$  es la *negación*.

La función  $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \rightarrow x_2$  es la *implicación izquierda* (se lee "si  $x_1$ , entonces  $x_2$ ").

La función  $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_1 \vee x_2 = x_1 | x_2$  es la *función de Sheffer*.

La función  $f_{15}(x_1, x_2) = 1$  es la *constante unidad*.

Para engendrar todas las bases en  $P_2$  construiremos una tabla bidimensional (tabla 2.9), a cada fila de la cual le ponemos en correspondencia biunívoca once funciones (no consideramos las funciones  $f_3, f_4, f_5, f_{10}, f_{11}$ ), a cada columna le ponemos en correspondencia una clase:  $K_0$  ( $K_0$  son las funciones que conservan la constante cero),  $K_1$  ( $K_1$  son las funciones que conservan la constante unidad;  $K_1$  ( $K_1$  son las funciones lineales);  $K_a$  ( $K_a$  son las funciones autoduales);  $K_m$  ( $K_m$  son las funciones monótonas) y en la célula  $(i, j)$  ponemos 1, si la  $i$ -ésima función no pertenece a la  $j$ -ésima clase, en caso contrario dejamos la célula  $(i, j)$  vacía.

Tabla 2.9

Identificador de la fila	Funciones $f_i$	Clases				
		$K_0$	$K_1$	$K_1$	$K_a$	$K_m$
<i>a</i>	0		1		1	
<i>b</i>	1			1	1	
<i>c</i>	2		1	1	1	1
<i>d</i>	6		1		1	1
<i>e</i>	7			1	1	



Identificador de la fila	Funciones $f_i$	Clases				
		$K_0$	$K_1$	$K_i$	$K_a$	$K_m$
$g$	8	1	1	1	1	1
$k$	9	1			1	1
$m$	12	1	1			1
$n$	13	1		1	1	1
$p$	14	1	1	1	1	1
$r$	15	1			1	1

Por medio del método de Petrick, transformando la forma multiplicativo-aditiva en la aditivo-multiplicativa engendramos todos los cubrimientos de las columnas por las filas de esta tabla:

$$\begin{aligned}
 &(g \vee k \vee m \vee n \vee p \vee r)(a \vee c \vee d \vee g \vee m \vee p)(b \vee c \vee e \vee g \vee n \vee p) \& \\
 &\&(a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee g \vee k \vee n \vee p \vee r)(c \vee d \vee g \vee k \vee m \vee n \vee p) = \\
 &(g \vee ak \vee kc \vee kd \vee m \vee an \vee cn \vee dn \vee p \vee ar \vee cr \vee rd) \& \\
 &\&(b \vee c \vee e \vee g \vee n \vee p)(c \vee d \vee g \vee k \vee m \vee n \vee p) = \\
 &(g \vee ak \vee kc \vee kd \vee m \vee an \vee cn \vee dn \vee p \vee ar \vee cr \vee rd) \& \\
 &\&(c \vee g \vee n \vee p \vee bd \vee bk \vee bm \vee ed \vee ek \vee em) = \\
 &g \vee p \vee abk \vee kc \vee an \vee cn \vee dn \vee ake \vee kbd \vee ked \vee \\
 &\vee mc \vee mn \vee bm \vee me \vee cr \vee rbd \vee red = \\
 &= g \vee p \vee kc \vee an \vee cn \vee dn \vee mc \vee mn \vee bm \vee me \vee \\
 &\vee cr \vee abk \vee ake \vee kdb \vee ked \vee rbd \vee red.
 \end{aligned}$$

Cada uno de los cubrimientos obtenidos  $\pi_i$  engendra la base  $B_i$ :

$\pi_1 = \{g\} \leftrightarrow B_1 = \{\circ\}$  es la *base de Webb*;

$\pi_2 = \{p\} \leftrightarrow B_2 = \{|\}$  es la *base de Sheffer*;

$\pi_3 = \{k, c\} \leftrightarrow B_3 = \{\vdash, \infty\}$ ,

$\pi_4 = \{a, n\} \leftrightarrow B_4 = \{\rightarrow, 0\}$  es la *base implicativa*;

$\pi_5 = \{c, n\} \leftrightarrow B_5 = \{\rightarrow, \vdash\}$ ,

$\pi_6 = \{d, n\} \leftrightarrow B_6 = \{\rightarrow, \oplus\}$ ,

$\pi_7 = \{m, c\} \leftrightarrow B_7 = \{\vdash, \bar{\phantom{x}}\}$  es la *base coimplicativa*;

$\pi_8 = \{m, n\} \leftrightarrow B_8 = \{\rightarrow, \bar{\phantom{x}}\}$  es la *base implicativa*;

$\pi_9 = \{b, m\} \leftrightarrow B_9 = \{\&, \bar{\phantom{x}}\}$  es la *base conjuntiva de Boole*;

$\pi_{10} = \{m, e\} \leftrightarrow B_{10} = \{\vee, \bar{\phantom{x}}\}$  es la *base disyuntiva de Boole*;

$\pi_{11} = \{c, r\} \leftrightarrow B_{11} = \{\vdash, 1\}$  es la *base coimplicativa*;

$\pi_{12} = \{a, b, k\} \leftrightarrow B_{12} = \{\infty, \&, 0\}$ ;

$\pi_{13} = \{a, k, e\} \leftrightarrow B_{13} = \{\infty, \vee, 0\}$ ;

$\pi_{14} = \{k, b, d\} \leftrightarrow B_{14} = \{\oplus, \&, \infty\}$ ;

$$\pi_{15} = \{k, e, d\} \leftrightarrow B_{15} = \{\oplus, \vee, \infty\};$$

$$\pi_{16} = \{r, b, d\} \leftrightarrow B_{16} = \{\oplus, \&, 1\} \text{ es la base de Zhegalkin};$$

$$\pi_{17} = \{r, e, d\} \leftrightarrow B_{17} = \{\oplus, \vee, 1\}.$$

Quedan obtenidas 17 bases, en cada una de las cuales no se puede quitar ninguna función sin perder la completitud en  $\mathbf{P}_2$ .

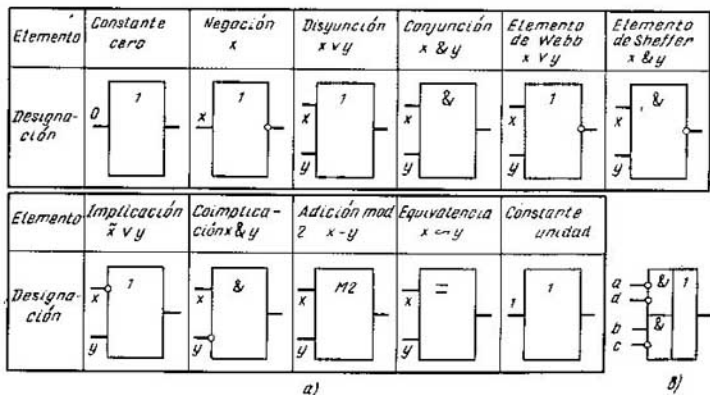
En la base  $\{\vee, \&, \bar{\phantom{x}}\}$  a cualesquiera enunciación compleja le corresponde una enunciación equivalente en cualesquiera de estas bases.

Por ejemplo, en la base implicativa  $\{\rightarrow, \bar{\phantom{x}}\}$  a la enunciación "no  $a$  o  $b$  y  $c$ " le corresponde la enunciación equivalente "si  $a$ , entonces no si  $b$ , entonces no  $c$ ".

$$\bar{a} \vee bc = a \rightarrow bc = a \rightarrow \overline{b \vee c} = a \rightarrow \overline{(b \rightarrow c)}.$$

La realización técnica de las funciones básicas puede tener por fundamento el empleo de distintos fenómenos físicos, por ejemplo, la implicación y la coimplicación se basa en los fenómenos magnéticos y las funciones de Sheffer y Webb, en los fenómenos de semiconductores.

De acuerdo con las normas estatales de la URSS 2.473-72, los elementos básicos se representan gráficamente en forma de rectángulos, en los cuales las entradas inversas y la salida se representan como círculos no rayados y se pone encima 1 si la cópula exterior es la "disyunción", y  $\&$ , si lo es la "conjunción", excepto la adición según el módulo dos (entonces encima se pone M2) y la equivalencia (que se designa por  $\equiv$ ) (fig. 2.4, a). Los elementos más complejos se representan gráficamente en forma de composiciones de los elementos enumerados a base de la representación



a)

b)

Fig. 2.4

de una función booleana realizable en forma de una FND o una FNCj. Por ejemplo, el elemento examinado antes  $\square(a, b, c, d)$  puede ser representado gráficamente en forma de un rectángulo (fig. 2.4, b) que corresponde a la FND de la función  $\square(a, b, c, d) = \overline{ad} \vee \overline{bc}$ .

## § 2.4. Síntesis de los circuitos lógicos

Examinemos la síntesis de los circuitos lógicos en una base prefijada.

Demostremos el método de simulación directa de las cópulas  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\bar{\phantom{x}}$  con ayuda de las cópulas de la base prefijada.

1. Para una función booleana prefijada se halla su forma de paréntesis, óptima en el sentido del número de cópulas  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\bar{\phantom{x}}$ .

2. Se expresan las cópulas clásicas  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\bar{\phantom{x}}$  en forma de una superposición de la base prefijada.

3. Se ponen los resultados del punto 2 en la expresión obtenida en el punto 1 marcando con trazos en esto las uniones de los bloques que simulan  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\bar{\phantom{x}}$  en la base prefijada.

4. Al analizar las uniones y utilizando la ley de doble negación, se elimina la redundancia del circuito lógico.

**Ejemplo 2.3.** Sintetizar un circuito lógico que realiza una función booleana

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} 1 & \text{sobre } 0 - 10, 10 - 11, 0 - 101, \\ 0 & \text{sobre } 1 - 10-, 1 - 001, 0 - 100 \end{cases}$$

en la base  $B = \{\rightarrow, 0\}$ .

1. Al cubrir las tablas de distinciones (tabla 2.10, hallemos la FND abreviada de una función booleana completamente definida  $\check{f}$ , cuyas regiones unitarias  $\check{M}_1$  y nula  $\check{M}_0$  incluyen respectivamente regiones unitaria y nula de la función dada  $f$ ,  $\check{f} \supset f$ .

La FND abreviada de la función  $\check{f}$  tiene siguiente forma:

$$\check{f}(x_1, x_2, \dots, x_5) = x_4 \vee \overline{x_1 x_3}.$$

2. Expresamos las cópulas  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\bar{\phantom{x}}$  por medio de las de una base implicativa:

$$\bar{a} = a \rightarrow 0,$$

$$a \vee b = \overline{\overline{a} \& \overline{b}} = \overline{\overline{a} \rightarrow b} = (a \rightarrow 0) \rightarrow b,$$

$$a \& b = \overline{\overline{a \vee b}} = \overline{a \rightarrow b} = \overline{a \rightarrow (b \rightarrow 0)} = (a \rightarrow (b \rightarrow 0)) \rightarrow 0.$$

Tabla 2.10

Intervalos de la región unitaria de la función $\check{f}$		Intervalos de la región nula de la función $f$		
		1 - 10 -	1 - 001	0 - 100
$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	0	0	0
$\overline{x_3}$	0	0	0	0
$\overline{x_4}$	$\overline{x_5}$	0	0	0
$x_4$	1	1	1	1
$x_5$	0	0	1	0

Intervalos de la región unitaria de la función $f$		Intervalos de la región nula de la función $f$		
		1 — 10 —	1 — 001	0 — 100
$x_1$	1	0	0	1
$x_2$	0	0	0	0
—	—	0	0	0
$x_4$	1	1	1	1
$x_5$	1	0	0	1
<hr/>				
$x_1$	0	1	1	0
—	—	0	0	0
$x_3$	1	0	1	0
$x_4$	0	0	0	0
$x_5$	1	0	0	1

El punto 3 es realizable en forma de un grafo con vértices ponderados,  $\rightarrow, f, x_i, 0$  (fig. 2.5, a). En la base dada la ley de doble negación puede representarse como en la fig. 2.5, b. Eliminando la redundancia, obtenemos el circuito lógico  $S$  (fig. 2.5, c).

El método descrito de síntesis puede aplicarse con éxito para proyectar circuitos simples.

Examinemos una serie de métodos de proyectar circuitos. La eficiencia de cada uno de ellos aumenta en comparación con los anteriores.

*El método de cascadas* basado en la descomposición de Shannon

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)} \& x_i^{\sigma_i} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

permite, al existir los bloques de exclusión de  $k$  variables, reducir la realización de una función booleana de  $n$  variables a la realización de una función de  $n - k$ ,  $k \geq 1$ , variables. A su vez, la dimensión de funciones residuales  $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  puede bajarse a su vez al excluir  $l$  variables,

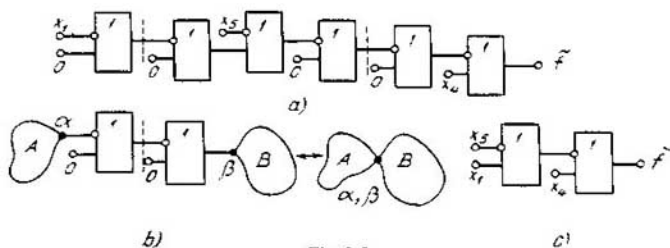


Fig. 2.5

etc., hasta que las funciones residuales tengan la forma simple y su realización no sea difícil en la base prefijada.

La complejidad de funciones residuales depende del grado de exclusión de variables en una función booleana dada  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . El número de todos los posibles procedimientos de exclusión de variables aumenta de modo combinatorio. Por ejemplo, si utilizamos sólo los bloques que excluyen una misma variable en cada nivel, este número es igual a  $n!$ . Empero, en todo nivel se puede excluir tanto una misma variable como también distintas; luego, a cada paso se puede excluir diverso número de variables (una, dos, tres, etc.). Escoger una exclusión óptima de variables mediante el sondeo de todos los procedimientos de exclusión es un proceso que requiere trabajo de mucha laboriosidad.

Una exclusión óptima se busca empleando criterios heurísticos uno de los cuales se basa en el empleo de la noción de la derivada de una función booleana.

*Derivada de primer orden  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  de la función booleana  $f$  respecto a una variable  $x_i$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n) \oplus f(x_1, x_2, \dots, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n), \quad (2.13b)$$

donde  $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n)$  es una función residual unitaria;  $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n)$  es una función residual nula; aquí y a continuación  $\oplus$  es la suma según el módulo dos. Una función residual unitaria se obtiene después de hacer una variable  $x_i$  igual a la unidad, una función nula resulta después de hacer  $x_i$  igual a cero.

**Ejemplo 2.4.** Calculemos la derivada  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  de la función booleana

$$f(x_1, x_2, x_3) = \vee(0, 4, 7)$$

donde 0, 4, 7 son los equivalentes decimales de juegos binarios, sobre los cuales la función  $f$  es igual a 1,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2x_3.$$

Según la definición,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= (\overline{x_2}x_3 \vee x_2x_3) \oplus \overline{x_2}x_3 = \\ &= (\overline{x_2}x_3 \vee x_2x_3) \& \overline{x_2}x_3 \vee \\ &\vee (\overline{x_2}x_3 \vee x_2x_3) \& \overline{x_2}x_3 = \\ &= (\overline{x_2}x_3 \vee x_2x_3)(x_2 \vee x_3) \vee \\ &\vee (x_2 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \& \overline{x_2}x_3 = x_2x_3. \end{aligned}$$

Una derivada de primer orden  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  de la función booleana  $f(x_1, \dots, \dots, x_n)$  determina las condiciones, para las cuales esta función cambia su

valor cuando se conmuta la variable  $x_i$  (el valor de  $x_i$  se sustituye por su contrario).

En el ejemplo considerado la función  $f(x_1, x_2, x_3)$  cambia su valor  $\sigma$  por  $\bar{\sigma}$  ( $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ ),  $\sigma = 0, 1$ , al cambiar el valor de la variable  $x_1$ ,  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ , bajo la condición de que la conjunción  $x_2 x_3$  tome el valor de "verdad", o sea,  $x_2 = x_3 = 1$ .

Se denomina *derivada mixta*  $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$  de la función booleana  $f$  una expresión de la forma

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

La derivada mixta de orden  $k$   $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$  se calcula aplicando la relación (2.13)  $k$  veces y fijando las variables  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  (no tiene importancia el orden en que se fijan las variables).

La derivada de orden  $k$   $\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})}$  de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  respecto a las  $k$  variables  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  determina las condiciones, para las cuales esta función cambia su valor sustituyendo simultáneamente los valores de las variables  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ .

Según Bochmann, la derivada de orden  $k$   $\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})}$  de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  respecto a las variables  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  es igual a la suma según el módulo dos de todas las derivadas de primer orden, de las segundas, las terceras y las  $k$ -ésimas derivadas mixtas fijando las variables  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \sum_{i, j; i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \oplus \\ &\oplus \sum_{i, j, s} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s} \oplus \dots \oplus \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \\ &i, j, s, \dots = i_1, i_2, \dots, i_k. \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Ejemplo 2.5.** En un circuito lógico que realiza la función booleana  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3$ , determinemos las condiciones de conmutación de un canal de salida  $f$  cuando se conmuta cada canal de entrada, se conmutan simultáneamente el primer canal y el segundo, y, al mismo tiempo, los tres canales  $x_1, x_2, x_3$ .

Tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \vee \bar{x}_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \oplus x_1 \bar{x}_3 = x_1(1 \oplus \bar{x}_3) = x_1 x_3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2 \oplus x_1 = x_1(x_2 \oplus 1) = x_1 \bar{x}_2.$$

La condición  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$  es la de conmutación del canal de salida  $f$  cuando se conmuta el canal de entrada  $x_1$ : 1 en caso de alimentación del segundo canal ó 0 en caso del tercero; para la conmutación del primer canal  $x_1$  de  $\sigma$  a  $\bar{\sigma}$  ( $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ ), el canal de salida se conmuta de  $\sigma$  a  $\bar{\sigma}$  ( $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ ,  $\sigma = 0,1$ ). El canal de salida  $f$  se conmuta,  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ , cuando se conmuta el canal de entrada  $x_2$ ,  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ , si  $x_1 = x_3 = 1$ , y  $f$  se conmuta  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ , cuando se conmuta  $x_3$ ,  $\bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ , para  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $\sigma = 0,1$ . Luego hallamos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = 1 \oplus \bar{x}_3 = x_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial(x_1, x_2)} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \\ &\oplus x_1 x_3 \oplus x_3 = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_3(x_1 \oplus 1) = \\ &= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 x_3 = (x_2 \vee \bar{x}_3) \& \bar{x}_1 x_3 \vee \\ &\vee (x_2 \vee \bar{x}_3) \& \bar{x}_1 x_3 = (x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_3) \vee \\ &\vee \bar{x}_2 x_3 \& \bar{x}_1 x_3 = \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = \\ &= \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2. \end{aligned}$$

El canal de salida  $f$  se conmuta con cualquiera conmutación simultánea de los canales de entrada  $x_1$ ,  $x_2$ , cuando  $x_3 = 0$ , e independientemente del estado del canal de entrada  $x_3$ , cuando  $x_1$  y  $x_2$  se conmutan de 1,1 a 0,0 o de 0,0 a 1,1. Determinemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial(x_1, x_2, x_3)} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = x_2 \oplus 1 = \bar{x}_2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = x_1, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \right) = 1, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial(x_1, x_2, x_3)} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_3} \oplus \\ &\oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \oplus \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \oplus \\ &\oplus \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_1 x_3 \oplus \\ &\oplus x_1 \bar{x}_2 \oplus x_3 \oplus \bar{x}_2 \oplus x_1 \oplus 1 = \\ &= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus x_3(x_1 \oplus 1) \oplus \bar{x}_2(x_1 \oplus 1) \oplus \\ &\oplus \bar{x}_1 = (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \oplus 1) = \\
&= (x_2 \vee \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 x_3 \oplus \bar{x}_1 (\bar{x}_2 \oplus 1) = \\
&((x_2 \vee \bar{x}_3) \& \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \& \bar{x}_1 x_3) \oplus \\
&\oplus \bar{x}_1 x_2 = ((x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_3) \vee \\
&\vee \bar{x}_2 x_3 \& \bar{x}_1 x_3) \oplus \bar{x}_1 x_2 = (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \\
&\vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3) \oplus \bar{x}_1 x_2 = (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \\
&\vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \oplus \bar{x}_1 x_2 = (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \& \\
&\& \bar{x}_1 x_2 \vee (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \& \bar{x}_1 x_2 = \\
&= (\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) \vee \\
&\vee x_3 (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) \bar{x}_1 x_2 = \\
&= x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \\
&\vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \\
&\vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3.
\end{aligned}$$

Con la conmutación del vector de entrada  $4 \leftrightarrow 3$ ,  $6 \leftrightarrow 1$  y  $7 \leftrightarrow 0$  se conmuta el canal de salida  $f$ .

El criterio de exclusión óptima de las variables en el método de cascadas consiste, primero, en la exclusión de variables, con la conmutación de las cuales la función booleana se conmuta con el número máximo de condiciones. Este número máximo se determina por el peso de la derivada.

Llábase *peso de la derivada de la función booleana* el número de constituyentes de esta derivada.

Al emplear los bloques que excluyen  $k$  variables, se hallan las derivadas de orden  $k$  de una función realizable y se busca el valor máximo del peso de la derivada  $p\left(\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})}\right)$ , que determina variables para excluir. Para las funciones booleanas residuales obtenidas se vuelve a hallar las derivadas, se determinan los pesos, mientras que la derivada de la función residual a examinar que tiene el peso máximo determina variables correspondientes que en este nivel se excluyen para esta función residual, etc., hasta que las funciones residuales tengan realización simple.

**Ejemplo 2.6.** Sinteticemos un circuito lógico que realiza la función booleana

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_5) = & \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee \\
& \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 x_5,
\end{aligned}$$

empleando bloques de exclusión de una variable (fig. 2.6, a).

Determinemos la variable  $x_1$ , respecto a la cual la derivada  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  tiene peso máximo, es decir, la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_5)$  depende de ella del modo más esencial.

Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} = & (\bar{x}_2 x_3 \vee x_3 \bar{x}_5 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 x_5) \oplus \\
& \oplus (x_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee \bar{x}_3 x_4 x_5).
\end{aligned}$$



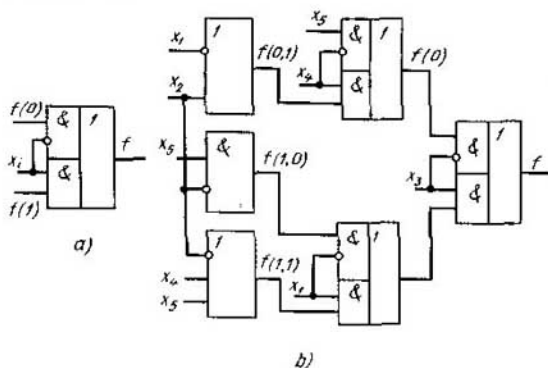


Fig. 2.6

Para calcular el peso de la derivada  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  que depende de cuatro variables  $x_2, x_3, x_4, x_5$ ,  $x_1$  representamos un espacio cuadrimensional con las generatrices  $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$  en forma de un producto cartesiano de dos espacios bidimensionales  $\{x_2, x_3\} \times \{x_4, x_5\}$  con las generatrices  $\{x_2, x_3\}$  y  $\{x_4, x_5\}$ , respectivamente. Entonces, la derivada  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  puede representarse en forma de una tabla bidimensional: a cada valor de  $\sigma_2\sigma_3$  de las variables  $x_2, x_3$  les corresponde biunívocamente una fila de la tabla, a una columna le corresponden los valores de  $\sigma_4\sigma_5$  de las variables  $x_4, x_5$ . En la intersección de la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna que corresponde biunívocamente a un punto de un espacio cuadrimensional con las generatrices  $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , escribimos el valor de  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  en este punto. El peso de la derivada  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  es igual al número de unidades en esta tabla (tabla 2.11, a).

Tabla 2.11. a

$x_2x_3$	$x_4x_5$				$x_2x_3$	$x_4x_5$			
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	0	0	1	1	2	0	0	0	0
1	1	0	1	0	3	1	0	1	1

Así, pues,  $P\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 7$ .

De modo análogo calculemos los pesos de las derivadas

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$  (tablas 2.11, b, c, d, e).

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5) \oplus (x_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_3 x_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5),$$

Tabla 2.11, b

$x_1, x_3$	$x_4, x_5$			
	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 5;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5) \oplus (x_1 \bar{x}_2 x_3) \vee x_1 x_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_5 \vee x_3 x_5),$$

Tabla 2.11, d

$x_1, x_2$	$x_3, x_5$			
	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	1	0	0	1

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 5;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = (x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_5) \oplus (x_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5).$$

Tabla 2.11, c

$x_1, x_2$	$x_4, x_5$			
	0	1	2	3
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	0	1	0	0

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 8;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_4) \oplus (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_4),$$

Tabla 2.11, e

$x_1, x_2$	$x_3, x_4$			
	0	1	2	3
0	1	0	1	1
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	1	0

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_5}\right) = 7.$$

El valor máximo  $\max_i P\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$  se obtiene diferenciando la función  $f$  respecto a la variable  $x_3$ . Excluyendo esta variable, obtenemos dos funciones residuales: la unitaria  $f(x_1, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1)$  y la nula  $f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4, x_5) = f(0)$ :

$$f(1) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_5.$$

$$f(0) = \bar{x}_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5.$$

De manera análoga determinemos la exclusión óptima de las variables en el siguiente nivel del circuito lógico (tablas 2.12, *a*, *b*, *c*, *d*; tablas 2.13, *a*, *b*, *c*, *d*):

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_1} = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_5) \oplus \bar{x}_2 x_5,$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_2} = (x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_4 \oplus \oplus (x_1 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_5),$$

Tabla 2.12, *a*

$x_2$	$x_4 x_5$			
	0	1	2	3
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

$$P\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_1}\right) = 5;$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_4} = (x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_5) \oplus (x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_5),$$

Tabla 2.12, *c*

$x_1$	$x_2 x_3$			
	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1

$$P\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_4}\right) = 1;$$

Excluimos la variable  $x_1$  y obtenemos funciones residuales de la forma

$$f(x_1 = 1, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1, 1) = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_5 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4,$$

$$f(x_1 = 0, x_2, x_3 = 1, x_4, x_5) = f(1, 0) = \bar{x}_2 x_5.$$

$$f(0) = \bar{x}_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5 = \bar{x}_1 x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5,$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_1} = (x_2 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5) \oplus \oplus (x_4 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5),$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_2} = (\bar{x}_1 x_4 \vee x_4 \vee \bar{x}_4 x_5) \oplus \oplus (\bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_4 x_5),$$

Tabla 2.12, *b*

$x_1$	$x_4 x_5$			
	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	0	1	0	0

$$P\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_2}\right) = 3;$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial x_5} = (x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2) \oplus \oplus (x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \vee x_1 x_2 x_4),$$

Tabla 2.12, *d*

$x_1$	$x_3 x_4$			
	0	1	2	3
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0

$$P\left(\frac{\partial f(1)}{\partial x_5}\right) = 3.$$

Tabla 2.13, a

$x_2$	$x_4 x_5$			
	0	1	2	3
0	0	0	1	1
1	0	0	0	0

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_1}\right) = 2;$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_4} = (\bar{x}_1 x_2) \oplus x_5$$

Tabla 2.13, b

$x_1$	$x_4 x_5$			
	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_2}\right) = 2;$$

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_5} = (\bar{x}_1 x_4 \vee x_2 x_4 \bar{x}_4) \oplus$$

$$\oplus (\bar{x}_1 x_4 \vee x_2 x_4),$$

Tabla 2.13, c

$x_1$	$x_2 x_5$			
	0	1	2	3
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_4}\right) = 4;$$

Tabla 2.13, d

$x_1$	$x_2 x_4$			
	0	1	2	3
0	1	0	1	0
1	1	0	1	0

$$P\left(\frac{\partial f(0)}{\partial x_5}\right) = 4.$$

Excluimos la variable  $x_4$  y obtenemos funciones residuales de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5) = f(0, 1) = \bar{x}_1 \vee x_2.$$

$$f(x_1, x_2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5) = f(0, 0) = x_5.$$

Como resultado obtenemos el circuito lógico que realiza la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_5)$  (fig. 2.6, b).

El criterio de exclusión óptima de variables tiene carácter heurístico, lo que se basa en la siguiente suposición: cuanto mayor es el peso de una

derivada  $P\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ , tanto más la función  $f$  depende de la variable  $x_i$ . Si

existen bloques de exclusión de  $k$  variables, la construcción del circuito se realiza de modo análogo, calculando el peso de las derivadas de orden

$$k P\left(\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})}\right).$$

En la matemática discreta no existe el concepto de límite. Sin embargo, en las expresiones (2.13) . . . (2.15) se usa el término "derivada". Esto se

vincula con la descomposición de una función booleana en una serie, análoga a la serie de Maclaurin en el punto  $00 \dots 0$  o a la serie de Taylor en un punto arbitrario del espacio. Examinemos las descomposiciones dadas en la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Dos funciones  $f_\alpha$  y  $f_\beta$  se denominan *mutuamente ortogonales* si su conjunción es igual a 0:  $f_\alpha \& f_\beta = 0$ .

La expresión (2.11) equivale a la igualdad

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(\nu(\sigma_1, \sigma_2, \\ \dots, \sigma_n)) \\ \mathcal{U}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \\ \sigma_n) = 1}} \&_{i=1}^n x_i^{\sigma_i}, \quad (2.16)$$

puesto que  $\alpha \vee \beta = \alpha \oplus \beta \oplus \alpha\beta$  y las constituyentes de la unidad de la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son mutuamente ortogonales dos a dos.

En la expresión (2.16) en cada constituyente sustituimos  $\bar{x}_i$  por  $(x_i \oplus 1)$ . Aplicando las siguientes identidades:

*de conmutatividad*

$$\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha;$$

*de asociatividad*

$$\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma;$$

*de distributividad de la conjunción respecto a la adición según el módulo dos*

$$\alpha \& (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \& \beta) \oplus (\alpha \& \gamma); \quad (2.17)$$

*de operación con constantes*

$$\alpha \oplus \alpha = 0, \quad \alpha \oplus 1 = \bar{\alpha}, \quad \alpha \oplus 0 = \alpha, \quad \alpha \oplus \bar{\alpha} = 1,$$

obtenemos una representación de la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 \oplus \sum_{i=1}^n f_i x_i \oplus \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^n f_{ij} x_i x_j \oplus \dots \oplus \sum_{\substack{i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, \dots, i_{k-1} \neq i_k \\ i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}}^n f_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \oplus \dots \oplus \quad (2.18)$$

$$\oplus f_{12 \dots n} x_1 x_2 \dots x_n,$$

$$f_0, f_i, f_{ij}, \dots, f_{i_1 i_2 \dots i_k}, \dots, f_{12 \dots n} = 0, 1.$$

La expresión (2.18) se llama *polinomio de Zhegalkin de la función*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Diferenciemos sucesivamente el polinomio de Zhegalkin de la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  respecto a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_k$  y determinemos

el valor de esta derivada en el punto  $00 \dots 0$ . Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial(f \oplus \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \oplus \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.19)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \big\&_{j=1}^n x_j \right) = \big\&_{j=1, j \neq i}^n x_j, \quad (2.20)$$

después de la diferenciación respecto a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_k$  obtenemos que

$$\left. \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} \right|_{00 \dots 0} = f_{12 \dots k}.$$

En efecto, después de diferenciar respecto a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , en la expresión (2.18), todos los términos de la descomposición hasta  $f_{12 \dots k}$  se anulan y, como resultado de la sustitución  $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0$ , los demás términos de esta descomposición, excepto a  $f_{12 \dots k}$ , también serán iguales a 0. De aquí obtenemos el teorema de descomposición de cualesquiera función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en el punto  $00 \dots 0$ .

**Teorema 2.2.** *Cualquiera función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  puede representarse por su valor en el punto  $00 \dots 0$  y los valores de todas las derivadas*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}, \quad i, j (i \neq j), \dots = 1, 2, \dots, n,$$

en este punto en la forma

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(0, 0, \dots, 0) \oplus \\ &\oplus \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{00 \dots 0} \& x_i \oplus \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{00 \dots 0} \& \\ &\& x_i x_j \oplus \dots \oplus \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1 \\ i_1 \neq i_2, \dots, i_{k-1} \neq i_k}}^n \left. \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right|_{00 \dots 0} \& \\ &\& x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \oplus \dots \oplus \\ &\oplus \left. \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \right|_{00 \dots 0} \& x_1 x_2 \dots x_n. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para obtener la descomposición de una función booleana en la serie, análoga a la serie de Taylor, en el punto  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  introduzcamos nuevas coordenadas  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ , donde  $x'_i = x_i \oplus \sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces, en las coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , el punto  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  corresponderá al

punto  $00 \dots 0$  en las coordenadas  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ . Empleando la descomposición (2.21) de una función booleana en el punto  $00 \dots 0$  en las coordenadas  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  y sustituyendo cada variable  $x'_i$  por  $x_i \oplus \sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , obtenemos el teorema de descomposición de la función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en el punto  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ .

**Teorema 2.3.** *Cualquiera función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se determina por su valor en el punto  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  y los valores de todas sus derivadas*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}, \quad i, j (i \neq j), \dots = 1, 2, \dots, n,$$

en este punto según la expresión

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \oplus$$

$$\oplus \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \& (x_i \oplus \sigma_i) \oplus \quad (2.22)$$

$$\oplus \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \& (x_i \oplus \sigma_i)(x_j \oplus \sigma_j) \oplus$$

$$\oplus \dots \oplus \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_k=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots, i_{k-1} \neq i_k}}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \Big|_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \& (x_{i_1} \oplus \sigma_{i_1}) \oplus$$

$$\oplus \dots \oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \Big|_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \& (x_1 \oplus \sigma_1).$$

## § 2.5. Cálculo de las enunciaciones

El cálculo de enunciaciones como una teoría formal se puede definir con ayuda del método axiomático.

Una teoría axiomática (formal)  $T$  se considera determinada, si se cumplen las siguientes condiciones:

1) está prefijado un conjunto numerable, es decir, un conjunto, cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia biunívoca a los elementos de la serie natural  $1, 2, \dots$  de símbolos, o sea de los símbolos de la teoría  $T$ . Sucesiones finitas de los símbolos de la teoría se llaman expresiones de la teoría  $T$ ;

2) existe un subconjunto de expresiones de la teoría  $T$  llamadas fórmulas de la teoría  $T$  (a menudo se denominan fórmulas de la teoría  $T$  las fórmulas construidas correctamente). Para determinar, si una expresión es la fórmula en la teoría  $T$  existe un procedimiento eficaz;

3) está formado cierto conjunto de fórmulas denominadas *axiomas de la teoría T*;

4) existe un conjunto finito  $R_1, R_2, \dots, R_n$  de relaciones entre las fórmulas, llamadas *reglas de deducción*. Para cada  $R_i$  existe un  $j$  natural tal que para cualquier conjunto compuesto de  $j$  fórmulas y para cualquier fórmula  $F$  se resuelve eficientemente el problema de si están  $j$  fórmulas dadas en la relación  $R_i$  con la fórmula  $F$  y, en caso de "sí",  $F$  se denomina *consecuencia inmediata de  $j$  fórmulas dadas según la regla  $R_i$* .

Llámase *deducción en T* cualquiera sucesión  $F_1, F_2, \dots, F_m$  de fórmulas tal que para cualquier  $i$ , la fórmula  $F_i$  es ora un axioma de la teoría  $T$ , ora consecuencia inmediata de algunas fórmulas anteriores.

La fórmula  $F$  de la teoría  $T$  se denomina *teorema de la teoría T*, si en  $T$  existe una deducción tal que, en ella,  $F$  es la última fórmula; esta deducción se llama *deducción de la fórmula F*. En caso general puede ser que no exista ningún procedimiento eficaz, con cuya ayuda se pueda determinar por la fórmula dada, si existe su deducción en la teoría  $T$ .

Una fórmula, para la cual existe tal procedimiento se denomina *resoluble* en esta teoría, en caso contrario, *irresoluble*. En otras palabras, para las fórmulas irresolubles no se puede construir un algoritmo para dilucidar la propiedad de esta fórmula de ser teorema. Para esto se necesitan cada vez más nuevos ingenios (inventos) que no pueden ser formalizados.

Al utilizar el concepto de la teoría axiomática  $T$  definamos el cálculo de enunciados en la base disyuntiva de Boole.

1. Los símbolos de  $T$  son  $\vee, \neg, (, )$  y las letras  $m_i$  con los números positivos como índices:  $m_1, m_2, \dots$ . Los símbolos  $\vee, \neg$  se denominan *cópulas* y las letras  $m_i$ , *letras proposicionales*.

2. a) Todas las letras proposicionales son fórmulas;

b) si  $A$  y  $B$  son fórmulas, entonces  $(A \vee B)$  y  $(\overline{A})$  son también fórmulas;

c) una expresión es *fórmula* si, y sólo si, se puede establecerlo empleando los puntos a) y b).

De este modo, cualquier *fórmula del cálculo de enunciados* es una forma proposicional construida de letras proposicionales con ayuda de las cópulas  $\vee$  y  $\neg$ .

3. Cualesquiera que sean fórmulas  $A, B, C$  de la teoría  $T$ , las siguientes fórmulas son *axiomas de T*:

$$A \vee A \rightarrow A, \quad A \vee B \rightarrow B \vee A,$$

$$A \rightarrow A \vee B, \quad (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A \vee C),$$

donde la denotación  $\alpha \rightarrow \beta$  es equivalente a la denotación  $\overline{\alpha} \vee \beta$ .

4. Reglas de deducción del cálculo de enunciados son:

*regla de sustitución* (si  $\alpha$  es una fórmula deducible y en vez de cualquier variable por doquier en esta fórmula se realiza una sustitución de cualquier fórmula, nueva fórmula es también deducible);



*regla de conclusión* (si  $\alpha \rightarrow \beta$  y  $\alpha$  son fórmulas deducibles,  $\beta$  es también una fórmula deducible) es la regla modus ponens. Simbólicamente esta regla se denota así:  $\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$

Por ejemplo, si los enunciados  $A$  y  $A \rightarrow (q \rightarrow A)$  son verdaderos, el enunciado  $q \rightarrow A$  es también verdadero en virtud de la regla de conclusión.

De manera análoga se puede definir otras álgebras booleanas: *álgebra de Webb*  $A = \langle M, \circ \rangle$ ;

*álgebra de Sheffer*  $A = \langle M, | \rangle$ ;

*álgebra implicativa*  $A = \langle M, \rightarrow, 0 \rangle$ ;

*álgebra coimplicativa*  $A = \langle M, \rightarrow, 1 \rangle$ ;

*álgebra de Zhhegalkin*  $A = \langle M, \&, \oplus, 1 \rangle$ .

La generalización de lógicas de dos signos son lógicas de signos finitos.

Una función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que aplica un cortejo  $n$ -dimensional de  $k$  signos  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ,  $\sigma_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , en el conjunto  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  se denomina *función de una lógica de  $k$  signos*. Prefijaremos una función de una lógica de  $k$  signos  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  empleando una tabla de veracidad (tabla unidimensional) que tiene  $k^n$  filas o bien una tabla bidimensional que tiene  $k^n$  células.

Examinemos una función de tres signos, función de Webb, prefijada por las tablas 2.14, *a* y *b*.

Tabla 2.14, *a*

$x_a$	$x_b$	$y$
0	0	1
0	1	2
0	2	0
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

Tabla 2.14, *b*

$x_a$	$x_b$		
	0	1	2
0	1	2	0
1	2	2	0
2	0	0	0

### La función de Webb

$$y = x_a \circ x_b = \max(x_a, x_b) + 1 \pmod{k}$$

es completa en una lógica de signos finitos. Por lo tanto, el *álgebra de Webb* de signos finitos

$$A_W = \langle M, \circ \rangle, M = \{0, 1, 2, \dots, k-1\},$$

determina una lógica correspondiente de  $k$  signos.

A menudo se encuentran otras álgebras de  $k$  signos que se determinan por:

el álgebra de Post

$$A_P = \langle M, \vee, \sim \rangle, \quad M = \{0, 1, 2, \dots, k-1\},$$

donde  $x_a \vee x_b = \max(x_a, x_b)$  es la disyunción;

$\bar{x} = x + 1 \pmod{k}$  es el ciclo;

el álgebra de Rosser y Turquette

$$A_{RT} = \langle M, \vee, \&, j_i, i \rangle$$

$$M = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}, \quad 0 \leq i \leq k-1,$$

donde  $x_a \& x_b = \min(x_a, x_b)$  es la conjunción,

$$j_i(x) = \begin{cases} k-1 & \text{cuando } x = i \\ 0 & \text{cuando } x \neq i \end{cases} \quad \text{son funciones características,}$$

$$i = 0, 1, \dots, k-1.$$

La signatura de toda álgebra debe ser completa, independiente y no contradictoria. La signatura es *completa*, si cualquier otra fórmula puede representarse en forma proposicional con ayuda de sus elementos.

La signatura se denomina *independiente*, si no tiene elemento que se deduce empleando reglas de deducción de otros elementos de la signatura.

La signatura se llama *no contradictoria*, si no tiene ninguna fórmula  $F$ , válida simultáneamente con la fórmula  $\bar{F}$ .

Las lógicas de signos finitos son la generalización de las lógicas de dos signos. Por ejemplo, la lógica de Post  $\langle M, \vee, \sim \rangle$  generaliza la lógica de Boole  $\langle M, \vee, \bar{\phantom{x}} \rangle$ .

Al minimizar las funciones lógicas de las lógicas de signos finitos se puede utilizar los resultados de la lógica de dos signos, es decir, la teoría de la FND de funciones booleanas. Para esto introduzcamos una variable booleana  $x_\alpha^i$ , igual a 1 cuando  $x_\alpha = i$  y a 0 en caso contrario,  $x_\alpha \neq i$ . Denominaremos a  $x_\alpha^i$  de la fase  $i$ -ésima de la variable  $x_\alpha$ ,  $x_\alpha = \{0, 1, \dots, k-1\}$ :

$$x_\alpha^i = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x_\alpha = i, \\ 0 & \text{cuando } x_\alpha \neq i. \end{cases}$$

La negación de la  $i$ -ésima fase es igual a la disyunción de las demás fases de esta variable

$$\bar{x}_\alpha^i = \bigvee_{j=0, j \neq i}^{k-1} x_\alpha^j.$$

Es obvio que

$$x_\alpha^0 \vee x_\alpha^1 \vee \dots \vee x_\alpha^{k-1} = 1. \quad (2.23)$$

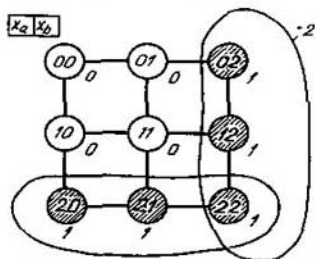


Fig. 2.7

En efecto

$$x_a^0 \vee (x_a^1 \vee x_a^2 \vee \dots \vee x_a^{k-1}) = x_a^0 \vee \bar{x}_a^0 = 1.$$

Consideremos la minimización de la función de tres signos de Webb prefijada por la tabla 2.14:

$$y = x_a \circ x_b,$$

$$y^0 = x_a^0 x_b^2 \vee x_a^1 x_b^2 \vee x_a^2 x_b^0 \vee x_a^2 x_b^1 \vee x_a^2 x_b^2.$$

De acuerdo con la leyes conmutativa, idempotente, asociativa y distributiva tenemos

$$\begin{aligned} y^0 &= (x_a^0 \vee x_a^1 \vee x_a^2) x_b^2 \vee x_a^2 (x_b^0 \vee x_b^1 \vee x_b^2) = \\ &= 1 \cdot x_b^2 \vee x_a^2 \cdot 1 = x_a^2 \vee x_b^2. \end{aligned}$$

Se puede obtener este mismo resultado comparando las ternas de conjunción para determinar la veracidad de la expresión (2.23) después de aplicar la ley distributiva (fig. 2.7). Cada conjunción corresponde a un intervalo maximal, es decir a la arista. Construyendo y cubriendo una tabla de Quine (tabla 2.15) enterémonos, si se puede minimizar la complejidad obtenida de la función.

Tabla 2.15

Intervalos maximales	Intervalos				
	02	12	20	21	22
2 —			1	1	1
— 2	1	1			1

Tenemos un cubrimiento  $\pi = \{2 -, -2\}$  al que corresponde una FND minimal de la fase nula de la función de tres signos de Webb:

$$y^0 = x_a^2 \vee x_b^2.$$

Análogamente obtenemos formas minimales para la primera y la segunda fases de la función  $y = x_a \circ x_b$ ;

$$y^1 = x_a^0 x_b^0,$$

$$y^2 = x_a^0 x_b^1 \vee x_a^1 x_b^0 \vee x_a^1 x_b^1.$$

De este modo, la minimización de una función de la lógica de  $k$  signos se reduce a la minimización de un sistema compuesto de  $k$  funciones booleanas, cada una de las cuales determina una fase respectiva de esta función.

Al minimizar las funciones lógicas  $\{f_i\}$  disminuye el coeficiente de conexidad del mografo correspondiente  $G^M(\{f_i\})$ . Se llama *coeficiente de conexidad de un grafo*  $s(G)$  la relación de la potencia de la signatura a la potencia del portador de este grafo. El coeficiente de conexidad de un mografo se define como coeficiente de conexidad del grafo obtenido después de quitar su modelización.

La función de Webb no minimizada se determina por un modelo de la forma

$$\Psi_1 = \langle M, S_3 \rangle,$$

$$M = \{x_a^0, x_a^1, x_a^2, x_b^0, x_b^1, x_b^2, y^0, y^1, y^2\},$$

$$S_3 = \{ \underbrace{\{x_a^0, x_b^0, y^1\}}_1, \underbrace{\{x_a^0, x_b^1, y^2\}}_2, \underbrace{\{x_a^0, x_b^2, y^0\}}_3,$$

$$\underbrace{\{x_a^1, x_b^0, y^2\}}_4, \underbrace{\{x_a^1, x_b^1, y^2\}}_5, \underbrace{\{x_a^1, x_b^2, y^0\}}_6,$$

$$\underbrace{\{x_a^2, x_b^0, y^0\}}_7, \underbrace{\{x_a^2, x_b^1, y^0\}}_8, \underbrace{\{x_a^2, x_b^2, y^0\}}_9 \},$$

El mografo  $G_1^M$  determinado mediante este modelo se representa en la fig. 2.8, a. Su coeficiente de conexidad  $S(G_1^M)$  es igual a  $2\frac{1}{3}$ :

$$S(G_1^M) = \frac{2 + 6 + 6 + 4 + 5 + 5 + 6 + 4 + 4}{2 \cdot 9} = 2\frac{1}{3}.$$

Después de la minimización esta función corresponde a un modelo  $\Psi_2$  de la forma

$$\Psi_2 = \langle M, S_2, S_3 \rangle,$$

$$M = \{x_a^0, x_a^1, x_a^2, x_b^0, x_b^1, x_b^2, y^0, y^1, y^2\},$$

$$S_2 = \{ \underbrace{\{x_a^2, y^0\}}_1, \underbrace{\{x_b^2, y^0\}}_2 \},$$

$$S_3 = \{ \underbrace{\{x_a^0, x_b^0, y^1\}}_1, \underbrace{\{x_a^0, x_b^1, y^2\}}_2,$$

$$\underbrace{\{x_a^1, x_b^1, y^2\}}_3, \underbrace{\{x_a^1, x_b^0, y^2\}}_4 \}.$$

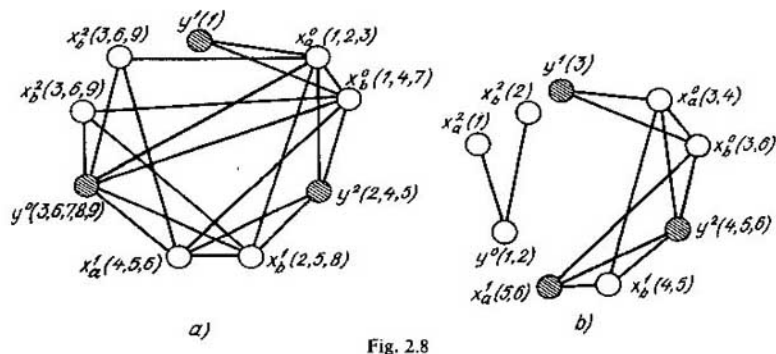


Fig. 2.8

El mografo  $G_2^M$  determinado por el modelo  $\Psi_2$  se representa en la fig. 2.8, b. Después de la minimización su coeficiente de conexidad disminuirá más de dos veces:

$$S(G_2^M) = \frac{2 + 4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1}{2 \cdot 9} = 1 \frac{1}{3}.$$

*Nota.* En la fig. 2.8 los vértices correspondientes a las fases de la función están rayados; los vértices correspondientes a las fases de argumentos no están rayados.

El coeficiente de conexidad de un grafo se determina como suma de los números de aristas, incidentes a los vértices del grafo, dividida por el número duplicado de sus vértices.

## § 2.6. Cálculo de los predicados

No basta utilizar el cálculo de enunciaciones para expresar razonamientos lógicos más complicados. En esencial, una lógica de  $k$  signos permite determinar, si existe o no una u otra propiedad sobre un conjunto finito de elementos. En el caso de conjuntos infinitos, para establecer una propiedad determinada de un concepto abstracto considerado, es necesario introducir funciones, cuyos argumentos recorren el número infinito de valores en el conjunto  $M$ . La función  $P$  que toma uno de los valores, 0 ó 1, y cuyos argumentos recorren valores del conjunto arbitrario  $M$  se denomina *predicado  $P$  en el campo-objeto  $M$* . El número de argumentos del predicado  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se denomina su *orden*.

El predicado  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  determina una relación  $n$ -aria  $R$  en  $M$ : si  $P(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 1$ ,  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  están en una relación  $R$  determinada por este predicado y si  $P(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ , estos elementos no están en la relación  $R$ ,  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \notin R$ .

Para simplificar la estructura de razonamientos lógicos complicados introduzcamos designaciones especiales para unas expresiones que se en-

cuentran a menudo. Acordemos designar la expresión “para cualquier elemento  $x \in M$  la propiedad  $R$  está cumplida” mediante  $(\forall x \in M)(R(x) = 1)$  y la expresión “existe por lo menos un elemento  $x \in M$  que posee la propiedad  $R$ ” mediante  $(\exists x \in M)(R(x) = 1)$ . En las expresiones  $(\forall x \in M)(R(x) = 1)$  y  $(\exists x \in M)(R(x) = 1)$  las designaciones  $\forall x$  y  $\exists x$  se denominarán *cuantificador universal* y *cuantificador existencial*, respectivamente.

Definamos inductivamente la fórmula del cálculo de predicados de modo análogo a la definición de la fórmula del cálculo de enunciaciones. Utilizaremos comas, paréntesis, símbolos del cálculo de enunciaciones, variables-objetos  $x_1, x_2, \dots$  (variables que toman valores de un campo-objeto), constantes-objetos,  $a_1, a_2, \dots$ , letras de predicado  $P_1, P_2, \dots$  y letras funcionales  $f_1, f_2, \dots$ .

Definamos conceptos de las termas de la fórmula elemental.

La definición de la *terma* es la siguiente:

1. Toda variable-objeto o constante-objeto es terma.
2. Si  $f$  es una letra funcional y  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  son las termas,  $f(\eta_1, \dots, \eta_2, \dots, \eta_n)$  es la terma.
3. Una expresión es la terma solamente en el caso cuando eso se desprende de las reglas 1 y 2.

Si  $P$  es una letra de predicado y  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  son las termas,  $P(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  es una fórmula elemental.

La definición de la *fórmula*:

1. Cualquier fórmula elemental es la fórmula.
2. Si  $A$  y  $B$  son fórmulas y  $x$  es una variable-objeto, cada una de las expresiones  $A \circ B$  ( $\circ$  es la cópula del cálculo de enunciaciones) y  $(\forall x \in M)(A(x))$  es la fórmula.
3. Una expresión es la fórmula en el caso, y sólo en el, cuando esto se desprende de las reglas 1 y 2.

En la expresión  $(\forall x \in M)(A(x))$  la fórmula  $A(x)$  se denomina campo de actuación del cuantificador  $\forall x$ .

Una *variable-objeto* que forma parte de una fórmula llámase *libre*, si no sigue directamente a un cuantificador y no entra en el campo de actuación del cuantificador respecto a esta variable. Todas las demás variables que integran la fórmula se llaman *conexas*. En el límite cualquier fórmula sin variables libres (fórmula cerrada) es una enunciación, verdadera o falsa, y cualquier fórmula con variables libres prefija una relación en el campo-objeto, a veces llamado *campo de interpretación*. Esta relación puede ser verdadera o falsa dependiendo de los valores de variables libres.

En la definición de la fórmula entre los símbolos principales no hay signo  $\exists$  para el cuantificador existencial, puesto que se puede definirlo como la denotación abreviada para  $\forall x(A(x))$ .

El cuantificador universal puede considerarse como generalización de la conjunción. Si el campo-objeto es finito y comprende elementos  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , la fórmula  $(\forall x)(F(x))$  equivale a la conjunción  $F(m_1) \& F(m_2) \& \dots \& F(m_n)$  y el cuantificador existencial  $(\exists x)$  puede considerarse como generalización de la disyunción con ello las denotaciones  $(\exists x)(F(x)) \vee F(m_1) \vee F(m_2) \vee \dots \vee F(m_n)$  son equivalentes.

Para los campos-objetos infinitos, los cuantificadores interpretan el papel de disyunciones y conjunciones infinitas.

En el cálculo de predicados, cada fórmula  $F(P_1, P_2, \dots, P_m, x_1, \dots, x_2, \dots, x_n)$  prefija un operador que procesa un sistema de predicados  $P_1, P_2, \dots, P_m$  en el predicado  $P_\alpha$  de argumentos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , donde todas estas variables en la fórmula son libres. Dos fórmulas  $F_a(P_1, P_2, \dots, P_m, x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $F_b(P_1, P_2, \dots, P_m, x_1, x_2, \dots, x_n)$  que prefijan el mismo operador que procesa el sistema de predicados  $P_1, P_2, \dots, P_m$  en el predicado  $P_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$  las denominaremos *equivalentes* y designaremos  $F_a = F_b$ .

Igual que en el cálculo de enunciaciones, denominaremos *transformación idéntica* el paso de la fórmula  $F$  a su forma equivalente.

A base de los conceptos introducidos, pueden ser demostrados los siguientes cuatro grupos de identidades:

*de dualidad*

$$(\exists x)(P(x)) = \overline{(\forall x)(\overline{P(x)})}, \quad (\forall x)(P(x)) = \overline{(\exists x)(\overline{P(x)})};$$

para  $\pi$ -operaciones (de conjunción y de cuantificador universal)

$$(\forall x)(F_a(x) \wedge F_b(x)) = (\forall x)(F_a(x)) \wedge (\forall x)F_b(x),$$

$$(\forall x)(\forall y)(F(x, y)) = (\forall y)(\forall x)(F(x, y));$$

para  $\sigma$ -operaciones (de disyunción y de cuantificador existencial)

$$(\exists x)(F_a(x) \vee F_b(x)) = (\exists x)(F_a(x)) \vee (\exists x)(F_b(x)),$$

$$(\exists x)(\exists y)(F(x, y)) = (\exists y)(\exists x)(F(x, y));$$

*de sacamiento de la constante*

$$(\Sigma x)(F_a \circ F_b(x)) = F_a \circ (\Sigma x)(F_b(x)),$$

donde  $(\Sigma x) = (\exists x), (\forall x)$ ;  $\circ = \vee, \wedge$ ;  $F_a$  es una subfórmula que no contiene variable-objeto conexa  $x$  llamada a continuación *constante respecto al cuantificador*  $(\Sigma x)$ .

Para sacar una constante del campo de definición del cuantificador existencial una expresión subcuantificadora se reduce de antemano a la forma de disyunción de conjunciones; para sacar una constante del campo de definición del cuantificador universal la expresión se reduce a la forma de conjunción.

Por ejemplo, examinemos el sacamiento de una constante  $G(y)$  en la fórmula

$$\begin{aligned} (\forall x)((F(x) \rightarrow G(y)) \vee (H(x) \circ G(y))) &= (\forall x)(F(x) \wedge \overline{G(y)} \vee \overline{H(x)} \vee G(y)) = \\ &= (\forall x)(F(x) \wedge G(y) \vee \overline{H(x)} \wedge G(y)) = (\forall x)(\overline{G(y)} \wedge (\overline{H(x)} \vee F(x))) = \\ &= (\forall x)(\overline{G(y)} \wedge (H(x) \rightarrow F(x))) = \overline{G(y)} \wedge (\forall x)(H(x) \rightarrow F(x)). \end{aligned}$$

En el cálculo examinado, los cuantificadores se aplican solamente respecto a las variables-objetos. El lenguaje será más expresivo, si junto a los cuantificadores respecto a las variables-objetos se utilizan los *cuantificadores respecto a las variables de predicado*.

El cálculo con la aplicación solamente de los cuantificadores respecto a las variables-objetos se denomina *cálculo estrecho de predicados* al que se puede transformar en el *cálculo extendido de predicados*, añadiendo los cuantificadores según las variables de predicado.

La definición de la fórmula en el cálculo extendido de predicados es análoga a su definición en el cálculo estrecho. La diferencia consiste en que, en el punto 2 de la definición de la fórmula, la variable  $x$  puede ser tanto la variable-objeto como también la de predicado. Las identidades de dualidad, de  $\pi$ - y  $\sigma$ -operaciones y de sacamiento de una constante son válidas también en el cálculo extendido de predicados.

Examinemos el problema de deducibilidad en el cálculo de predicados. Extendamos el sistema de axiomas de un cálculo de enunciaciones incluido en el cálculo estrecho de predicados, mediante los axiomas siguientes:

$$(\forall x)(G(x) \rightarrow G(y)); H(y) \rightarrow (\exists x)H(x).$$

El sentido de estos axiomas es siguiente: si el predicado  $G(x)$  es verdadero para cualquier  $x$ , es verdadero también para cualquier  $y$ ; si el predicado  $H(y)$  es verdadero para cualquier  $y$ , existe un  $x$  tal que  $H(x)$  es verdadero.

En el cálculo estrecho de predicados dos reglas de deducción (de sustitución y de conclusión) del cálculo de enunciaciones se completan con otras tres reglas:

1) *regla para  $\forall$*  (si  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$  se deduce,  $\varphi_1$  no contiene  $x$  como variable libre y  $\varphi_2$ , sí la contiene en esta forma, entonces la fórmula  $\varphi_1 \rightarrow \forall(x)\varphi_2$  también se deduce);

2) *regla para  $\exists$*  (si  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$  se deduce y  $x$  se contiene como variable libre en  $\varphi_1$ , mas no se contiene en forma de variable libre en  $\varphi_2$ , entonces la fórmula  $\exists(x)\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$  también se deduce);

3) *regla de red denominación de variables conexas* (si una fórmula  $\varphi_1$  se deduce y en  $\varphi_1$  existe ora el cuantificador universal ora el existencial, en  $\varphi_1$  una variable conexas puede ser sustituida por otra igual simultáneamente en todos los campos de actuación del cuantificador y en el mismo cuantificador. La fórmula obtenida también se deduce).



## § 2.7. Problemas y ejercicios

2.1. Demostrar que el número de todas las funciones booleanas de  $n$  argumentos es igual a  $2^{2^n}$ .

2.2. Escribir la función booleana  $y = f(x_1, x_2, x_3)$ , que toma el valor 1 sobre los juegos con los números 3, 4, 7, en las FND y FNCj perfectas.

2.3. Anotar la función booleana  $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , que toma el valor 0 sobre los juegos con los números 2, 6, 7, 8, 11 y 12, en las FND y FNCj perfectas.

2.4. Verificar la validez de la igualdad  $x = \bar{x} \oplus 1$ .

2.5. Verificar la validez de las siguientes igualdades:

$$\overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \quad x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2, \quad x_1 | x_2 = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2.$$

2.6. Demostrar que el número de funciones booleanas que dependen esencialmente de  $n$  argumentos se determina por la relación recurrente

$$A_n = 2^{2^n} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot A_i,$$

donde  $A_i$  es el número de funciones booleanas que dependen de  $i$  argumentos.

2.7. La función booleana  $f$  dependiente de tres argumentos se denomina *mayoritaria*, si tiene lugar la igualdad  $f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ . Designaremos esta operación mediante el signo  $\#$  y escribiremos  $x_1 \# x_2 \# x_3$ . Demostrar que tienen lugar las siguientes relaciones:

$$1) x_1 \# x_1 \# x_2 = x_2;$$

$$2) x_1 \# \bar{x}_1 \# x_2 = x_2;$$

$$3) \overline{x_1 \# x_2 \# x_3} = \bar{x}_1 \# \bar{x}_2 \# \bar{x}_3.$$

2.8. Hallar la FND minimal (FNMD) de la función  $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  que toma el valor 1 sobre los juegos 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 12 y 13.

2.9. Hallar la FNMD de la función  $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  que toma el valor 1 sobre los juegos con los números de 0 a 7, de 11 a 21, de 26 a 31.

2.10. La función  $y = f(x_1, x_2, x_3)$  es igual a 1 sobre los juegos 1, 3, 4 y no es determinada sobre el juego con el número 5. Hallar su FNMD.

2.11. Elaborar un test de reconocimiento de la representación contradictoria de una función booleana incompletamente definida  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (una función está prefijada contradictoriamente, si  $(\exists X)(f(X) = 0, 1)$ ).

2.12. Hallar la FNMD de la función booleana

$$f(x_1, x_2, \dots, x_3) = \begin{cases} 1 & \text{sobre } 01 - 0 - , 001 - 0, -010 - , \\ 0 & \text{sobre } 110 - 1, 000 - 1, 1001 - . \end{cases}$$

2.13. Determinar la forma con paréntesis de la función booleana

$$f(x_1, x_2, \dots, x_6) = \begin{cases} 1 & \text{sobre } - 0 - 100, 100 - 01, 01 - - - 1, \\ 0 & \text{sobre } 110 - 0 - , 011 - - - 0, 00 - 1 - 1. \end{cases}$$

2.14. Hallar la potencia de la región unitaria de la función booleana incompletamente definida  $f(x_1, x_2, \dots, x_5)$  después de su definición completa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = \begin{cases} 1 & \text{sobre } 001 - 1, 01 - 01, 1011 - , \\ 0 & \text{sobre } 0001 - , 100 - 1, 11 - 011. \end{cases}$$

La funcional de la calidad de definición completa es el número minimal de las termas primarias en la FND equivalente de la función  $f$ .

2.15. Verificar la linealidad de la función booleana

$$f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 1, 5, 6).$$

2.16. Establecer, si la función de equivalencia es autodual.

2.17. Verificar la monotonía de la conjunción de  $n$  argumentos.

2.18. Poner un ejemplo de una función monótona que sea simultáneamente lineal.

2.19. Poner un ejemplo de una función autodual que sea simultáneamente lineal.

2.20. Poner un ejemplo de una función lineal y monótona.

2.21. Cerciorarse que las funciones de Sheffer y de Webb no son lineales, ni monótonas, ni autoduales.

2.22. Establecer, si la función booleana  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(0, 3, 7, 11, 13)$  forma base en  $P_2$ .

2.23. ¿Es válida la afirmación: si una función booleana depende esencialmente de más que un argumento y es monótona, ésta no es autodual?

2.24. ¿Es válida la afirmación: si una función booleana depende (esencialmente) de más que un elemento y es lineal, ésta no es monótona?

2.25. Hallar todas las funciones booleanas que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\varphi(x) \rightarrow 1 = \varphi(\bar{x}), \quad \varphi(x)\varphi(\bar{x}) = 0.$$

2.26. Demostrar el siguiente teorema: con la superposición (sustitución de una función a otra en vez de sus argumentos) de las funciones lineales resultan funciones lineales.

2.27. Demostrar el teorema: con la superposición de funciones autoduales vuelven a resultar funciones autoduales.

2.28. Demostrar el teorema: con la superposición de funciones monótonas vuelven a resultar funciones monótonas.

2.29. Una función se denomina *conservadora de una constante*  $r$  ( $r = 0, 1$ ), si sobre un juego de argumentos de tipo  $\langle r, r, \dots, r \rangle$  toma el valor  $r$ . Demostrar que la superposición de funciones conservadoras de la constante  $r$  es, otra vez, una función que conserva esta constante.

2.30. ¿Son autoduales  $\varphi_1 \vee \varphi_2$  y  $\varphi_1 \varphi_2$ , si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son autoduales?

2.31. ¿Son lineales  $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ , si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son lineales?

2.32. Una función booleana se denomina *simétrica*, si no se cambia con cualquier redonomiación de sus argumentos. Se llama *función booleana simétrica fundamental del índice  $m$*  una función booleana simétrica tal que todas conjunciones que forman parte de la FNDP de esta función tienen igualmente  $m$  letras sin negación.

Demostrar el siguiente teorema: cualesquiera función booleana simétrica es disyunción de las funciones booleanas simétricas fundamentales, cuyos índices se determinan unívocamente por la función simétrica que se presenta.

2.33. Determinar el número de funciones autoduales que dependen de  $n$  argumentos.

2.34. Demostrar la completitud de un sistema de funciones booleanas que se compone de la disyunción, la constante 0 y la equivalencia. ¿Forma base este sistema?

2.35. ¿Forma una base un sistema de funciones booleanas que se compone de la implicación y la constante 0?

2.36. Establecer, si es completo un sistema que se compone de la disyunción, la implicación y la conjunción.

2.37. ¿Forman un sistema completo la función  $x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$  y la negación?

2.38. Demostrar que, si una función booleana no conserva la constante y es no autodual, ella es no monótona o no lineal.

2.39. Comparar las conexidades de los mografos que determinan la conjunción y la disyunción en una lógica de tres signos antes y después de la minimización.

2.40. Aclarar, si es posible realizar cualquier función booleana sobre elementos del SUANI (Sistema Universal de Automática Neumática Industrial) que representan un relé neumático descrito por la función  $a(b \vee \bar{c}) \vee \bar{b}cd$ .

2.41. Sintetizar en la base de Webb un esquema lógico que realiza una función booleana  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)|_1 = \vee(0, 1, 2, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 20, 32, 57, 61 \text{ y } 62)$ .

2.42. Sintetizar en la base  $\{\rightarrow, 0\}$  un esquema lógico que realiza una función booleana  $f(x_1, x_2, \dots, x_5)|_1 = \vee(0, 3, 5, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 25, 27 \text{ y } 31)$ .

2.43. Determinar la complejidad del semisumador en la base de Sheffer.

2.44. Demostrar que

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

2.45. Establecer si es válida la igualdad

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

2.46. Sintetizar en la base de Webb un esquema lógico que realiza una función booleana.  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)|_1 = \vee(0, 3, 5, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 25, 27 \text{ y } 31)$ .

2.47. Determinar la complejidad del semisumador en la base  $\{\rightarrow, 1\}$ .

2.48. Sintetizar en la base  $\{\rightarrow, \bar{\phantom{x}}\}$  un esquema lógico que realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)|_1 = \vee(0, 1, 2, 5, 7, 11, 13, 15, 19, 20, 32, 57, 61 \text{ y } 62)$ .

2.49. Sintetizar en la base  $\{\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \bar{a}_3\}$  un esquema lógico que realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \vee(0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 15, 16, 18, 25 \text{ y } 30)$ .

2.50. Sintetizar en la base  $\{\rightarrow, 0\}$  un esquema lógico que realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, \dots, x_7)|_1 = \vee(0, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12 \dots 81 \text{ y } 101)$ .

2.51. Definir el orden de exclusión de variables cuando se realiza una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(0, 1, 2, 4, 7, 8, 11 \text{ y } 15)$ ,

si se tiene un catálogo de realización de todas las funciones de dos variables; la función residual se considera simple, si se compone de dos conjunciones elementales.

2.52. Establecer qué es mayor: el peso  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  o el peso  $\frac{\partial f}{\partial x_3}$  de una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(1, 3, 7, 8, 12, 14 \text{ y } 15)$ .

2.53. Proponer un algoritmo para calcular el peso de la derivada de una función booleana, utilizando matrices binarias.

2.54. Establecer, si es útil desde el punto de vista de disminución de gastos para aparatos la exclusión según una o dos variables en la base de la implicación y la constante cero.

2.55. Hallar todas las funciones residuales cuando el orden de exclusión de variables de una función booleana

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)|_1 = \vee(0, 4, 6, 8, 10, 13, 14 \text{ y } 15)$

es óptimo.

2.56. ¿Cuántas entradas tiene el bloque de exclusión de  $k$  variables?

2.57. Hallar una realización del bloque de exclusión de una variable en la base de Webb.

2.58. ¿Cuál es la complejidad del bloque de exclusión de una variable en la base de Sheffer?

2.59. Hallar el peso de la derivada  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  de una función booleana

$$f(x_1, x_2, x_3)|_1 = \vee(0, 1, 5, 6 \text{ y } 7).$$

2.60. Demostrar que

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

2.61. Hallar la derivada de primer orden para una función del circuito de traslado en el semisumador completo.

2.62. Determinar la derivada de segundo orden de una función de suma en el semisumador completo, la que determina las condiciones de conmutación de una función de suma al conmutar los canales correspondientes a los sumandos.

2.63. Demostrar que cualesquiera función booleana se define unívocamente por los valores de la función y de todas las derivadas en el punto 0, 0 ... 0.

2.64. Proyectar un contador de imparidad en una base coimplicativa.

2.65. Proyectar un semisumador en una base implicativa.

2.66. Sintetizar un esquema que realiza una función que toma el valor 1 sobre los juegos de sus cinco argumentos que tienen no menos de cuatro unidades. Emplear para la síntesis los elementos de equivalencia, disyunción y negación.

2.67. Sintetizar un descifrador de tres entradas y ocho salidas utilizando los elementos O, Y y NO.

2.68. Realizar la función de implicación sobre elementos que realizan la negación y la función  $y = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ .

2.69. Realizar la implicación sobre los elementos que realizan la función de Webb.

2.70. Realizar la suma según el módulo dos sobre elementos de Sheffer.

2.71. Realizar un circuito de adición en un orden sobre elementos Y, O y NO.

2.72. Realizar un circuito de adición en un orden, teniendo en cuenta la minimización de las funciones de suma y de traslado sobre los elementos O, Y y NO.

2.73. Demostrar que se puede construir un descifrador completo de  $n$  entradas, empleando dos descifradores completos de  $m$  y  $n - m$  entradas y de  $2^n$  elementos de tipo Y.

2.74. Realizar la función  $y = x_1 x_2 \vee x_1 x_2 x_3$  sobre los elementos mayoritarios y los elementos NO.

2.75. Realizar la función  $y = x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)$  sobre los elementos  $y = x_1 \# x_2 \# x_3$  y NO.

2.76. Realizar, sobre los elementos mayoritarios y los NO, un circuito de prueba del código de paridad, o sea, un circuito, a la salida del cual surge una señal unitaria, si a la entrada del mismo hay un número par de unidades. El número de entradas equivale a tres.

2.77. Demostrar que

$$\frac{\partial (f(X) \& \varphi(X))}{\partial x_i} = f(X) \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_i} \oplus \varphi(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_i}$$

2.78. Demostrar que

$$\frac{\partial (f(X) \vee \varphi(X))}{\partial x_i} = f(X) \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_i} \oplus \varphi(X) \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(X)}{\partial x_i}$$

2.79. Desarrollar la función booleana

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3$$

en una serie análoga a la serie de Taylor en los puntos 2 y 11. Comparar el número de las terms primarias en los desarrollos obtenidos.

**2.80.** Escribir las leyes principales del álgebra de Boole durante una interpretación aritmética de las siguientes operaciones lógicas:

$$x \& y = x \cdot y, \quad x \vee y = x + y - \bar{x} \cdot y, \quad \bar{x} = 1 - x,$$

donde « $\cdot$ », « $+$ », « $-$ » son las operaciones aritméticas "multiplicación", "adición" y "sustracción", respectivamente.

**2.81.** 1) La lista de termas del cálculo es  $\{I, +, =\}$ . Las reglas de formación de las fórmulas son siguientes: a)  $I$  es la fórmula; b) si  $\varphi$  es la fórmula,  $\varphi I$  también es la fórmula; c) si  $\varphi$  y  $\Psi$  son las fórmulas, entonces  $\varphi + \Psi$  y  $\varphi = \Psi$  son también fórmulas. Están prefijados el axioma único  $I + I = II$  y dos reglas de deducción:

a) si  $\varphi_1 + I = \varphi_2$  es una fórmula deducible,  $\varphi_1 I + I = \varphi_2 I$  también es una fórmula deducible; b) si  $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$  es una fórmula deducible,  $\varphi_1 + \varphi_2 I = \varphi_3 I$  también es una fórmula deducible. Demostrar que:

- la fórmula  $II + III = IIII$  se deduce en el cálculo dado;
- la fórmula  $I + I = I$  no se deduce en el cálculo dado.

2) Un conjunto de las termas consta de un número infinito de letras y signos  $\vee$  y  $\rightarrow$ . Las reglas de formación de las fórmulas son siguientes:

- cualquier letra es una fórmula;
- si  $\alpha$  y  $\beta$  son fórmulas,  $\alpha \vee \beta$  y  $\alpha \rightarrow \beta$  son también fórmulas.

El sistema de axiomas es tal:

- $A \vee A \rightarrow A$ ; b)  $A \rightarrow A \vee B$ ; c)  $A \vee B \rightarrow B \vee A$ ;
- $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$ .

Las reglas de deducción son tales: a) *regla de sustitución*: si  $\alpha$  es una fórmula deducible y en vez de cualquier variable en esta fórmula se pone en todas partes cualquier fórmula, la fórmula nueva es también deducible;

b) *regla de conclusión* (modus ponens): si  $\alpha \rightarrow \beta$  y  $\alpha$  son fórmulas deducibles,  $\beta$  es también una fórmula deducible.

En el cálculo dado (cálculo de Hilbert) demostrar que son deducibles las siguientes fórmulas: 1)  $A \rightarrow A$ ; 2) si  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ,  $A$  y  $B$  se deducen, la fórmula  $C$  también se deduce.

**2.82.** Empleando los resultados del problema anterior, demostrar que en el cálculo de Hilbert tienen lugar las siguientes afirmaciones: si  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$  se deduce,  $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$  también se deduce.

**2.83.** Introduzcamos el cálculo siguiente (cálculo de Lukasiewicz): el conjunto de las termas se compone del número infinito de letras y de signos  $-$ ,  $\rightarrow$ .

Las reglas de formación de las fórmulas son:

- todas las letras son fórmulas;
- si  $\varphi$  es una fórmula,  $\bar{\varphi}$  es también una fórmula;
- si  $\varphi$  y  $\Psi$  son fórmulas,  $\varphi \rightarrow \Psi$  es también una fórmula.

El sistema de axiomas es el siguiente:

- $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ;
- $(\bar{A} \rightarrow A) \rightarrow A$ , c)  $A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$ .

Son válidas la regla de sustitución y la de conclusión.

Mostrar que en el cálculo de Lukasiewicz se deduce la fórmula  $A \rightarrow A$ .

**2.84.** Un cálculo está prefijado del modo siguiente (cálculo de P. S. Nóvikov): el conjunto de las termas se compone del número infinito de letras y de signos  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\rightarrow$ ,  $\bar{\phantom{x}}$ .

Las reglas de formación de las fórmulas son: a) todas las letras son fórmulas;

- si  $\alpha$  es una fórmula,  $\bar{\alpha}$  es también una fórmula;
- si  $\alpha$  y  $\beta$  son fórmulas,  $\alpha \vee \beta$ ,  $\alpha \wedge \beta$ ,  $\alpha \rightarrow \beta$  son también fórmulas.

El sistema de axiomas se compone de las siguientes once axiomas:

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ; 2)  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ ;
- $A \wedge B \rightarrow A$ ; 4)  $A \wedge B \rightarrow B$ ; 5)  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow (B \wedge C))$ ;

6)  $A \rightarrow A \vee B$ ; 7)  $B \rightarrow A \vee B$ ; 8)  $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C)$ ;

9)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{A} \rightarrow \overline{B})$ ; 10)  $A \rightarrow \overline{\overline{A}}$ ; 11)  $\overline{\overline{A}} \rightarrow A$ .

Como regla de deducción se utilizan la regla de sustitución y la de conclusión (modus ponens).

Demostrar que el sistema de axiomas no es contradictoria.

**2.85.** Demostrar que el axioma nueve del cálculo de Nóvikov (véase la condición del problema anterior) es independiente respecto a todos los demás axiomas de este cálculo.

**2.86.** Sea que los predicados  $N(x)$ ,  $C(x)$ ,  $R(x)$ ,  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $D(x, y)$  tienen respectivamente, el sentido:  $x$  es un número natural,  $x$  es un número entero,  $x$  es un número simple,  $x$  es un número positivo,  $x$  es un número par,  $x$  divide  $y$ . Enunciar el sentido de las siguientes fórmulas del cálculo estrecho de predicados (y señalar los que son idénticamente verdaderos entre ellos):

- 1)  $\forall(x) \{N(x) \rightarrow C(x)\}$ ;
- 2)  $\forall(x) \{C(x) \rightarrow Q(x) \vee \overline{Q}(x)\}$ ;
- 3)  $\forall(x) \exists(y) \{C(x) \wedge C(y) \rightarrow D(x, y)\}$ ;
- 4)  $\exists(x) \{R(x) \wedge Q(x)\}$ ;
- 5)  $\forall(x) \{C(x) \wedge P(x) \rightarrow N(x)\}$ .

**2.87.** Describir un conjunto de veracidad de los siguientes predicados biádicos, definidos sobre el conjunto de los números reales:

$$x^2 - y^2 = 0; (x > 0) \wedge (y < 0); (x > 0) \rightarrow (y < 0).$$

**2.88.** Sobre un conjunto  $M$  son determinados los predicados monádicos  $F(x)$  y  $G(x)$ . ¿Qué condiciones satisfacen sus campos de veracidad, si son verdaderos:

- 1)  $\forall(x) \{F(x) \rightarrow G(x)\} \wedge \exists(x) \{\overline{F}(x) \wedge G(x)\}$ ;
- 2)  $\exists(x) \{F(x) \wedge G(x)\} \wedge \exists(x) \{F(x) \rightarrow G(x)\}$ ?

**2.89.** En un conjunto  $A$  sea definida una operación binaria asociativa y conmutativa. Sea que, para cualesquiera  $\alpha, \beta \in A$ , la ecuación  $\alpha \cdot \beta = \gamma$  ( $\cdot$  es el signo de operación en  $A$ ) es resoluble. Entonces  $A$  a la par con  $\cdot$  se denomina grupo de Abel. Sea que  $P(\alpha, \beta)$  significa  $\alpha = \beta$  y  $S(\alpha, \beta, \gamma)$  significa que  $\gamma$  es la suma de  $\alpha$  y  $\beta$ . Demostrar que la colección de axiomas dadas a continuación define el concepto del grupo abeliano:

- 1)  $\forall \alpha P(\alpha, \alpha)$ ;
- 2)  $\forall(\alpha, \beta) (P(\alpha, \beta) \rightarrow P(\beta, \alpha))$ ;
- 3)  $\forall(\alpha, \beta, \gamma) (P(\alpha, \beta) \wedge P(\beta, \gamma) \rightarrow P(\alpha, \gamma))$ ;
- 4)  $\forall(\delta, \varepsilon, \omega, \alpha, \beta, \gamma) (S(\delta, \varepsilon, \omega) \wedge P(\delta, \alpha) \wedge P(\varepsilon, \beta) \wedge P(\omega, \gamma) \wedge S(\alpha, \beta, \gamma))$ ;
- 5)  $\forall(\alpha, \beta) \exists(\gamma) S(\alpha, \beta, \gamma)$ ;
- 6)  $\forall(\alpha, \beta, \gamma, \delta) (S(\alpha, \beta, \gamma) \wedge S(\alpha, \beta, \delta) \rightarrow P(\gamma, \delta))$ ;
- 7)  $\forall(\delta, \varepsilon, \omega, \alpha, \beta) (S(\delta, \varepsilon, \omega) \wedge S(\omega, \alpha, \beta) \wedge S(\varepsilon, \alpha, \gamma) \rightarrow S(\delta, \gamma, \beta))$ ;
- 8)  $\forall(\alpha, \beta, \gamma) (S(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow S(\beta, \alpha, \gamma))$ ;
- 9)  $\forall(\alpha, \beta) \exists(\gamma) S(\alpha, \beta, \gamma)$ .

**2.90.** Demostrar la equivalencia de las siguientes fórmulas:

- a)  $\exists(x) F(x)$  y  $\overline{\forall(x) \overline{F}(x)}$ ;
- b)  $\forall(x) (F(x) \rightarrow A)$  y  $\exists(x) (\overline{F}(x) \rightarrow A)$ ;
- c)  $\forall(x) (A \rightarrow F(x))$  y  $A \rightarrow \forall(x) F(x)$ .

**2.91.** Demostrar la equivalencia de las fórmulas:

- a)  $\exists(x) (A \wedge F(x))$  y  $A \wedge \exists(x) F(x)$ ;
- b)  $\exists(x) (F(x) \vee G(x))$  y  $\exists(x) (F(x) \rightarrow A)$ ;
- c)  $A \vee \forall(x) F(x)$  y  $\forall(x) (A \vee F(x))$ .

**2.92.** Establecer cómo se puede construir una teoría de las formas normales en el cálculo de predicados.

## Comentarios

La lógica matemática es el análisis de los métodos de los razonamientos, y no su contenido. La formalización de los razonamientos remonta a Aristóteles. La lógica aristotélica (formal) adquirió el aspecto moderno en la segunda mitad del siglo XIX en la obra de George Boole "An Investigation of the Laws of Thought". Otros científicos de aquel período — P. S. Poretski, catedrático de la Universidad de Kazán, De Morgan, Frege, Pierce, Schröder, etc. — también hicieron gran aporte al proceso de formación de la lógica de enunciaciones.

La lógica matemática se desarrollaba intensamente en los años 50 de nuestro siglo debido al progreso impetuoso de la técnica digital. En 1910, el físico ruso P. Erenfest señaló la posibilidad de aplicar la lógica de enunciaciones para describir los circuitos de conmutación en la telefonía. En 1938—1940, aparecieron casi simultáneamente los trabajos del científico ruso V. I. Shestakov, el norteamericano Shannon y los japoneses Nakashima y Hansawa sobre la aplicación de la lógica matemática en la técnica digital. En 1951, en la URSS fue puesto en explotación el ordenador МЭСМ (PMCE Pequeña Máquina Calculadora Electrónica), el primero en Europa, diseñado bajo la dirección de S. A. Lébedev. La primera monografía, dedicada al empleo de la lógica matemática para diseñar los aparatos digitales, fue publicada en la URSS por el científico soviético M. A. Gavrilov, en 1950.

P. S. Nóvikov, destacado científico soviético, y sus discípulos, contribuyeron mucho al desarrollo de esta parte de la matemática discreta.

Para profundizar los conocimientos acerca de la lógica matemática, recomendamos las obras indicadas en la bibliografía.

## CAPÍTULO 3

# Teoría de los grafos y mografos

### § 3.1. Grafo ponderado y su planteamiento matricial

Anteriormente el concepto del grafo fue definido como colección de un conjunto de vértices  $V$  y de arcos  $U_2 \subset V^2$ . Un arco  $u$  unido con un vértice  $v$  se denomina *incidente al vértice  $v$*  y el vértice  $v$  se denomina *coincidente al arco  $u$* . En el arco  $(v_i, v_j)$ , los vértices  $v_i$  y  $v_j$  se llaman *de frontera* con la particularidad de que  $v_i$  es *origen* y  $v_j$  es *fin* del arco. Para contar los *vértices aislados*, es decir, los vértices no coincidentes a ningún arco, extendamos el concepto del grafo  $G$  hasta la colección de la forma

$$G = \langle V, U_1, U_2 \rangle, U_1 \subset V, U_2 \subset V^2,$$

donde la relación monaria  $U_1$  determina los vértices aislados y  $U_2$ , los arcos.

Al sacar arcos del grafo  $G = \langle V, U_1, U_2 \rangle$  obtenemos un *grafo parcial*  $G' \subset G$ ,  $G' = \langle V, U_1, U_2' \rangle$ ,  $U_2' \subset U_2$ , del grafo  $G$ , al sacar los vértices y sus arcos incidentes obtenemos un *subgrafo*  $G'' = \langle V'', U_1'', U_2'' \rangle$ ,  $V'' \subset V$ ,  $U_1'' \subset U_1$ ,  $U_2'' \subset U_2$  del grafo  $G$ . Al seguir sacando los arcos del subgrafo  $G''$  del grafo  $G$  obtenemos un *subgrafo parcial*  $\tilde{G} = \langle V, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \rangle$  del grafo  $G$ .

Dos arcos  $u_\alpha$  y  $u_\beta$  se denominan *adyacentes*, si son incidentes a un mismo vértice.

Dos vértices  $v_a$  y  $v_b$  se llaman *adyacentes*, si se unen mediante un arco.

Un conjunto de los vértices adyacentes con el vértice  $v_\alpha$  llámase su *entorno* y se denota mediante  $O(v_\alpha)$  o  $\Gamma v_\alpha$ . Empleando el concepto de entorno el grafo se define como una colección del conjunto de los vértices y un conjunto de sus entornos:  $G = \langle V, \Gamma \rangle$ .

Definamos el concepto del *grafo ponderado*. A cada vértice  $v_i \in V$  ( $V = \{v_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ ) del grafo  $G = \langle V, U_1, U_2 \rangle$  le pongamos en correspondencia el peso  $w_i$  de un conjunto de los pesos  $W = \{w_i / i = 1, 2, \dots\}$ . Como resultado obtenemos un conjunto de los *vértices ponderados*  $\{(v_i, w_i) / i = 1, 2, \dots, n\}$ , con ello, no hace falta que todos los pesos sean distintos.

Pongamos el peso  $p_i$  del conjunto de pesos  $P = \{p_i / i = 1, 2, \dots\}$  en correspondencia a cada elemento del conjunto  $U_2 = \{u_i / i = 1, \dots, m\}$ . Como resultado obtenemos un conjunto de los *arcos ponderados*  $\{(u_i,$



$p_i)/i = 1, 2, \dots, m$ ); además, no hace falta que sean distintos todos los pesos.

Los conjuntos de vértices y arcos ponderados dados anteriormente en su conjunto definen un grafo ponderado  $G = \langle (\bar{V}, W), (U, P) \rangle$ ,  $\bar{V} = V \cup U \cup U_1$ , el que, estrictamente dicho, ya no es un grafo, sino una función definida sobre los vértices y los arcos del grafo.

Para fijar los grafos existen varias clases de matrices, entre las cuales las principales son la clase de matrices de incidencias y la de matrices de adyacencia. Examinemos estas clases de matrices.

*Clase de matrices de incidencias.* Si el grafo  $G$  contiene  $n$  vértices y  $m$  arcos, la matriz de incidencias  $A(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$  se determina como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el vértice } v_j \text{ es el origen del arco } u_i; \\ -1, & \text{si el vértice } v_j \text{ es el fin del arco } u_i; \\ 0, & \text{si el vértice } v_j \text{ no es coincidente al arco } u_i. \end{cases}$$

A veces el grafo contiene lazos, es decir, arcos de tipo  $(v_i, v_i)$ . En este caso ciertos elementos de la matriz  $A$  son iguales a 1 y  $-1$  simultáneamente, lo que lleva a la multiformidad de los elementos de la matriz  $A$ .

Para fijar un grafo con lazos dividamos la matriz  $A$  en dos matrices  $A^+$  y  $A^-$ :

$$A^+ = [a_{ij}^+]_{m \times n},$$

donde  $a_{ij}^+ = \begin{cases} 1, & \text{si el vértice } v_j \text{ es el origen del arco } u_i; \\ 0 & \text{en caso contrario;} \end{cases}$

$$A^- = [a_{ij}^-]_{m \times n},$$

donde  $a_{ij}^- = \begin{cases} 1, & \text{si el vértice } v_j \text{ es el fin del arco } u_i; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

Si un grafo no tiene lazos,  $A = A^+ - A^-$ . Las matrices  $A^+$  y  $A^-$  describen el grafo sin tener en cuenta los pesos de los vértices y arcos.

Prefijemos los pesos de los vértices de un grafo  $G$  en forma de una matriz columna

$$W(G) = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix},$$

y los pesos de los arcos en forma de una matriz diagonal de orden  $m$

$$P(G) = \begin{Bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_m \end{Bmatrix}$$

Las matrices  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $W$ ,  $P$  describen completamente un grafo ponderado.

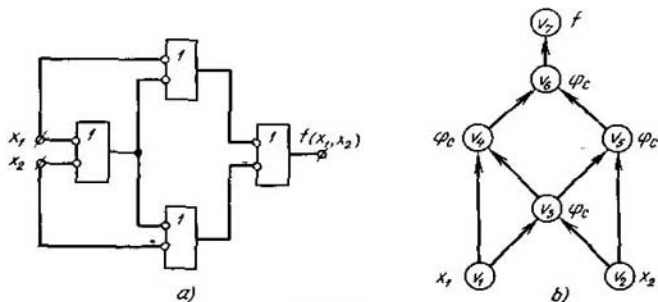


Fig. 3.1

Examinemos un esquema lógico que realiza la adición según el módulo dos  $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$  en la base de Sheffer  $\varphi_{sh}(\alpha, \beta) = \overline{\alpha} \vee \overline{\beta}$  (fig. 3.1, a) y su respectivo grafo ponderado  $G = \langle (V, W), U \rangle$ , cuyos vértices  $v_1, v_2, \dots, v_i, i = 3, 4, 5, 6$  y  $v_7$  son ponderados por las variables  $x_1$  y  $x_2$ , de la variable funcional  $\varphi_{sh}$  del elemento de Sheffer y una variable funcional  $f$ , respectivamente. El origen del arco corresponde a una variable  $x_1, x_2$ , o a la salida del elemento de Sheffer, el fin del arco corresponde a la entrada del elemento de Sheffer o bien a la variable funcional  $f$ . Entonces el grafo  $G = \langle (V, W), U \rangle$  (fig. 3.1, b) que determina este esquema lógico se representa por matrices de la clase examinada como

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad W(G) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ f \end{pmatrix}$$

**Clase de matrices de adyacencia.** La matriz de adyacencia  $S = [s_{ij}]_{n \times n}$  de un grafo no ponderado se define del modo siguiente:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (v_i, v_j) \in U \\ 0, & \text{si } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Para un grafo ponderado

$$s_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, & \text{si el arco } (v_i, v_j) \in U \text{ tiene peso } p_{ij}; \\ 0, & \text{si } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Las matrices  $S$ ,  $W$ ,  $P$  describen completamente un grafo ponderado. Por ejemplo, el grafo  $G$  (fig. 3.1,  $b$ ) se prefija por matrices de esta clase como

$$S(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W(G) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ \varphi_{sh} \\ f \end{pmatrix}$$

Al prefijar el grafo  $G$  (fig. 3.1,  $b$ ) está ausente la matriz  $P(G)$ , puesto que los arcos de este grafo no son ponderados.

Dos grafos  $G = \langle V, U \rangle$  y  $G' = \langle V', U' \rangle$  se llaman *isomorfos*, si existe una correspondencia biunívoca entre sus vértices  $V$  y  $V'$  tal que los vértices  $v_a$  y  $v_b$  se unen mediante el arco  $(v_a, v_b)$  en un grafo en aquel, y sólo en aquel caso, cuando sus respectivos vértices  $v'_a$  y  $v'_b$  se unen mediante un arco  $(v'_a, v'_b)$  en otro grafo.

Las matrices de las clases examinadas prefijan los grafos con exactitud de hasta el isomorfismo.

Denotaremos una matriz de incidencias transpuesta  $A^+$  mediante  $(A^+)^T$ . Una matriz de adyacencia, matrices de incidencias inicial  $A^+$  y final  $A^-$ , así como una matriz diagonal de los pesos de arcos están relacionadas por la siguiente igualdad:

$$S = (A^+)^T \cdot P \cdot (A^-). \quad (3.1)$$

Se denomina *potencia*  $s(v)$  de un vértice  $v$  el número de arcos (aristas) incidentes a este vértice.

Empleando el concepto de mografo se puede prefijar, con mayor eficacia en el sentido del volumen consumido de la información, grafos grandes  $G_i$ , cuyas matrices de adyacencia están débilmente llenas por las unidades. Los grafos de esta clase tienen gran importancia práctica.

Prefijaremos un grafo no orientado conexo  $G = \langle V, U \rangle$ , sin lazos por un modelo  $\Psi = \langle M, S_1, S_2, \dots, S_n \rangle$ , en el cual  $M = V$ ; la palabra definida

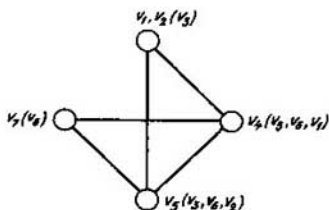


Fig. 3.2

por  $S_i$  es un entorno  $O(v_\alpha)$  de radio unidad del vértice  $v_\alpha \in V$  que contiene  $i - 1$  vértices y el vértice  $v_\alpha$ . Para ilustrar esta representación, consideremos el mismo grafo  $G$  (fig. 3.1, *b*), sin tener en cuenta la orientación de sus aristas. En este caso la matriz de incidencia  $Q(\Psi)$  es la matriz de adyacencia  $S(\Psi)$  del grafo  $G$ , cuyos elementos diagonales son iguales a 1:

$$Q(\Psi) = \begin{array}{cccccc|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & & & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 & & & \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_2 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & v_3 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_4 & & & \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & v_5 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & v_6 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & v_7 & & & \end{array}$$

Reduzcamos la minimización del volumen consumido de la información para expresar un grafo a un cubrimiento de columnas por filas de la matriz  $Q(\Psi)$ . Para disminuir la densidad de trabajo de la búsqueda de un cubrimiento minimal tachemos filas y columnas que se absorben. *La fila  $\alpha$  absorbe la fila  $\beta$* , si el conjunto  $M_\alpha$  de columnas cubiertas por la fila  $\alpha$  contiene el conjunto  $M_\beta$  de columnas cubiertas por la fila  $\beta$ ,  $M_\alpha \supset M_\beta$ . *La columna  $a$  absorbe la columna  $b$* , si el conjunto  $M_b$  de las filas que cubren la columna  $b$  contiene el conjunto  $M_a$  de las filas que cubren la columna  $a$ ,  $M_a \subset M_b$ .

Hallemos un cubrimiento de columnas por filas de la matriz  $Q(\Psi)$ , después eliminemos los elementos unitarios no diagonales comprendidos en el cubrimiento y volvamos a cubrir las columnas hasta llegar a que todos los elementos no diagonales sean iguales a cero. Obtenemos como resultado una expresión minimizada del grafo  $G$  en forma del correspondiente mografo, cuya signatura representa cortaduras de los elementos de los cubrimientos obtenidos.

En el caso a examinar el cubrimiento minimal tiene la forma  $\{v_3, v_6\}$ . A este cubrimiento le corresponden dos entornos de radio unidad:  $O(v_3) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$  y  $O(v_6) = \{v_4, v_5, v_7\}$ . Después de eliminar las unidades correspondientes de la matriz  $Q(\Psi)$  obtenemos la matriz

$$Q'(\Psi) = \begin{array}{cccc|cccc} & v_1 & v_2 & v_4 & v_5 & & & & & & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & v_1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & v_2 & & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & v_4 & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & v_5 & & & & & & \end{array}$$

que tiene cubrimiento  $\{v_1, v_2\}$  o bien  $\{v_4, v_5\}$ . Para ser precisos, escojamos el primer cubrimiento. El grafo  $G$  que se examina definitivamente se prefija

por el modelo  $\Psi$ , cuya matriz de incidencia tiene forma

$$\tilde{Q}(\Psi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 & v_7 \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \begin{array}{l} v_3 \\ v_6 \\ v_1' \\ v_2 \end{array}$$

Para fijar esta matriz es necesario tener 20 bits en vez de 49 bits, cuando este grafo se fija por la matriz de adyacencia. El mografo  $G^M(\tilde{Q}(\Psi))$  está representado en la fig. 3.2. La minimización del planteamiento de los grafos orientados con lazos es análogo al primer procedimiento. Los orígenes y los fines de los arcos del grafo se fijan independientemente en forma del mografo  $(G^M)^+$  y el  $(G^M)^-$ , respectivamente.

Para representar grafos en forma de una composición de grafos más simples introduzcamos tres operaciones siguientes: unión, suma y producto.

Se denomina *unión* de grafos  $G_a = \langle V_a, U_a \rangle$  y  $G_b = \langle V_b, U_b \rangle$  el grafo  $G = \langle V, U \rangle$  cuyos portador y signatura son, respectivamente, la unión de la teoría de los conjuntos de los portadores  $V_a, V_b$  y de las signaturas  $U_a, U_b$  de los grafos  $G_a, G_b$  (fig. 3.3, a).

Llámase *suma* de grafos  $G_a = \langle V_a, U_a \rangle$  y  $G_b = \langle V_b, U_b \rangle$  un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  que es la unión de los grafos  $G_a, G_b$  y un grafo completo

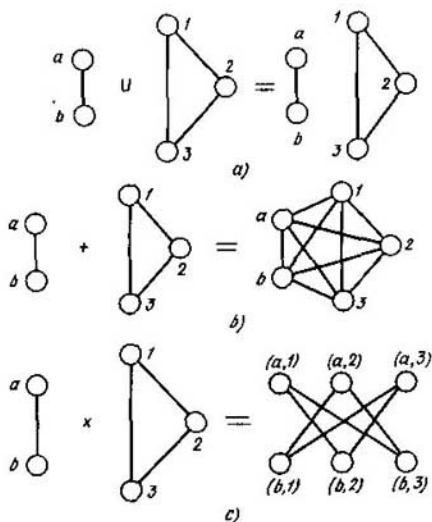


Fig. 3.3

de dos partes  $K|v_i|$ ,  $|v_i|$  construido sobre los portadores  $V_a \setminus V_a \cap V_b$  y  $V_b \setminus V_a \cap V_b$ . En otras palabras, para construir la suma de los grafos  $G_a$  y  $G_b$  se determina su unión y cada vértice  $v_i \in V_a$  no comprendido en la intersección  $V_a \cap V_b$ , se une con todos los vértices  $V_b \setminus V_a \cap V_b$  y viceversa. Diremos que el vértice  $v$  *conifica* el grafo  $G$ , si  $v$  y todos los vértices del grafo  $G$  son adyacentes. Los vértices no comprendidos en la intersección de los sumandos,  $v_i \notin V_a \cap V_b$ , conifican, al sumar los grafos  $G_a$  y  $G_b$ ,  $V_b \setminus V_a \cap V_b$  y  $V_a \setminus V_a \cap V_b$ , respectivamente (fig. 3.3, b).

Se denomina *producto (producto cartesiano)* de grafos  $G_a = \langle V_a, \Gamma_a \rangle$  y  $G_b = \langle V_b, \Gamma_b \rangle$  el grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$ ,  $V = V_a \times V_b = \{(v_a, v_b) | v_a \in V_a, v_b \in V_b\}$ ,  $\Gamma(v_a, v_b) = \Gamma v_a \times \Gamma v_b$ , (fig. 3.3, c)

### § 3.2. Conexión y conexión fuerte de un grafo

La distribución de cadenas y ciclos en un grafo no orientado, así como de caminos y circuitos en un grafo orientado, determina muchas propiedades del grafo, incluso su conexión y conexión fuerte.

Llábase *cadena* una sucesión de aristas  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  de tipo  $q_i = (v_i, v_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Los vértices de una cadena pueden tener potencia igual a 1. El vértice  $v_i$  de potencia igual a 1 se llama *vértice extremo*.

El número de aristas de una cadena que une los vértices  $v_i$  y  $v_j$  se denomina *longitud*  $l(v_i, v_j)$  de la cadena.

Se llama *ciclo* una cadena, cuyos vértices finales coinciden. Todos los vértices del ciclo tienen potencia  $s(v_i) \geq 2$ .

Una *cadena* se denomina *compuesta*, si en ella se repite al menos una arista, *compleja*, si se repite al menos un vértice y *simple*, en caso contrario.

Un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  se denomina *conexo*, si cualquier par de sus vértices se une por una cadena.

Un subgrafo conexo, maximal respecto a la inclusión de vértices, de un grafo se denomina su *componente de conexión*. Un grafo se llama *inconexo*, si el número de sus componentes es más que uno. Por ejemplo, un grafo que se compone de dos vértices no adyacentes es inconexo y tiene dos componentes de conexión.

Examinemos el algoritmo para determinar la conexión de un grafo y el número de sus componentes.

**Teorema 3.1.** *Un elemento de una matriz  $S^n$  ( $S = [s_{ij}]$ ), es decir, una matriz de adyacencia,*

$$s_{ij} = \begin{cases} \text{el conjunto de los identificadores de aristas que unen} \\ \text{los vértices } v_i, v_j; \\ 0, \text{ si los vértices } v_i, v_j \text{ no son adyacentes,} \end{cases}$$

*es un conjunto de cadenas de longitud  $n$  que unen los vértices  $v_i, v_j$ .*

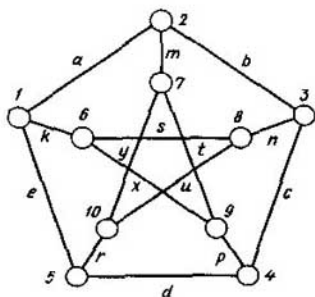


Fig. 3.4

Al elevar una matriz de adyacencia  $S = [s_{ij}]$  a la potencia  $n$ , la multiplicación se examina como concatenación, o sea, añadimos el identificador correspondiente a  $j$ -ésima columna a la derecha del identificador correspondiente a  $i$ -ésima fila, la sumación se examina como unión de palabras obtenidas como resultado de la multiplicación.

**Ejemplo 3.1.** Examinemos la distribución de cadenas en un grafo no orientado de Peterson (fig. 3.4), cuya matriz de adyacencia tiene forma siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		<i>a</i>			<i>e</i>	<i>k</i>					1
	<i>a</i>		<i>b</i>				<i>m</i>				2
		<i>b</i>		<i>c</i>				<i>n</i>			3
			<i>c</i>		<i>d</i>				<i>p</i>		4
	<i>e</i>			<i>d</i>						<i>r</i>	5
$S =$	<i>k</i>							<i>s</i>	<i>x</i>		6
		<i>m</i>							<i>t</i>	<i>y</i>	7
			<i>n</i>			<i>s</i>				<i>u</i>	8
				<i>p</i>		<i>x</i>	<i>t</i>				9
					<i>r</i>		<i>y</i>	<i>u</i>			10

La matriz de adyacencia  $S$  determina la distribución de aristas (cadenas de longitud unitaria). Para determinar las cadenas de longitud 2 elevemos la matriz de adyacencia al cuadrado:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
$S^2 =$	$aa, ee, kk$		$ab$	$ed$			$am$	$ks$	$kx$	$er$	1	
		$aa, bb, mm$		$bc$	$ae$	$ak$			$bn$	$mt$	$my$	2
	$ab$		$bb, cc, nn$		$cd$	$ns$	$bm$			$cp$	$nu$	3
	$ed$	$bc$		$cc, dd, pp$			$px$	$pt$	$cn$		$dr$	4
		$ae$	$cd$		$ee, dd, rr$	$ek$	$ry$	$ru$	$dp$			5
		$ak$	$ns$	$px$	$ek$	$kk, ss, xx$	$xt$				$su$	6
	$am$		$bm$	$pt$	$ry$	$xt$	$mm, tt, yy$	$yu$				7
	$ks$	$bn$		$cn$	$ru$			$nn, ss, uu$	$sx$			8
	$kx$	$mt$	$cp$		$dp$				$pp, xx, tt$	$ty$		9
	$er$	$my$	$nu$	$dr$		$su$			$ty$	$rr, yy, uu$		10

Sumando las matrices  $S + S^2$  obtenemos que en la matriz resultado faltan elementos nulos, lo que significa que existen cadenas de longitud 1 o de longitud 2 entre cualquier par de vértices del grafo de Peterson. Por consiguiente, el grafo de Peterson es conexo y es un componente de conexión.

El concepto de la cadena es principal para estudiar propiedades métricas de un grafo.

Una longitud minimal de cadena que une los vértices  $v_i$  y  $v_j$  se denomina *distancia*  $r(v_i, v_j)$  entre los vértices  $v_i, v_j$ :

$$r(v_i, v_j) = \min_k l_k(v_i, v_j).$$

La distancia maximal entre los vértices del grafo  $G$  se denomina *diámetro* del grafo  $d(G)$ :

$$d(G) = \max_{ij} \min_k l_k(v_i, v_j).$$

La función  $r(v_i, v_j)$  introducida sobre el conjunto de todos los pares de vértices  $(v_i, v_j)$  del grafo  $G$  determina su métrica. En efecto, esta función



$r(v_i, v_j)$  satisface tres axiomas siguientes:

$$(\forall v_i, v_j)(r(v_i, v_j) = 0) \leftrightarrow v_i = v_j,$$

$$(\forall v_i, v_j)(r(v_i, v_j) = r(v_j, v_i)),$$

$$(\forall v_i, v_j, v_k)(r(v_i, v_j) + r(v_j, v_k) \geq r(v_i, v_k)).$$

El último axioma suele llamarse desigualdad triangular.

Una matriz  $A$  se denomina de  $k$  células, si una permutación de columnas y filas la reduce a la forma

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & A_k \end{vmatrix}$$

donde la matriz  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  no contiene ningún elemento nulo (excepto, tal vez, los elementos diagonales).

**Teorema 3.2.** *Un grafo  $G$  comprende  $k$  componentes de conexión si, y sólo si, su matriz de alcance  $D(G)$ ,*

$$D(G) = \sum_{i=1}^{d(G)} [S(G)]^i, \quad (3.2)$$

(donde  $S(G)$  es la matriz de adyacencia,  $i = 1, d(G)$ , es el diámetro del grafo ( $G$ ) es de  $k$  células.)

Un ciclo se denomina *euleriano*, si cada arista del grafo participa en su formación una vez; un grafo que contiene tal ciclo se llama *de Euler*.

**Teorema 3.3.** *Un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  es euleriano si, y solo si, es conexo y la potencia  $s(v_i)$  de cada vértice  $v_i \in V$  es un número par.*

Un ciclo simple se denomina *de Hamilton*, si pasa por cada vértice del grafo; un grafo que contiene tal ciclo llámase *hamiltoniano*.

El teorema 3.3 determina un criterio simple para revelar la propiedad de Euler para cada grafo. Para determinar la propiedad hamiltoniana se tiene la siguiente condición suficiente.

**Teorema 3.4 (teorema de Dirac).** *Si un grafo  $G = \langle V, U \rangle$ ,  $|V| \geq 3$ , es conexo y la potencia de cada vértice  $v_i \in V$ ,*

$$s(v_i) \geq \left[ \frac{1}{2} |V| \right], \quad (3.3)$$

donde  $[ \ ]$  es el próximo número entero, entonces el grafo es de Hamilton.

Un grafo compuesto de un vértice se llama *trivial*. La eliminación de un vértice de un grafo no trivial  $G$  conduce a un subgrafo  $G \setminus v$  que contiene todos los vértices del grafo  $G$ , excepto  $v$ , y todas las aristas del grafo  $G$ , no incidentes a  $v$ . De modo análogo, la eliminación de una arista  $x$  reduce a un subgrafo (subgrafo de esqueleto) que contiene todos los vértices

y las aristas, excepto la arista  $x$ , es decir  $G \setminus x$ . La potencia minimal de los vértices de un grafo se designa por  $\delta(G) = \min_i s(v_i)$ ,  $v_i \in G$ . Si todos

los vértices de un grafo tienen la misma potencia  $n$  éste se llama grafo regular de potencia  $n$ .

Se denomina *conexión de un grafo*  $\kappa(G)$  el número mínimo de vértices, cuya eliminación hace el grafo inconexo o trivial. De esta definición se desprende que para cualquier grafo inconexo  $\kappa(G) = 0$ . Un grafo completo  $K_n$  se hace trivial, si eliminar  $n - 1$  vértices. Por eso,  $\kappa(K_n) = n - 1$ .

Si  $\kappa(G) \geq n$ , el grafo  $G$  se denomina *n-conexo*.

Llámase *conexión por aristas*  $\lambda(G)$  del grafo  $G$  el número mínimo de aristas, cuya eliminación reduce a un grafo inconexo o trivial. Para un grafo inconexo o trivial  $\lambda(G) = 0$ .

Para cualquier grafo  $G$  la conexión, la conexión por aristas y la potencia minimal están relacionadas por la siguiente desigualdad:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \quad (3.4)$$

Entre todos los grafos de  $n$  vértices y  $m$  aristas la conexión mínima es igual a 0, si  $m < n - 1$ , y es igual a  $\lceil 2m/n \rceil$ , si  $m \geq n - 1$ , donde los corchetes  $\lceil \ ]$  significan que se toma la parte entera de la expresión.

Las cadenas simples se denominan *no intersecantes por aristas*, si ningunas dos de ellas tienen una arista común. Pero, si tales cadenas tampoco tienen vértices comunes se llaman *no intersecantes por vértices*.

Sean  $G$  un grafo conexo y  $u, v$  sus dos vértices distintos. Un conjunto de aristas  $E$  del grafo  $G$  se denomina *conjunto  $u, v$ -divisor* en  $G$ , si cualquier cadena simple de  $u$  en  $v$  contiene una arista de  $E$ . Un conjunto de vértices  $V$  del grafo que no contiene  $u, v$  se llama *conjunto  $u, v$ -separador* en  $G$ , si cualquier cadena simple de  $u$  en  $v$  incluye un vértice de  $V$ .

Si un conjunto  $u, v$ -divisor  $E$  contiene  $k$  aristas, el número de cadenas simples no intersecantes por aristas de  $u$  en  $v$  no puede superar  $k$ , puesto que en caso contrario alguna arista de  $E$  debe pertenecer a más de una cadena simple. Si un conjunto  $u, v$ -divisor tiene potencia mínima, el número de cadenas simples no intersecantes por aristas entre  $u$  y  $v$  es exactamente igual a  $k$ .

**Teorema 3.5.** *El número maximal de cadenas simples, no intersecantes por aristas, que unen dos vértices distintos  $u, v$  de un grafo conexo  $G$  es igual al número minimal de aristas en el conjunto  $u, v$ -divisor.*

**Teorema 3.6.** *El número maximal de cadenas simples, no intersecantes por vértices, que unen dos vértices distintos no adyacentes  $u, v$  del grafo  $G$  es igual al número minimal de vértices en un conjunto  $u, v$ -separador.*

**Teorema 3.7.** *Un grafo es  $n$ -conexo si, y sólo si, cualquier par de sus vértices se une, al menos, por  $n$  cadenas no intersecantes por vértices.*

**Teorema 3.8.** *Un grafo es  $n$ -conexo por aristas si, y sólo si, cualquier*

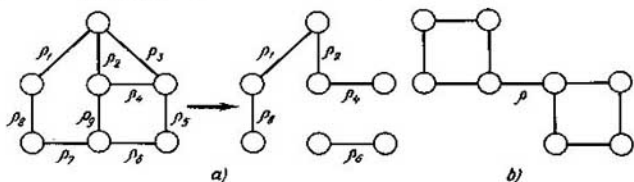


Fig. 3.5.

par de sus vértices se une, al menos, por  $n$  cadenas no intersecantes por aristas.

**Teorema 3.9 (teorema de Menger).** Para cualesquiera dos conjuntos de vértices  $V_\alpha, V_\beta$  ( $V_\alpha, V_\beta \neq \emptyset; V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ ) el número máximo de cadenas no intersecantes que unen  $V_\alpha$  y  $V_\beta$  es igual al número mínimo de vértices que separan  $V_\alpha$  y  $V_\beta$ .

Los teoremas 3.5—3.9 determinan la dependencia de conexión de un grafo respecto del número de cadenas no intersecantes. Por primera vez la investigó Menger.

Se denomina *conjunto divisor de un grafo  $G$  conexo* a tal conjunto de sus aristas que, al eliminarlas de  $G$ , éste se hace inconexo. Por ejemplo, el conjunto  $\{\rho_7, \rho_9, \rho_5, \rho_3\}$  en la fig. 3.5, *a* es separador y su eliminación lleva a formar dos componentes de conexión.

Se denomina *corte* tal conjunto divisor que no tiene subconjunto divisor propio. El conjunto  $\{\rho_7, \rho_9, \rho_5, \rho_3\}$  no es corte, ya que contiene subconjunto divisor  $\{\rho_7, \rho_9, \rho_5\}$ . Este subconjunto no tiene subconjuntos divisores propios y por eso es corte. Un corte que consta de una arista se denomina *punto* (fig. 3.5, *b*). A veces el corte se llama *cociclo*.

Examinemos un grafo orientado y su propiedad de *ser fuertemente conexo*.

Se denomina *camino* una sucesión de arcos  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  de la forma  $\delta_i = (v_i, v_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Los vértices de un camino tienen la potencia igual a 1 ó 2. Un vértice  $v_i$  de potencia 1 se denomina *extremo* con ello, el vértice  $v_1$  coincidente al arco  $\delta_1$  se denomina *inicial*, el vértice  $v_{n+1}$  coincidente al arco  $\delta_n$  se llama *final*.

El número de arcos que forman un camino se denomina *longitud del camino*.

Llámase *circuito* un camino, cuyos vértices extremos coinciden. Todos los vértices del circuito tienen la potencia  $s(v_i) \geq 2$ .

Un camino se denomina *compuesto*, si en ella se repite al menos un arco, *complejo*, si se repite al menos un vértice y *simple*, en caso contrario.

Un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  se denomina *fuertemente conexo*, si cualquier par de vértices se une por un camino.

Un subgrafo fuertemente conexo, maximal respecto a la inclusión de vértices, de un grafo se denomina su *componente de conexión fuerte*. Un grafo se denomina *no fuertemente conexo*, si el número de sus componentes de conexión fuerte es más de 1.

Examinemos el algoritmo de determinación de conexión fuerte de un grafo y del número de sus componentes, de conexión fuerte. Lo mismo que el algoritmo para determinar conexión de un grafo y el número de sus componentes de conexión, examinados para el caso de un grafo no orientado, este algoritmo se basa en el empleo de los teoremas 3.1 y 3.2

**Ejemplo 3.2.** Determinemos la conexión fuerte del grafo orientado de Peterson (fig. 3.6), cuya matriz de adyacencia tiene siguiente forma:

$$S(G) = \begin{array}{c|cccccccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \hline & & a & & & & & & & & & 1 \\ \hline & & & b & & & & & & & & 2 \\ \hline & & & & c & & & & & & & 3 \\ \hline & & & & & d & & & & & & 4 \\ \hline e & & & & & & & & & & & 5 \\ \hline k & & & & & & & & & x & & 6 \\ \hline & & m & & & & & & & & y & 7 \\ \hline & & & n & & & s & & & & & 8 \\ \hline & & & & p & & & t & & & & 9 \\ \hline & & & & & r & & & u & & & 10 \\ \hline \end{array}$$

Para determinar los componentes de conexión fuerte basándose en el teorema 3.2, hay que elevar la matriz de adyacencia del grafo  $S(G)$  a la potencia maximal igual al diámetro  $d(G)$  de este grafo:

$$d(G) = \max_j \min_i l(v_i, v_j), \quad (3.5)$$

donde  $l(v_i, v_j)$  es longitud del camino del vértice  $v_i$  al vértice  $v_j$ .

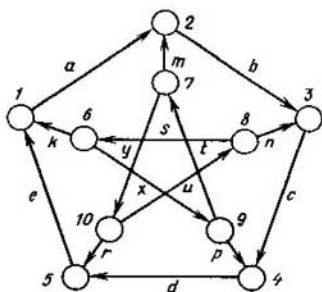


Fig. 3.6

En el caso examinado el diámetro  $d(G)$  del grafo  $G$  es igual a 5. Calculamos la matriz de alcance  $D(G)$  como  $\sum_{i=1}^5 [S(G)]^i$ :

$$D = \sum_{i=1}^5 S^i = S + S^2 + S^3 + S^4 + S^5 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_{6,1}$	$d_{6,2}$	$d_{6,3}$	$d_{6,4}$	$d_{6,5}$	$xyus$	$xt$	$xyu$	$x$	$xy$	
$d_{7,1}$	$d_{7,2}$	$d_{7,3}$	$d_{7,4}$	$d_{7,5}$	$yus$	$yu$	$yusxt$	$yusx$	$y$	
$d_{8,1}$	$d_{8,2}$	$d_{8,3}$	$d_{8,4}$	$d_{8,5}$	$s$	$sxt$	$sxyu$	$sx$	$sxy$	
$d_{9,1}$	$d_{9,2}$	$d_{9,3}$	$d_{9,4}$	$d_{9,5}$	$tyus$	$t$	$tyu$	$tyusx$	$ty$	
$d_{10,1}$	$d_{10,2}$	$d_{10,3}$	$d_{10,4}$	$d_{10,5}$	$us$	$usxt$	$u$	$usx$	$usxy$	

- $d_{6,1} = k, xpde, xtyre, d_{6,2} = ka, xtm, xpdea,$
- $d_{6,3} = kab, xtmb, xtyun, d_{6,4} = xp, kabc, xtmbc,$
- $d_{6,5} = xpd, xtyr, kabcd, d_{7,1} = yre, yusk, mbcde,$
- $d_{7,2} = m, yrea, yuska, d_{7,3} = mb, yun, yreab,$
- $d_{7,4} = mbc, yunc, yusxp, d_{7,5} = yr, mbc, yuncd,$
- $d_{8,1} = sk, ncde, sxpde, d_{8,2} = ska, sxtm, ncdea,$
- $d_{8,3} = n, skab, sxtmb, d_{8,4} = nc, sxp, skabc,$
- $d_{8,5} = ncd, sxpd, sxyr, d_{9,1} = pde, tyre, tyusk,$
- $d_{9,2} = tm, pdea, tyrea, d_{9,3} = tmb, tyun, pdeab,$
- $d_{9,4} = p, tmbc, tyunc, d_{9,5} = pd, tyr, tmbcd,$
- $d_{10,1} = re, usk, uncde, d_{10,2} = rea, uska, usxtm,$
- $d_{10,3} = un, reab, uskab,$
- $d_{10,4} = unc, usxp, reabc,$
- $d_{10,5} = r, uncd, usxpd.$

En la matriz de alcance, al componente de conexión fuerte le corresponde una submatriz de dimensión maximal, cada elemento de la cual no es igual a 0. Los elementos que muestran la relación entre estas submatrices pueden ser distintos de 0.

En el ejemplo dado tenemos dos componentes de conexión fuerte con portadores {1, 2, 3, 4, 5} y {6, 7, 8, 9, 10} respectivamente.

Se denomina *red* un grafo orientado  $G = \langle V, U \rangle$ , en el cual se escogen dos conjuntos de vértices polares  $V^+$  y  $V^-$  tales que de cada vértice  $v_i \in V^+$  los arcos solamente salen, en cada vértice  $v_i \in V^-$  los arcos solamente entran y cada vértice  $v_i \in V \setminus (V^+ \cup V^-)$  es coincidente tanto a los arcos entrantes,

como a los salientes. Ponemos en correspondencia a cada arco un número positivo que determina su «capacidad». Entonces, se puede enunciar otra variante del teorema de Menger para un grafo orientado ponderado por los arcos.

**Teorema 3.10.** *El flujo maximal a través de una red es igual a la capacidad minimal de su corte.*

Un algoritmo de determinación del flujo maximal se examina en el §3.5.

### § 3.3. Ciclomática

Para investigar los ciclos en un grafo se usa la matriz ciclomática  $C(G) = [c_{ij}]$ . Ponemos en correspondencia biunívoca a cada ciclo del grafo un vector fila de la matriz  $C(G)$ . Todo elemento de esta fila se define del modo siguiente:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j\text{-ésima arista se incorpora en } i\text{-ésimo ciclo;} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Un conjunto  $C(G)$  de todos los vectores, cada uno de los cuales corresponde a un ciclo del grafo  $G$ , forma un espacio vectorial llamado *espacio de los ciclos del grafo  $G$* . Además, se cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cualesquiera dos ciclos  $R_i, R_j \in C(G)$ ,  $R_i \cap R_j \neq \emptyset$  existe cierto tercer ciclo  $(R_i \oplus R_j) \in C(G)$ , donde  $\oplus$  significa adición según el módulo dos por órdenes.

2. La adición según el módulo dos posee la propiedad conmutativa, es decir, para cualesquiera dos  $R_i, R_j \in C(G)$

$$R_i \oplus R_j = R_j \oplus R_i.$$

3. La adición según el módulo dos es asociativa, es decir, para cualesquiera  $R_i, R_j, R_k \in C(G)$

$$(R_i \oplus R_j) \oplus R_k = R_i \oplus (R_j \oplus R_k).$$

Se denomina *base de un espacio vectorial* cualquier sistema de vectores linealmente independientes que engendra el espacio dado. Un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial cuando, y sólo cuando, cualquier elemento de este espacio se representa de manera única en forma de una combinación lineal de vectores del conjunto. Si un espacio tiene base de  $n$  vectores se denomina *espacio  $n$ -dimensional*.

*Base de ciclos del grafo  $G$*  es una base del espacio de los ciclos del grafo  $G$  compuesto de ciclos simples.

Un vector  $R$  depende de ciclos simples  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , si se representa en forma de la combinación lineal de vectores

$$R = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Cualquier vector de un ciclo del grafo  $G$  puede representarse en forma de una combinación lineal de los vectores de la base de los ciclos. Examinemos, por ejemplo, el grafo representado en la fig. 3.7,  $a$ . La matriz ciclomática  $C(G)$  de este grafo tiene la forma

$$C(G) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & m & g & h \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \end{matrix}$$

En calidad del sistema básico de ciclos se puede tomar los ciclos  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Se puede comprobar que todos los otros ciclos se representan como su combinación lineal según el módulo dos:

$$R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 = R_4, \quad R_1 \oplus R_2 = R_5, \quad R_1 \oplus R_3 = R_7, \quad R_2 \oplus R_3 = R_6.$$

Se denomina *árbol* un grafo conexo que no contiene ningún ciclo. Se denomina *subgrafo de esqueleto* de un grafo un subgrafo que contiene todos los vértices del grafo. Se denomina *esqueleto* un subgrafo esqueleto que es un árbol. Se llama *cuerda de un esqueleto  $D$*  en un grafo conexo  $G$  cualquier arista del grafo que no pertenece a  $D$ . Cualquier subgrafo compuesto de una cuerda y el esqueleto tiene exactamente un ciclo. El *número ciclomático*  $\nu(G)$  de un grafo  $G$  es igual al número de cuerdas de cualquier esqueleto en  $G$ .

Si un grafo conexo  $G$  tiene  $n$  vértices y  $m$  aristas, se tiene

$$\nu(G) = m - n + 1. \quad (3.6)$$

Si el grafo  $G$  contiene  $k$  componentes de conexión, su número ciclomático es

$$\nu(G) = m - n + k. \quad (3.7)$$

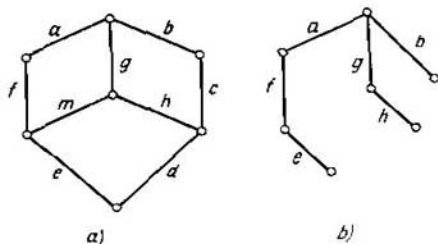


Fig. 3.7

a)

b)

El número ciclomático de un grafo inconexo puede determinarse como la suma de los números ciclomáticos de sus componentes de conexión:

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^k \nu(G_i) \quad (3.8)$$

El número ciclomático determina la medida de conexión de un grafo. Indiquemos que las propiedades de los ciclos de un grafo y de sus cortes se parecen. Se denomina *bosque* un grafo que no contiene ciclos. En otras palabras, si un grafo comprende varios componentes de conexión, cada uno de los cuales es un árbol, este grafo es un bosque. Si un bosque  $G$  tiene  $n$  vértices y  $k$  componentes de conexión, éste contiene  $n - k$  aristas.

Llábase *bosque de esqueleto* un grafo, cada componente del cual es un árbol de esqueleto.

El *rango cocíclico*  $\chi(G)$  (*rango de corte*) de un grafo es el número de aristas en su bosque de esqueleto:

$$\chi(G) = n - k.$$

El número de ciclos de base en un grafo  $G$  se determina por el *número ciclomático (rango cíclico)* del grafo  $\nu(G)$ .

**Teorema 3.11 (teorema de Euler).** *El número de ciclos de base de un grafo es constante e igual a su número ciclomático.*

Se denomina *sistema básico de ciclos* para un bosque de esqueleto  $D$  dado de un grafo  $G$  el conjunto de todos los ciclos del grafo  $G$ , cada uno de los cuales contiene solamente una cuerda de  $D$ . Este sistema forma base del espacio de ciclos. En el ejemplo considerado los ciclos  $R_1, R_2, R_3$  son la base:

$$C_b(G) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & c & m & d & a & b & e & f & g & h \\ \hline R_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline R_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline R_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

cuerdas
esqueleto  $D$

La matriz obtenida es la *matriz ciclomática de base* respecto al esqueleto  $D$ .

Cumpliendo  $2^r - \nu - 1$  veces la operación de adición según el módulo dos sobre los ciclos de base obtenemos todo el conjunto de ciclos de este espacio. Escribamos el *sistema básico* de cortes para el grafo  $G$  y el árbol de esqueleto  $D$  representado en la fig. 3.7,  $b$ .  $\{a, m, d\}$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\{e, d\}$ ,  $\{g, m, c, d\}$ ,  $\{d, h, c\}$ ,  $\{f, m, d\}$ .



Este sistema se obtiene de modo siguiente. Se quita una arista del esqueleto  $D$ . Con esto, el conjunto de vértices se parte en dos subconjuntos no intersecantes  $V_1$  y  $V_2$ . En  $G$ , el conjunto de todas las aristas, cada una de las cuales une el vértice de  $V_1$  con el vértice de  $V_2$  es un corte del grafo  $G$ . El conjunto de todos los cortes para cada arista del esqueleto  $D$  es el sistema básico de cortes para el esqueleto dado  $D$ .

El sistema básico de cortes forma base en el espacio de cortes o bien en el espacio de cociclos. Este sistema puede ser escrita en forma de una correspondiente *matriz básica de cortes* o bien de una *matriz cociclomática básica*:

$$K_b(G) = \begin{array}{c|ccccccccc} & a & b & e & g & h & f & m & c & d \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & & & & \\ & \text{esqueleto} & & & & & & \text{cuerdas} & & \end{array}$$

Cumpliendo  $2^x - x - 1$  veces la operación de adición según el módulo dos sobre cociclos, engendramos todo el conjunto de cociclos (cortes) del grafo.

Al prefijar en el grafo las propiedades de los ciclos se puede definir la clase de los grafos. Examinemos, por ejemplo, los grafos de dos partes. Lámase *grafo de dos partes*  $G(V_1, V_2)$  un grafo, cuyo conjunto de vértices se parte en dos subconjuntos no intersecantes  $V_1$  y  $V_2$  de tal modo que en  $G$  cada arista une dos vértices de subconjuntos distintos.

Para cerciorarse de que un grafo es de dos partes es suficiente comprobar sus ciclos.

**Teorema 3.12.** *Un grafo es de dos partes si, y sólo si, todos sus ciclos tienen longitud par (son pares).*

□ Sea  $G$  un grafo de dos partes. Entonces el conjunto de sus vértices se descompone en subconjuntos  $V_1$  y  $V_2$ . Examinemos cualquier vértice de  $V_1$ . Para obtener un ciclo que incluye este vértice, hay que pasar  $k$  veces por una arista de  $V_1$  y  $V_2$  y por otra, de  $V_2$  a  $V_1$ . De este modo, en  $G$ , cualquier ciclo tiene  $2k$  aristas, o sea, es par.

Sea ahora que todos los ciclos simples son pares; demostremos la afirmación inversa que  $G$  es un grafo de dos partes. Supongamos que  $G$  es un grafo conexo. Para cualquier vértice  $v_i \in V_1$  designaremos mediante  $V_1$  un conjunto de vértices que comprende  $v_i$  y todos los vértices que están a distancia de una longitud par de  $v_i$ ; designaremos mediante  $V_2$  el conjunto de los otros vértices, que se encuentran a distancia de una longitud impar de  $v_i$ . Sea ahora que tenemos dos vértices  $v_j, v_k \in V_2$  unidos por una arista. Ya que entre  $v_i$  y  $v_j$ , así como entre  $v_i$  y  $v_k$  existe un número par de aristas, el ciclo que comprende la arista  $(v_j, v_k)$  y el vértice  $v_i$  es impar, empero esto contradice la condición según la cual todos los ciclos son pares. Por consiguiente, los vértices de  $V_2$  no se unen entre sí. Se puede aducir una demostración análoga, si  $G$  tiene varios componentes de conexión. ■

En un grafo de dos partes no es obligatorio que cada vértice de  $V_1$  se una con cada vértice de  $V_2$ . Sin embargo, si este hecho tiene lugar, el grafo se denomina *grafo completo de dos partes* y se denota por medio de  $K_{m,n}$  donde  $m$  es el número de vértices de  $V_1$ , mientras que  $n$ , es el número de vértices de  $V_2$ . El grafo  $K_{m,n}$  tiene  $m + n$  vértices y  $mn$  aristas. El grafo completo de dos partes  $K_{1,n}$  se denomina *grafo estelar* (estrella) y es un árbol. Señalemos que cualquier árbol es un grafo de dos partes. Con frecuencia el grafo de dos partes se llama *grafo de König*.

### § 3.4. Diferenciación de los grafos y mografos

En el análisis matemático el concepto de la derivada caracteriza el grado de variación de una función al realizarse una variación pequeña de su argumento. El concepto de la derivada se basa en el del límite. En la matemática discreta no existe el concepto del límite, por esta razón es imposible trasladar mecánicamente el concepto de la derivada de la matemática continua a la discreta. Para resolver problemas de optimización de la matemática discreta, introduciremos el concepto de la derivada basado en el uso del concepto de la frecuencia de letras en las palabras de cierto modelo  $\Psi$ .

Antes de la definición formal de la derivada, examinemos el siguiente ejemplo. Sea dado un grafo  $G$  (fig. 3.8,  $a$ ). Nos interesa la frecuencia de participación de las aristas en la formación de esqueletos del grafo  $G$ . El grafo  $G$  contiene 8 esqueletos y se puede caracterizar la frecuencia buscada, por ejemplo, por el número de inclusiones de cada una de las aristas en estos esqueletos. Por ejemplo, la arista  $a$  participa 5 veces en la formación de esqueletos; la arista  $c$ , 4 veces, etc. La frecuencia se caracterizará de modo más completo, si a la par con los números indicados anteriormente calcular números, cada uno de los cuales es igual al número de esqueletos que contienen dos aristas fijadas. Por ejemplo, las aristas  $a$  y  $b$  se contienen en dos esqueletos. Con más exactitud la frecuencia buscada de un par de

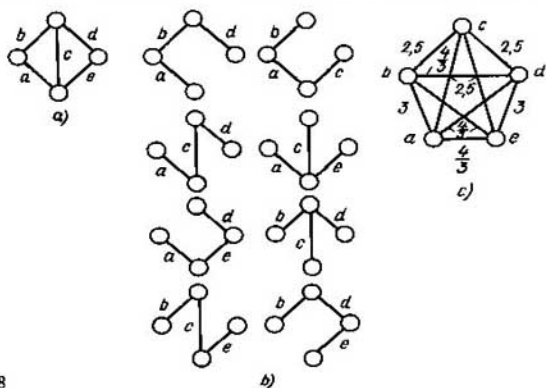


Fig. 3.8

aristas  $q_i$  y  $q_j$  se determina por el número de esqueletos que comprenden la arista  $q_i$  o  $q_j$ , pero no las comprenden simultáneamente en razón inversa con el número de esqueletos que contienen tanto la arista  $q_i$  como la arista  $q_j$ :  $(f_i - 2f_{ij} + f_j)/f_{ij}$ , donde  $f_i$ ,  $f_j$ ,  $f_{ij}$  son los números de esqueletos del grafo que contienen las aristas  $q_i$ ,  $q_j$ ,  $q_i$  y  $q_j$ , respectivamente.

Esta razón indica el grado de participación no uniforme de los pares de aristas en la formación de esqueletos del grafo.

A continuación nos acordemos llamar *suceso*  $S$  que ocurre cuando se cumplen determinadas condiciones al proceso examinado. En el ejemplo examinado el suceso  $S$  se representa por la «formación del esqueleto del grafo  $G$  por un conjunto de aristas», y las condiciones, por la inclusión de las aristas del grafo en el conjunto dado. El suceso  $S$  puede prefijarse por el correspondiente predicado.

Cada uno de los sucesos determina una matriz binaria bidimensional  $Q = [q_{ij}]_{m \times n}$ , a cada columna de la cual corresponde biunívocamente una condición, comprendida en un suceso, y a cada fila, una colección de condiciones, con las cuales el suceso tiene lugar (en las cuales el suceso es verdadero) y

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j\text{-ésima condición se incluye en } i\text{-ésima colección de} \\ & \text{condiciones, en las cuales el suceso es verdadero;} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En otras palabras, cada suceso determina un modelo, cuya matriz de incidencia es una matriz  $Q$ , o sea, las condiciones que se comprenden en el suceso son letras del modelo, las colecciones de condiciones, en las cuales el suceso es verdadero, son palabras del modelo.

La intensidad de participación de las condiciones (letras) en los sucesos (palabras) la caracterizaremos utilizando frecuencias de su inclusión. Para esto introduzcamos la matriz de frecuencia de relaciones  $F = [f_{ij}]_{n \times n}$  que caracteriza un modelo  $\Psi$ , cuya matriz de incidencia es  $Q(\Psi) = [q_{ij}]_{m \times n}$ .

Se denomina *matriz de frecuencia de relaciones*  $F = [f_{ij}]_{n \times n}$  una matriz, a cada fila (columna) de la cual le corresponde biunívocamente una letra, y un elemento  $f_{ij}$  es igual al número de palabras que comprenden las letras  $i$  y  $j$ , si  $i \neq j$ , en el caso contrario ( $i = j$ ) equivale al número de palabras que incluyen la letra  $i$ . Con ello, si  $i = j$ ,  $f_i$  es la *frecuencia propia de la letra*, si  $i \neq j$ ,  $f_{ij}$  es la *frecuencia recíproca* de las letras  $i$  y  $j$ .

De la definición de la matriz de frecuencia de relaciones  $F = [f_{ij}]_{n \times n}$  se desprende que ésta es simétrica respecto a la diagonal principal, es decir,  $f_{ij} = f_{ji}$ , y que la frecuencia propia de cualquier letra no es menor que la frecuencia recíproca de esta letra con cualquier otra letra:  $f_i \geq f_{ij}$ .

Se puede mostrar que una matriz de frecuencia de relaciones  $F$  que caracteriza un modelo con la matriz de incidencia  $Q$  satisface la relación

$$Q^T \times Q = F, \quad (3.9)$$

donde  $Q^T$  es la matriz transpuesta ( $Q^T$  es el signo de la matriz transpuesta).

Determinemos el grado de participación de los componentes del grafo  $G$  en un suceso  $S$  dado con anticipación en el grafo  $G$ , en otras palabras, el grado de heterogeneidad de componentes del grafo respecto al suceso prefijado. Caracterizaremos esta heterogeneidad por la derivada  $\partial G / \partial S$  del grafo  $G$  respecto al suceso  $S$ .

Llámase *derivada  $\partial G / \partial S$  de un grafo  $G$  respecto a un suceso  $S$*  un grafo ponderado no orientado  $\langle V, (U, P) \rangle$ , cuyo portador coincide con el portador de un modelo determinado por este suceso y un par de vértices  $(v_i, v_j)$  está ponderado por la razón de la frecuencia  $(f_i - f_{ij}) + (f_j - f_{ij})$  de su participación incompatible a la frecuencia  $f_{ij}$  de la participación compatible en el suceso  $S$ :

$$\frac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}}, \quad (3.10)$$

con la particularidad de que

$$(v_i, v_j) \notin U, \text{ si } \frac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j) = \infty;$$

$$(v_i, v_j) \in U, \text{ si } \frac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j) \text{ es la magnitud finita diferente de cero;}$$

$$v_i = v_j, \text{ si } \frac{\partial G}{\partial S}(v_i, v_j) = 0.$$

El valor de la expresión (3.10) se llama *valor de la derivada* sobre la arista  $(v_i, v_j)$ .

Ilustremos el concepto de derivada de un grafo respecto a un suceso con dos ejemplos.

**Ejemplo 3.3.** Examinemos un grafo  $G$  (fig. 3.8,  $a$ ) y un suceso  $S$ , «formación del esqueleto del grafo  $G$  por las aristas». Hallemos la derivada del grafo  $G$  según el suceso  $S$  que caracterizará la intensidad de participación de aristas en la formación de esqueletos del grafo  $G$ .

El suceso prefijado determina un modelo, cuya matriz de incidencia tiene siguiente forma.

$$Q = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

En esta matriz, a cada columna le corresponde biunívocamente una arista del grafo  $G$  (la condición comprendida en el suceso), a cada fila, una colección de aristas que forman un esqueleto del grafo (la colección de condiciones, en las cuales el suceso prefijado tiene lugar) (fig. 3.8,  $b$ ).

La matriz de frecuencia de relaciones  $F$  que corresponde a la matriz  $Q$  es

$$F = Q^T \times Q = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}$$

Los elementos de esta matriz determinan  $\frac{\partial G}{\partial S}$  que es un grafo con portador  $\{a, b, c, d, e\}$  y dos vértices de este grafo son adyacentes, si el valor de la derivada sobre el arco formado por estos vértices es distinto de cero y del infinito. Calculando los valores de la derivada sobre las aristas del grafo  $\frac{\partial G}{\partial S}$ :

$$\frac{\partial G}{\partial S} (a, b) = \frac{f_a - 2f_{ab} + f_b}{f_{ab}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 5}{2} = 3,$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} (a, c) = \frac{f_a - 2f_{ac} + f_c}{f_{ac}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 4}{2} = 2,5,$$

$$\frac{\partial G}{\partial S} (d, e) = \frac{f_d - 2f_{de} + f_e}{f_{de}} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 5}{2} = 3,$$

obtenemos el grafo  $\frac{\partial G}{\partial S}$  (fig. 3.8,  $c$ ).

**Ejemplo 3.4.** Examinemos un grafo  $G$  (fig. 3.9,  $a$ ), sobre el cual está prefijado un suceso  $S$ , «formación por aristas de un ciclo de base respecto a un esqueleto  $G'$  (fig. 3.9,  $b$ ) del grafo  $G$ ». Calculemos la derivada del grafo  $G$  respecto al suceso  $S$ .

El número ciclomático  $\nu(G)$  del grafo  $G$  es igual a 3:

$$\nu(G) = m - n + k = 7 - 5 + 1 = 3.$$

Por consiguiente, el grafo contiene tres ciclos de base. El suceso  $S$  determina un modelo de tipo.

$$Q = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & g & h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A este modelo le corresponde la matriz de frecuencia de relaciones

$$F = Q^T \times Q = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & g & h \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ g \\ h \end{matrix}$$

Calculando el valor de la derivada obtenemos el grafo  $\frac{\partial G}{\partial S}$  (fig. 3.9, c). Analizando el grafo  $\frac{\partial G}{\partial S}$  fijemos que, por ejemplo, las aristas  $c$  y  $d$  ( $a$  y  $b$ ) participan de manera igualmente intensa en el suceso prefijado.

De tal modo, para determinar la derivada de un grafo  $G$  según el suceso  $S$  es necesario:

- construir un modelo determinado por el suceso prefijado;
- hallar la matriz de frecuencia de relaciones que corresponde a este modelo;
- calculando los valores de la derivada  $\frac{\partial G}{\partial S}$  sobre aristas del grafo por la matriz de frecuencia de relaciones construir el grafo buscado  $\frac{\partial G}{\partial S}$  que caracteriza la intensidad de participación de elementos del grafo  $G$  en el suceso prefijado  $S$ .

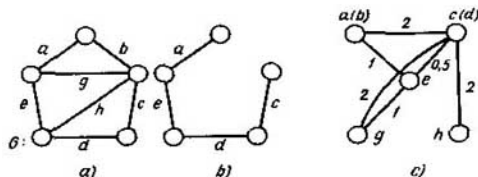


Fig. 3.9

Llámanse derivada  $\frac{\partial^k G}{\partial S^k}$  de orden  $k$  según el suceso  $S$  la derivada de la derivada de orden  $k - 1$  según aquel mismo suceso  $S$ :

$$\frac{\partial^k G}{\partial S^k} = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial^{k-1} G}{\partial S^{k-1}} \right).$$

Se denomina derivada mixta según los sucesos  $S_a$  y  $S_b$  la derivada según el suceso  $S_a$  de la derivada según el suceso  $S_b$ :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S_a \partial S_b} = \frac{\partial}{\partial S_a} \left( \frac{\partial G}{\partial S_b} \right).$$

De modo análogo se determinan derivadas mixtas del grafo  $G$  según los sucesos  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .

El concepto introducido de la derivada de un grafo  $G$  según el suceso  $S$  posibilita hallar también la derivada de un modelo  $\Psi(Q)$  (de un mografo  $G^{(M)}(Q)$ ). En el caso de determinar la derivada de un modelo, si no se da otra indicación sobre el suceso  $S$ , en calidad de  $S$  consideramos la «formación de una palabra por letras».

El valor de la derivada del modelo (del mografo  $G^{(M)}(Q)$ ) sobre un par  $(i, j)$  es

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S} (i, j) = \frac{f_i - 2f_{ij} + f_j}{f_{ij}},$$

donde las frecuencias  $f_i, f_{ij}$  y  $f_j$  se determinan por la matriz de frecuencia de relaciones  $F = [f_{ij}]$  ( $F = Q^T \times Q$ ). Sobre el mografo  $G^{(M)}$ , las frecuencias  $f_i, f_{ij}$  y  $f_j$  son iguales al número de pesos del vértice  $v_i$ , al número de pesos comunes de los vértices  $v_i, v_j$  y al número de pesos del vértice  $v_j$ , respectivamente.

**Ejemplo 3.5.** Calculemos

$$\frac{\partial^2 G^{(M)}}{\partial S_1 \partial S_2} ((v_1, v_2), (v_2, v_3)),$$

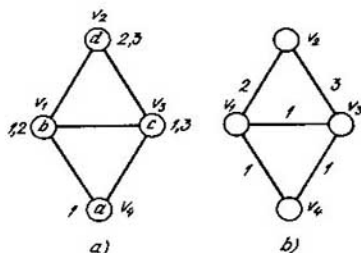


Fig. 3.10

donde el mografo  $G^{(M)}$  está prefijado en la fig. 3.10, *a*, el suceso  $S_1$  es el suceso en el mografo, en el entendimiento habitual (o sea, la «formación de una palabra por letras»); el suceso  $S_2$  es la «formación de un ciclo de longitud impar en el grafo  $\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1} = \langle V, U \rangle$ »

La matriz de incidencia  $Q_1$  que prefija el mografo  $G^{(M)}$  (fig. 3.10, *a*) tiene forma

$$Q_1 = \begin{vmatrix} & a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Le corresponde la matriz de frecuencia de relaciones  $F = Q^T \times Q$ :

$$F_1 = \begin{vmatrix} & a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Los valores de la derivada  $\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}$  son, respectivamente, iguales a:

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(a, b) = 1; \quad \frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(b, c) = 2;$$

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(a, c) = 1; \quad \frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(b, d) = 2;$$

$$\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(a, d) = \infty; \quad \frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}(c, d) = 2.$$

El grafo  $\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}$  se representa en la fig. 3.10, *b*. En el grafo  $\frac{\partial G^{(M)}}{\partial S_1}$  el suceso  $S$  prefija la matriz  $Q_2$  de tipo

$$Q_2 = \begin{vmatrix} & (v_1, v_2) & (v_2, v_3) & (v_1, v_3) & (v_3, v_4) & (v_1, v_4) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

En virtud del algoritmo del hallazgo de la derivada del grafo, obtenemos

$$F_2 = \begin{vmatrix} & (v_1, v_2) & (v_2, v_3) & (v_1, v_3) & (v_3, v_4) & (v_1, v_4) \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

y

$$\frac{\partial^2 G^{(M)}}{\partial S_1 \partial S_2}((v_1, v_2), (v_2, v_3)) = \frac{1 - 2 \cdot 1 + 1}{1} = 0.$$

Hemos examinado la uniformidad de participación de los pares de elementos en el suceso  $S$ . De modo análogo puede ser examinada la uniformidad de participación de ternas, cuaternas, . . . ,  $n$ -ternas de elementos en



el suceso  $S$ . Para deducir la fórmula de la derivada sobre tres, cuatro, . . . ,  $n$  elementos generalizaremos el concepto de la matriz de frecuencia de relaciones. Introduzcamos el concepto de la hipermatriz de frecuencia de relaciones.

Examinemos el modelo  $\Psi = \langle M, S_1, S_2, \dots, S_k \rangle$ . Tomemos una matriz  $N$ -dimensional  $F = [f_{i_1 i_2 \dots i_N}]$ ,  $i_1, i_2, \dots, i_N = 1, \dots, |M|$ . Las posiciones según cada dimensión de la matriz  $N$ -dimensional las enumeremos con números de la serie natural  $1, 2, \dots, |M|$ . Pongamos en correspondencia biunívoca a cada letra  $m \in M$  un número de esta serie natural y colocaremos las letras  $m_j \in M$  por las respectivas posiciones de cada dimensión de la matriz  $N$ -dimensional. Cada elemento  $f_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  de esta matriz es igual al número de palabras que comprenden letras correspondientes a los números  $i_1, i_2, \dots, i_N$ . No duplicamos los índices iguales por su escritura. La matriz formada de este modo se denominará *matriz  $N$ -dimensional de frecuencia de relaciones* o bien *hipermatriz de frecuencia de relaciones*, si no nos interesa la dimensión de esta matriz.

Si entre los índices  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_N$  y un elemento  $f_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  existen al menos dos índices de escritura distinta este elemento se llama *frecuencia recíproca* de letras correspondientes y, en caso contrario, *frecuencia propia* de estas letras. La frecuencia  $f_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  que tiene  $k$  índices diferentes se denomina *frecuencia de orden  $k$* .

Cuando se calculaba la derivada de un par de elementos se utilizaban frecuencias de primer y segundo orden.

La derivada  $\frac{\partial G}{\partial S}$  de un grafo  $G$  respecto a un suceso  $S$  sobre las ternas de elementos es

$$\frac{\partial G}{\partial S}(m_a, m_b, m_c) = \frac{1}{f_{m_a m_b m_c}} \cdot \left( \sum_{i=m_a, m_b, m_c} f_i - 2 \cdot \sum_{i \neq j, i, j = m_a, m_b, m_c} f_{ij} + 3 \cdot \sum_{\substack{i \neq j, i \neq k, j \neq k \\ i, j, k = m_a, m_b, m_c}} f_{ijk} \right). \quad (3.11)$$

La derivada  $\frac{\partial G}{\partial S}$  del grafo  $G$  respecto a un suceso  $S$  sobre las cuaternas de elementos es

$$\frac{\partial G}{\partial S}(m_a, m_b, m_c, m_d) = \frac{1}{f_{m_a m_b m_c m_d}} \cdot \left( \sum_i f_i - 2 \cdot \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} f_{ij} + 3 \cdot \sum_{\substack{i, j, k \\ i \neq j, i \neq k, j \neq k}} f_{ijk} - 4 \cdot \sum_{\substack{i, j, k, l \\ i \neq j, i \neq k, i \neq l, j \neq k, j \neq l, k \neq l}} f_{ijkl} \right), \quad i, j, k, l = m_a, m_b, m_c, m_d. \quad (3.12)$$

La derivada  $\frac{\partial G}{\partial S}$  de un grafo  $G$  respecto a un suceso  $S$  sobre  $n$  elementos es

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial S} (m_1, m_2, \dots, m_n) = & \frac{1}{f_{m_1, m_2, \dots, m_n}} \cdot \left( \sum_{i_1} f_{i_1} - 2 \cdot \sum_{\substack{i_1, i_2 \\ i_1 \neq i_2}} f_{i_1 i_2} + \right. \\ & \left. + (-1)^{\alpha+1} \cdot \alpha \cdot \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_\alpha \\ i_1 \neq i_2, \dots, i_{\alpha-1} \neq i_\alpha}} f_{i_1 i_2 \dots i_\alpha} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n \\ i_1 \neq i_2, \dots, i_{n-1} \neq i_n}} f_{i_1 i_2 \dots i_n} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$i_1, i_2, \dots, i_\alpha, \dots, i_n = m_1, m_2, \dots, m_n.$

Las fórmulas (3.11)—(3.13) están deducidas de la definición de la derivada  $\frac{\partial G}{\partial S}$  de un grafo  $G$  respecto a un suceso  $S$ , al examinar las ternas, cuaternas y  $n$ -ternas de elementos, respectivamente.

Cada modelo puede ser prefijado con ayuda de una hipermatriz de frecuencia de relaciones.

Por ejemplo, un modelo  $\Psi = \langle M, S_3 \rangle$ ,

$$M = \{a, b, c, d, e\},$$

$$S_3 = \{\{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}\},$$

cuya matriz de incidencia

$$Q(\Psi) = \begin{vmatrix} & a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

puede determinarse por la matriz de frecuencia de relaciones

$$F(\Psi) = \begin{vmatrix} & a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}$$

En el ejemplo examinado  $Q(\Psi)$  y  $F(\Psi)$  determinan biunívocamente una a otra. En otras palabras, un modelo puede ser prefijado no sólo enumerando sus palabras, sino también cuando se prefijan intersecciones de estas palabras con ayuda de planteamiento de las frecuencias de letras en estas palabras).

Si tenemos gran número de ceros es cómodo representar la hipermatriz de frecuencia de relaciones en forma de anotación en línea. Por ejemplo,

el modelo a examinar  $\Psi$  puede ser escrito como

$$F(\Psi) = a^2 \circ 2b^2 \circ 2c^2 \circ 3d^2 \circ e^2 \circ ab \circ ad \circ bc \circ 2bd \circ 2cd \circ ce \circ de.$$

Aquí el coeficiente para  $\alpha^2$  es igual a  $f_\alpha$  y para  $\alpha\beta$ ,  $f_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = a, b, c, d, e$ ; el símbolo  $\circ$  es distribuidor constructivo de dos frecuencias.

La anotación en línea de una hipermatriz de frecuencia de relaciones que prefija el modelo se denominará a continuación *descomposición del modelo por frecuencias* o bien *descomposición de frecuencia del modelo*.

### § 3.5. Estabilidad, cubrimientos y combinaciones en pares

En cualquier grafo se puede formar una colección de ciertos conjuntos que se unen según algún criterio, por ejemplo, subconjuntos de vértices tales en los que no hay dos vértices de un mismo subconjunto que sean adyacentes. Análogamente se puede partir un grafo en subconjunto de aristas de tal modo que las aristas de un subconjunto sean no adyacentes de dos en dos. En el caso general, el número de elementos en distintos subconjuntos es distinto y existe un subconjunto, en que el número de elementos adquiere el máximo valor. Por eso se puede introducir dos invariantes del grafo para vértices no adyacentes de dos en dos y aristas del mismo tipo.

Un conjunto de vértices se denomina *interiormente estable*, si éstos son no adyacentes de dos en dos.

Un conjunto interiormente estable de vértices se denomina *subgrafo vacío* si, al añadir aunque no sea más que un vértice no perteneciente a este conjunto, se forma por lo menos una arista (un arco).

La potencia maximal de un subgrafo vacío del grafo  $G$  se denomina *número de estabilidad interior* o *número vértice de independencia del grafo*  $\varepsilon_0(G)$ .

El número maximal de aristas no adyacentes de dos en dos de un grafo  $G$  se denomina *número arista de independencia del grafo*  $\varepsilon_1(G)$ .

Si una arista es incidente a un vértice se dice que ellos cubren uno a otro. Un conjunto de vértices que cubren todas las aristas de un grafo se denomina *cubrimiento vértice* del grafo  $G$ . La potencia minimal del cubrimiento vértice se llama *número del cubrimiento vértice del grafo*  $\pi_0(G)$ . Análogamente un conjunto de aristas que cubren todos los vértices del grafo  $G$  se denomina *cubrimiento arista* de un grafo. La potencia minimal del cubrimiento arista del grafo  $G$  se denomina *número del cubrimiento arista*  $\pi_1(G)$ .

Acordémonos considerar que cualquier vértice de un grafo cubre a sí mismo y dos vértices adyacentes cubren uno a otro. Entonces la potencia minimal de un conjunto de vértices que cubren todos los vértices del grafo  $G$  se llama *número vértice de la estabilidad exterior del grafo*  $\beta_0(G)$ .

De manera análoga consideremos que cada arista de un grafo cubre

a si misma y dos aristas adyacentes cubren una a otra; entonces la potencia minimal de un conjunto de aristas que cubren todas las aristas del grafo  $G$  se denomina *número arista de la estabilidad exterior*  $\beta_1(G)$ .

Para resolver muchos problemas prácticos es necesario calcular los invariantes examinados del grafo. Por ejemplo, sea que los vértices de un grafo son los módulos tecnológicos de un proceso automatizado flexible y hay que observarlos continuamente, mientras que dos vértices del grafo se unen por una arista, si se puede observar sus respectivos módulos encontrándose al lado de uno de ellos. Se necesita colocar telecámaras de tal modo que el operador del monitor en el panel de control pueda observar todos los módulos con tal que el número de telecámaras sea mínimo. Para resolver este problema hay que determinar el número de vértice de la estabilidad exterior del grafo dado.

**Ejemplo 3.6.** Para el grafo de Peterson  $G$  (véase la fig. 3.4), los invariantes introducidos tienen siguientes valores:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(G) &= 4, \quad |\{1, 3, 9, 10\}| = 4; \quad \varepsilon_1(G) = 5, \quad |\{a, d, n, x, y\}| = 5; \\ \pi_0(G) &= 6, \quad |\{1, 3, 5, 7, 8, 9\}| = 6; \quad \pi_1(G) = 5, \quad |\{k, m, n, p, r\}| = 5; \\ \beta_0(G) &= 3, \quad |\{1, 4, 10\}| = 3; \quad \beta_1(G) = 4, \quad |\{a, c, x, u\}| = 4. \end{aligned}$$

**Teorema 3.13.** Para cualquier grafo conexo no trivial  $G = \langle V, U \rangle$  se tiene

$$\varepsilon_0(G) + \pi_0(G) = \varepsilon_1(G) + \pi_1(G) = |V|. \quad (3.14)$$

Un conjunto de aristas de un grafo, en el cual ningún par de aristas es adyacente se denomina *combinación en par* del grafo. Un conjunto de aristas de una combinación en par, en la cual el número de aristas es igual a  $\varepsilon_1$  se denomina *combinación máxima en par* del grafo.

Para los grafos de dos partes es válido el siguiente teorema sobre combinaciones en par.

**Teorema 3.14 (teorema de König).** Para un grafo de dos partes  $G$ , el número de aristas en la combinación máxima en par es igual al número del cubrimiento de vértice, o sea,  $\varepsilon_1 = \pi_0$ .

Llámanse *combinación perfecta en par* de  $V_1$  en  $V_2$  en grafo de dos partes  $G(V_1, V_2)$  una correspondencia biunívoca entre los vértices de  $V_1$  y un subconjunto de vértices de  $V_2$ , en la cual todo vértice de  $V_1$  se une con un vértice de  $V_2$  mediante una arista.

El concepto de combinación en par permite enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.15 (teorema de Hall).** Sea  $G = G(V_1, V_2)$  un grafo de dos partes y para cualquier subconjunto  $A \subset V_1$  sea también  $\varphi(A)$  un conjunto de aquellos vértices de  $V_2$  que son adyacentes por lo menos a un vértice de  $A$ . Entonces la combinación perfecta en par de  $V_1$  en  $V_2$  existe cuando, y sólo cuando, el número de elementos  $|A| \leq |\varphi(A)|$  para cada subconjunto  $A \in V_1$ .

Examinemos como se escogen subgrafos vacíos  $\{E_i\}$  en un grafo  $G$ . Se llama *entorno*  $G(v_0)$  de un vértice  $v_0$  del grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  un subgrafo  $\langle V_0, U_0 \rangle$ , cuyo portador coincide con el entorno de radio unitario de este vértice,  $V_0 = \Gamma v_0$  y la signatura  $U_0$  está formada por todas las aristas del grafo  $G$  que unen los vértices de  $V_0$ .

Llábase *no entorno*  $\overline{G}(v_0)$  del vértice  $v_0$  del grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  un subgrafo  $\langle \overline{V}_0, \overline{U}_0 \rangle$ , cuyo portador  $\overline{V}_0 = \{v_i/v_i \in \Gamma v_0\}$  y la signatura  $\overline{U}_0$  comprende todas las aristas del grafo  $G$  que unen los vértices de  $\overline{V}_0$ .

**Teorema 3.16.** *Un subgrafo vacío  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  que no contiene el vértice  $v_0 \in V$  comprende al menos un vértice de su entorno.*

Reduzcamos la formación de subgrafos vacíos en un grafo  $G$  prefijado a la construcción de un árbol, en el cual todo camino entre un vértice pendiente (vértice  $v$  de la potencia igual a 1) y el fin de un arco que parte de la raíz, se compone de vértices que forman un subgrafo vacío donde la raíz es un vértice que no es el fin de ningún arco.

En virtud del teorema 3.16 construyamos este árbol del modo siguiente:

- 1) pongamos el grafo prefijado en correspondencia a la raíz del árbol;
- 2) fijemos un vértice arbitrario  $v_0$  del grafo dado  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  y los vértices de su entorno  $V_0$ . Pongamos un vértice del conjunto  $\{v_0, V_0\}$  en correspondencia biunívoca al fin de todo arco que parte de la raíz del árbol;
- 3) cada extremo  $v_\alpha$  de arcos construidos ponderemos por el no entorno  $\overline{G}(v_\alpha)$  del vértice  $v_\alpha$ ;
- 4) consideremos el extremo  $v_\alpha$  del nivel construido como raíz de un árbol nuevo.

Repetiremos los puntos 2)—4) hasta que cada extremo de arcos construidos sea ponderado por el símbolo  $\emptyset$ . Este símbolo significa la ausencia del no entorno correspondiente. Según el teorema 3.16 el camino entre el fin de un arco que parte de la raíz del árbol construido y un vértice pendiente ponderado por el símbolo  $\emptyset$  consta de los vértices del grafo vacío.

En el caso de fijar arbitrariamente un vértice cuando se construye un nivel del árbol no se puede establecer la correspondencia biunívoca entre los vértices pendientes y subgrafos vacíos, puesto que los últimos pueden repetirse, es decir, un mismo subgrafo vacío puede ponderar varios vértices pendientes. Para evitar la repetición de subgrafos vacíos, introduzcamos la ley de absorción de subárboles.

**Ley de absorción.** *Si en el  $k$ -ésimo nivel de un árbol los vértices  $v_i$  y  $v_j$  son no adyacentes y un subárbol de la raíz  $v_i$  está construido y si en un subárbol de la raíz  $v_j$  aparece un arco con el vértice  $v_i$ , la rama correspondiente no se construye.*

La ley es válida, ya que el subárbol de la raíz  $v_j$  no contiene el vértice  $v_\alpha$  del entorno del vértice  $v_i$ ,  $v_\alpha \in G(v_i)$ , y, en virtud del teorema 3.16, se contiene en un subgrafo vacío del subárbol ya construido de la raíz  $v_i$ .

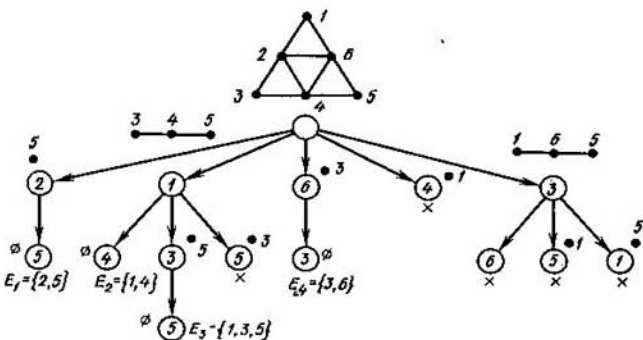


Fig. 3.11

**Ejemplo 3.7.** Hallar la distribución de subgrafos vacíos en el grafo  $G$  representado en la parte superior de la fig. 3.11.

Pongamos el grafo prefijado  $G$  en correspondencia a la raíz del árbol que se construye. Fijemos el vértice  $v_2$ . Su entorno consta de cuatro vértices  $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ , por eso de la primera raíz trazamos cinco arcos. Añadimos a los extremos de los arcos uno de los vértices y ponderamos los arcos por el no entorno de estos vértices (fig. 3.11). El no entorno  $G(v_2)$  contiene solamente el vértice  $v_5$ , por eso en el tercer nivel obtenemos el vértice pendiente  $v_5$ . El vértice  $v_1$  tiene un no entorno con el portador  $\{v_3, v_4, v_5\}$ . Fijamos el vértice  $v_4$ . Su no entorno  $\bar{V}_4 = \emptyset$ , por esta razón en el tercer nivel obtenemos el vértice pendiente  $v_4$ . Formamos dos más arcos de la segunda raíz  $v_1$ : con el vértice  $v_3$  y el no entorno compuesto de  $v_5$  y con el vértice  $v_5$  y el no entorno  $v_3$ . Según la ley de absorción, uno de los subárboles se absorbe. En la figura, la cruz significa que la rama no sigue construyéndose y no se tiene en cuenta cuando se calculan subgrafos vacíos. En el cuarto nivel obtenemos el vértice pendiente  $v_5$ . Para un vértice del segundo nivel tenemos el no entorno compuesto del vértice  $v_3$  y el proceso se termina por el vértice  $v_3$  en el tercer nivel.

El vértice  $v_4$  del segundo nivel con su no entorno se trunca según la ley de absorción. Para el vértice  $v_3$  con el no entorno  $\bar{V}_3 = \{v_1, v_5, v_6\}$  construyamos el tercer nivel. Obtenemos tres raíces:  $v_6, v_1(v_5), v_5(v_1)$ . Todos ellos se truncan según la ley de absorción y no se tienen en cuenta cuando se calculan subgrafos vacíos.

De tal modo, tenemos los subgrafos vacíos:

$$E_1 = \{2, 5\}, E_2 = \{1, 4\}, E_3 = \{1, 3, 5\} \text{ y } E_4 = \{3, 6\}.$$

Establezcamos las propiedades de un grafo que determinan el carácter ramificado del árbol que sintetizamos. En el ejemplo examinado, cuando se construía el siguiente nivel, en cada raíz se fijó un vértice de la potencia maximal. Para eliminar la repetición cinco veces de subgrafos vacíos en el árbol fue utilizada la ley de absorción. En el primer paso de la construcción del árbol fijemos un vértice no de la potencia maximal, sino el de la minimal: el vértice  $v_1$ ,  $s(v_1) < s(v_2)$ . Al construir el árbol después de fijar el vértice  $v_1$  (fig. 3.12, a) vemos que es más simple que el anterior; en su construcción la ley de absorción se utilizaba sólo una vez. Si en la construc-

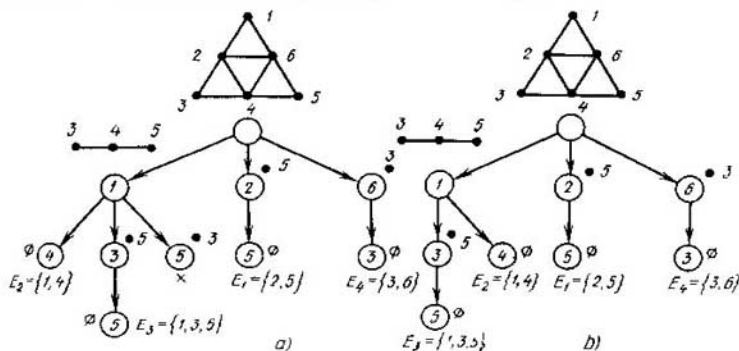


Fig. 3.12

ción del siguiente nivel en cada raíz fijamos el vértice de la potencia minimal (fig. 3.12, b), en el ejemplo considerado el número de vértices pendientes coincide con el número de subgrafos vacíos, incluso sin emplear la ley de absorción. Expongamos un algoritmo de engendrar todos los subgrafos vacíos, en el cual para reducir la densidad del trabajo, fijaremos cada vez el vértice de la potencia minimal.

1. Ponemos un grafo prefijado  $G$  en correspondencia a la raíz del árbol a sintetizar.

2. En el grafo, fijamos el vértice  $v_0$  de la potencia minimal, poniéndola en correspondencia al extremo del arco que parte de la raíz. Construimos  $|\Gamma v_0|$  de arcos que parten de la raíz y el extremo de cada uno de ellos ponemos en correspondencia biunívoca a un vértice del entorno  $G(v_0)$ .

3. Cada extremo  $v_\alpha$  de los arcos construidos lo ponderamos por el no entorno  $\bar{G}(v_\alpha)$  del vértice  $v_\alpha$  del grafo puesto en correspondencia a la raíz examinada.

4. Analizamos el extremo  $v_\alpha$  del nivel construido como la raíz de un árbol nuevo.

5. Consideramos, si el vértice  $v_\alpha$  es ponderado por el símbolo  $\emptyset$ . Si «no», pasamos al punto 2, si «sí», al punto 6.

6. Los caminos entre los extremos de los arcos que parten de la raíz del árbol sintetizado y los arcos pendientes determinan unívocamente los subgrafos vacíos del grafo prefijado.

A base de este algoritmo, se puede determinar el número de estabilidad interior  $\varepsilon_0(G)$  del grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  como potencia maximal de un subgrafo vacío  $\varepsilon_0(G) = \max_i |E_i|$  y el número del cubrimiento vértice  $\pi_0(G)$  como diferencia  $|V| - \varepsilon_0(G)$  (en virtud del teorema 3.13).

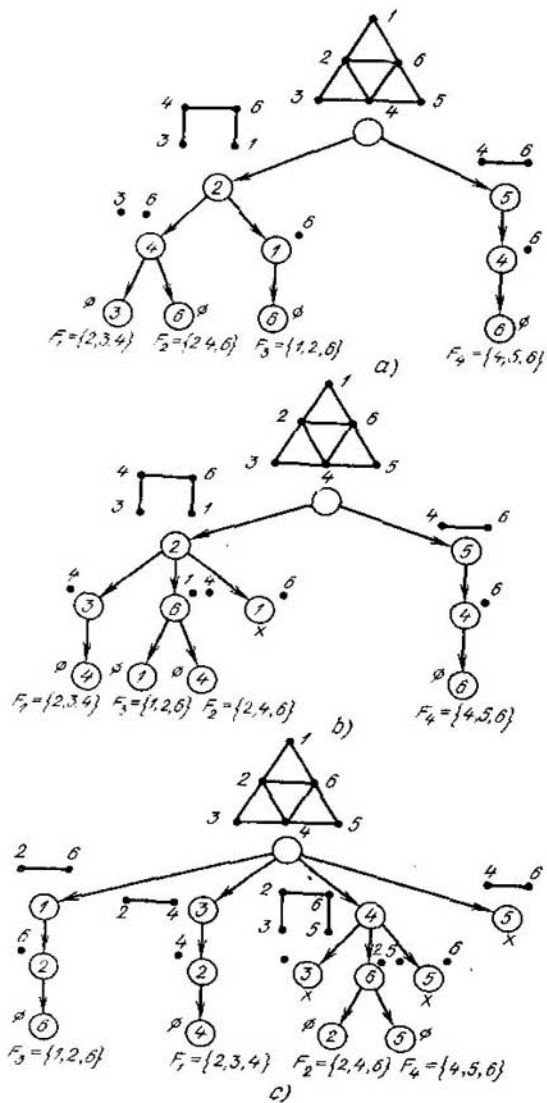


Fig. 3.13



Para el ejemplo examinado  $\varepsilon_0(G) = 3$ ,  $E_{\max} = \{1, 3, 5\}$ ;  $\pi_0(G) = 3$ ,  $|\{2, 4, 6\}| = 3$ .

En el grafo, muchas veces se necesita determinar no el número maximal de los vértices, entre los cuales faltan conexiones, sino, al contrario, el número maximal de los vértices adyacentes de dos en dos. Se denomina *densidad*  $\rho(G)$  de un grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  la potencia maximal del portador de un subgrafo completo  $F_{\max} \subset G$ :

$$\rho(G) = \max_i \rho(F_i).$$

El algoritmo para engendrar subgrafos vacíos, aducido anteriormente, y la ley de absorción pueden utilizarse con éxito, después de hacer correspondientes cambios para determinar la densidad  $\rho(G)$  del grafo  $G$ .

Expongamos un *algoritmo para engendrar subgrafos completos*.

1. Ponemos un grafo prefijado en correspondencia a la raíz del árbol que sintetizamos.

2. En el grafo fijamos el vértice  $v_0$  con la potencia maximal, poniéndola en correspondencia al extremo de un arco que parte de la raíz. Construimos  $|\overline{\Gamma}v_0|$  arcos que parten de la raíz ( $|\overline{\Gamma}v_0|$  es la potencia del portador del no entorno del vértice  $v_0$ ). El extremo de cada uno de estos arcos se pone en correspondencia biunívoca a un vértice del no entorno  $\overline{G}(v_0)$ .

3. Cada extremo  $v_\alpha$  de los arcos construidos se pondera por el entorno  $G(v_\alpha)$  del vértice  $v_\alpha$  del grafo puesto en correspondencia a la raíz que analizamos.

4. Consideramos el fin  $v_\alpha$  del nivel construido como la raíz de un árbol nuevo.

5. Establecemos, si el vértice  $v_\alpha$  es ponderado por el símbolo  $\emptyset$ . Si «no», pasamos al punto 2, si «sí», al punto 6.

6. Los caminos entre los extremos de los arcos que parten de la raíz del árbol sintetizado y los arcos pendientes determinan unívocamente los subgrafos completos del grafo prefijado.

**La ley de absorción.** Si en el  $k$ -ésimo nivel de un árbol los vértices  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes, el subárbol de la raíz  $v_i$  está construido y si en el subárbol de la raíz  $v_j$  aparece un arco con el vértice  $v_i$ , la rama correspondiente no se construye.

**Ejemplo 3.8.** Hallemos la distribución de subgrafos completos en el grafo  $G$  representado en la mitad superior de la fig. 3.13. Al fijar, en el punto 2, un vértice de la potencia maximal en cada nivel sintetizado (fig. 3.13, a), no se repitieron los subgrafos completos en el árbol. Si en el punto 2 fijamos un vértice de la potencia no maximal, tenemos la repetición de los subgrafos completos. Cuando fijamos el vértice  $v_3$ , de la potencia minimal  $v_3 s(v_3) = 1$ , en la construcción del segundo nivel tenemos la repetición del subgrafo completo  $F_3 = \{1, 2, 6\}$  (fig. 3.13, b); en la construcción de cada nivel, el número de repeticiones aumenta todavía más:  $F_1 = \{2, 3, 4\}$ ,  $F_4 = \{4, 5, 6\}$ ,  $F_4 = \{4, 5, 6\}$  (fig. 3.13, c). La densidad del grafo considerado  $G$  es igual a 3.

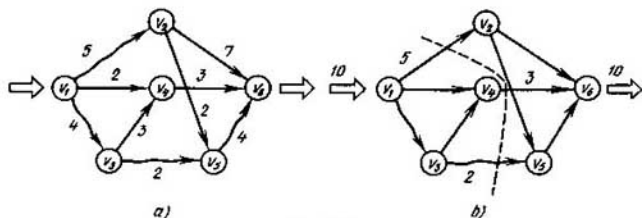


Fig. 3.14

**Ejemplo 3.9.** Hallar el flujo maximal a través de la red  $G$  (fig. 3.14, a), si la capacidad de los arcos es, respectivamente, igual a:  $a = (v_1, v_2) - 5$ ,  $b = (v_1, v_4) - 2$ ,  $c = (v_1, v_3) - 4$ ,  $d = (v_3, v_4) - 3$ ,  $e = (v_3, v_5) - 2$ ,  $k = (v_5, v_6) - 4$ ,  $m = (v_4, v_6) - 3$ ,  $n = (v_2, v_6) - 7$ ,  $p = (v_2, v_3) - 2$ .

Para determinar el flujo maximal a través de una red prefijada construimos el grafo de alcance  $G_x = \langle V_x, U_x \rangle$ , cada vértice del cual corresponde biunívocamente a un arco del grafo prefijado  $G$  y dos vértices se unen por una arista si, y sólo si, sus arcos correspondientes se incluyen en el camino en el grafo de partida  $G$  (fig. 3.15, a). Entonces un subgrafo vacío del grafo de alcance determina biunívocamente un corte de la red de partida. La suma minimal de las capacidades de los arcos incluidos en el corte es igual, en virtud del teorema 3.10, al flujo maximal buscado. Empleando el algoritmo para engendrar todos los subgrafos vacíos los formamos en el grafo de alcance (fig. 3.15, b) y calculamos la capacidad del corte. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \{n, p, b, e, d\} - 7 + 2 + 2 + 2 + 3 = 16, & E_2 &= \{n, p, b, c\} - 7 + 2 + 2 + 4 = 15, \\
 E_3 &= \{n, p, m, e\} - 7 + 2 + 3 + 2 = 14, & E_4 &= \{n, k, b, d\} - 7 + 4 + 2 + 3 = 16, \\
 E_5 &= \{n, k, m\} - 7 + 4 + 3 = 14, & E_6 &= \{a, b, d, e\} - 5 + 2 + 3 + 2 = 12, \\
 E_7 &= \{a, b, c\} - 5 + 2 + 4 = 11, & E_8 &= \{a, m, e\} - 5 + 3 + 2 = 10.
 \end{aligned}$$

El corte  $\{a, m, e\}$  con la capacidad minimal igual a 10 determina el flujo maximal  $\Phi_{\max} = 10$  a través de la red  $G$ .

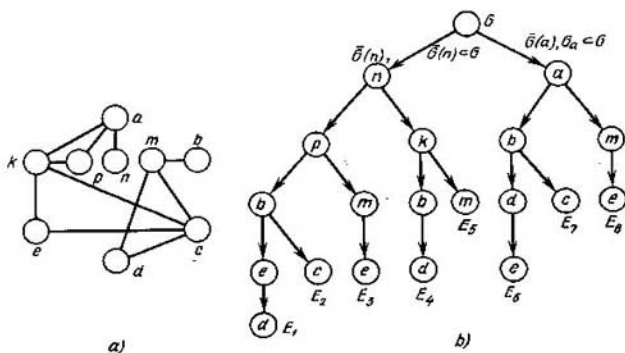


Fig. 3.15

Se denomina *matriz modificada de adyacencia*  $S$  la disyunción de la matriz de adyacencia  $S$  y la matriz diagonal unitaria  $\{I, I, \dots, I\}$ :

$$\bar{S} = S \vee \{I, I, \dots, I\}.$$

La determinación del número de estabilidad exterior se reduce a la construcción de la matriz modificada de adyacencia y a la formación del cubrimiento con el número minimal de elementos.

**Ejemplo 3.10.** Determinemos el número vértice de la estabilidad exterior  $\beta_0(G)$  de un grafo  $G$  (fig. 3.16), cuya matriz  $S(G)$  tiene siguiente forma:

$$S(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}$$

Cubrimos filas por columnas o columnas por filas de la matriz de adyacencia que es equivalente en virtud de su simetría con respecto a su diagonal principal. Empleando el algoritmo de Petrick obtenemos

$$\begin{aligned} & (a + c + f) \cdot (b + c + d + f) \cdot (a + b + c + d + e) \cdot (b + c + d + f) \cdot (c + e + f) \times \\ & \times (a + b + d + e + f) = (c + f + ae)(a + b + d + e + cf)(b + c + d + f) = \\ & = (c + f + ae)(b + d + ac + cf + af + ce + ef) = bc + cd + ac + cf + ce + \\ & + bf + df + af + ef + abe + ade. \end{aligned}$$

Cada término multiplicativo de la expresión obtenida determina un conjunto exteriormente estable de vértices; la potencia minimal de este conjunto es igual al número vértice de la estabilidad exterior  $\beta_0(G)$ ,  $\beta_0(G) = 2$ .

En el caso de un grafo orientado, excepto el número de vértice de la estabilidad exterior  $\beta_0(G)$  del grafo  $G$  se distinguen los números vértice de la estabilidad exterior positivo  $\beta_0^+(G)$  y negativo  $\beta_0^-(G)$ .

Se denomina *número vértice positivo de la estabilidad exterior*  $\beta_0^+(G)$  de un grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  la potencia minimal de un conjunto de vértices  $V^+ = \{v_i^+\}$  tal que

$$\{v_i^+\} \cup \{\Gamma v_i^+\} = V, \tag{3.15}$$

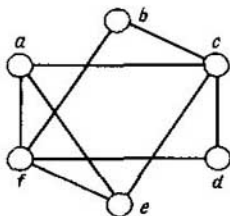


Fig. 3.16

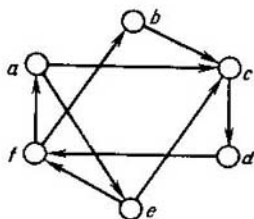


Fig. 3.17

y eliminando al menos un vértice de  $V^+$  la relación (3.15) no se cumple. Este número determina el número minimal de vértices, desde los cuales se puede «observar» (son alcanzables a un paso) todos los vértices del grafo.

Se denomina *número vértice negativo de la estabilidad exterior*  $\beta_0^-(G)$  de un grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  la potencia minimal de un conjunto de vértices  $V^- = \{v_i^-\}$  tal que

$$\{v_i^-\} \cup \{\Gamma^{-1}v_i^-\} = V, \quad (3.16)$$

y eliminando al menos un vértice del conjunto  $V^-$ , la relación (3.16) no se cumple. Este número es igual al número minimal de vértices que «se observan» desde todos los vértices del grafo.

Es obvio que el número  $\beta_0^+(G)$  se calcula como potencia minimal del cubrimiento de columnas por filas en la matriz de adyacencia  $S(G)$  del grafo  $G$ .

**Ejemplo 3.11.** Calculemos los números  $\beta_0^+(G)$  y  $\beta_0^-(G)$  del grafo  $G$  (fig. 3.17), cuya matriz de adyacencia tiene forma

$$S(G) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \end{array} \end{array}$$

Según la definición del conjunto exteriormente estable, en el cual los vértices pertenecientes a este conjunto «se observan» por ellos mismos, los elementos diagonales  $s_{ii}$  de la matriz de adyacencia  $S(G)$  tienen el valor 1 aunque en el grafo  $G$  no hay lazos. Cubriendo columnas por filas de la matriz modificada de adyacencia por medio del algoritmo de Petrick

$$\begin{aligned} & (a + f)(b + d)(a + b + c)(c + d)(c + e)(b + d + e + f) = \\ & = (a + f)(c + ed)(b + ad + dc) = (a + f)(cb + dc + ebd + aed) = \\ & = abc + adc + ade + bcf + cdf + bedf, \end{aligned}$$

obtenemos  $\beta_0^+(G) = 3$ .

Cubriendo filas por columnas de la matriz  $S(G)$

$$(a + c)(b + c + f)(c + d + e)(b + d + f)(e + f)(a + f) =$$

$$= (c + ab + af)(e + cf + df)(f + ab + ad) = (cf + af + ab + acd)(e + cf + df) = cf + aef + abe + acde + adf,$$

obtenemos  $\beta_0^-(G) = 2$ . En estas expresiones, todo término multiplicativo determina correspondiente conjunto exteriormente estable.

El número arista de la independencia  $\varepsilon_1(G)$ , el número del cubrimiento arista  $\pi_1(G)$  y el número arista de la estabilidad exterior  $\beta_1(G)$  de un grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  se determina de manera análoga, sólo en vez de la matriz modificada de adyacencia de los vértices en calidad de información de partida, se toma la matriz modificada de adyacencia de aristas  $\bar{S}_a(G)$  del grafo  $G$ :

$$\bar{S}_a(G) = S_a(G) \vee \{I, I, \dots, I\},$$

donde  $S_a(G)$  es la matriz de adyacencia de aristas,  $\{I, I, \dots, I\}$  es la matriz diagonal unitaria.

**Ejemplo 3.12.** Hallemos  $\varepsilon_1(G)$ ,  $\pi_1(G)$  y  $\beta_1(G)$  del grafo  $G = \langle V, \Gamma \rangle$  representado en la mitad superior de la fig. 3.18.

Para determinar el número arista de la independencia  $\varepsilon_1(G)$  del grafo  $G$  utilizamos el algoritmo para engendrar subgrafos vacíos. Ponemos el grafo prefijado en correspondencia a la raíz del árbol y determinamos la arista adyacente al número minimal de aristas. Esta es la arista  $k$ , adyacente a tres aristas:  $f, p, m$ . Pongamos los extremos de arcos que parten de la raíz del árbol en correspondencia a las aristas  $k, f, p$  y  $m$  y ponderamos cada vértice del nivel construido por un subgrafo parcial, toda arista del cual y la arista correspondiente a este vértice (fig. 3.18) no son adyacentes. En otras palabras, al fijar una arista del grafo dado, ponemos en correspondencia a ella y a su entorno los vértices de un nivel del árbol, cada uno de los cuales se pondera por el no entorno de la arista correspondiente. Repetimos esta descomposición del grafo hasta obtener no entornos iguales a  $\emptyset$  y engendramos así todos los conjuntos independientes en cuanto a aristas (fig. 3.19)

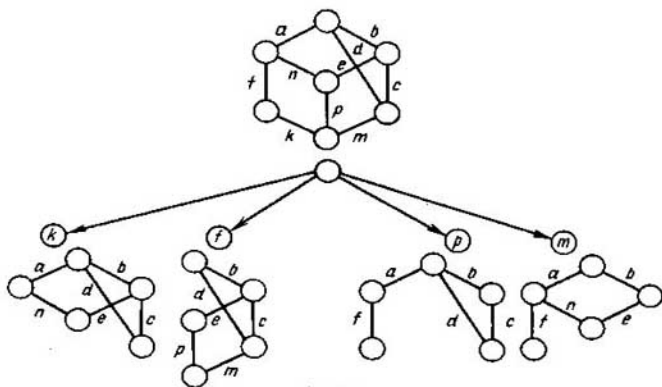


Fig. 3.18

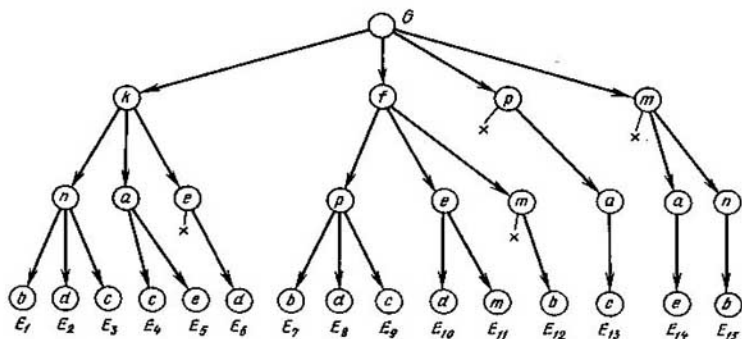


Fig. 3.19

- $E_1 = \{b, k, n\}$ ,  $E_2 = \{d, k, n\}$ ,  $E_3 = \{c, k, n\}$ ,  $E_4 = \{a, c, k\}$ ,  
 $E_5 = \{a, e, k\}$ ,  $E_6 = \{d, e, k\}$ ,  $E_7 = \{b, f, p\}$ ,  $E_8 = \{d, f, p\}$ ,  
 $E_9 = \{c, f, p\}$ ,  $E_{10} = \{d, e, f\}$ ,  $E_{11} = \{e, f, m\}$ ,  
 $E_{12} = \{b, f, m\}$ ,  $E_{13} = \{a, c, p\}$ ,  $E_{14} = \{a, e, m\}$ ,  
 $E_{15} = \{b, m, n\}$ .

Por consiguiente, el número arista de la independencia  $\varepsilon_1(G)$  es igual a 3 y, debido a (3.14), el número del cubrimiento arista  $\pi_1(G) = 7 - 3 = 4$  ( $|\{b, m, n, k\}| = 4$ ). Cubriendo filas por columnas de la matriz modificada de adyacencia de aristas del grafo prefijado  $G$

$$S_n = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & k & f & m & n & p \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ k \\ f \\ m \\ n \\ p \end{array} \end{array}$$

obtenemos que el número arista de la estabilidad exterior  $\beta_1(G)$  del grafo  $G$  es igual a 3 ( $|\{b, m, n\}| = 3$ ).

### § 3.6. Encaje de los grafos

Examinemos propiedades topológicas de los grafos. La topología examina las propiedades de los grafos que son invariantes respecto a las transformaciones homeomorfas. Estas propiedades se determinan por invariantes topológicos.

Dos grafos son homeomorfos, si son isomorfos con exactitud de hasta vértices de la potencia dos. En otras palabras, dos grafos son homeomorfos, si se transforman hasta los grafos isomorfos uno a otro, cambiando unas aristas por cadenas de longitud correspondiente.

El *género de una superficie* es el número máximo de curvas cerradas simples sobre una superficie. Estas curvas no dividen la mencionada superficie. La esfera y el plano son las superficies de género nulo, ya que se dividen por cualquier curva cerrada. El toro es una superficie de primer género. Toda superficie de  $p$ -ésimo género es equivalente a una esfera con  $p$  mangos.

El *género de un grafo*  $\gamma(G)$  es un género minimal entre todas las superficies, sobre las cuales se puede representar el grafo  $G$  de tal modo que sus aristas se intersequen solamente en vértices. Un grafo es *planar*, si se representa en el plano de tal modo que sus aristas se intersequen solamente en vértices. El problema de caracterización de grafos planares quedaba irresoluble mucho tiempo. En 1927 L.S. Pontriaguin demostró (pero no publicó) el criterio del carácter planar que, independientemente de él, fue descubierto y publicado por el matemático polaco Kuratowski en 1930.

**Teorema 3.17 (teorema de L.S. Pontriaguin).** *Un grafo es planar si, y sólo si, no contiene un subgrafo homeomorfo a  $F_5$  o  $K_{3,3}$  (fig. 3.20, a, b).*

A base del criterio de Pontriaguin se puede obtener otro criterio del carácter planar, si se introduce el concepto de *junta elemental* que consiste en lo siguiente. Cuando se junta cualquier arista del grafo, ésta se elimina y los dos vértices  $a$  y  $b$  (fig. 3.21) coincidentes a ésta se identifican; el vértice obtenido es coincidente a las mismas aristas que  $a$  y  $b$  (excepto la arista eliminada).

**Teorema 3.18.** *Un grafo es planar si, y sólo si, no contiene los subgrafos que se juntan en  $F_5$  o  $K_{3,3}$ .*

En 1932 el norteamericano Whitney introdujo otro criterio del carácter planar, empleando el concepto del grafo dual. El grafo  $G^*$  es *abstractamente dual* a  $G$ , si entre las aristas de los grafos  $G$  y  $G^*$  existe una correspondencia biunívoca; a un subconjunto de aristas de  $G$  que forman un ciclo en  $G$  le corresponde un subconjunto de aristas de  $G^*$  que forman un corte en  $G^*$ .

Si  $G$  contiene un vértice pendiente  $v$ ,  $s(v) = 1$ , en  $G^*$  se obtiene un lazo. En la fig. 3.22 se representan los grafos  $G$  y  $G^*$  con tal que el grafo  $G$  está punteado.

**Teorema 3.19 (teorema de Whitney).** *Un grafo es planar si, y sólo si, existe un grafo abstractamente dual a él.*

Analicemos un problema que surge cuando se proyecta un circuito impreso. En la fabricación de aparatos electrónicos, los conductores de conexión se ponen sobre la superficie plana de material aislante por un proce-

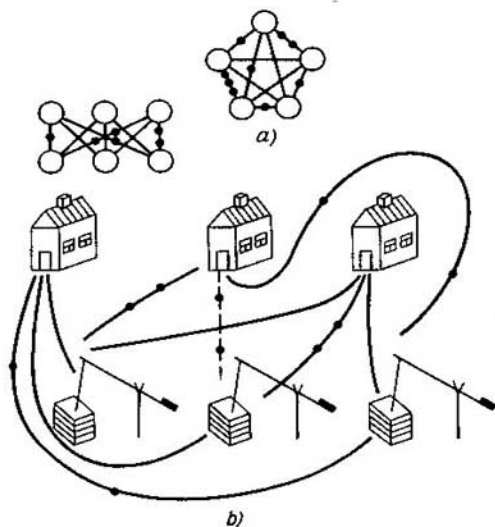


Fig. 3.20

dimiento impreso. Los conductores impresos no son aislados, por eso no deben intersectarse. Sin embargo, puede ser que en la disposición de aparatos en una placa es imposible evitar la intersección; por esta razón para proyectar correctamente un circuito impreso, hay que saber, si es planar el grafo, en el cual los dispositivos interpretan el papel de vértices y las conexiones entre los dispositivos sirven de aristas. Si el grafo no es planar, se tiene que imprimir en varios planos y es necesario conocer o bien el número de cruzamientos del grafo (el número mínimo posible de intersecciones en la representación del grafo en el plano), o bien su espesor. Se denomina *espesor* del grafo  $G$  el número mínimo de grafos planares, cuya unión da  $G$ . El espesor del grafo planar es igual a 1. La estimación inferior del espesor  $\iota(G)$  del grafo  $G = \langle V, U \rangle$  se determina por la igualdad

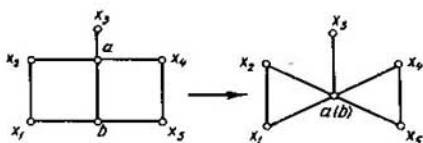


Fig. 3.21

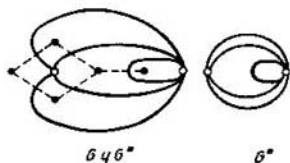


Fig. 3.22



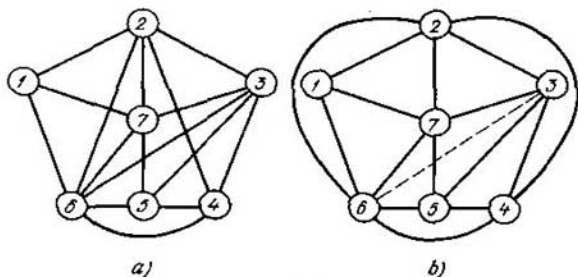


Fig. 3.23

$$l(G) \geq 1 + \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^n s_i - 2}{6(n-2)} \right\rfloor, \quad (3.17)$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  es la parte entera,  $|V| = n$ ,  $s_i$  es la potencia del  $i$ -ésimo vértice.

Examinemos el grafo representado en la fig. 3.23, *a*. Determinemos, si se puede realizar la impresión en una capa; en caso contrario aclaremos cuántas capas necesitamos y qué aristas debemos eliminar para que el grafo se haga plano.

Debido al criterio de Pontriagiun este grafo no es planar, puesto que contiene subgrafos homeomorfos a  $F_5$  (fig. 3.24, *a*) y  $K_{3,3}$  (fig. 3.24, *b*). El espesor del grafo  $G$  no es menos de dos:

$$l(G) \geq 1 + \left\lfloor \frac{32 - 2}{6(7 - 2)} \right\rfloor = 2, \quad l(G) \geq 2.$$

Para determinar qué aristas necesitamos eliminar para transformar el grafo en grafo planar, escogemos todas las figuras prohibidas y formemos una tabla bidimensional, cada fila de la cual corresponde biunívocamente

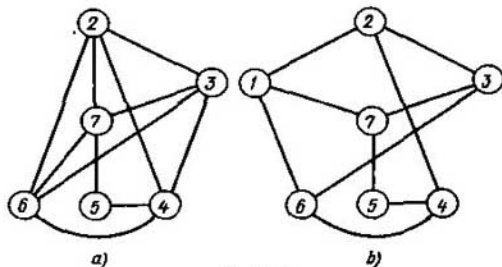


Fig. 3.24

a una figura prohibida  $Q_i$  y cada columna, a una arista  $Q_j$ . Entonces el cubrimiento de filas por columnas de esta tabla determinará qué aristas necesitamos eliminar para hacer el grafo planar. El cubrimiento minimal responderá a una resolución minimal, puesto que eliminando cualquier arista sacamos la figura prohibida de la clase de subgrafos homeomorfos a  $F_5$  y  $K_{3,3}$ .

Para el grafo considerado, esta tabla tiene forma (tabla 3.1):

Tabla 3.1

$Q_i$	$Q_j$													
	{1,2}	{2,6}	{2,3}	{1,6}	{6,7}	{1,7}	{2,4}	{2,7}	{3,6}	{3,7}	{3,4}	{4,6}	{4,5}	{5,7}
$Q_1$		1	1		1		1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_2$	1		1	1		1	1		1	1		1	1	1

El cubrimiento minimal contiene una de las aristas  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{3, 6\}$ ,  $\{3, 7\}$ ,  $\{4, 6\}$ ,  $\{4, 5\}$  ó  $\{5, 7\}$ . Por ejemplo, después de eliminar la arista  $\{3, 6\}$  obtenemos el grafo planar, cuya representación plana se ve en la fig. 3.23, *b*. La conexión correspondiente a la arista eliminada (línea punteada) se realiza en el segundo plano. El espesor  $t(G)$  del grafo  $G$  equivale a 2.

Tiene gran interés práctico el problema de encaje de grafos en otros grafos que tienen propiedades estructurales especiales. Una clase importante de estos grafos es la clase de cubos  $n$ -dimensionales. Estos últimos se aplican en la teoría de codificación para transmitir los datos y para proyectar autómatas. Designemos un cubo  $n$ -dimensional por medio de  $H_n$ . La potencia de su portador es igual a  $2^n$ , la potencia de su signatura equivale a  $n \cdot 2^{n-1}$ .

Introduzcamos una métrica sobre un grafo  $H_n$  del modo siguiente. Sea que una función no negativa de dos variables  $d(a, b)$  determina la distancia entre dos vértices  $a, b \in H_n$ , igual al número de aristas en la cadena simple más corta que une  $a$  y  $b$ . Con esto se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $d(a, a') = 0$  si, y sólo si, los vértices  $a$  y  $a'$  coinciden.
2.  $d(a, b) = d(b, a)$ .
3. Para cualesquiera tres  $a, b, c \in H_n$   $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$ .

Por consiguiente, el conjunto de vértices de un  $n$ -cubo junto a la métrica introducida de este modo es un espacio métrico que se denominará *espacio booleano*. Si una métrica introducida en un conjunto dado, ella está introducida también en cualquier de sus subconjuntos como una restricción de la función  $d$ . Por esta razón cualesquier subgrafo de  $n$ -cubo también es el espacio métrico.

Analicemos el problema del encaje del grafo  $G$  en un espacio booleano  $H_n$ . Un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  se denomina *encajable en el espacio booleano*

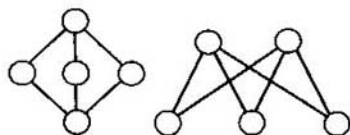


Fig. 3.25

$H_n = \langle V_H, U_N \rangle$  o *cubicable*, si existe una correspondencia  $\varphi$  entre los vértices del grafo  $G$  y los del hipercubo  $H_n$ , tal que si  $(v_\alpha, v_\beta) \in U$ , entonces  $(\varphi(v_\alpha), \varphi(v_\beta)) \in U_H$ . No se debe confundir el grafo cubicable con el cúbico, es decir el grafo, cada vértice del cual tiene la potencia igual a 3.

Ya que el  $n$ -cubo es el grafo de dos partes, en virtud del teorema de König, todos sus ciclos simples son pares y por eso cualquier grafo con un subgrafo que es ciclo impar no se cubica. Puesto que el  $n$ -cubo es isomorfo a un retículo distributivo el grafo de König  $K_{2,3}$  (fig. 3.25) es, también el grafo no cubicable. Pero cualesquier grafo parcial del ciclo impar y el grafo  $K_{2,3}$  son encajables en un espacio booleano. Por consiguiente, los ciclos de la longitud impar y el grafo de König  $K_{2,3}$  son las figuras prohibidas del encaje del grafo en un espacio booleano. En este caso, una figura prohibida significa un grafo críticamente no encajable, es decir, un grafo no cubicable que tiene todos los grafos parciales cubicables. Examinemos procedimientos para engendrar figuras prohibidas en la base de las conocidas.

**Teorema 3.20 (teorema de Graham).** *En la cara de una figura prohibida el cambio de una arista  $q$  por un grafo de König  $K_{2,3}$ , sin esta arista  $q$ , o sea,  $K_{2,3} \setminus q$ , engendra nueva figura prohibida  $T_1(q)$  (fig. 3.26).*

En la fig. 3.27 se muestra la generación de figuras prohibidas del encaje de grafos en un espacio booleano empleando el procedimiento de Graham (teorema 3.20).

La caracterización de los grafos cubicables es bastante complicada debido a las dificultades que surgen en el análisis de estas estructuras combinatorias. Para determinar las razones que impiden a un grafo de ser cubicable,

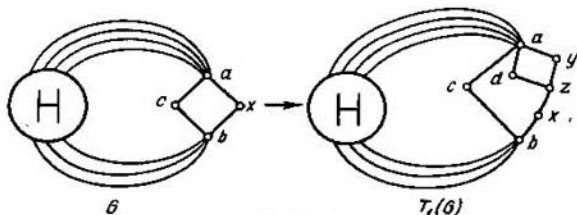


Fig. 3.26.

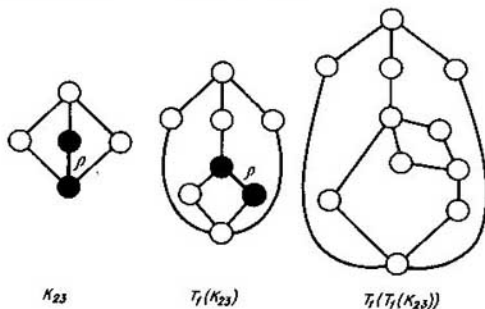


Fig. 3.27

hay que encontrar sus propiedades estructurales enunciando, por ejemplo, las condiciones que describen la interrelación entre sus parámetros que portan la información de estas razones.

Analicemos unas propiedades de un  $n$ -cubo que influyen en la estructura de figuras prohibidas. La longitud maximal de la cadena que une dos vértices  $v_\alpha, v_\beta$  del  $n$ -cubo es igual a  $2^n - 1$ . Esta cadena la representa el esqueleto del grafo  $H_n$ . La distancia  $d(x, y)$  entre dos vértices  $x, y \in H_n$  es igual a  $i, i = 1, 2, \dots, n$ . El diámetro del  $n$ -cubo es igual a  $n$ . Dos vértices  $x$  e  $y$  del  $n$ -cubo alejados uno del otro a la distancia equivalente al diámetro se unen entre sí ¡con  $n!$  cadenas.

**Teorema 3.21.** Si fijamos cualquier vértice de un  $n$ -cubo  $x \in H_n$ , el conjunto de todos los otros vértices se parte en  $n$  subconjuntos  $V_i \in H_n$  tales que todo vértice del  $i$ -ésimo subconjunto,  $v_i \in V_i$ , tiene una distancia hasta el vértice fijado igual a  $d(x, v_i) = i$  y, en el  $i$ -ésimo subconjunto, el número de tales vértices es igual a  $\binom{n}{i}$  para todos los  $i$ .

□ Pongamos un vector binario de la longitud  $n$  en correspondencia a cada vértice del  $n$ -cubo. Puesto que el  $n$ -cubo es un grafo regular, todo vértice del cual tiene la potencia igual a  $n$ , tomemos, sin perder la generalidad, el vértice  $0, 0, \dots, 0$  en calidad del vértice fijado. Partiendo el conjunto de vértices del  $n$ -cubo en subconjuntos de vértices, a los cuales corresponden vectores de número igual de unidades, señalemos que entre todo vértice del  $i$ -ésimo subconjunto, al cual corresponde un vector con  $i$  unidades, y el vértice considerado media una distancia igual a  $i$ . El número de tales vértices equivale a  $\binom{n}{i}$ . ■

**Teorema 3.22.** En un  $n$ -cubo, el número de cadenas simples de longitud  $k, k \leq n$ , entre vértices  $v_\alpha, v_\beta$ , la distancia entre los cuales  $d(v_\alpha, v_\beta) = k$ , y que no tienen otros vértices comunes, excepto los  $v_\alpha$  y  $v_\beta$ , es igual a  $k$ .

□ ¡Todas las  $k!$  de las cadenas de longitud  $k$  entre los vértices  $v_\alpha$  y  $v_\beta, d(v_\alpha, v_\beta) = k$ , forman un  $k$ -cubo. En este cubo, la potencia minimal del

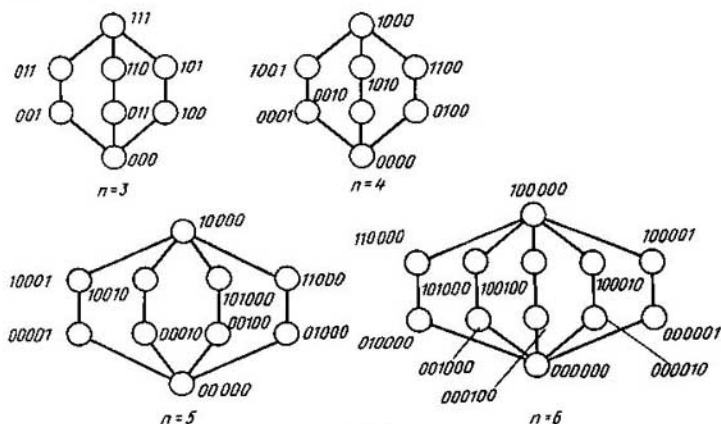


Fig. 3.28

conjunto de vértices separadores es igual a  $k$  (vértices adyacentes a  $v_\alpha$  o  $v_\beta$ ). De aquí, en virtud del teorema 3.9, el número de cadenas simples no intersecantes por vértices entre los vértices  $v_\alpha$  y  $v_\beta$  es igual a  $k$ . ■

El resultado obtenido es importante cuando se estudian grafos prohibidos. Notemos que el número de las cadenas simples más cortas (geodésicas) entre dos vértices  $\alpha$  y  $\beta$  de un hipercubo es igual a la distancia entre estos dos vértices. El número de cadenas simples no intersecantes entre los vértices de un  $n$ -cubo para las cuales según Hamming, la distancia entre ellas es menos que sus longitudes, depende de la dimensión del  $n$ -cubo. En la fig. 3.28(a) se dan las tres cadenas más cortas que unen los vértices 000 y 111 en un cubo tridimensional. En la fig. 3.28(b, c, d) se ilustra el crecimiento del número de cadenas de la longitud 3 en los cubos de la dimensión 4, 5, 6, respectivamente.

**Teorema 3.23.** *El grafo  $G = \langle V, U \rangle$  que incluye en sí  $k$  cadenas simples no intersecantes por vértices de longitud  $k$  entre los vértices  $\alpha, \beta \in V$ ,  $d_G(\alpha, \beta) = k$ , es encajable en un  $n$ -cubo  $H_n$  con la particularidad de que la distancia, según Hamming, entre los vértices  $\alpha$  y  $\beta$  queda constante, es decir,  $d_H(\alpha, \beta) = d_G(\alpha, \beta) = k$ , si, y sólo si, cualesquiera dos vértices adyacentes del grafo  $G$   $a, b, \in V$  forman parte de un ciclo de la longitud 4  $\{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}\}$  (fig. 3.29), tal que si  $d_H(\alpha, a) = \max_i d_H(\alpha, i) = t$ ;  $i = a, b, c, d$ , entonces*

$$d_H(\alpha, b) = d_H(\alpha, d) = t - 1, \quad d_H(\alpha, c) = t - 2.$$

**Teorema 3.24.** *En un grafo crítico  $Q = \langle V, U \rangle$  existen dos vértices  $\alpha,$*

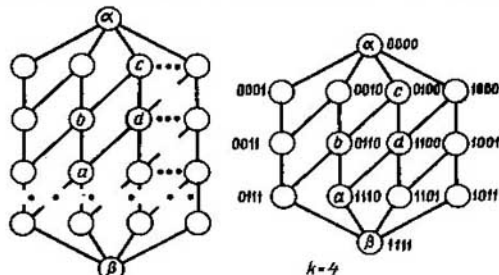


Fig. 3.29

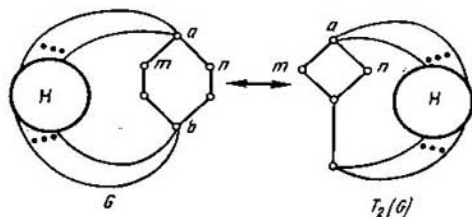


Fig. 3.30

$\beta$ , la distancia entre los cuales es igual al diámetro  $d(\alpha, \beta) = d(Q)$  y el número  $k$  de caminos simples es la unidad mayor que  $k = d(Q) + 1$ .

Enunciaremos varios teoremas que permiten generar los grafos prohibidos del encaje en un  $n$ -cubo.

**Teorema 3.25.** Si  $G$  es un grafo crítico, el grafo  $T_2(G)$  es también crítico si, y sólo si, la potencia de un vértice  $a$  es mayor que la potencia de un vértice  $b$ , es decir,  $s(a) > s(b)$  (fig. 3.30) y la transformación no lleva a formar un subgrafo crítico (es decir,  $G$  no contiene 4 cadenas simples no intersecantes por vértices de longitud 3 entre los vértices  $a, b$  y un subgrafo  $H$  del grafo  $T_2(G)$  no se compone de dos cadenas simples no intersecantes por vértices de longitud 3).

**Teorema 3.26.** La sustitución de cualquier arista  $(a, b) \in G$  de un grafo crítico  $G$  por  $k$  cadenas simples no intersecantes por vértices de longitud 3 lleva a formar el grafo crítico  $T_3(G)$  si, y sólo si,  $k$  satisface una de las condiciones siguientes:

- 1)  $k = 1$ , si la arista eliminada es la arista común de dos ciclos de longitud 4;
- 2)  $k = 2$ , si  $s(a) = 3$ ,  $s(b) = 2$  y los vértices  $a, b$  pertenecen a un ciclo de longitud 4;
- 3)  $k = m + 2 - s(a)$  si  $s(a) > s(b)$  y  $m = d(G')$  donde  $d(G')$  es el diámetro del grafo  $G'$  obtenido del grafo  $G$  cambiando la arista eliminada por una cadena de longitud 3;

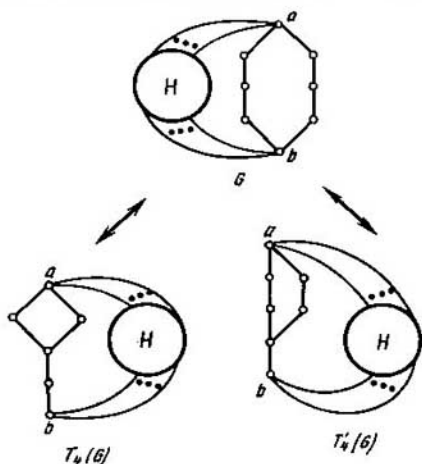


Fig. 3.31

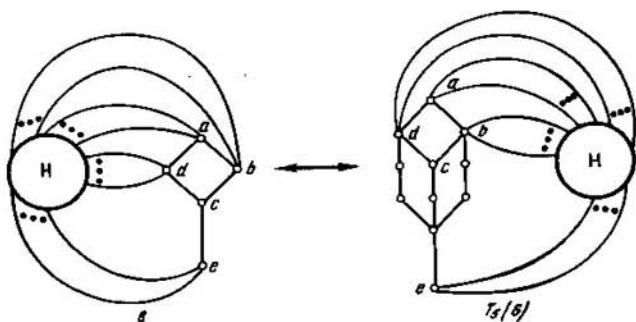


Fig. 3.32

4)  $k = 4$ , si la arista eliminada es incidente a los vértices de la potencia 2:  $s(a) = s(b) = 2$ .

**Teorema 3.27.** El grafo  $T_4(G)$  ( $T_4(G)$ ) (fig. 3.31) es crítico si, y sólo si, el grafo  $G$  es también crítico.

**Teorema 3.28.** El grafo  $T_5(G)$  es crítico si, y sólo si, el grafo  $G$  es crítico (fig. 3.32).

**Teorema 3.29.** Si  $G$  es el grafo crítico,  $T_6(G)$  es también crítico si, y sólo si, un subgrafo  $H$  contiene punto de acoplamiento y el número de cadenas añadidas se determina partiendo de la condición

$$k = d(G') + 1 - s(a),$$

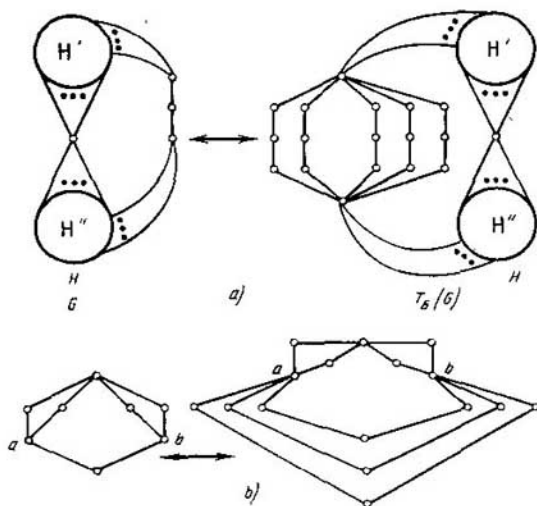


Fig. 3.33

donde  $a, b \in H$  para  $s(a) \leq s(b)$  y el grafo  $G'$  se obtiene del grafo  $G$  al cambiar una cadena de longitud 2 entre los vértices  $a, b$  por una cadena de longitud 4 (fig. 3.33, a).

En la fig. 3.33,  $b$  pone un ejemplo de tal transformación prefijado por el teorema dado para un subgrafo  $H$  donde  $s(a) = s(b) = 2$ , el diámetro  $d(G') = 4$  y  $k = 4 + 1 - 2 = 3$ .

Un conjunto de grafos prohibidos del encaje en un  $n$ -cubo es numerable. En la fig. 3.34 se ofrece el catálogo de los grafos críticos con la potencia del portador variada de 8 a 17 que frecuentemente se encuentran en la práctica.

Entre ellos existen tanto los grafos obtenidos por medio de las transformaciones dadas  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , como los grafos sin precedentes.

Cuando se generan las figuras prohibidas es indispensable verificar el isomorfismo de los grafos obtenidos. Examinemos un algoritmo para establecer el isomorfismo entre dos grafos  $G_a, G_b$  basado en la descomposición en frecuencia de modelos  $\Psi_a(G_a)$  y  $\Psi_b(G_b)$  construidos según estos grafos.

1. Empleando el algoritmo dado anteriormente escogemos los subgrafos completos en los grafos  $G_a$  y  $G_b$ . Los subgrafos escogidos forman palabras en los modelos correspondientes  $\Psi_a(G_a)$  y  $\Psi_b(G_b)$ .



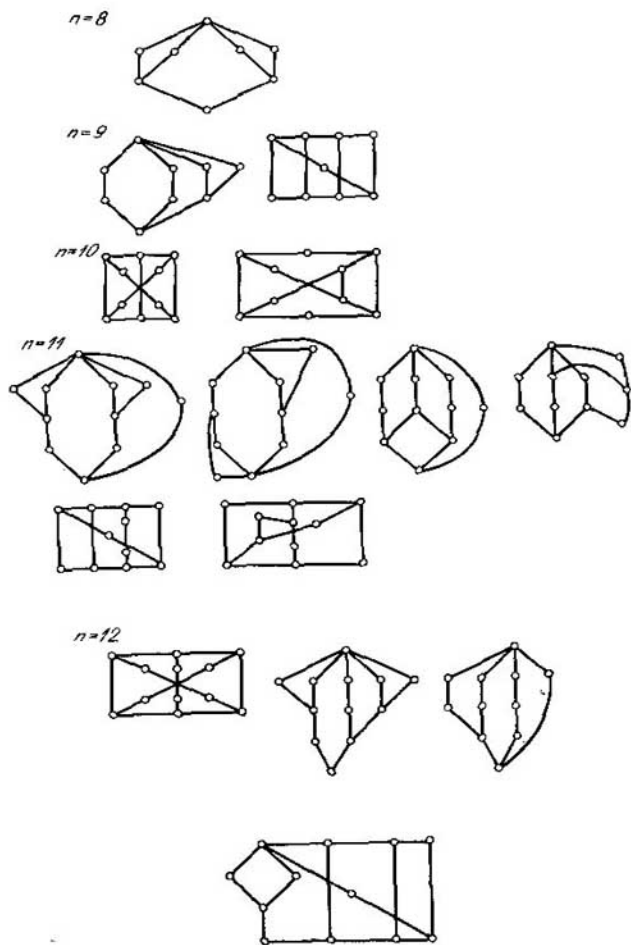
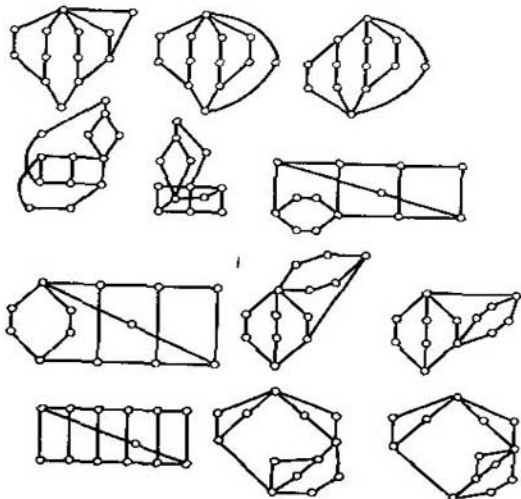


Fig. 3.34

$n=13$



$n=14$

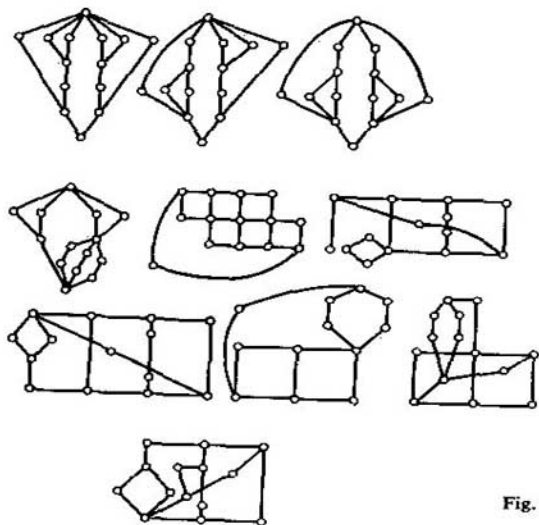


Fig. 3.34. Continuación

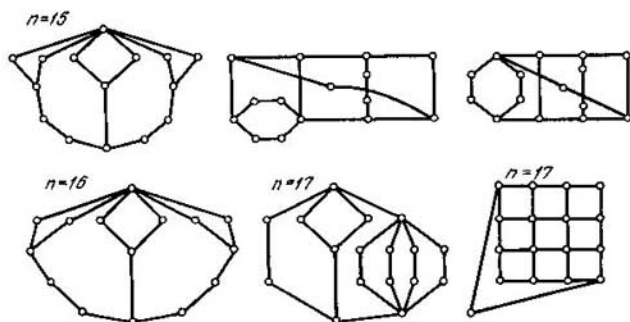


Fig. 3.34. Terminación

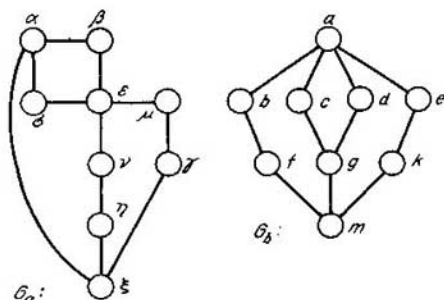


Fig. 3.35

2. Hallamos descomposiciones en frecuencia de los modelos  $\Psi_a(G_a)$  y  $\Psi_b(G_b)$ . Determinemos la igualdad de los coeficientes en las descomposiciones. Si las descomposiciones en frecuencia son iguales, los grafos  $G_a$  y  $G_b$  son isomorfos.

De la igualdad de las composiciones determinamos trivialmente el isomorfismo. Si las descomposiciones en frecuencia no son iguales, los grafos  $G_a$  y  $G_b$  no son isomorfos.

Ilustremos el algoritmo con el ejemplo del establecimiento del isomorfismo entre los grafos  $G_a$  y  $G_b$  (fig. 3.35).

El primer punto del algoritmo se cumple trivialmente, ya que los grafos son de dos partes (subgrafos completos son las aristas). De aquí se deduce que los modelos  $\Psi_a$  y  $\Psi_b$  coinciden respectivamente con los grafos  $G_a$  y  $G_b$ :

$$\begin{aligned} \psi_a &= \langle V_a, S_2 \rangle, \quad V_a = \{ \alpha, \beta, \dots, \xi \}, \\ S_2 &= \{ \{ \alpha, \beta \}, \{ \alpha, \delta \}, \{ \alpha, \xi \}, \{ \beta, \epsilon \}, \{ \gamma, \mu \}, \{ \gamma, \xi \}, \\ &\{ \mu, \epsilon \}, \{ \epsilon, \delta \}, \{ \epsilon, \nu \}, \{ \nu, \eta \}, \{ \eta, \xi \} \}; \end{aligned}$$

$$\psi_b = (V_b, S_b^1), V_b = \{a, b, \dots, m\},$$

$$S_b^1 = (\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, f\}, \{c, g\},$$

$$\{d, g\}, \{e, k\}, \{f, m\}, \{g, m\}, \{k, m\}\}.$$

Las descomposiciones en frecuencia de los modelos  $\psi_a$  y  $\psi_b$  tienen siguiente forma:

$$F(\psi_a) = 3\alpha^2 \cdot 2\beta^2 \cdot 2\gamma^2 \cdot 2\mu^2 \cdot 4e^2 \cdot 2\delta^2 \cdot 2\nu^2 \cdot 2\eta^2 \cdot 3\xi^2 \cdot$$

$$\cdot \alpha\beta \cdot \alpha\delta \cdot \alpha\xi \cdot \beta\epsilon \cdot \gamma\mu \cdot \gamma\xi \cdot \mu\epsilon \cdot \epsilon\delta \cdot \epsilon\nu \cdot \nu\eta \cdot \eta\xi,$$

$$F(\psi_b) = 4a^2 \cdot 2b^2 \cdot 2c^2 \cdot 2d^2 \cdot 2e^2 \cdot 2f^2 \cdot 3g^2 \cdot 2k^2 \cdot 3m^2 \cdot ab \cdot ac \cdot$$

$$\cdot ad \cdot ae \cdot bf \cdot cg \cdot dg \cdot ek \cdot fm \cdot gm \cdot km.$$

Las descomposiciones en frecuencia son iguales a:  $F(\psi_a) = F(\psi_b)$ . Los grafos  $G_a$  y  $G_b$  son isomorfos. Para determinar el isomorfismo establecemos la correspondencia biunívoca entre las letras con espectros iguales de frecuencias:

$$e \leftrightarrow a, \mu \leftrightarrow b(e), \beta \leftrightarrow c(d), \nu \leftrightarrow e(b), \delta \leftrightarrow d(c),$$

$$\gamma \leftrightarrow f(k), \alpha \leftrightarrow g, \eta \leftrightarrow k(b), \xi \leftrightarrow m.$$

Para determinar el isomorfismo de los grafos orientados, al algoritmo expuesto se le adiciona el tercer punto. Si los grafos  $G_a$  y  $G_b$  son isomorfos sin tener en cuenta la orientación, examinando los pares correspondientes de vértices determinamos la conservación del isomorfismo contando con la orientación.

Otro algoritmo para determinar el isomorfismo de los grafos consiste en una partición consecuente de las clases de vértices del grafo, cada una de las cuales comprende los vértices de igual potencia; la partición se base en el cálculo del número de aristas que unen el vértice considerado con vértices de estas clases.

Analicemos dos grafos:  $G_a$  y  $G_b$  (fig. 3.36, a, b). El portador del grafo  $G_a$  se parte, según los valores de las potencias de vértices, en cuatro clases:  $K_1 = \{1, 2, 6\}$ ,  $K_2 = \{4\}$ ,  $K_3 = \{3\}$ ,  $K_4 = \{5\}$ . El portador del grafo  $G_b$  también se parte en cuatro clases:  $K_1 = \{b, c, f\}$ ,  $K_2 = \{e\}$ ,  $K_3 = \{a\}$ ,  $K_4 = \{d\}$ . El número de clases y sus potencias coinciden; por consiguiente, los grafos  $G_a$  y  $G_b$  pueden ser isomorfos y, además, el isomorfismo  $\eta$  aplica, obviamente, los vértices 3, 4, 5 en a, e, d, respectivamente:  $a = \eta(3)$ ,  $e = \eta(4)$ ,  $d = \eta(5)$ .

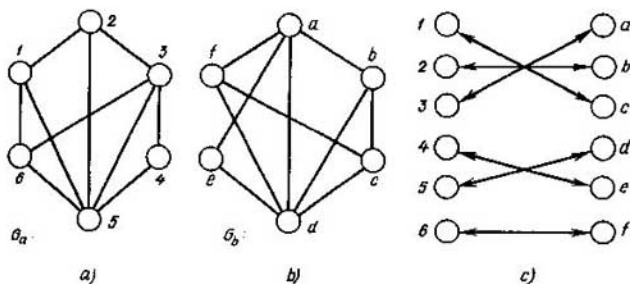


Fig. 3.36

Determinemos el número de conexiones de los vértices 1, 2, 6 en el grafo  $G_a$  y los vértices  $b, c, f$  en el grafo  $G_b$  con vértices de las clases escogidas. Para realizarlo formemos una tabla bidimensional (tabla 3.2), a cada fila de la cual se le corresponde biunívocamente una clase escogida; a cada columna, un vértice y en la intersección  $(i, j)$  se indica el número de conexiones del  $j$ -ésimo vértice con los vértices de la  $i$ -ésima clase.

Tabla 3.2

$K_i$	$v_j$			$v_j$			$K'_i$
	1	2	6	$b$	$c$	$f$	
$K_1$	2	1	1	1	2	1	$K'_1$
$K_2$	0	0	0	0	0	0	$K'_2$
$K_3$	0	1	1	1	0	1	$K'_3$
$K_4$	1	1	1	1	1	1	$K'_4$

Analizando la tabla notemos que la clase  $K_1$  se parte en dos clases:  $K_1 = \{2, 6\}$  y  $K_3 = \{1\}$ ; la clase  $K'_1$  también se parte en dos clases:  $K'_1 = \{b, f\}$  y  $K'_3 = \{c\}$ . Si estos grafos son isomorfos,  $c = \eta(1)$ . Para establecer los vértices correspondientes de los grafos  $G_a, G_b$ , formemos la tabla (tabla 3.3) de la partición obtenida de los vértices.

Tabla 3.3

$K_i$	$v_j$		$v_j$		$K'_i$
	2	6	$b$	$f$	
$K_1$	0	0	0	0	$K'_1$
$K_2$	0	0	0	0	$K'_2$
$K_3$	1	1	1	1	$K'_3$
$K_4$	1	1	1	1	$K'_4$
$K_5$	1	1	1	1	$K'_5$

Las columnas iguales señalan que el vértice 2(6) puede ponerse en correspondencia tanto al vértice  $b$  como al  $f$ . Como resultado obtenemos dos correspondencias  $\eta$  y  $\eta'$ , ya que los entornos de los vértices 2 y 6 coinciden. Escogiendo una de ellas y comprobándola de isomorfismo, deducimos que los grafos considerados son isomorfos (fig. 3.36, c).

### § 3.7. Coloración de los vértices y de las aristas del grafo. Caracterización de la propiedad de arista

Se denomina *coloración de los vértices* de un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  en  $k$  colores una partición del portador  $V$  del grafo  $G$ , realizando la cual todo subconjunto  $V_i \left( \bigcup_{i=1}^k V_i = V, V_i \cap V_b = \emptyset, i_a, i_b = 1, 2, \dots, k \right)$  no contiene nin-

gún par de vértices adyacentes. A todo subconjunto se le pone en correspondencia un color con que se pintan todos los elementos de este subconjunto. Los vértices pintados de un mismo color se denominarán *concoloreados*.

Se llama *número cromático*  $h(G)$  del grafo  $G$  un número minimal  $n$ , para el cual el grafo tiene  $n$ -coloración. Un grafo con el número cromático  $n$  se denomina  $n$ -cromático; pero, si  $h(G) \leq n$ , el grafo  $G$  se denomina  $n$ -colorable.

Es obvio, que un grafo puede ser 1-cromático si, y sólo si, éste es un grafo vacío.

Para los grafos 2-cromáticos es válido el siguiente teorema.

**Teorema 3.30 (teorema de König).** *Un grafo es 2-cromático si, y sólo si, no contiene ciclos de longitud impar.*

Señalemos que un teorema análogo expresa también la condición de dos partes. Por esta razón todos los grafos 2-cromáticos (bicolor) son de dos partes. Cualquier árbol, siendo un grafo de dos partes, es bicolor. Apreciamos el número cromático de un grafo por medio de sus parámetros.

**Teorema 3.31.** *Si la potencia maximal de los vértices de un grafo  $G$  es igual a  $s(G)$ , el número cromático de este grafo no supera la magnitud  $s(G) + 1$ :*

$$h(G) \leq s(G) + 1. \quad (3.18)$$

Para la mayoría de los grafos se puede mejorar esta estimación.

**Teorema 3.32 (teorema de Brooks).** *Un grafo  $G$  de la potencia  $s(G)$  es  $s$ -colorable, excepto dos casos:*

- 1) para  $s(G) > 2$ , el grafo  $G$  contiene un componente que es el grafo completo de densidad igual a  $s(G) + 1$ ;
- 2) para  $s(G) = 2$ , el grafo  $G$  contiene un componente que es ciclo de longitud impar.

Sin embargo, las estimaciones obtenidas empleando estos teoremas dan una buena aproximación solamente si las potencias de todos los vértices del grafo tienen valores próximos. En caso contrario la estimación puede tomar valor considerablemente exagerado. Por ejemplo, debido al teorema de Brooks, el grafo estelar  $K_{1,n}$  es  $n$ -colorable, mientras que, en efecto, es de dos partes y por eso basta emplear dos colores para su coloración.

**Teorema 3.33 (teorema de Berge, Ore, Harary).** *Para cualquier grafo  $G = \langle V, U \rangle$*

$$\frac{|V|}{\beta_0} \leq h(G) \leq |V| - \beta_0 + 1, \quad (3.19)$$

donde  $\beta_0$  es el número vértice de independencia del grafo.

**Teorema 3.34 (teorema de Gaddum, Nordhaus).** *La suma y el producto de los números cromáticos de un grafo  $G = \langle V, U \rangle$ , y su complemento*

$\bar{G} = \langle V, \bar{U} \rangle$  satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned} |2\sqrt{|V|}| &\leq h(G) + h(\bar{G}) \leq |V| + 1, \\ |V| &\leq h(G) \cdot h(\bar{G}) \leq \left[ \frac{(|V| + 1)^2}{4} \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $\lceil \rceil$  es la parte entera.

**Teorema 3.35.** El número cromático  $h(G)$  de un grafo  $G$  es:

$$h(G) \leq h(G_a) \cdot h(G_b), \text{ donde } G = G_a \cup G_b; \quad (3.21)$$

$$h(G) = h(G_a) + h(G_b), \text{ donde } G = G_a + G_b; G_a \cap G_b = \emptyset; \quad (3.22)$$

$$h(G) \leq \min(h(G_a), h(G_b)), \text{ donde } G = G_a \times G_b. \quad (3.23)$$

Análogamente a la coloración de los vértices de un grafo se define la coloración de sus aristas.

Se denomina *coloración de las aristas* de un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  una partición de la signatura  $U$  del grafo:  $U = \bigcup_i U_i$ ;  $U_i \cap U_j = \emptyset$ ,  $\alpha \neq \beta$ , realizando la cual todo subconjunto  $U_i$  no contiene ningún par de aristas adyacentes. A cada subconjunto se le pone en correspondencia un color; con esto las aristas pertenecientes a un mismo subconjunto se denominan *concolorados*.

Un grafo  $G$  se denomina *k-colorable por aristas*, si se puede pintar sus aristas con  $k$  colores de tal modo que ningunas aristas adyacentes estén pintadas de un mismo color.

Llámase *clase cromática (índice cromático)* de un grafo un número  $k$  tal que el grafo es  $k$ -colorable por aristas, pero no se puede pintar sus aristas en  $k - 1$  colores. La clase cromática del grafo  $G$  se designa mediante  $H(G)$ .

Por ejemplo, la clase cromática para los grafos de dos partes  $H(K_{1,4}) = 4$ ,  $H(K_{2,3}) = 3$ .

La clase cromática  $H(G)$  de un grafo  $G$  coincide con el número cromático del grafo  $G' = \langle X', \Gamma' \rangle$  definido del modo siguiente: sus vértices  $X'$  corresponden biunívocamente a las aristas del grafo  $G$  y  $x'_a \in \Gamma x'_b$ , si las aristas correspondientes del grafo  $G$  son adyacentes. Por consiguiente, el problema de determinar la clase cromática se reduce al problema de determinar el número cromático.

Al respecto de reducir la coloración de aristas de un grafo a la coloración de sus vértices examinemos una propiedad importante de los grafos, es decir la propiedad arista.

Un grafo  $G = \langle V, U \rangle$  posee la *propiedad arista* si, y sólo si, existe una correspondencia biunívoca, realizando la cual todo vértice  $v_i \in V$  del grafo  $G$  corresponde a una arista  $\bar{u}_j \in \bar{U}$  del grafo  $\bar{G} = \langle \bar{V}, \bar{U} \rangle$  y, además, la matriz de adyacencia de los vértices del grafo  $G$  es semejante a la matriz de adyacencia de las aristas del grafo  $\bar{G}$ . Dos matrices son *semejantes*, si coinciden

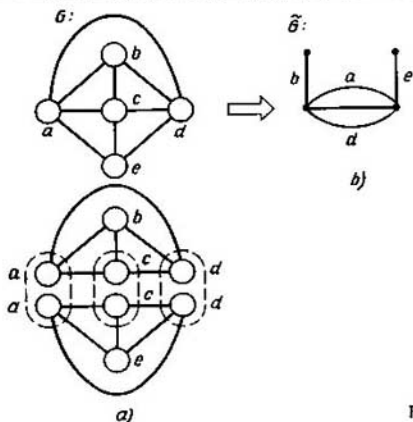


Fig. 3.37

con exactitud de hasta la permutación de filas (columnas). En el caso general, el grafo  $\tilde{G}$  puede ser multigrafo, es decir, un grafo de aristas paralelas.

**Teorema 3.36.** *Un grafo  $G$  posee la propiedad arista si, y sólo si, se puede descomponerlo con respecto a la operación aditiva «unión»  $G = \bigcup_i F_i$  en subgrafos completos  $\{F_i\}$ , en los cuales cada vértice no se incluye más de dos veces.*

**Ejemplo 3.13** (fig. 3.37). Consideremos la propiedad arista del grafo

$$G = \langle V, U \rangle, \quad V = \{a, b, c, d, e\}, \\ U = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \\ \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}.$$

Se puede descomponer el grafo  $G$  en dos subgrafos completos  $G = F_\alpha \cup F_\beta$  (fig. 3.37, a):

$$F_\alpha = \langle V_\alpha, U_\alpha \rangle, \quad V_\alpha = \{a, b, c, d\}, \\ U_\alpha = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}, \\ F_\beta = \langle V_\beta, U_\beta \rangle, \quad V_\beta = \{a, c, d, e\}, \\ U_\beta = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}, \\ V_\alpha \cap V_\beta = \{a, c, d\}.$$

Las condiciones del teorema 3.36 están cumplidas, el grafo  $G$  posee la propiedad arista, su correspondiente grafo  $\tilde{G}$  derivado por aristas se representa en la fig. 3.37, b.

Si ponemos las restricciones sobre la descomposición del grafo inicial  $G$  (a saber: descomponiendo el grafo  $G$  en subgrafos completos no admitir la repetición de aristas en subgrafos completos), el grafo derivado por aristas  $\tilde{G}$  no contendrá aristas paralelas.

**Teorema 3.37.** *El grafo  $G$  posee la propiedad arista y su correspondiente grafo  $\tilde{G}$  derivado por aristas es grafo común si, y sólo si, existe una parti-*



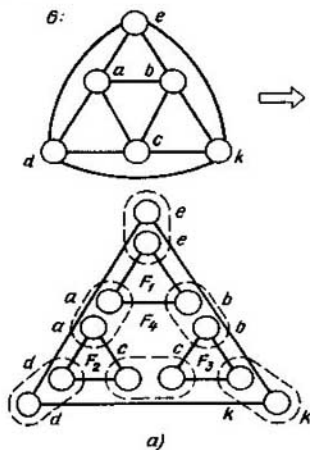


Fig. 3.38

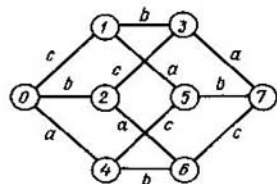


Fig. 3.39

*ción de la signatura del grafo  $G$  en subgrafos completos, en los cuales todo vértice no se incluye más de dos veces.*

**Ejemplo 3.14.** Determinemos, si el grafo  $G = \langle V, U \rangle$  (fig. 3.38) tiene un grafo derivado por aristas. Se puede descomponer el grafo  $G$  en cuatro subgrafos completos:

$$G = \bigcup_{i=1}^4 F_i,$$

$$F_1 = \langle V_1, U_1 \rangle, V_1 = \{a, b, e\},$$

$$U_1 = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}\};$$

$$F_2 = \langle V_2, U_2 \rangle, V_2 = \{a, c, d\},$$

$$U_2 = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\};$$

$$F_3 = \langle V_3, U_3 \rangle, V_3 = \{b, c, k\},$$

$$U_3 = \{\{b, c\}, \{b, k\}, \{c, k\}\},$$

$$F_4 = \langle V_4, U_4 \rangle, V_4 = \{d, e, k\},$$

$$U_4 = \{\{d, e\}, \{d, k\}, \{e, k\}\}.$$

Cada vértice  $v_i, v_i \in V$ , se incorpora en subgrafos completos  $F_i, i = 1, \dots, 4$ , dos veces (fig. 3.38, a). Las condiciones del teorema 3.37 están cumplidas, el grafo  $\tilde{G}$  derivado por aristas se representa en la fig. 3.38, b.

Al realizar la construcción de un grafo  $\tilde{G} = \langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle$  derivado por aristas, a cada vértice  $v_i \in V$  de la potencia  $s(v_i) > 1$  se le pone en correspondencia un grafo completo  $F_i \subset G$  escogido en el grafo  $G$ . Las aristas incidentes al vértice  $v_i \in \tilde{V}$  corresponden biunívocamente a los vértices del grafo  $G$  que forman este subgrafo completo  $F_i$ . El vértice  $v_i \in \tilde{V}$  de la potencia

$s(v_i) = 1$  es coincidente a la arista  $q_j$ , a la cual le corresponde el vértice  $v_j \in V$  incorporado una vez en los subgrafos completos escogidos.

Empleando las propiedades de la coloración por aristas del hipercubo, propongamos un algoritmo óptimo para encajar un grafo  $G$  en un hipercubo. Es obvio, que la clase cromática  $H(H_n)$  de un cubo  $n$ -dimensional  $H_n$  es igual a su dimensión  $n$ ,  $H(H_n) = n$ . Al mismo tiempo, las aristas concoloreadas del hipercubo forman su corte. Por ejemplo, para  $n = 3$  cada conjunto de aristas concoloreadas  $a = \{\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}\}$ ;  $b = \{\{0, 2\}, \{1, 3\}, \{4, 6\}, \{5, 7\}\}$ ;  $c = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$  forma el corte (fig. 3.39).

**Teorema 3.38 (teorema de M.I.Smirnov).** *Un grafo  $G$  es encajable en un hipercubo si, y sólo si, todo conjunto de aristas concoloreadas forma su corte.*

A base de este teorema, obtengamos el algoritmo para encajar el grafo  $G$  en un hipercubo compuesto de las siguientes transformaciones:

1. Construyendo el árbol correspondiente, escogemos subconjuntos independientes por aristas (subconjuntos vacíos por aristas). A las aristas de cada uno de estos subgrafos se les puede poner en correspondencia el mismo color.

2. De la lista obtenida en el punto 1 escogemos subconjuntos, cada uno de los cuales forma corte del grafo  $G$ .

3. Empleando subconjuntos escogidos en el punto 2 coloramos las aristas del grafo prefijado.

4. Verificamos, si todo conjunto de aristas concoloreadas forma corte del grafo. Si «no», mediante la reducción minimal de la signatura o la extensión minimal del portador hacemos el grafo  $\tilde{G}$  equivalente al grafo prefijado  $G$  ( $\tilde{G}$  debe satisfacer las condiciones del teorema 3.38). Si «sí», pasamos al punto 5.

5. Realicemos el encaje de hecho del grafo obtenido en el punto 4 en el espacio booleano. Con ello, la coloración de la arista corresponde biunívocamente al orden del vector binario que identifica el vértice de un hipercubo. Al transpasar la arista  $\{v_i, v_j\}$  pintada del  $i$ -ésimo color, los códigos binarios de los vértices  $v_i$  y  $v_j$  se diferencian en el  $i$ -ésimo orden.

6. El fin.

**Ejemplo 3.15.** Encajamos el grafo  $G$  (fig. 3.40,  $a$ ) en un espacio booleano  $H$  empleando el algoritmo considerado.

1. El árbol que determina la distribución de subgrafos vacíos de arista contiene 20 vértices pendientes, cada uno de los cuales corresponde a un subgrafo vacío de arista (fig. 3.40,  $b$ ).

2. Cuatro subgrafos vacíos de arista forman cortes del grafo dado:  $E_1 = \{2, 5, 8\}$ ,  $E_2 = \{1, 6, 8\}$ ,  $E_3 = \{4, 7, 9\}$ ,  $E_4 = \{3, 7, 10\}$ .

3. Coloramos las aristas del grafo dado  $G$  empleando el cubrimiento de columnas por filas de una tabla binaria, en la cual a una fila le corresponde biunívocamente un subgrafo vacío de arista obtenido en el punto 2, a una columna le corresponde una arista; en la intersección de la  $i$ -ésima fila con la  $j$ -ésima columna se halla 1, si el  $i$ -ésimo subgrafo vacío de arista contiene la  $j$ -ésima arista y 0 en el caso contrario (tabla 3.4).

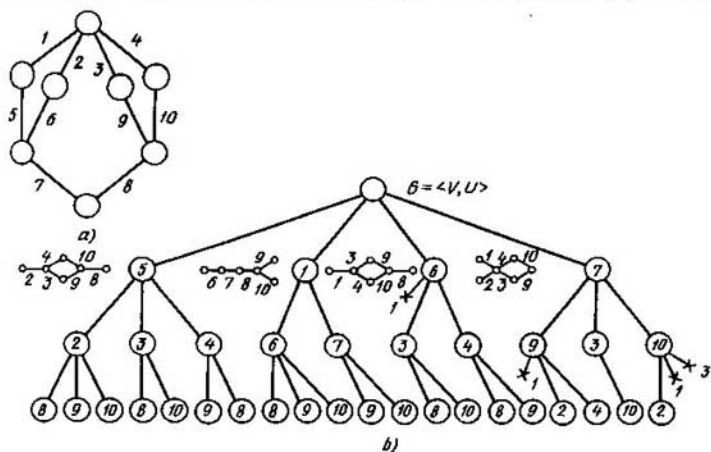


Fig. 3.40

Tabla 3.4

$E_i$	$e_j$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
{2, 5, 8}		1			1			1		
{1, 6, 8}	1					1		1		
{4, 7, 9}				1			1		1	
{3, 7, 10}			1				1			1

Tenemos cuatro coloraciones  $R_i(G)$  del grafo  $G$ :

$$R_1(G) = \{ \{2, 5, 8\}, \{1, 6\}, \{4, 7, 9\}, \{3, 10\} \},$$

$$R_2(G) = \{ \{2, 5, 8\}, \{1, 6\}, \{4, 9\}, \{3, 7, 10\} \},$$

$$R_3(G) = \{ \{2, 5\}, \{1, 6, 8\}, \{4, 7, 9\}, \{3, 10\} \},$$

$$R_4(G) = \{ \{2, 5\}, \{1, 6, 8\}, \{4, 9\}, \{3, 7, 10\} \}.$$

4. Comprobamos, si cada conjunto de aristas concoloreadas forma corte del grafo. En cada coloración existen vértices concoloreados que no son corte del grafo dado:  $\{1, 6\}$ ,  $\{3, 10\}$ ,  $\{4, 9\}$ ,  $\{2, 5\}$ . Para cumplir las condiciones del teorema 3.38 es necesario eliminar del

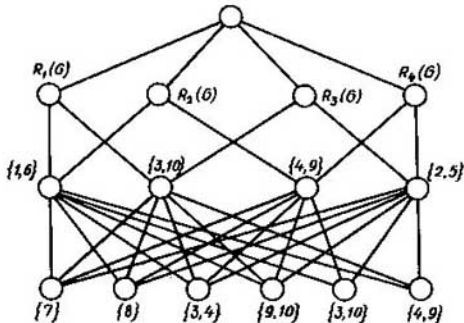


Fig. 3.41

grato cualquier elemento del conjunto  $\{ \{7\}, \{8\}, \{3, 4\}, \{9, 10\}, \{3, 10\}, \{4, 9\} \}$  eligiendo la correspondiente coloración de aristas del grafo  $G$  (fig. 3.41). Si la interpretación de objeto del problema requiere que se haga realidad esta equivalencia no por medio de reducir la signatura, sino por extender el portador, entonces las correspondientes aristas se sustituyen por una cadena; además, es indispensable que no se interrumpa el principio par. El problema de determinar la reducción minimal de la signatura o la extensión minimal del portador del grafo  $G$  se reduce al cubrimiento de la correspondiente tabla binaria. En el ejemplo dado escogemos la arista 7 y, cambiándola por una cadena de longitud 3, obtenemos el grafo homeomorfo  $\tilde{G}$  equivalente al grafo dado  $G$  y el que posee la propiedad encajable en el espacio booleano. Empleando la primera coloración  $R_1(G)$  coloramos las aristas  $\{2, 5, 8\}, \{1, 6, 11\}, \{4, 7, 9\}, \{3, 10, 12\}$  del grafo  $G$  (fig. 3.42, a).

5. Ponemos los conjuntos de aristas concoloreadas en correspondencia a los órdenes del vector binario:  $x_1 = \{2, 5, 8\}, x_2 = \{1, 6, 11\}, x_3 = \{4, 7, 9\}, x_4 = \{3, 10, 12\}$ . Condicionando los vértices del grafo  $G$ , realicemos el encaje fáctico del grafo  $\tilde{G}$  en el espacio booleano (fig. 3.42, b).

**Teorema 3.39.** Si  $G$  es un grafo de dos partes y su potencia es igual a  $s(G)$ ,

$$H(G) = s(G). \quad (3.24)$$

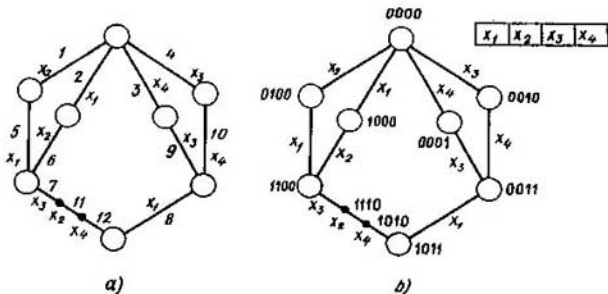


Fig. 3.42

**Teorema 3.40.** *La clase cromática de cualquier grafo completo sobre  $n$  vértices  $H(K_n) = n$ , si  $n$  es impar ( $n \neq 1$ ) y  $H(K_n) = n - 1$ , si  $n$  es par.*

Demos el algoritmo exacto de la coloración minimal de los vértices (las aristas) del grafo  $G$ , es decir, el algoritmo para determinar el número cromático  $h(G)$  (la clase cromática  $H(G)$ ):

1. Escogemos el conjunto de subgrafos vacíos (vacíos de arista) del grafo  $G$ .

2. Construimos una tabla bidimensional, a cada fila de la cual le ponemos en correspondencia biunívoca un subgrafo vacío; a cada columna, un vértice (una arista): en la célula  $(i, j)$  escribimos la unidad, si el  $j$ -ésimo vértice ( $j$ -ésima arista) se contiene en el  $i$ -ésimo subgrafo vacío, en caso contrario, la célula queda vacía.

3. Determinamos el cubrimiento de columnas por filas. Todo cubrimiento genera la coloración. El cubrimiento de potencia minimal determina el número cromático (la clase cromática) del grafo  $G$ .

En el caso de un grafo grande  $G = \langle V, U \rangle$ , cuyo portador es de potencia igual a varios centenares o millares, examinemos el algoritmo siguiente que emplea propiedades de frecuencia del grafo:

1. Realizando  $|U|$  comparaciones determinamos un par de vértices adyacentes  $v_\alpha$  y  $v_\beta$  del grafo  $G = \langle V, U \rangle$ , para el cual la funcional

$$\varphi(\{v_\alpha, v_\beta\}) = \frac{|\Gamma v_\alpha \cap \Gamma v_\beta|}{|\Gamma v_\alpha| + |\Gamma v_\beta|} \quad (3.25)$$

toma el valor maximal. La igualdad de esta funcional a cero significa que la arista  $\{v_\alpha, v_\beta\}$  no se incluye en el triángulo. Cuanto mayor es el valor (3.25), tanto más denso es un subgrafo que puede comprender esta arista.

2. El par de vértices hallados se pinta y los ponemos en correspondencia biunívoca a las columnas de una tabla bidimensional, a las filas de la cual comparemos biunívocamente los vértices adyacentes, por lo menos, a un vértice colorado; en la célula  $(i, j)$  ponemos 1, si el  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo vértices son adyacentes y 0, en caso contrario.

3. Escogemos la fila con el número maximal de unidades.

4. Si para la  $i$ -ésima fila escogida en el p. 3 existe una  $j$ -ésima columna en la intersección con la cual se halla 0, coloreamos el  $i$ -ésimo vértice en el  $j$ -ésimo color y encolamos los vértices pintados con el mismo  $j$ -ésimo color. En caso contrario coloramos el  $i$ -ésimo vértice en un color nuevo aumentado en una unidad el número de columnas en la tabla.

5. Si queda por lo menos un vértice no coloreado pasamos al punto 3, en caso contrario, al punto 6.

6. El fin.

El número de colores para pintar los vértices del grafo  $G = \langle V, U \rangle$  es igual al número de columnas en la tabla final.

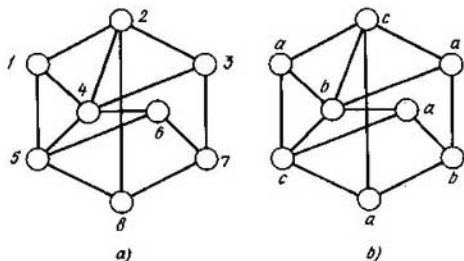


Fig. 3.43

**Ejemplo 3.16.** Coloramos los vértices del grafo  $G = \langle V, U \rangle$  (fig. 3.43, a) empleando el algoritmo examinado.

1. Debido a (3.25), el valor maximal de la funcional  $\varphi(\{v_\alpha, v_\beta\})$  es igual a 0,25 cuando consideramos los vértices 1 y 4.

$$\max_{\alpha, \beta} \varphi(\{v_\alpha, v_\beta\}) = 0,25 \text{ cuando } v_\alpha = 1 \text{ y } v_\beta = 4.$$

2. Obtenemos la tabla (tabla 3.5).

3. Escogemos la primera fila.

4. Pintamos el vértice 2 de un color nuevo obteniendo como resultado una tabla nueva (tabla 3.6).

5. Existen los vértices no colorados; por lo tanto, pasamos al punto 3.

3. Escogemos la primera fila.

4. El vértice 3 correspondiente a la primera fila es del mismo color que el vértice 1, pintamos el vértice 3 y lo adherimos al vértice 1. Obtenemos la tabla 3.7.

Tabla 3.5

$v_i \in \Gamma v_j$	$v_j$	
	1	1
2	1	1
3	0	1
5	1	1
6	0	1

Tabla 3.6

$v_i \in \Gamma v_j$	$v_j$		
	1	4	2
3	0	1	1
5	1	1	0
6	0	1	0
8	0	0	1

Tabla 3.7

$v_i \in \Gamma v_j$	$v_j$		
	{1,3}	4	2
5	1	1	0
6	0	1	0
7	1	0	0
8	0	0	1

Realizando sucesivamente este algoritmo obtenemos las tablas 3.8 (a, b, c).

Tabla 3.8,a

$v_i \in \Gamma v_j$	$v_j$		
	{1,3}	4	{2,5}
6	0	1	1
7	1	0	0
8	0	0	1

Tabla 3.8,b

$v_i \in \Gamma v_j$	$v_j$		
	{1, 3, 6}	4	{2, 5}
7	1	0	0
8	0	0	1

Tabla 3.8,c

$v_i \in \Gamma v_j$	$v_j$		
	{1, 3, 6}	{4, 7}	{2, 5}
8	0	1	1

En definitiva se obtiene la coloración del grafo dado  $G = \langle V, U \rangle$  en tres colores (fig. 3.43, b):  $a = \{1, 3, 6, 8\}$ ,  $b = \{4, 7\}$ ,  $c = \{2, 5\}$ . La densidad del grafo  $G$  es igual a tres. Por consiguiente, la coloración obtenida es minimal.

### § 3.8. Caracterización de la coloración de los grafos

El problema de caracterización (el más importante en la matemática discreta) se considera como resuelto, si están halladas las construcciones que determinan el sentido de la transformación que se realiza.

Examinemos la estructura de subgrafos que determinan el número cromático del grafo.

Se denomina *grafo casi completo*  $Q(q)$  un grafo  $Q$ , para cuya coloración minimal se necesitan  $q$  colores, mientras que para la coloración de todo grafo parcial propio  $Q'$ ,  $Q' \subset \subset Q$ , basta tener  $q'$  colores,  $q' < q$ . En este caso, el número de colores  $q$  se llama *casi densidad del grafo casi completo*  $Q$ .

La casi densidad  $q(G)$  de un grafo  $G$  se determina por la expresión

$$q(G) = \max_i q_i(Q_i), \quad Q_i \subset G. \quad (3.26)$$

El orden  $k(Q)$  del grafo casi completo  $Q(q)$  es

$$k(Q) = q(Q) - p(Q). \quad (3.27)$$

El orden  $k(G)$  del grafo  $G$  es

$$k(G) = q(G) - p(G). \quad (3.28)$$

Acordémonos designar el grafo casi completo  $Q$  de la densidad  $p$  y del orden  $k$  por medio de  $Q(p, k)$  y el grafo de las mismas características, mediante  $G(p, k)$ .

Los grafos casi completos  $Q(2, 0)$ ,  $Q(2, 1)$ ,  $Q(2, 2)$  y  $Q(2, 3)$  están representados en la fig. 3.44 (a, b, c, d).

**Teorema 3.41 (propiedad principal de los grafos casi completos).** *Para cualquier vértice  $v_i$  de un grafo casi completo  $Q$  existe tal coloración de sus vértices que no deja que exista el vértice  $v_\alpha$  ( $\alpha \neq i$ ) que sea del mismo color que  $v_i$ .*

□ Realizamos la demostración partiéndonos de lo contrario. Sea que tal coloración no existe, es decir, realizando toda coloración de los vértices del grafo  $Q$  existe un vértice  $v_\alpha$  ( $\alpha \neq i$ ) del mismo color que  $v_i$ . Pero entonces, al eliminar las aristas incidentes al vértice  $v_i$ , obtenemos que el número de colores no varía, lo que contradice a la definición de grafo casi completo. ■

**Corolario.** Al eliminar cualquier arista de un grafo casi completo, su casi densidad disminuye en 1.

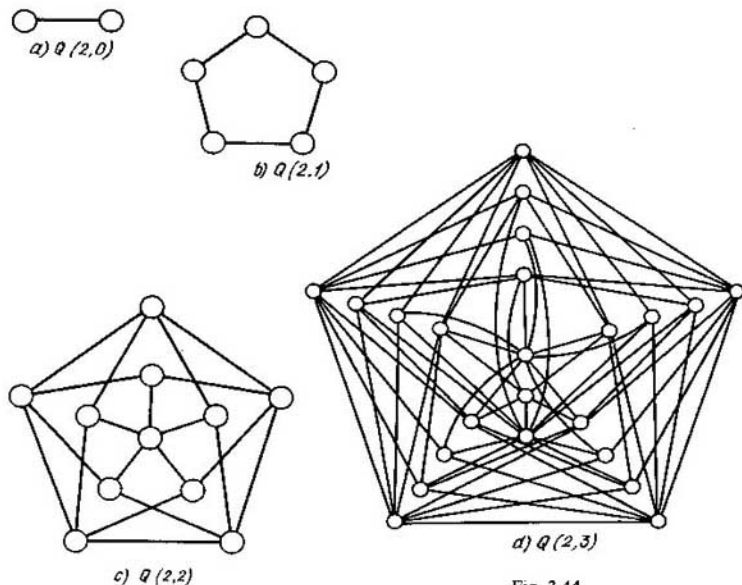


Fig. 3.44

El teorema 3.41 es base de la demostración de la estructura de un grafo casi completo  $Q(q)$  con la casi densidad  $q$ ; el grafo casi completo  $Q(q)$  comprende la base es decir un grafo casi completo  $Q(q - 1)$  y las capas sustituyente y cerradora. En virtud de la propiedad principal de los grafos casi completos, los vértices de la capa sustituyente corresponden biunívocamente a los vértices de la base con tal que los vértices correspondientes son adyacentes a los mismos vértices pertenecientes a la base  $Q(q - 1)$ . Los vértices de la capa sustituyente y los de la base parecen ser «sosias». La capa cerradora representa los vértices que conifican los vértices de la capa sustituyente. En el límite, la capa cerradora es un vértice que conifica toda la capa sustituyente.

Examinemos la formación del grafo casi completo  $Q(2, k)$  que posee propiedades extremales, es decir, las potencias de su portador y su signatura son minimales en comparación con otros grafos casi completos de densidad 2 y orden  $k$ . En virtud del teorema 3.41, cuanto menos sea la potencia del portador o de la signatura de la base,  $Q(2, k - 1)$  tanto menores serán las respectivas potencias del grafo casi completo  $Q(2, k)$ . La base del grafo  $Q(2, 1)$  la representa el grafo  $Q(2, 0)$  (fig. 3.44, a) que es la arista  $\{a, b\}$ ;



la capa sustituyente la representan dos vértices  $a'$  y  $b'$  que son respectivamente adyacentes a  $b$  y  $a$ . La capa cerradora es un vértice que conifica los vértices  $a'$  y  $b'$ . Como resultado obtenemos un ciclo de longitud 5 (fig. 3.44,  $b$ ).

De manera análoga continuamos el proceso de construcción de los grafos, tomamos  $Q(2, 1)$  como la base (fig. 3.44,  $b$ ) y así obtenemos el grafo  $Q(2, 2)$  (fig. 3.44,  $c$ ); tomando el grafo  $Q(2, 2)$  como base obtenemos el grafo casi completo  $Q(2, 3)$  (fig. 3.44,  $d$ ). Continuando este proceso se puede construir el grafo casi completo  $Q(2, k)$  con potencias minimales del portador y de la signatura para cualquier  $k$ .

Determinemos la dependencia de la potencia minimal del portador del grafo  $Q(2, k)$  respecto de su orden  $k$ . Tenemos

$$\begin{array}{l}
 k \quad |V_{\min}(Q(2, k))|, \\
 0 \quad 2, \\
 1 \quad 2 \cdot 2 + 1, \\
 2 \quad 2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1, \\
 3 \quad 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1) + 1, \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 k \quad 2 \cdot \underbrace{(2 \cdot (\dots 2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1 \dots) + 1)}_{(k-1) \text{ llave}} + 1.
 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 |V_{\min}(Q(2, k))| &= 2 \cdot (2 \cdot (\dots 2 \cdot (2 \cdot 2 + 1) + 1 \dots) + 1) + 1 = 2^{k+1} + 2^{k-1} + \\
 &+ 2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2^1 + 2^0 = \sum_{i=0}^{k+1} 2^i - 2^k = \frac{2^{k+1} \cdot 2 - 2^0}{2 - 1} - 2^k = \\
 &= 4 \cdot 2^k - 2^k - 1 = 3 \cdot 2^k - 1.
 \end{aligned}$$

Así, en definitiva tenemos

$$|V_{\min}(Q(2, k))| = 3 \cdot 2^k - 1. \quad (3.29)$$

Hallemos la dependencia de la potencia minimal de la signatura del grafo  $Q(2, k)$  respecto de su orden. Conforme a la estructura de los grafos casi completos y su propiedad principal, la suma de las potencias de la signatura de la base  $Q(2, k-1)$  y de la signatura de la capa sustituyente es igual a la potencia triplicada de la signatura de la base  $Q(2, k-1)$ , cuando se construye el grafo  $Q(2, k)$  con la potencia minimal de la signatura. En virtud de (3.29), la potencia de la signatura de la capa cerradora es igual a la potencia del portador de la base  $3 \cdot 2^{k-1} - 1$ .

De aquí la potencia minimal de la signatura  $|U_{\min}(Q(2, k))|$  del grafo  $Q(2, k)$  es igual a

$$\begin{aligned}
 & 1 \text{ cuando } k = 0, \\
 & 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^0 - 1 \text{ cuando } k = 1, \\
 & 3 \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^0 - 1) + 3 \cdot 2^1 - 1 \text{ cuando } k = 2, \\
 & 3 \cdot (3 \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^0 - 1) + 3 \cdot 2^1 - 1) + 3 \cdot 2^2 - 1 \text{ cuando } k = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & 3 \cdot \underbrace{(3 \cdot (3 \dots 3 \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2^0 - 1) + 3 \cdot 2^1 - 1) + 3 \cdot 2^2 - 1)}_{k-1 \text{ llave}} \\
 & - 1) + \dots + 3 \cdot 2^{k-2} - 1) + 3 \cdot 2^{k-1} - 1 \text{ cuando } k = k.
 \end{aligned}$$

Simplificando sucesivamente la expresión para  $|U_{\min}(Q(2, k))|$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 |U_{\min}(Q(2, k))| &= 3^k + 3^k \cdot 2^0 - 3^{k-1} + 3^{k-1} \cdot 2^1 - 3^{k-2} + \\
 &+ 3^{k-2} \cdot 2^2 - 3^{k-3} + \dots + 3^1 \cdot 2^{k-1} - 3^0 = 3^k + \sum_{i=1}^k 3^i \cdot 2^{k-i} - \\
 &- \sum_{i=0}^{k-1} 3^i = 3^k + 3 \cdot (3^k - 2^k) - 0,5 \cdot (3^k - 1), \\
 2 |U_{\min}(Q(2, k))| &= 7 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 1. \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Sumando el grafo casi completo  $Q(2, k)$  y un grafo completo de densidad  $p - 2$ , obtenemos el grafo casi completo  $Q(p, k)$  que posee las propiedades extremales a examinar:

$$Q(2, k) + Q(p - 2, 0) = Q(p, k). \tag{3.31}$$

Al generalizar (3.31) tenemos el teorema siguiente.

**Teorema 3.42.** *La suma de los grafos casi completos es el grafo casi completo:*

$$\sum_i Q_i(p_i, k_i) = Q\left(\sum_i p_i, \sum_i k_i\right). \tag{3.32}$$

En virtud de (3.31), la potencia minimal del portador del grafo casi completo  $Q(p, k)$  es igual a

$$|V_{\min}(Q(p, k))| = 3 \cdot (2^k - 1) + p. \tag{3.33}$$

La potencia minimal de la signatura del grafo  $Q(p, k)$  se representa como suma de la potencia minimal de la signatura del grafo  $Q(2, k)$  y la potencia minimal de la signatura de un grafo completo de densidad  $(p - 2)$ , cada vértice del cual conifica el grafo  $Q(2, k)$ . Debido a (3.29) y (3.30), se tiene

$$\begin{aligned}
 |U_{\min}(Q(p, k))| &= 0,5 \cdot (7 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 1) + \\
 &+ 0,5 \cdot (p - 2) \cdot (p - 3) + (p - 2) \cdot (3 \cdot 2^k - 1).
 \end{aligned}$$

En definitiva, obtenemos

$$2 |U_{\min}(Q(p, k))| = 7 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k \cdot (p - 3) + (p - 3)^2 - p + 2. \tag{3.34}$$

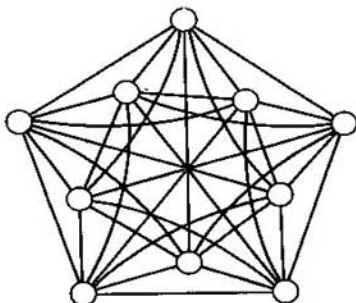


Fig. 3.45

En virtud de (3.33), todo grafo casi completo de primer orden y de densidad  $p$  contiene no menos de  $p + 3$  vértices. El grafo  $Q(p, 1)$  que tiene exactamente  $p + 3$  vértices es la suma de un ciclo de longitud 5 y de un grafo completo de densidad  $p - 2$ :

$$Q(p, 1) = Q(2, 1) + Q(p - 2, 0).$$

Las correlaciones (3.33) y (3.34) son válidas para todos grafos casi completos de densidad 2 ó 3 y para grafos casi completos indescomponibles según la operación aditiva «suma». Anteriormente fue considerada la estructura de estos grafos. Estas fórmulas no son válidas para los grafos casi completos descomponibles que, debido al teorema 3.42, tienen la densidad no menos de 4 y por lo menos dos sumandos  $k_i > 0$ . Por ejemplo, el grafo casi completo  $Q(4, 2)$  que es la suma de dos grafos  $Q_a(2, 1)$  y  $Q_b(2, 1)$  (fig. 3.45)  $Q(4, 2) = Q_a(2, 1) + Q_b(2, 1)$ , tiene la potencia del portador igual a 10 y la potencia de la signatura igual a 35, mientras que las potencias minimales del portador y de la signatura del grafo casi completo indescomponible  $Q(4, 2)$  son iguales a 13 y 43, respectivamente [de acuerdo con (3.33) y (3.34)].

**Teorema 3.43.** *El número cromático  $h(G)$  del grafo  $G$  es igual a su casi densidad  $q(G)$ :*

$$h(G) = q(G). \quad (3.35)$$

□Debido a la definición del grafo casi completo,

$$h(G) \geq q(G).$$

Demostremos que en esta correlación siempre tiene lugar la igualdad. Escogemos todos los grafos casi completos no incluibles, es decir, los grafos para cada  $Q_i$ , de los cuales no existe un grafo casi completo  $Q_a$  tal que  $Q_i \subset \subset Q_a$ . En virtud de (3.26), entre los subgrafos escogidos existe por lo

menos uno que necesita  $q$  colores para pintarlo. Mostremos que para la coloración minimal de la parte restante de  $G \setminus Q$  son suficientes los mismos  $q$  colores. En efecto, si para la coloración minimal del subgrafo  $G \setminus Q$  necesitamos al menos un color nuevo,  $(q + 1)$ -ésimo, eso significa que en el subgrafo  $G \setminus Q$  existen las capas sustituyente y cerradora, lo que lleva a formar un grafo casi completo de casi densidad  $q + 1$ . Lo último contradice a la correlación (3.26). ■

Empleando las fórmulas (3.33)—(3.35) para los grafos  $G_i$  de densidad  $p(G_i) < 4$  y para los grafos que no contienen subgrafos casi completos descomponibles según la cópula «suma», se puede proponer estimaciones logarítmicas del número cromático. Tenemos:

$$\begin{aligned} h(G) = q(G) &= \max_i (p(Q_i) + k(Q_i)) \leq \\ &\leq \max_i P(Q_i) + \max_i k(Q_i), \end{aligned} \quad (3.36a)$$

$$h(G) \leq p(G) + \max_i k(Q_i), \quad Q_i \subset G, \quad G = \langle V, U \rangle. \quad (3.36b)$$

Según (3.33)

$$\max_i k(Q_i) \leq \left\lceil \log_2 \frac{|V| - p(G)}{3} + 1 \right\rceil.$$

De aquí

$$h(G) \leq p(G) + \left\lceil \log_2 \frac{|V| - p(G)}{3} + 1 \right\rceil. \quad (3.37)$$

En la expresión (3.34)  $(p - 3)^2 - p + 2 > 0$  y para  $p > 4$ ,  $p = 4$  y cualquier  $k$   $6 \cdot 2^k - 1 > 0$ , por eso

$$\max_i k(Q_i) < \left\lceil \log_3 \frac{2|U|}{7} \right\rceil, \quad p(G) \geq 4;$$

por consiguiente,

$$h(G) \leq p(G) + \left\lceil \log_3 \frac{2|U|}{7} \right\rceil, \quad p(G) \geq 4. \quad (3.38a)$$

Cuando  $p(G) = 3$  tenemos

$$h(G) \leq 3 + \left\lceil \log_3 \frac{2|U| + 1}{7} \right\rceil. \quad (3.38b)$$

Cuando  $p(G) = 2$  la expresión (3.34) obtiene la forma

$$2|U_{\min}(Q(2, k))| = 7 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^k + 1 > 7 \cdot 3^k - 6 \cdot 3^k + 1 = 3^k + 1,$$

por eso

$$\max_i k(Q_i) < \lceil \log_3(2 |U| - 1) \rceil.$$

De aquí cuando  $p(G) = 2$  obtenemos

$$h(G) \leq 2 + \lceil \log_3(2 |U| - 1) \rceil. \quad (3.38c)$$

De acuerdo con la estructura del grafo casi completo  $Q(p, k)$  la potencia  $s(v_i)$  de cada vértice  $v_i$  de este grafo satisface la desigualdad

$$s(v_i) \geq q(Q) - 1 = p + k - 1. \quad (3.39)$$

Entonces, según la fórmula (3.33) la potencia de la signatura  $|U(Q(p, k))|$  del grafo casi completo indescomponible satisface la igualdad

$$|U(Q(p, k))| \geq 0,5 \cdot (3 \cdot (2^k - 1) + p) \cdot (p + k - 1). \quad (3.40)$$

Para los grafos completos se puede lograr esta estimación cuando  $k = 0$ .

En virtud de (3.33), (3.36a) y (3.40),

$$h(G) \leq \left\lceil \frac{2 \cdot |U(\tilde{G})|}{|V(\tilde{G})|} \right\rceil + 1, \quad \tilde{G} \subset G, \quad (3.41)$$

donde el subgrafo  $G$  verifica todas las desigualdades del sistema

$$\begin{aligned} |V(\tilde{G})| &\geq 3 \cdot (2^k - 1) + p(\tilde{G}), \\ 2 |U(\tilde{G})| &\geq 7 \cdot 3^k + 6 \cdot 2^k \cdot (p(G) - 3) + (p(G) - 3)^2 - p(\tilde{G}) + 2, \\ s(v_i) &\geq p(\tilde{G}) + k - 1, \quad v_i \in \tilde{G}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

es decir, conforme a sus recursos, tanto de vértices como de aristas, y según la topología local (potencias de los vértices), el subgrafo  $\tilde{G}$  puede incluir un grafo casi completo  $Q(p, k)$ , donde

$$k = \left\lceil \log_2 \left( \frac{|V(\tilde{G}) - p(\tilde{G})|}{3} + 1 \right) \right\rceil. \quad (3.43)$$

Aquí,  $\lceil \cdot \rceil$  es la parte entera del número. Es obvio, que

$$\left\lceil \frac{2 |U(\tilde{G})|}{|V(\tilde{G})|} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{|V(\tilde{G})|} \sum_{v_i \in V(\tilde{G})} s(v_i) \right\rceil = \lceil s_{\text{med}}(\tilde{G}) \rceil.$$

De aquí tenemos la estimación superior del número cromático  $h(G)$  del grafo  $G$ :

$$h(G) \leq \lceil s_{\text{med}}(\tilde{G}) \rceil + 1, \quad (3.44)$$

donde el grafo  $\tilde{G} \subset G$  satisface el sistema de desigualdad (3.42). La estimación (3.44) es más eficaz que las dadas anteriormente  $h(G) \leq s_{\text{máx}}(G) + 1$  y para una clase determinada de grafos, la estimación de Brooks  $h(G) \leq s_{\text{máx}}(G)$ .

Al componer las estimaciones (3.37), (3.38) y (3.44), obtenemos estimaciones del número cromático  $h(G)$  del grafo  $G = \langle V, U \rangle$ :

cuando  $p(G) \geq 4$

$$h(G) \leq \min(p(G) + \left\lceil \log_2 \left( \frac{|V(G)| - p(G)}{3} + 1 \right) \right\rceil, \\ p(G) + \left\lceil \log_3 \frac{2 \cdot |U(G)|}{7} \right\rceil, \\ \lfloor s_{\text{med}}(\vec{G}) \rfloor + 1); \quad (3.45a)$$

cuando  $p(G) = 3$

$$h(G) \leq \min(p(G) + \left\lceil \log_2 \left( \frac{|V(G)| - p(G)}{3} + 1 \right) \right\rceil, \\ p(G) + \left\lceil \log_3 \frac{2 \cdot |U(G)| + 1}{7} \right\rceil, \\ \lfloor s_{\text{med}}(\vec{G}) \rfloor + 1); \quad (3.45b)$$

cuando  $p(G) = 2$

$$h(G) \leq \min(2 + \left\lceil \log_2 \left( \frac{|V(G)| - 2}{3} + 1 \right) \right\rceil, \\ 2 + \lfloor \log_3(2 \cdot |U(G)| - 1) \rfloor, \lfloor s_{\text{med}}(\vec{G}) \rfloor + 1). \quad (3.45c)$$

Para calcular la estimación del número cromático  $h(G)$  del grafo  $G$ , basándose en la fórmula (3.44), hallamos la densidad  $p(G)$  del grafo  $G$  y disminuyendo  $p$  de  $p(G)$  a 2 con el paso 1, según la fórmula (3.43) hallamos  $k$  para cada uno de estos valores. Debido a (3.36a), la suma máxima de  $p$  y del valor correspondiente de  $k$ , para los cuales se cumplen las desigualdades del sistema (3.42), determina la estimación superior del número cromático  $h(G)$ . Si el grafo estimado es casi completo o la estimación superior obtenida coincide con la inferior, ésta es igual al número cromático.

La estimación inferior del número cromático

$$h(G) \geq p(G) \quad (3.46)$$

se minoran por la estimación de Geller, como lo fue mostrado por Mayers y Lean,

$$h(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)|^2}{|V(G)|^2 - 2|U(G)|} \right\rceil, \quad (3.47)$$

o

$$h(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)|}{|V(G)| - s_{\text{med}}(G)} \right\rceil. \quad (3.48)$$

Las estimaciones del número cromático (3.37), (3.38), (3.44) y (3.45) minoran las estimaciones superiores conocidas del  $h(G)$ .

**Ejemplo 3.17.** Examinemos el grafo  $G = \langle V, U \rangle$  (fig. 3.46, a).

Según las estimaciones de Brooks y Geller, su número cromático  $h(G)$  se encierra en el segmento [1, 7]:

$$\left[ \frac{|V(G)|^2}{|V(G)|^2 - 2|U(G)|} \right] = \left[ \frac{10^2}{10^2 - 2 \cdot 20} \right] = 1,$$

$$s_{\max}(G) = 7; 1 \leq h(G) \leq 7.$$

Estimemos el número cromático  $h(G)$  empleando las estimaciones superiores obtenidas. La densidad del grafo  $G$  es igual a 4:  $p(G) = 4$ . Conforme a (3.43),

$$k(G) = \left[ \log_2 \left( \frac{10 - 4}{3} + 1 \right) \right] = 4.$$

Si es posible incluir  $Q(4, 1)$  en el prefijado dado  $G$ , la potencia de todo vértice no tiene que ser menor que 4. Los vértices  $c, d, f$  tienen potencia menor que 4 y, por consiguiente, no se incluyen en el grafo  $Q(4, 1)$ . Eliminando estos vértices en el grafo obtenido (fig. 3.46, b),  $k$  conserva su valor:

$$k = \left[ \log_2 \left( \frac{7 - 4}{3} + 1 \right) \right] = 1,$$

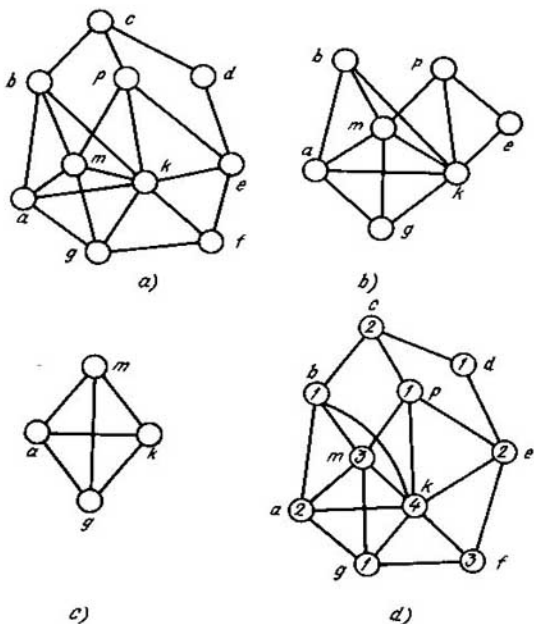


Fig. 3.46

pero con esto los vértices  $b, p, e$  no pueden incluirse en este grafo, ya que su potencia (fig. 3.46,  $b$ ) es menor que 4. Eliminamos los vértices  $b, p, e$  del grafo  $G'$  (fig. 3.46,  $b$ ) y obtenemos el grafo representado en la fig. 3.46,  $c$  que no puede contener el grafo  $Q(4, 1)$  conforme al recurso de vértices, ni conforme al de aristas, ni conforme a la topología local. Por consiguiente  $k_{\max} = 0$  cuando  $p = 4$ .

Disminuimos la densidad en una unidad y definimos el valor máximo de  $k$ :

$$k(G) = \left\lfloor \log_2 \left( \frac{10 - 3}{3} + 1 \right) \right\rfloor = 1.$$

Por lo tanto, el grafo prefijado no puede contener el grafo casi completo  $Q(3, 2)$ . Disminuimos otra vez la densidad en una unidad y definimos el valor máximo de  $k$ , cuando  $p = 2$ . Tenemos

$$k(G) = \left\lfloor \log_2 \left( \frac{10 - 2}{3} + 1 \right) \right\rfloor = 1.$$

De este modo el grafo dado incluso no contiene el grafo casi completo  $Q(2, 2)$ . De aquí la estimación superior del número cromático  $h(G)$  del grafo  $G$  es igual a 4. Esta coincide con la estimación inferior  $p(G) \leq h(G)$ ; por consiguiente, el número cromático del grafo prefijado es también igual a 4:  $k_1 = \{b, d, p, g\}$ ,  $k_2 = \{a, c, e\}$ ,  $k_3 = \{m, f\}$ ,  $k_4 = \{k\}$  (fig. 3.46,  $d$ ).

Así pues, el empleo de caracterización de la coloración de vértices del grafo permite, en el caso dado, determinar su número cromático sin buscar el cubrimiento minimal de los subgrafos vacíos por los vértices del grafo.

Según el teorema 3.42, para un grafo  $G$  que contiene un grafo casi completo descomponible, con dos sumandos por lo menos, cuyo  $k_i > 0$ , el número cromático  $h(G)$  es igual a la suma de los números cromáticos de los grafos casi completos que son sumandos del grafo  $Q(q) \subset G$  de casi densidad máxima. Por esta razón

$$\begin{aligned} h(G) &= \max_i q_i(Q_i) = \max_i \sum_j q_{ij}(Q_{ij}), \\ Q_{ij} &\subset Q_i, \quad Q_i = \sum_j Q_{ij}, \\ h(G) &= \max_i \sum_j (p_{ij}(Q_{ij}) + k_{ij}(Q_{ij})) \leq \max_i \sum_j p_{ij}(Q_{ij}) + \max_i \sum_j k_{ij}(Q_{ij}), \\ h(G) &\leq p(G) + \max_i \sum_j k_{ij}(Q_{ij}), \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde  $\max_i \sum_j k_{ij}(Q_{ij})$  se determina basándose en (3.33), (3.34) y (3.39).

**Ejemplo 3.18.** Determinemos el número cromático  $h(G)$  del grafo  $G = \langle V, U \rangle$  con los siguientes parámetros:  $|V| = 90$ ,  $|U| = 1000$ ,  $p(G) = G$ ; la distribución de potencias de los vértices es tal: 20 vértices son de potencia 5; 61 vértices son de potencia 21, los demás 9 vértices tienen la potencia igual a 86.

Analicemos los casos de la descomposición de 6 en sumandos: 1)  $6 = 6 + 0$ ; 2)  $6 = 2 + 4$ ; 3)  $6 = 2 + 2 + 2$ ; 4)  $6 = 3 + 3$ .

**Caso 1.** Determinemos el orden máximo  $k_{\max}$  del grafo casi completo indescomponible  $Q(6, k_{\max})$  de densidad 6. Según (3.33),

$$k_{\max} = \left\lfloor \log_2 \left( \frac{90 - 6}{3} + 1 \right) \right\rfloor = 4.$$



Establezcamos si el grafo  $G$  prefijado puede contener el grafo casi completo  $Q(6, 4)$  según los recursos de aristas y la topología local (según las potencias de los vértices).

Tenemos:

$$|U| > 0,5 \cdot (7 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^4 \cdot (6 - 3) + (6 - 3)^2 -$$

$$- 6 + 2) = 0,5 \cdot (567 + 288 + 5) = 430,$$

$$|V_{\min}(Q(6, 4))| = 3(2^4 - 1) + 6 = 51,$$

$$(\forall v_i (v_i \in Q(6, 4)))(s(v_i)) \geq 6 + 4 - 1 = 9).$$

De este modo se obtiene la respuesta positiva. Por lo tanto, resulta determinada la estimación superior:  $h(G) \leq 10$ .

**Caso 2.** El grafo casi completo  $Q(q_{\max})$  de casi densidad máxima puede descomponerse en dos sumandos:

$$Q_a(2, k_a) + Q_b(4, k_b);$$

además,  $h(G) \leq 6 + \max(k_a + k_b)$ . Hallemos  $\max(k_a + k_b)$ . Para eso determinamos

$$k_a = \left\lceil \log_2 \left( \frac{(90 - 4) - 2}{3} + 1 \right) \right\rceil = 4,$$

$$|V_{\min}(Q(2, 4))|^3 = 3 \cdot (2^4 - 1) + 2 = 47.$$

El segundo sumando contiene 43 vértices:

$$90 - 47 = 43.$$

Cuando

$$k_b = \left\lceil \log_2 \left( \frac{43 - 4}{3} + 1 \right) \right\rceil = 3,$$

$$|V_{\min}(Q(4, 3))| = 3 \cdot (2^3 - 1) + 4 = 25,$$

$$(\forall v_i (v_i \in Q_a(2, 4)))(s(v_i)) \geq p_a + k_a - 1 +$$

$$+ |V_{\min}(Q_b(4, 3))| = 2 + 4 - 1 + 25 = 30),$$

$$(\forall v_i (v_i \in Q_b(4, 3)))(s(v_i)) \geq p_b + k_b - 1 +$$

$$+ |V_{\min}(Q(2, 4))| = 4 + 3 - 1 + 47 = 53).$$

En el grafo  $G$  no existen vértices de tales potencias. Continuamos los cálculos análogos y hallamos  $\max(k_a + k_b) = 2 + 2 = 4$ , es decir, el grafo  $G$  puede contener el grafo casi

completo  $Q(10)$  descomponible en forma de suma:

$$Q_a(2, 2) + Q_b(4, 2).$$

En efecto,

$$|V_{\min}(Q_a(2, 2))| = 3 \cdot (2^2 - 1) + 2 = 11,$$

$$|V_{\min}(Q_b(4, 2))| = 3 \cdot (2^2 - 1) + 4 = 13,$$

$$(\forall v_i \in Q_a(2, 2))(s(v_i)) \geq 2 + 2 - 1 + 13 = 16),$$

$$(\forall v_i \in Q_b(4, 2))(s(v_i)) \geq 4 + 2 - 1 + 11 = 16),$$

$$|U_{\min}(Q_a(2, 2))| + |U_{\min}(Q_b(4, 2))| + |V_{\min}(Q_a(2, 2))| \cdot |V_{\min}(Q_b(4, 2))| =$$

$$0,5 \cdot (7 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 \cdot (2 - 3) + (2 - 3)^2 - 2 + 2) + 0,5 \cdot (7 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 \cdot (4 - 3) +$$

$$+ (4 - 3)^2 - 4 + 2) + 11 \cdot 13 = 206.$$

En este caso, la estimación cromática  $h(G)$  no cambia. Ofrecemos al lector que él mismo examine los demás casos. En definitiva, obtenemos  $\max(k_a, k_b) = 4$ .

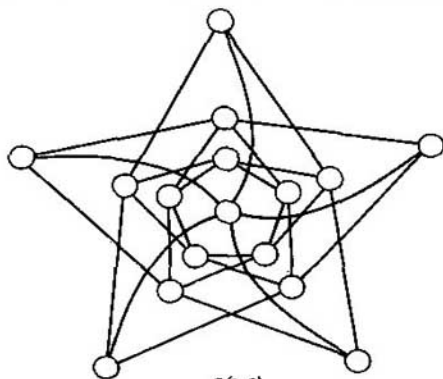
 $Q(2,2)$ 

Fig. 3.47

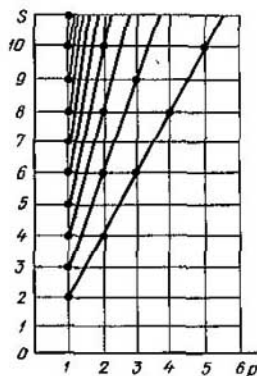


Fig. 3.48

Por lo tanto, debido a (3.46) y (3.49),  $6 \leq h(G) \leq 10$ . Empleando las estimaciones de Geller—Brooks obtendríamos el segmento  $[1, 86]$ ;  $1 \leq h(G) \leq 86$ .

Según (3.35), los grafos casi completos de casi densidad  $\alpha + 1$  son figuras prohibidas de la coloración de los vértices del grafo con  $\alpha$  colores. Citemos las propiedades de los grafos casi completos.

1<sup>o</sup>. *Propiedad de inclusión*

$$Q(p, k) \supset Q(i, j), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 0, \dots, k. \quad (3.50)$$

2<sup>o</sup>. *Propiedad idempotente de la capa sustituyente. Cambiando la capa sustituyente quedamos en la clase de los grafos casi completos, con tal que esta sustitución puede realizarse muchas veces (fig. 3.47).*

**Teorema 3.44.** *Si en vez cada vértice  $v_i$  de un grafo casi completo  $Q(q)$  ponemos uno de los elementos del conjunto  $\{Q_i(q_i)/q_i(Q_i) = \alpha\}$ , obtenemos el grafo casi completo  $Q(\alpha \cdot q)$ .*

**Teorema 3.45 (teorema de M.V.Gorbátova).** *El grafo casi completo  $Q(p, k)$ ,  $k > 1$ , no posee el carácter arista.*

Si un grafo posee carácter arista, su orden no supera 1. Cuando se construye el grafo derivado en arista  $\bar{G}$  según el grafo  $G$ , las aristas incidentes a un mismo vértice del grafo  $\bar{G}$  corresponden a los vértices de un subgrafo completo del grafo  $G$ .

Por consiguiente,

$$a \leq H(G) \leq s + 1, \quad (3.51)$$

donde  $H(G)$  es la clase cromática del grafo  $G$ ,  $s$  es su potencia,  $s = \max_i s(v_i)$ ,  $v_i \in G$ .

Para un multigrafo

$$s \leq H(G) \leq s + p, \quad (3.52)$$

donde  $p$  es paralelismo del multigrafo, o sea, el número máximo de aristas paralelas.

En la correlación (3.52), la potencia del grafo  $G$  y su paralelismo satisfacen las siguientes correlaciones (fig. 3.48):

$$\begin{cases} s \equiv 0 \pmod{p}, \\ s \neq p, \end{cases} \quad (3.53)$$

donde la notación  $s \equiv 0 \pmod{p}$  significa que el número  $s$  es compatible según el módulo  $p$  con el número 0. Según (3.52) y (3.53), obtenemos la estimación de Shannon.

$$H(G) \leq \left\lceil \frac{3}{2} s \right\rceil. \quad (3.54)$$

**Teorema 3.46.** *El grafo casi completo de casi densidad  $q$  contiene un subgrafo homeomorfo a un subgrafo completo, cuya densidad equivale a  $q$ .*

Este teorema permite enlazar la coloración de los grafos con la propiedad de su encaje en las superficies.

**Teorema 3.47.** *El grafo  $G(p, k)$ ,  $k > 1$ ,  $p > 2$  es no encajable en el plano.*

□ En efecto, el grafo  $G(p, k)$  contiene el subgrafo casi completo  $Q(3, 2)$  el cual, a su vez, contiene un subgrafo  $G_H(F(5))$  homeomorfo a un subgrafo completo de densidad 5:

$$G(p, k) \supset Q(3, 2) \supset G_H(F(5)).$$

Por consiguiente, según el teorema 3.17 el grafo  $G$  no es encajable en el plano. ■

**Teorema 3.48.** *El grafo  $G(p, k)$ ,  $p > 3$ ,  $k > 0$ , no es encajable en el plano.*

□ En efecto, el grafo  $G(p, k)$  contiene un subgrafo  $Q(4, 1)$ , cuya base y el vértice de la capa sustituyente se incluyen en el subgrafo  $G_H(F(5))$  homeomorfo a un subgrafo vacío de densidad 5:

$$G(p, k) \supset Q(4, 1) \supset G_H(F(5)).$$

Por consiguiente, según el teorema 3.17, el grafo  $G$  no es encajable en el plano. ■

A base de los teoremas 3.47 y 3.48, obtenemos la demostración del problema de cuatro colores (teorema 3.49).

**Teorema 3.49.** *El número cromático del grafo planar no supera a cuatro.*

□ Según el teorema 3.17, el grafo planar  $G$  no contiene el subgrafo  $G_H(F(5))$  homeomorfo a un subgrafo completo de densidad 5:  $G \not\supset G_H(F(5))$ . Por lo tanto, este grafo no contiene los subgrafos  $Q(3, 2)$  y  $Q(4, 1)$ . De aquí en virtud del teorema 3.41, el número cromático  $h(G)$  no supera a cuatro. ■

### § 3.9. Problemas y ejercicios

3.1. Demostrar la igualdad

$$S = (A^+) \cdot (P(A^-))$$

donde  $S$  es una matriz de adyacencia;  $A^+$  y  $A^-$  son matrices de incidencias inicial y final, respectivamente;  $P$  es una matriz diagonal de los pesos de los arcos;  $^T$  es el signo de transposición.

3.2. Demostrar que

$$S = \sum_{k=1}^q \xi_k \cdot R^k,$$

donde  $S$  es la matriz de adyacencia;  $R^k$  es la matriz del paso por los arcos de peso  $\xi_k$ .

3.3. Demostrar que un subgrafo  $G$  es un ciclo si, y sólo si, el producto matricial lógico (regla de multiplicación de fila por columna se define mediante la multiplicación ordinaria y la adición según el módulo dos) de la matriz de incidencia y la matriz ciclomática transpuesta es igual a la matriz cero.

3.4. Demostrar que las cadenas simples de longitud  $l$  ( $l < q$ ) de un grafo prefijado por una matriz de incidencia  $S$  se determina mediante la matriz  $S_q = \sum_{k=1}^q S^k$ .

3.5. Sea dado un transmisor que puede transmitir cinco señales:  $a, b, c, d, e$ . Al recibirlas cada una de estas señales puede interpretarse de dos maneras: la señal  $a$ : como  $p$  o  $q$ , la señal  $b$ : como  $q$  o  $r$ , la señal  $c$ : como  $r$  o  $s$ , la señal  $d$ : como  $s$  o  $t$ , la señal  $e$ : como  $p$  o  $t$ . ¿Qué número máximo de señales se puede recibir sin correr el riesgo de confundirlas una con otra?

3.6. Demostrar que

$$\alpha(G_a \times G_b) \geq \alpha(G_a) \cdot \alpha(G_b),$$

donde  $\alpha(G_i)$  es el número de estabilidad interior del grafo  $G_i = G_a, G_b$ .

3.7. Determinar el número de la estabilidad exterior de un grafo  $G$  prefijado por la matriz de adyacencia

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.8. ¿Cuántas reinas baste colocar en el tablero de ajedrez para que todo escaque del tablero esté amenazado de ataque por lo menos de una de ellas? Creemos que el escaque ocupado por una pieza está también bajo amenaza de ser atacado por esta pieza.

3.9. Demostrar que sobre  $n$  vértices dados se puede construir  $n^{n-2}$  árboles distintos.

3.10. En el grafo ponderado  $G$  prefijado por las matrices

$$S(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hallar el subgrafo conexo  $G'$  que tiene la suma minimal de los pesos de sus aristas.

**3.11.** Un vértice de un grafo se llama punto de articulación, si el grafo se hace inconexo al eliminar este vértice junto con sus aristas incidentes. Se denomina bloque un grafo conexo no trivial que no tiene puntos de articulación. ¿Puede ser bloque un grafo, cuyo número ciclomático  $\nu(G) = 2$ ? Poner un ejemplo del bloque, en el cual la eliminación de una arista conduce a la aparición del punto de articulación. ¿Existe un bloque, en el cual la aparición del punto de articulación se desprende de la eliminación de cualquiera de sus aristas?

**3.12.** Citar ejemplos de grafos conexos, para los cuales existen cortes cuyo número de aristas es igual al número de cuerdas de los esqueletos.

**3.13.** Demostrar que la eliminación de una arista perteneciente a cierto ciclo de un grafo conexo no hace este grafo inconexo.

**3.14.** Un grafo conexo se denomina de Euler, si en él existe una cadena cerrada que pasa por cada una de sus aristas (todas las aristas de la cadena son distintas). Mostrar que un grafo que contiene un puente no puede ser euleriano.

**3.15.** Un grafo se denomina hamiltoniano, si él contiene un ciclo simple de esqueleto. Poner ejemplos de los grafos que son de Hamilton y de Euler simultáneamente.

**3.16.** Hallar el número de esqueletos no isomorfos del grafo  $K_{2,3}$  de dos partes.

**3.17.** Demostrar que si un grafo es  $n$ -conexo, existe un par de vértices no adyacentes, entre los cuales se encuentran  $n$  cadenas simples no intersecantes en vértices. Mostrar que esta condición se cumple para cualesquiera dos vértices no adyacentes del grafo  $n$ -conexo. Dar un ejemplo del grafo 3-conexo.

**3.18.** Mostrar que la precisión de hasta el isomorfismo la tienen exactamente cuatro grafos (uno de los cuales es completo) sin aristas paralelas ni lazos sobre tres vértices, y once grafos, sobre cuatro vértices. Hallar el número de grafos sobre cinco vértices.

**3.19.** Se denomina núcleo arista de un grafo  $G$  un subgrafo que es la unión del conjunto de aristas  $y_i$  tales que las aristas de todo conjunto no son adyacentes dos a dos y  $|y_i| = \alpha_0(G)$ . Dar ejemplos de los grafos que no tienen núcleo arista.

**3.20.** Hallar condiciones necesarias, para las cuales el número de aristas en el grafo es igual al producto  $\alpha_0\beta_0$ .

**3.21.** Demostrar o refutar que para cualquier grafo conexo  $\beta_0 \leq \varepsilon_0$ .

**3.22.** Determinar  $\pi_1(K_{m,n})$  y  $\varepsilon_1(K_{m,n})$ .

**3.23.** Demostrar que el ciclo de longitud impar es incajable en un hipercubo  $n$ -dimensional.

**3.24.** Mostrar que el diámetro del  $n$ -cubo  $d(G_n)$  no puede ser mayor que  $n$ .

**3.25.** Sea que un grafo  $G$  comprende  $k$  cadenas simples no intersecantes en vértices entre dos vértices  $a, b \in G$ ; las longitudes de todas las cadenas son diferentes. ¿Bajo qué condición este grafo es cúbicable?

**3.26.** Determinar la densidad del grafo que es suma de una arista y un ciclo de longitud 5.

**3.27.** Hallar el número de la estabilidad interior para el grafo determinado en el ejercicio anterior.

**3.28.** Hallar el número de la estabilidad exterior para el grafo que es producto de una arista y un ciclo de longitud 4.

3.29. Hallar la coloración minimal de las aristas del grafo de Peterson.

3.30. ¿Posee el carácter arista el grafo que es suma de un vértice aislado y un ciclo de longitud 5?

3.31. Hallar el número cromático del grafo de Peterson.

## Comentarios

La teoría de los grafos en calidad de una parte de la matemática discreta tiene muchas interpretaciones. Se aplica con éxito en los problemas de control de la producción, para proyectar redes de los ordenadores, para diseñar módulos electrónicos modernos y proyectar sistemas físicos con parámetros localizados (acústicos, mecánicos, eléctricos), para resolver problemas de genética y problemas de automatización de la proyección (SAPR). La teoría de los grafos es la base del apoyo matemático de los sistemas modernos de procesamiento de la información. Esta teoría se aplica con éxito en las investigaciones nucleares (técnica de diagramas de Feynman), etc.

Información más detallada sobre los modelos teóricos de grafos y sus suplementos se la puede hallar en la literatura de bibliografía.