Lecciones populares de matemáticas

GAMA SIMPLE

CÓMO CONSTRUIR LAS GRÁFICAS

G. E. Shilov

Editorial MIR · ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР · Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Г. Е. ШИЛОВ

ПРОСТАЯ ГАММА
УСТРОЙСТВО МУЗЫКАЛЬНОЙ ШКАЛЫ

КАК СТРОИТЬ ГРАФИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

G. E. SHILOV

GAMA SIMPLE
CÓMO CONSTRUIR
LAS GRÁFICAS

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por G. A. LOZHKIN

Primera edicion 1978
Segunda edición 1984

На испанском языке

Impreso en la URSS

© Traducción al español. Editorial Mir. 1978

INDICE

GAMA SIMPLE

Salieri . . . . Para mí
Esto es tan claro, como una gama simple.

A. S. Pushkin. Mozart y Salieri

Toda la música se basa en el tono musical o en el sonido de una altura determinada. El tono musical, examinado desde el punto de vista físico, es un proceso vibratorio operado en el aire con cierta frecuencia fija. Por ejemplo, el sonido «la_q» corresponde a un proceso con frecuencia de 440 hertzios (vibraciones por segundo)[1]. En general nuestro oído es capaz de percibir los sonidos en una banda amplia de frecuencias desde 16 hasta 20 000 hertzios de modo que en la región hasta 4000 hertzios es capaz de distinguir los tonos que se diferencian en altura solamente en una vibración por segundo.

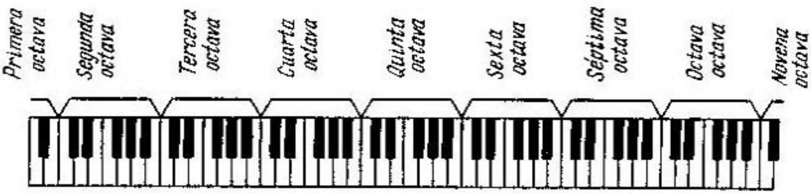


FIG. 1.

A pesar de todo para la música se emplea sólo un número insignificante de tonos. Observemos el teclado de un piano (fig. 1). Veremos en suma 90 teclas blancas y negras. Al apretarlas, podemos producir sólo 90 diferentes sonidos de altura distinta. ¿Cuáles son precisamente estos tonos? He aquí la tabla de frecuencias para

[1] En correspondencia con el estándar internacional. Existe leyenda que en los tiempos remotos cerca de la ciudad antigua egipciana de Tebas la estatua grande, conocida por el nombre de coloso Memnón, cada mañana al amanecer producía este mismo sonido. Los músicos de Tebas venían a ésta para sintonizar sus instrumentos. El coloso Memnón dejó de sonar al comienzo de nuestra era y ahora ya es imposible comprobar la autenticidad de la leyenda.

el tramo medio, más usado en la gama de piano que es la quinta octava (fig. 2):

Sonido	do_q	re_q	mi_q	fa_q	sol_q	la_q	si_q	do_s
Frecuencia en hertzios	262	294	330	349	392	440	494	523

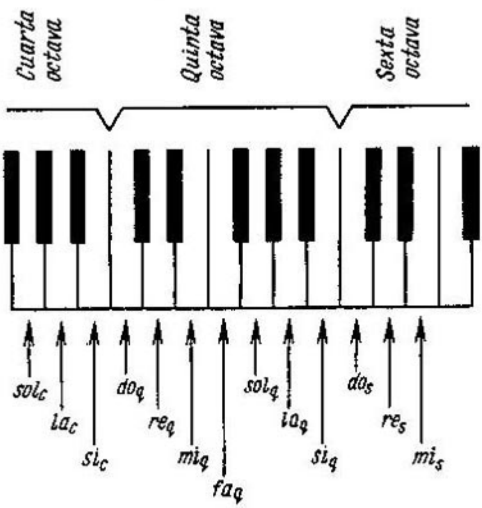


FIG. 2. 1 – do sostenido-re bemol, 2 – re sostenido-mi bemol, 3 – fa sostenido-sol bemol, 4 – sol sostenido-la bemol, 5 – la sostenido-si bemol.

A primera vista las frecuencias de estos tonos forman una secuencia caprichosa en la que, a excepción de su crecimiento, es difícil encontrar cualquier regularidad. Además, excepto del número 440, las demás de las frecuencias indicadas no se expresan en realidad de ninguna manera en forma de números enteros, sino en números irracionales; mientras tanto en la tabla se dan los números redondeados hasta los próximos enteros. Así, la frecuencia que corresponde al tono mi_q en realidad no es 330, sino 329, 63 .... etc.

¿Por qué precisamente estos tonos fueron elegidos para la escala musical? El problema de qué tonos es conveniente poner en la base de la música surgió ya en la antigüedad, pero su solución definitiva se obtuvo relativamente no hace mucho, a principios del siglo XVIII. Puede ser que este problema no surgiese, si en todos los instrumentos musicales fuese posible obtener los sonidos de cualquier altura sin interrupciones. En muchos instrumentos musicales — violín, violoncelo — en realidad puede obtenerse cualquier sonido (dentro de los límites de gama del instrumento). Pero hay también instrumentos, cuya estructura deja obtener un juego fijo comparativamente pequeño de los tonos posibles: el órgano, el piano, el arpa; mientras que el aumento del juego de los tonos admisibles significaría una complicación grande en las construcciones de los instrumentos. Vemos que la técnica impone la exigencia de que la escala musical tenga sólo un número relativamente pequeño de tonos, y deseamos aclarar qué sonidos precisamente hay que incluir en esta escala.

En este caso la situación no es tan simple como, por ejemplo, en la estructuración de la escala termométrica en que se anotan los puntos de solidificación y de ebullición del agua y dividen el intervalo obtenido en 100 partes iguales. En música juegan gran papel las consonancias, el son simultáneo de varios sonidos de altura diferente. Pero no todas las combinaciones de los sonidos están muy lejos de ser melodiosos. Por eso es deseable incluir en la escala musical junto con el sonido dado tales sonidos que resuenen simultáneamente con aquél del modo más natural. Estas consideraciones por ahora son algo vagas, pero más adelante quedará claro qué se tiene en cuenta precisamente.

Los instrumentos parecidos al arpa (lira, cítara griega) se conocían en la remota antigüedad. En estos instrumentos las fuentes de sonidos, igual que en el piano, son las cuerdas. Es posible que ya en la antigüedad se realizaron los experimentos con cuerdas parecidos al que describiremos en aplicación al piano. Sobre las cuerdas del piano en la posición inicial se hallan los apagadores, o sea, unas piezas con fieltro pegado que no dejan resonar a las cuerdas. Al apretar una tecla al principio se aparta el apagador, liberando la cuerda, y luego por la cuerda golpea el macillo. Si la tecla permanece apretada, la cuerda libre resonará largo tiempo; si la tecla se libera, el apagador cae sobre la cuerda y termina su resonancia. Si la tecla se aprieta lentamente, el apagador libera la cuerda, pero el macillo no golpea contra ésta y no oiremos su son. Ahora realicemos el siguiente experimento. Apretemos lentamente la tecla de la_4 que produce el sonido con frecuencia de 440 hertzios, para liberar la cuerda correspondiente sin sonido. Luego apretemos la tecla de la_c (de cuarta octava) e inmediatamente dejémosla libre. Oiremos la resonancia breve de la cuerda de la_c (de 220 Hz) que se termina cuando la tecla regresa a su lugar. Pero después de esto continuaremos oyendo el sonido de la cuerda la_q que hemos liberado. La cuerda liberada la_q comenzó a resonar «por sí misma» a consecuencia de la resonancia con la cuerda la_c que había resonado. Esto muestra que las vibraciones de una cuerda es un proceso más complicado que parece a primera vista. La cuerda con la frecuencia fundamental de 220 hertzios realiza también vibraciones con frecuencia de 440 hertzios las que precisamente excitan, mediante la resonancia, la cuerda sintonizada con esta frecuencia. Se puede repetir este experimento con diferentes cuerdas del piano y de otros instrumentos musicales y el resultado siempre será el mismo: la cuerda que tiene la frecuencia fundamental, supongamos, de f hertzios emite asimismo de modo más o menos fuerte el sonido con la frecuencia de $2f$[1]. El mismo fenómeno se observa también en uno u otro grado en los demás instrumentos musicales: de viento y de percusión (a excepción del único instrumento que es el diapasón y que emite prácticamente el tono puro, sin armónicos).

Según hemos dicho ya es natural estructurar la escala musical de tal modo que sus tonos integrantes sean más «consonantes» unos con otros. El tono de frecuencia doble es muy «consonante» con el tono de frecuencia inicial (la cuerda resuena como una unidad íntegra y solamente los experimentos especiales permiten separar de su son el tono de frecuencia doble).

---

[1] El hecho de que la vibración de una cuerda heterogénea representa en sí la superposición de las vibraciones con las frecuencias f, $2f$, $3f$, ..., puede argumentarse también de modo teórico, pero esto requiere medios de matemática superior. Por ejemplo, si el macillo golpea sobre la cuerda de longitud l a la distancia h de su extremo, en este caso la relación entre la amplitud del sonido de frecuencia $2f$ excitada por este golpe y la amplitud del sonido de frecuencia f es igual a $\frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{sen}(2h\pi/l)}{1+\operatorname{sen}(h\pi/l)}$. Solamente en el caso único en que el golpe corresponde precisamente al centro de la cuerda ($h = l/2$), no se irradia el sonido de frecuencia $2f$. Pero en este caso (igual que en otros) se emite el sonido de frecuencia $3f$, etc. En el piano el golpe del macillo corresponde a $^1/_8$ de la longitud de la cuerda. Este punto es próximo a aquél en que se obtiene el máximo de la amplitud relativa del sonido con frecuencia $2f$, pero no coincide con éste, puesto que los diseñadores también toman en consideración en papel de las frecuencias $3f$, $4f$, etc.

Por eso es natural introducir la siguiente condición: la *escala musical junto con la frecuencia f ha de incluir la frecuencia $2f$.* Si se trata de las frecuencias menores que f, en primer lugar es natural exigir que *junto con la frecuencia f* en la escala exista también la frecuencia $f/2$. El intervalo entre el sonido dado y el sonido de frecuencia doble se llama *octava.* Este intervalo es suficientemente amplio; la «Canción a la Patria» por I. Dunayevski «Desde Moscú hasta las mismas regiones fronterizas» comienza por el intervalo de una octava. Para la música sólo los intervalos de una octava, claro está, son insuficientes. Luego continuaremos nuestros experimentos con la cuerda para encontrar otros tonos consonantes con su tono básico. Pero al principio examinemos una condideración general que sea deseable también tener en cuenta al estructurar la escala musical. Y precisamente es necesario asegurar la posibilidad de reproducir la melodía que se nos da según el deseo de modo más alto o más bajo que en el original. Es conocido por todos, por ejemplo, que una misma canción se puede cantar de diferente modo, más alto o más bajo, según el carácter de la voz; para el tenor es más cómodo cantar más alto y para el bajo, de modo más bajo. La melodía, si se deja aparte su ritmo, se describe con los intervalos sucesivos entre los tonos que la forman. Para un intervalo es característica la *relación* entre las frecuencias de los sonidos que forman el intervalo; como ya hemos visto, en el intervalo de «octava» esta relación es igual a 2. Transponer la melodía en un tono más alto significa reproducirla con otros sonidos, respectivamente más altos, pero con la conservación exasta de las relaciones entre las frecuencias de los sonidos en cada intervalo. Por ejemplo, si tocamos la melodía de «pardillo» en el original (*mi – do – mi – do – fa – mi – re*) en quinta octava, entonces las frecuencias sucesivas (en hertzios) que usamos son las siguientes:

$$330 - 262 - 330 - 262 - 349 - 330 - 294.$$

Si transponemos esta melodía en tres teclas más alto (*si – sol – si – sol – do – si – la*), entonces de oído la melodía no se altera. Las frecuencias sucesivas serán las siguientes:

$$494 - 392 - 494 - 392 - 523 - 494 - 440.$$

No es difícil comprobar que las relaciones entre las frecuencias en cada uno de los intervalos de la melodía se mantuvieron:

$$\frac{330}{262} = \frac{494}{392}, \quad \frac{349}{262} = \frac{523}{392}, \text{ etc.}$$

Si tuviesemos que usar los intervalos con otras relaciones que en el original, notaríamos de oído que la melodía se alteró. En particular, si la melodía de «pardillo» se transpone sólo en una tecla más arriba y se prueba a tocar: *fa*–*re*–*fa*–*re*–*sol*–*fa*–*mi*, es decir, en las frecuencias 349–294–349–294–392–349–330, entonces de oído el carácter de la melodía se altera evidentemente; además, si se calculan las relaciones de las frecuencias, se ve que

$$\frac{330}{262} \neq \frac{349}{294}, \text{ etc.}$$

En realidad se puede comenzar a tocar el «pardillo» desde *fa*, pero tendremos que usar las teclas negras; de esto hablaremos más abajo.

Ahora supongamos que hemos construido la escala de tonos que satisface dos condiciones:

a) *junto con cada tono f en la escala hay tonos de $2f$ y $\frac{1}{2}f$;*

b) *la escala permite transponer las melodías sin alteraciones.*

Sean dentro de los límites de una octava los tonos de la escala los siguientes:

$$f = f_0 < f_1 < f_2 < \ldots < f_{m-1} < f_m = 2f.$$

Ya por sí mismo estos sonidos forman una melodía muy simple. Transpongámosla arriba sin alteraciones de tal modo que el tono inferior suba desde f_0 hacia f_1.

La nueva melodía comenzará por el sonido f_1 y terminará por cierto sonido f_{m+1} que ha de ser la repetición de octava del sonido f_1 (puesto que $f_m = 2f_0$). El sonido f_{m+1} ya es más alto que el último sonido de la octava (f_0, f_m), pero afirmamos que es el primero que sigue tras f_m. En realidad, si en nuestra escala se encuentra el tono f' entre f_m y $f_{m+1} = 2f_1$, entonces en esta misma escala estaría también el sonido $\frac{1}{2}f'$ de modo que de la desigualdad $f_m < f' < f_{m+1}$ se deduce que $f_0 < \frac{1}{2}f' < f_1$. Pero, según la condición, f_1 es *primer* sonido que sigue tras de f_0, por lo que no puede existir ningun f' entre f_m y f_{m+1}.

Después de transponer en un escalón nuestra melodía, según la condición, puede expresarse con ayuda de los tonos de la misma escala, al empezar por f_1 y terminar por f_{m+1}. Puesto que la melodía inicial se compone de $m + 1$ diferentes sonidos y desde

f_1 hasta f_{m+1} en nuestra escala hay precisamente $m+1$ sonidos diferentes: $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}$, la melodía nueva toma la forma

$$f_1 < f_2 < \ldots < f_m < f_{m+1}.$$

Puesto que ésta corresponde a la melodía inicial sin alteraciones, tenemos

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1}, \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2}, \quad \ldots, \quad \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \ldots = \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m}. \qquad (1)$$

Pues, vemos que las frecuencias $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m$ forman una ***progresión geométrica***. Hallemos el denominador de esta progresión. Designémoslo con q; en este caso tenemos $f_m = q^m f_0 = 2f_0$; de este modo $q^m = 2$. La misma escala se determina por completo si se conoce el número m, o sea, el número de sus escalones entre la frecuencia f_0 y la frecuencia $2f_0$.

Para la comodidad de las estructuraciones ulteriores pasemos de las frecuencias $f_0, f_1, \ldots$ a sus logaritmos binarios: $\lg_2 f_0$, $\lg_2 f_1, \ldots$ La octava $(f_0, 2f_0)$ pasa en este caso al espacio desde $\lg_2 f_0$ hasta $\lg_2 2f_0 = \lg_2 f_0 + 1$, es decir, al espacio de longitud 1, mientras que la progresión geométrica $f_0, f_1, \ldots, f_m$ se transforma en la progresión aritmética $\lg_2 f_0, \lg_2 f_1, \ldots \lg_2 f_m$ con la diferencia de $\lg_2 \sqrt[m]{2} = \dfrac{1}{m}$; de este modo sobre el eje de logaritmos nuestra escala será formada por puntos A, $A + \dfrac{1}{m}$, $A + \dfrac{2}{m}$, $\ldots$, $A + 1$, en que a través de A hemos designado la magnitud $\lg_2 f_0$.

¿Partiendo de qué consideraciones es necesario elegir el número m?

De nuevo refirámonos a los experimentos con la cuerda para aclarar qué frecuencias vocales más se emiten durante su vibración. Comprobemos, por supuesto, la presencia de la frecuencia triple. Para esto aprovechemos la tecla de «la_c» (de cuarta octava) que corresponde a la frecuencia 220 hertzios y la tecla de «mi_s» (de sexta octava) que corresponde a la frecuencia de 660 hertzios (repetición octava de la frecuencia 330 hertzios que corresponde al sonido mi_q de la quinta octava). Bajemos lentamente mi_s (sin producir el sonido) para que el apagador libere la cuerda; luego.

igual que antes, toquemos fuertemente y dejemos la tecla de la_c; en seguida *oimos el son de la cuerda liberada de* mi_s. De este modo la *frecuencia triple también está presente en el son de la cuerda.* Es posible continuar el experimento y descubrir sucesivamente la presencia de los sonidos de cuarta multiplicidad, lo que, no obstante, ya no tiene nada de extraño, puesto que $4f = 2 \cdot 2f$; luego de quinta multiplicidad, etc.; pero los demás tonos después del tercero están expresados ya de modo muy débil. Todos estos tonos $2f$, $3f$, $4f$, ... se llaman *armónicos* del tono fundamental f; su resonancia conjunta atribuye al sonido de la cuerda un timbre característico que nos permite diferenciar el sonido obtenido en un piano del mismo sonido tocado en una trompeta o un violín. La belleza de la voz de cantor depende de la cantidad y el valor relativo de armónicos. El diapasón que produce solamente el tono fundamental sin armónicos tiene el timbre más «fastidioso» y, puede ser, precisamente por eso no se emplea en la música artística.

Ahora, como es natural, introducimos la condición siguiente:

c) *junto con cada frecuencia* f *en la escala musical ha de presenciar la frecuencia* $3f$.

Ya que hemos convenido de que junto con cada frecuencia f en la escala ha de presenciar $\frac{1}{2}f$, vemos que junto con la frecuencia f ha de presenciar $\frac{1}{2}3f = \frac{3}{2}f$. Esta frecuencia nos interesa porque está comprendida precisamente en aquel espacio $(f, 2f)$ en que construimos nuestra escala. De este modo, el número m de escalones en una octava f_0, $2f_0$ ha de ser elegido de tal manera que uno de los escalones obtenidos coincida con la frecuencia $\frac{3}{2}f_0$. El logaritmo de frecuencia del escalón k-ésimo es $A + \frac{k}{m}$, el logaritmo de frecuencia $\frac{3}{2}f_0$ es $A + \lg_2 \frac{3}{2}$.

De aquí obtenemos la ecuación

$$\lg_2 \frac{3}{2} = \frac{k}{m}, \tag{2}$$

que ha de estar satisfecha para ciertos k y m enteros. Pero es fácil cerciorarse de que *esta ecuación está privada totalmente de las soluciones en números enteros*; en otras palabras, $\lg_2 \frac{3}{2}$ es un número *irracional.* En realidad, según la definición de logaritmo deducimos de (2)

$$2^{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2},$$

o, elevando a potencia *m*,

$$2^k = \left(\frac{3}{2}\right)^m, \quad 2^{k+m} = 3^m.$$

Pero el primer miembro de la igualdad obtenida para cualesquiea números enteros k y m es número par, mientras que el segundo miembro es número impar. De este modo nuestro principio nos llevó a la contradicción: la *condición de uniformidad de la escala logarítmica es incompatible con la exigencia de que en la escala junto con la frecuencia f esté presente la frecuencia $\frac{3}{2}f$.* El intervalo $\left(f, \frac{3}{2}f\right)$ se llama quinta *justa*; así vemos que en la escala logarítmica uniforme de tonos las quintas justas son irrealizables.

Resulta que es necesario renunciar a algo: o a la uniformidad de escala o a las quintas justas. La uniformidad de la escala es imprescindible para asegurar la transposición inalterada de la melodía hacia arriba o hacia abajo y nosotros no quisiéramos desistir de ella. Es más fácil negarse a las quintas justas: podemos tratar de trazar la escalera de los números racionales $\frac{k}{m}$ tan próximo al número irracional $\lg_2 \frac{3}{2}$ que la diferencia de las frecuencias correspondientes será menor de 1 hertzio y por eso no se percibirá de oído. Calculemos aproximadamente la precisión indispensable de los cálculos. Toda la quinta octava es intervalo desde 262 hasta 523 hertzios, por consiguiente tiene la longitud total del orden de 260 hertzios y en la escala logarítmica esta octava corresponde al espacio de longitud 1; de tal modo, 1 hertzio corresponde aproximadamente a 0,004 en la escala logarítmica; tenemos que asegurar un intervalo entre los números $\frac{k}{m}$ y $\lg_2 \frac{3}{2} = 0{,}585...$ menor que la mitad del segundo signo después de la coma.

Además de la quinta $\frac{3}{2}f$ hay también más puntos en el intervalo $(f,\ 2f)$ en los cuales sería deseable tener los escalones musicales. El análisis de los ejemplos más o menos resistentes de la música popular [1] muestra que en ésta con mayor frecuencia se encuentran los intervalos expresados con ayuda de las siguientes relaciones de frecuencias:

$$2 \text{ (octava)},\ \frac{3}{2} \text{ (quinta)},\ \frac{5}{4} \text{ (tercera)},\ \frac{4}{3} \text{ (cuarta)},$$

$$\frac{5}{3} \text{ (sexta)},\ \frac{9}{8} \text{ (segunda)},\ \frac{15}{8} \text{ (séptima)}.$$

Apuntemos los valores correspondientes de los logaritmos binarios:

$$\lg_2 2 = 1, \quad \lg_2 \frac{3}{2} = 0{,}585, \quad \lg_2 \frac{4}{3} = 0{,}416,$$

$$\lg_2 \frac{5}{3} = 0{,}737, \quad \lg_2 \frac{5}{4} = 0{,}323, \quad \lg_2 \frac{9}{8} = 0{,}169, \quad \lg_2 \frac{15}{8}.$$ [2]

Para nosotros es deseable trazar la escala uniforme lo más próximo posible a estos números; en este caso el valor más grande tiene el número $\lg_2 \frac{3}{2} = 0{,}585$ como el que corresponde al intervalo más natural dentro de los límites de octava.

---

[1] Las mismas relaciones se obtienen naturalmente también de las consideraciones teóricas. La tercera $\frac{5}{4}$ es representante del tono fundamental de quinta multiplicidad, la cuarta $\frac{4}{3}$ es la quinta abajo de 2, la sexta $\frac{5}{3}$ es la quinta abajo de $\frac{5}{2} = 2 \cdot \frac{5}{4}$, la segunda $\frac{9}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$, es decir, es representante de la quinta doble; por fin, la séptima $\frac{15}{8}$ es la quinta hacia arriba desde la tercera.

[2] Si no se tiene a mano las tablas de logaritmos binarios se puede calcularlos a través de los decimales, tomando logaritmos de la fórmula $2^{\lg_2 x} = x$ según la base 10, obtenemos $\lg_2 x \cdot \lg_{10} 2 = \lg_{10} x$, de donde

$$\lg_2 x = \frac{\lg_{10} x}{\lg_{10} 2}.$$

Para construir las aproximaciones racionales de los números irracionales en calidad de un medio muy bueno puede servir la *fracción continua*, es decir, la fracción de la forma

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}, \tag{3}$$

donde $a_1, a_2, \ldots$ son los números enteros positivos.

Se conoce que cualquier número α en el segmento $[0, 1]$ se puede desarrollar en la fracción continua (infinita si α es irracional). Las expresiones, evidentemente racionales,

$$\frac{1}{a_1}, \quad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \quad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_2}}}, \text{ etc.}$$

se llaman *fracciones convenientes* de la fracción continua (3). La fracción conveniente de la fracción continua compuesta para el número α,

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{p_n}{q_n},$$

dista del número α no más lejos que en $\frac{1}{q_n^2}$ y no más lejos que cualquier fracción $\frac{p}{q}$ con el denominador que no supera q_n. La exposición detallada de la teoría de las fracciones continuas se puede encontrar, por ejemplo, en la Enciclopedia de las Matemáticas Elementales (t. 1, artículo de *A. Ya. Jinchin*, ed. en ruso).

Enoontremos las primeras fracciones convenientes de desarrollo del número $x = \lg_2 \frac{3}{2}$ en fracción continua. Según la definición del logaritmo tenemos

$$2^x = \frac{3}{2}. \tag{4}$$

Puesto que $x < 1$, entonces durante la sustitución $y = \frac{1}{x}$ tendremos $y > 1$. La ecuación (4) se reduce a la forma

$$\left(\frac{3}{2}\right)^y = 2. \tag{5}$$

Es evidente que el valor buscado de y se halla entre 1 y 2 $\left(\text{puesto que } \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} < 2,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2\right)$. Pongamos ahora $y = 1 + \frac{1}{z}$; en este caso a sabiendas $\frac{1}{z} < 1, z > 1$. La ecuación (5) se reduce a la forma

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}} = 2, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}} = \frac{4}{3},$$

de donde

$$\left(\frac{4}{3}\right)^z = \frac{3}{2}. \tag{6}$$

Es evidente que la incógnita z se encuentra entre 1 y 2 $\left(\frac{4}{3} < \frac{3}{2}, \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} > \frac{3}{2}\right)$, y pongamos $z = 1 + \frac{1}{u}$; la ecuación (6) se reduce a la forma

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{9}{8}, \text{ de donde } \left(\frac{9}{8}\right)^u = \frac{4}{3}. \tag{7}$$

Aquí u se halla ya entre 2 y 3 $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64} < \frac{4}{3}, \left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{729}{512} > \frac{4}{3}\right]$, por eso hagamos la sustitución $u = 2 + \frac{1}{v}$, donde de nuevo $v > 1$. Para v desde (7) obtenemos

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}} = \frac{4}{3} \quad \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}} = \frac{256}{243},$$

o

$$\left(\frac{256}{243}\right)^v = \frac{9}{8}. \tag{8}$$

Los cálculos ulteriores es más fácil realizarlos con ayuda de las tablas de logaritmos decimales. Al tomar logaritmos (8) encontramos

$$v\,[\lg 256 - \lg 243] = \lg 9 - \lg 8,$$

o, al usar las tablas de logaritmos decimales,

$$v\,[2{,}4082 - 2{,}3856] = 0{,}9542 - 0{,}9031,$$

de donde

$$0{,}022v = 0{,}0511.$$

Está claro que v está comprendido entre 2 y 3. Podrían continuarse los cálculos infinitamente, pero nos detenemos en esto. Como resultado obtendremos

$$x = \frac{1}{y} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{v}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}};$$

precisamente esto nos da los primeros términos de la fracción continua buscada.

Las fracciones convenientes correspondientes tienen la forma siguiente:

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{1}{2},$$

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{3}{5}; \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{7}{12}.$$

Las dos primeras fracciones convenientes son evidentemente muy bastas. La tercera, $\frac{k}{m} = \frac{3}{5} = 0{,}600$ ya da un error comparativamente pequeño, 0,015 en comparación con la magnitud que nos interesa $\lg_2 \frac{3}{2} = 0{,}585$; pero este error con todo supera cuatro veces la deseada 0,004. Además, si examinamos la escala correspondiente de los números múltiples de $\frac{1}{5}$, es decir, de los números $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, 1, veremos que algunos números interesantes para nosotros, precisamente $\lg_2 \frac{5}{3} = 0{,}727$ y $\lg_2 \frac{9}{8} = 0{,}169$, se hallan lejos de sus divisiones.

Pasemos a la última aproximación, $\frac{k}{m} = \frac{7}{12} = 0{,}583$. Esta es ya suficientemente próxima a la buscada 0,585, el error de 0,002 constituye la mitad del admisible. La escala musical correspondiente se construye sobre el eje logarítmico mediante la división del segmento de longitud 1 en 12 partes iguales mediante los puntos de división:

$$\frac{1}{12} = 0{,}083, \quad \frac{2}{12} = 0{,}167, \quad \frac{3}{12} = 0{,}250, \quad \frac{4}{12} = 0{,}333,$$

$$\frac{5}{12} = 0{,}418, \quad \frac{6}{12} = 0{,}500, \quad \frac{7}{12} = 0{,}583, \quad \frac{8}{12} = 0{,}667,$$

$$\frac{9}{12} = 0{,}750, \quad \frac{10}{12} = 0{,}833, \quad \frac{11}{12} = 0{,}917, \quad \frac{12}{12} = 1{,}000,$$

la séptima de las cuales es muy próxima a la quinta.

Vemos también que los valores interesantes para nosotros $\lg_2 \frac{4}{3} = 0{,}416$, $\lg_2 \frac{5}{3} = 0{,}737$, $\lg_2 \frac{5}{4} = 0{,}323$, $\lg_2 \frac{9}{8} = 0{,}169$, $\lg_2 \frac{15}{8} = 0{,}908$ caen cerca de los puntos de la escala (fig. 3), aunque no con tanta precisión como $\lg_2 \frac{3}{2}$.

De este modo, precisamente la escala musical de doce escalones resuelve con éxito nuestros problemas.

Ahora estamos en condición de explicar por completo las regularidades de frecuencias de la octava. En primer lugar fijamos la escalera *de doce* escalones mediante aquella condición de que la relación entre la mayor y la menor frecuencias vecinas es constante e igual a $\sqrt[12]{2}$.

El intervalo mínimo correspondiente entre sonidos se llama *semitono*; el intervalo formado por dos semitonos vecinos se llama *tono* (no hay que confundir el *tono* – intervalo y el *tono* – sonido de la altura fijada). Toda la octava se subdivide en seis tonos o 12 semitonos. Las frecuencias fundamentales que forman la octava

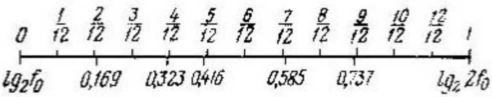


FIG. 3.

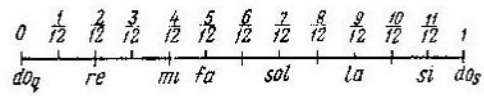


FIG. 4.

se obtienen mediante una variación pequeña de las frecuencias $f_1, f_2, \ldots$, mostradas en la fig. 3, de este modo en vez del sonido de frecuencia f_1 se examina (fig. 4) el escalón más próximo preciso $\frac{2}{12}$, en vez de f_2, el escalón preciso $\frac{4}{12}$, etc. Si el sonido inicial de octava es *do*, entonces el siguiente sonido fundamental que dista en un tono se llama *re*; el sonido situado un tono más lejos se llama *mi*; el sonido siguiente y más alto en semitono se llama *fa*. Estos cuatro sonidos fundamentales forman el así llamado tetracordio («cuatro cuerdas»). En la segunda mitad de la octava hay segundo tetracordio que es idéntico al primero en sentido de igualdad de relaciones entre las frecuencias correspondientes; se empieza con el sonido *sol* que corresponde a la frecuencia $\sim \frac{3}{2} f_0$, luego dentro de un tono va el sonido que se llama *la*; tras éste dentro de un tono se sitúa el sonido *si*; se termina el tetracordio dentro de un semitono por el sonido do_s que es la repetición octava del do_q inferior. Precisamente estas frecuencias figuran en la quinta octava que hemos examinado al principio. En realidad, los logaritmos binarios de las frecuencias indicadas en la tabla son siguientes:

Tono	do_q	re_q	mi_q	fa_q	sol_q	la_q	si_q	do_s
f es frecuencia en hertzios	262	294	330	349	392	440	494	523
$\lg_2 f$	8,031	8,198	8,365	8,448	8,615	8,781	8,948	9,031
$\lg_2 \frac{f}{f_0} = \lg_2 f - \lg_2 f_0$	0	0,167	0,334	0,417	0,584	0,750	0,917	1,000

Vemos que las diferencias de logaritmos son precisamente aquellas mismas frecuencias que figuraron en nuestra escala musical para los sonidos fundamentales. De tal modo la estructura de la quinta octava está aclarada.

Además de los siete sonidos fundamentales la octava tiene cinco sonidos auxiliares más los que en conjunto con los primeros forman la escala completa de doce escalones. Estos se designan con ayuda de los sonidos fundamentales vecinos mediante la adición de las palabras «*diesi*» («sostenido») o «*bemol*» lo que significa la elevación o bajada en un semitono. Así, el sonido en un semitono más alto que *do* se designa *do sostenido* o *re bemol*. Estos cinco sonidos adicionales se obtienen con ayuda de cinco teclas negras de primera octava (fig. 2).

Si la melodía se reproduce sólo con los sonidos fundamentales de la gama, es decir, con ayuda de las teclas blancas, entonces las teclas negras no participan (por ejemplo, en la melodía de «pardillo» que se empieza con la nota *mi*). Pero si queremos transponer la melodía, por ejemplo, en un semitono más arriba, tendremos que usar también las teclas negras puesto que el segundo sonido de la melodía «*do*» ha de transformarse en «*re bemol*» que se sitúa en un semitono más arriba de «*do*».

La «melodía» de los sonidos fundamentales *do* – (un tono) – *re* – (un tono) – *mi* (semitono) – *fa* – (*un tono*) – *sol* – (*un tono*) – *la* – (*un tono*) – *si* – (*semitono*) – *do* forma, como se dice, gama *natural* de *do mayor.* Al transponer esta melodía con la conservación de los intervalos hacia arriba a diferentes distancias dentro de los límites de la octava podemos obtener 11 gamas más en cuyos nombres en primer lugar se pone la denominación de primera nota de la gama y en segundo lugar la palabra «*mayor*» que indica la composición de intervalos de la melodía (tono – tono – semitono – tono – tono – tono – semitono). Por ejemplo, al transponer la gama de *do mayor* en un tono hacia arriba obtenemos la gama de *re mayor* formada por los sonidos: *re* – (tono) – *mi* – (tono) – *fa sostenido* – (semitono) – *sol* – (tono) – *la* – (tono) – *si* – (tono) – *do sostenido* – (semitono) – *re*.

Existen además varias gamas formadas también por siete escalones, pero con diferente correlación de intervalos. De este modo, «la escala natural de *do menor*» consta de los sonidos *do, re, mi bemol, fa, sol, la bemol, si bemol, do* con la composición de intervalos: tono – semitono – tono – tono – semitono – tono – tono. Tres sonidos fundamentales de la escala de do mayor: *do* – *mi* – *sol* – son precisamente aquellos sonidos que entran en la composición del son total de la cuerda *do* con la precisión de hasta los desplazamientos octavos (sol_s es la frecuencia triple respecto a do_q y mi_s, quintupla). Puede ser que precisamente por eso esta tríada se asimila de modo tan estable y determinado. Los tres sonidos fundamentales de la escala de *do* menor: *do* – *mi bemol* – *sol* se obtienen con bajada en semitono del medio de los sonidos de la tríada mayor a consecuencia de lo cual surge la disonancia oculta entre el sonido de *mi bemol* y el sonido mi_s que forma parte del son total de la cuerda do_q; puede ser que con esto se explica el colorido «menor» singular de la tríada menor. Las obras musicales clásicas están construidas sobre una u otra escala mayor o menor por lo que a sus nombres con frecuencia se agrega una indicación correspondiente «Balada de Chopin sol menor» o «Polonesa la bemol mayor».

La creación de una escala uniforme logarítmica de doce tonos fue el resultado del desarrollo prolongado de la música y de las matemáticas. Es natural que no pudo aparecer antes de la creación del álgebra de magnitudes irracionales y logaritmos y con todo este arsenal de medios matemáticos los científicos comenzaron a operar libremente sólo en el siglo XVII. Y cerca del año 1700 el científico y músico alemán Andreas Werckmeister propuso la escala descrita aquí y fabricó un piano sintonizado en correspondencia con ésta. Hasta entonces los instrumentos musicales se sintonizaron según el principio de intervalos justos (quinta, hertzio, etc.) lo que inevitablemente conducía a las dificultades en aprovechamiento de otras tonalidades y las rudezas en modulaciones (transiciones de una tonalidad a otra) y con eso puso los límites al desarrollo de la música. No todos los músicos, ni mucho menos, aceptaron en seguida la escala de Werckmeister; por ejemplo, el célebre filósofo y músico francés Diderot era su enemigo, consideró que en base de la música no puede hallarse la escala sin intervalos justos. Pero el gran compositor alemán del siglo XVIII Juan Sebastián Bach con su obra demostró la vitalidad del nuevo sistema; compuso dos tomos de obras musicales bajo el título común «El piano bien temperado» (1722–1744). Cada uno de estos tomos contenía 24 piezas (preludios y fugas): por una para cada una de 12 tonalidades mayores y 12 tonalidades menores. Las composiciones de Bach constituyeron una época en desarrollo de la música nueva; todos los compositores ulteriores creaban su música siguiendo este sistema. Para el tiempo presente sus posibilidades todavía se presentan como inagotables. Las alteraciones de los intervalos «populares» justos en la escala de Werckmeister son notables sólo para un oído experimentado y su presencia se compensa con largueza por la libertad en la elección de las tonalidades y la naturalidad de las modulaciones. En nuestro siglo aparecieron las propuestas de aumentar el número de escalones en octava hasta 24, 48 o 53 para obtener dentro de los límites de una octava los intervalos más próximos a los justos, e incluso se fabricaron los instrumentos experimentales, pero en la práctica musical éstos no entraron.

En conclusión señalemos un hecho más el que la ciencia musical todavía no explicó teóricamente. Según nuestra construcción todas las 12 tonalidades mayores, igual que todas las 12 tonalidades menores ha de ser idénticas unas a otras por su resonancia. No obstante los músicos consideran que las tonalidades poseen también las cualidades individuales. Así, por ejemplo, se considera que *do mayor* es característica para el estado de ánimo tranquilo, radiante, claro (sonata de Beethoven «Aurora»), *mi mayor*, para la emoción exaltada de tensión apacionada (muchas composiciones de Liszt, romance de Chaikovski «Si reina el día»); *fa sostenido mayor*, para los sentimientos elevados alegres («En primavera» de Grieg); *do menor*, para la tristeza firme («Marcha fúnebre» de la Sinfonía heroica de Beethoven); *mi bemol menor*, para los estados profundamente trágicos (romance de Polina de «La dama de picas» por Chaikovski). Todavía no está aclarado, si se reflejan en las consideraciones de tal género cualesquier regularidades objetivas o tenemos el caso sólo con la tradición bien estable. Es posible, además, que el proceso de sintonización de los instrumentos musicales, en calidad de las particularidades del oído, no conduce prácticamente a los intervalos uniformes, algo rígidos de la escala musical, sino que a unos intervalos débilmente suavizados de tal modo que en realidad, por ejemplo, la relación entre las frecuencias para el intervalo *do – sol* no coincide por completo con la relación análoga para el intervalo *mi – si*, como sería de esperar en caso de la sintonización ideal. En todo caso, la ciencia no permanece estancada y más tarde o más temprano llegará a la explicación de éste y de otras regularidades de la música todavía no explicadas.

ANOTACIÓN

Toda la música se basa en el tono musical o el sonido de altura determinada que representa en sí un proceso vibratorio en el aire con cierta frecuencia. Aunque nuestro oído percibe los tonos con la gama suficientemente amplia de frecuencias, en la música usamos un número comparativamente pequeño de tonos.

El problema de qué precisamente tonos ha de contener la escala musical se resuelve mediante los métodos matemáticos. A éste se dedica el folleto presente escrito sobre la base de una lección leída por el autor en el círculo matemático escolar adjunto a la Universidad Estatal de Moscú.

CÓMO CONSTRUIR LAS GRÁFICAS

Y la gráfica del seno,
una onda, otra onda,
Por el eje de abscisas corre...

(Del folklore estudiantil)

Sería difícil encontrar una rama de la ciencia o la vida social, en que no se emplearán las gráficas. Todos hemos visto más de una vez, por ejemplo, las gráficas del incremento industrial o las del rendimiento del trabajo en la URSS. También los fenómenos de la naturaleza, como, por ejemplo, variaciones diarias o anulares de la temperatura, presión atmosférica, etc., se describen de modo más simple con ayuda de gráficas. La construcción de gráficas de esta índole no es difícil, si se ha elaborado de antemano la tabla correspondiente. Aquí hablaremos sobre otras gráficas, las que deben construirse según fórmulas matemáticas preestablecidas. La necesidad de construir gráficas de este tipo surge con frecuencia en las diferentes ramas de la ciencia. Así, por ejemplo, al analizar teóricamente el futuro desarrollo de un proceso físico, un científico obtiene la fórmula que le permite conocer la magnitud buscada, por ejemplo, la cantidad del producto obtenido en función del tiempo. La gráfica hecha de acuerdo con esta fórmula mostrará claramente los resultados del proceso futuro. Es posible que, al observar esta gráfica, el científico introduzca correcciones sustanciales en el esquema del experimento, con el fin de obtener mejores resultados.

En este folleto examinaremos algunos procedimientos elementales que se usan para construir gráficas según fórmulas preestabecidas.

Tracemos en un plano dos rectas perpendiculares entre sí, una horizontal y otra vertical, y designemos con O su punto de intersección. Denominemos la recta horizontal *eje de abscisas* y la vertical, *eje de ordenadas*. El punto O divide cada uno de los ejes en dos semiejes uno de los cuales es positivo y otro, negativo, así el semieje derecho del eje de abscisas y el semieje superior del eje de ordenadas se consideran positivos, mientras que el semieje izquierdo del eje de abscisas y el semieje inferior del eje de ordenadas se consideran negativos. Designemos los semiejes positivos con flechas. Ahora la posición de cualquier punto M en el plano puede definirse mediante un par de números. Para esto tracemos desde el punto M perpendiculares sobre cada uno de los ejes; estas perpendiculares cortan en los ejes los segmentos OA y OB (fig. 1). La longitud del segmento OA tomada con signo $+$, si A se encuentra sobre el semieje positivo, o con signo $-$, si A se halla sobre el semieje negativo, la llamaremos *abscisa* del punto M y designaremos a través de x. De modo análogo la longitud del segmento OB (cumpliendo la misma regla del signo) la llamaremos *ordenada* del punto M y designaremos a través de y. Dos números: x e y, se llaman *coordenadas* del punto M. Cada punto del plano tiene ciertas coordenadas. Los puntos del eje de abscisas tienen la ordenada igual a cero, los puntos del eje de ordenadas tienen la abscisa igual a cero. El origen de coordenadas O (punto de intersección de los ejes)

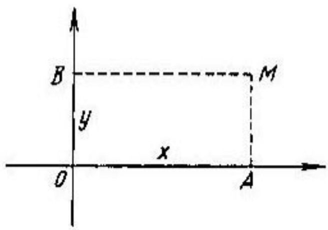


FIG. 1.

tiene ambas coordenadas iguales a cero. En caso contrario, si se dan dos números arbitrarios x e y, independientemente de cualesquiera que sean sus signos, siempre es posible encontrar el punto M que tiene la abscisa x y la ordenada y dadas; para esto es preciso en el eje de abscisas marcar el segmento $OA = x$ y del punto A levantar la perpendicular $AM = y$ (teniendo en cuenta los signos); el punto M será el buscado.

Sea dada una fórmula para la cual es necesario construir la gráfica. Esta fórmula debe contener indicaciones de qué operaciones se deben realizar con la variable independiente (designada a través de x) para obtener un valor de la magnitud que nos interesa (designada como y). Por ejemplo, la fórmula

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

muestra, que para obtener los valores de la magnitud y es necesario elevar la variable independiente x al cuadrado, adicionar una unidad y dividir una unidad por el resultado obtenido. Si x

admite cualquier valor numérico x_0, entonces según nuestra fórmula también y aceptará cierto valor numérico y_0. Los números x_0 e y_0 definen cierto punto M_0 en plano del dibujo. En vez de x_0 se puede tomar cualquier otro número x_1 y calcular según la fórmula un nuevo valor de y_1; un par de números (x_1, y_1) definirá un punto nuevo M_1 en el plano. El lugar geométrico de *todos* los puntos, cuya ordenada está ligada con la abscisa mediante la fórmula dada, se llama *gráfica* que corresponde a esta fórmula.

El conjunto de los puntos en la gráfica, hablando en general, es infinito y no podemos aspirar que realmente logremos construir todos ellos sin excepción de acuerdo con la regla indicada. Pero prescindiremos de ello. En la mayoría de casos es suficiente tener un número pequeño de puntos para poder juzgar acerca de la forma general de la gráfica.

El método para construir una gráfica «según los puntos» consiste precisamente en el hecho de que se marca cierto número de puntos de la gráfica y luego estos puntos se unen (dentro de lo posible) con una línea suave.

Examinemos como ejemplo la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{1 + x^2}. \qquad (1)$$

Compongamos la tabla siguiente:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

En el primer renglón inscribimos los valores de $x = 0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Frecuentemente para x se eligen valores enteros, puesto que esto facilita los cálculos. En el segundo renglón están escritos los valores correspondientes de y hallados según la fórmula (1). Marquemos los puntos correspondientes en el plano (fig. 2). Al unirlos con una línea suave obtenemos la gráfica (fig. 3).

Como vemos, la regla de construcción «según los puntos» es extremadamente simple y no exige «ciencia» alguna. A pesar de todo, puede ser que precisamente por esto, el cumplimiento irreflexivo de la regla de construcción «según los puntos» puede conducir a errores graves.

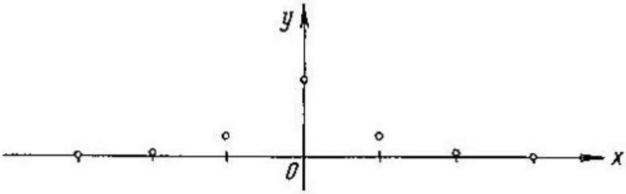


FIG. 2.

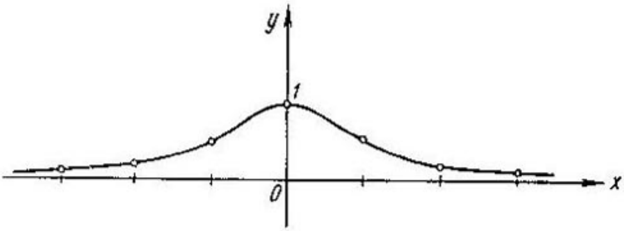


FIG. 3.

Construyamos «según los puntos» la curva dada por la ecuación

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}. \tag{2}$$

La tabla de los valores de x e y que corresponde a esta ecuación, es la siguiente:

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

Los puntos correspondientes en el plano se exponen en la fig. 4. Este dibujo parece mucho al recién aducido; al unir los puntos marcados con una curva suave obtenemos la gráfica (fig. 5). Parece que ya es posible dejar el lápiz y tranquilizarse: ¡hemos aprendido el arte de construir las gráficas! Pero para comprobar nuestra habilidad calculemos y para cualquier valor intermedio

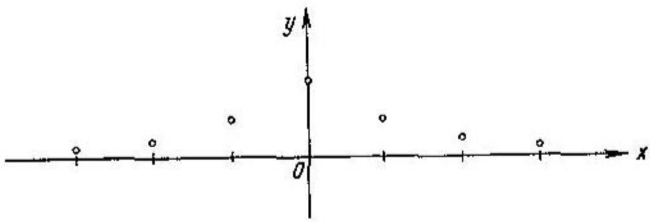


FIG. 4.

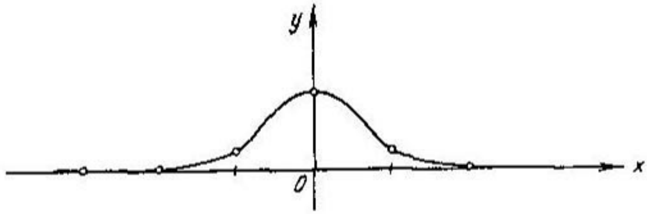


FIG. 5.

de x, por ejemplo, $x = 0{,}5$. Al cumplir los cálculos obtenemos un resultado inesperado: cuando $x = 0{,}5$, el valor de $y = 16$. Esto contradice de modo esencial a nuestro dibujo. Tampoco estamos garantizados contra el hecho de que, cuando calculamos y para otros valores intermedios de x, cuyo número es infinitamente grande, resulten absurdos aún más grandes. Parece que haya algo no fundamentado de modo suficiente en el mismo procedimiento que se usa para construir las gráficas «según los puntos».

*   *
*

Examinaremos a continuación otro procedimiento para construir las gráficas, que es más seguro y que nos permita evitar sorpresas muy parecidas a las que nos sorprendieron ahora mismo. De acuerdo a este procedimiento, lo llamaremos, por ejemplo, «según las operaciones», hay que realizar directamente en las gráficas todas las operaciones, escritas en la fórmula que se nos ha dado: adición, sustracción, multiplicación, división, etc.

Examinemos varios ejemplos simples. Construyamos la gráfica que corresponde a la ecuación

$$y = x. \tag{3}$$

Esta ecuación muestra que todos los puntos de la línea buscada de la gráfica tienen abscisas y ordenadas iguales. El lugar geométrico de los puntos cuya ordenada es igual a la abscisa es la bisectriz del ángulo entre los semiejes positivos y del ángulo entre los semiejes negativos (fig. 6). La gráfica que corresponde a la ecuación

$$y = kx$$

con cierto coeficiente k, se obtiene de la ecuación precedente mediante la multiplicación de cada ordenada por un mismo número k. Supongamos, por ejemplo, $k = 2$; cada ordenada de la

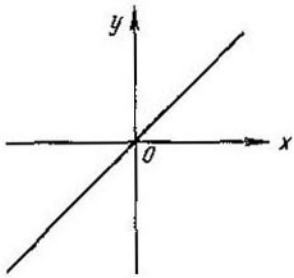


FIG. 6.

gráfica antecedente es preciso duplicarla y como resultado obtendremos una recta que sube de modo más brusco (fig. 7). A cada paso, hacia la derecha, por el eje x la nueva recta sube dos pasos hacia arriba por el eje y. A propósito, esto permitirá realizar fácilmente la construcción en papel cuadriculado o milimetrado. En caso general de la ecuación $y = kx$ también se obtiene una recta. Si $k > 0$, entonces a cada paso hacia la derecha se levantará k pasos hacia arriba por el eje y. Si $k < 0$, entonces la recta no subirá, sino que descenderá.

Examinemos ahora una fórmula algo más complicada

$$y = kx + b. \tag{4}$$

Para construir la gráfica correspondiente es necesario a cada ordenada de la línea ya conocida $y = kx$ adicionar un mismo número b. Entonces toda la recta $y = kx$, como algo íntegro, se desplazará hacia arriba por el plano en b unidades (cuando $b > 0$; cuando $b < 0$ la recta de partida, naturalmente, no asciende, sino desciende). Como resultado se obtendrá una recta paralela a la de partida, pero ésta ya no pasa a través del origen de las coordenadas, sino que corta en el eje de ordenadas el segmento b (fig. 8).

De esta forma, la gráfica de cualquier polinomio de primer grado de x es una recta que se construye de acuerdo a las reglas indicadas. Pasemos a las gráficas de los polinomios de segundo grado.

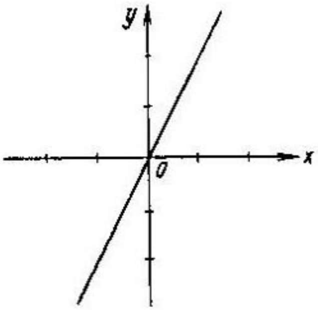


FIG. 7.

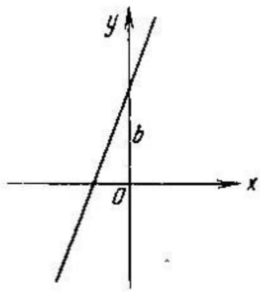


FIG. 8.

Examinemos la fórmula

$$y = x^2. \tag{5}$$

Es posible representarla en la forma

$$y = y_1^2,$$

donde

$$y_1 = x.$$

En otras palabras, obtendremos la gráfica buscada, si cada ordenada de la línea ya conocida $y = x$ se eleva al cuadrado. Aclaremos qué resultado dará esta operación.

Puesto que $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $(-1)^2 = 1$, obtenemos tres puntos de referencia A, B, C (fig. 9). Cuando $x > 1$, entonces $x^2 > x$; por eso a la derecha del punto B la gráfica pasará por arriba de la bisectriz del ángulo cuadrante (fig. 10). Cuando $0 < x < 1$, entonces $0 < x^2 < x$; por eso entre los puntos A y B la gráfica pasará por debajo de la bisectriz. Además, afirmamos que al acercarse al punto A la gráfica entra en cualquier ángulo limitado por arriba con la recta $y = kx$ (por muy pequeño que sea k), y por debajo, con el eje x; en realidad, la desigualdad

$$x^2 < kx$$

se cumple sòlo cuando $x < k$. Este fenómeno significa que la curva buscada *toca* en el punto O el eje de abscisas (fig. 11). Pasemos ahora hacia izquierda del punto O por el eje x. Conocemos que

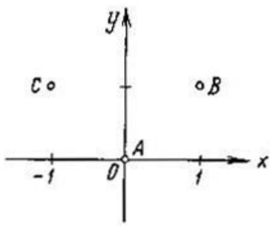


FIG. 9.

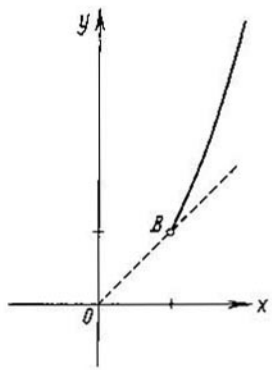


FIG. 10.

los números $-a$ y $+a$ después de elevarlos al cuadrado dan un mismo resultado $(+a^2)$. De tal modo, la ordenada de nuestra curva, cuando $x = -a$, será la misma que cuando $x = +a$. Desde el punto de vista geométrico esto significa que la gráfica de nuestra curva en el semiplano izquierdo se obtendra mediante la reflexión de la gráfica ya existente en el semiplano derecho respecto al eje de ordenadas. Asi obtenemos una curva que se llama *parábola* (fig. 12).

Ahora, al actuar del modo descrito anteriormente se puede construir una curva más complicada

$$y = ax^2 \tag{6}$$

o aun más complicada

$$y = ax^2 + b. \tag{7}$$

La primera de éstas se obtiene multiplicando todas las ordenadas de la parábola (5), la que llamaremos *parábola estandartizada*, por el número a.

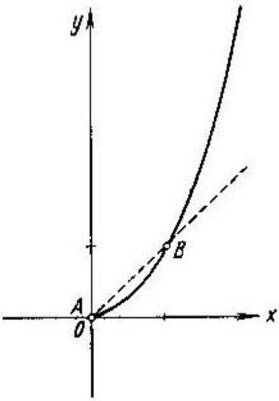


FIG. 11.

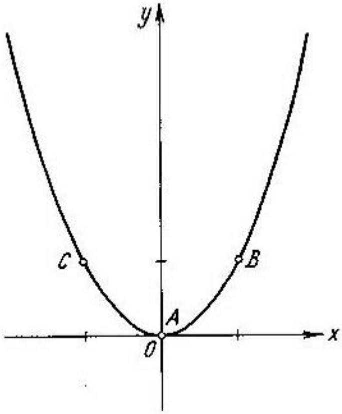


FIG. 12.

Cuando $a > 1$, se obtiene una curva semejante, pero ésta asciende de modo más brusco (fig. 13).

Cuando $0 < a < 1$, la curva tendrá pendiente más suave (fig. 14) y cuando $a < 0$, sus ramas se voltearán hacia abajo (fig. 15). La curva (7) se obendrá a partir de la curva (6) al desplazarla hacia arriba en segmento b, si $b > 0$ (fig. 16). Pero si $b < 0$, habrá que desplazar la curva no hacia arriba, sino hacia abajo (fig. 17). Todas estas curvas también se llaman parábolas.

Analicemos un ejemplo algo más complicado de construcción de las gráficas mediante el método de multiplicación. Sea dado construir la gráfica según la ecuación

$$y = x(x-1)(x-2)(x-3). \tag{8}$$

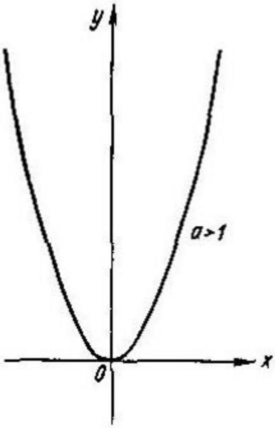


FIG. 13.

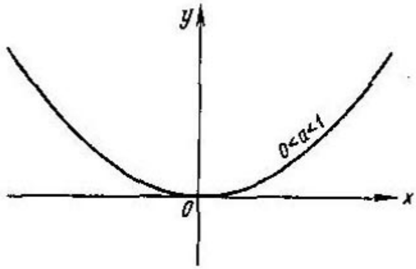


FIG. 14.

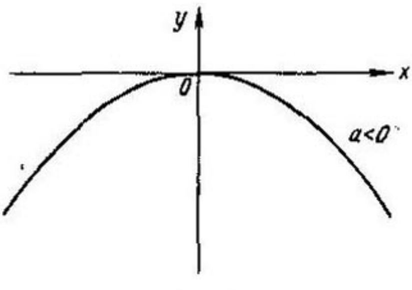


FIG. 15.

Aquí tenemos un producto de cuatro factores. Tracemos las gráficas de cada uno de éstos por separado: todas son rectas parelelas a la bisectriz en el ángulo del cuadrante y cortan en el eje de ordenadas unos segmentos que son, respectivamente: 0, -1, -2, -3 (fig. 18). En los puntos 0, 1, 2, 3 en el eje x la curva buscada tendrá ordenada igual a 0, puesto que el producto es igual a cero, si por lo menos uno de los factores es igual a cero. En otros lugares el producto será distinto de cero y tendrá el signo que puede encontrarse fácilmente según los signos de factores.

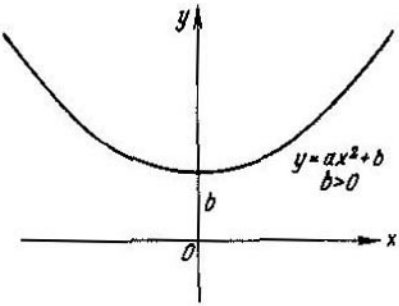


FIG. 16.

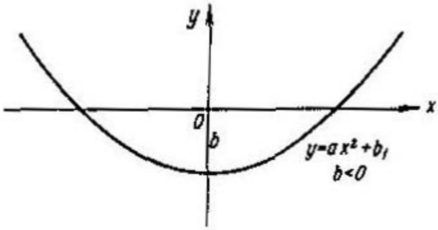


FIG. 17.

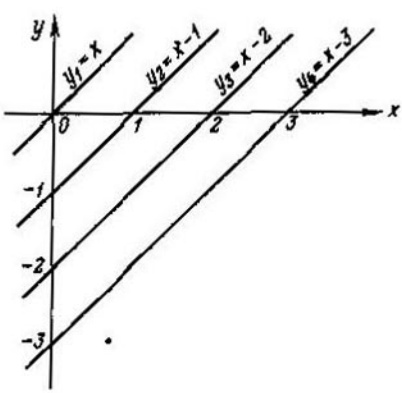


FIG. 18.

Puesto que a la derecha del punto *3* todos los factores son positivos, esto significa que el producto también será positivo. Entre los puntos *2* y *3* hay un factor negativo, por lo que el producto será negativo. Entre los puntos *1* y *2* hay dos factores negativos y por eso el producto es positivo, etc. Así obtenemos una disposición siguiente de los signos de productos (fig. 19).

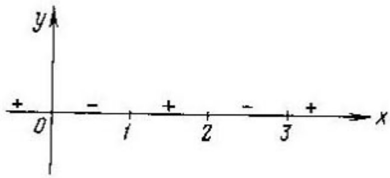


FIG. 19.

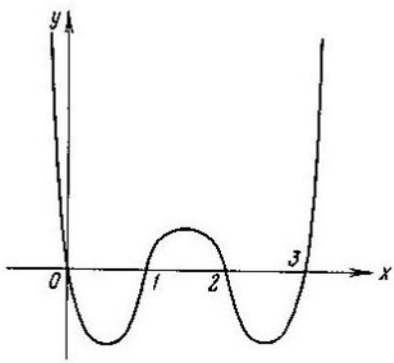


FIG. 20

A la derecha del punto *3* todos los factores aumentados en x crecen, por consiguiente, también crecerá el producto y, además, muy rápidamente. A la izquierda del punto *0* todos los factores crecen en dirección negativa, por lo que el producto (que es positivo) también crece rápidamente.

Ahora es fácil bosquejar también la gráfica en su forma general (fig. 20).

Hasta ahora hemos usado las operaciones de adición y de multiplicación. Añadamos ahora a éstas la división. Construyamos la curva

$$y = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{9}$$

Para esto tracemos por separado las gráficas del numerador y del denominador. La gráfica del numerador

$$y_1 = 1$$

es una recta paralela al eje de abscisas a la altura de 1. La gráfica del denominador

$$y_2 = x^2 + 1$$

es la parábola estandartizada desplazada hacia arriba en 1. Ambas estas gráficas se exponen en la fig. 21.

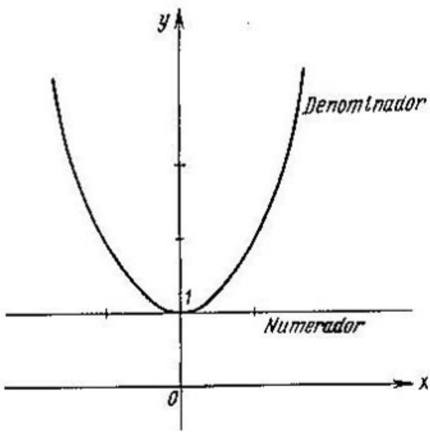


FIG. 21.

Realicemos ahora la división de cada ordenada del numerador por la ordenada correspondiente (es decir, tomada con el mismo x) del denominador. Cuando $x = 0$, vemos que $y_1 = y_2 = 1$, de donde también $y = 1$. Cuando $x \neq 0$, el numerador es menor que el denominador y el cociente es menos de 1. Puesto que tanto el numerador, como el denominador son positivos en todos los puntos, el cociente resulta también positivo y, por consiguiente, la gráfica pasa en la banda limitada por el eje de abscisas y la recta $y = 1$. Cuando x aumenta indefinidamente, entonces el denominador también aumenta indefinidamente, mientras que el numerador permanece constante: por eso el cociente tiende a cero. Todo esto conduce a la gráfica siguiente del cociente (fig. 22). El dibujo resulta idéntico al construido según los puntos (pág. 34).

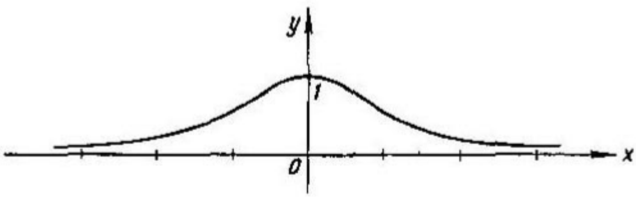


FIG. 22.

En la división gráfica un papel especial desempeñan aquellos valores de x para los cuales el denominador se reduce a cero. Si, además, el numerador no se reduce a cero, entonces el cociente se aleja al infinito. A título de ejemplo tracemos la curva

$$y = \frac{1}{x}. \tag{10}$$

Aquí ya conocemos las gráficas del numerador y del denominador (fig. 23). Cuando $x = 1$, tenemos $y_1 = y_2 = 1$, de donde también $y = 1$. Cuando $x > 1$, el numerador es menor que el denominador, el cociente es menos de 1, igual como en el ejemplo precedente; cuando x aumenta indefinidamente, el cociente se aproxima a cero y obtenemos un tramo de la gráfica que corresponde a los valores de $x > 1$ (fig. 24).

Examinemos ahora el campo de los valores de x entre 0 y 1. Cuando x partiendo de 1 se aproxima a cero, el denominador tiende a cero, mientras que el numerador permanece igual a 1. Por eso el cociente aumenta indefinidamente y obtenemos una rama que se aleja hacia el infinito (fig. 25). Cuando $x < 0$, el denominador, y, junto con éste, toda la fracción, se hacen negativos. El desarrollo general de la gráfica está representado en la fig. 26.

Ahora podemos realmente pasar a construir la gráfica de la curva de que hemos tratado al principio:

$$y = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}. \tag{11}$$

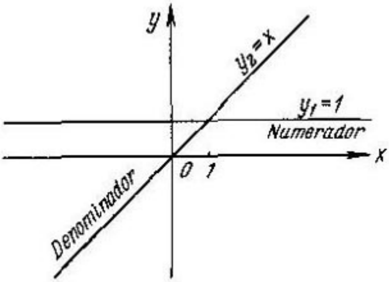


FIG. 23.

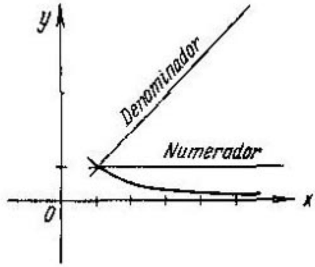


FIG. 24.

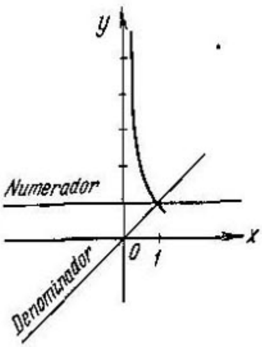


FIG. 25.

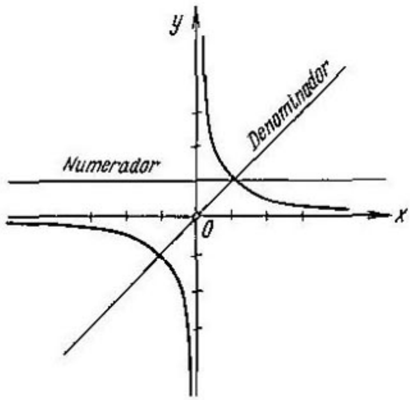


FIG. 26.

Comencemos por construir la gráfica del denominador. La curva $y_1 = 3x^2$ es la parábola estandartizada «triplicada» (fig. 27). La sustracción de unidad significa el descenso de la gráfica en una unidad hacia abajo (fig. 28). La curva interseca el eje x en dos puntos que los encontramos fácilmente al igualar $3x^2 - 1$ al cero:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0.577\ldots$$

Elevemos la gráfica obtenida al cuadrado. En los puntos x_1 y x_2 las ordenadas quedarán iguales a cero. Todas las demás ordenadas serán positivas, de tal modo que la gráfica pase por arriba del

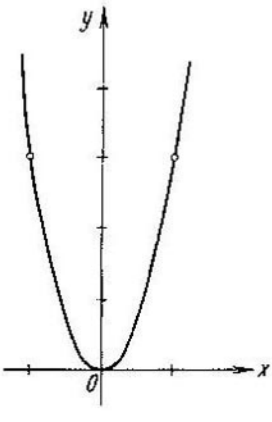


FIG. 27.

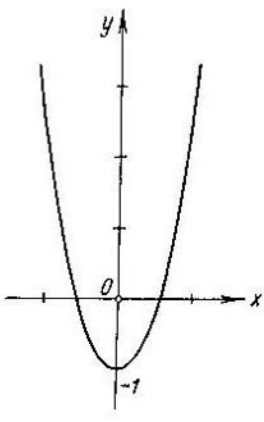


FIG. 28

eje de abscisas. En el punto $x = 0$ la ordenada será igual a $(-1)^2 = 1$, precisamente ésta será la ordenada mayor en el tramo desde x_1 hasta x_2. Fuera de este tramo la curva ascenderá en ambas direcciones en forma muy brusca (fig. 29).

Ahora está construida la gráfica del denominador. En este mismo dibujo hemos mostrado con línea punteada también la gráfica del numerador $y_4 = 1$. Nos queda ahora a dividir el numerador por el denominador. Puesto que tanto el numerador, como el denominador tienen por doquier un mismo signo, el cociente será positivo y toda la gráfica pasará por arriba del eje de abscisas. Cuando $x = 0$, el numerador es igual al denominador y su relación equivale a 1. Dirijamos hacia la derecha a partir del punto 0 por el eje de abscisas. El numerador permanece igual a 1, mientras que el denominador disminuye; por consiguiente el cociente *aumenta* a partir del valor 1. Cuando llegamos hasta el valor de $x_2 = 0{,}577\ldots$, el denominador se igualará a cero. Esto significa que el cociente para este momento se alejará hacia el infinito (fig. 30). Después del punto x_2 el denominador pasará rápidamente en dirección opuesta el camino desde el valor 0 hasta el valor 1 y luego comenzará a crecer indefinidamente. El cociente, al revés, desde el infinito regresará hacia 1, intersecará

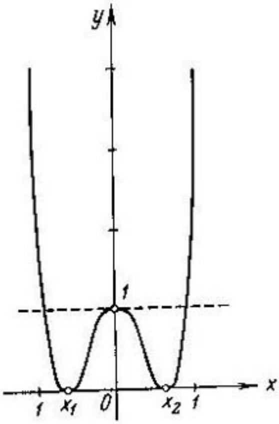


FIG. 29.

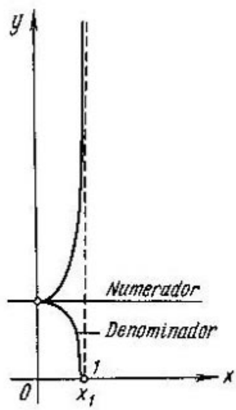


FIG. 30.

la recta $y = 1$ en el mismo punto en que lo hizo y_2 y después se aproximará indefinidamente hacia cero (fig. 31).

Precisamente el mismo cuadro se obtiene al lado izquierdo del eje de ordenadas (fig. 32).

Hemos marcado en esta gráfica los puntos que corresponden a los valores enteros: $x = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$. Son los mismos puntos que hemos marcado al construir la gráfica «según los puntos» en la pág. 35. Pero el desarrollo real de la gráfica se diferencia mucho del propuesto en la fig. 5. Vemos que de hecho en vez de descender suavemente desde el valor de 1 (cuando $x = 0$) hacia el valor de $\frac{1}{4}$ (cuando $x = 1$) y más adelante, la curva asciende hacia el infinito. Podemos ver aquí también el punto

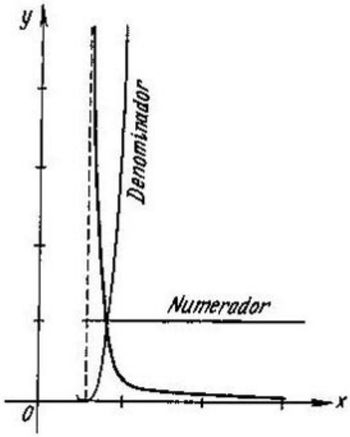


FIG. 31.

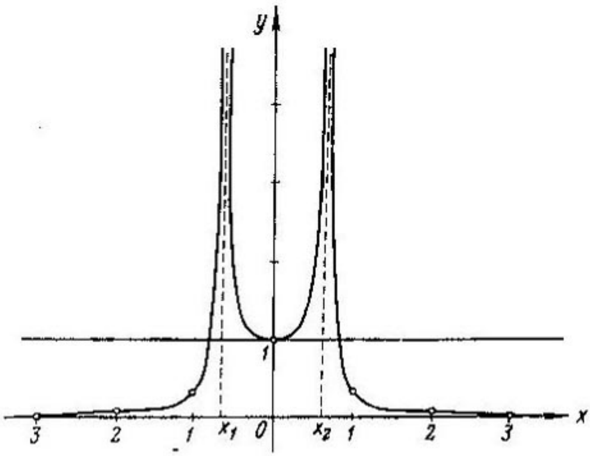


FIG. 32.

cuyas coordenadas son: $x = \frac{1}{2}$, $y = 16$ que de ningún modo cabía en la gráfica antigua incorrecta, pero cabe muy bien en la nueva, correcta.

* *
*

Resumamos en conclusión las reglas generales a las que es conveniente atenerse en la construcción de las gráficas «según las operaciones»:

a) Todas las operaciones comprendidas en la fórmula dada, deben realizarse en las gráficas partiendo de las más simples a las más complicadas.

b) Al multiplicar las gráficas es preciso dedicar la atención a los puntos donde los factores se reducen a cero (por lo menos uno de ellos); entre estos puntos hay que recordar la regla de los signos.

c) Cuando las gráficas se dividen, es necesario prestar atención a los puntos donde el denominador se reduce a cero. Si el numerador en estos puntos no es igual a cero, las ramas de la curva se alejarán al infinito: hacia arriba o hacia abajo, en función de los signos que tiene el numerador y el denominador.

d) Prestar atención a la conducta de la curva, cuando hay x que se aleja indefinidamente a la derecha (hacia $+\infty$) o a la izquierda (hacia $-\infty$).

Aquí hemos expuesto sólo las operaciones más simples que pueden realizarse con las gráficas. Hablando más exactamente, partimos de la ecuación más simple $y = x$ y hemos aplicado luego cuatro operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación y división. A estas operaciones se puede añadir sin dificultad una operación algebraica que es la radicación.

También unas operaciones más complicadas como son las trigonométricas y logarítmicas, se pueden realizar en las gráficas. Es preciso solamente conocer las gráficas que corresponden a las ecuaciones más simples $y = \operatorname{sen} x$ (fig. 33) e $y = \log x$ (fig. 34). Empleando los procedimientos descritos antes, es posible construir las gráficas según cualesquier ecuaciones, que contengan los signos de sen y log, así como las operaciones aritméticas y algebraicas.

Es muy útil aprender a construir las gráficas más diversas. Pero con ayuda de los procedimientos indicados arriba no podremos responder a muchas preguntas naturales que surgen en el proceso de examinar una u otra gráfica. Por ejemplo, en alguna gráfica podemos ver que una curva que antes había ascendido hasta un valor y_0, empieza luego a descender: ésta, según se dice, alcanza en el punto x_0 el valor máximo de y_0. ¿Cuál es el valor preciso de x_0?, posiblemente no podremos decirlo, puesto que nuestro arsenal de medios es limitado. Luego nos puede interesar bajo qué ángulo la curva interseca el eje x o el eje y; a qué lado está dirigida su convexidad, etc. Tampoco a estas preguntas pueden dar respuesta precisa nuestros métodos. Aquí se requiere un dominio más profundo de la técnica matemática. Los métodos que se usan para investigar las propiedades indicadas de las gráficas, se encuentran en la parte de las matemáticas, que se llama «cálculo diferencial».

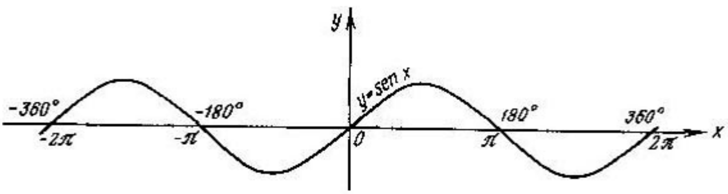


FIG. 33.

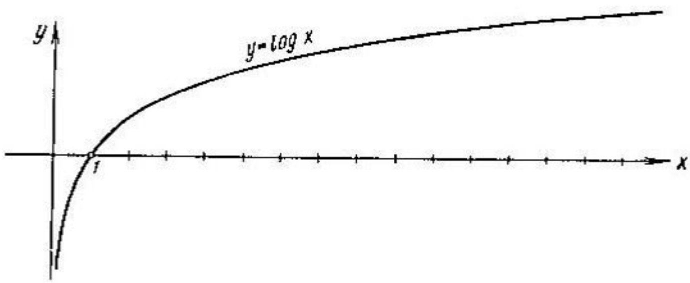


FIG. 34.

* *
*

En conclusión proponemos varios problemas para construir gráficas. Tracen las gráficas según las ecuaciones siguientes:

1. $y = x^2 + x + 1$.
2. $y = x(x^2 - 1)$.
3. $y = x^2(x - 1)$.
4. $y = x(x - 1)^2$.
5. $y = \dfrac{x}{x - 1}$.

Indicación. Separar la parte entera: $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$.

6. $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Indicación. Separar la parte entera.

7. $y = \frac{x^3}{x-1}$.

Indicación. Separar la parte entera.

8. $y = \pm\sqrt{x}$.

Indicación. La raíz cuadrada de los números negativos en una región material no existe.

9. $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

¿Cómo demostrar que la curva obtenida es una circunferencia?

Indicación. Recordar la definición de la circunferencia y el teorema de Pitágoras.

10. $y = \pm\sqrt{1+x^2}$.

Demostrar que la rama superior de la curva, para $x \to \infty$ se aproxima indefinidamente hacia la bisectriz en el ángulo del cuadrante.

Indicación. $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

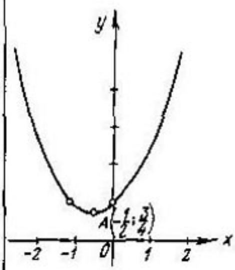
11. $y = \pm x\sqrt{x(1-x)}$. 13. $y = \frac{1-x^2}{2 \pm \sqrt{1-x^2}}$.

12. $y = \pm x^2\sqrt{1-x}$. 14. $y = x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

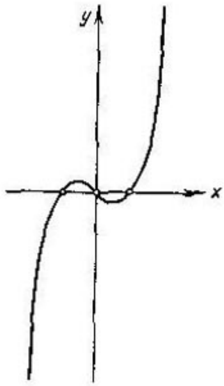
BIBLIOGRAFÍA

Enciclopedia de las matemáticas elementales, libro 3, Editorial Gostejizdat, 1952, artículo de V. L. Goncharov «Funciones elementales», cap. 1 y 2, ed. en ruso.

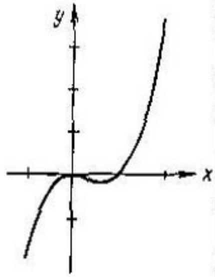
SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS



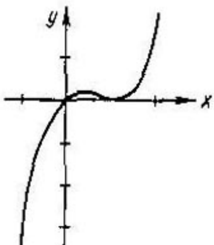
Para el problema 1.



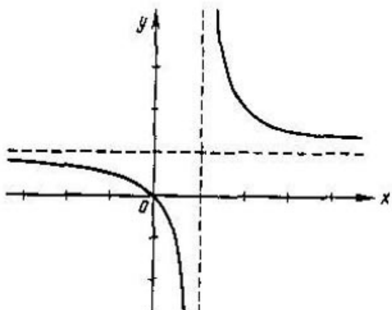
Para el problema 2.



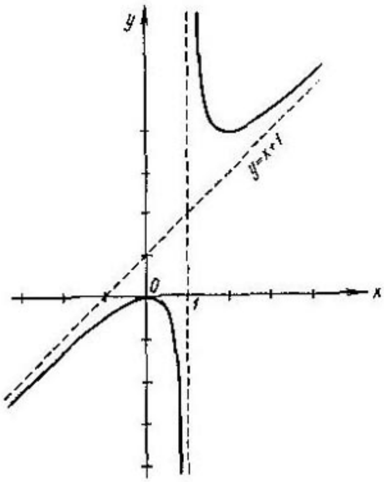
Para el problema 3.



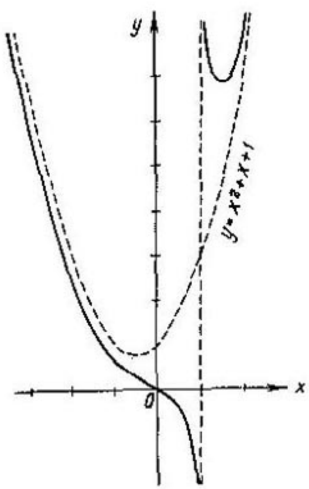
Para el problema 4.



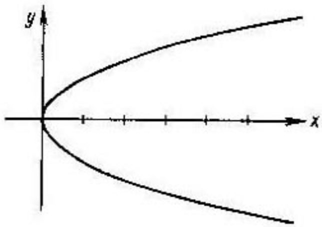
Para el problema 5.



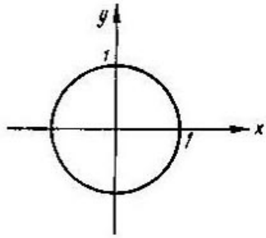
Para el problema 6.



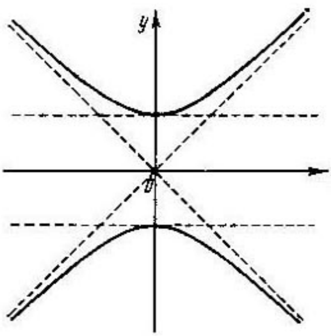
Para el problema 7.



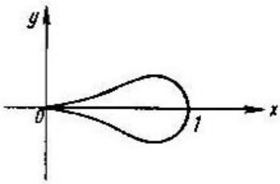
Para el problema 8.



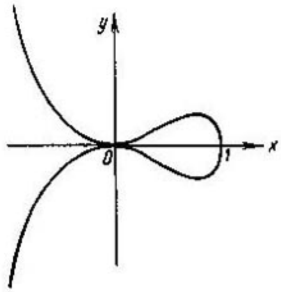
Para el problema 9.



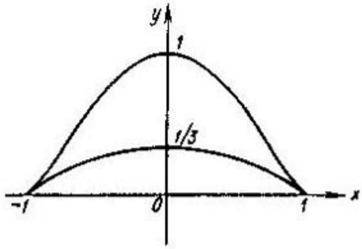
Para el problema 10.



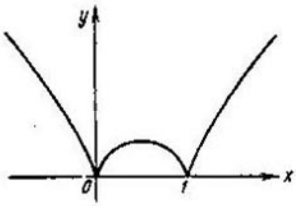
Para el problema 11.



Para el problema 12.



Para el problema 13.



Para el problema 14.

ANOTACIÓN

Este folleto está escrito a base de una lección, dada por el autor en un círculo matemático escolar adjunto a la Universidad Estatal de Moscú.

En éste se exponen los procedimientos más simples para construir gráficas de las funciones, empleando en calidad de ejemplos las dependencias directa e inversa proporcional y los polinomios de segundo grado.

También se muestra cómo, usando estas gráficas, construir las gráficas de las funciones más complicadas.

Este folleto se destina para los alumnos de grados superiores.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

V.A. Uspenski
Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas

Yu.I. Lyúbich, L.A. Shor
Método cinemático en problemas geométricos

N.Ya. Vilenkin
Método de aproximaciones sucesivas

V.G. Shervátov
Funciones hiperbólicas

A.S. Solodóvnikov
Sistemas de desigualdades lineales

Editorial MIR Moscú