Yu M. KORSHUNOV

FUNDAMENTOS MATEMATICOS de la CIBERNETICA

·ИЗДАТЕЛЬСТВО·МИР·

Ю. М. КОРШУНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭНЕРГИЯ“
МОСКВА

Yu. M. KORSHUNOV

FUNDAMENTOS MATEMATICOS de la CIBERNETICA

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

TRADUCIDO DEL RUSO
POR EL INGENIERO
ROBERTO LANIER
ALVAREZ

Impreso en la URSS

На испанском языке

INDICE

PARTE SEGUNDA

OPTIMIZACION DE LOS PROCESOS DE MANDO

PRÓLOGO

Las nuevas corrientes científicas surgidas en los últimos años que se abarcan con la palabra "cibernética", encuentran su aplicación más vasta en la rama de la automática y telemecánica. En las disciplinas explicadas en esta especialidad se reflejan las cuestiones de la teoría de la información, teoría de la detección estadística de señales, teoría de los sistemas óptimos, teoría de los dispositivos automáticos terminales, así como una serie de principios basados en las teorías de los juegos y de las decisiones estadísticas.

Sin embargo, la exposición de los asuntos de cibernética en cursos especiales tropieza con la seria dificultad de que el curso tradicional de matemáticas superiores de los centros de enseñanza superior técnica, que hace hincapié en lo continuo y determinado, no brinda el fundamento requerido para el estudio de estas nuevas disciplinas cuya base descansa en lo discreto y aleatorio. Estos asuntos pueden exponerse en las disciplinas "Fundamentos Matemáticos de la Cibernética" o "Fundamentos Teóricos de la Cibernética". No obstante, en la actualidad no hay libros de texto algunos sobre estas asignaturas.

La presente obra constituye el primer intento de subsanar esta deficiencia existente. Ella ha sido preparada fundamentándose en la enseñanza de dicha disciplina a los estudiantes de la especialidad de Automática y Telemecánica y de otras especialidades afines en el Instituto Radiotécnico de Riazán.

El libro consta de la introducción y de dos partes que comprenden diez capítulos.

En la introducción, además del concepto de sistema cibernético, se brindan algunos datos sobre los sistemas de comunicación y control, lo que permite ilustrar ciertos métodos matemáticos con ejemplos afines a la especialidad.

En la primera parte se exponen varios capítulos de las matemáticas muy necesarios al ingeniero pero no incluidos en el programa de matemáticas superiores de los centros de enseñanza superior técnica. El material de la primera parte tiene gran valor independiente, ya que permite resolver una serie de tareas de gran importancia práctica en la esfera de la automática y telemecánica.

No obstante, la elección del contenido se ha realizado de tal modo que la primera parte sirve de introducción matemática a la segunda parte dedicada a la optimización de los procesos de control y que tiene por objetivo introducir al estudiante en el círculo de conceptos de la teoría de control moderna.

Por supuesto que en un libro de volumen limitado como éste sólo fue posible reflejar una pequeña parte de los conceptos y métodos utilizados en cibernética. Esto se refiere tanto a la primera parte de la obra como, en particular, a la segunda. En especial, la optimización de los procesos de control que viene a ser parte esencial de la teoría general del control, se basa en gran medida, en el análisis matemático y el cálculo de variaciones clásicos. Los métodos de optimización del control elaborados sobre dicha base, estudiados por lo común en el curso "Teoría del control automático" y en algunos cursos especiales, no han sido examinados detalladamente en las páginas de la obra presente. La atención principal se ha prestado a aquellas ideas y métodos que surgieron gracias al desarrollo de la cibernética y la aparición de las calculadoras numéricas. Por otra parte, también en estas cuestiones el autor, en varios casos, se ha visto obligado a limitarse sólo al bosquejo esquemático de las ideas fundamentales.

En necesario señalar también que aunque casi todos los métodos estudiados se ilustran con ejemplos y problemas, los métodos numéricos de cálculo sólo pueden dominarse con éxito a base de la resolución independiente de problemas, lo que puede garantizarse realizando clases prácticas y distribuyendo tareas de cálculo sobre este curso.

El autor considera un deber expresar su gratitud a los críticos L. T. Kuzin y D. A. Pospélov, así como al redactor N. I. Glazunov cuyas valiosas observaciones contribuyeron a mejorar el contenido de la obra.

El autor

INTRODUCCIÓN

1-1. OBJETO DE LA CIBERNETICA

La cibernética es una ciencia joven que surgió en los primeros años después de la Segunda Guerra Mundial y se desarrolló tan impetuosamente que en la actualidad ha conquistado posiciones firmes en muchas ramas de la ciencia y de la técnica. La cibernética debe sus éxitos al descubrimiento de una serie de analogías entre el funcionamiento de los dispositivos técnicos, la actividad vital de los organismos y el desarrollo de las colectividades de seres vivos. La cibernética reforzó estas analogías derivadas de razonamientos generales de carácter metodológico, creando métodos matemáticos que permitían describir desde un punto de vista cuantitativo, los procesos que ocurren en sistemas de la naturaleza física más diversa. Los principios de la cibernética encuentran vasta aplicación en automática y telemecánica, teoría de la comunicación, economía, sociología, biología y medicina.

La propia palabra "cibernética" es de origen griego. Los antiguos griegos designaban con esta palabra el arte de gobernar las naves. En el siglo XVIII el término "cibernética" se utiliza por el eminente físico y matemático A. M. Ampère para definir la ciencia de gobernar el Estado. En su interpretación contemporánea se entiende por cibernética la ciencia del control en el sentido más amplio de esta palabra. La acepción presente del término "cibernética" está vinclulada al nombre del gran matemático norteamericano N. Wiener, cuya obra "Cibernética o control y comunicación en el Animal y la Máquina", que vio la luz en 1948, dio inicio a la formación de esta nueva disciplina científica.

La aparición de la cibernética como ciencia del control, está ligada al progreso técnico general que caracteriza el desarrollo de las fuerzas productivas en la época actual.

Antes de surgir la cibernética, las principales direcciones del desarrollo de la técnica se caracterizaban, en primer lugar, por la creación de dispositivos que servían para obtener y transformar la energía (por ejemplo, máquinas de vapor, turbinas, generadores de energía eléctrica, motores eléctricos y de otros tipos, etc.) y, en segundo, por la creación de dispositivos destinados a influir sobre la naturaleza circundante. En tales dispositivos la atención principal está puesta en las relaciones energéticas siendo el rendimiento el índice más importante de su funcionamiento. La sencillez relativa de los dispositivos técnicos no situaba en un lugar particular el problema del control de los mismos. El hombre trabajaba y mandaba simultáneamente el objeto de su trabajo. La información requerida para el mando la obtenía directamente de sus órganos sensitivos, observando los resultados de su trabajo.

Sin embargo, el progreso de la técnica condujo a mediados del siglo XX a la creación de sistemas técnicos tan complejos que los problemas del control de los mismos comenzaron a superar las posibilidades fisiológicas del ser humano. A finales de la Segunda Guerra Mundial tal problema fue la creación de un sistema de mando automático del fuego antiaéreo, que, siendo las velocidades de los aviones comparables a la velocidad del proyectil antiaéreo, podría seguir el curso de los aviones, realizar el cálculo de sus trayectorias y apuntar los cañones sin la intervención del hombre. En tales sistemas se promueven a primer plano los problemas de la obtención de información sobre las condiciones ambientales y de la elaboración de dicha información con el objeto de extraer de ella datos útiles para el control y del empleo de dicha información para realizar actividades orientadas hacia una finalidad determinada, o sea, los problemas de la creación de dispositivos que sirvan para la *comunicación* y el *control*. La necesidad de resolver estos problemas provocó un rápido progreso en la esfera de la teoría de la comunicación, técnica de cálculo y automática, lo que dio inicio al desarrollo de aquellas ideas que posteriormente constituyeron el fundamento de la cibernética.

Los dispositivos de comunicación y control difieren substancialmente de los dispositivos técnicos apuntados más arriba, en el sentido de que en éstos, las relaciones energéticas no juegan un papel primordial y se presta atención principal a su capacidad de transmitir y elaborar sin distorsiones grandes cantidades de información. Así, en una línea de radiocomunicación, sólo llega al receptor una parte ínfima de la energía irradiada por la antena del radiotransmisor y el rendimiento resulta sumamente bajo. No obstante, la línea de radiocomunicación se considera buena si los mensajes se transmiten por la misma con pequeñas distorsiones y no están sometidos a la influencia de las interferencias. De este modo, los procesos fundamentales en los dispositivos de comunicación y de control, son los de transmisión y elaboración de la información y no los procesos relacionados con la transformación y utilización de la energía.

La carencia de importancia de las relaciones energéticas en los problemas de comunicación y de control permite abstraerse de las particularidades físicas de los portadores de la información y de la naturaleza física de los sistemas en los cuales se utiliza dicha información. Por eso la cibernética es la teoría general de la comunicación y el control, aplicable a cualquier sistema, independientemente de su naturaleza física.

El concepto de *sistema*, además del concepto de *control* cuyo sentido exacto será aclarado más adelante, es el concepto fundamental de la cibernética. Cualquier sistema real existente consta de objetos concretos, en calidad de los cuales pueden intervenir dispositivos técnicos, individuos que mandan dichos dispositivos, recursos materiales, etc. Estos objetos están vinculados entre sí y con el mundo circundante mediante determinados enlaces que constituyen fuerzas y flujos de energía, materia e información. Pero la cibernética prescinde del contenido físico de las propiedades de los objetos y enlaces considerando el sistema real como un conjunto abstracto de elementos dotados de propiedades comunes que se encuentran en ciertas relaciones mutuas determinadas por el carácter de los enlaces existentes. Tal concepción permite renunciar a la división acostumbrada de los sistemas en mecánicos, eléctricos, químicos, biológicos, etc., e introducir el concepto de sistema cibernético abstracto como conjunto de elementos interrelacionados que influyen unos sobre otros. En la figura I-1 se da un ejemplo de sistema cibernético que consta de cuatro elementos y seis enlaces mutuos.

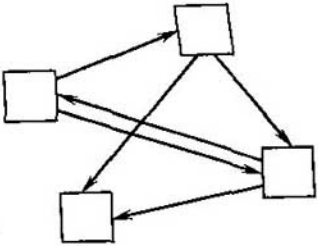

Fig. I-1. Ejemplo de un sistema cibernético

El examen del sistema como conjunto de elementos posibilita la utilización de la teoría de los conjuntos como instrumento para su descripción matemática. Por cierto, en algunos casos de importancia es conveniente emplear la lógica matemática como instrumento para describir los enlaces entre los elementos. Por eso, la teoría de los conjuntos y la lógica matemática, con cuya exposición se inicia la presente obra, constituyen la base de la descripción matemática de un sistema.

Los sistemas que se encuentran en la práctica se dividen, atendiendo a la estructura y el carácter de sus enlaces, en determinados y probabilísticos. Se denomina determinado el sistema cuyas leyes de movimiento se conocen con exactitud y su comportamiento futuro puede preverse. Para un sistema probabilístico es imposible hacer un pronóstico preciso de su comportamiento futuro. El mecanismo de la relojería puede servir de ejemplo de un sistema determinado. Sin embargo, los sistemas de control estadístico de la producción, los sistemas de arribo de buques a los puertos marítimos o la reserva de mercancías en un almacen que tiene un gran número de suministradores y consumidores son sistemas probabilísticos.

Los problemas que resuelve la cibernética conducen en la mayoría de los casos a la necesidad de examinar sistemas probabilísticos bastante complejos que constan de un gran número de elementos y tienen enlaces internos variados y ramificados. Precisamente a tales sistemas pertenecen la mayoría de los sistemas industriales, los sistemas económicos, sociales y biológicos. Para la descripción matemática de tales sistemas, además de la teoría de los conjuntos y la lógica matemática, se utilizan ampliamente como instrumento la teoría de las probabilidades y los métodos de estadística matemática.

Hasta ahora sólo nos hemos referido a los métodos matemáticos empleados para describir sistemas cibernéticos. Pero el objetivo de la cibernética es el control de los sistemas. Para juzgar sobre las vías de solución de tal tarea es necesario comprender con claridad el sentido del término "control".

En el amplio sentido de la palabra, se entiende por *control* la actividad organizativa encaminada a la consecución de objetivos determinados que ejecuta las funciones de dirección del trabajo ajeno. El proceso de control consiste en la toma de decisiones sobre las acciones más convenientes en una u otra situación creada. La persona que lleva a cabo el control toma sus decisiones evaluando las condiciones ambientales con ayuda de la información recibida de sus órganos sensitivos, los instrumentos de medida u otras personas. En muchos casos esta información resulta insuficiente para la estimación unívoca de las condiciones ambientales. Entonces el hombre utiliza su experiencia, conocimientos, memoria e intuición. Es un excelente rasgo característico del ser humano, su capacidad para tomar decisiones en situaciones de una considerable indeterminación en lo que respecta a las circunstancias ambientales.

No obstante, en las condiciones de las grandes empresas industriales modernas, incluso los conocimientos y la intuición de un dirigente experimentado resultan insuficientes para realizar un control eficaz. Como resultado surgen deficiencias en el funcionamiento de las grandes empresas tales como el trabajo "a la carrera", dificultades con el suministro regular de materias primas y materiales sin el aumento excesivo de las reservas, problemas de transporte, etc.

La cibernética se plantea la tarea de facilitar al hombre el proceso de la toma de decisiones de importancia, encomendando a los dispositivos automáticos la recogida y elaboración de grandes cantidades de información respecto al estado del proceso de producción, el análisis de las situaciones creadas y la elaboración de recomendaciones acerca de las acciones dirigidas a cierta finalidad. Los dispositivos automáticos que ejecutan el conjunto de tales operaciones se denominan sistemas automáticos de control. El funcionamiento de tales sistemas se basa en el empleo de las calculadoras electrónicas numéricas (C. E. N.).

El papel de las C. E. N. en la cibernética resulta tan importante que es menester detenerse para estudiar más detalladamente esta cuestión.

Inicialmente las C. E. N. se utilizaban para realizar cálculos tradicionales que antes ocupaban muchas horas y ahora sólo requerían segundos. Pero pronto se hizo evidente que enorme aumento de la velocidad de los cálculos entrañaba efectos cualitativamente nuevos. Si antes el proyectista o el economista sólo podía analizar algunas, de las variantes de solución, que por ciertos motivos le parecieron dignas de atención, ahora se presentaba la oportunidad de comparar todas las variantes posibles y elegir la mejor de todas. Así surgieron las ideas de la optimización que posteriormente condujeron al desarrollo de una serie de nuevos capítulos de las matemáticas.

Luego resultó que la C. E. N. instalada en una empresa industrial es capaz de elaborar con facilidad grandes cantidades de información sobre la marcha del proceso de producción y puede convertirse en ayudante insustituible del hombre en la administración de la producción.

No obstante, para que las C. E. N. puedan ser utilizadas con fines de control, deben ser elaborados métodos matemáticos que permitan analizar los tipos de información existentes, desechar la información superflua y separar su parte más substancial, empleando esta información para estimar las situaciones creadas y preparar recomendaciones que garanticen el cumplimiento más efectivo de los objetivos del control. La necesidad de resolver problemas análogos provocó la aparición de tales capítulos de las matemáticas como la teoría de la información, teoría de los juegos, teoría de las decisiones estadísticas, teoría de colas, la programación lineal y dinámica y otros. En la presente obra se estudiará una parte de estos nuevos métodos matemáticos. Los demás métodos se estudian en diferentes cursos especiales.

1-2. TRANSMISION Y CODIFICACION DE LA INFORMACION

Los enlaces entre los elementos de cierto sistema pueden servir para distintos objetivos. Por los mismos pueden transmitirse energía, materia, esfuerzos, etc. Pero en los sistemas cibernéticos nos interesa, en primer lugar, el contenido informativo de los enlaces, es decir, la posibilidad de utilizar dichos enlaces para transmitir datos sobre los diversos estados de los elementos del sistema.

En técnica, cualquier dato sobre algún suceso ocurrido dentro o fuera del sistema se denomina *mensaje*. Los enlaces informativos que sirven para transmitir los mensajes se denominan *canales de comunicación*. Los portadores físicos de la información en los canales de comunicación se llaman *señales*. En la figura 1-2 se muestra un esquema estructural que representa un canal de comunicación.

La palabra "señal" procede de la voz latina *signum*, o sea, que denota símbolos convencionales eléctricos, acústicos, o de otra naturaleza que sirven para transmitir mensajes. El tipo de las señales es, por lo general, el resultado de un acuerdo entre el hombre que transmite la información y el que la recibe y no guarda relación directa con el contenido de la información transmitida. Por eso las señales pueden convertirse fácilmente de un tipo a otro sin alterar su contenido informativo y también pueden almacenarse (por ejemplo, en forma de registro literal) para utilizar en el futuro dicho contenido.

Por ejemplo, examinemos el tipo de señales empleadas al transmitir un telegrama. El mensaje inicial impreso en el formulario telegráfico, se convierte a la forma del código Morse que

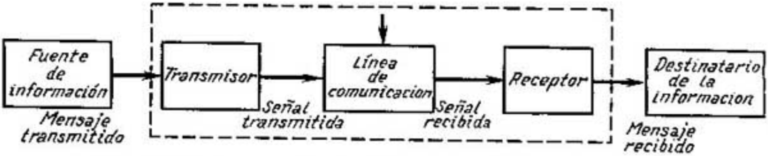

Fig. I-2. Esquema estructural de un canal de comunicación

consta de puntos y rayas transmitidos mediante impulsos de corriente, largos y cortos, por la línea de comunicación. En la parte de recepción, por los impulsos captados, se regenera el texto inicial del mensaje. Como vemos, en este caso el mensaje existe en calidad de señales de diferente forma: de texto literal, puntos y rayas del código Morse, impulsos de corriente en la línea de comunicación, etc. La conversión de una señal de una forma a otra se denomina *codificación*.

El método para realizar una comunicación puede representarse del modo siguiente. Ante todo debe existir un grupo de símbolos: letras, palabras, puntos, rayas, etc., que tengan un sentido conocido tanto por el remitente como por el destinatario del mensaje. El grupo de tales símbolos se denomina *alfabeto*. Los propios símbolos se determinan por convenio de las partes.

La teoría de la comunicación se basa en el postulado de que los símbolos componentes de alfabeto no pueden ser infinitamente diversos. Por eso, para la transmisión de mensajes cualesquiera se utiliza un número limitado de símbolos diferentes. Así, todos los mensajes literales posibles en lengua rusa se componen con ayuda de un alfabeto de 33 letras.

Durante el proceso de transmisión el remitente elige del alfabeto existente un símbolo tras otro, los convierte en las señales correspondientes y las transmite por el canal de comunicación. En el canal de comunicación, las señales se someten a la influencia de las interferencias, lo que provoca su distorsión. Así, las señales en la parte de recepción van a diferir de las señales enviadas al canal de comunicación.

El proceso de recepción consiste en que el destinatario, al recibir cualquier señal, debe identificarla con uno de los símbolos existentes del alfabeto, o sea, debe excluir todos los demás símbolos, salvo uno. Esta tarea puede presentar considerables dificultades si en el canal de comunicación las señales se someten a grandes distorsiones. Los métodos para superar estas dificultades constituyen la esencia de la teoría de la comunicación.

En los sistemas técnicos de comunicación se emplean alfabetos de varios tipos. Sin embargo, por diversos motivos, tiene gran empleo el *alfabeto binario* que sólo utiliza dos tipos de símbolos designados convencionalmente por 0 y 1. En el alfabeto binario cualquier mensaje va a constituir una sucesión de ceros y unidades, por ejemplo 100110100.

Es fácil calcular que el número total de mensajes que constan de m letras del alfabeto binario, será igual a 2^m. En particular, cualquier letra del alfabeto puede representarse por seis signos del alfabeto binario, por ejemplo: a, 000001; b, 000010; c, 000011, etc. Como que seis signos binarios proporcionan $2^6 = 64$ diferentes combinaciones de símbolos, con su auxilio pueden representarse no sólo todas las letras del alfabeto, sino también los signos de puntuación. Por consiguiente, con ayuda del alfabeto binario puede representarse y transmitirse por un canal de comunicación cualquier mensaje literal.

El alfabeto binario puede utilizarse asimismo para transmitir datos numéricos, pero en tal caso resulta necesario emplear ciertos sistemas de numeración especiales.

En el sistema de numeración decimal ampliamente utilizado, los diversos números se escriben con ayuda de diez cifras, 0, 1, ... , 9, dispuestas en determinado orden y que tienen valores dependientes de la ubicación de cada cifra. Así, la inscripción 395 representa el número definido por la expresión

$$3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Aquí, el número 10 se denomina *base* del sistema de numeración.

Análogamente, cualquier número N puede escribirse en un sistema de numeración de cualquier otra base R (número entero), con ayuda de distintas cifras cuyo número es igual a la base del sistema de numeración. En tal caso la inscripción $\ldots d_3 d_2 d_1 d_0$, donde d_i son las cifras del número $N (0 \leqslant d_i < R)$, define la magnitud

$$N = \ldots d_3 R^3 + d_2 R^2 + d_1 R^1 + d_0 R^0. \qquad \text{(I-1)}$$

Así, en el sistema de numeración óctuple que se emplea en ciertos tipos de calculadoras numéricas, el número 395 tendrá el aspecto

$$6 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0,$$

es decir, se escribirá en forma del número 613.

En caso de utilizarse el alfabeto binario, la inscripción del número deberá efectuarse sólo mediante las cifras 0 y 1. Sirve para dicha notación el sistema de numeración binario cuya base es el número 2. Cualquier número del 0 al 15 puede representarse en el sistema de numeración binario por medio de un número de cuatro dígitos:

$$3 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, \text{ o sea, } 0011;$$
$$5 = 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, \text{ o sea, } 0101;$$
$$9 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, \text{ o sea, } 1001.$$

Naturalmente, no es imprescindible escribir los ceros de órdenes superiores de estos números, es decir, los números 3 y 5 pueden escribirse en forma de 11 y 101. El número 395, que puede ser representado por medio de la base 2:

$$395 = 2^8 + 2^7 + 2^3 + 2^1 + 2^0,$$

se escribirá en el sistema de numeración binario con un número de nueve dígitos 110001011.

La anotación de números grandes en el sistema de numeración binario presenta el inconveniente porque requiere una gran cantidad de dígitos, lo que dificulta la lectura de los números y la estimación rápida de su magnitud. Es por ello que con frecuencia se emplean sistemas de numeración mixtos, por ejemplo, el decimal-binario, en el cual el propio número se escribe en el sistema de numeración decimal y sus diferentes dígitos, en el sistema de numeración binario, utilizando cuatro dígitos binarios para cada cifra decimal. De este modo, en el sistema de numeración decimal-binario, el número 395 tiene el aspecto:

$$\underbrace{0011}_{3} \qquad \underbrace{1001}_{9} \qquad \underbrace{0101}_{5}.$$

1-3. CONCEPTO DE SISTEMA CONTROLADO

Como se desprende de la definición del concepto de control, dada más arriba, cualquier sistema controlado puede representarse en forma de un conjunto de dos partes: la parte controlada denominada también *objeto* controlado, y la parte que controla llamada *dispositivo de control* u *operador*.

Cada objeto controlado se caracteriza por determinadas propiedades:

1) la existencia de una determinada designación orientada hacia una finalidad que se manifiesta en la capacidad de dar cualquier resultado beneficioso;

2) el estado del objeto que se manifiesta en tipos concretos de movimiento y puede cambiar al variar las condiciones ambientales en las cuales se halla el objeto;

3) la capacidad de ser controlable, es decir, la capacidad del objeto de reaccionar a las influencias externas ejercidas sobre sus órganos especiales, los órganos de control.

La tarea del operador consiste en garantizar el cumplimiento por el objeto de su finalidad actuando sobre los órganos especiales, los órganos de control. Para ello debe ocurrir un intercambio de información entre el operador y el objeto controlado. Constituyen tal información, por un lado, las señales de mando con cuya ayuda el operador influye sobre el objeto controlado, o sea, la *información de mando* y, por otro lado, los datos sobre el estado del objeto

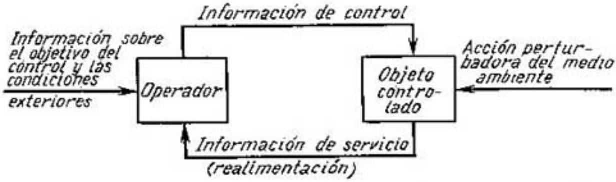

Fig. I-3. Circulación de la información en el sistema controlado

controlado a base de los cuales el operador determina el tipo de señales de mando, es decir, la *información de servicio*.

En la figura I-3 se muestra el esquema estructural que presenta los flujos de información principales en el sistema controlado. En dicho esquema, además de los flujos de circulación de las informaciones de mando y de servicio dentro del sistema, se presenta el enlace del objeto controlado y del operador con el medio ambiente. La variación de las condiciones ambientales ejerce una influencia inmediata sobre el objeto controlado provocando el cambio del carácter de su movimiento y dificultando el cumplimiento de su finalidad. Para controlar con acierto el objeto, el operador debe recibir información sobre las condiciones ambientales, tomarla en consideración al elaborar las señales de mando y disponer también de información sobre la finalidad del control.

La información de mando se obtiene elaborando todo tipo de datos que llegan al operador. Una parte de la información puede almacenarse para ser utilizada posteriormente. Puede ejecutar las funciones de operador una persona o un dispositivo mecánico o electrónico. En los últimos tiempos es frecuente que las calculadoras electrónicas universales o especializadas jueguen el papel de operador.

En el objeto controlado ocurre el proceso de elaboración de la información de mando que se manifiesta en el cambio del carácter del movimiento de dicho objeto. Estos cambios se transmiten por el canal de realimentación al operador en forma de información de servicio.

La *realimentación* juega un papel importantísimo en la realización de un mando eficaz, ya que brinda al operador la posibilidad de juzgar constantemente en el proceso de control, en qué medida se ha logrado la finalidad del control, y de acuerdo con esto, elaborar de modo más racional las señales de mando. Por eso, el principio de realimentación es el fundamento de la inmensa mayoría de los procesos de control, y en particular, la base de casi toda la actividad del ser humano. Por ejemplo, si una persona extiende la mano para tomar de la mesa un lápiz, ella realiza de modo inconsciente e ininterrumpido la comparación de la situación mutua de la mano y el lápiz, gracias a lo cual el movimiento resulta muy preciso.

El objeto del curso "Teoría del control automático" es el estudio detallado del principio de realimentación. La tarea del curso "Fundamentos Matemáticos de la Cibernética" es el análisis de los métodos de descripción matemática de los sistemas de control automáticos y la explicación de los procedimientos y métodos de toma de decisión en los cuales se basa el diseño de dispositivos de control.

Aclararemos el esquema general del proceso de control mediante ejemplos de sistemas de diversa naturaleza física.

Ejemplo I-1. El regulador centrífugo de la velocidad de una máquina de vapor (fig. 1-4). En el sistema dado el regulador centrífugo de velocidad juega el papel de operador. El órgano de control es la mariposa que regula el paso del vapor a la máquina de vapor. Antes de comenzar el funcionamiento del

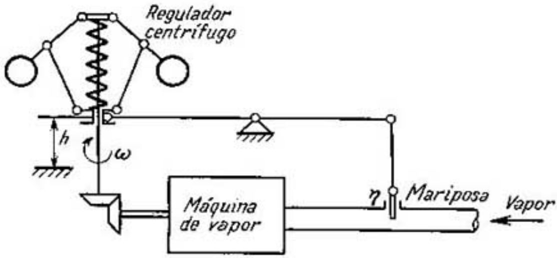

Fig. I-4. Esquema de regulación de la velocidad de la máquina de vapor

regulador debe introducirse en él información sorbe la finalidad del control lo que se logra ajustando el regulador para mantener una velocidad de rotación determinada ω_0 mediante la ubicación correspondiente de los pesos y el cambio de la tensión de los muelles. La información de servicio sobre la velocidad de rotación real de la máquina de vapor ω, se transforma por el regulador centrífugo en cambio de posición del manguito h y dicha información de servicio se convierte por medio de una palanca en información acerca de la posición de la mariposa que acciona sobre el acceso del vapor a la máquina y cambia de este modo su velocidad de rotación. La influencia del medio ambiente se manifiesta aquí en forma de variación de la carga de la máquina de vapor, lo que provoca el cambio de su velocidad de rotación.

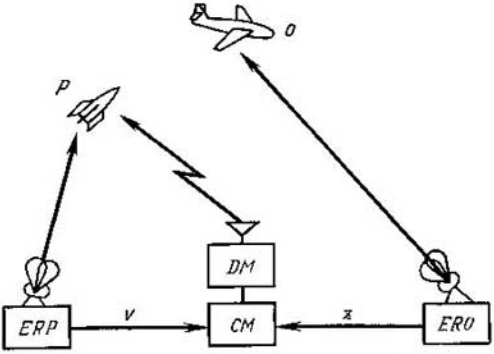

Fig. 1-5. Sistema de mando de un proyectil antiaéreo teleguiado

Ejemplo I-2. El jefe de movimiento del transporte ferroviario. En el ejemplo dado, cumple la función de operador la persona jefe de movimiento que hallándose en el puesto de gobierno recibe por el selector o teléfono la información de servicio sobre el estado de los trenes en aquel sector de la línea del cual es responsable. Esta información consiste en datos acerca de la disposición para la partida de un tren de turno, el retraso de un tren con respecto al gráfico de marcha de los trenes, la necesidad de partida de un tren fuera de turno (no previsto en el gráfico), el grado de carga de la línea, etc. La obligación del jefe de movimiento consiste en transformar la información recibida y elaborar decisiones encaminadas al cumplimiento óptimo del gráfico de marcha de los trenes. Esta información de control consta de disposiciones para los maquinistas o jefes de estaciones sobre el orden ulterior del movimiento de los trenes (sobre la aceleración o deceleración de la marcha de los trenes, la maniobra del paso de los mismos a los apartaderos, etc.).

Ejemplo I-3. El mando del prouectil antiaéreo. En calidad de ejemplo del sistema automático en el cual juegan el papel de operador dispositivos calculadores electrónicos, en la figura I-5 se muestra el esquema funcional de mando de un proyectil antiaéreo teledirigido a un objetivo móvil. En este sistema, la información de servicio está contenida en las señales suministradas por la estación de radiodetección E. R. O., que determina las coordenadas del objetivo móvil O y por la estación de radiodetección E. R. P., que determina las coordenadas del proyectil P que se mueve hacia el objetivo. Basándose en estos tipos de información, la calculadora de mando elabora las señales que llegan por la línea de radio al dispositivo de mando del proyectil antiaéreo y que corrigen su movimiento según la posición mutua del proyectil y el objetivo.

PROBLEMAS PARA LA INTRODUCCION

I-1. Un sistema consta de siete elementos, cada uno de los cuales se comunica con todos los demás mediante enlaces del tipo más sencillo que tienen sólo dos estados: "hay enlace" y "no hay enlace". ¿Cuál es el número posible de estados de tal sistema? Si es preciso indicar mediante un experimento todos los estados que poseen la propiedad P y para investigar cada estado se requiere 1 s, ¿cuánto tiempo se necesitará para investigar todos los estados posibles?

I-2. ¿En cuánto disminuye el número de estados posibles del sistema en el problema 1, si sólo hay enlaces direccionales sucesivos (fig. I-6, *a*) o el sistema tiene estructura jerárquica (fig. I-6, *b*)? Cite ejemplos de sistemas que tengan estructuras de ambos tipos.

I-3. El polinomio (I-1) que sirve para la representación de un número en el sistema de numeración de base R, puede escribirse en la forma

$$N = \{[(\ldots d_3) R + d_2] R + d_1\} R + d_0, \tag{I-2}$$

lo que equivale a la secuencia de fórmulas

$$N = N_1 R + d_0, \quad N_1 = N_2 R + d_1, \quad N_2 = N_3 R + d_2 \; \ldots$$

Fundamentar con ayuda de estas fórmulas la siguiente regla de conversión del número 395 de la forma decimal a la óctuple

$$\begin{array}{rl} 395:8 = 49 & \text{resto } 3 \\ 49:8 = 6 & \text{resto } 1 \\ 6:8 = 0 & \text{resto } 6 \end{array} \qquad \text{o más brevemente} \qquad \begin{array}{r|l} 395 & \\ 49 & 3 \\ 6 & 1 \\ 0 & 6, \end{array}$$

lo que da el número óctuple 613.

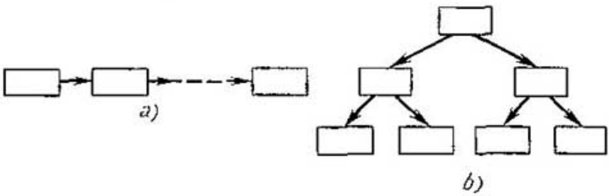

Fig. I-6. Sistemas con enlaces sucesivos (*a*) y estructura jerárquica

¿Cómo formularía Ud. la regla para convertir un número de la forma decimal en la binaria?

I-4. Escriba en los sistemas de numeración binario, óctuple y sexadecimal los números siguientes (dados en el sistema de numeración decimal):

$$27, \quad 467, \quad 519, \quad 1\,263.$$

Nota. Emplear las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* del alfabeto romano como cifras del 10 al 15 del sistema de numeración sexadecimal.

I-5. Escriba los números del problema I-4 en los sistemas de numeración decimal-binario y óctuple-binario. ¿Cuántas cifras binarias tuvo que utilizar Ud. para escribir una cifra óctuple? ¿Cuál de estos dos sistemas de notación de números es más económico desde el punto de vista del número de cifras binarias utilizadas?

I-6. Tienen o no circuito de realimentación los siguientes sistemas de control del tráfico urbano:

1) con ayuda de un semáforo en el cual se encienden sucesivamente las luces roja, amarilla y verde durante un tiempo previamente convenido;

2) con ayuda de un policía de tráfico.

I-7. Halle el circuito de realimentación en los esquemas de las figuras I-4 e I-5.

INDICE DE NOTACIONES

$\{\ldots\}$	conjunto
$\in$	pertenencia al conjunto
$\notin$	no pertenencia al conjunto
$\subseteq$	símbolo de inclusión
$\subset$	símbolo de inclusión estricta
$\cup$	unión de conjuntos
$\cap$	intersección de conjuntos
$\setminus$	diferencia de conjuntos
$\times$	producto directo de conjuntos
$\overline{X}$	complemento del conjunto X
X^s	potencia del conjunto
$\varnothing$	conjunto vacío
I	conjunto universal
R	conjunto de números reales
$\mathfrak{M}$	sistema de conjuntos
$\sup M$	límite superior del conjunto M
$\inf M$	límite inferior del conjunto M
$\mathrm{Pr}_i\, M$	proyección del conjunto sobre el eje i
$(a_1, \ldots, a_n)$	conjunto ordenado (cortejo, vector)
Λ	cortejo vacío
$\forall$	cuantificador de generalidad
$\rightleftarrows$	equivalencia por definición
$\rightarrow$	consecuencia, reflejo
$f \circ g$	composición de las funciones f y g
$\equiv$	símbolo de relación de equivalencia
$\leqslant$	símbolo de relación de orden
$\prec$	símbolo de relación de orden estricto
$\gg$	símbolo de relación de predominio
$d(x, y)$	distancia entre elementos del conjunto
$\|x\|$	norma de la magnitud x
E_n	espacio euclídeo n-dimensional
$C_{[a,\, b]}$	espacio de funciones continuas
x/y	función de Sheffer
$\bar{x}$	negación de la enunciación x
$\oplus$	adición por el módulo 2

Z	espacio de resultados del experimento
z	resultado del experimento, magnitud aleatoria
$\overset{\circ}{z}$	magnitud aleatoria centrada
$p(z),\ z \in Z$	distribución de las probabilidades en el espacio Z
$P(S),\ P_S$	probabilidad de un suceso
$p(z/S)$	distribución condicional de probabilidades
$p(y, z)$	distribución conjunta de probabilidades
$\bar{z},\ \nu,\ M(z),\ \overline{f(z)}$	valor medio
$\sigma,\ \sigma_z$	desviación cuadratica media
$R(\nu, \omega)$	distribución uniforme
$N(\nu, \sigma^2)$	distribución normal
$w(r, n, p)$	distribucion binomial
$w(r, a)$	distribución de Poisson
u	control
ϑ	estado de la naturaleza
x	estado del sistema
$T(x, u)$	transformación de estado del sistema
$q(x, u),\ Q(x, u)$	función de objetivo
$J(u),\ J_n(u)$	criterio de calidad de control
$\xi,\ \eta$	estrategias mixtas
$L(\xi, \eta)$	función de pérdidas
A	espacio de decisiones
a	decisión, operación
a^*	operación de Bayes
$R^*(\xi)$	pérdidas con la operación de Bayes
$d(z)$	función de decisión
$\rho(\vartheta, d)$	función de riesgo
$\rho^*(\xi)$	riesgo de Bayes

Parte primera

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS DISCRETAS

Capítulo primero

CONCEPTOS BASICOS DE LA TEORIA DE LOS CONJUNTOS

1-1. CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

a) Definiciones fundamentales

El concepto de conjunto es uno de aquellos conceptos fundamentales de las matemáticas a los cuales es difícil dar una definición precisa utilizando conceptos elementales. Por eso nos limitaremos a dar una explicación descriptiva del concepto de conjunto. Se denomina *conjunto* a un grupo de objetos determinados completamente diferenciables que se consideran como un todo.

Se puede hablar del conjunto de sillas en una habitación, el conjunto de personas que viven en la ciudad de Riazán, el conjunto de estudiantes en un grupo, el conjunto de números enteros positivos, el conjunto de letras en el alfabeto, el conjunto de estados de un sistema, etc. Por cierto, sólo se puede hablar de conjunto cuando los elementos del mismo son diferenciables entre sí. Por ejemplo, no se puede hablar del conjunto de gotas en un vaso de agua ya que no es posible señalar, precisa y claramente, cada gota por separado.

Llámanse elementos los distintos objetos de que consta un conjunto. Así, el número 3 es un elemento del conjunto de los números enteros positivos y la letra *б* es un elemento del conjunto de las letras del alfabeto ruso.

Sirve de notación general de conjunto, un par de corchetes $\{\ \}$, dentro de los cuales se enumeran los elementos del conjunto. Para designar los conjuntos concretos se utilizan distintas letras mayúsculas A, S, X ... o letras mayúsculas con subíndices A_1, A_2...

Para designar los elementos de un conjunto en forma general se emplean diversas letras minúsculas a, s, x ... o letras minúsculas con subíndices $a_1, a_2 \ldots$

Si deseamos indicar que el objeto a es un elemento del conjunto S escribimos $a \in S$ y decimos que el objeto a es un elemento del conjunto S o que a pertenece al conjunto S. Ahora, si queremos señalar que a no es un elemento del conjunto S, entonces escribimos $a \notin S$. Vamos a emplear la notación $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ en calidad de abreviatura para la notación $x_1 \in S, x_2 \in S, \ldots, x_n \in \in S$.

Los conjuntos pueden ser finitos e infinitos. Un conjunto se denomina *finito* si es finito el número de sus elementos, es decir, si existe un número entero positivo N que es el número de elementos del conjunto. Un conjunto se llama *infinito*, si consta de un número infinito de elementos.

Para operar con conjuntos concretos hay que saber presentar dichos conjuntos. Existen dos métodos de presentación de conjuntos: la enumeración y la descripción. La presentación de un conjunto por el método de enumeración consiste en la enumeración de todos los elementos que constituyen el conjunto. Así, el conjunto de estudiantes sobresalientes de un grupo estudiantil puede presentarse enumerando los estudiantes que obtienen notas de sobresaliente, por ejemplo {Ivanov, Petrov, Sídorov}. Este método es conveniente para el estudio de los conjuntos finitos que contienen un número reducido de elementos, pero a veces se puede utilizar para presentar conjuntos infinitos, por ejemplo $\{2, 4, 6, 8 \ldots\}$. Naturalmente, tal notación es aplicable si está del todo claro qué se comprende por los puntos suspensivos.

El método descriptivo de presentación de un conjunto consiste en que se indica la propiedad característica que poseen todos los elementos del conjunto. Así, si M es el conjunto de estudiantes de un grupo, el conjunto A de estudiantes sobresalientes de dicho grupo se escribe en la forma

$$A = \{x \in M : x, \text{ estudiante sobresaliente del grupo}\},$$

lo que se lee del modo siguiente: el conjunto A consta de los elementos x del conjunto M que poseen la propiedad de que x es estudiante sobresaliente del grupo.

En los casos en que no suscita dudas de cuál conjunto se toman los elementos x, puede no indicarse la pertenencia de x al conjunto M. En tal caso el conjunto A se escribirá en la forma

$$A = \{x : x, \text{ estudiante sobresaliente del grupo}\}.$$

Pongamos algunos ejemplos de presentación de conjuntos por el método descriptivo:

$\{x : x, \text{ par}\}$ es el conjunto de los números pares;

$\{x : x^2 - 1 = 0\}$ es el conjunto $\{+1, -1\}$.

Supongamos que C es el conjunto de los números enteros. Entonces $\{x \in C : 0 < x \leqslant 7\}$ es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

El concepto de conjunto vacío es un importante concepto de la teoría de los conjuntos. Se denomina *conjunto vacío* el que no contiene ningún elemento. El conjunto vacío se designa por $\varnothing$. Por ejemplo,

$$\{x \in C : x^2 - x + 1 = 0\} = \varnothing.$$

El concepto de conjunto vacío juega un papel importantísimo al presentar un conjunto por medio de su descripción. Sin el concepto de conjunto vacío no podríamos hablar del conjunto de estudiantes sobresalientes de un grupo estudiantil o de raíces reales de una ecuación cuadrática sin habernos cerciorado previamente de si hay estudiantes sobresalientes algunos en el grupo dado o de si la ecuación considerada tiene raíces reales. La introducción del conjunto vacío permite operar con plena tranquilidad con el conjunto de estudiantes sobresalientes del grupo sin preocuparse de si hay o no estudiantes sobresalientes en el grupo examinado. Vamos a incluir convencionalmente los conjuntos vacíos en los conjuntos finitos.

Consideremos ahora la cuestión de la igualdad de los conjuntos. Dos conjuntos se denominan *iguales* si constan de los mismos elementos, o sea, si vienen a ser un mismo conjunto. Los conjuntos X e Y no son iguales ($X \neq Y$), si en el conjunto X hay elementos que no pertenecen a Y, o en el conjunto Y existen elementos no pertenecientes a X. Es fácil ver que para conjuntos cualesquiera X, Y y Z:

$$X = X;$$

$$\text{si } X = Y, \text{ entonces } Y = X;$$

$$\text{si } X = Y \text{ e } Y = Z, \text{ entonces } X = Z.$$

De la definición de igualdad de conjuntos se desprende que no importa el orden de los elementos en el conjunto. Así, por ejemplo, los conjuntos $\{3, 4, 5, 6\}$ y $\{4, 5, 6, 3\}$ resultan ser un mismo conjunto.

Con frecuencia, al estudiar diversos conjuntos es preciso referirse al número de elementos del conjunto. Para que este concepto quede definido por completo es necesario convenir en que en un conjunto nunca hay elementos iguales. La notación $\{2, 2, 3, 5\}$ debe considerarse incorrecta y sustituirse por $\{2, 3, 5\}$. De este modo, el conjunto de los divisores primos del número 60 es igual a $\{2, 3, 5\}$.

b) Concepto de subconjunto

El conjunto X constituye un subconjunto del conjunto Y, si cualquier elemento del conjunto X pertenece también al conjunto Y. Sea Y el conjunto de los estudiantes de un grupo y X, el conjunto de los estudiantes sobresalientes del mismo grupo. Como que cada estudiante sobresaliente del grupo es a la vez estudiante de dicho grupo, el conjunto X es un subconjunto del conjunto Y.

Muchas definiciones de la teoría de los conjuntos se exponen cómodamente en forma de expresiones matemáticas que contienen algunos símbolos lógicos. Utilizaremos dos de estos símbolos para definir el subconjunto:

$\forall$, símbolo denominado cuantificador y que significa "cualquier", "cualquiera que sea", "para todos";

$\rightarrow$, símbolo de corolario (implicación) que significa "implicar".

La definición de subconjunto que puede formularse así: para cualquier x la afirmación «x pertenece a X" implica la aseveración "x pertenece a Y", se escribirá del modo siguiente:

$$\forall x : x \in X \rightarrow x \in Y. \tag{1-1}$$

Una notación más concisa de la expresión "X es un subconjunto de Y" es la transcripción

$$X \subseteq Y, \tag{1-2}$$

que se lee "Y incluye a X". El símbolo $\subseteq$ empleado aquí denota inclusión. Si se desea recalcar que Y incluye también a otros elementos además de los elementos de X, se utiliza el símbolo de inclusión estricta $\subset$:

$$X \subset Y. \tag{1-3}$$

La relación entre los símbolos $\subset$ y $\subseteq$ se muestra con la expresión

$$X \subset Y \rightleftarrows X \subseteq Y \text{ y } X \neq Y. \tag{1-4}$$

Aquí se emplea el símbolo $\rightleftarrows$ que denota equivalencia (con el significado "es lo mismo que").

Mencionemos algunas propiedades de los subconjuntos que se derivan de su definición:

$$X \subseteq X \qquad \text{(reflexividad);}$$

$$[X \subseteq Y \text{ e } Y \subseteq Z] \rightarrow X \subseteq Z \qquad \text{(transitividad).}$$

Es algo más difícil de comprender que para cualquier conjunto M

$$\varnothing \subseteq M. \tag{1-5}$$

En efecto, el conjunto vacío $\varnothing$ no contiene elementos. Por consiguiente, al adicionar a M un conjunto vacío, de hecho no añadimos nada. Por eso, siempre se puede considerar que cualquier conjunto M contiene en sí un conjunto vacío en calidad de subconjunto.

c) Límites superior e inferior de un conjunto

Al operar con el conjunto de los números reales pueden compararse en magnitud los elementos de dicho conjunto. Al hacerlo, surge con frecuencia el problema de determinar el elemento mayor o menor del conjunto. Para un conjunto finito este problema no presenta dificultad. Así, para el conjunto $T = \{3, 4, 5, 6\}$ mín $T = 3$ y máx $T = 6$. Sin embargo, para los conjuntos infinitos la situación puede ser diferente.

Sea R el conjunto de todos los números reales, siendo $S = \{x \in R : m < x < M\}$. El conjunto S constituye un segmento abierto del eje real y no contiene los elementos mayor y menor. No obstante, puede hablarse de los límites de tal conjunto entendiéndose por éstos los números m y M que complementan el conjunto S hasta el segmento cerrado. En tal caso el punto M se denomina límite superior del conjunto S o *supremum* y se designa por $M = \sup S$, y el punto m se llama límite inferior del conjunto S o *infinum* y se designa con $m = \inf S$.

Teorema 1-1 (teorema de los límites superior e inferior de un subconjunto). Si $B \subseteq A$, entonces

$$\inf B \geqslant \inf A; \quad \sup B \leqslant \sup A. \tag{1-6}$$

Demostración. Designemos por b' el elemento del conjunto B que tiene el valor menor, o sea, $b' \in B$ y $b' = \inf B$. Pero $B \subseteq A$, es decir, $b' \in A$. Sea a' el elemento del conjunto A que posee el menor valor, o sea, $a' \in A$ y $a' = \inf A$. En tal caso, si $b' = a'$, entonces $b' = \inf A$ y si $b' \neq a'$, entonces $b' > a = \inf A$. De este modo, $b' \geqslant \inf A$ o $\inf B \geqslant \inf A$.

La segunda parte del teorema se demuestra análogamente.

1-2. OPERACIONES CON CONJUNTOS

a) Observaciones preliminares

Con conjuntos pueden realizarse operaciones que recuerdan en mucho las operaciones de adición y multiplicación del álgebra elemental. Para comprender mejor las operaciones con conjuntos hay que rememorar las leyes existentes en el álgebra elemental.

Sean a y b ciertos números, $a + b$ su suma y ab su producto. La suma y el producto de estos números tienen las propiedades siguientes denominadas leyes del álgebra:

1. $a + b = b + a$; $ab = ba$, ley conmutativa;
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$, ley asociativa;
3. $(a + b)c = ac + bc$, ley distributiva.

Observemos que en las leyes asociativa y conmutativa la operación de adición puede sustituirse por la de multiplicación y viceversa. En tal caso se obtendrá otra ley que será tan válida como la primera. Sin embargo, en la ley distributiva no existe tal simetría. Si en dicha ley se reemplaza la adición por la multiplicación y viceversa, llegamos al absurdo:

$$(ab) + c = (a + c)(b + c).$$

Cabe preguntar, ¿ acaso sucede siempre así? ¿No existe acaso un álgebra en la cual la ley distributiva sea también simétrica con respecto a las operaciones de adición y multiplicación como las leyes conmutativa y asociativa? Resulta que existe un álgebra, y precisamente el álgebra de los conjuntos, en la que todas las tres leyes son simétricas respecto a las operaciones de adición y multiplicación.

La similitud entre las operaciones de adición y multiplicación se manifiesta asimismo, en la existencia de dos excelentes números que son 0 y 1 tales que la adición del primero y la multiplicación por el segundo no modifican ningun número:

$$a+0=a, \quad a\cdot 1=a.$$

Notemos que la segunda relación se obtiene de la primera sustituyendo $(+)$ por $(\cdot)$ y 0 por 1.

No obstante, en este asunto tampoco va muy lejos el parecido entre las operaciones de adición y multiplicación. Así, el número 0 juega un papel algo particular en comparación con todos los demás números, incluso la unidad. Este papel peculiar del número 0 se deriva de la relación $a\cdot 0=0$. Si en dicha expresión sustituimos $(\cdot)$ por $(+)$ y 0 por 1 llegamos a la relación $a+1=1$ que casi nunca será correcta.

Como veremos más adelante, la similitud entre el cero y la unidad resultará mucho mayor en el álgebra de los conjuntos que en el álgebra ordinaria.

Después de estas observaciones preliminares puede iniciarse el estudio de las operaciones con conjuntos.

b) Unión de conjuntos

Se denomina unión de los conjuntos X e Y aquel que consta de todos aquellos y sólo aquellos elementos que pertenecen siquiera a uno de los conjuntos X, Y, es decir, pertenecen a X o a Y. La unión de X e Y se designa por $X \cup Y$. La definición formal es

$$X \cup Y=\{x : x \in X \text{ o } x \in Y\}. \tag{1-7}$$

La unión de conjuntos se llama a veces suma de conjuntos y se designa por $X+Y$. No obstante, las propiedades de la unión de conjuntos difieren un tanto de las propiedades de la suma en su sentido aritmético habitual. Por eso no vamos a emplear este último término.

Ejemplo 1-1. Si $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y=\{2, 4, 6, 7\}$, entonces $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Ejemplo 1-2. Si X es el conjunto de estudiantes sobresalientes en un grupo, e Y, el conjunto de estudiantes que viven en una residencia estudiantil, entonces $X \cup Y$ es el conjunto de estudiantes que cursan estudios con notas de sobresaliente o habitan en dicha residencia.

Ejemplo 1-3. Examinemos los dos círculos mostrados en la figura 1-1. Si X es el conjunto de puntos de círculo izquierdo e Y, el conjunto de puntos del círculo derecho, entonces $X \cup Y$ constituye la zona rayada delimitada por ambos círculos.

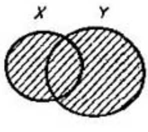

Fig. 1-1. Unión de conjuntos

El concepto de unión puede hacerse extensivo también a un número mayor de conjuntos. Designemos por $\mathfrak{M} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ la totalidad de los n conjuntos $X_1, \ldots, X_n$ que a veces se denomina sistema de conjuntos. La unión de estos conjuntos

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \bigcup_{X \in \mathfrak{M}}, \quad X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \tag{1-8}$$

representa el conjunto que consta de todos aquellos y sólo aquellos elementos que pertenecen siquiera a uno de los conjuntos del sistema $\mathfrak{M}$.

Para la unión de conjuntos son válidas las leyes conmutativa y asociativa

$$X \cup Y = Y \cup X; \tag{1-9}$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z, \tag{1-10}$$

cuya validez se deriva de que los miembros izquierdo y derecho de las igualdades constan de los mismos elementos. Además,

$$X \cup \varnothing = X. \tag{1-11}$$

Esta relación es también evidente ya que un conjunto vacío no contiene elementos y esto significa que X y $X \cup \varnothing$ constan de los mismos elementos. En (1-11) se ve que el conjunto vacío $\varnothing$ juega en el álgebra de los conjuntos el papel de cero. Aquí existe analogía con la expresión $a + 0 = a$ del álgebra ordinaria.

c) Intersección de conjuntos

Se denomina intersección de los conjuntos X e Y el conjunto que consta de todos aquellos y sólo aquellos elementos que pertenecen tanto al conjunto X como al Y. La intersección de los conjuntos X e Y se designa por $X \cap Y$. La definición formal es

$$X \cap Y \{x : x \in X \text{ y } x \in Y\}. \tag{1-12}$$

La intersección de conjuntos se denomina a veces producto de conjuntos y se designa por XY. Sin embargo, las propiedades de la intersección de conjuntos difieren un tanto de las propiedades del producto en su sentido aritmético habitual. Por eso no vamos a emplear dicho término.

Ejemplo 1-4. Para los conjuntos X e Y en el ejemplo 1-1 $X \cap Y = \{2, 4\}$.

Ejemplo 1-5. Para los conjuntos X e Y en el ejemplo 1-2 $X \cap Y$ es el conjunto de estudiantes sobresalientes que viven en la residencia estudiantil.

Ejemplo 1-6. Examinemos los dos círculos mostrados en la figura 1-2. Si X es el conjunto de puntos de círculo izquierdo e Y, el conjunto de puntos del

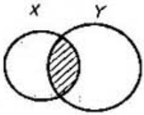

Fig. 1-2. Intersección de conjuntos

círculo derecho, entoces $X \cap Y$ representa la zona rayada que constituye la parte común de ambos círculos.

La operación de intersección permite establecer una serie de relaciones entre dos conjuntos.

Los conjuntos X e Y se denominan *no intersecados* si éstos no tienen elementos comunes, es decir, si

$$X \cap Y = \varnothing. \tag{1-13}$$

Ejemplo 1-7. Son conjuntos no intersecados:

1) los conjuntos $\{1, 2, 3\}$ y $\{4, 5, 6\}$;

2) el conjunto de estudiantes sobresalientes y el conjunto de estudiantes desaprovechados en un grupo estudiantil;

3) los conjuntos de puntos de los círculos X e Y en la figura 1-3.

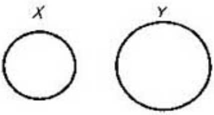

Fig. 1-3. Conjuntos no intersecados

Se dice que los conjuntos X e Y se encuentran *en posición común* si se cumplen las tres condiciones siguientes:

existe un elemento del conjunto X que no pertenece a Y;

existe un elemento del conjunto Y que no pertenece a X;

existe un elemento que pertenece tanto a X como a Y.

Señalemos una diferencia entre el álgebra de los conjuntos y el álgebra de los números. Si a y b son dos números, entre ellos pueden existir tres relaciones o posibilidades

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a. \tag{1-14}$$

Sin embargo, para dos conjuntos X e Y puede no cumplirse ninguna de las relaciones:

$$X \subset Y, \quad X = Y, \quad Y \subset X. \tag{1-15}$$

Así pues, si X es el conjunto de estudiantes sobresalientes e Y es el conjunto de estudiantes que viven en la residencia estudiantil, las tres relaciones antes dadas significan;

$X \subset Y$, cada estudiante sobresaliente vive obligatoriamente en la residencia estudiantil;

$X = Y$, en la residencia estudiantil viven todos los estudiantes sobresalientes y sólo ellos;

$Y \subset X$, todos los estudiantes que habitan en la residencia estudiantil son estudiantes sobresalientes.

Es evidente que estas relaciones no agotan todas las posibilidades. En efecto, como se desprende de las definiciones anteriores, entre los dos conjuntos X e Y puede haber una de las relaciones siguientes:

$$X = Y; \quad X \subset Y; \quad Y \subset X, \quad X \cap Y = \varnothing;$$

X e Y están en posición común.

Se puede extender también el concepto de intersección a un número de conjuntos mayor de dos. Examinemos el sistema de conjuntos $\mathfrak{M} = \{X_1, \ldots, X_n\}$. La intersección de estos conjuntos se escribe en la forma

$$\bigcap_{X \in \mathfrak{M}} X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \ldots \cap X_n \tag{1-16}$$

y representa un conjunto cuyos elementos pertenecen a cada uno de los conjuntos del sistema $\mathfrak{M}$.

Es fácil ver que la intersección de conjuntos posee la propiedad conmutativa

$$X \cap Y = Y \cap X \tag{1-17}$$

y la asociativa

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z. \tag{1-18}$$

Notemos también que tiene lugar la relación

$$X \cap \varnothing = \varnothing, \tag{1-19}$$

similar a la relación $a \cdot 0 = 0$ del álgebra ordinaria. La relación (1-19), junto con la relación (1-11), demuestra que el conjunto vacío juega el papel de cero en el álgebra de los conjuntos.

d) Diferencia de conjuntos

La operación dada se distingue de las operaciones de unión e intersección en que se define solamente para dos conjuntos. Se denomina diferencia de los conjuntos X e Y el conjunto que consta de todos aquellos y sólo aquellos elementos que pertenecen a X y no pertenecen a Y. La diferencia de los conjuntos X e Y se designa por $X \setminus Y$. De este modo,

$$X \setminus Y = \{x : x \in X, \quad x \notin Y\}. \tag{1-20}$$

Ejemplo 1-8. Para los conjuntos X e Y del ejemplo 1-1 $X \setminus Y = \{1, 3, 5\}$, $Y \setminus X = \{6, 7\}$. Si X e Y son los conjuntos del ejemplo 1-2, entonces $X \setminus Y$ es el conjunto de estudiantes sobresalientes que no viven en la residencia estudiantil. Para los conjuntos X e Y del ejemplo 1-3 $X \setminus Y$ es la zona rayada de la figura 1-4.

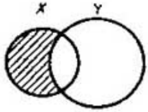

Fig. 1-4. Diferencia de conjuntos

e) Conjunto universal

Como hemos visto, el conjunto vacío representa el papel de cero en el álgebra de los conjuntos. Puede preguntarse si no existe acaso un conjunto I que juegue el papel de unidad, o sea, que satisfaga la condición

$$X \cap I = X, \tag{1-21}$$

similar a la condición $a \cdot 1 = a$ del álgebra ordinaria.

La relación (1-21) significa que la intersección o "parte común" del conjunto I y del conjunto X, para cualquier conjunto X coincide con este mismo conjunto. Pero eso sólo es posible en caso de que el conjunto I contenga todos los elementos de los cuales puede constar el conjunto X, de suerte que cualquier conjunto X esté totalmente contenido en el conjunto I. El conjunto I que satisface esta condición se denomina *completo* o *universal*, o bien *unitario.*

Partiendo de lo expuesto puede darse la siguiente definición de conjunto universal. Si en cierto análisis sólo participan los subconjuntos de cierto conjunto invariable I, entonces dicho conjunto mayor I se denomina conjunto universal.

Es preciso señalar que en los diversos análisis concretos pueden representar el papel de conjunto universal diferentes conjuntos. Así, pues, al estudiar los conjuntos de estudiantes en un grupo (estudiantes sobresalientes, estudiantes becados, estudiantes que viven en la residencia estudiantil, etc.), juega el papel de conjunto universal el conjunto de estudiantes en el grupo.

Es cómodo representar gráficamente el conjunto universal en forma del conjunto de los puntos de un rectángulo. Las distintas zonas dentro de dicho rectángulo van a denotar los diversos subconjuntos del conjunto universal. La representación de los conjuntos en forma de zonas de un rectángulo que es un conjunto universal se denomina *diagrama de Euler — Venn.*

El conjunto universal posee una interesante propiedad que no tiene análogo en el álgebra ordinaria, a saber: para cualquier conjunto X es válida la relación:

$$X \cup I = I. \tag{1-22}$$

Efectivamente, la unión $X \cup I$ constituye el conjunto del cual forman parte todos los elementos tanto del conjunto X como del I. Pero el conjunto I ya incluye todos los elementos del conjunto X, por lo que $X \cup I$ va a constar de los mismos elementos que I, o sea, constituye el conjunto más universal I.

f) Complemento de un conjunto

El conjunto $\bar{X}$ definido por la relación

$$\bar{X} = I \setminus X, \tag{1-23}$$

se denomina complemento del conjunto X (hasta el conjunto universal I). En el diagrama de la figura 1-5 la zona no rayada re-

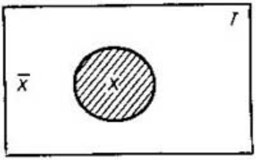

Fig. 1-5. Complemento de un conjunto

presenta el conjunto $\bar{X}$. La definición formal es

$$\bar{X} = \{x : x \in I \ \text{ y } \ x \notin X\}.$$

Ejemplo 1-9. Si $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $X = \{3, 5, 7\}$, entonces $\bar{X} = \{1, 2, 4, 6\}$.

De (1-23) se deriva que X y $\bar{X}$ no tienen elementos comunes, de manera que

$$X \cap \bar{X} = \varnothing. \tag{1-24}$$

Además, no existen elementos de I que no pertenezcan a X ni a $\bar{X}$, ya que los elementos que no pertenecen a X pertenecen a $\bar{X}$. Por lo tanto,

$$X \cup \bar{X} = I. \tag{1-25}$$

De la simetría de la fórmula (1-25) respecto a X y $\bar{X}$ se deduce no sólo que $\bar{X}$ es el complemento de X, sino también que X es el complemento de $\bar{X}$. Pero el complemento de $\bar{X}$ es $\bar{\bar{X}}$. De este modo,

$$\bar{\bar{X}} = X. \tag{1-26}$$

Con ayuda de la operación de complementación puede representarse la diferencia de conjuntos en la cómoda forma siguiente:

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ y } x \notin Y\} = \{x : x \in X \text{ y } X \in \bar{Y}\},$$

o sea,

$$X \setminus Y = X \cap \bar{Y}. \tag{1-27}$$

g) Fraccionamiento de un conjunto

Una de las operaciones con conjuntos que se encuentran más frecuentemente es la operación de fraccionamiento de un conjunto en un sistema de subconjuntos. Así pues, el sistema de cursos de una facultad dada constituye el fraccionamiento del conjunto de estudiantes de dicha facultad; el sistema de los grupos de un curso dado es el fraccionamiento del conjunto de estudiantes del curso. Si N es el conjunto de los números enteros positivos, siendo A_0 y A_1 los conjuntos de los números pares e impares, entonces el sistema $\{A_0, A_1\}$ será el fraccionamiento del conjunto N. El conjunto de los números enteros positivos puede fraccionarse de otro modo, a saber: en los conjuntos de los números divisibles entre 3 sin resto, con resto 1 y con resto 2. La producción de una empresa se fracciona en el sistema de conjuntos que constan de los productos de primera clase, segunda clase y artículos defectuosos. Se podrían citar infinitos ejemplos similares.

Para dar una definición regurosa del concepto de fraccionamiento, examinemos cierto conjunto M y el sistema de conjuntos $\mathfrak{M} = \{X_1, \ldots, X_n\}$. El sistema de conjuntos $\mathfrak{M}$ se denomina fraccionamiento del conjunto M si satisface las condiciones siguientes:

1) cualquier conjunto X de $\mathfrak{M}$ es subconjunto del conjunto M

$$\forall X \in \mathfrak{M} : X \subseteq M; \tag{1-28}$$

2) dos conjuntos cualesquiera X e Y de $\mathfrak{M}$ no son intersecados

$$\forall X \in \mathfrak{M}, \quad \forall Y \in \mathfrak{M} : X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing; \tag{1-29}$$

3) la unión de todos los conjuntos que forman parte del fraccionamiento da el conjunto M

$$\bigcup_{X \in \mathfrak{M}} X = M. \tag{1-30}$$

Volveremos al concepto de fraccionamiento durante el estudio de la relación de equivalencia, con la que aquél está estrechamente vinculado.

h) Identidades del álgebra de los conjuntos

Con ayuda de las operaciones de unión, intersección y complementación es posible formar diversas expresiones algebraicas de los conjuntos. Designemos por $\mathfrak{A}(X, Y, Z)$ cierta expresión algebraica constituida por los conjuntos X, Y y Z. Esta representa cierto conjunto. Sea $\mathfrak{B}(X, Y, Z)$ otra expresión algebraica formada por los mismos conjuntos. Si ambas expresiones algebraicas representan un mismo conjunto, entonces se les puede igualar una a otra obteniendo una identidad algebraica de la forma

$$\mathfrak{A}(X, Y, Z) = \mathfrak{B}(X, Y, Z). \tag{1-31}$$

Tales conjuntos resultan sumamente útiles para las transformaciones de las expresiones algebraicas con conjuntos y en la sección presente estudiaremos algunos de ellos.

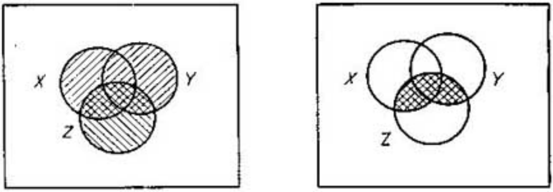

Fig. 1-6. Representación geométrica de la identidad $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

1. En la figura 1-6 se muestran los diagramas de Euler — Venn para las expresiones $(X \cup Y) \cap Z$ y $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. En dichos diagramas se ve que ambas expresiones definen un mismo conjunto, así pues, en el álgebra de los conjuntos tiene lugar la identidad

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z), \tag{1-32}$$

análoga a la ley distributiva $(a + b)c = ac + bc$ del álgebra ordinaria.

2. En el álgebra ordinaria, en la ley distributiva no podemos sustituir la operación de adición por la de multiplicación, y viceversa, ya que esto conduce a la expresión absurda $(ab) + c = (a + c)(b + c)$. No ocurre así en el álgebra de los conjuntos.

En la figura 1-7 se muestran los diagramas de Euler — Venn para las expresiones algebraicas $(X \cap Y) \cup Z$ y $(X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$. Ambas estas expresiones dan un mismo conjunto; por lo tanto, tiene lugar la identidad

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z). \tag{1-33}$$

3. Es fácil cerciorarse de que si $Y \subseteq X$, entonces

$$X \cap Y = Y, \quad X \cup Y = X. \tag{1-34}$$

En efecto, todos los elementos del conjunto Y son también a la vez, elementos del conjunto X. Esto significa que la intersección de dichos conjuntos, o sea, la parte común de los conjuntos X e Y coincide con Y. En la unión de los conjuntos X e Y, el conjunto Y no aporta ningún elemento que ya no forme parte de la misma siendo elemento del conjunto X. Por consiguiente, $X \cup Y$ coincide con X.

4. Suponiendo que en (1-34) $Y = X$ y considerando que $X \subseteq X$, hallamos que:

$$X \cap X = X, \quad X \cup X = X. \tag{1-35}$$

En algunos casos resulta inconveniente demostrar las identidades del álgebra de los conjuntos con ayuda del diagrama de

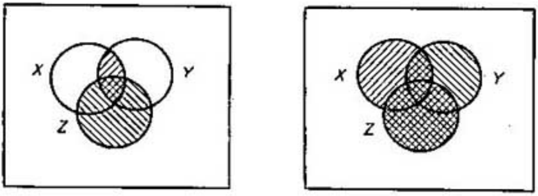

Fig. 1-7. Representación geométrica de la identidad $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$

Euler — Venn. Existe un método más general para determinar la identidad de dos expresiones algebraicas.

Sean designadas, como antes, por $\mathfrak{A}(X, Y, Z)$ y $\mathfrak{B}(X, Y, Z)$, dos expresiones algebraicas obtenidas mediante la aplicación de las operaciones de unión, intersección y complementación a los conjuntos. X, Y y Z. Para demostrar que $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ es suficiente mostrar que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. A su vez, para mostrar que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, es necesario convencerse que de $x \in \mathfrak{A}$ se desprende que $x \in \mathfrak{B}$. Análogamente, para mostrar que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ hace falta cerciorarse de que de $x \in \mathfrak{B}$ se deriva que $x \in \mathfrak{A}$. Utilicemos este método para demostrar varias identidades más.

5. Demostremos la identidad

$$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}. \tag{1-36}$$

Supongamos que $x \in \overline{X \cup Y}$, o sea, que $x \notin X \cup Y$. Esto significa que $x \notin X$ y $x \notin Y$, es decir, que $x \in \bar{X}$ y $x \in \bar{Y}$. Luego, $x \in \bar{X} \cap \bar{Y}$. Supongamos ahora que $y \in \bar{X} \cap \bar{Y}$, o sea, $y \in \bar{X}$ e $y \in \bar{Y}$. Esto quiere decir que $y \notin X$ e $y \notin Y$, o bien que $y \notin X \cup Y$. Por lo tanto, $y \in \overline{X \cup Y}$.

6. Demostremos la identidad

$$\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}, \tag{1-37}$$

reduciendo ambos miembros de la misma a igual forma. Efectuando la operación de complementación en ambos miembros de (1-37) obtenemos que $\overline{\overline{X \cap Y}} = \overline{\bar{X} \cup \bar{Y}}$. El primer miembro de esta expresión da $X \cap Y$. Lo mismo obtenemos transformando el segundo miembro según la regla (1-36).

En la literatura las identidades (1-36) y (1-37) comúnmente se denominan identidades de Morgan.

1-3. ORDENACION DE ELEMENTOS Y PRODUCTO DIRECTO DE LOS CONJUNTOS

a) Conjunto ordenado

A la par con el concepto de conjunto, como una unión de elementos, existe una importante noción de conjunto ordenado o cortejo. Se denomina *cortejo* una sucesión de elementos, o sea, una union de elementos en la cual cada uno de ellos ocupa un lugar determinado. Los propios elementos se llaman entonces componentes del cortejo (primera componente, segunda componente, etc.). Son ejemplos de cortejos: el conjunto de personas que están en una cola, el conjunto de palabras en una frase, los números que expresan la longitud y latitud de un punto en el terreno, etc. En todos estos conjuntos la ubicación de cada elemento está absolutamente determinada y no puede cambiarse arbitrariamente.

El número de elementos del cortejo se denomina su largo. Para designar un cortejo vamos a emplear los paréntesis. Así pues, el conjunto

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{1-38}$$

es el cortejo de largo n con los elementos $a_1, \ldots, a_n$. Los cortejos de largo 2 se llaman pares o pares ordenados, los cortejos de largo 3, tríadas, los de largo 4, cuartas, etc. En el caso general, los cortejos de largo n se llaman de orden n o n-arios. Constituyen casos particulares de cortejos el cortejo (a) de largo 1 y el cortejo vacío de largo 0 designado por ( ) o Λ. A diferencia del conjunto ordinario, en el cortejo pueden haber elementos iguales, p. ej.: dos palabras iguales en una frase, valores numéricos iguales de la longitud y la latitud de un punto en el terreno, etc.

En lo sucesivo vamos a estudiar conjuntos ordenados cuyos elementos son números reales. Tales conjuntos ordenados se denominan puntos del espacio o vectores. De este modo, el cortejo (a_1, a_2) puede considerarse como un punto en el plano o un vector trazado desde el origen de coordenadas hasta el punto en cuestión (fig. 1-8, a). Las componentes a_1 y a_2 serán las proyecciones del vector sobre los ejes *1* y *2*

$$\mathrm{Pr}_1 (a_1, a_2) = a_1; \quad \mathrm{Pr}_2 (a_1, a_2) = a_2.$$

El cortejo (a_1, a_2, a_3) se puede considerar como un punto en el espacio tridimensional o como un vector espacial trazado del origen de coordenadas a dicho punto (fig. 1-8, *b*). Las proyecciones del vector sobre los ejes de coordenadas son

$$\mathrm{Pr}_i (a_1, a_2, a_3) = a_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sin embargo, en el caso dado puede hablarse de la proyección simultánea del cortejo sobre dos ejes, por ejemplo *1* y *2*, es decir, sobre el plano de coordenadas. Es fácil ver que dicha proyección constituye un cortejo de dos elementos

$$\mathrm{Pr}_{12} (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2).$$

Generalizando estos conceptos vamos a considerar el conjunto ordenado de números reales de n elementos $(a_1, \ldots, a_n)$ como un

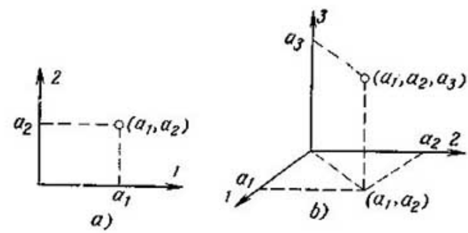

Fig. 1-8. Proyecciones de un cortejo de dos y tres elementos

punto en el espacio imaginario de n dimensiones llamado a veces hiperespacio o como un vector de n dimensiones. Vamos a considerar entonces las componentes del cortejo a de n elementos como las proyecciones de dicho cortejo sobre los ejes correspondientes

$$\mathrm{Pr}_i\, a = a_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.39}$$

Si $i, j, \ldots, l$ son los números de los ejes, siendo $1 \leqslant i < j < \ldots l \leqslant n$, la proyección del cortejo a sobre los ejes $i, j, \ldots, l$ es igual a:

$$\mathrm{Pr}_{i,\, j, \ldots\, l}\, a = (a_i, a_j, \ldots, a_l). \tag{1-40}$$

La proyección del cortejo sobre un conjunto vacío de ejes constituye un cortejo vacío

$$\mathrm{Pr}_{\varnothing}\, a = \Lambda. \tag{1-41}$$

En el capítulo 3 se dará una definición más completa y rigurosa del espacio multidimensional.

b) Producto directo de conjuntos

Se llama producto directo de los conjuntos X e Y al conjunto designado por $X \times Y$ que consta de todos aquellos y sólo aquellos pares ordenados cuya primera componente pertenece al conjunto X y la segunda, al conjunto Y. De esta suerte los elementos del conjunto ordenado constituyen cortejos de dos elementos del tipo (x, y). Su definición formal es

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}. \tag{1-42}$$

Ejemplo 1-10. Sean $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 3, 4\}$. Entonces $X \times Y = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$. La representación geométrica de este conjunto se muestra en la figura 1-9, *a*.

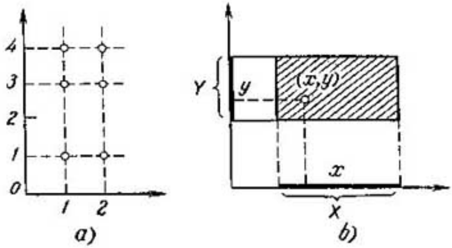

Fig. 1-9. Representación geométrica del producto directo de conjuntos

Ejemplo 1-11. Sean X e Y segmentos de un eje real. El producto directo $X \times Y$ se representa por el rectángulo rayado indicado en la figura 1-9, *b*. De esta figura se deduce que las propiedadaes del producto directo difieren de las propiedades del producto ordinario en sentido aritmético. En particular, el producto directo cambia al cambiar el orden de los factores, es decir,

$$X \times Y \neq Y \times X. \tag{1-43}$$

La operación de multiplicación directa se extiende también fácilmente a un número mayor de conjuntos. Se denomina producto directo de los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_r$, el conjunto designado por $X_1 \times X_2 \times \ldots X_r$ que consta de todos aquellos y sólo aquellos cortejos de largo r, cuya primera componente pertenece a X_1, la segunda, a X_2, etc.

Es fácil ver que

$$X \times Y = \varnothing \rightleftarrows X = \varnothing \text{ o } Y = \varnothing, \tag{1-44}$$

ya que no existen pares ordenados con la primera o segunda componente que falta. Análogamente, $X_1 \times X_2 \times \ldots X_r = \varnothing$ cuando, y sólo cuando siquiera uno de los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_r$ es un conjunto vacío.

El concepto de *potencias* de un conjunto constituye un caso particular de la operación de multiplicación directa. Sea M un conjunto arbitrario. Llamemos potencia s del conjunto M y designemos por M^s el producto directo de s conjuntos iguales a M:

$$M^s = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{s \text{ veces}}. \tag{1-45}$$

Esta definición sirve para $s = 2, 3, \ldots$ Ella puede hacerse extensiva a cualquier s entero no negativo si asumimos mediante una definición especial que

$$M^1 = M, \quad M^0 = \{\Lambda\}. \tag{1-46}$$

Si R es el conjunto de los números reales, entonces $R^2 = R \times R$ representa el plano real y $R^3 = R \times R \times R$ representa el espacio tridimensional real.

c) Proyección de un conjunto

La operación de proyección de un conjunto está vinculada estrechamente a la operación de proyección de un cortejo y sólo puede aplicarse a los conjuntos cuyos elementos son cortejos de largo igual.

Sea M un conjunto que consta de cortejos de largo s. Entonces vamos a llamar proyección del conjunto M al conjunto de las proyecciones de los cortejos de M.

Ejemplo 1-12. Sea $M = \{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 3, 3), (3, 2, 3, 4, 3)\}$. Entonces

$$\mathrm{Pr}_2\, M = \{2, 1, 3\}; \quad \mathrm{Pr}_{2,4}\, M = \{(2, 4), (1, 5), (3, 3)\}.$$

Es fácil comprobar que si $M = X \times Y$, entonces

$$\mathrm{Pr}_1\, M = X; \quad \mathrm{Pr}_2 M = Y, \tag{1-47}$$

y si $Q \subseteq X \times Y$, entonces

$$\mathrm{Pr}_1\, Q \subseteq X; \quad \mathrm{Pr}_2\, Q \subseteq Y. \tag{1-48}$$

1-4. CORRESPONDENCIAS

a) Definición de correspondencia

Examinemos dos conjuntos X e Y. Los elementos de dichos conjuntos pueden compararse unos con otros de algún modo, formando pares (x, y). Si el método de tal comparación está determinado, o sea, para cada elemento $x \in X$ está indicado el elemento $y \in Y$ con el cual se compara el elemento x, se dice que entre los conjuntos X e Y se ha establecido correspondencia no siendo entonces imprescindible en lo absoluto que participen en la comparación todos los elementos de los conjuntos X e Y.

Para presentar una correspondencia es necesario señalar:

1) el conjunto X cuyos elementos se comparan con los elementos del otro conjunto;

2) el conjunto Y cuyos elementos se comparan con los elementos del primer conjunto;

3) el conjunto $Q \subseteq X \times Y$ que define la ley en conformidad con la cual se realiza la correspondencia, o sea, que enumera todos los pares (x, y) participantes en la comparación. De este modo, la correspondencia designada por q representa la tríada de conjuntos

$$q = (X, Y, Q), \tag{1-49}$$

en la cual $Q \subseteq X \times Y$. En esta expresión, la primera componente X se llama dominio de partida de la correspondencia, la segunda componente Y, dominio de llegada de la correspondencia, y la tercera componente Q, gráfica de la correspondencia. El término "gráfica" se explicará más detalladamente al estudiar el tipo particular de correspondencia denominada función.

Además de los tres conjuntos examinados X, Y, Q, también están relacionados indisolublemente con cada correspondencia los dos conjuntos siguientes: el conjunto $\mathrm{Pr}_1 Q$ llamado dominio de definición de la correspondencia, formado por los elementos del conjunto X que entran en comparación y el conjunto $\mathrm{Pr}_2 Q$ llamado dominio de valores de la correspondencia, constituido por los elementos del conjunto Y que entran en comparación.

Si $(x, y) \in Q$, se dice que el elemento y corresponde al elemento x. Es cómodo representar esto geométricamente mediante una flecha dirigida de x a y.

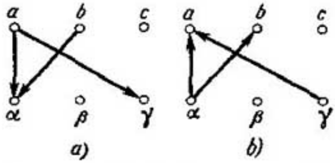

Fig. 1-10. Representación geométrica de las correspondencias directa e inversa

Ejemplo 1-13. Sean $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 5\}$ de manera que $X \times Y = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$. Este conjunto da la posibilidad de obtener 16 correspondencias diferentes. Citemos algunas de ellas:

$$Q_1 = \{(1, 3)\}; \quad \mathrm{Pr}_1 Q_1 \{1\}; \quad \mathrm{Pr}_2 Q_1 = \{3\};$$

$$Q_2 = \{(1, 3), (1, 5)\}; \quad \mathrm{Pr}_1 Q_2 = \{1\}; \quad \mathrm{Pr}_2 Q_2 = \{3, 5\} = Y.$$

Ejemplo 1-14. En una empresa hay tres vehículos automóviles, dos camiones α y β que trabajan en dos turnos y un autobús γ raramente utilizado. El camión β se encuentra en reparaciones. En la plantilla hay tres chóferes a, b, c de los cuales c está de vacaciones. La distribución de los chóferes por vehículos constituye una correspondencia. Una de las correspondencias posibles será la siguiente:

$$q = (\{a, b, c\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{(a, \alpha), (a, \gamma), (b, \alpha)\}).$$

Esta correspondencia está representada geométricamente en la figura 1-10, *a*. En ella el elemento α corresponde a los elementos a y b, y el elemento γ, al elemento a. La correspondncia q está definida para a y b, pero no lo está para c, por consiguiente, el dominio de definición de la correspondencia es el conjunto $\{a, b\}$. El dominio de valores de la correspondencia es el conjunto $\{\alpha, \gamma\}$.

b) Correspondencia inversa

Para cada correspondencia $q = (X, Y, Q)$, $Q \subseteq X \times Y$ existe una correspondencia inversa que se obtiene si se considera la correspondencia dada en dirección contraria, es decir, si se determinan los elementos $x \in X$ con los cuales se comparan los elementos $y \in Y$. La correspondencia inversa a la correspondencia q será designada por

$$q^{-1} = (Y, X, Q^{-1}), \tag{1-50}$$

donde $Q^{-1} \subseteq Y \times X$.

Ejemplo 1-15. Para el ejemplo 1-14 la correspondencia inversa será la distribución de los vehículos entre los chóferes:

$$(\{\alpha, \beta, \gamma\} \{a, b, c\}, \{(\alpha, a), (\alpha, b), (\gamma, a)\}),$$

lo que se muestra geométricamente en la figura 1-10 *b*.

En el ejemplo dado se ve que la representación geométrica de la correspondencia inversa se obtiene cambiando la dirección de las flechas en la representación geométrica de la correspondencia directa. De ello se desprende que la correspondencia inversa de la correspondencia inversa será la correspondencia directa

$$(q^{-1})^{-1} = q. \tag{1-51}$$

c) Composición de correspondencias

Se llama composición de correspondencias al empleo consecutivo de dos correspondencias.

La composición de correspondencias es una operación con tres conjuntos X, Y, Z, en los cuales están definidas dos correspondencias

$$\left.\begin{array}{ll} q = (X, Y, Q), & Q \subseteq X \times Y; \\ p = (Y, Z, P), & P \subseteq Y \times Z, \end{array}\right\} \tag{1-52}$$

por cierto, el dominio de valores de la primera correspondencia coincide con el dominio de definición de la segunda

$$\mathrm{Pr}_2 Q = \mathrm{Pr}_1 P. \tag{1-53}$$

La primera correspondencia define para cualquier $x \in \mathrm{Pr}_1 Q$ cierto elemento $y \in Y$ que además puede ser no único. De acuerdo con la definición de la operación de composición de correspondencias, ahora hace falta definir la $z \in Z$ para la $y \in Y$ hallada, empleando la segunda correspondencia. De este modo, la composición de correspondencias compara con cada elemento x del dominio de definición de la primera correspondencia Pr_1Q, uno o varios elementos z del dominio de valores de la segunda correspondencia Pr_2P.

Vamos a designar por $q(p)$ la composición de correspondencias q y p, y por $Q \circ P$, la gráfica de la composición de correspondencias. Entonces la composición de correspondencias (1-52) se escribe en la forma

$$q(p) = (Y, Z, Q \circ P), \quad Q \circ P \subseteq X \times Z. \tag{1-54}$$

Ejemplo 1-16. Si q es la correspondencia que determina la distribución de los chóferes por vehículos automóviles y p, la correspondencia que determina la distribución de vehículos por rutas, entonces la correspondencia $q(p)$ es la correspondencia que define la distribución de chóferes por rutas.

Como es lógico, la operación de composición puede extenderse asimismo a un número de correspondencias mayor de dos.

1-5. REFLEJOS Y FUNCIONES

a) Reflejos y sus propiedades

Sean X e Y ciertos conjuntos siendo $\Gamma \subseteq X \times Y$ y $Pr_1 \Gamma = X$. La tríada de conjuntos (X, Y, Γ) define cierta correspondencia que posee la propiedad de que su dominio de definición $Pr_1 \Gamma$ coincide

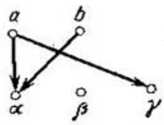

Fig. 1-11. Representación geométrica del reflejo

con el dominio de partida, es decir, con X, y, por lo tanto, dicha correspondencia está definida en todas partes en X. En otras palabras, para cada $x \in X$ existe una $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \Gamma$. Tal correspondencia definida en todas partes se denomina *reflejo* de X en Y y se expresa por

$$\Gamma : X \rightarrow Y. \tag{1-55}$$

A menudo por la palabra "reflejo" se comprende el reflejo unívoco. Sin embargo, nosotros no vamos a atenernos a esta regla y consideraremos que el reflejo Γ pone en correspondencia con cada elemento $x \in X$ cierto subconjunto

$$\Gamma x \subseteq Y, \tag{1-56}$$

llamado imagen del elemento x. La ley conforme a la cual se realiza la correspondencia se define por el conjunto Γ.

Ejemplo 1-17. Si en el ejemplo 1-14 se excluye del análisis el chófer c, se obtiene el reflejo $\Gamma: X \to Y$, en el cual $X = \{a, b\}$ es el conjunto de los chóferes; $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, el conjunto de los vehículos automóviles, y $\Gamma = \{(a, \alpha), (a, \gamma), (b, \alpha)\}$, la distribución de los chóferes por vehículos. En la figura 1-11 se muestra la representación geométrica de este reflejo.

Examinemos algunas propiedades del reflejo. Sea $A \subseteq X$. Para cualquier $x \in A$ el conjunto $\Gamma x \subseteq Y$ será la imagen de x. El total de los elementos de Y que constituyen imágenes de Γx para todas las $x \in A$ se denomina imagen del conjunto A y se designa por ΓA. Según esta definición

$$\Gamma A = \bigcup_{x \in A} \Gamma x. \qquad (1\text{-}57)$$

Si A_1 y A_2 son subconjuntos de X se cumple que

$$\Gamma (A_1 \cup A_2) = \Gamma A_1 \cup \Gamma A_2. \qquad (1\text{-}58)$$

En efecto,

$$\Gamma (A_1 \cup A_2) = \bigcup_{x \in A_1 \cup A_2} \Gamma x = \Big(\bigcup_{x \in A_1} \Gamma x\Big) \cup \Big(\bigcup_{x \in A_2} \Gamma x\Big) = \Gamma A_1 \cup \Gamma A_2.$$

Sin embargo, la relación

$$\Gamma (A_1 \cap A_2) = \Gamma A_1 \cap \Gamma A_2 \qquad (1\text{-}59)$$

sólo es válida en caso de que el reflejo sea unívoco. Para demostrar esto realizaremos el fraccionamiento de los conjuntos A_1 y A_2 (fig. 1-12) del tipo

$$A_1 = X_1 \cup X_0, \quad A_2 = X_2 \cup X_0,$$

donde $X_0 = A_1 \cap A_2$.

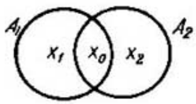

Fig. 1-12. Fraccionamiento de conjuntos intersecados

Por cierto, los conjuntos X_1, X_2, X_0 serán fraccionamientos del conjunto $A_1 \cup A_2$. Aunque dichos conjuntos no son incidentes, sus imágenes, sin embargo, pueden tener elementos comunes en caso de no ser unívoco el reflejo. Por consiguiente,

$$\Gamma A_1 \cap \Gamma A_2 = \Gamma (X_1 \cup X_0) \cap \Gamma (X_2 \cup X_0) =$$
$$= (\Gamma X_1 \cap \Gamma X_2) \cup (\Gamma X_1 \cap \Gamma X_0) \cup (\Gamma X_2 \cap \Gamma X_0) \cup \Gamma X_0.$$

En esta relación se ve que (1-59) sólo se cumple en el caso de que

$$\Gamma X_i \cap \Gamma X_k = \varnothing; \quad i, k \in \{0, 1, 2\}; \quad i \neq k, \qquad (1\text{-}60)$$

es decir, cuando el reflejo es unívoco. Ahora bien, en el caso general

$$\Gamma X_0 = \Gamma (A_1 \cap A_2) \subseteq \Gamma A_1 \cap \Gamma A_2. \tag{1-61}$$

Las relaciones obtenidas se generalizan también con facilidad para un número mayor de conjuntos A_i. Así pues, si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos de X, entonces

$$\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma A_i; \tag{1-62}$$

$$\Gamma\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma A_i. \tag{1-63}$$

Por cuanto el reflejo constituye un caso particular de correspondencia, son válidos para el reflejo los conceptos de reflejo inverso y composición de reflejos, análogos a los conceptos introducidos al estudiar las correspondencias.

b) Reflejos presentados en un conjunto

El caso en que coinciden los conjuntos X e Y es un importante caso particular de reflejo. En tal caso el reflejo Γ: $X \to X$ va a representar el reflejo del conjunto X sobre sí mismo y va a definirse por el par

$$(X, \Gamma), \tag{1-64}$$

en el cual $\Gamma \subseteq X^2$. La teoría de los grafos, cuyos elementos serán examinados en el capítulo 2, se ocupa del estudio detallado de tales reflejos. Aquí sólo nos referiremos a ciertas operaciones con semejantes reflejos.

Sean Γ y Δ los reflejos del conjunto X en X. Vamos a denominar composición de dichos reflejos el reflejo $\Gamma\Delta$ que en concordancia con la regla expuesta en el § 1-4 se define de la manera siguiente:

$$(\Gamma\Delta)\, x = \Gamma (\Delta x). \tag{1-65}$$

En el caso particular en que $\Delta = \Gamma$, obtenemos los reflejos

$$\Gamma^2 x = \Gamma (\Gamma x) \tag{1-66}$$

$$\Gamma^3 x = \Gamma (\Gamma^2 x), \text{ etc.} \tag{1-67}$$

De este modo, en el caso general para cualquier $s \geqslant 2$ se verifica

$$\Gamma^s x = \Gamma \left(\Gamma^{s-1} x\right). \tag{1-68}$$

Mediante una definición especial introduzcamos la relación

$$\Gamma^0 x = x. \tag{1-69}$$

Ello da la posibilidad de extender la relación (1-68) también a las s negativas. Efectivamente, según (1-68)

$$\Gamma^0 x = \Gamma(\Gamma^{-1}x) = \Gamma\Gamma^{-1}x = x. \tag{1-70}$$

Esto significa que $\Gamma^{-1}x$ constituye un reflejo inverso. Entonces

$$\Gamma^{-2}x = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}x), \tag{1-71}$$

etc.

Ejemplo 1-18. Sea X un conjunto de personas. Para cada persona $x \in X$, designemos por Γx el conjunto de sus hijos. Entonces $\Gamma^2 x$ es el conjunto de los nietos de x; $\Gamma^3 x$, el conjunto de los biznietos de x; $\Gamma^{-1}x$, el conjunto de los padres de x, etc.

Representando las personas por puntos y trazando las flechas que van de x a Γx, obtenemos el árbol genealógico que se muestra a título de ejemplo en la figura 1-13.

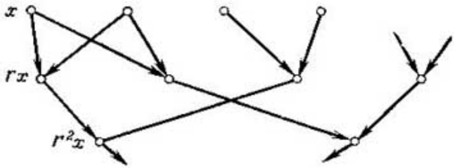

Fig. 1-13. Arbol genealógico

Ejemplo 1-19. Analicemos un juego de ajedrez. Designemos por x cierta posición (ubicación de las figuras en el tablero), que puede crearse durante el juego, y por X, el conjunto de las posiciones posibles. Entonces, Γx va a significar para cualquier $x \in X$ el conjunto de posiciones que pueden obtenerse a partir de x haciendo una jugada y cumpliendo las reglas del juego. En tal caso,

$\Gamma x = \varnothing$, si x es una posición de jaque mate o de tablas;

$\Gamma^3 x$ es el conjunto de las posiciones que pueden obtenerse a partir de x con tres jugadas;

$\Gamma^{-1}x$ es el conjunto de las posiciones a partir de las cuales puede obtenerse la posición dada con una jugada.

Para los reflejos presentados en un conjunto, con frecuencia se utilizan algunas otras denominaciones que se encontrarán más adelante en nuestra obra.

Así pues, si los elementos $x \in X$ representan los estados de un sistema dinámico, el reflejo Γx puede considerarse como el conjunto de los estados a los cuales puede pasar el sistema partiendo de un estado dado. En este caso lo más apropiado es utilizar el término transformación del estado del sistema dinámico. Para designar ciertos tipos especiales de reflejos presentados en un mismo conjunto, también se emplea el término *relación*.

c) Función, funcional y operador

Examinemos cierto reflejo

$$f : X \to Y. \tag{1-72}$$

Este reflejo se denomina *función* si es unívoco, es decir, si para cualesquiera pares $(x_1, y_1) \in f$ y $(x_2, y_2) \in f$ de $x_2 = x_1$ se desprende que $y_2 = y_1$.

De la definición de reflejo y de los ejemplos dados anteriormente se deduce que los elementos de los conjuntos X e Y pueden ser objetos de cualquier naturaleza. No obstante, en los problemas de cibernética presentan gran interés los reflejos que son unívocos y cuyo conjunto de valores es el conjunto de los números reales R. El reflejo unívoco f definido por (1-72) se denomina función con valores reales si $Y \subseteq R$.

Ejemplo 1-20. De una ciudad a otra se puede viajar por tren, autobús o avión. El precio del pasaje es, respectivamente, de 7, 9 y 12 rublos. El precio del pasaje en este ejemplo puede representarse como función del medio de transporte. Examinemos para ello los conjuntos

$$X = \{\text{tr., aut., av.}\}, \quad Y = \{7, 9, 12\}.$$

La función $f: X \to Y$, obtenida de las condiciones del ejemplo, puede escribirse en forma del conjunto $f\{(\text{tr.}, 7), \text{aut.}, 9), (\text{av.}, 12)\}$.

El valor y en cualquiera de los pares $(x, y) \in f$ se denomina función de la x dada, escribiéndose en la forma $y = f(x)$. Tal notación permite introducir la siguiente definición formal de función:

$$f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}. \tag{1-73}$$

De esta suerte, el símbolo f se utiliza para la definición de la función en dos sentidos:

1) f es el conjunto cuyos elementos son los pares (x, y) que participan en la correspondencia;

2) $f(x)$ es la designación para la $y \in Y$ correspondiente a la $x \in X$ dada.

La definición formal de función a modo de la relación (1-73), permite establecer los métodos de presentación de la función.

1. La enumeración de todos los pares (x, y) que constituyen el conjunto f, como se hizo en el ejemplo 1-20. Tal método de presentación de la función es aplicable si X es un cojunto finito. Para mayor claridad conviene disponer los pares (x, y) en forma tabular.

2. En muchos casos, tanto X como Y constituyen conjuntos de números reales o complejos. En tales casos, muy frecuentemente se comprende por $f(x)$ la fórmula, es decir, la expresión que contiene la relación de las operaciones matemáticas (adición, substracción, división, logaritmación, etc.), que hay que realizar con $x \in X$ para obtener y.

Ejemplo 1-21. Sean $X = Y = R$ y $f = \{(x, y) \in R^2 : y = x^2\}$. Entonces $f(x) = x^2$.

A veces resulta necesario emplear distintas fórmulas para los diferentes subconjuntos del conjunto X de la función. Sean $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n$ los subconjuntos de X que no se intersecan por pares. Designemos por $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ la fórmula que define y siendo $x \in A_i$. Entonces la función $f(x)$ va a definirse por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{para } x \in A_1; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x) & \text{para } x \in A_n. \end{cases} \tag{1-74}$$

Así, la función $y = f(x) = |x|$ puede presentarse en la forma

$$y = \begin{cases} x & \text{para } x \geqslant 0; \\ -x & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

3. Si X e Y son conjuntos de los números reales, los elementos $(x, y) \in f$ pueden representarse en forma de puntos en el plano R^2. La totalidad de dichos puntos va a constituir la *gráfica* de la función $f(x)$. En la figura 1-14, *a* está representada la gráfica de la función dada en el ejemplo 1-21.

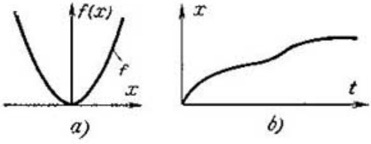

Fig. 1.14. Gráficas de funciones

En los problemas de cibernética con mucha frecuencia se hace necesario operar con funciones del tiempo. Estas funciones definen el reflejo de un número finito o infinito de puntos de cierto intervalo de tiempo T en el conjunto de números reales $X \subseteq R$, lo que puede escribirse en la forma

$$f : T \to X. \tag{1-75}$$

Designando por t los elementos del conjunto T, y por x los elementos del conjunto X, obtenemos la función $x = f(t)$, que determina el carácter de la variación del valor de x en el tiempo, como se muestra por ejemplo, en la figura 1-14, *b*. Para simplificar la notación vamos a designar simplemente por $x(t)$ la dependencia de x del tiempo.

Si en la expresión (1-72) $X = U \times V$, entonces llegamos a la función de dos variables u y v, designada por $f(u, v)$, donde $u \in U$ y $v \in V$. La definición formal de la función de dos variables reales será la siguiente:

$$f = \{(u, v, y) \in U \times V \times Y : y = f(u, v)\}. \tag{1-76}$$

De manera análoga se definen las funciones de tres o un número mayor de variables.

Por cuanto la función es un caso particular de correspondencia, para ella serán válidos los conceptos de función inversa y composición de las funciones, como los expuestos para la correspondencia. Si f y g son dos funciones en el conjunto R^2, siendo

$$f : X \to Y \quad g : Y \to Z, \tag{1-77}$$

entonces las funciones inversas serán:

$$f^{-1} : Y \to X \quad g^{-1} : Z \to Y. \tag{1-78}$$

La composición de las funciones f y g

$$f \circ g : X \to Z \tag{1-79}$$

define para cada $x \in Z$ una $z \in Z$ que se designa como

$$z = (f \circ g)\, x = g\,[f\,(x)]. \tag{1-80}$$

El concepto de funcional es un concepto más general que el de función. La *funcional* establece la dependencia entre un conjunto de números, por un lado, y cierto conjunto de funciones, por otro lado. Puede servir de ejemplo de funcional la integral definida del tipo

$$J\,(f) = \int_a^b f\,(x)\,dx.$$

Como vemos, la funcional $J(f)$ representa un número dependiente de la función $f(x)$, la cual se elige de cierto conjunto presentado de funciones.

El concepto de operador es un concepto aún más amplio. El *operador* establece la correspondencia entre dos conjuntos de funciones de tal modo que a cada uno de éstos corresponde una función determinada del otro conjunto. Así pues, si designamos por p el operador de diferenciación, la relación entre la derivada $f'(x) = df(x)/dx$ y la función $f(x)$ puede escribirse en forma de la relación operacional

$$f'(x) = p\,[f\,(x)].$$

1-6. RELACIONES

a) Relación como representación del enlace mutuo entre los fenómenos

Hasta ahora hemos considerado los conjuntos simplemente como una reunión de elementos. En los ejemplos dados hemos visto que pueden ser elementos de los conjuntos los objetos y fenómenos más diversos de la naturaleza, la técnica y la sociedad, e incluso de la vida cotidiana. Estos objetos y fenómenos poseen las más diferentes propiedades. Pero, al estudiar los conjuntos como reunión de elementos nos hemos abstraído de todas las propiedades de dichos elementos salvo una: ser elementos del conjunto considerado.

Tal enfoque resulta sumamente provechoso ya que permite introducir un método único de descripción de los fenómenos de más diverso tipo. Pero este enfoque en muchos casos es a la vez unilateral e insuficiente.

En la naturaleza y la sociedad los diferentes sucesos y fenómenos no existen por sí mismos, sino que están vinculados recíprocamente e influyen unos sobre otros. En el concepto de conjunto no se refleja este enlace mutuo de los fenómenos. Es por ello que el concepto de conjunto requiere su desarrollo ulterior para aproximarse a la descripción de las situaciones reales.

El primer paso en este sentido es la introducción del concepto de relación en el conjunto que constituye el método matemático de expresión del enlace mutuo entre los fenómenos. El concepto de conjunto obtiene su desarrollo posterior en los espacios multidimensionales al estudio de los cuales está dedicado el tercer capítulo.

b) Propiedades de las relaciones

Como ya se ha indicado, el término "relación" se emplea para designar algunos tipos de reflejos dados en un mismo conjunto. Debido al uso de este término es conveniente introducir una serie de símbolos especiales.

Supongamos que el reflejo (X, Γ) es una relación. Examinemos el elemento $y \in \Gamma x$. Diremos que el elemento y se encuentra en relación Γ con el elemento x y lo escribiremos en la forma

$$y\Gamma x. \tag{1-81}$$

Así pues, el símbolo Γ en el ejemplo 1-18 denota la relación "ser hijos de la persona dada".

Nota. Utilizando para el reflejo dado en un conjunto la correlación (1-64), obtenemos que la relación es el par de conjuntos (X, Γ) en el cual $\Gamma \subseteq X^2$. Por cuanto los elementos del conjunto X^2 son pares ordenados puede decirse que la relación es un conjunto de pares ordenados. Como que cada par relaciona entre sí sólo dos elementos del conjunto X^2, esta relación se denomina a veces relación *binaria* o *de dos lugares*.

Puede introducirse un concepto de relación más general denominando relación el par de conjuntos (X, Γ), donde $\Gamma \subseteq X^n$. Los elementos del conjunto X^n son las n-es ordenadas y esto permite denominar *n-aria* o *de n lugares* la relación dada. En particular, el conjunto de las triadas ordenadas puede llamarse relación *ter-*

naria o *de tres lugares*. En lo adelante, sin especificarlo especialmente, con el término "relación" nos referiremos a la relación *binaria*.

Las relaciones se dividen en diferentes clases dependiendo de si poseen o no ciertas propiedades.

Examinemos las seis propiedades principales de las relaciones. Al exponer dichas propiedades vamos a considerar que x, y, z son elementos cualesquiera del conjunto X.

Reflexividad: $x\Gamma x$ es cierto; antirreflexividad: $x\Gamma x$ es falso; simetría: $x\Gamma y \rightarrow y\Gamma x$; antisimetría: $x\Gamma y$ y $y\Gamma x \rightarrow x = y$; asimetría: si $x\Gamma y$ es cierto, entonces $y\Gamma x$ es falso; transitividad: $x\Gamma y$ y $y\Gamma z \rightarrow$ $\rightarrow x\Gamma z$.

Examinemos algunas clases importantes de relaciones, utilizando las propiedades expuestas.

c) Relación de equivalencia

Algunos elementos de un conjunto pueden considerarse equivalentes, cuando, en algunos casos, al someterlos a cierto análisis, uno de ellos puede ser sustituido por otro. Entonces se dice que los elementos dados están en relación de equivalencia.

Ejemplos de relaciones de equivalencia:

la relación "estar en un curso" en el conjunto de los estudiantes de una facultad;

la relación "tener igual resta al dividirse por 3" en el conjunto de los números enteros positivos;

la relación de paralelismo en el conjunto de las rectas de un plano;

la relación de semejanza en el conjunto de los triángulos, etc.

Para formular con exactitud la relación de equivalencia vamos a considerar que el término "relación de equivalencia" se emplea solamente en caso en que se cumplen las tres condiciones siguientes:

1) cada elemento es equivalente a sí mismo;

2) la proposición de que dos elementos son equivalentes no requiere que se precise cuál de los elementos se considera primero y cuál segundo;

3) dos elementos equivalentes a un tercero son equivalentes entre sí.

Adoptemos el símbolo $\equiv$ para denotar equivalencia. Entonces la definición general de equivalencia se obtiene escribiendo las tres condiciones citadas anteriormente en forma de las relaciones siguientes:

1) $x \equiv x$ (reflexividad);

2) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$ (simetría);

3) $x \equiv y$ e $y \equiv z \rightarrow x \equiv z$ (transitividad).

Así pues, la relación Γ se denomina relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

La relación de equivalencia está vinculada estrechamente al fraccionamiento de conjuntos estudiado en el § 1-2. Sea X un conjunto en el que está definida la relación de equivalencia. Por ejemplo, X es el conjunto de estudiantes en un curso y la relación de equivalencia es "estar en un grupo". Llamaremos clase de equivalencia al subconjunto de elementos equivalentes a cierto elemento $x \in X$. Así pues, el grupo en que cursa estudios el estudiante Ivanov será la clase de equivalencia que equivale al estudiante mencionado.

Sea J cierto conjunto de índices. Designemos por $\{A_j \subseteq X : j \in J\}$ el conjunto de clases de equivalencia para el conjunto X. Evidentemente, todos los elementos de una clase de equivalencia son equivalentes entre sí (propiedad transitiva) y cualquier elemento $x \in X$ puede estar en una y sólo una clase. Pero en tal caso X es la reunión de los conjuntos no intersecados A_j y de este modo el sistema completo de clases $\{A_j \subseteq X : j \in J\}$ constituye el fraccionamiento del conjunto X. Así pues, a cada relación de equivalencia en el conjunto X corresponde cierto fraccionamiento de éste en clases A_j.

La relación de equivalencia en el conjunto X y el fraccionamiento del mismo en clases se denominan conjugados si para x e y cualesquiera la relación $x \equiv y$ se cumple cuando, y solo cuando x e y pertenecen a una misma clase A_j de este fraccionamiento. La comparación de los ejemplos de la sección presente con los ejemplos del § 1-2 coadyuvará a esclarecer con más exactitud el vínculo de la relación de equivalencia con el fraccionamiento del conjunto.

En calidad de símbolo general de la relación de equivalencia se utiliza el símbolo $\equiv$ (a veces $\sim$). No obstante, para algunas relaciones de equivalencia particulares se emplean otros símbolos: $=$ para designar igualdad; $\parallel$ para denotar paralelismo; $\rightleftarrows$ para designar equivalencia lógica.

d) Relación de orden

Con frecuencia encontramos relaciones que definen cierto orden de disposición de los elementos de un conjunto. Por ejemplo, distinguimos los conceptos "antes" y "después" en aquellos casos en que los elementos del conjunto son estados de un sistema dinámico. Diferenciamos los conceptos "es menor que" y "es mayor que" y utilizamos los símbolos $>$ o $<$ si los elementos del conjunto son números. Distinguimos los conceptos de conjunto y subconjunto empleando los símbolos $\subseteq$ o $\subset$.

En todos estos casos los elementos del conjunto X o los grupos de elementos pueden disponerse en cierto orden, es decir, puede introducirse la relación de orden en el conjunto X.

Se distingue la relación de orden no estricto para la que se utiliza el símbolo $\leqslant$ (siendo sus casos particulares los símbolos $\leqslant$, $\subseteq$) y la relación de orden estricto para la cual se emplea el símbolo $\prec$ (siendo sus casos particulares los símbolos $<$, $\subset$, $\rightarrow$). Describamos estas relaciones enumerando sus propiedades.

Se denomina relación de orden no estricto la que posee las tres propiedades siguientes:

$x \leqslant x$ es cierto (reflexividad);
$x \leqslant y$ e $y \leqslant x \rightarrow x = y$ (antisimetría);
$x \leqslant y$ e $y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z$ (transitividad).

Se llama relación de orden estricto a la que tiene las tres propiedades siguientes:

$x \prec x$ es falso (antirreflexividad);
$x \prec y$ e $y \prec x$ se excluyen mutuamente (asimetría);
$x \prec y$ e $y \prec z \rightarrow x \prec z$ (transitividad).

El conjunto X se denomina ordenado si dos elementos cualesquiera x e y del mismo son comparables, es decir, si para ellos

$$x \prec y \quad \text{o} \quad x = y \quad \text{o} \quad y \prec x.$$

e) Relación de predominio

En aquellos casos en que X denota un conjunto de personas o de grupos de personas, nos encontramos con una relación que es de predominio. Diremos que x predomina sobre y y escribiremos $x \lll y$ si x supera en algo a y. Así, x puede ser un deportista o equipo deportivo que venció al deportista o equipo y, o una persona que goza de autoridad ante la persona y, o una propiedad que se prefiere a la propiedad y.

Diremos que entre los elementos del conjunto X hay relación de predominio si dichos elementos tienen las dos propiedades siguientes:

1) ningún individuo puede predominar sobre sí mismo, es decir, $x \ggg x$ es falso (antirreflexividad);

2) en cada par de individuos es seguro que un individuo predomina sobre otro, o sea, $x \lll y$ e $y \lll x$ se excluyen mutuamente (asimetría).

Respecto al predominio la propiedad de transitividad no se cumple. En efecto, si en unas competencias el equipo x venció al y y el y derrotó al z, de esto no se deduce que el equipo x vencerá necesariamente al z.

1-7. ALGUNOS CONCEPTOS DE ALGEBRA SUPERIOR

a) Grupos, anillos y campos

Las operaciones algebraicas (adición, multiplicación y división) que fueron introducidas inicialmente para los números racionales, durante el proceso de desarrollo de las matemáticas fueron extendidas a otras nociones diferentes: números complejos, vectores, matrices, etc. Las reglas de ejecución de estas operaciones son distintas para las diferentes nociones. No obstante, dichas operaciones tienen propiedades comunes cuyo conocimiento permite determinar si es posible o no emplearlas para cualquier tipo concreto de nociones. El establecimiento de tales propiedades conduce a los conceptos de operación, grupo, anillo y campo algebraicos.

Sea X cierto conjunto. Se dice que en el conjunto X está presentada una *operación algebraica* si con cada par ordenado $(a, b) \in X^2$ está puesto en correspondencia de manera unívoca un elemento determinado c que pertenece al mismo conjunto X. La operación definida de este modo se denomina *multiplicación* o *adición* y se escribe en la forma

$$c = ab \quad \text{o} \quad c = a + b. \tag{1-82}$$

La operación algebraica se denomina asociativa si para $a, b, c \in X$ cualesquiera se cumple la correlación

$$(ab)\,c = a\,(bc) \quad \text{o} \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Se denomina *semigrupo* el conjunto X con una operación asociativa presentada en el mismo (llamémosla por ahora multiplicación). El semigrupo se denomina *grupo* si:

1) en el conjunto X existe un elemento e tal que para cualquier $a \in X$ se verifica

$$ae = ea = a; \tag{1-83}$$

2) para cualquier $a \in X$ existe un elemento a^{-1} tal que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e. \tag{1-84}$$

El elemento e se denomina *unidad* del *grupo* y el elemento a^{-1}, *inverso* de a. Si la operación definida en el grupo se denomina adición, entonces el elemento e se llama *cero* del grupo y se designa por el símbolo 0 y el a^{-1} se denomina *opuesto* de a y se designa $-a$. Los elementos 0 y $-a$ satisfacen las relaciones

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a + (-a) = 0. \tag{1-85}$$

El grupo se denomina *finito* si X es un conjunto finito. Son ejemplos de grupos: el conjunto de los números enteros respecto a la operación de adición; el conjunto de todos los números racionales diferentes de cero respecto a la operación de multiplicación; el conjunto de todos los vectores en el plano respecto a la operación de adición vectorial. Sin embargo, los números enteros no forman grupo respecto a la operación de multiplicación ya que para un número entero distinto de ± 1 no existe un número entero inverso del mismo. El conjunto $\{1, -1, i, -i\}$, donde $i = \sqrt{-1}$ puede servir de ejemplo de grupo finito respecto a la operación de multiplicación.

Si en el conjunto X están definidas a la vez dos operaciones algebraicas, la adición y la multiplicación, siendo conmutativa la operación de adición ($a + b = b + a$), y estando la operación de multiplicación vinculada a la de adición mediante las leyes distributivas

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (b + c)a = ba + ca, \qquad (1\text{-}86)$$

entonces tal conjunto se denomina *anillo*. En el anillo pueden faltar la unidad y los elementos inversos. Si en él hay la unidad, entonces se denomina *anillo con unidad*. Son anillos los conjuntos de todos los números enteros, racionales, reales y complejos, respecto a las operaciones comunes de adición y multiplicación.

Se denomina *campo* al anillo en el que para elementos cualesquiera $a \neq 0$ y b existe precisamente un elemento x tal que $ax = b$. El elemento x se denomina cociente de la división del elemento b por el a y se designa por $x = b/a$. Sirven de ejemplos de campos el anillo de todos los números racionales, el anillo de todos los números reales y el anillo de todos los números complejos.

b) Isomorfismo. Homomorfismo. Simulación

La simulación de sistemas y situaciones existentes en el mundo real juega gran papel en las investigaciones científicas y prácticas. La esencia de la simulación consiste en establecer una relación de equivalencia entre dos sistemas, cada uno de los cuales puede existir en realidad o ser abstracto. Si el primero resulta más sencillo para la investigación que el segundo, es posible juzgar sobre las propiedades del segundo sistema observando el comportamiento del primero. En este caso el sistema empleado para la investigación se denomina *modelo*.

El modelo se denomina *isomórfico* (de igual forma) si entre el modelo y el sistema real se observa una correspondencia total de elementos. Dicha correspondencia tiene lugar entre el negativo y la imagen obtenida del mismo, el dibujo y la pieza elaborada según éste, los procesos en un sistema real y la solución de la ecuación que describe su comportamiento.

Sin embargo, en muchos casos los modelos isomórficos resultan demasiado complicados e incómodos para su utilización práctica. Resultan más apropiados aquellos que permiten juzgar solamente acerca de los aspectos esenciales del comportamiento de los sistemas reales sin detallarlos. Puede servir de ejemplo el siguiente modelo: el mapa geográfico con respecto al sector de la superficie terrestre representada en éste.

Se llaman *homomorfos* los modelos, algunos de cuyos elementos sólo corresponden a grandes partes del sistema real y en los cuales falta la correspondencia total entre los elementos del modelo y del sistema.

Puede darse una definición matemática rigurosa del isomorfismo y homomorfismo en términos de la teoría de los grupos.

Supongamos que los conjuntos X e Y son grupos. Si entre los elementos de dichos grupos se ha establecido una correspondencia biunívoca, según la cual para elementos cualesquiera $a, b \in X$ y elementos correspondientes a ellos $a', b' \in Y$, al elemento $c = ab$ va a corresponder el elemento $c' = a'b'$, denominándose a tales grupos isomórficos.

Los grupos isomórficos pueden diferir unos de otros sólo por la naturaleza de sus elementos y quizás por la denominación de las operaciones definidas en el grupo. Pero todas las propiedades de los grupos isomórficos entre sí que se derivan de las propiedades de las operaciones definidas en ellos y que no dependen de la naturaleza de los elementos del grupo son iguales.

En los grupos homomórficos la correspondencia entre grupos es unilateral. Se dice que el grupo X *está reflejado homomórficamente* en el grupo Y si a cada elemento del grupo X corresponde un elemento determinado unívocamente del grupo Y, y si a los elementos $a, b \in X$ corresponden los elementos $a', b' \in Y$, entonces al elemento $ab = c$ corresponde el elemento $c' = a'b'$. En lo general, en caso de homomorfismo del tipo $X \to Y$ pueden pasar al elemento considerado del grupo Y diversos elementos del grupo X y puede asimismo no pasar ninguno.

PROBLEMAS PARA EL CAPITULO 1

1-1. ¿Qué representa el conjunto $Y \setminus X$ del ejemplo 1-1?

1-2. Designar mediante rayado el conjunto $Y \setminus X$ del ejemplo 1-3.

1-3. Sea R un conjunto de números reales y

$$X = \{x \in R : 0 \leqslant x \leqslant 1\}, \quad Y = \{y \in R : 0 \leqslant y \leqslant 2\}.$$

¿ Qué representan los conjuntos $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$?

1-4. Dibujar las figuras que representan los conjuntos $A = \{(x, y) \in R^2 : : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ y $B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\}$.

¿ Qué figuras representan los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $R^2 \setminus A$?

1-5. Demostrar las identidades $X \cap \varnothing = \varnothing$; $X \cup \varnothing = X$, $I \cap X = X$ $I \cup X = I$ utilizando la correlación (1-34).

1-6. Representar en el plano real $R^2 = R \times R$ los conjuntos $X \times Y$ e $Y \times X$ del problema 1-3.

1-7. Representar geométricamente los conjuntos $A \times R$ y $R \times A$, donde $A = [2, 3]$.

1-8. Hallar $\mathrm{Pr}_1 M$ y $\mathrm{Pr}_2 M$ para el conjunto $M = \{x, y\} \in R^2 : (x-2)^2 + + y^2 = 1\}$.

1-9. Sea $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ un conjunto universal y $X = \{x_1, x_2\}$; $Y = \{x_2, x_3\}$; $Z = \{x_3\}$ sus subconjuntos. Determinar enumerando los conjuntos siguientes:

$$X \times X; \ Z \times Z; \ X \times Y; \ Y \times X; \ X \times Y \cap Y \times X; \ X \times Y \cup Y \times X.$$

1-10. Sean X, Y, Z los subconjuntos del conjunto R^2 iguales a $X = \{(x, y) : : x \geqslant 0\}$; $Y = \{(x, y) : y \geqslant 0\}$; $Z = \{(x, y) : x + y \geqslant 1\}$. Representar geométricamente los conjuntos

$$X;\ Y;\ Z;\ X\cup Y;\ \overline{X\cup Y};\ X\cap Y;\ \overline{X\cap Y};\ X\cap Z;\ \overline{X\cap Z};$$

$$X\cap Y\cap Z;\ X\cap Y\cap \overline{Z}.$$

1-11. ¿A qué es igual el conjunto $X\times Y$ si X e Y son subconjuntos del conjunto R^2 y $X=\{(x,y):2x+y=1\}$; $Y=\{(x,y):x-y=0\}$?

1-12. Escribir en el ejemplo 1-13 todas las 16 correspondencias. Determinar $\mathrm{Pr}_1 Q$ y $\mathrm{Pr}_2 Q$ para cada una de ellas.

1-13. Hallar la función inversa f^{-1} para la función f del ejemplo 1-21.

1-14. Sean f y g las funciones en el conjunto R^2 iguales a $f=\{(x,y):y:x^2\}$; $g=\{(y,z):z=\operatorname{sen} y\}$. Hallar la composición de estas funciones $f\circ g$.

Capítulo segundo

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE LOS GRAFOS

2-1. DEFINICIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE LOS GRAFOS

a) Definición de grafo según la teoría de conjuntos

Se puede obtener una representación clara del grafo si nos imaginamos cierto conjunto de puntos del plano X denominados vértices y el conjunto de segmentos dirigidos U llamados arcos que unen todos o algunos de los vértices. Matemáticamente, el grafo G puede definirse como el par de conjuntos X y U:

$$G = (X, U). \tag{2-1}$$

En la figura 2-1 está representado el grafo cuyos vértices son los puntos a, b, c, d, e, g, h, y sus arcos, los segmentos (a, a), (c, b), (c, d), (d, c); (d, d), (c, e), (e, d), (g, h). Son ejemplos de grafos las relaciones de paternidad y maternidad en un conjunto de personas (véase la fig. 1-13), el mapa de los caminos en la comarca, el diagrama de conexiones de aparatos eléctricos, las relaciones de superioridad de algunos participantes de un torneo sobre otros, etc.

A veces resulta cómodo dar otra definición de grafos. Puede considerarse que el conjunto de los arcos dirigidos U que unen los elementos del conjunto X refleja este conjunto en sí mismo. Por eso, puede considerarse presentado el grafo si están dados el conjunto de sus vértices X y el método de reflexión Γ del conjunto X en X. De esta suerte, el grafo G es el par (X, Γ), que consta del conjunto X y el reflejo Γ presentado en este conjunto:

$$G = (X, \Gamma). \tag{2-2}$$

Así, para el grafo representado en la figura 2-1 el reflejo Γ se determina del modo siguiente:

$$a = \Gamma a;\quad \Gamma b = \varnothing;\quad \Gamma c = \{b, d, e\};\quad \Gamma d = \{d, c\};\quad \Gamma e = d;$$
$$\Gamma g = h;\quad \Gamma h = \varnothing.$$

Es fácil ver que la definición de grafos dada coincide por completo con la definición de relación en el conjunto.

En ocasiones es conveniente representar los grafos en forma de ciertas matrices, en particular como matrices de adyacencia y de incidencia. Daremos previamente dos definiciones.

Dos vértices x e y se denominan *adyacentes* si son diferentes y existe un arco que va de x a y.

El arco u se llama *incidente* con el vértice x si llega a este vértice o sale del mismo.

Designemos por $x_1, \ldots, x_n$ los vértices del grafo y por $u_1, \ldots, u_m$ sus arcos. Introduzcamos los números:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si hay un arco que une el vértice} \\ i, & \text{con el vértice } j; \\ 0, & \text{si no hay tal arco.} \end{cases}$$

La matriz cuadrática $\mathbf{R} = \| r_{ij} \|$ del orden $n \times n$ se denomina *matriz de adyacencia* del grafo,

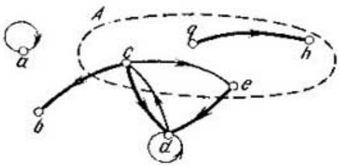

Fig. 2-1. Vista general de un grafo

Introduzcamos más adelante los números

$$s_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{si } u_j \text{ sale de } x_i \\ -1, & \text{si } u_j \text{ llega a } x_i; \\ 0, & \text{si } u_j \text{ no es incidente con } x_i. \end{cases}$$

La matriz $\mathbf{S} = \| s_{ij} \|$ de orden $n \times m$ se llama *matriz de incidencia* de los arcos del grafo.

Las matrices de incidencias sólo son aplicables en la forma descrita a los grafos sin lazos. En caso de haber lazos en el grafo hay que desmembrar dicha matriz en dos semimatrices: positiva y negativa.

Introduzcamos algunos conceptos y definiciones que sirven para describir los distintos tipos de grafos.

Subgrafo G_A del grafo $G = (X, \Gamma)$ se denomina el grafo que incluye sólo una parte de los vértices del grafo G que, junto con los arcos que unen dichos vértices, forman el conjunto A, como por ejemplo, la zona circunscrita con línea de trazos en la figura 2-1. El subgrafo G_A se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$G_A = (A, \Gamma_A), \tag{2-3}$$

donde

$$A \subseteq X, \quad \Gamma_A x = (\Gamma x) \cap A. \tag{2-4}$$

El *grafo parcial* G_Δ con respecto al grafo $G = (X, \Gamma)$ se llama al grafo que sólo contiene una parte de los arcos del grafo G, es decir, definido por la condición

$$G_\Delta = (X, \Delta), \tag{2-5}$$

donde

$$\Delta x \subseteq \Gamma x. \tag{2-6}$$

Así pues, en la figura 2-1 el grafo formado por los arcos gruesos es un grafo parcial.

Ejemplo 2-1. Sea $G = (X, \Gamma)$ el mapa de carreteras de la Unión Soviética. Entonces el mapa de carreteras de la región de Tambov constituye un subgrafo y el mapa de carreteras principales del la Unión Soviética, un grafo parcial.

Son también importantes los conceptos de camino y contorno. Anteriormente se dio la definición de arco como el segmento dirigido que une dos vértices. El arco que une los vértices a y b y está dirigido de a a b se designa por $u = (a, b)$.

En el grafo G se denomina *camino* la secuencia de arcos $\mu = (u_1, \ldots, u_k)$ en la cual el final de cada arco anterior coincide con el comienzo del siguiente. El camino μ cuyos vértices consecutivos son $a, b, \ldots, m$ se designa por $\mu = (a, b, \ldots, m)$. Se llama *largo del camino* $\mu = (u_1, \ldots, u_k)$ al número $l(\mu) = k$ igual al número de arcos que constituyen el camino μ. Este puede ser finito o infinito. En caso de ser infinito suponemos que $l(\mu) = \infty$. El camino en el cual ningún arco se encuentra dos veces se denomina *sencillo*. Se llama *elemental* al camino en el cual ningún vértice se encuentra dos veces.

El *contorno* es el camino finito $\mu = (x_1, \ldots, x_k)$ en el que el vértice inicial x_1 coincide con el final x_k. Por cierto, el contorno se denomina *elemental* si todos sus vértices son diferentes (a excepción del inicial y final que coinciden). Se llama *lazo* al contorno de largo unitario formado por el arco de tipo (a, a). Así pues, en la figura 2-1 (e, d, c, b) es un camino, (c, e, d, c), un contorno y (d, d), un lazo.

A veces se analiza el grafo sin tomar en consideración la orientación de sus arcos. En tal caso se denomina grafo *no orientado*. Para éste los conceptos de arco, camino y contorno se sustituyen por los de arista, circuito y ciclo. La *arista* es el segmento que une dos vértices. El grafo en la figura 2-1 tiene ocho arcos y siete aristas. Se denomina *circuito* a una secuencia de aristas. Se llama *ciclo* al circuito finito en el que coinciden los vértices inicial y final.

Está vinculada al concepto de grafo no orientado una importante característica denominada *conexión del grafo*. Se dice que el grafo es conexo si dos de sus vértices cualesquiera pueden conectarse en circuito. Si el grafo G no es conexo puede desmembrarse en subgrafos G_i tales que sean conexos todos los vértices en cada subgrafo y no lo sean los de los diferentes subgrafos.

Tales subgrafos G_i se denominan componentes de conexión del grafo G.

Para determinar la conexión de un grafo orientado no es necesario atender a la orientación de los arcos. El grafo representado en la figura 2-1 no es conexo, pero su subgrafo que consta de los vértices b, c, d, e es conexo. Para el grafo orientado existe el concepto de conexión fuerte. Un grafo es fuertemente conexo si para dos vértices cualesquiera x e y $(x \neq y)$ existe un camino que va de x a y.

El árbol es un importante caso particular de grafo no orientado. Se denomina árbol el grafo conexo finito no orientado desprovisto de ciclos. En la figura 2-2 se muestran ejemplos de árboles.

Si está dado el conjunto de vértices $a, b, c, \ldots$, el árbol puede construirse del modo siguiente. Tomamos como vértice inicial uno de éstos, por ejemplo a, y lo denominamos *raíz* del árbol. Desde

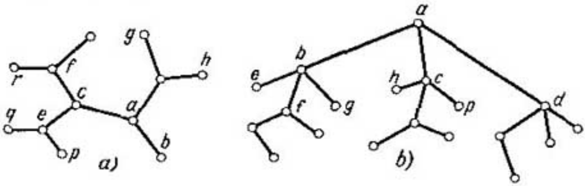

Fig. 2-2. Ejemplos de árboles

este vértice trazamos aristas a los vértices contiguos $b, c, d, \ldots$, desde éstos trazamos las aristas a los vértices vecinos de los mismos $e, f, g, h, \ldots$, etc. De esta manera, el árbol puede construirse añadiendo consecutivamente aristas en sus vértices. Esto ofrece la posibilidad de establecer el vínculo entre el número de vértices y el de aristas del árbol.

El árbol más sencillo consta de dos vértices unidos por una arista. Cada vez que añadimos una arista más en su extremo se adiciona también un vértice. Por lo tanto, un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.

b) Relación de orden y relación de equivalencia en un grafo

Como hemos visto, el grafo proporciona una cómoda representación geométrica de las relaciones en un conjunto. Por eso la teoría de los grafos y la teoría de las relaciones en el conjunto se complementan mutuamente.

Vamos a considerar que en el grafo $G = (X, \Gamma)$ se ha introducido una relación de orden si para dos vértices cualesquiera x e y

que satisfagan la condición $x \leqslant y$ existe un camino de x a y. En este caso se dice que el vértice x precede al y y que éste sigue al x.

Mostremos que la definición dada refleja en el grafo todas las propiedades de la relación de orden.

Reflexividad. La condición

$$x \leqslant x \text{ es cierto} \tag{2-7}$$

y denota la equivalencia del vértice a sí mismo, es decir, la condición $x \equiv x$. No obstante, si se quiere, dicha condición puede considerarse como la existencia de un camino de x a x, o sea, como un lazo en el vértice x (fig. 2-3, a).

Transitividad. La condición

$$x \leqslant y, \quad y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z \tag{2-8}$$

denota que los vértices x, y, z se encuentran consecutivamente en un mismo camino (fig. 2-3, b)

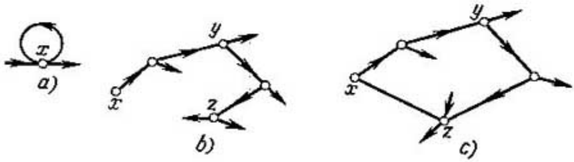

Fig. 2-3. Ilustración de las propiedades de una relación de orden

Asimetría. Demostremos que es cierta la condición

$$x \leqslant y, \quad y \leqslant x \rightarrow x \equiv y. \tag{2-9}$$

El primer miembro de esta expresión indica que existe un camino de x a y, así como también, un camino de y a x. Pero esto significa que en el grafo hay un contorno en el cual están los vértices x e y (fig. 2-3, c).

Del segundo miembro de la condición (2-9) se desprende que los vértices que están en un mismo contorno son equivalentes. Vamos a considerar esta deducción como la definición de equivalencia en el grafo y demostremos que tal definición satisface las tres condiciones de la relación de equivalencia. Las condiciones de reflexividad $x \equiv x$ y simetría $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$ son evidentes y se derivan de la definición de equivalencia dada anteriormente. También es evidente la condición de transitividad $x \equiv y$, $y \equiv z \rightarrow$ $\rightarrow x \equiv z$ ya que indica que si en el grafo hay un contorno con los vértices x e y, así como con los vértices y y z, entonces existe asimismo un contorno en el que se encuentran los vértices x y z, (véase la fig. 2-3, c).

De esta suerte, la relación de orden al igual que la relación de equivalencia definen cierto grafo.

En el grafo también puede introducirse la relación de orden estricto. En este caso, para dos vértices cualesquiera x e y que satisfagan la condición $x \prec y$, hay un camino que va de x a y. La condición de transitividad $x \prec y$, $y \prec z \rightarrow x \prec z$ significa, como en el caso anterior, que los vértices x, y, z se encuentran consecutivamente en un mismo camino. La condición de antirreflexividad ($x \prec x$ es falso) indica la ausencia de lazos en el grafo y la condición de asimetría ($x \prec y$, $y \prec x$ se excluyen mutuamente), la falta de contornos.

De este modo, la relación de orden estricto define un grafo sin contornos.

c) Características de los grafos

La resolución de muchos problemas técnicos por los métodos de la teoría de los grafos se reduce a la determinación de unas u otras características de éstos. Aunque en la presente obra es imposible examinar las aplicaciones técnicas de la teoría de los grafos, el conocimiento de las características más relevantes de los grafos, puede resultar de provecho al estudiar otras disciplinas.

Número ciclomático. Sea G un grafo no orientado que tiene n vértices, m aristas y r componentes de conexión. Se denomina número ciclomático de un grafo G el número

$$\nu(G) = m - n + r.$$

Este número tiene un interesante sentido físico: es igual al número máximo de ciclos independientes en el grafo. El número ciclomático puede utilizarse al calcular los circuitos eléctricos para determinar el número de contornos independientes.

Número cromático. Sea p un número natural. El grafo G se denomina p-cromático si pueden colocarse sus vértices con p colores distintos de tal modo que no se coloreen igualmente dos vértices adyacentes cualesquiera. El número menor p con el cual el grafo es p-cromático se denomina número cromático del grafo y se designa por $\gamma(G)$.

Si $\gamma(G) = 2$, el grafo se denomina dicromático. La condición necesaria y suficiente para que el grafo sea dicromático es que no tenga ciclos de largo impar. El número cromático juega un papel importante al resolver el problema de utilizar con máxima economía las células de la memoria durante la programación. Pero salvo en el caso del grafo dicromático su determinación constituye una tarea bastante difícil que con frecuencia requiere el empleo de calculadoras electrónicas.

Conjunto interiormente estable. El conjunto $S \subseteq X$ del grafo $G = (X, \Gamma)$ se denomina interiormente estable si no son adyacentes dos vértices cualesquiera de S, es decir, si para cualquier $x \in S$ se cumple que $\Gamma x \cap S = \varnothing$.

El conjunto interiormente estable que contiene el número mayor de elementos se denomina conjunto interiormente estable máximo, y el número de elementos de este conjunto se llama número de estabilidad interna del grafo G. El conjunto interiormente estable máximo juega gran papelen la teoría de la comunicación.

Conjunto exteriormente estable. El conjunto $T \subset X$ del grafo $G = (X, \Gamma)$ se denomina exteriormente estable si cualquier vértice no pertaneciente a T está conectado por arcos con los vértices que parten de T, es decir, si para cualquier $x \notin T$ se cumple $\Gamma x \cap T \neq \neq \varnothing$.

El conjunto exteriormente estable que contiene el número menor de elementos se llama conjunto exteriormente estable mínimo, y el número de elementos de este conjunto se denomina número de estabilidad externa del grafo G.

2-2. PROBLEMA DEL CAMINO MINIMO

a) Enunciado del problema

Para aplicaciones prácticas tiene gran importancia el problema de encontrar el camino mínimo entre dos vértices de un grafo conexo no orientado. Se reducen a éste muchos problemas de elección de la ruta más económica (desde el punto de vista de la distancia, el tiempo o el costo) en el mapa de carreteras existente y muchos problemas de elección del modo más económico para convertir un sistema dinámico de un estado en otro, etc. En matemáticas se han elaborado diversos métodos para resolver semejantes problemas. Sin embargo, con gran frecuencia los métodos basados en el uso de los grafos son los menos engorrosos.

El problema del camino mínimo en un grafo puede enunciarse en general del modo siguiente. Está dado el grafo no orientado $G = (X, U)$. Se ha asignado a cada arista de este grafo cierto número $l(u) \geqslant 0$ denominado largo de la arista. En casos particulares $l(u)$ puede ser la distancia entre los vértices unidos por la arista u, el tiempo o costo del viaje por esta arista, etc. Entonces, cualquier circuito μ va a caracterizarse por el largo

$$l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u). \tag{2-10}$$

Para dos vértices cualesquiera a y b del grafo G es necesario hallar precisamente aquel camino μ_{ab} cuyo largo total sea mínimo.

Antes de hallar el método general de resolución de este problema examinemos la regla para solucionar los problemas del tipo particular en que el largo de cadaarista es igual a la unidad.

b) Búsqueda del camino mínimo en un grafo con aristas de largo unitario

A veces resulta necesario operar con grafos cuyas aristas tienen un largo igual que se toma como unidad. Los vértices de tal grafo representan habitualmente los estados de algún sistema en el que desde cierto punto de vista son equivalentes todos los tránsitos realizados con un paso. Pongamos un ejemplo de problema que se reduce al examen de un grafo con aristas de largo unitario. El problema dado puede servir de ilustración de los métodos de construcción de grafos para los diferentes casos concretos.

Ejemplo 2-2. Problema de la torre de Hanói. Un tablero tiene tres estacas. En la primera están ensartados m discos cuyo diámetro disminuye de abajo arriba. Se plantea el problema siguiente: haciendo pasar los discos uno por uno,

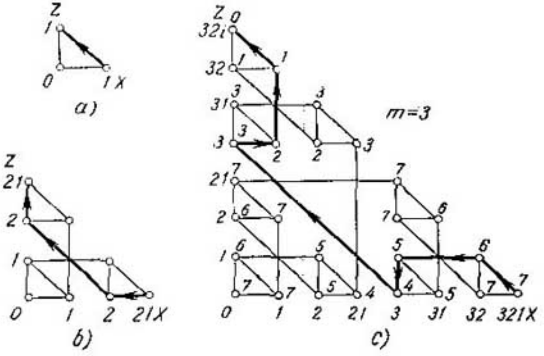

Fig. 2-4. Grafo de las transiciones en el problema de la torre de Hanoi

colocarlos en el mismo orden en la tercera estaca utilizando la segunda en calidad de intermendiaria y cumpliendo la condición de que durante ningún paso el disco mayor quede encima del menor en ninguna de las estacas. Como condición adicional puede exigirse hallar la solución que requiere el menor número de pasos.

Numeremos los discos en orden decreciente de diámetros: m, $m-1$, ..., 1. Designemos por X, Y, Z los conjuntos de discos ensartados, respectivamente, en la primera, segunda y tercera estacas en cualquiera de los pasos. Al hacerlo es suficiente indicar solamente los conjuntos X y Z, ya que el conjunto Y se obtiene como complemento de los conjuntos X y Z hasta el número total de discos. Cada uno de los conjuntos X o Z puede ser una de las combinaciones de discos siguientes: 0, 1, 2, 21, 3, 31, 32, 321, 4, 41, 42, 421, 43, 431, 432, 4321 ... Estas combinaciones pueden representarse con puntos convencionales en los ejes X y Z, como se muestra en la figura 2-4, de suerte que cualquier disposición de los discos se representará con cierto punto en el plano (X, Z). Uniendo dichos puntos por medio de líneas que señalen los desplazamientos posibles de discos en cada paso, obtenemos un grafo no orientado en el que puede hallarse el camino, e incluso el mínimo, para transitar del punto inicial al final del grafo.

Puede realizarse la construcción del grafo pasando de m a $m+1$ discos. Con $m=1$, los estados posibles van a representarse por el conjunto $\{(1,0), (0,0), (0,1)\}$, al cual corresponde el grafo de la figura 2-4, *a* con el tránsito mínimo del estado inicial $(1,0)$ al final $(0,1)$ indicado en ella.

Para obtener una regla general supongamos que ya está construido un grafo para el caso de m discos que llamaremos grafo m. Es fácil cerciorarse de que este grafo tendrá la forma del triángulo representado en la figura 2-5, *a*, aunque sus conexiones internas nos son desconocidas por el momento. ¿Cuál será entonces el grafo para $m+1$ discos?

Notemos que el disco con el número $m+1$ sólo puede ocupar la posición inferior en cualquiera de las estacas. Los m discos restantes pueden desplazarse de cualquier manera conforme al grafo m sin cambiar la posición del disco

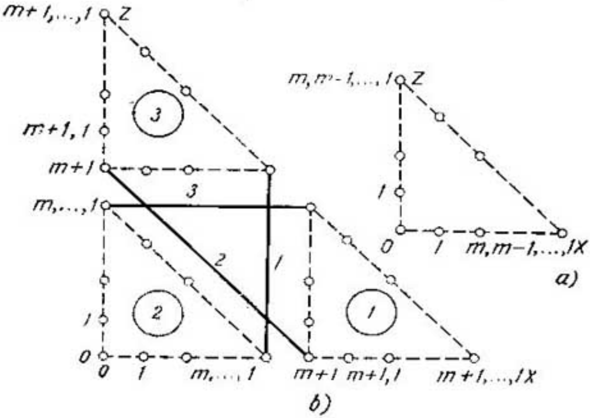

Fig. 2-5. Transición del grafo m al grafo $(m+1)$

$m+1$. Por tanto, el grafo para $m+1$ discos (fig. 2-5, *b*) constará de tres grafos m designados por cifras (encerradas en círculos) *1*, *2* y *3* que significan el número de la estaca en la que se halla el disco $m+1$. Sólo quedan por aclarar las transiciones de un grafo m a otro que corresponden al desplazamiento del disco $m+1$.

Unicamente puede pasarse el disco $m+1$ a una estaca libre y esto sólo es posible en caso de que en una de ellas estén colocados todos los discos menores m. Según esto, en la figura 2-5, *b*, se muestran las transiciones posibles del disco $m+1$ designadas por las cifras *1*, *2* y *3* que denotan el número de la estaca en la que se hallan los m discos menores.

El diagrama mostrado en la figura 2-5, *b* da el principio general de transición del grafo m al grafo $m+1$. En la figura 2-4, *b* y *c* se brindan los grafos de las transiciones para dos y tres discos.

Pasemos al problema de hallar en el grafo el camino mínimo que une el vértice inicial con el final. Por cuanto los grafos considerados son relativamente sencillos, no es difícil hallar el camino mínimo simplemente seleccionando los caminos posibles. No obstante, debe hallarse un método sistemático para los grafos complicados.

La regla general para hallar el camino mínimo en un grafo consiste en atribuir a cada vértice x_i un índice λ_i, igual al largo del camino mínimo desde el vértice dado hasta el vértice final. La asignación de los índices a los vértices en el caso del grafo con aristas de largo unitario se realiza en el orden siguiente:

1) se atribuye el índice 0 al vértice final x_0;

2) se asigna el índice 1 a todos los vértices desde los cuales va la arista hasta el vértice final;

3) se atribuye el índice $\lambda_i + 1$ a todos los vértices que aún no tienen índices y desde los cuales la arista va hasta el vértice con el índice λ_i. Se continúa este proceso hasta que no se marque el vértice inicial. Al terminar de marcar, el índice del vértice inicial será igual al largo del camino mínimo. Hallaremos el mismo camino mínimo si vamos a movernos desde el vértice inicial en la dirección en que disminuyen los índices.

En la figura 2-4, *c* se muestra un ejemplo de marcado y determinación del camino mínimo para $m = 3$.

Señalemos que el método descrito para determinar el camino mínimo es un caso particular de búsqueda de la solución óptima por el método de programación dinámica. Por eso, después de estudiar la programación dinámica será conveniente volver a examinar dicho ejemplo.

c) Búsqueda del camino mínimo en un grafo con aristas de largo arbitrario

La tarea de atribuir índices numéricos a los vértices del grafo se dificulta si las aristas del grafo tienen un largo arbitrario. La dificultad se debe a que en un grafo complejo el camino que pasa por el número menor de vértices, tiene con frecuencia mayor largo que algunos caminos de rodeo. Así pues, en el grafo de la figura 2-6 que representa un mapa de carreteras el camino directo del vértice marcado con un asterisco al vértice final tiene el largo $l = 12$, mientras que el camino indirecto a través del vértice marcado con un triángulo tiene el largo $l = 10$.

El proceso de asignación de índices a los grafos de este tipo consiste en lo siguiente:

1. Cada vértice x_i se marca con el índice λ_i. Inicialmente se atribuye el índice $\lambda_0 = 0$ al vértice final x_0. Para los demás vértices suponemos previamente que $\lambda_i = \infty$ $(i \neq 0)$.

2. Buscamos un arco (x_i, x_j) tal que para él $\lambda_j - \lambda_i > l(x_i, x_j)$ y sustituimos el índice λ_j por el índice $\lambda_j' = \lambda_i + l(x_i, x_j) < \lambda_j$. Continuamos este proceso de sustitución de los índices mientras quede un arco siquiera para el cual se pueda disminuir λ_j.

Apuntemos una propiedad importante que van a poseer los índices atribuidos a los vértices. Sea x_p un vértice arbitrario. Durante el proceso de asignación de índices considerado, el índice λ_p

disminuye monótonamente. Sea x_q el último vértice que sirve para su disminución. Entonces $\lambda_p = \lambda_q + l\ (x_q, x_p)$. Por tanto, para el vértice arbitrario x_p con índice λ_p se encuentra el vértice x_q unido a x_p mediante una arista tal que $\lambda_p - \lambda_q = l(x_q, x_p)$.

Esta propiedad permite formular la siguiente regla para hallar el camino mínimo.

Sea $x_n = a$ el vértice inicial con el índice χ_n. Hallemos el vértice x_{p_1} tal que $\lambda_n - \lambda_{p_1} = l\,(x_{p_1}, x_n)$. Hallemos después el vértice x_{p_2} tal que $\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} = l\,(x_{p_2}, x_{p_1})$, etc., hasta que no lleguemos al vértice final $x_{p_{k+1}} = x_0 = b$. El camino $\mu_0 = (x_n, x_{p_1}, \ldots, x_{p_k}, x_0)$ de largo λ_n es el camino más corto.

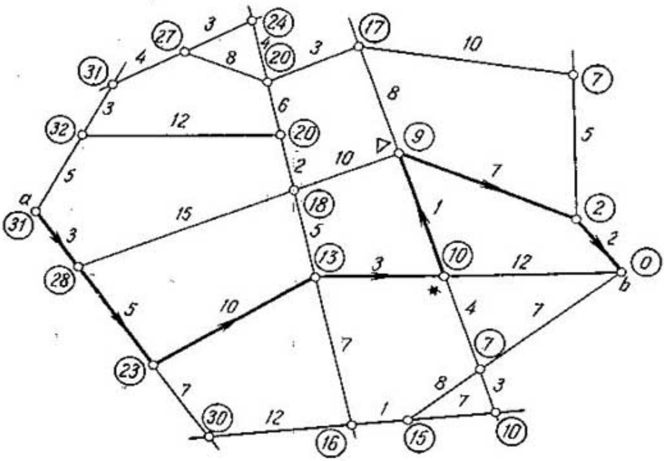

Fig. 2-6. Mapa de carreteras

Para la demostración examinaremos un camino arbitrario de a a b: $\mu = (x_n, x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}, x_0)$. Su largo será $l(\mu)$. Conforme a la regla de ordenación de los índices se cumplirán las siguientes desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_n - \lambda_{k_1} \leqslant l\,(x_n, x_{k_1}); \\ \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \leqslant l\,(x_{k_1}, x_{k_2}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{k_s} - 0 \leqslant l\,(x_{k_s}, x_0). \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}11)$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades encontramos que para cualquier camino μ se cumple

$$\lambda_n - 0 \leqslant l\,(\mu). \qquad (2\text{-}12)$$

Como que para el camino μ_0 se satisface la condición $\lambda_n = l(\mu_0)$ éste es mínimo.

El método de búsqueda del camino más corto está ilustrado mediante el ejemplo del mapa de carreteras representado en forma de grafo en la figura 2-6. Las cifras en las aristas señalan el tiempo de viaje por cada una de las carreteras. Los índices de los vértices muestran el tiempo de viaje desde el vértice dado hasta el vértice final.

d) Construcción del grafo de largo mínimo

Tiene gran importancia práctica el siguiente problema que puede enunciarse como el problema del trazado de carreteras. Hay varias ciudades $a, b, c \ldots$, que es necesario comunicar entre sí mediante una red de carreteras. Para cada par de ciudades (x, y) se conoce el costo de construcción $l(x, y)$ de la carretera que las une.

El problema consiste en construir la más barata de las redes de carreteras posibles. En lugar de la red de carreteras puede considerarse la de líneas de transporte de energía eléctrica, la de oleoductos, etc. Denominando largo de la arista (x, y) a la magnitud $l(x, y)$ en el grafo que representa la red de carreteras, llegamos al problema de la construcción del grafo de largo mínimo. Por eso, en lo adelanté vamos a considerar el largo de las aristas del grafo en vez del costo de las carreteras.

Si existen sólo tres vértices a, b, c es suficiente construir uno de los circuitos de unión abc, acb y bac, por cierto, si bc es la arista más larga entonces hay que excluir precisamente la misma construyendo el circuito bac.

El grafo de largo mínimo es siempre un árbol ya que si contuviera un ciclo podría eliminarse una de las aristas de éste y los vértices quedarían unidos todavía. Por consiguiente, para unir n vértices hay que construir $n - 1$ aristas.

Mostremos que puede construirse el grafo de largo mínimo empleando la regla siguiente. Ante todo unimos dos vértices con la arista de unión más corta u_1. En cada uno de los pasos siguientes añadimos la arista más corta de las aristas u_i que no forma ningún ciclo al unirse a las aristas ya existentes. Si hay varias aristas de igual largo elegimos cualquiera de ellas. Vamos a denominar *árbol económico* a cada árbol Q construido de esta manera. Su largo es igual a la suma de las aristas por separado:

$$l(Q) = l(u_1) + \ \ldots \ + l(u_{n-1}). \tag{2-13}$$

Mostremos que ningún otro árbol que une los mismos vértices puede tener un largo menor que el del árbol económico Q. Sea P el árbol de largo mínimo que une los vértices considerados y Q cualquier árbol económico. Supongamos que las aristas $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ están numeradas en el mismo orden en el cual se unieron para construir Q, es decir, satisfacen la condición $l(u_k) \leqslant l(u_{k+1})$.

Si el árbol P no coincide con el Q, este último tiene por lo menos una arista que no pertenece a P. Sea $u_i = (a, b)$ la primera de estas aristas y $L(a, b)$ el circuito del grafo P que une los vértices a y b, como lo muestra por ejemplo la figura 2-7. Si añadimos a P la arista u_i obtenemos un ciclo, y como Q no tiene ciclos, debe formar parte de éste por lo menos una arista no perteneciente a Q. Sea ésta u_i'. Eliminándola, obtenemos el árbol P' con el mismo número de vértices que P, cuyo largo es:

$$l(P') = l(P) + l(u_i) - l(u_i'). \tag{2-14}$$

Como que el grafo P tiene el largo mínimo

$$l(u_i) \geqslant l(u_i'). \tag{2-15}$$

Pero u_i era la arista de largo mínimo con la que no se obtienen ciclos al añadirla a las aristas $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$. Como que al adi-

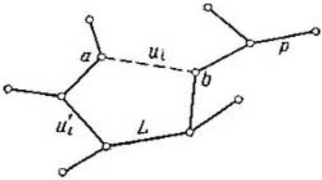

Fig. 2-7. Para la construcción del árbol de largo mínimo

cionar u_i' a dichas aristas, tampoco se origina algún ciclo, entonces

$$l(u_i) = l(u_i') \tag{2-16}$$

y, por lo tanto, P' tiene largo mínimo al igual que P. Sin embargo, P' tiene una arista común más que P con el árbol económico Q. Repitiendo varias veces esta operación obtendremos el árbol de largo mínimo que coincide con Q. Por consiguiente, Q es el árbol de largo mínimo.

2-3. REDES DE TRANSPORTE

a) Conceptos fundamentales

Se denomina *red de transporte* el grafo finito sin lazos en el cual:

1) existe un y sólo un vértice x_0 tal que $\Gamma^{-1}x_0 = \varnothing$ (este vértice se llama *entrada de la red*);

2) existe un y sólo un vértice z tal que $\Gamma z = \varnothing$ (este vértice se denomina *salida de la red*);

3) a cada arco del grafo u se refiere un número entero $c(u)$ llamado *capacidad de paso del arco u*.

El concepto de flujo está muy vinculado al de la red de transporte. Sea x un vértice arbitrario. Designemos por U_x^- el conjunto de los arcos que entran en x, y por U_x^+ el conjunto de los que

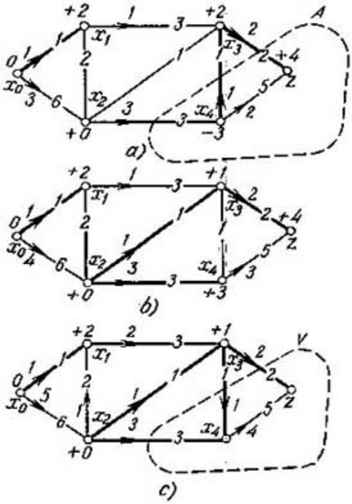

Fig. 2-8. Distribución de flujos en la red de transporte

salen de x. Se denomina flujo por la red de transporte la función $\varphi(u)$ que satisface las condiciones

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant c(u), \quad u \in U; \tag{2-17}$$

$$\sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = 0; \quad x \neq x_0, \quad x \neq z. \tag{2-18}$$

La función $\varphi(u)$ puede considerarse como la cantidad de materia que pasa (en la unidad de tiempo) por el arco $u = (x, y)$ de x a y. Según la condición (2-17) esta cantidad no puede exceder de la capacidad de paso del arco $c(u)$. De acuerdo con la condición (2-18) en cada vértice x distinto de la entrada x_0 y de la salida z, la cantidad de materia que llega es igual a la que sale. Por lo tanto, ésta no puede acumularse en ningún vértice de la red de transporte excepto la entrada y salida. Esto significa que el flujo saliente del vértice de entrada x_0 es exactamente igual al entrante en el vértice de salida z:

$$\sum_{u \in U_{x_0}^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_z^-} \varphi(u) = \varphi_z. \qquad (2\text{-}19)$$

La magnitud $\varphi(z)$ se denomina magnitud del flujo de la red de transporte.

En la figura 2-8 se ofrece un ejemplo de la red de transporte. Las cifras en las discontinuidades de los arcos señalan la capacidad de paso del arco. Las flechas indican la dirección de los flujos y las cifras junto a las flechas, la magnitud del mismo. Muchos problemas que surgen durante la planificación de suministros, distribución de mercancías entre consumidores, etc., se reducen al análisis de redes de transporte.

Para investigar la distribución del flujo en la red de transporte conviene introducir el concepto de corte de dicha red. Sea $A \subset X$ cierto conjunto que satisface las condiciones

$$x_0 \notin A, \quad z \in A. \qquad (2\text{-}20)$$

Designemos, respectivamente, por U_A^- y U_A^+ los conjuntos de arcos que entran en A y salen de A. Llamaremos *corte* A de la red de transporte al total de los arcos $U_A = U_A^- \cup U_A^+$. En la figura 2-8 se muestra un ejemplo de corte.

Por cuanto cada partícula de materia que se mueve de x_0 a z pasa obligatoriamente por algún arco del corte, el flujo total a través de éste será igual a la magnitud del flujo de la red de transporte, es decir, para cualquier corte A, se cumple la relación

$$\varphi_z = \sum_{u \in U_A^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_A^+} \varphi(u). \qquad (2\text{-}21)$$

Denominaremos capacidad de paso del corte A a la suma de las capacidades de paso de los arcos que entran en este corte:

$$c(A) = \sum_{u \in U_A^-} c(u). \qquad (2\text{-}22)$$

Ya que en cualquier arco ocurre que $\varphi(u) \leqslant c(u)$, de (2-21) y (2-22) se deduce que

$$\varphi_z \leqslant c(A). \qquad (2\text{-}23)$$

b) Problema del flujo máximo

El problema del flujo máximo en una red de transporte se enuncia del modo siguiente. Estando dada la configuración de la red de transporte y siendo conocida la capacidad de paso de los arcos, hallar la magnitud máxima del flujo que puede dejar pasar dicha red así como la distribución de este flujo en los arcos de la red.

Lema. *Si para cierta magnitud del flujo de la red de transporte* φ_z *y cierto corte* V *se cumple que* $\varphi_z = c(V)$, *el flujo* φ_z *es el mayor y el corte* V *tiene la menor capacidad de paso.*

Demostración. Como se mostró, la magnitud del flujo φ_z para cualquier corte A debe satisfacer la relación (2-23). Designemos por V el corte con la capacidad de paso mínima:

$$c(V) = \min_A c(A). \tag{2-24}$$

Como la magnitud del flujo φ_z es la misma para cualquier corte de la red de transporte, el aumento de la magnitud de dicho flujo sólo es posible hasta que éste alcance el valor $c(V)$. Por consiguiente, la magnitud del flujo

$$\varphi_z = c(V) \tag{2-25}$$

determina el flujo máximo de la red de transporte.

Sin embargo, el lema dado no ofrece todavía un método para determinar en la práctica el flujo máximo. Para formular tal método, introduzcamos algunas definiciones auxiliares.

Llamaremos *saturado* al arco u, cuando $\varphi(u) = c(u)$. Denominaremos *completo* el flujo φ_z, si cada camino de x_0 a z contiene por lo menos un arco saturado.

Para una red de transporte dada, el flujo completo no es una magnitud rigurosamente determinada y depende de la dirección de los flujos en los diferentes arcos. Así pues, en la figura 2-8, a y c se brindan dos distribuciones distintas del flujo por la misma red de transporte. Los arcos saturados están trazados con líneas gruesas. En ambos casos los flujos son completos aunque sus magnitudes son diferentes.

El algoritmo para hallar el flujo máximo, propuesto por Ford y Falkerson, consiste en el aumento paulatino del flujo φ_z hasta que éste llegue a ser máximo. En dicho caso se supone que las capacidades de paso de los arcos $c(u)$ son números enteros, de modo que los flujos en los arcos van a expresarse también con números enteros. La búsqueda del flujo completo se realiza en dos etapas.

1. *Búsqueda del flujo completo.* Sea $\varphi(u)$ cierta distribución del flujo en los arcos de la red de transporte. Busquemos el camino μ de x_0 a z todos los arcos del cual no están saturados y supongamos que

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi(u) + 1 & \text{para } u \in \mu; \\ \varphi(u) & \text{para } u \notin \mu. \end{cases} \tag{2-26}$$

Entonces el flujo φ_z cambia hasta la magnitud $\varphi'_z = \varphi_z + 1 > \varphi_z$. De este modo efectuamos el aumento paulatino de φ_z hasta que éste no se vuelva completo.

Ejemplo 2-3. Hallemos el flujo completo en la red de transporte (véase la fig. 2-8, *a*). Examinemos consecutivamente los caminos siguientes, marcando con líneas gruesas los arcos saturados:

$\mu_1 = (x_0, x_1, x_3, z)$, $\varphi(\mu_1) = 1$, se satura el arco (x_0, x_1);
$\mu_2 = (x_0, x_2, x_4, x_3, z)$, $\varphi(\mu_2) = 1$, se saturan los arcos (x_4, x_3) y (x_3, z);
$\mu_3 = (x_0, x_2, x_4, z)$; para saturar este camino puede tomarse $\varphi(\mu_3) = 2$ y se satura el arco (x_2, x_4).

Es fácil ver que no hay más caminos de x_0 a z que contengan arcos no saturados. Por lo tanto, el flujo completo es

$$\varphi_z = \varphi(\mu_1) + \varphi(\mu_2) + \varphi(\mu_3) = 4.$$

2. *Búsqueda del flujo máximo.* Sea φ_z el flujo completo y $\varphi(x, y)$, el flujo en el arco $u = (x, y)$, dirigido del vértice x al vértice y. El proceso de incremento de φ_z consiste en marcar los vértices del grafo con índices que señalen el camino en el cual es posible aumentar el flujo. Todos los vértices del grafo deben ser numerados previamente.

Marcamos x_0 con el índice 0. Si x_i es un vértice ya numerado, marcamos con el índice $+i$ todos los vértices no marcados, en los cuales van saliendo de x_i los arcos no saturados, o sea, los vértices y para los que

$$(x_i, y) \in U \text{ y } \varphi(x_i, y) < c(x_i, y), \tag{2-27}$$

y con el índice $-i$ todos los vértices no marcados de los cuales los arcos van al vértice x_i, es decir, los vértices y para los cuales

$$(y, x_i) \in U \text{ y } \varphi(y, x_i) > 0. \tag{2-28}$$

Si en este proceso resulta marcado el vértice z, entre los vértices x_0 y z habrá un circuito, todos los vértices del cual son distintos y (con una exactitud de un signo) están marcados con los números de los vértices precedentes. Aumentamos el flujo de todas las aristas de este circuito en una unidad en el sentido de x_0 a z, es decir, suponemos que

$$\varphi'(u) = \varphi(u), \qquad \text{si } u \notin \mu;$$
$$\varphi'(u) = \varphi(u) + 1, \quad \text{si } u \in \mu$$

y al moverse de x_0 a z, el arco u pasa en la dirección de su orientación;

$$\varphi'(u) = \varphi(u) - 1, \ \text{si } u \in \mu$$

y al moverse de x_0 a z el arco u pasa en la dirección opuesta a su orientación.

Como resultado de este proceso se obtiene un nuevo flujo por la red $\varphi'_z = \varphi_z + 1$, o sea, crece la magnitud del flujo. Después se repite el proceso.

Si es imposible aumentar cierto flujo φ_z^0 por el método descrito, es decir, si resulta imposible marcar el vértice z, entonces φ_z^0 constituye el flujo máximo de la red. En efecto, sea V el conjunto de los vértices no marcados que incluyen también el vértice z. Por lo tanto, V es un corte y precisamente aquel que no tiene arcos de salida (en caso contrario algunos vértices de este corte estarían marcados con índices negativos), y todos los arcos de entrada, saturados:

$$\left.\begin{aligned} U_V^- = U_V;\quad U_V^+ = \varnothing;\\ \varphi(u) = c(u)\ \text{para}\ u \in U_V^-.\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}29)$$

Siendo

$$\varphi_z^0 = \sum_{u \in U_V^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_V^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_V^-} c(u) - 0 = c(V). \quad (2\text{-}30)$$

Según el lema demostrado anteriormente φ_z^0 es el flujo mayor, y V el corte con la menor capacidad de tráfico.

Ejemplo 2-4. En la figura 2-8, *a* se muestra cómo se han marcado los índices de los vértices de la red de transporte. El vértice x resultó marcado con el índice $+4$. La secuencia de los índices $+4$, -3, $+2$, $+0$, determina el circuito $\mu = (x_0, x_2, x_3, x_4, z)$, cuyo flujo de x_0 a z hay que aumentar en una unidad. Esto conduce a la distribución del flujo mostrada en la figura 2-8, *b*. Repitiendo el proceso de marcado de los índices en este dibujo, hallamos el circuito $\mu = (x_0, x_2, x_1, x_3, x_4, z)$ cuyo flujo también debe aumentarse en una unidad. La distribución resultante del flujo se muestra en la figura 2-8, *c*. Al marcar los índices en este dibujo quedan sin marcar los vértices x_4 y z.

Por tanto, la distribución del flujo obtenida garantiza el flujo máximo φ_z^0 en la red de transporte considerada, y el conjunto $V = \{x_4, z\}$ determina el corte con la capacidad de tráfico mínima. La magnitud del flujo φ_z^0 se halla determinando la capacidad de tráfico del corte V:

$$\varphi_z^0 = c(x_2, x_4) + c(x_3, x_4) + c(x_3, z) = 3 + 1 + 2 = 6.$$

Se puede aumentar el flujo máximo de la red de transporte aumentando la capacidad de tráfico de cualquiera de los arcos incluidos en el co-te V.

c) Problema de transporte

A la par con el problema de la búsqueda del flujo máximo, tiene gran importancia práctica el problema de la distribución más económica del flujo en los arcos de la red de transporte que recibió la denominación de problema de trasporte. Por cuanto en muchos casos la red de transporte constituye el esquema de organización de traslados de algunas cargas, la resolución del problema de transporte permite determinar el plan de traslados más racional, es decir, la distribución de las rutas que garantice, por ejemplo, el costo mínimo de los traslados o de la entrega de las cargas al consumidor en un tiempo mínimo. El primer problema recibió el nombre de problema de transporte según el criterio del costo y el segundo, de problema de transporte según el criterio del tiempo.

Para facilitar la exposición ulterior, designemos: $c_{ij} = c(x_i, x_j)$, la capacidad de tráfico del arco (x_i, x_j) y $d_{ij} = d(x_i, x_j)$, el costo de paso de la unidad de flujo por el arco (x_i, x_j).

El problema de transporte según el criterio del costo se puede enunciar en términos de la teoría de los grafos del modo siguiente.

Están dados la red de transporte con el flujo máximo φ_z^0 y el flujo $\varphi_z \leqslant \varphi_z^0$ que debe pasar por esta red de transporte. Se requiere hallar la distribución del flujo φ_z por los arcos de la red de transporte que asegure el costo mínimo del paso del flujo. Con esto, para cada arco debe cumplirse la relación $\varphi(x_i, x_j) \leqslant c_{ij}$, y el costo del paso del flujo $\varphi(x_i, x_j)$ por el arco (x_i, x_j) debe ser igual a $d_{ij}\varphi(x_i, x_j)$.

Para resolver este problema vamos a considerar las magnitudes d_{ij} como largos de los arcos respectivos. En este caso el costo del paso del flujo φ por cierto camino μ desde x_0 hasta z será igual al producto del largo de dicho camino por la magnitud del flujo φ y el problema de la minimización del costo del paso del flujo se reduce a la solución del problema anteriormente estudiado de la búsqueda del camino mínimo en el grafo de x_0 a z. En el caso en que no haya limitaciones en cuanto a la capacidad de tráfico de los arcos, el camino mínimo es el que garantiza el costo mínimo del paso del flujo.

Al existir limitaciones de capacidad de tráfico de los arcos el problema se resuelve en varias etapas hallando los flujos parciales en cada etapa. El método general de resolución del problema consiste en lo siguiente.

En el grafo $G_1 = (X, \Gamma)$ que representa la red de transporte con largos de arcos $d_{ij} = l(x_i, x_j)$ se halla el camino mínimo μ_1 de x_0 a z. Sea c_1 la capacidad de tráfico del camino μ_1. Por este camino se conduce el flujo

$$\varphi_l = \begin{cases} \varphi_z, & \text{si } \varphi_z \leqslant c_1; \\ c_1, & \text{si } \varphi_z > c_1. \end{cases} \tag{2-31}$$

Si $\varphi_z \leqslant c_1$, el problema está resuelto y μ_1 es el camino más económico para el flujo φ_z.

Si $\varphi_z > c_1$, entonces consideramos a φ_1 como flujo parcial y pasamos al grafo G_2 que se obtiene del gráfo G_1 sustituyendo las capacidades de tráfico de los arcos c_{ij} por c'_{ij} de la relación

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - c_1 & \text{para } u \in \mu_1; \\ c_{ij} & \text{para } u \notin \mu_1. \end{cases} \tag{2-32}$$

Por cierto, se excluyen del análisis los arcos en los cuales $c'_{ij} = 0$. El flujo cuya distribución se busca en el grafo G_2 se toma igual a

$$\varphi'_z = \varphi_z - \varphi_1. \tag{2-33}$$

Ahora surge el problema inicial de buscar la distribución más económica del flujo φ'_z pero ya con respecto al grafo G_2. Su resolución da el camino μ_2 con la capacidad de tráfico c_2 a través del cual se hace pasar el flujo parcial

$$\varphi_2 = \begin{cases} \varphi'_z, & \text{si } \varphi'_z \leqslant c_2; \\ c_2, & \text{si } \varphi'_z > c_2. \end{cases} \tag{2-34}$$

Si $\varphi'_z \leqslant c_2$ el problema está resuelto y la distribución de flujos más económica en el grafo G_1 será el paso del flujo φ_1 por el camino μ_1 y del flujo φ_2 por el camino μ_2.

Si $\varphi'_z > c_2$ hay que recurrir a un nuevo grafo G_3 y hallar un nuevo flujo parcial φ_3. Este proceso se repite hasta que la suma de los flujos parciales alcance el valor φ_z. Estos flujos parciales conducidos por el grafo G_1 proporcionan, en efecto, la distribución más económica del flujo φ_z.

Para ilustrar el método descrito, examinaremos la variante más difundida del problema de transporte según el criterio del costo.

En las estaciones $x_1, \ldots, x_m$ hay una carga semejante en cantidades $a_1, \ldots, a_m$. Se requiere conducirla en cantidades $b_1, \ldots, b_r$ a las estaciones $y_1, \ldots, y_r$. Se supone que la cantidad total de carga requerida es igual a las reservas existentes:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{r} b_j. \tag{2-35}$$

El costo del traslado de la carga de la estación x_i a la y_j es igual a d_{ij}. Se necesita hallar las rutas más económicas para transportar las cargas. Es cómodo anotar los datos iniciales en forma de la tabla 2-1.

Tabla 2-1

Problema de transporte

a_i	b_j		
	b_1	...	b_r
a_1	d_{11}	...	d_{1r}
...	...	...	...
a_m	d_{m1}	...	d_{mr}

La red de transporte correspondiente a este problema se construye del modo siguiente. La entrada x_0 se une a cada uno de los vértices x_i mediante un arco con capacidad de tráfico $c(x_0, x_i) = a_i$. Cada uno de los vértices y_j se une a la salida z por medio de un arco con capacidad de tráfico $c(y_j, z) = b_j$. El costo de paso del flujo por los arcos (x_0, x_i) e (y_j, z) se considera igual a cero. Finalmente, cada vértice x_i se une con cada vértice y_j mediante un arco de capacidad de tráfico infinita. El costo de paso por éste de la unidad de flujo es igual a d_{ij}. Más adelante se aplica a esta red de transporte el método ya estudiado.

Ejemplo 2-5. Hallar las rutas más económicas para el problema de transporte planteado en la tabla 2-2. Esta tabla corresponde al esquema de los caminos que comunican las fábricas productoras de piezas de construcción con los consumidores de dichas piezas (obras), mostrado en la figura 2-9. En la figura 2-10 se ofrece la red de transporte correspondiente a los datos de la tabla 2-2.

Utilizando el método descrito más arriba hallamos los flujos parciales y las rutas enumerados en la tabla 2-3 en el orden de su obtención. El plan de transporte correspondiente a esta tabla se muestra asimismo en el esquema de caminos.

No es difícil ver que en el caso general el costo de traslado de las cargas por la red de transporte del tipo considerado se determina mediante la expresión

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} d_{ij} \varphi(x_i, y_j). \qquad (2\text{-}36)$$

Tabla 2-2

Datos iniciales del problema de transporte

a_i	b_j			
	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

Por consiguiente, el método analizado para resolver el problema de transporte, brinda en esencia la forma de hallar las magnitudes de los flujos parciales $\varphi(x_i, y_j)$ que minimizan la suma indicada. El método de resolución examinado no es único. Encontraremos problemas similares en la sección dedicada a la programación lineal donde se mostrarán otros métodos para resolver problemas análogos.

Analicemos la *resolución del problema de transporte por el criterio del tiempo* mediante el ejemplo de red de transporte dada en

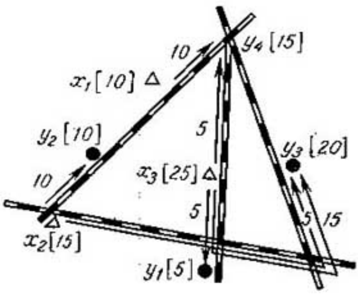

Fig. 2-9. Esquema de los caminos

la tabla 2-2 en la que interpretaremos ahora las magnitudes d_{ij} como el tiempo requerido para trasladar la carga del punto x_i al punto y_j y las designaremos por t_{ij}. Es posible confrontar problemas similares sobre el transporte de productos de fácil deterioro, el envío de medios de auxilio a regiones de cataclismos, el acarreo de granos de la nueva cosecha a los puntos de acopio, etc. En to-

Tabla 2-3

Distribución de los flujos parciales en el problema de transporte por el criterio de costo

k	Ruta (x_i, y_j)	Flujo parcial φ_k	d_{ij}	Costo del traslado $d_{ij}\varphi_k$
1	(x_3, y_1)	5	1	5
2	(x_2, y_2)	10	1	10
3	(x_1, y_4)	10	2	20
4	(x_3, y_4)	5	3	15
5	(x_3, y_3)	15	4	60
6	(x_2, y_3)	5	6	30
—	—	50	—	140

das estas tareas es necesario trasladar todas las cargas a los lugares de destino en el más breve intervalo de tiempo.

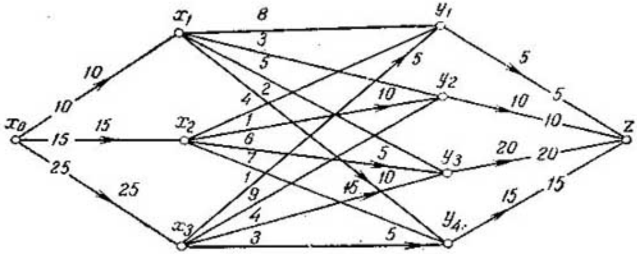

Fig. 2-10. Solución del problema de transporte por el criterio de costo

Examinemos el método general de resolución de este problema. Supongamos que de cualquier modo se ha encontrado cierta distribución del flujo φ_z en el grafo G que representa la red de transporte considerada. Separemos del grafo G el grafo parcial G' en el cual sólo incluimos los arcos que participan en la transmisión del flujo φ_z. Sea μ cierto camino que conduce de x_0 a z y t_μ, el tiempo de paso del flujo por este camino. Evidentemente, el tiempo necesario para trasladar todas las cargas de x_0 a z va a determinarse por el camino que tiene la mayor duración de paso del flujo ya que el traslado de las cargas por los demás caminos terminará antes. Por lo tanto, el tiempo T, requerido para el transporte de todas las cargas será igual a:

$$T = \max_{\mu \in G'} t_\mu. \tag{2-37}$$

La resolución del problema de transporte por el criterio del tiempo se reduce, de esta manera, a separar del grafo G, el grafo parcial G' que sea capaz de dejar pasar todo el flujo φ_z y en el cual la duración del camino más prolongado sea mínima en comparación con todos los demás grafos similares. Por cierto, la solución hallada por el criterio del costo antes descrito, que minimiza la magnitud definida por la expresión (2-36), al mismo tiempo puede ser no la mejor desde el punto de vista del criterio del tiempo.

La solución de la tarea planteada se reduce al mejoramiento consecutivo del grafo G', eliminando del mismo los caminos más prolongados e introduciendo los más cortos pero que no se han utilizado antes, y redistribuyendo correspondientemente el flujo φ_z.

Sirvámonos del ejemplo examinado. Tomemos a modo de primera aproximación a la solución óptima, la solución obtenida basándose en el criterio del

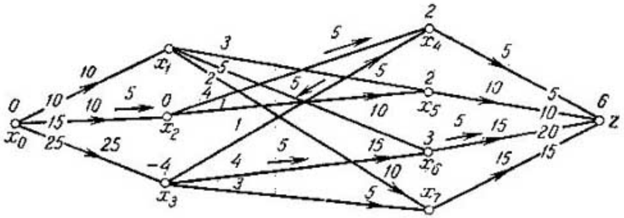

Fig. 2-11. Solución del problema de transporte por el criterio de tiempo

costo. La distribución de los flujos para este caso se muestra en la figura 2-10. En esta figura vemos que el tiempo de paso del flujo por la ruta más prolongada (x_2, y_3) es igual a 6.

Sin embargo, quedaron sin utilizar las rutas menos largas (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_1, y_3). Por eso puede ser que el empleo de cualquiera de estas rutas permita excluir la ruta (x_2, y_3).

Construyamos el grafo parcial G' en el cual sólo incluimos los arcos del grafo G que tienen $t_{ij} < 6$ y en el cual quedó la misma distribución del flujo que en el grafo G. El grafo G' se muestra en la figura 2-11 donde, por conveniencia, los vértices y_j están designados por $x_{m+j} = x_{3+j}$. El flujo φ_z' a través de este grafo es igual a 45 unidades, o sea, menos que el flujo inicial $\varphi_z = 50$ unidades. Este flujo es completo ya que en el grafo G' todos los caminos de x_0 a z tienen arcos saturados. Sin embargo, puede que éste no sea el máximo.

Si el flujo máximo en el grafo G' es igual a φ_z, entonces se hallará una distribución de este flujo, con la cual el camino más prolongado va a durar un tiempo $t_\mu < 6$ unidades. Por tanto, la solución ulterior del problema se reduce a determinar el flujo máximo en el grafo G'.

En la figura 2-11 se ha efectuado la marcación de los vértices del grafo G' en concordancia con la regla del § 2-3. El marcado de los vértices indica la existencia de un camino $(x_0, x_2, x_4, x_3, x_6, z)$, en el cual el flujo en la dirección de x_0 a z puede incrementarse en 5 unidades. Este flujo adicional se muestra con flechas. Como vemos, el flujo máximo en el grafo G' es $\varphi_z = 50$ unidades y la ruta más prolongada tiene un tiempo de 4 unidades. No es posible

Tabla 2-4

Distribución de los flujos parciales en el problema de transporte por el criterio de tiempo

Ruta	Flujo parcial	Tiempo de paso del flujo
(x_2, y_2)	10	1
(x_1, y_4)	10	2
(x_3, y_4)	5	3
(x_2, y_1)	5	4
(x_3, y_3)	20	4
—	$\varphi_z = 50$	$t_{\text{máx}} = 4$

lograr la disminución ulterior del tiempo de paso del flujo, ya que al vértice $y_8(x_6)$ no van rutas con el tiempo menor de 4 unidades.

En la tabla 2-4 se presenta la distribución definitiva de los flujos parciales por las rutas que da la solución del problema de transporte según el criterio del tiempo.

Capítulo tercero

ESPACIOS MULTIDIMENSIONALES

3-1. ESPACIOS METRICOS Y DISTANCIAS

a) Concepto de distancia

El estudio de los conjuntos realizado en el capítulo 1 como reunión de ciertos objetos tiene una aplicación limitada, ya que en la naturaleza todos los objetos materiales están en interrelación e interacción. Por eso, es necesario vincular el concepto de conjunto con el establecimiento de unas u otras correlaciones entre sus elementos.

Se dice que un conjunto tiene *estructura* si entre los elementos del conjunto se han establecido determinadas relaciones o con los mismos se han definido ciertas operaciones. El conjunto que posee estructura se denomina *espacio*.

Comencemos el estudio de los espacios por el tipo de espacios más sencillos llamados espacios métricos, para cuya definición es necesario introducir el concepto de distancia entre los elementos del conjunto.

El hombre tropieza cada día con el concepto de distancia relacionando este concepto con la distribución espacial de los objetos e interpretando por distancia la medida del alejamiento de los objetos, unos de otros. Generalmente la distancia $d(M, N)$ entre los puntos M y N se mide por el largo del segmento que une dichos puntos (fig. 3-1). Sin embargo, tal distribución de la distancia con

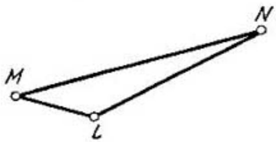

Fig. 3-1. Representación del axioma del triángulo

frecuencia resulta insuficiente. Así, incluso en usanza, la distancia entre dos ciudades no se determina unívocamente (distancia por ferrocarril, vía marítima, fluvial, etc.). En una ciudad dividida en barrios como se muestra en la figura 3-2, no tiene sentido medir la distancia por medio del segmento de recta que une los puntos M y N ya que sólo es posible trasladarse por las calles.

Por otro lado, frecuentemente no relacionamos la palabra alejamiento con el espacio en su sentido habitual, sino que nos referimos al alejamiento en el tiempo (en la profunda lejanía de los siglos, etc.) o en otro sentido. Si cierto sistema puede tomar sucesivamente los estados $A_1, A_2, \ldots, A_n$, entonces podemos medir el alejamiento del estado A_h respecto a A_j con el número de estados por los cuales debe atravesar el sistema para pasar del estado A_j al A_h. Aquí el estado va a ser la medida del alejamiento, uno del otro, de los estados del sistema. Pero si se considera el alejamiento como propiedad del estado, nos vemos obligados a hablar no ya del espacio tridimensional habitual sino de algún otro espacio que se puede denominar, por ejemplo, espacio de estados.

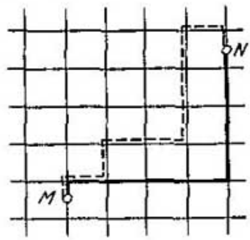

Fig. 3-2. Determinación de la distancia en una ciudad dividida en barrios

En los ejemplos dados se ve que debe existir cierta definición general de la distancia como medida del alejamiento de los objetos y, por consiguiente, también del espacio en que existen estos objetos, con esto, en distintas situaciones concretas dichos conceptos pueden tener diferente contenido. Por cuanto las reuniones de diversos objetos constituyen conjuntos, los conceptos de espacio y distancia deben estar vinculados al concepto de conjunto.

b) Definición de espacio métrico

Sea X un conjunto arbitrario. El concepto de distancia entre los elementos de X se obtiene mediante la generalización de las propiedades fundamentales, que pueden esperarse intuitivamente del concepto de distancia y que pueden entenderse con facilidad al examinar la figura 3-1.

Relacionemos con cada par de elementos de X cierto número real no negativo $d \geqslant 0$. Este número se llama *distancia* o *métrica* en X si para cualesquiera $x, y, z \in X$ el mismo satisface las tres condiciones siguientes:

1) $d(x, y) = 0$ cuando, y sólo cuando $x = y$ (axioma de identidad);

2) $d(x, y) = d(y, x)$ (axioma de simetría);

3) para cualquier tríada $x, y, z \in X$ se cumple $d(x, y) \leqslant \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (axioma del triángulo).

Se llama *espacio métrico* al par (X, d), es decir, al conjunto X con la métrica d definida en éste. Los elementos del conjunto X se denominan puntos del espacio métrico (X, d).

De la definición dada se deduce que el conjunto X sólo se transforma en espacio métrico cuando se ha introducido en él la métrica correspondiente $d(x, y)$. Si en un mismo conjunto X se introducen distintas métricas, se obtienen asimismo distintos espacios. Así pues, los espacios representados en las figuras 3-1 y 3-2, tienen en calidad de elementos conjunto de puntos de un plano, pero poseen distintas métricas.

c) Ejemplos de espacios métricos

1. Sean x, y elementos cualesquiera del conjunto R de los números reales. El conjunto R puede transformarse en espacio métrico si se determina la distancia entre x e y por la fórmula

$$d(x, y) = |x - y|. \tag{3-1}$$

Precisamente por esta fórmula se halla la distancia entre los puntos del eje real que constituye uno de los más sencillos ejemplos del espacio métrico.

2) Examinemos el conjunto R^n cuyos elementos son las n-es ordenadas de los números reales del tipo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ... El conjunto R^n puede transformarse en espacio métrico por distintos métodos.

La distancia entre los puntos x e y se define muy frecuentemente por la fórmula

$$d_2(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right\}^{1/2}. \tag{3-2}$$

En el caso de $n = 2, 3$ esta definición coincide con el concepto habitual de distancia. Las propiedades 1, 2 y 3 para esta distancia son evidentes al examinar la figura 3-1.

La métrica $d_2(x, y)$ se denomina euclídea y el espacio R^n con tal métrica se llama euclídeo y se designa por E_n.

3. Para el conjunto R^n la distancia puede determinarse por otros métodos, por ejemplo así:

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{3-3}$$

o bien

$$d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|). \tag{3-4}$$

Es fácil ver que las métricas d_2, d_1, d_∞ son casos particulares de la métrica

$$d_p(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right\}^{1/p}$$

y se obtienen, respectivamente, con $p = 2$, $p = 1$ y $p = \infty$.

Las propiedades 1 y 2 son evidentes para las métricas (3-3) y (3-4). Para demostrar la propiedad 3 introduzcamos un punto más $z=(z_1, \ldots, z_n) \in R^n$. Para la distancia $d_1(x, y)$ tenemos:

$$d_1(x, y)=\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) = d(x, z) + d(z, y).$$

Para la distancia $d_\infty(x, y)$ la propiedad 3 se comprueba del modo siguiente. Supongamos que $|x_k - y_k|$ es la mayor de las diferencias correspondientes de los puntos x e y. Entonces

$$d_\infty(x, y)=|x_k - y_k| = |x_k - z_k + z_k - y_k| \leqslant |x_k - z_k| + |z_k - y_k|.$$

Es evidente que

$$|x_k - z_k| \leqslant \text{máx}(|x_1 - z_1|, \ldots, |x_n - z_n|) = d_\infty(x, z);$$

$$|z_k - y_k| \leqslant \text{máx}(|z_1 - y_1|, \ldots, |z_n - y_n|) = d_\infty(z, y).$$

Luego,

$$d_\infty(x, y) \leqslant d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y).$$

4. Examinemos un conjunto de funciones del tiempo de todo género posible continuas en el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos de estas funciones. La distancia entre ellas puede determinarse mediante la relación

$$d(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|, \tag{3-5}$$

que, como es fácil comprobar, satisface todas las propiedades de la métrica. El espacio con esta métrica se designa por $C_{[a,b]}$.

Para ilustrar las posibilidades de utilizar en la práctica los conceptos introducidos conviene detenerse en un espacio sumamente importante en cibernética que se denomina espacio de mensajes.

3-2. INTERPRETACION GEOMETRICA DE LAS SEÑALES Y MENSAJES

a) Espacio de mensajes

Como hemos visto en la Introducción, los mensajes se transmiten por canales de comunicación con ayuda de cierto alfabeto $\mathfrak{A}$, que consta de un número finito de símbolos. Los mensajes constituyen distintas secuencias de símbolos del alfabeto. El número de símbolos en un mensaje se llama largo del mensaje.

Analicemos el caso en que con ayuda del alfabeto $\mathfrak{A}_m$ que consta de m símbolos se transmiten mensajes de largo n. Pueden catalogarse también aquí los mensajes más breves si éstos se complementan hasta el largo n con cierto símbolo determinado, por ejemplo, con el cero en caso de utilizarse el alfabeto binario. El conjunto de todos estos mensajes puede considerarse como espacio métrico si se introduce el concepto de distancia entre mensajes.

Llamemos distancia $d(x, y)$ entre dos mensajes x e y al número de posiciones en las cuales los mensajes x e y tienen diferentes símbolos. El espacio métrico obtenido en este caso se designará por $E(n, \mathfrak{A}_m)$ y se llamará *espacio de mensajes.*

Ejemplo 3-1. $\mathfrak{A}_m$ es el alfabeto ruso, $n = 7$, $x =$ (картина), $y =$ (корзина). No coinciden la segunda y cuarta letras. Luego, $d(x, y) = 2$.

Ejemplo 3-2. Sea $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2 = \{0, 1\}$ el alfabeto binario, $n = 10$, $x = 0100111010$, $y = 0010110010$. No coinciden el segundo, tercero y séptimo signos. Por tanto, $d(x, y) = 3$.

La definición dada de la distancia $d(x, y)$, en el espacio de mensajes, satisface todas las propiedades de la distancia. El axioma de identidad y el de simetría resultan evidentes. Cerciorémonos de que también se cumple el axioma del triángulo.

Examinemos tres mensajes x, y, z de largo n. Designemos por x_k, y_k y z_k los símbolos de k-ésima posición de estos mensajes. Naturalmente, si $x_k = y_k$ e $y_k = z_k$, entonces $x_k = z_k$, es decir, si en alguna posición coinciden los símbolos de los mensajes x, y, y de los mensajes y, z, entonces en dicha posición coinciden también los símbolos de los mensajes x y z. Por lo tanto, en los mensajes x y z solamente pueden haber símbolos que no coinciden en aquellos lugares donde no coinciden los símbolos bien en los mensajes x, y, bien en los mensajes y, z. Pero esto significa que el número total de símbolos no coincidentes en los mensajes x y z no puede sobrepasar la suma de números de los símbolos no coincidentes en los mensajes x, y e y, z.

En lo sucesivo, con fines de simplicidad y claridad, nos limitaremos únicamente al análisis del alfabeto binario $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2 = \{0, 1\}$. Esto puede hacerse sin detrimento de la generalidad de los razonamientos ya que los mensajes representados por símbolos de un alfabeto siempre pueden recodificarse como mensajes representados mediante símbolos de otro alfabeto. Examinemos, por ejemplo, el alfabeto $\mathfrak{A}_m$ que contiene m símbolos. Yuxtapongamos a cada símbolo un número de orden de 0 a $m - 1$. Si se sustituyen en el mensaje los símbolos del alfabeto $\mathfrak{A}_m$ por sus números de orden en el sistema de numeración binario, obtenemos la representación del mensaje en el alfabeto binario.

b) Concepto de códigos estables a las interferencias

En el proceso de transmisión por un canal de comunicación puede distorsionarse el mensaje. En el caso del alfabeto binario la distorsión consiste en que en el mensaje captado algunas unidades resultan cambiadas por ceros y algunos ceros por unidades. Surge la cuestión de si pueden elaborarse códigos que permitan descubrir que en el proceso de la transmisión ocurrió una distorsión o hasta restablecer los valores de los dígitos distorsionados.

Los códigos que poseen estas propiedades se denominan *estables a las interferencias.*

Examinemos el caso en que durante el proceso de transmisión del mensaje no puede ocurrir una distorsión mayor que en k dígitos. En el espacio de los mensajes $E(n, \mathfrak{A}_2)$ separamos el subconjunto $H_k \subseteq E(n, \mathfrak{A}_2)$ que posee la propiedad de que para $x, y \in H_k$ cualesquiera, se cumple:

$$d(x, y) > k. \tag{3-6}$$

Llamemos al conjunto H_k conjunto de palabras comprensibles. Aquí el término "palabra" es sinónimo del término "mensaje". Entonces cualquier $x \notin H_k$ es una palabra incomprensible. Supongamos que al transmitir la palabra $x \in H_k$ ésta se distorsionó y convirtió en la palabra x. Como que por hipótesis no pueden ocurrir más de k distorsiones, entonces $d(x, x') \leqslant k$ y $x' \notin H_k$, o sea, x' es una palabra incomprensible. Así pues, la recepción de una palabra incomprensible denota que ocurrió una distorsión en el proceso de transmisión. Los códigos que satisfacen la condición (3-6) se denominan códigos con detección de error.

Ejemplo 3-3. Separemos del código $E(3, \mathscr{A}_2)$ el siguiente conjunto de palabras comprensibles que satisfacen la condición $d(x, y) = 2$:

$$H_1 = \{000, 101, 011, 110\}.$$

La distorsión de cualquiera de los dígitos en estas palabras las convierte en incomprensibles, o sea, permite detectar un error sencillo.

El conjunto H_1 que forma un código con detección de error sencillo en palabras de largo n puede obtenerse del modo siguiente. Examinemos el conjunto $E(n-1, \mathfrak{A}_2)$, es decir, el conjunto de palabras de largo $n-1$. El conjunto H_1 se obtiene añadiendo a dicho conjunto un dígito más cuyo valor se elige de modo que sea par el número total de unidades en las palabras $x \in H_1$.

Ejemplo 3-4. Para $n = 4$ tenemos:

$$E(3, \mathfrak{A}_2) = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}.$$

Por cierto

$$H_1 = \{0000, 0011, 0101, 1001, 0110, 1010, 1100, 1111\}.$$

Es cómodo descubrir la palabra distorsionada con ayuda de la operación de adición por el módulo 2 según las reglas:

$$0 \oplus 0 = 0;\ 0 \oplus 1 = 1;\ 1 \oplus 0 = 1;\ 1 \oplus 1 = 0. \tag{3-7}$$

Así pues, en la palabra $x = a_1 a_2 \ldots a_n$ la magnitud

$$\beta = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$$

será cero o unidad dependiendo de si tienen el valor de la unidad un número par o impar de símbolos de la palabra.

Observemos que el código de cuatro dígitos con detección de error que se obtuvo en el ejemplo 3-4, brinda la posibilidad de componer $2^4 = 16$ palabras diferentes, aunque en calidad de palabras comprensibles, o sea, destinadas a transmitirse por el canal de comunicación, se utilizan solamente 8. Los códigos en los que el número de palabras comprensibles es menor que el total de palabras posibles, recibieron la denominación de *códigos con re-*

dundancia. La existencia de redundancia es condición necesaria para la elaboración de códigos estables a las interferencias.

Resulta igualmente posible elaborar códigos que permitan corregir los errores cometidos. Supongamos nuevamente que en el proceso de transmisión puedan distorsionarse no más de k dígitos del código. El conjunto de palabras comprensibles $H_k = E(n, \mathfrak{A}_2)$ se elige por la condición

$$d(x, y) > 2k \tag{3-8}$$

para $x, y \in H_h$ cualesquiera.

Consideremos dos palabras cualesquiera $x, y \in H_k$. Supongamos que como resultado de una distorsión x se convirtió en x'. Entonces, $d(x, x') \leqslant k$. Por la desigualdad del triángulo obtenemos:

$$d(x', y) \geqslant d(x, y) - d(x, x') > 2k - k = k. \tag{3-9}$$

Consecuentemente,

$$d(x, x') < d(x', y). \tag{3.10}$$

De esta manera, la distancia desde la palabra equivocada x' hasta la x que ha sido sometida a distorsión, es menor que hasta cualquier otra palabra comprensible. Hallando la palabra comprensible más cercana a x', nosotros, de este modo, restablecemos el mensaje concreto x. Los códigos que satisfacen la condición (3-8) se denominan *códigos con corrección de errores*. Las cuestiones de la realización práctica de los códigos con corrección de errores son bastante complejas y se estudian en literatura especializada.

3-3. ESPACIOS LINEALES NORMADOS

a) Espacio lineal

Al comienzo del capítulo se definió el espacio como conjunto dotado de una estructura determinada. Se estudiaron los espacios métricos cuya estructura se determinaba por el hecho de que a cada par de elementos se atribuía un número real llamado métrica que satisfacía determinadas propiedades. No obstante, la introducción de la métrica está lejos de agotar todas las propiedades estructurales de los diversos espacios. En particular, si el conjunto X consta de números reales o complejos, se incluyen entre las propiedades estructurales de importancia la posibilidad de obtener elementos del conjunto a partir de otros mediante la adición de estos elementos, o la multiplicación de un elemento por un escalar. Los conjuntos que tienen dichas propiedades pertenecen a la clase de los espacios lineales. Los espacios lineales deben satisfacer las condiciones siguientes:

1) para cada par de elementos, $x, y \in X$ está definido unívocamente un tercer elemento $z \in X$ que se denomina su suma y se designa por $x + y$, siendo que

$x + y = y + x$ (conmutatividad);

$x + (y + v) = (x + y) + v$ (asociatividad);

en X hay un elemento 0 tal que $x + 0 = x$ para todas las $x \in X$ (existencia del cero);

para cada $x \in X$ hay un elemento $-x$ tal que $x + (-x) = 0$ (existencia del elemento opuesto);

2) para cualquier número α y cualquier elemento $x \in X$ está determinado el elemento $\alpha x \in X$ siendo que

$$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x;$$

$$\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Las condiciones 1) y 2) se denominan condiciones de aditividad y homogeneidad del espacio lineal.

Pueden servir de ejemplos de espacios lineales:

1. El conjunto de números reales R con la definición habitual de las operaciones de adición y multiplicación.

2. El conjunto R_n de todas las n-es ordenadas de los números reales, si las operaciones de adición y multiplicación por un número están definidas del modo siguiente. Si $x, y \in R^n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, entonces, $x + y = (x_1 + y_1, \ldots \ldots, x_n + y_n)$; $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Para $n = 2$ y $n = 3$ estas operaciones coinciden con las reglas habituales de operación con vectores. Se entiende por vector nulo el vector $(0, \ldots, 0)$ con componentes iguales a cero.

3. El espacio de las funciones $C_{[a, b]}$, si para $x(t), y(t) \in C_{[a, b]}$ cualesquiera se entiende por $x(t) + y(t)$ la suma de los valores $x(t)$ e $y(t)$ tomados con los mismos valores de t, y por $\alpha x(t)$ se comprende una nueva función obtenida de $x(t)$, multiplicando todos sus valores por α. La función nula será $f(t) \equiv 0$ que es idénticamente igual a cero en todo el intervalo $[a, b]$.

b) Espacio lineal normado

El espacio lineal sólo recibe su descripción definitiva cuando las propiedades de aditividad y homogeneidad están complementadas por la posibilidad de medir la magnitud de los propios elementos. Así pues, no podemos comparar vectores si no convenimos en qué se comprende por magnitud (largo) del vector. La introducción en el espacio lineal de los estimados numéricos de las magnitudes de los distintos elementos conduce al concepto de espacio lineal normado denominado a veces espacio de Banach.

El espacio lineal se denomina espacio lineal normado, si para cada $x \in X$ existe un número no negativo $\|x\|$ llamado *norma* x, que satisface las condiciones siguientes:

$\| x \| = 0$ cuando, y sólo cuando $x = 0$;
$\| \alpha x \| = |\alpha| \cdot \| x \|$;
$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (desigualdad del triángulo).

No es difícil establecer que la magnitud $\|x - y\|$ posee todas las propiedades de la distancia $d(x, y)$ en el espacio métrico. Efectivamente:

$\| x - y \| = 0$, si $x - y = 0$, es decir, si $x = y$;
teniendo en cuenta que $y - x = -(x - y)$, hallamos:

$$\| y - x \| = | -1 | \cdot \| x - y \| = \| x - y \|;$$

$$\| x - y \| = \| (x - z) + (z - y) \| \leqslant \| x - z \| + \| z - y \|.$$

Por tanto, el espacio lineal normado es un espacio métrico con métrica

$$d(x, y) = \| x - y \|. \tag{3-11}$$

Todos los espacios métricos anteriormente examinados complementados con las propiedades de aditividad y homogeneidad, se transforman en espacios lineales normados. Para dichos espacios se emplean notaciones especiales, a saber:

1) el espacio $C_2^{(n)}$ o E_n con la norma

$$\| x \| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right\}^{1/2} \quad \text{o} \quad \| x \| = | x | \text{ para } n = 1; \tag{3-12}$$

2) el espacio $C_1^{(n)}$ con la norma

$$\| x \| = \sum_{i=1}^{n} | x_i |; \tag{3-13}$$

3) el espacio $C^{(n)}$ con la norma

$$\| x \| = \max \{ |x_1|, \ldots, |x_n| \}; \tag{3-14}$$

4) el espacio $C_{[a, b]}$ de las funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$ con la norma

$$\| f \| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} | f(t) |. \tag{3-15}$$

3-4. APLICACION DE LOS ESPACIOS MULTIDIMENSIONALES EN ALGUNOS PROBLEMAS DE CIBERNETICA

a) Atenuación de errores en datos experimentales

Los resultados de las observaciones de cierta magnitud física y son corrientemente una secuencia de valores medidos de esta magnitud $(x_1, \ldots, x_n) = x$, por cierto, los resultados de las mediciones habitualmente contienen errores provocados por las imperfecciones del experimento y la influencia de diversos factores extraños. La misma magnitud y puede no permanecer constante sino variar según cierta ley. El objetivo del experimento es establecer el valor real de la magnitud observada.

La situación descrita puede representarse en términos de la teoría de la transmisión de mensajes si se considera y como cierto mensaje acerca del valor de la magnitud a medir, sobre el cual se superponen las distorsiones debidas a las imperfecciones del experimento. Representando el mensaje transmitido y y el recibido x en forma de puntos del espacio de mensajes, puede estimarse el grado de distorsión del mensaje recibido con ayuda del valor de la distancia $d(x, y)$ cuyo método de determinación depende del carácter del experimento realizado. Con mucha frecuencia se utiliza distancia del tipo

$$d(x, y) = \\ = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}, \quad (3\text{-}16)$$

con la cual el espacio de mensajes se transforma en espacio $C_2^{(n)}$.

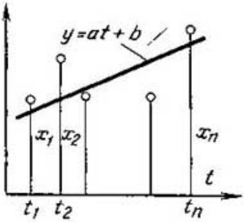

Fig. 3-3. Determinación de los parámetros de una señal que varía linealmente

Por lo general, mediante consideraciones teóricas, se logra establecer el conjunto de los mensajes teóricamente posibles Y. En este caso debe tomarse como mensaje correcto tal $y \in Y$ que sea más cercano al mensaje recibido x, es decir, para el cual

$$d(x, y) = \text{mín}, \qquad (3\text{-}17)$$

o, lo que es a veces más conveniente,

$$d^2 = (x, y) = \text{mín}. \qquad (3\text{-}18)$$

El principio de determinación del mensaje verdadero y por la fórmula (3-18) para la distancia del tipo (3-16) se utiliza ampliamente con el nombre de método de los cuadrados mínimos.

Examinemos a modo de ejemplo el caso de importancia práctica en que la magnitud y varía según la ley lineal:

$$y = at + b. \qquad (3\text{-}19)$$

En los momentos $t_1, \ldots, t_n$ se miden los valores $y_k = at_k + b$, $k = 1, \ldots, n$. Los resultados de las mediciones $x_1, \ldots, x_n$ están representados en la figura 3-3.

Tomando en consideración (3-19) la condición (3-18) se escribe en la forma

$$d^2(x, y) = F(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - at_k - b)^2 = \text{min}. \qquad (3\text{-}20)$$

En esta expresión son incógnitos los parámetros a y b de la ley lineal buscada de variación de la magnitud y. Igualando a cero las derivadas parciales por a y b de la función $F(a, b)$, obtenemos dos ecuaciones que contienen ambas incógnitas y que después de simplificarlas adquieren la forma:

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{n} t_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k; \\ a\sum_{k=1}^{n} t_k + nb = \sum_{k=1}^{n} x_k. \end{aligned}\right\} \tag{3-21}$$

No es difícil determinar en (3-21) los valores de a y b, que nos interesan.

Otro caso importante tiene lugar cuando la magnitud y se mantiene invariable, es decir,

$$y = c = \text{const} \tag{3-22}$$

y para su estimación se han realizado n mediciones independientes $x_1, \ldots, x_n$. Teniendo en cuenta (3-16) la condición (3-18) se escribe en la forma

$$d^2(x, y) = F(c) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - c)^2 = \text{mín}. \tag{3-23}$$

Diferenciando esta expresión por c e igualando a cero, hallamos:

$$c = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{3-24}$$

El valor c determinado por la fórmula (3-24) se denomina media aritmética de los valores $x_1, \ldots, x_n$.

Con una definición distinta de la distancia se obtienen otras fórmulas para determinar la media. Para mayor comodidad vamos a considerar que las magnitudes $x_1, \ldots, x_n$ están dispuestas en orden creciente de sus valores. Proponemos al lector cerciorarse por sí mismo de que al determinar la distancia por la fórmula (3-3) el valor medio

$$c = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{para } n \text{ impar;} \\ \text{cualquiera de } x_{\frac{n}{2}-1} \text{ a } x_{\frac{n}{2}+1} & \text{para } n \text{ par.} \end{cases} \tag{3-25}$$

A veces para ser más concretos para n par se supone que

$$c = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}-1} + x_{\frac{n}{2}+1}\right). \tag{3-26}$$

Si la distancia se determina por la fórmula (3-4), la fórmula para la media es:

$$c = \frac{x_1 + x_n}{2}. \tag{3-27}$$

b) Problema de identificación de imágenes

La rama de la cibernética que se ocupa de la identificación de imágenes tiene como objetivo simular una de las propiedades más importantes del cerebro humano, la propiedad de identificar los objetos, fenómenos y situaciones que permiten al hombre orientarse en situaciones ambientales complejas.

Los conceptos fundamentales de la teoría de identificación son los *de clase* e *imagen*. Los diversos objetos o fenómenos del mundo real difieren unos de otros por sus propiedades. Al mismo tiempo los distintos objetos y fenómenos tienen asimismo propiedades generales que permiten agrupar los objetos en ciertos conjuntos o clases. Así pues, los diferentes tipos de automóviles se reúnen en la clase de los automóviles. Las clases pueden ser de diverso grado de generalidad dependiendo de las propiedades que se les atribuyen. Así, la clase de los automóviles es un elemento de la clase más amplia de los medios de transporte. De este modo, se denomina clase un conjunto de objetos o fenómenos reunidos según ciertas propiedades comunes.

En cada situación concreta es necesario operar con un juego finito de clases expresadas por el conjunto finito

$$W = \{A, B, C, \ldots, P\}.$$

Cada clase incluye en sí un conjunto de objetos cuyo número puede ser tan grande como se quiera y cuyas propiedades son sumamente variadas. Sin embargo, en la práctica sólo resulta posible tomar en consideración un número limitado, y con frecuencia muy pequeño, de propiedades diferentes. Llamaremos imagen o modelo del objeto al número total finito de propiedades del objeto, y representaremos la imagen en forma del vector de n dimensiones $x = (x_1, \ldots, x_n)$ cuyas componentes caracterizan cuantitativamente las propiedades de la imagen. Puede servir de ejemplo de imagen la señal de televisión de una fotografía dividida en n celdas independientes. El total del brillo de luminiscencia de las celdas forma un punto en el espacio de n dimensiones constituyendo la imagen de la fotografía.

Puede esperarse (por supuesto, con la condición de que el total de los índices caracterice bastante completamente las propiedades de los objetos), que la totalidad de los puntos correspondientes a las distintas imágenes de una misma clase, va a ocupar en el espacio de imágenes cierto dominio que difiere de los dominios correspondientes a las imágenes de otras clases.

El problema de identificar las imágenes puede considerarse solucionado en principio si en el espacio de imágenes se han hecho pasar planos que lo dividen en dominios cuyos puntos pertenecen a imágenes de clases diferentes. Uno de los métodos posibles de resolución de este problema es el estudio previo de las propiedades de las distintas imágenes de los objetos de cada clase.

Supongamos que existen sólo dos clases de objetos A y B. Designemos por A_0 y B_0 los conjuntos de los modelos de estas clases previamente estudiados. Las representaciones de dichos modelos en el espacio de imágenes pueden tener el aspecto mostrado para el caso de dos dimensiones en la figura 3-4, a, donde los pun-

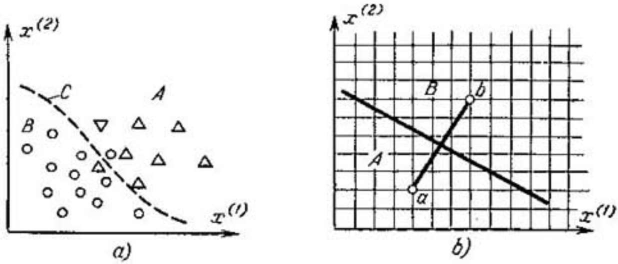

Fig. 3-4. División del espacio de modelos en clases

tos correspondientes a los modelos de A_0 están designados por círculos y de B_0, por triángulos.

Sea x la imagen del nuevo objeto a investigar. Se toman como medida de la cercanía de esta imagen a las clases A y B las magnitudes $S(x, A)$ y $S(x, B)$ que representan, por ejemplo, los cuadrados medios de las distancias del punto x y los puntos correspondientes a las distintas imágenes de las clases A y B. Así pues, si $A_0 = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y $B_0 = \{b_1, \ldots, b_l\}$ por la fórmula (3-24) para el valor medio obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} S(x, A) &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d^2(x, a_i); \\ S(x, B) &= \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} d^2(x, b_j). \end{aligned}\right\} \tag{3-28}$$

La superficie que separa las imágenes de ambas clases, en el espacio de imágenes será una superficie C cuyos puntos satisfacen la condición

$$S(x, A) = S(x, B). \tag{3-29}$$

Como se ve en la figura 3-4, *a*, en algunos casos la superficie *C* será tal que pueda referirse por error la imagen a una clase ajena. Puede servir de criterio de calidad de identificación el número relativo de imágenes identificadas incorrectamente.

Ejemplo 3-5. De cada clase *A* y *B* se toma un modelo de $a_1 \in A$ y $b_1 \in B$ que expresan en el espacio bidimensional las propiedades más características de estas clases. Trace una línea que divida el espacio de imágenes en dos dominios correspondientes a las clases *A* y *B*.

Se determina la distancia aplicando la fórmula (3-2) por la longitud del segmento que une dos puntos en el espacio de imágenes. Según (3-29), la línea divisoria será aquella todos los puntos de la cual están alejados a una distancia igual de los puntos a_1 y b_1. Esta línea será la perpendicular construida a partir de la mitad del segmento que une los puntos a_1 y b_1 (fig. 3-4, *b*).

3-5. IMAGENES GEOMETRICAS EN EL ESPACIO MULTIDIMENSIONAL

a) Concepto de hiperesfera

Sea *X* cierto conjunto de puntos en el espacio multidimensional. Se llama *hiperesfera* la superficie cerrada todos los puntos de la cual están alejados a la misma distancia *r* de cierto punto fijo *a*. Por consiguiente, la hiperesfera es el conjunto $X(a, r) \subseteq E_n$ que se determina como

$$X(a, r) = \{x \in E_n : d(a, x) = r\}. \tag{3-30}$$

El punto fijo *a* se denomina *centro* y *r*, *radio* de la hiperesfera. El conjunto

$$B(a, r) = \{x \in E_n : d(a, x) < r\} \tag{3-31}$$

se llama parte interior de la hiperesfera o *esfera abierta*. El conjunto

$$B[a, r] = \{x \in E_n : d(a, x) \leqslant r\} \tag{3-32}$$

se denomina *esfera cerrada*.

La esfera abierta de radio ε con centro en *x* se llama *vecindad* del punto *x* y se designa por $O_\varepsilon(x)$.

Ejemplo 3-6. En el espacio $E_2 = \{x_1, x_2\}$ la ecuación de la hiperesfera se puede escribir en la forma $d^2(a, x) = r^2$. Si la distancia se determina por la fórmula (3-7) la hiperesfera se convierte en esfera: $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$.

b) Conjuntos limitados y finitos

Vamos a denominar conjunto universal el conjunto E_n que representa una reunión infinita de los puntos del espacio de *n* dimensiones. Designemos por *X* cierto subconjunto del conjunto E_n. El conjunto *X* se llama *limitado* si está limitada la distancia entre dos puntos cualesquiera de dicho conjunto, es decir, si existe un número M tal que para cualesquier $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ se cumple

$$d(x^{(1)}, x^{(2)}) \leqslant M. \tag{3-33}$$

Puede demostrarse que la condición necesaria y suficiente para limitar el conjunto X es que el mismo esté en cierta hiperesfera, o sea, la existencia de un punto a y un número r tales que para cualquier $x \in X$ se cumple

$$d(x, a) \leqslant r. \tag{3-34}$$

El conjunto X se denomina *finito* si contiene un número finito de puntos. El conjunto finito siempre es limitado.

Ejemplo 3-7. En el espacio E_2 el conjunto $X = \{(x_1, x_2) \in E_2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ es un conjunto infinito limitado.

Ejemplo 3-8. En el espacio E_2 el conjunto X que consta de cinco puntos $X = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (^1/_2, {}^1/_2)\}$, es un conjunto finito.

c) Conjuntos abiertos y cerrados

El punto x se denomina punto *interior* del conjunto X si existe la vecindad $O_\varepsilon(x)$, todos los puntos de la cual pertenecen a X. Se llama conjunto *abierto* al conjunto X todos los puntos del cual son interiores.

Ejemplo 3-9. El intervalo $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$, en que R es el conjunto de los números reales, constituye un conjunto abierto. Efectivamente, para cualquier $x \in (a, b)$ la vecindad $O_\varepsilon(x)$ en la cual $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$ pertenece por completo a (a, b).

Ejemplo 3-10. La esfera abierta $B(a, r)$ es un conjunto abierto. Efectivamente, si $x \in B(a, r)$, entonces $d(a, x) < r$. Supongamos que $\varepsilon = r - d(a, x)$, entonces $O_\varepsilon(x) = B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

El punto x se denomina punto *límite* del conjunto X si cualquier vecindad $O_\varepsilon(x)$ de aquél contiene un número infinitamente grande de puntos de X. Si con esto $x \in X$, entonces el mismo se denomina punto límite perteneciente a X. Así pues, todos los puntos interiores del conjunto X son puntos límites pertenecientes a X.

Si x es un punto límite del conjunto X y $x \notin X$, este punto se denomina límite no perteneciente al conjunto X. Tales puntos serán, por ejemplo, los puntos a y b del conjunto (a, b). Un conjunto finito no posee puntos límites.

El conjunto X se llama cerrado si contiene todos sus puntos límites. Pueden servir como ejemplos de conjuntos cerrados cualquier segmento $[a, b]$ de la recta numérica, la esfera cerrada $B[a, r]$ o cualquier conjunto finito.

d) Concepto de hiperplano

El *hiperplano* es la generalización del concepto de plano para el espacio multidimensional. En geometría analítica se demuestra que cualquier ecuación lineal con respecto a las coordenadas define un plano. Si las coordenadas del punto corriente son x_1, x_2, x_3 la ecuación del plano en el espacio tridimensional es de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c. \tag{3-35}$$

Si el juego fijo de números (a_1, a_2, a_3) se entiende como vector a trazado desde el origen de coordenadas a un punto con coordenadas a_1, a_2 y a_3, y como $x = (x_1, x_2, x_3)$ se comprende el vector que determina la posición del punto corriente en el espacio E_3, entonces el primer miembro de la ecuación (3-35) va a constituir el producto escalar de los vectores a y x, y la ecuación

$$ax = c \tag{3-33}$$

será la ecuación vectorial del plano perpendicular al vector $a = (a_1, a_2, a_3)$.

En caso del espacio multidimensional E_n la ecuación (3-63) va a definir el hiperplano perpendicular al vector fijo $a = (a_1, \ldots, a_n)$ cuyas coordenadas corrientes están definidas por el vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Designando el conjunto de los puntos del hiperplano por $L(x)$ y desarrollando el producto escalar de los vectores a y x llegamos a la siguiente definición de hiperplano;

$$L(x) = \left\{ x \in E_n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - c = 0 \right\}. \tag{3-37}$$

Los conjuntos

$$L^+ = \left\{ x \in E_n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - c > 0 \right\} \tag{3-38}$$

y

$$L^- = \left\{ x \in E_n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - c < 0 \right\} \tag{3-39}$$

se denominan semiespacios abiertos determinados por el hiperplano L.

e) Ecuación del segmento. Concepto de conjunto medio ponderado por elementos

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ en el espacio E_n se obtiene si se toma en ella el punto x que divide el segmento $(x^{(1)}, x^{(2)})$ en la relación $w : 1 - w$. Como que la relación de los segmentos de recta será la misma que la relación de sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas, para las proyecciones sobre el eje k se llega a la relación

$$\frac{x_k - x_k^{(1)}}{x_k^{(2)} - x_k} = \frac{w}{1 - w}, \tag{3-40}$$

o bien

$$x_k = (1 - w)\, x_k^{(1)} + w x_k^{(2)}. \tag{3-41}$$

Suponiendo que $k = 1, \ldots, n$, obtenemos el sistema de ecuaciones que define la recta:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (1 - w)\, x_1^{(1)} + w x_1^{(2)}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= (1 - w)\, x_n^{(1)} + w x_n^{(2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}42)$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse de modo más compacto en forma vectorial

$$x = (1 - w)\, x^{(1)} + w x^{(2)}. \qquad (3\text{-}43)$$

La ecuación (3-43) es la de la recta que pasa por los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, por cierto, como se muestra en la figura 3-5 a diferentes valores de w van a corresponder distintos puntos de dicha recta. En particular, para $0 \leqslant w \leqslant 1$ esta ecuación define el segmento limitado por los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$.

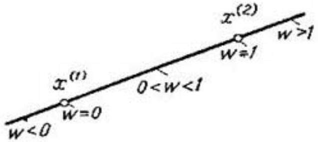

Fig. 3-5. Valores de w en los distintos puntos de la recta

Lo más cómodo es escribir la ecuación del segmento en la forma

$$x = w_1 x^{(1)} + w_2 x^{(2)}; \quad w_1,\ w_2 \geqslant 0; \quad w_1 + w_2 = 1. \qquad (3\text{-}44)$$

La magnitud x definida por (3-44) se denomina *media ponderada* por los elementos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ con pesos w_1 y w_2. Esta denominación tiene un sencillo sentido físico. Si en los puntos $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$ se colocan pesas con los pesos w_1 y w_2, entonces el punto x determina el centro de gravedad del sistema.

El concepto de media ponderada puede extenderse también a un número mayor de puntos. Vamos a llamar media ponderada por los elementos $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ a la magnitud x definida por la relación

$$x = \sum_{i=1}^{m} w_i x^{(i)}; \quad w_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1. \qquad (3\text{-}45)$$

3-6. CONJUNTOS CONVEXOS Y SUS PROPIEDADES

a) Definición de conjunto convexo

Sea X cierto conjunto en el espacio E_n. El conjunto X se denomina *convexo*, si el segmento que une dos puntos cualesquiera de este conjunto pertenece íntegramente a dicho conjunto. En otras palabras, X es un conjunto convexo si para cualesquier $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ y $w_1, w_2 > 0$, $w_1 + w_2 = 1$ se cumple $w_1 x^{(1)} + w_2 x^{(2)} \in X$.

Los ejemplos de conjuntos convexos en el espacio $E_2 = \{(x, y)\}$ son: $x^2 + y^2 < 1$; $x^2 + y^2 \leqslant 1$; todo el plano E_2; los semiplanos $ax + by - c > 0$ y $ax + by - c < 0$ (fig. 3-6, *a*). Por otra parte, no son convexos ambos conjuntos definidos por las ecuaciones $x^2 + y^2 \geqslant 1$, $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 3-6, *b*). Efectivamente, el punto (0, 0) que no pertenece a estos conjuntos pertenece al segmento que une los puntos (1, 0) y (—1, 0) de dichos conjuntos.

Teorema 3-1. *La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

Demostración. Examinemos la intersección $X \cap Y$ de los conjuntos convexos X e Y. Sean x e y dos puntos arbitrarios de $X \cap Y$.

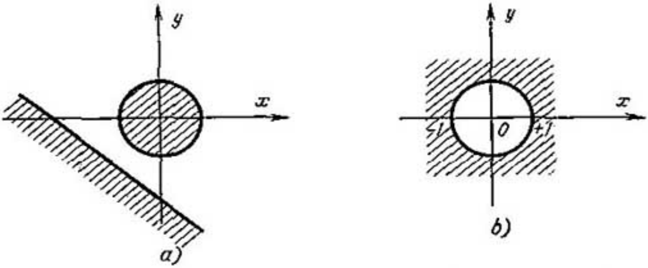

Fig. 3-6. Ejemplos de conjuntos convexos (*a*) y no convexos (*b*)

Entonces ellos pertenecen tanto a X como a Y. Por cuanto los conjuntos X e Y son convexos, el segmento que une los puntos x e y pertenece íntegramente tanto a X como a Y, y por eso, a la intersección $X \cap Y$. Por consiguiente, $X \cap Y$ es un conjunto convexo.

b) Envoltura convexa de un conjunto finito

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ el conjunto finito de puntos en el espacio E_n. El conjunto finito no es convexo. No obstante, los puntos del conjunto finito A pueden ser elementos de algunos conjuntos convexos, por ejemplo S_1, S_2, etc., como se muestra en la figura 3-7. En este caso A es un subconjunto de los conjuntos convexos S_1, $S_2 \ldots$

Se denomina envoltura convexa co(A) del conjunto A la intersección de todos los conjuntos convexos cuyos subconjuntos es A. En particular, si $A \subset S_1$ y $A \subset S_2$, entonces co$(A) \subseteq S_1 \cap S_2$.

De la definición dada se infiere que la envoltura convexa co(A) es el conjunto convexo menor que contiene A. En efecto, si hubiera un conjunto convexo S tal que $A \subset S$ y $S \subseteq$ co(A), entonces se cumpliría que $\mathrm{co}(A) \subseteq S \cap \mathrm{co}(A)$, es decir, $\mathrm{co}(A) \subseteq S$. De aquí se deduce que $S = \mathrm{co}(A)$.

Teorema 3-2. *La envoltura convexa del conjunto finito A es el conjunto de las medias ponderadas por elementos del conjunto A.*

Sean $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un conjunto finito y w_i, $i = 1, \ldots, m$ números reales tales que

$$w_i \geqslant 0; \quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1. \tag{3-46}$$

La magnitud

$$x = \sum_{i=1}^{m} w_i a_i \tag{3-47}$$

se denomina media ponderada por elementos del conjunto A. El conjunto S cuyos elementos son las magnitudes x determinadas por la fórmula (3-47) para todas las w_i posibles en el marco de las limitaciones (3-46), constituye el conjunto de las medias ponderadas por elementos del conjunto A. Se requiere demostrar que

$$S = \mathrm{co}\,(A). \tag{3-48}$$

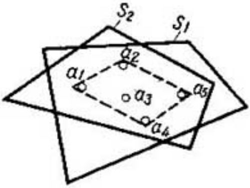

Fig. 3-7. Para la obtención de la envoltura convexa de un conjunto finito

Demostración. Para que el conjunto S sea la envoltura convexa del A, aquél deberá ser, en primer lugar, convexo y, en segundo, el menor conjunto convexo que contiene el conjunto A. Demostremos que se cumplen ambas condiciones.

1. Tomemos dos sistemas arbitrarios de pesos w_i y w'_i, que determinan dos puntos del conjunto S:

$$x = \sum_{i=1}^{m} w_i a_i, \quad x' = \sum_{i=1}^{m} w'_i a_i. \tag{3-49}$$

Tomemos el punto arbitrario x'' del segmento que une x y x':

$$x'' = (1 - w)\, x + w x' = \sum_{i=1}^{m} [(1 - w)\, w_i + w w'_i]\, a_i = \sum_{i=1}^{m} w''_i a_i, \tag{3-50}$$

donde

$$w''_i = (1 - w)\, w_i + w w'_i. \tag{3-51}$$

La magnitud w''_i no es negativa ya que representa la media ponderada de dos números no negativos w_i y w'_i. Además,

$$\sum_{i=1}^{m} w''_i = (1 - w) \sum_{i=1}^{m} w_i + w \sum_{i=1}^{m} w'_i = 1. \tag{3-52}$$

De este modo x'' es la media ponderada por elementos del conjunto A, es decir, $x'' \in S$. Por consiguiente, S es un conjunto convexo.

2. Sea T un conjunto convexo arbitrario que contiene A. Demostremos que el mismo también contiene S.

Por hipótesis todos los elementos a_i están contenidos en T. Más adelante, el elemento

$$x_2 = \frac{w_1}{w_1 + w_2} a_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2} a_2 \tag{3-53}$$

es la media ponderada de $a_1, a_2 \in T$, de modo que $x_2 \in T$. Procediendo exactamente igual obtenemos que

$$x_3 = \frac{w_1 + w_2}{w_1 + w_2 + w_3} x_2 + \frac{w_3}{w_1 + w_2 + w_3} a_3 =$$
$$= \frac{w_1 a_1}{w_1 + w_2 + w_3} + \frac{w_2 a_2}{w_1 + w_2 + w_3} + \frac{w_3 a_3}{w_1 + w_2 + w_3} \tag{3-54}$$

es la media ponderada de $x_2, a_3 \in T$, de manera que $x_3 \in T$. Prosiguiendo el examen de esta secuencia de puntos, hallamos que el punto

$$x_m = \frac{w_1 + \ldots + w_{m-1}}{w_1 + \ldots + w_m} x_{m-1} + \frac{w_m}{w_1 + \ldots + w_m} a_m = \sum_{i=1}^{m} w_i a_i \in S \tag{3-55}$$

pertence asimismo al conjunto T. De esta suerte, cualquier $x \in S$ también pertenece a T, o sea, $S \subseteq T$. Pero T es un conjunto convexo arbitrario que contiene A. Consecuentemente, S es el conjunto convexo menor que contiene A.

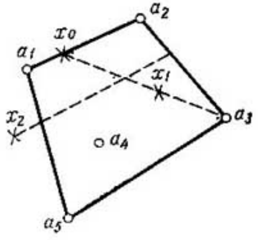

Fig. 3-8. Envoltura de un conjunto finito

El teorema dado permite determinar qué aspecto tiene la envoltura convexa del conjunto finito. Consideremos el caso bidimensional. En la figura 3-8 se muestran el conjunto finito $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y el polígono convexo cuyos vértices son los elementos del conjunto A. Es fácil ver que cualquier punto en un vértice, un lado o en el interior de un polígono convexo puede representarse como la media ponderada de, por lo menos, tres de sus vértices.

Así pues, $x_0 = \text{med. pon}(a_1, a_2)$, $x_1 = \text{med. pon}(x_0, a_3) = \text{med. pon}(a_1, a_2, a_3)$. Al mismo tiempo el punto x_2 que está fuera del polígono no puede ser la media ponderada de dos puntos interiores ningunos y esto significa que no puede expresarse como la media ponderada de los vértices del polígono. De este modo, la envoltura convexa del conjunto finito A en el plano es el polígono cuyos vértices son los elementos del conjunto A.

Esta deducción se generaliza fácilmente para el caso de un espacio arbitrario E_n. La envoltura convexa del conjunto finito A en el espacio E_n es el polígono convexo cuoys vértices son los elementos del conjunto A. Cualquier punto interior o límite de tal polígono puede ser representado como la media ponderada de no más de $(n-1)$ vértices.

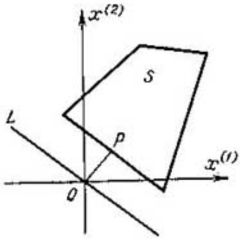

Fig. 3-9. Para la construcción del hiperplano de apoyo

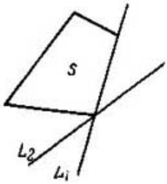

Fig. 3-10. Rectas de apoyo al conjunto convexo

Para concluir enunciemos sin demostración dos teoremas que serán utilizados para fundamentar una serie de preceptos de la programación lineal y de la teoría de los juegos.

Teorema 3-3 (teorema del hiperplano de apoyo). *Sea S un conjunto convexo y O un punto arbitrario que no pertenece a S. El teorema afirma que existe un hiperplano L que pasa por O, tal que S está en uno solo de los semiplanos determinados por L* (para los espacios bidimensional y tridimensional esto resulta intuitivamente claro por la fig. 3-9).

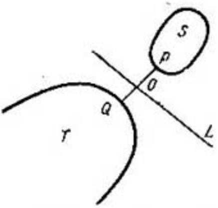

Fig. 3-11. Hiperplano divisor

Vamos a desplazar el hiperplano en el espacio acercándolo a S hasta que L y S vayan a tener, por lo menos, un punto común quedando S, no obstante, en uno de los semiplanos determinados por el hiperplano L. Este se denomina hiperplano de apoyo para el conjunto convexo S.

Si el conjunto convexo S es la envoltura del conjunto finito A, entonces aquél representa un polígono convexo. En este caso el plano de apoyo va a pasar por el vértice, arista o borde del polígono (fig. 3-10). En cualquiera de dichas variantes resulta que al menos uno de los vértices del polígono está en el hiperplano de apoyo.

Teorema 3-4 (teorema del hiperplano divisor). *Si S y T son conjuntos convexos no intersecados y, por lo menos, uno de ellos está limitado, existe un hiperplano tal que los conjuntos S y T*

están en los diferentes semiespacios determinados por dicho hiperplano. En otras palabras, existe el hiperplano $px = c$, donde $p = (p_1, \ldots, p_n)$ es cierto conjunto ordenado de números reales, y $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto arbitrario, tal que $px > c$, si $x \in S$ y $px < c$, si $x \in T$. La ilustración geométrica de este teorema se muestra en la figura 3-11.

PROBLEMAS PARA EL CAPITULO 3

3-1. En el espacio tridimensional están dados los puntos $x = (1, 0, 2)$, $y = (3, 4, 0)$, $z = (1, 2, 3)$. Comprobar para estos puntos el axioma del triángulo en los espacios $C_2^{(3)}$, $C_1^{(3)}$, $C^{(3)}$.

3-2. Dibujar en el plano (x, y) la circunferencia con centro en a y radio r en los espacios $C_2^{(3)}$, $C_1^{(3)}$, $C^{(3)}$.

3-3. Demostrar las fórmulas (3-25) y (3-27) para determinar la media.

3-4. Determinar el cambio cualitativo de la línea que separa las clases A y B en el ejemplo 3-5, si en la clase A hay además un segundo modelo a_2. Analizar el caso en que $a_2 = (2, 1)$, $a_2 = (2, 3)$ y $a_2(6, 3)$.

3-5. ¿Qué aspecto va a tener la línea que separa las clases A y B en la figura 3-4, *b* si la distancia se determina:

a) por la fórmula (3-3),

b) por la fórmula (3-4).

3-6. Demostrar que la esfera abierta $B(0, r)$ en el espacio E_n es un conjunto convexo.

3-7. ¿Cuáles de los conjuntos $[0, 3]$, $[5, 7]$, $[0, 3] \cup [5, 7]$ en el espacio de números reales R son convexos y cuáles no lo son?

3-8. Demostrar que el punto x_1 en la figura 3-8 es la media ponderada de los vértices a_1, a_2 y a_3.

Capítulo cuarto

ELEMENTOS DE ALGEBRA LOGICA

4-1. OPERACIONES LOGICAS

a) Concepto de proposición

Como vimos antes pueden presentarse los conjuntos por dos métodos: de enumeración y de descripción, o sea, indicando la propiedad que poseen los elementos del conjunto. El método descriptivo para presentar los conjuntos vincula la teoría de conjuntos con la teoría de las proposiciones que constituye la primera y más sencilla parte de la disciplina científica llamada lógica matemática.

Llamaremos proposición a cada afirmación que puede ser verdadera o falsa. Vamos a examinar las proposiciones con respecto a los elementos de cierto conjunto universal I. Los diversos elementos de este conjunto van a poseer diferentes propiedades y en concordancia con esto pueden formar distintos grupos que constituyen subconjuntos del conjunto I. Así pues, si I es el conjunto de estudiantes en un grupo, sus subconjuntos pueden ser: X, el conjunto de estudiantes sobresalientes; Y, el conjunto de estudiantes que viven en la residencia estudiantil; Z, el conjunto de estudiantes becados, etc.

Después que se hayan distinguido las propiedades que poseen los diversos subconjuntos pueden hacerse determinadas afirmaciones respecto a si uno u otro elemento de I tiene las propiedades requeridas. Estas afirmaciones serán proposiciones: "es estudiante sobresaliente", "vive en la residencia de estudiantes" y "es becario".

En lo sucesivo nos abstraeremos de todas las propiedades de las proposiciones a excepción de una: cada una de las proposiciones puede ser verdadera o falsa con respecto al elemento considerado del conjunto universal I. Así bien, la proposición "el estudiante Ivanov es sobresaliente" es cierta si el estudiante Ivanov pertenece al subconjunto X, y falsa si no pertenece a éste.

Por eso el subconjunto X se denomina *conjunto de veracidad* para la proposición "es estudiante sobresaliente". Los conjuntos de veracidad para las proposiciones "vive en la residencia de estudiantes" y "es becario" serán, respectivamente, los conjuntos Y y Z.

El conjunto de veracidad de cierta proposición puede resultar vacío. En este caso la proposición se denomina idénticamente falsa. Así, para el grupo estudiantil será idénticamente falsa la proposición "es mayor de cincuenta años". Puede suceder que el conjunto de veracidad de cierta proposición coincida con el conjunto universal I. En este caso la proposición se llama idénticamente verdadera. Para el grupo estudiantil será idénticamente verdadera la proposición "es menor de cincuenta años".

b) Proposiciones simples y compuestas

Vamos a designar las proposiciones con letras minúsculas del alfabeto romano y atribuir a cada una de ellas valores numéricos de 1 y 0 según sea verdadera o falsa la proposición. Supongamos por ejemplo que x denota la proposición "es estudiante sobresaliente". Sus valores numéricos son:

$$x = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es verdadera, o sea, } x \in X; \\ 0, \text{ si es falsa, o sea, } x \notin X. \end{cases} \tag{4-1}$$

Las proposiciones x, y, z a las cuales corresponden los conjuntos de veracidad sencillos X, Y, Z se denominan proposiciones *sencillas*. No obstante, puede resultar un conjunto de veracidad el conjunto Q obtenido de los conjuntos X, Y, Z por medio de cualquier operación algebraica con dichos conjuntos. En tal caso va a corresponder al conjunto de veracidad Q la proposición q llamada proposición *compuesta*. Por ejemplo, al conjunto de veracidad $Q = X \cap Y$ que posee tanto la propiedad X (estudiante sobresaliente) como la propiedad Y (vive en la residencia de estudiantes), va a corresponder la proposición compuesta "es estudiante sobresaliente y vive en la residencia estudiantil".

En el ejemplo dado obtuvimos una proposición compuesta enlazando dos proposiciones mediante la conjunción "y". Sería posible obtener una proposición compuesta utilizando otras cópulas: "o", "si, entonces", etc. De una proposición puede obtenerse una nueva negándola. A cada una de estas nuevas proposiciones van a corresponder sus conjuntos de veracidad en el conjunto universal I, es decir, las proposiciones compuestas pueden ser también verdaderas o falsas, o sea, tomar los valores numéricos 1 y 0.

Considerando las proposiciones como magnitudes que toman valores 1 y 0 pueden determinarse con las mismas las operaciones que permiten obtener de las proposiciones dadas otras nuevas. Éstas operaciones van a expresar las cópulas citadas más arriba que se emplean en el lenguaje corriente.

Las operaciones realizadas con las proposiciones se denominan *operaciones lógicas*. El total de las operaciones lógicas que se examinan más adelante recibió el nombre de *álgebra de proposiciones* o *álgebra booleana* (de Boole).

c) Presentación de las operaciones lógicas

Supongamos que tenemos varias proposiciones sencillas $x_1, \ldots, x_N$ cada una de las cuales puede ser verdadera o falsa, o sea, adquirir valores numéricos 1 y 0. Podemos considerar el total de estas proposiciones como el cortejo $(x_1, \ldots, x_N)$.

Tabla 4-1

Funciones de dos variables lógicas

x	y	0	x	y	xy	$x+y$	$x \oplus y$	$x \to y$	$y \to x$	1	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\overline{xy}$	$\overline{x+y}$	$\overline{x \oplus y}$	$\overline{x \to y}$	$\overline{y \to x}$
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

Supongamos que con estas proposiciones hemos realizado cierta operación lógica como resultado de la cual obtuvimos una nueva proposición q que puede ser asimismo verdadera o falsa, es decir, puede tomar los valores 1 y 0. En este caso a cada combinación de valores $x_1, \ldots, x_N$ va a corresponder un valor determinado $q \in \{1, 0\}$. En consecuencia, la operación lógica puede considerarse como el reflejo f del conjunto de los valores del cortejo $(x_1, \ldots, x_N)$ en el conjunto de los valores q

$$f : (x_1, \ldots, x_N) \to \{1, 0\}.$$

Tabla 4-2

$q = \bar{x}y + z$

x	y	z	q
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Si este reflejo es unívoco el mismo define la función

$$q = f(x_1, \ldots, x_N), \tag{4-2}$$

que se denomina *función booleana.* Como se infiere de lo dicho, en las funciones booleanas tanto los argumentos, como las funciones propiamente dichas sólo pueden tomar dos valores diferentes que designamos por 1 y 0.

Se emplean tres métodos para representar las funciones booleanas:

1. La fórmula, que indica en forma explícita la secuencia de operaciones lógicas que se realizan con las proposiciones $x_1, \ldots, x_N$ y que tiene la forma de relación (4-2).

2. La tabla, que señala los valores de veracidad de la proposición compuesta q según los valores de veracidad de las proposi-

ciones iniciales. En la parte izquierda de la tabla se enumeran todas las combinaciones posibles de valores de veracidad $x_1, \ldots, x_N$, y en la parte derecha, los valores de veracidad de la proposición compuesta q. Si hay N proposiciones iniciales, el número de líneas de la tabla será de 2^N. Pueden servir como ejemplos de ellas las tablas 4-1 y 4-2.

3. El esquema lógico que representa la designación gráfica de referencia convencional de la operación lógica que tiene el aspecto mostrado en la figura 4-1.

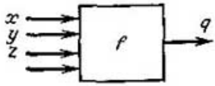

Fig. 4-1. Designación convencional de la operación lógica

En automática y técnica de cálculo se acostumbra a presentar las diferentes proposiciones en forma de señales que tienen dos niveles, o en forma de dispositivos capaces de ocupar dos posiciones (relé, trigger, tubo electrónico, transistor, etc.). A estos dos niveles de las señales o dos estados del dispositivo se atribuyen los valores numéricos 1 y 0 que determinan los valores de veracidad de las proposiciones correspondientes. Con esta concepción el esquema lógico va a constituir un convertidor de señales que puede utilizarse con fines de mando de diversos procesos.

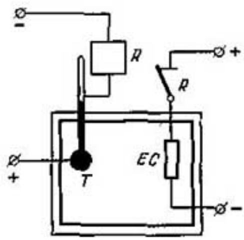

Fig. 4-2. Regulación de la temperatura en un termostato

Ejemplo 4-1 Para mantener la temperatura Θ de un termostato en el nivel deseado Θ_0 se emplea el elemento calentador *EC* (fig. 4-2) que puede funcionar en dos regímenes: "conectado" y "desconectado". El mando de la conexión del elemento calentador se realiza por la regla:

conectar el *EC* si $\Theta < \Theta_0$;
desconectar el *EC* si $\Theta > \Theta_0$.

Tomemos la proposición "temperatura mayor de Θ_0" como proposición inicial x y la proposición "conectar el *EC*", como proposición compuesta q. Entonces la estructura lógica del circuito de mando del elemento calentador va a tener la forma:

$$q = \begin{cases} 1, \text{ si } x = 0; \\ 0, \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

En la figura 4-2 se muestra la realización física de la ley de mando descrita. La señal x se expresa por la altura de la columna de mercurio del termómetro T que con $\Theta \geqslant \Theta_0$ cierra el contacto del relé R, conectando así el elemento calentador.

4-2. ALGEBRA DE PROPOSICIONES

a) Negación

Sea x la proposición cuyo conjunto de veracidad es X. Designemos por $\bar{x}$ (se lee "no es x") una nueva proposición que tiene el conjunto de veracidad $\bar{X}$ y que se denomina *negación* o *inversión* de X.

La relación entre x y $\bar{x}$ puede determinarse utilizando el diagrama de Euler — Venn dado en la figura 4-3, *a*. Según la definición de negación, $\bar{x} = 1$ en la zona $\bar{X}$, donde $x = 0$ y $\bar{x} = 0$ en la zona X donde $x = 1$. Esto puede escribirse en forma de las siguientes reglas de inversión:

$$\bar{1} = 0, \ \bar{0} = 1. \tag{4-3}$$

En la figura 4-3, *b* se muestra la representación de la operación de negación en forma del esquema lógico denominado *inversor*.

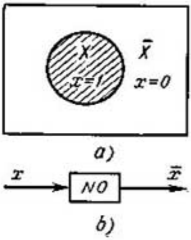

Fig. 4-3. Diagrama de Euler — Venn y designación convencional de la operación de negación

b) Adición lógica

Sean x e y proposiciones que tienen conjuntos de veracidad X e Y, respectivamente. Designemos por $x + y$ (a veces se escribe $x \vee y$ y se lee x o y) la nueva proposición que tiene el conjunto de veracidad $X \cup Y$ y que se denomina *suma lógica* o *disyunción* de x e y.

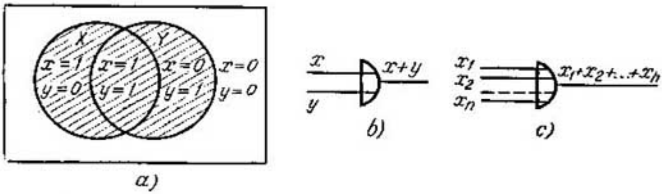

Fig. 4-4. Diagrama de Euler — Venn y designación convencional de la operación de adición lógica

Las relaciones entre los valores numéricos x, y y $x + y$ se toman del diagrama de Venn en la figura 4-4, *a*. El conjunto de veracidad de la proposición $x + y$ es la zona rayada en correspondencia con la cual

$$x + y = \begin{cases} 0, \text{ si } x = 0 \text{ e } y = 0; \\ 1, \text{ en todos los demás casos,} \end{cases} \tag{4-4}$$

Es cómodo escribir las relaciones (4-4) en forma de reglas que recuerdan algo las reglas de la suma aritmética habitual:

$$\begin{aligned} 0+0=0; \quad 1+0=1; \\ 0+1=1; \quad 1+1=1. \end{aligned} \tag{4-5}$$

En la figura 4-4, *b* se muestra el esquema lógico utilizado para representar la operación de adición lógica que se denomina *esquema de reunión.*

La regla de adición lógica se extiende fácilmente al caso de tres o más proposiciones. En el caso general la suma lógica de n proposiciones se determina por la regla

$$x_1+x_2+\ \ldots\ +x_n=\begin{cases} 0, \text{ si } x_1=x_2=\ \ldots\ x_n=0; \\ 1, \text{ en todos los demás casos.} \end{cases} \tag{4-6}$$

El esquema lógico para este caso se muestra en la figura 4-4, *c*.

c) Multiplicación lógica

Sean x e y las proposiciones que tienen los conjuntos de veracidad X e Y, respectivamente. Designemos por xy (a veces se escribe $x \wedge y$ y se lee x e y) la nueva proposición que tiene el conjunto de

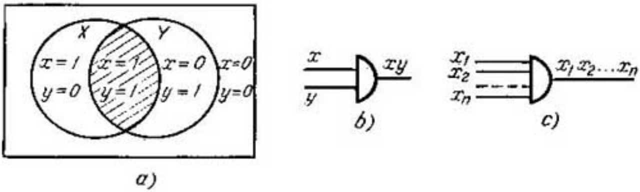

Fig. 4-5. Diagrama de Euler — Venn y designación convencional de la operación de multiplicación lógica

veracidad $X \cap Y$ y se denomina *producto lógico* o *conjunción* de x e y.

El conjunto de veracidad de las proposiciones xy está dado por la zona rayada del diagrama de Euler — Venn en la figura 4-5, *a* al examinar la cual obtenemos:

$$xy=\begin{cases} 1, \text{ si } x=1 \text{ e } y=1; \\ 0, \text{ en todos los demás casos.} \end{cases} \tag{4-7}$$

Esta relación puede representarse en forma de reglas de multiplicación lógica que coinciden con las reglas de multiplicación aritmética:

$$0 \cdot 0=0, \quad 0 \cdot 1=0, \quad 1 \cdot 0=0, \quad 1 \cdot 1=1. \tag{4-8}$$

En la figura 4-5, *b* se muestra el esquema lógico empleado para representar la operación de multiplicación lógica y denominado *esquema de coincidencia.*

La regla de multiplicación lógica se extiende al caso de tres o más proposiciones. Así pues, el producto lógico de n proposiciones se determina por la regla

$$x_1 x_2 \ldots x_n = \begin{cases} 1, \text{ si } x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1; \\ 0, \text{ en todos los demás casos.} \end{cases} \tag{4-9}$$

El esquema lógico para este caso se presenta en la figura 4-5, *c*.

Una de las variantes del esquema de multiplicación lógica es la operación del producto lógico de una proposición x por la inversión de otra $\bar{y}$, la que puede representarse en la forma:

$$x\bar{y} = \begin{cases} x, \text{ si } y = 0 \\ 0, \text{ si } y = 1. \end{cases} \tag{4-10}$$

Como dicha operación se encuentra con bastante frecuencia, para representarla es conveniente emplear el esquema lógico especial dado en la figura 4-6. Este esquema lógico tiene el aspecto

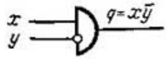

Fig. 4-6. Esquema de inhibición

del esquema de coincidencia con la diferencia de que la entrada de inversión y no termina una flecha sino en un circulito. Como se ve en (4-10), la aplicación de una señal $y = 1$ a dicha entrada resulta que ella como si cerrara el camino para el paso de la señal x a la salida del circuito. Por eso la entrada y se llama *entrada de inhibición* y el esquema de la figura 4-6 recibió el nombre de *esquema de inhibición.* La operación lógica propiamente dicha correspondiente a las correlaciones (4-10) se denomina *operación de inhibición.*

d) Funciones booleanas

Algunas proposiciones a las cuales se atribuyen valores numéricos de veracidad de 1 y 0 pueden considerarse como unas variables binarias. En lo adelante vamos a denominarlas variables lógicas. Las operaciones de negación, adición y multiplicación lógicas constituyen funciones de las variables lógicas; con esto, la operación de negación es función de una variable lógica y las operaciones de adición y multiplicación lógicas son funciones de dos o más variables lógicas.

Como se ha indicado ya, la particularidad de estas funciones consiste en que ellas sólo pueden tomar dos valores 0 y 1.

Las funciones en las cuales tanto los argumentos como las mismas funciones sólo pueden tomar dos valores distintos se denominan funciones booleanas. Naturalmente, además de las funciones consideradas pueden haber otras funciones booleanas. Sin embargo, puede demostrarse que la cantidad de diversas funciones booleanas de un número finito de variables lógicas, es finita.

En efecto, supongamos que queremos formar todas las funciones booleanas posibles de m variables lógicas x, y, z ... Llamaremos *juego* al total de los valores numéricos de estas variables. Es posible obtener por todo 2^m juegos.

Sea $f(x, y, z \ldots)$ una función booleana. A cada uno de los juegos corresponde un valor numérico determinado (1 ó 0) de la función booleana, así que ésta puede considerarse como un juego de 2^m variables. Las distintas funciones booleanas van a diferir por los valores de las variables lógicas en este juego. Por cuanto cada variable puede tomar solamente dos valores, el número de diversas funciones booleanas de m argumentos es:

$$B(m) = 2^{2^m}. \tag{4-11}$$

Con $m = 1$ podemos obtener $2^2 = 4$ funciones booleanas distintas, a saber: las constantes 1 y 0, la propia función x y su negación $\bar{x}$.

Con $m = 2$ hay $2^4 = 16$ funciones booleanas diferentes. En la tabla 4-1 se dan los valores de estas funciones y sus designaciones convencionales dispuestas de tal modo que la segunda mitad de la tabla se obtiene a partir de la primera utilizando la operación de negación. Además de las funciones examinadas anteriormente, forman parte de la tabla 4-1 las siguientes funciones:

$x \oplus y$, adición por el módulo 2;
$x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$, implicación u operación de secuencia lógica;
$\overline{xy} = x/y$, función de Sheffer;
$\overline{x + y}$, función de Peirce (función de Webb);
$\overline{x \oplus y} = x \sim y$, equivalencia lógica;
$\overline{x \rightarrow y}$, $\overline{y \rightarrow x}$, función de inhibición.

Es importante destacar que todas las funciones booleanas de dos variables lógicas examinadas pueden representarse con ayuda de tres operaciones lógicas consideradas anteriormente: negación, multiplicación lógica y adición lógica. Así pues, mediante la comprobación directa en todos los juegos (x, y) es fácil cerciorarse de que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(a)} & x\oplus y=\bar{x}y+\bar{y}x; \\
\text{(b)} & x\rightarrow y=\bar{x}+y; \\
\text{(c)} & y\rightarrow x=x+\bar{y}; \\
\text{(d)} & \overline{x\oplus y}=x\sim y=xy+\bar{x}\bar{y}; \\
\text{(e)} & \overline{x\rightarrow y}=x\bar{y}; \\
\text{(f)} & \overline{y\rightarrow x}=y\bar{x}.
\end{array}\right\} \qquad (4.12)$$

El juego de operaciones lógicas se llama juego completo, si el mismo permite representar cualquier función de Boole. Además del juego ya examinado que consta de las operaciones de negación, multiplicación lógica y adición lógica pueden haber también otros juegos completos. Así, puede servir de juego completo una sola operación, la función de Sheffer $\overline{xy}$ designada con frecuencia por x/y, de lo que es fácil cerciorarse representando en forma de esta operación las tres operaciones del juego completo arriba mencionadas:

$$\bar{x}=\overline{xx}=x/x;$$

$$xy=\overline{\overline{xy}}=\overline{x/y}=(x/y)/(x/y);$$

$$x+y+\overline{\bar{x}\bar{y}}=\bar{x}/\bar{y}=(x/x)/(y/y).$$

También es fácil mostrar que la función de Peirce constituye asimismo un juego completo.

e) Leyes e identidades del álgebra de proposiciones

Vamos a llamar fórmulas booleanas (de Boole) y designar $A(x, y, z \ldots)$, $B(x, y, z)$ las expresiones formadas por un número finito de variables lógicas $x, y, z \ldots$, por signos de las operaciones lógicas de negación, multiplicación lógica y adición lógica y también por las constantes 0 y 1. Para la comprensión unívoca de las fórmulas booleanas cada nueva operación lógica deberá ir acompañada por la introducción de un par de paréntesis. Sin embargo, para evitar que las fórmulas sean excesivamente complicadas y disminuir el número de paréntesis empleados se introduce por analogía con el álgebra elemental el concepto de prioridad de las operaciones: primeramente deben realizarse las operaciones de negación, después, de multiplicación lógica y, por último, las operaciones de adición lógica.

Cada fórmula booleana puede considerarse como la representación de cierta función booleana de las variables $x, y, z \ldots$, cuyo valor en un juego concreto de variables es fácil de obtener si se colocan los valores de las variables en este juego (0 ó 1) en la fórmula booleana y se realizan las operaciones lógicas señaladas.

Para unas mismas variables lógicas pueden obtenerse distintas fórmulas lógicas entre las cuales pueden encontrarse fórmulas tales como, por ejemplo, A y B que dan los mismos valores de las funciones booleanas en todos los juegos iguales de las variables lógicas $x, y, z \ldots$, es decir, satisfacen la condición

$$A(x, y, z \ldots) = B(x, y, z \ldots). \tag{4-13}$$

Una de las tareas del álgebra booleana es establecer correlaciones idénticas del tipo (4-13).

Para comprobar si son correctas las relaciones idénticas del álgebra booleana pueden calcularse sencillamente los valores de las funciones en los primero y segundo miembros de la identidad en todos los 2^m juegos de variables.

Otro método para establecer la identidad de dos fórmulas booleanas es determinar sus conjuntos de veracidad. Si para dos fórmulas booleanas los conjuntos de veracidad coinciden, estas fórmulas dan una misma función booleana.

En el capítulo 1 fue demostrada una serie de identidades del algebra de los conjuntos. Cada una de esta identidades determina cierta identidad para las fórmulas booleanas. Examinemos, por ejemplo, la siguiente identidad del álgebra de los conjuntos:

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z).$$

El primer miembro de esta identidad es el conjunto de veracidad para la fórmula booleana $xy + z$, y el segundo miembro, para $(x + z)(y + z)$. Por cuanto los conjuntos de veracidad coinciden para ambas fórmulas booleanas, estas fórmulas dan una misma función booleana, es decir, se cumple la identidad

$$xy + z = (x + z)(y + z).$$

Esta identidad es notable por el hecho de que no tiene analogía en el álgebra ordinaria sobre lo que se hizo énfasis en el capítulo 1.

Proponemos al lector cerciorarse por sí mismo de que se cumplen las leyes e identidades de la lógica matemática que siguen más abajo, confrontándolas con las identidades correspondientes del álgebra de los conjuntos o comprobando los valores de veracidad en los primero y segundo miembros en todos los juegos de variables lógicas.

Leyes del álgebra booleana

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } x + y = y + x; \\ \text{b) } xy = yx; \end{array}\right\} \quad \text{ley conmutativa;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{c) } (x + y) + z = x + (y + z); \\ \text{d) } (xy)z = x(yz); \end{array}\right\} \quad \text{ley asociativa;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{e) } (x + y)z = xz + yz; \\ \text{f) } xy + z = (x + z)(y + z). \end{array}\right\} \quad \text{ley distributiva.}$$

Identidades del álgebra booleana

a) $x\bar{x}=0$; g) $xx=x$;

b) $x+\bar{x}=1$; h) $x+x=x$;

c) $x\cdot 1=x$; i) $\bar{\bar{x}}=x$;

d) $x+1=1$; j) $\overline{x+y}=\bar{x}\bar{y}$;

e) $x\cdot 0=0$; k) $\overline{xy}=\bar{x}+\bar{y}$.

f) $x+0=x$;

4-3. SINTESIS DE LOS ESQUEMAS COMBINATORIOS

a) Concepto de esquema combinatorio

Vamos a entender por *esquema combinatorio* un dispositivo técnico que sirve para convertir la información discreta (discontinua) y tiene n circuitos de entrada y m circuitos de salida. Las señales suministradas a los circuitos de entrada y tomadas de los circuitos de salida sólo pueden tener los valores 1 y 0. Estas señales pueden ser, por ejemplo, los niveles alto y bajo de la tensión.

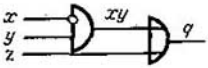

Fig. 4-7. Ejemplo de esquema lógico combinatorio

De esta manera, el esquema combinatorio convierte cierta palabra de entrada de n letras del alfabeto binario en una palabra de salida de m letras del mismo alfabeto. Al hacerlo se supone que la palabra de salida se recibe en la salida en el mismo momento en que se suministra a la entrada la palabra de entrada, es decir, en el esquema combinatorio no hay retardo de señales.

Frecuentemente se utilizan en calidad de elementos, con los cuales se construye el esquema combinatorio, esquemas lógicos elementales para las operaciones de negación, multiplicación lógica y adición lógica. En tal caso puede obtenerse el esquema combinatorio conectando en serie los circuitos de salida de unos esquemas lógicos elementales a los circuitos de entrada de otros esquemas lógicos elementales y evitando conectar a un mismo circuito de entrada varios circuitos de salida. Si el esquema combinatorio tiene un conjunto finito de señales de entrada x, y, z ... y una salida única q, entonces el proceso descrito de conexión en serie de los esquemas lógicos elementales corresponde al proceso de formación de la fórmula lógica $f(x, y, z \dots)$ con ayuda de las operaciones realizadas con los esquemas lógicos elementales que se utillzan. Así pues, a la fórmula lógica del tipo

$$q = \bar{x}y + z \tag{4-14}$$

va a corresponder el esquema combinatorio dado en la figura 4-7 y en la tabla 4-2. En diversos casos es conveniente armar un es-

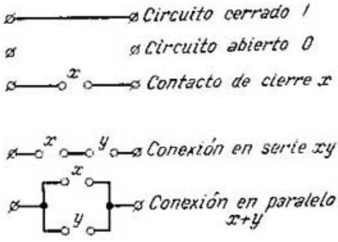

Fig. 4-8. Representación de las operaciones lógicas elementales con ayuda de contactos

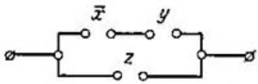

Fig. 4-9. Esquema de conmutación para la operación $\bar{x}y + z$

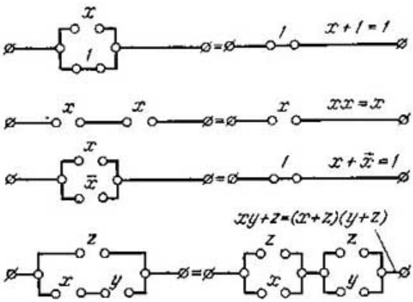

Fig. 4-10. Conversiones idénticas de los circuitos de conmutación

quema combinatorio con los elementos que realizan la función de Sheffer o la de Peirce.

Sirven como uno de los métodos de realización material de los esquemas combinatorios los esquemas de relé de contactos que permiten efectuar las operaciones lógicas mediante el cierre y la apertura de los contactos de varios circuitos. Designemos por 1 el circuito cerrado y por 0 el circuito abierto. Para gobernar el estado del circuito introducimos en él los contactos cuyo estado se determina por el valor de las variables de entrada x, y, z ... Es fácil convencerse de que a las operaciones de multiplicación y adición lógicas van a corresponder las conexiones en serie y en paralelo de los contactos, como se muestra en la figura 4-8.

Por medio de distintas conexiones de los contactos es posible crear esquemas que ejecuten operaciones lógicas. En la figura 4-9 se muestra un esquema de relé de contactos que realiza la operación (4-14), y en la figura 4-10 se presentan los esquemas de relé de contactos que ilustran algunas identidades de lógica matemática.

En los últimos años han alcanzado difusión los métodos de elaborar los esquemas combinatorios sin contactos que se confeccionan con ayuda de elementos semiconductores y magnéticos reunidos en esquemas integrales.

b) Composición de una fórmula lógica según una tabla dada

Al proyectar esquemas combinatorios rara vez se logra expresar directamente a modo de fórmula lógica los problemas a resolver con tal esquema. Por lo general, en la primera etapa se utiliza la descripción verbal de las tareas a solucionar con el esquema, y fundándose en ésta se consigue compilar la tabla que relaciona los valores numéricos de las variables lógicas de entrada y de salida. El paso de la tabla a la fórmula lógica es la segunda etapa de la síntesis del esquema combinatorio.

Vamos a denominar la tabla la *más sencilla*, si ésta corresponde a las operaciones de multiplicación o adición lógicas de las proposiciones iniciales. Si la tabla corresponde a la operación de multiplicación lógica, van a haber ceros en todas las líneas de la columna q y sólo estará la unidad en una sola línea correspondiente a las proposiciones iniciales verdaderas. Si la tabla corresponde a la operación de adición lógica, en todas las líneas de la columna q van a haber unidades y el cero sólo estará en la línea correspondiente a las proposiciones iniciales falsas.

Aclararemos con los ejemplos de las tablas 4-3 y 4-4 el modo de obtener la fórmula lógica para la tabla más sencilla.

En la tabla 4-3 el cero sólo está en la segunda línea de la columna q, lo que corresponde a la operación de adición lógica. Como que en esta línea $\bar{x} = 0$ e $y = 0$, entonces $q = \bar{x} + y$.

En la tabla 4-4 la unidad sólo está en la segunda línea de la columna q, lo que corresponde a la operación de multiplicación lógica. Como que en dicha línea $x = 1$ e $\bar{y} = 1$, entonces $q = x\bar{y}$.

Si la tabla no es la más sencilla, puede escribirse para ella la fórmula lógica por cualquiera de dos métodos típicos.

Primer método. En la columna q reemplacemos por ceros todas las unidades, una tras otra salvo una, compilemos las fórmulas lógicas correspondientes a cada una de las tablas más sencillas que se obtienen así y tomemos su suma lógica.

Tabla 4-3

$q = \bar{x} + y$

x	y	q
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Tabla 4-4

$q = x\bar{y}$

x	y	q
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	0

Segundo método. En la columna q reemplacemos por unidades todos los ceros, uno tras otro salvo uno, compilemos las fórmulas lógicas correspondientes a cada una de las tablas más sencillas que se obtienen así y tomemos su producto lógico.

Tabla 4-5

Adición por el módulo 2

x	y	q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ilustremos estos métodos con el ejemplo de obtener la fórmula lógica para la tabla 4-5. Examinemos separadamente por el primer método las tablas que contienen la unidad sólo en la segunda y la tercera líneas de la columna q. A ellas corresponden las fórmulas lógicas $\bar{x}y$ y $x\bar{y}$. Tomando la suma lógica de estas fórmulas, obtenemos:

$$q = \bar{x}y + x\bar{y}.$$

Examinemos separadamente por el segundo método las tablas que contienen el cero sólo en la primera y la última líneas de la columna q. A ellas corresponden las fórmulas lógicas $x + y$ y $\bar{x} + \bar{y}$. Tomando el producto lógico de estas fórmulas, obtenemos:

$$q = (x + y)(\bar{x} + \bar{y}).$$

Como vemos, los métodos primero y segundo dan diferentes fórmulas booleanas para una misma tabla. No obstante, empleando las identidades de lógica matemática no es difícil reducir la segunda fórmula a la primera. Abriendo paréntesis y tomando en cuenta que $x\bar{x} = 0$ e $y\bar{y} = 0$, se obtiene:

$$q = x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} = x\bar{y} + y\bar{x}.$$

El método analizado es universal en el sentido de que permite obtener la fórmula lógica y, en correspondencia con ella, construir el esquema combinatorio para cualquier tabla. Sin embargo, este método, por lo general, conduce a fórmulas complejas y para realizarlas se requiere gran número de elementos diversos. Por cierto, vamos a entender por *complejidad* de una fórmula el número de operaciones que constituyen esta fórmula, de manera que la complejidad de la fórmula $\bar{x}$ será el número 1 y la complejidad de la fórmula $(\bar{x}+y)(\bar{y}+z)$ será el número 5 (dos negaciones, dos adiciones, una multiplicación). A modo de ejemplo compilemos por el primer método la fórmula lógica para la tabla 4-2:

$$q=\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+x\bar{y}z+\bar{x}yz+xyz. \qquad (4\text{-}15)$$

Esta fórmula es mucho más compleja que (4-14), aunque ambas corresponden a una misma tabla. De este modo, una importante tarea de síntesis de los esquemas combinatorios es la de simplificar o minimizar las fórmulas booleanas.

c) Simplificación de las fórmulas booleanas

Para simplificar las fórmulas booleanas se utilizan las identidades de lógica matemática examinadas en el párrafo anterior. Es cierto, que el uso con éxito de estas identidades depende de la práctica y la habilidad al manejarlas, lo que se logra después de adquirir cierta experiencia en dichas transformaciones. No obstante, existen ciertos métodos típicos que en la mayoría de los casos permiten simplificar felizmente fórmula complicada.

La simplificación de una fórmula booleana debe comenzarse hallando una de las formas siguientes: $A\bar{B}+AB$, $A+AB$, $A+\bar{A}B$, donde A y B denotan las propias variables lógicas o los productos lógicos de unas cuantas variables. Cada una de las expresiones obtenidas puede escribirse de manera más simple

$$A\bar{B}+AB=A(\bar{B}+B)=A; \qquad (4\text{-}16)$$

$$A+AB=A(1+B)=A; \qquad (4\text{-}17)$$

$$A+\bar{A}B=(A+AB)+\bar{A}B=A+B. \qquad (4\text{-}18)$$

Volvamos a la fórmula (4-15) y tratemos de simplificarla utilizando las identidades examinadas. Agrupando los sumandos primero y cuarto, así como el tercero y quinto, y aplicando las identidades (4-16) obtenemos:

$$q=\bar{x}y+\bar{x}\bar{y}z+xz.$$

La simplificación ulterior no presenta dificultades

$$q=\bar{x}(y+\bar{y}z)+xz=\bar{x}(y+z)+xz=\bar{x}y+\bar{x}z+xz=\bar{x}y+z.$$

Al simplificar las fórmulas lógicas, siempre hay que tomar en consideración la identidad $A+A=A$, de la cual se deduce que cada uno de los sumandos puede utilizarse repetidamente en combinaciones con otros sumandos. Teniendo en cuenta esta circunstancia, examinemos la simplificación de la siguiente fórmula lógica:

$$q = x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}yz + xyz.$$

Aplicando la identidad (4-16) a los sumandos segundo y cuarto, así como al tercero y cuarto, obtenemos

$$q = x\bar{y}\bar{z} + xy + yz = x(y + \bar{y}\bar{z}) + yz = x(y + \bar{z}) + yz =$$
$$= xy + x\bar{z} + yz.$$

No se logra su simplificación ulterior con ayuda de las identidades examinadas más arriba. Surge la cuestión: ¿es acaso la forma dada la más sencilla? Esto puede verificarse probando si la misma contiene o no sumandos sobrantes. Al hacerlo vamos a denominar sobrante el sumando si en cualquiera de los juegos de variables en el que aquél se convierte en la unidad, también se vuelve igual a la unidad cualquier otro grupo de sumandos. Así pues, el sumando xy se convierte en la unidad en el juego $x = 1$, $y = 1$. En tal caso la suma de los otros dos sumandos da $x\bar{z} + yz = \bar{z} + z = 1$. De este modo, el sumando xy es sobrante y puede eliminarse de la fórmula, de lo que en definitiva se obtiene

$$q = x\bar{z} + yz.$$

Por el método de selección completa se halla la más sencilla de todas las formas que no contienen sumandos sobrantes. Pueden haber varias de estas formas.

Para aquellos casos en que el número de variables de entrada no es mayor de cuatro, la búsqueda de los tipos más sencillos de fórmulas booleanas se realiza cómodamente utilizando las tablas especiales conocidas como *mapas de Karnaugh* o *diagramas de Veitch*. La tabla 4-6 representa la carta de Karnaugh para una función booleana de tres variables.

Tabla 4-6

Aspecto del mapa de Karnaugh para la función booleana do tres variables

x	y	z = 0	z = 1
0	0	1	2
0	1	3	4
1	1	5	6
1	0	7	8

Tabla 4-7

Aspecto del mapa de Karnaugh para la función booleana presentada en la tabla 4-2

x	y	z = 0	z = 1
0	0		×
0	1	×	×
1	1		×
1	0		×

Cada cuadrado de dicha carta (ellos están enumerados para facilitar la explicación), corresponde a un juego de variables x, y, z. Es cómodo designar los cuadrados correspondientes a los juegos en los que la función booleana adquiere el valor 1, con crucesitas como se muestra en la tabla 4-7 que representa el mapa de Karnaugh para la función booleana dada en la tabla 4-2. La carta está formada de tal modo que las zonas correspondientes a los distintos grupos de cuadrados vecinos pueden considerarse como conjuntos de veracidad para las proposiciones correspondientes a las fórmulas booleanas más sencillas con una y dos variables (entonces debe estimarse que los bordes superior e inferior de la carta están pegados uno al otro de manera que los cuadrados superior e inferior de la misma son vecinos). Así pues, corresponden a las zonas de cuatro cuadrados vecinos las fórmulas booleanas de una variable:

$$1234 - \bar{x};\ 5678 - x;\ 3456 - y;\ 1278 - \bar{y};\ 1357 - \bar{z};\ 2468 - z.$$

Corresponden a las zonas de dos cuadrados vecinos funciones booleanas de dos variables del tipo $12 - \bar{x}\bar{y}$, $56 - xy$; $68 - xz$, etc.

Para hallar la fórmula booleana determinada por cualquier configuración de las celdas en el mapa de Karnaugh es suficiente presentar esta combinación en forma de reunión de las zonas indicadas anteriormente. La más sencilla de las representaciones de este tipo proporciona asimismo la más sencilla fórmula booleana. De este modo, para la tabla 4-7 la zona mencionada puede representarse como la reunión de la franja vertical 2468, o sea, z con la franja horizontal 34, es decir, $\bar{x}y$, lo que da $q = z + \bar{x}y$.

Para simplificar las fórmulas booleanas con un gran número de variables, se vuelve dificultoso el empleo del método descrito. En estos casos resulta útil emplear métodos especiales de minimización entre los cuales es muy efectivo el método de Quine — Mc.Closkey.

d) Ejemplos de síntesis de esquemas combinatorios

Ejemplo 4-2. Construir el esquema lógico del sumador de dígito con dos entradas (*semisumador*).

El sumador de un dígito realiza la adición de dos números de un dígito según la regla

$$0 + 0 = 0,\quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1,\quad 1 + 1 = 10.$$

En el último caso se pone 0 en el dígito dado y se transfiere la unidad al dígito siguiente. Designemos por x e y los valores del dígito dado de los sumandos, q, el valor del dígito dado de la suma, u, p, la unidad de traspaso al dígito siguiente. Entonces el funcionamiento del semisumador será descrito mediante la tabla 4-8 en conformidad con la cual hallamos:

$$q = x\bar{y} + \bar{x}y;\ p = xy. \tag{4-19}$$

El esquema lógico del semisumador se muestra en la figura 4-11.

Ejemplo 4-3. Esquema selectivo (*descifrador*). El esquema lógico que tiene dos entradas x, y y cuatro salidas q_1, q_2, q_3, q_4, se denomina esquema selectivo si la señal 1 aparece solamente en una de las salidas para cada una de las

Tabla 4-8

Semisumador

x	y	q	p
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Tabla 4-9

Descifrador

x	y	q_1	q_2	q_3	q_4
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

cuatro combinaciones posibles de las señales de entrada. Satisface a esta condición la tabla 4-9, según la cual las señales de salida del esquema deben ser iguales a:

$$q_1 = \bar{x}\bar{y}; \quad q_2 = \bar{x}y; \quad q_3 = x\bar{y}; \quad q_4 = xy. \tag{4-20}$$

En la figura 4-12 se muestra la estructura lógica del esquema selectivo.

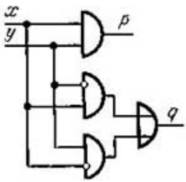

Fig. 4.11. Semisumador

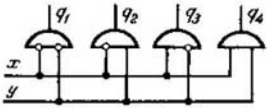

Fig. 4-12. Descifrador

Ejemplo 4-4 Operador automático. Presentemos en forma muy simplificada el problema de construir el operador automático que gobierna el aterrizaje de aviones en un aeródromo. Consideremos que el aeródromo tiene una pista de aterrizaje. El avión, al aproximarse en vuelo, emite sus señales de llamada y el operador automático da el permiso para aterrizar. Si se aproximaron al aeródromo varios aviones, se da la señal de aterrizar a unos y la de mantenerse en el aire a los demás.

Asignemos a todos los aviones que tienen su base en el aeródromo los números del 1 al n. Si varios aviones llegaron simultáneamente, se da preferencia en el aterrizaje al avión con el número de orden menor. Se considera imposible y se excluye del análisis el caso en que se aproximan al aeródromo más de tres aviones. Es necesario construir el esquema combinatorio que ejecute las funciones del operador automático.

Formulemos el problema en términos de lógica matemática. Designemos por x_k la señal de llegada del k-ésimo avión. El esquema lógico combinatorio debe transmitir al k-ésimo avión una de las tres señales siguientes:

q_k^0, aterrizar inmediatamente;

q_k', dar una vuelta sobre el aeródromo;

q_k'', dar dos vueltas sobre el aeródromo.

En el caso dado es embarazoso describir el funcionamiento del esquema combinatorio con ayuda de una tabla y por eso vamos a resolver el problema de otra manera. Notemos que las señales q_k^0, q_k', q_k'' sólo pueden ser iguales a la unidad si el k-ésimo avión se aproxima en vuelo al aeródromo, es decir, si $x_k = 1$. Por tanto, la señal x_k debe entrar como factor en las fórmulas lógicas para q_k^0, q_k', q_k'' que de esta manera pueden representarse en la forma

$$q_k^0 = A_k^0 x_k, \quad q_k' = A_k' x_k, \quad q_k'' = A_k'' x_k. \tag{4-21}$$

Las fórmulas lógicas para A_k^0, A_k' y A_k'' se obtienen pasando de k a $k+1$.

La condición $A_{k+1}^0 = 1$ se cumple si no hay ninguna señal del total $x_1, \ldots, \ldots, x_k$, es decir, si no hay señal alguna del total $x_1, \ldots, x_{k-1}$ y no hay la señal x_k. De este modo

$$A_{k+1}^0 = A_k^0 \bar{x}_k. \tag{4-22}$$

La condición $A_{k+1}^0 = 1$ se cumple si hay una señal del total $x_1, \ldots, x_k$, o sea, si hay una señal del total $x_1, \ldots, x_{k-1}$ y no hay la señal x_k, o no hay

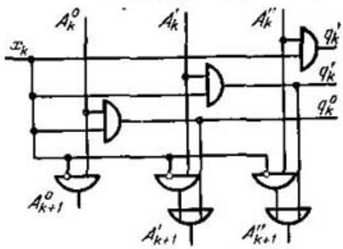

Fig. 4-13. Despachador automático

ninguna señal del total $x_1, \ldots, x_{k-1}$ y hay la señal x_k. De esta suerte.

$$A_{k+1}' = A_k' \bar{x}_k + A_k^0 x_k = A_k' \bar{x}_k + q_k^0. \tag{4-23}$$

La condición $A_{k+1}'' = 1$ se cumple si hay dos señales del total $x_1, \ldots, x^k$ es decir, si hay dos señales del total $x_1, \ldots, x_{k-1}$ y no hay x_k o si hay una señal de dicho total $x_1, \ldots, x_{k-1}$ y hay x_k. De este modo,

$$A_{k+1}'' = A_k'' \bar{x}_k + A_k' x_k = A_k'' \bar{x}_k + q_k'. \tag{4-24}$$

Las fórmulas de (4-21) a (4-24) describen por completo la estructura lógica de un elemento del esquema combinatorio que gobierna el aterrrizaje del k-ésimo avión y cuyo esquema se muestra en la figura 4-13. Construyendo dichos esquemas para cada elemento y conectándolos entre sí, obtenemos el esquema completo del operador automático.

4-4. CONCEPTO DE DISPOSITIVOS AUTOMATICOS TERMINALES

a) Esquema combinatorio como dispositivo automático terminal sin memoria

El término "dispositivo automático terminal" se utiliza para designar una clase de sistemas dinámicos numéricos que se emplean en automática, telemecánica y técnica de cálculo.

El tipo más sencillo de dispositivo automático terminal son los esquemas combinatorios ya examinados a los que, no obstante, es conveniente dar una descripción más general.

Supongamos que tenemos unas cuantas variables lógicas $u_1, \ldots, u_r$ el total de las cuales puede considerarse como la magnitud multidimensional $u = (u_1, \ldots, u_r)$. Sea f una función lógica de estas variables, que constituye cierta proposición lógica compleja

$$q = f(u_1, \ldots, u_r). \tag{4-25}$$

La variable lógica q puede considerarse como magnitud de salida del esquema combinatorio que realiza la operación lógica f con las variables $u_1, \ldots, u_r$.

Los esquemas combinatorios que encontramos en la práctica no disponen comúnmente de una salida q sino de varias, por ejemplo, $q_1, \ldots, q_m$, cada salida realiza su función lógica dependiendo de las mismas variables lógicas

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = f_1(u_1, \ldots, u_r); \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_m = f_m(u_1, \ldots, u_r). \end{array}\right\} \tag{4-26}$$

La estructura de dicho esquema combinatorio se presenta en la figura 4-14.

La relación (4-26) puede escribirse más compactamente si se incluyen en el análisis la variable lógica multidimensional de salida $q = (q_1, \ldots, q_m)$ y la función lógica *multidimensional* $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces, la totalidad de las funciones (4-26) puede escribirse a modo de función multidimensional

$$q = f(u). \tag{4-27}$$

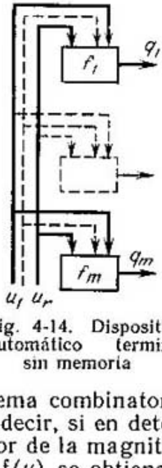

Fig. 4-14. Dispositivo automático terminal sin memoria

En lo sucesivo vamos a suponer que el esquema combinatorio efectúa instantáneamente la operación lógica, es decir, si en determinado instante ha llegado al esquema cierto valor de la magnitud de entrada $u \in U$, el valor correspondiente $q = f(u)$ se obtiene a la salida en ese mismo instante.

Para describir el funcionamiento del esquema combinatorio en el tiempo conviene introducir el concepto de *tiempo discreto*. En el eje del tiempo marcamos los instantes en los cuales puede sufrir cambios la magnitud de entrada, designándolos por $t_0, t_1, t_2 \ldots$ En lo sucesivo será conveniente designar los instantes marcados, simplemente en forma de números enteros no negativos 0, 1, 2 ... y llamarlos tiempos. La escala así obtenida se presenta en la figura 4-15 y será la escala del tiempo discreto.

Designemos por la letra n el tiempo corriente, es decir, el tiempo correspondiente al momento actual. Vamos a designar por

$u[n]$ y $q[n]$ los valores de las magnitudes de entrada y salida en el instante actual. Los valores que han obtenido las magnitudes de entrada y salida k tiempos antes del momento actual van a designarse por $u[n-k]$ y $q[(n-k)]$. La ecuación que describe el funcionamiento del esquema combinatorio en el tiempo puede escribirse ahora en la forma

$$q[n] = f(u[n]). \tag{4-28}$$

Los esquemas combinatorios son la forma más sencilla de los dispositivos automáticos terminales denominados *dispositivos automáticos terminales sin memoria.* Esta denominación pone de manifiesto que la magnitud de salida del esquema combinatorio en cada

Fig. 4-15. Escala de tiempo discreto

tiempo sólo depende de las señales de entrada en dicho tiempo y no del estado del esquema ni de las señales de entrada en los tiempos precedentes.

b) Dispositivos automáticos terminales de tipo general

Los dispositivos automáticos terminales sin memoria son el tipo más sencillo de dispositivos automáticos, siendo relativamente limitada la posibilidad de utilizarlos en calidad de elementos de dispositivos calculadores y sistemas automáticos. Se logra una considerable ampliación de las posibilidades de los dispositivos automáticos, introduciendo en su constitución elementos adicionales

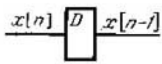

Fig. 4-16. Elemento de memoria

que retienen durante un lapso de tiempo las señales que llegan a su entrada y que reciben el nombre de *elementos de memoria.* En la figura 4-16 se ofrece la representación esquemática de un elemento de memoria. La reunión de elementos de memoria con esquemas combinatorios permite crear dispositivos automáticos terminales de tipo general.

Para el dispositivo automático terminal es característico que su estado va a determinarse no sólo por el tipo de señales de entrada en el tiempo considerado, sino también por el estado en el que se hallaba en el tiempo anterior, siendo necesario por lo general diferenciar entre si el estado del dispositivo automático y su señal de salida.

Puede servir de ejemplo de dispositivo automático terminal con memoria el esquema representado en la figura 4-17. Este consta de tres esquemas combinatorios que realizan las funciones lógicas f_1, f_2 y f_3 y de dos elementos de memoria. La particularidad de dicho esquema consiste en que las señales x_1 y x_2, siendo señales de salida de dos esquemas combinatorios, llegan a la entrada de aquellos mismos esquemas con retardo en un tiempo. Estas señales circulan dentro del esquema del dispositivo automático terminal y pueden denominarse variables que describen el estado del dispositivo automático. La señal de salida q constituye cierta función de las variables del estado.

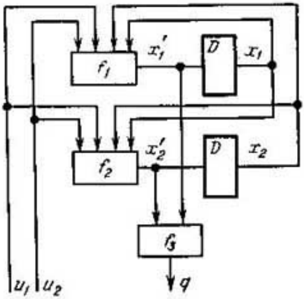

Fig. 4-17. Dispositivo automático terminal con memoria

Describamos el funcionamiento en el n-esimo tiempo del esquema examinado. Para simplificar la notación no vamos a señalar el número del tiempo n. Marcaremos con una raya los valores de las variables del estado en la entrada del elemento de memoria en el tiempo considerado. Para las señales x_1', x_2' y q obtendremos las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2); \\ x_2' &= f_2(x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2); \\ q &= f_3(x_1',\ x_2') = \varphi(x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2). \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}29)$$

Para simplificar la notación introduzcamos en el análisis las magnitudes multidimensionales $u = (u_1, u_2)$, $x = (x_1, x_2)$ y la función multidimensional $f = (f_1, f_2)$. Entonces las ecuaciones (4-29) se escriben en la forma

$$x' = f(x, u); \quad q = \varphi(x, u). \qquad (4\text{-}30)$$

La función $f(x, u)$ que define un nuevo estado interior del dispositivo automático terminal se denomina *función de transiciones*, y la función $\varphi(x, u)$ que determina un nuevo valor de la señal de salida se llama *función de salidas*.

Si se designan por U el conjunto de señales de entrada, Q, el de señales de salida y X, el de estados, puede darse la siguiente definición formal de dispositivo automático terminal. Se denomina *dispositivo automático terminal* al total de las cinco magnitudes

$$A = (U,\ Q,\ X,\ f,\ \varphi), \qquad (4\text{-}31)$$

donde $f: X \times U \to X$ es la función de transiciones y $\varphi: X \times U \to Q$ la función de salidas.

No se acostumbra a presentar los dispositivos automáticos terminales por medio de ecuaciones (4-30), sino mediante dos tablas

Tabla 4-10

Tabla de transiciones del dispositivo automático terminal

u	x		
	1	2	3
a	2	3	3
b	3	2	2

Tabla 4-11

Tabla de salidas del dispositivo automático terminal

u	x		
	1	2	3
a	c	c	d
b	d	c	c

denominadas, respectivamente, tabla de transiciones y tabla de salidas. Las líneas de ambas tablas corresponden a diferentes señales de entrada del dispositivo automático terminal y las columnas, a sus diferentes estados. En la intersección de líneas y columnas en la tabla de transiciones están los valores de la función $f(x, u)$ y en la tabla de salidas, los valores de la función $\varphi(x, u)$. Las tablas 4-10 y 4-11 pueden servir de ejemplo de presentación de un dispositivo automático que tiene dos señales de entrada posibles a y b, dos señales de salida posibles c y d, y tres estados posibles 1, 2, 3.

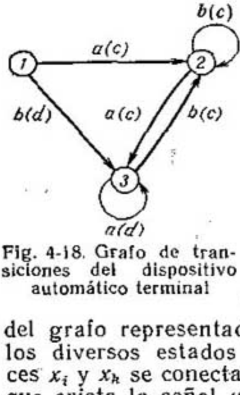

Fig. 4-18. Grafo de transiciones del dispositivo automático terminal

Otro método de preasignación de los dispositivos automáticos terminales que brinda una gran claridad es la preasignación de los dispositivos automáticos con ayuda de grafos direccionales. Los vértices del grafo representados en forma de círculos se identifican con los diversos estados del dispositivo automático. Los dos vértices x_i y x_k se conectan por el arco que va de x_i a x_k en el caso en que exista la señal u que hace pasar el dispositivo del estado x_i al x_k. Junto a cada arco se pone la señal u que realiza la transición dada y, por lo común, entre paréntesis, la señal de salida q obtenida de este modo. En la figura 4-18 se muestra el grafo correspondiente a las tablas 4-10 y 4-11.

Los dispositivos automáticos terminales son el modelo matemático de una amplia categoría de sistemas dinámicos que funcionan en el tiempo discreto y entre los cuales se encuentran también ciertos tipos de sistemas dinámicos paso a paso múltiples que se estudian en la segunda parte del libro. En la presente obra no es posible detenerse detalladamente en la teoría de los dispositivos automáticos terminales. Por eso nos limitaremos solamente al análisis de algunos ejemplos.

Ejemplo 4-5. Generador de unidades. En la figura 4-19, *a* se muestra el grafo de un dispositivo automático terminal que en cada tiempo va a suministrar la señal 1, independientemente de la señal en la entrada, después de que a su

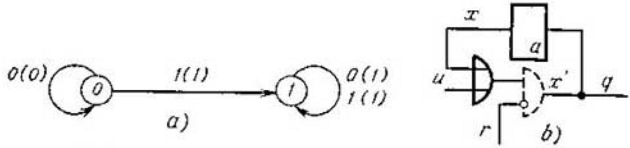

Fig. 4-19. Grafo de transiciones y estructura del generador de unidades

entrada llega una vez la señal 1. La función de transiciones $x' = f(x, u)$ y la función de salidas $q = \varphi(x, u)$ de este dispositivo se muestran en la tabla 4-12 por la que hallamos:

$$x' = q = u + x. \tag{4-32}$$

La estructura del dispositivo automático se muestra en la figura 4-19, *b* donde está prevista la existencia de la entrada auxiliar r, al suministrarle una señal puede suspenderse la generación de unidades.

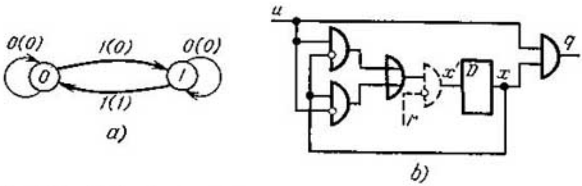

Fig. 4-20. Grafo de transiciones y estructura del generador binario

Ejemplo 4-6. Contador. En la figura 4-20, *a* está representado el grafo de un dispositivo automático terminal que da una unidad en la salida después de cada par de unidades en la entrada que se alternan con cualquier número de

Tabla 4-12

Generador de unidades

u	x	x'	q
0	0	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Tabla 4-13

Contador binario

u	x	x'	q
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	0	1

ceros. Semejante dispositivo se denomina contador de 2. La función de transiciones y la función de salidas de este dispositivo automático se presentan en la tabla 4-13 por la que hallamos:

$$x' = u\bar{x} + \bar{u}x; \quad q = ux. \tag{4-33}$$

La estructura del contador de 2 se muestra en la figura 4-20, *b* donde está prevista la existencia de la entrada auxiliar *r* suministrando una señal a la cual puede cesar el funcionamiento del contador y pasarlo al estado inicial 0.

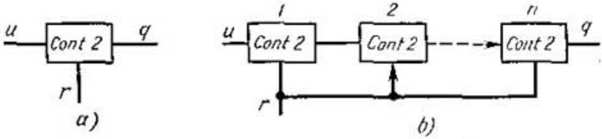

Fig. 4-21. Contador binario y contador de 2^n

La representación convencional del contador de 2 se muestra en la figura 4-21, *a*. En la fagura 4-21, *b* se presenta el esquema de *n* contadores de 2 conectados en serie y formando un contador de 2^n.

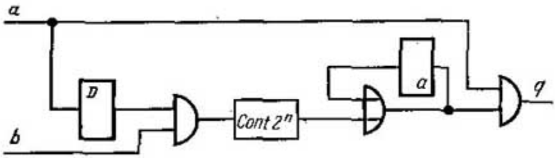

Fig. 4-22. Modelo del proceso de enseñanza

Ejemplo 4-7. Modelo del proceso de enseñanza. Basándose en el contador de 2^n puede construirse un dispositivo que simula, aunque de forma muy simplificada, el proceso de enseñanza. El esquema de tal dispositivo se muestra en la figura 4-22. El mismo tiene dos entradas *a* y *b* y se enseña a que después de

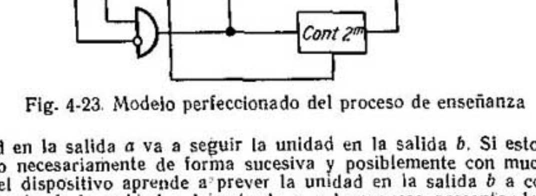

Fig. 4-23. Modelo perfeccionado del proceso de enseñanza

la unidad en la salida *a* va a seguir la unidad en la salida *b*. Si esto sucede 2^n veces (no necesariamente de forma sucesiva y posiblemente con muchas alteraciones), el dispositivo aprende a prever la unidad en la salida *b* a continuación de la llegada de la unidad a la entrada *a* y lo expresa presentando la unidad en la salida *q* cada vez que aparece la unidad en la entrada *a*.

El esquema en la figura 4-22 simula un proceso de enseñanza muy primitivo. Valiéndonos de ciertos ingenios el dispositivo puede perfeccionarse de tal modo que solamente aprenda a saber que "detrás de a sigue b", en caso de que este suceso haya ocurrido 2^n veces seguidas sin alteraciones y que sea capaz de "olvidarlo" si aparecen 2^m sucesos "detrás de a no sigue b", en caso de que esta sucesión no se interrumpa por un suceso "detrás de a sigue b". El esquema de tal dispositivo se presenta en la figura 4-23.

PROBLEMAS PARA EL CAPITULO 4

4-1. ¿Con qué operación lógica puede describirse el funcionamiento del esquema de mando en el ejemplo 4-1?

4-2. ¿En qué consiste la diferencia entre una fórmula booleana y una función booleana?

4-3. Comprobar con ayuda de los esquemas de conmutación si se cumplen las identidades $x + \bar{x} = 1$, $x + 1 = 1$, $x \cdot 0 = 0$, $xx = x$.

4-4. Componer el circuito de conexiones del alumbrado para un local que tiene dos puertas en los extremos opuestos de modo que pueda encenderse la luz al entrar por cualquier puerta, y apagarla al salir por cualquiera de ellas.

4-5. Simplificar las siguentes fórmulas booleanas:

$$xyz + x\bar{y}z + xy\bar{z}v;$$

$$\bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z};$$

$$xy + z + (\overline{xy + z})(zv + x).$$

4-6. Construir el esquema lógico del sumador binario de un dígito con tres entradas designando por x e y los valores de los dígitos de los sumandos; z, la unidad de pase del dígito precedente de la suma; p, la unidad de pase al dígito siguiente y q, el valor del digito dado de la suma.

4-7. Construir el esquema lógico del sumador binario de un dígito con tres entradas utilizando sumadores binarios con dos entradas.

4-8. Construir el esquema lógico del sumador binario de dígitos múltiples utilizando los resultados de los problemas 4-6 y 4-7.