Capítulo III

CURVAS DE SEGUNDO ORDEN

§ 37. Circunferencia

Se denomina *circunferencia* el conjunto de puntos del plano, equidistantes de un punto dado, llamado *centro*.

Si el punto C es el centro de la circunferencia, R es su radio y M es un punto arbitrario de la circunferencia, entonces según la definición de la circunferencia se tiene

$$|CM| = R. \tag{1}$$

La igualdad (1) es la ecuación de la circunferencia del radio R con el centro en el punto C.

Sea que en el plano está dado un sistema cartesiano rectangular de coordenadas (fig. 104) y el punto $C(a;\ b)$, que es el centro de la circunferencia del radio R. Sea que $M(x;\ y)$ es un punto arbitrario de esta circunferencia. Puesto que $|CM| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, la ecuación (1) puede escribirse así:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$$

o

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{2}$$

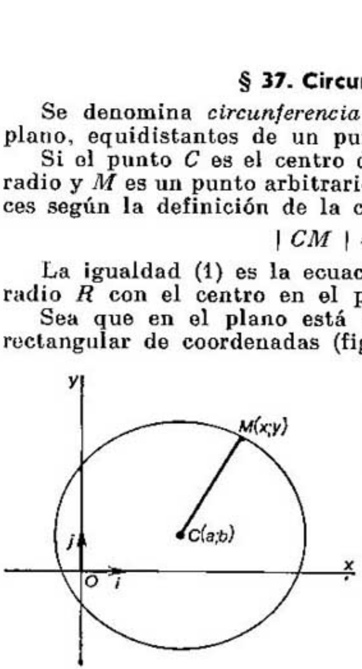


Fig. 104

La ecuación (2) se denomina *ecuación general de la circunferencia* o ecuación de la circunferencia del radio R con el centro en el punto $(a;\ b)$. Por ejemplo, la ecuación

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

es la ecuación de la circunferencia del radio $R = 5$ con el centro en el punto $(1; -3)$.

Si el centro de una circunferencia coincide con el origen de coordenadas, la ecuación (2) toma la forma

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{3}$$

La ecuación (3) se denomina *ecuación canónica de la circunferencia.*

Problema 1. Escríbase la ecuación de la circunferencia de radio $R = 7$ con el centro en el origen de coordenadas.

△ Sustituyendo directamente el valor del radio en la ecuación (3) obtendremos $x^2 + y^2 = 49$. ▲

Problema 2. Escríbase la ecuación de la circunferencia de radio $R = 9$ con el centro en el punto $C\ (3; -6)$.

△ Sustituyendo el valor de las coordenadas del punto C y el valor del radio en la fórmula (2), obtendremos $(x - 3)^2 + (y - (-6))^2 = 81$ ó $(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 81$. ▲

Problema 3. Hállese el centro y el radio de la circunferencia

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 100.$$

△ Comparando la ecuación dada con la ecuación general de la circunferencia (2), vemos que $a = -3$, $b = 5$, $R = 10$. Por consiguiente, $C\ (-3; 5)$, $R = 10$. ▲

Problema 4. Demuéstrese que la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ es una ecuación de la circunferencia. Hállese su centro y radio.

△ Transformamos el primer miembro de la ecuación dada:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 4 = 0$$

ó

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Esta ecuación representa una ecuación de la circunferencia con el centro en el punto $(-2; 1)$; el radio de la circunferencia es igual a 3. ▲

Problema 5. Escríbase la ecuación de la circunferencia con el centro en el punto $C\ (-1; -1)$ que es tangente a la recta AB, si $A\ (2; -1)$; $B\ (-1; 3)$.

△ Escribamos la ecuación de la recta AB:

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y+1}{3+1} \quad ó \quad 4x + 3y - 5 = 0.$$

Puesto que la circunferencia es tangente a la recta dada, el radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a esta recta. Para determinar el radio es necesario hallar la distancia del punto $C\,(-1;\ -1)$, que es el centro de la circunferencia, a la recta $4x + 3y - 5 = 0$:

$$R = \frac{|4\cdot(-1)+3\cdot(-1)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{12}{5}.$$

Escribamos la ecuación de la circunferencia buscada

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{144}{25}. \quad \blacktriangle$$

Sea que en un sistema rectangular de coordenadas se da la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$. Examinemos su punto

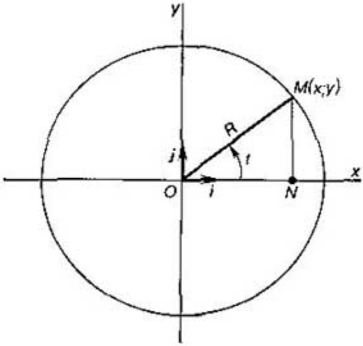


Fig. 105

arbitrario $M\,(x;\ y)$ (fig. 105). Sea que el radio vector $\overrightarrow{OM}$ del punto M forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo igual a t, entonces, la abscisa y la ordenada del punto M varían en función de t $(0 \leqslant t < 2\pi)$. Expresando x e y mediante t hallamos

$$x = R\cos t;\quad y = R\,\mathrm{sen}\,t;\quad 0 \leqslant t < 2\pi. \qquad (4)$$

Las ecuaciones (4) se denominan *ecuaciones paramétricas de la circunferencia con el centro en el origen de coordenadas.*

Problema 6. La circunferencia está dada por las ecuaciones $x = \sqrt{3} \cos t$, $y = \sqrt{3} \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t < 2\pi$. Escríbase la ecuación canónica de esta circunferencia.

△ De la condición se deduce que $x^2 = 3 \cos^2 t$, $y^2 = 3 \operatorname{sen}^2 t$. Sumando estas igualdades, obtenemos

$$x^2 + y^2 = 3 (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)$$

ó

$$x^2 + y^2 = 3. \quad ▲$$

§ 38. Elipse

Se denomina *elipse* el conjunto de puntos de un plano para cada uno de los cuales la suma de las distancias a dos puntos dados del mismo plano es constante y mayor que la distancia entre estos puntos.

Los puntos dados se denominan *focos* de la elipse y la distancia entre ellos, *distancia focal*. Al hombre le toca

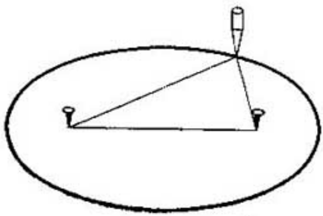


Fig. 106

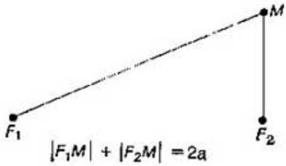


Fig. 107

tratar con la elipse en las más diversas esferas de su actividad. El jardinero traza un parterre limitado por una elipse. El pintor traza un contorno elíptico para pintar las paredes o el techo de una sala. El matemático calcula la trayectoria elíptica del movimiento del satélite de la Tierra. Por fin, la propia Tierra, como se sabe, se mueve por la elipse, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Mostremos cómo se puede trazar un parterre elíptico partiendo de la definición de la elipse. Clavemos en el terreno dos estacas (fig. 106), atemos luego los cabos de una cuerda fina formando un anillo y pongamos el anillo de cuerda sobre ambas estacas. Manteniendo tirante la cuerda por medio de la tercera estaca, tracemos con su ayuda una elipse. Variando la distancia entre las estacas y la longitud de la cuerda, se pueden obtener elipses de diferentes tamaños y formas.

Designemos los focos de la elipse por las letras F_1 y F_2. Sea que la distancia focal $|F_1F_2| = 2c$. Si M es un punto arbitrario de la elipse (fig. 107), según la definición de la elipse la suma $|F_1M| + |F_2M|$ es constante. Al designarla por $2a$, obtendremos

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a. \qquad (1)$$

Es de señalar, que según la definición de la elipse $2a > 2c$, es decir, $a > c$. La igualdad (1) es la ecuación de la elipse.

Si el punto F_1 coincide con el punto F_2, la ecuación de la elipse toma la forma

$$2|F_1M| = 2a, \quad \text{es decir,} \quad |F_1M| = a.$$

Esta ecuación es la ecuación de la circunferencia de radio a con el centro en el punto F_1 ($F_1 = F_2$). Así pues, toda circunferencia es un caso particular de la elipse.

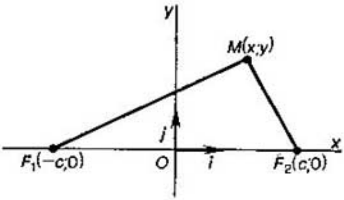


Fig. 108

Escojamos el sistema de coordenadas de manera que el eje de las abscisas pase por los focos de una elipse; el eje de ordenadas lo trazamos por el punto medio del segmento F_1F_2 perpendicularmente a él. Entonces, los focos serán los puntos $F_1(-c;\ 0)$ y $F_2(c;\ 0)$ (fig. 108).

Sea que $M(x;\ y)$ es un punto cualquiera de la elipse, entonces $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ y $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Sustituyendo los valores hallados $|F_1M|$ y $|F_2M|$ en la ecuación (1), obtenemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (2)$$

La ecuación (2) es la ecuación de la elipse en un sistema de coordenadas elegido. Esta ecuación puede reducirse a una forma más sencilla. Para ello traslademos primeramente el segundo sumando del primer miembro al segundo miembro de la ecuación:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (3)$$

Luego elevamos ambos miembros de la igualdad obtenida al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Después de las simplificaciones obtendremos

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x. \qquad (4)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (4) tendremos

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2$$

ó

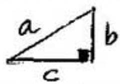
$$x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

de donde

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2. \qquad (5)$$

Según la definición de la elipse $a > c$, por lo tanto a^2-c^2 es un número positivo. Designémoslo por b^2, es decir, consideremos que $b^2=a^2-c^2$. Entonces, la ecuación (5) tomará la forma

$$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2.$$



Dividiendo ambos miembros de la última igualdad por b^2, obtendremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (6)$$

que se denomina *ecuación canónica de la elipse*. Si $a=b$, es decir, en el caso de $c=0$, la ecuación (6) toma la forma

$$x^2+y^2=a^2,$$

es decir, es la ecuación canónica de la circunferencia.

Observación. La ecuación obtenida (6) es un corolario de la ecuación (2). Por lo tanto, las coordenadas x y y de cada punto de la elipse, definida por la ecuación (2), satisfacen también la ecuación (6). Al deducir la ecuación (6) hemos elevado dos veces al cuadrado ambos miembros de la ecuación. Tal operación podría llevarnos a que la ecuación (6) sea satisfecha no sólo por las coordenadas x y y de los puntos de la elipse, sino también por las coordenadas de ciertos puntos que no pertenecen a la elipse (como es sabido, al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones extrañas). Mostremos que en el caso dado no sucedió así. Puesto que $\frac{y^2}{b^2} \geqslant 0$, de la ecuación (6) se deduce que $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$, es decir, $|x| \leqslant a$. Análogamente llegamos a la conclusión de que $|y| \leqslant b$. Así pues, todos los puntos $M(x;\ y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (6) se encuentran en el rectángulo $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Pero en el rectángulo $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ no hay puntos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (6) y no satisfacen la ecuación de la elipse (2), ya que, al elevar al cuadrado, en el conjunto de los puntos de este rectángulo no se altera la equivalencia, debido al carácter no negativo de los ambos miembros de las ecuaciones (3) y (4). Los primeros miembros de las ecuaciones (3) y (4) son en todo lugar no negativos. Mostremos, que siempre que $|x| \leqslant a$ y $|y| \leqslant b$ los segundos miembros de estas ecuaciones también son no negativos. En efecto,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \leqslant \sqrt{(-a-c)^2+b^2} =$$
$$= \sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2} = \sqrt{2a^2+2ac} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2a^2+2a^2} = 2a,$$
$$a-\frac{c}{a}x \geqslant a-\frac{c}{a}a = a-c > 0.$$

De este modo, las ecuaciones (2) y (6) son equivalentes.

Problema 1. Escribir la ecuación canónica de la elipse que pasa por el punto $M(5;\ 0)$, si su distancia focal es igual a 6.

▲ Puesto que $|F_1F_2| = 6$, $c = 3$. Escribamos la ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Según la condición el punto $M(5;\ 0)$ pertenece a la elipse, por consiguiente, $\frac{25}{a^2}=1$, de donde $a^2 = 25$. De la igualdad $a^2 - c^2 = b^2$ obtenemos $b^2 = 25 - 9 = 16$. De este modo, la ecuación buscada de la elipse es la siguiente

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \ \blacktriangle$$

Problema 2. Demuéstrese que la ecuación $36x^2 + 100y^2 - 3600 = 0$ es una ecuación de la elipse. Hállense las coordenadas de los focos y la distancia focal.

$\vartriangle$ Al dividir por 3600 ambos miembros de la ecuación, obtendremos

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Esta ecuación es la ecuación de la elipse.

De la igualdad $a^2 - c^2 = b^2$ se deduce que $c^2 = a^2 - b^2$. Puesto que $a^2 = 100$ y $b^2 = 36$, $c^2 = 64$, de donde $c = 8$. Los focos de la elipse se encontrarán en los puntos F_1 $(-8; 0)$ y F_2 $(8; 0)$. La distancia focal $|F_1F_2| = 16$. $\blacktriangle$

§ 39. Investigación de la elipse por medio de su ecuación canónica

Examinemos una elipse definida en un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas por medio de su ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Señalemos las siguientes propiedades de la elipse.

1) *La elipse* (1) *interseca cada uno de los ejes de coordenadas en dos puntos.*

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la elipse (1) con el eje Ox, es necesario resolver conjuntamente sus ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0.$$

El punto de intersección de la elipse con el eje Ox debe tener la ordenada $y = 0$ y pertenecer, al mismo tiempo, a la elipse. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de la elipse, obtendremos $x = \pm a$.

Así pues, los puntos de intersección de la elipse (1) con el eje Ox serán los puntos A $(a; 0)$ y C $(-a; 0)$. Análogamente, hallamos los puntos de intersección de la elipse con el eje Oy: $B(0;\ b)$ y $D(0;\ -b)$ (fig. 109). Los puntos A, B, C y D se denominan *vértices de la elipse.*

El segmento AC se denomina *eje mayor* de la elipse, el segmento BD, *eje menor*. Los focos F_1 y F_2 de la elipse se encuentran en el eje mayor. Es evidente, que la longitud

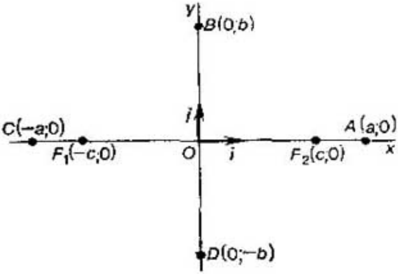


Fig. 109

del eje mayor es igual a $2a$ y del eje menor, $2b$. Los números a y b se denominan *semiejes de la elipse.*

2) *La elipse tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí.*

Las variables x y y entran en la ecuación (1) sólo con la potencia al cuadrado. Por consiguiente, si las coordenadas del punto $N(x;\ y)$ satisfacen la ecuación (1), las coordenadas de los puntos $N_1(-x;\ y)$ y $N_2(x;\ -y)$ también satisfarán esta ecuación. Es fácil ver que el punto N_1 es simétrico al punto N respecto al eje de ordenadas y el punto N_2 es simétrico al punto N respecto al eje de abscisas.

Así pues, la elipse tiene dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí. Los ejes mayor y menor de la elipse están situados en sus ejes de simetría. Es de señalar, que en el caso particular, cuando $a = b$, es decir, cuando la elipse es una circunferencia, el eje de simetría será una recta cualquiera que pase por el centro de la circunferencia.

3) *La elipse tiene un centro de simetría.*

Si las coordenadas del punto $N(x;\ y)$ satisfacen la ecuación (1), las coordenadas del punto $K(-x;\ -y)$ también satisfacen la misma ecuación. Es evidente, que el punto K es simétrico al punto N respecto al origen de coordenadas.

Así pues, la elipse tiene un centro de simetría. El centro de simetría de la elipse se denomina *centro de la elipse.*

4) *La elipse puede ser obtenida por medio de la compresión uniforme de una circunferencia.*

Examinemos la circunferencia de radio $R = a$ con el centro en el origen de coordenadas (fig. 110). Sea que $P(X;\ Y)$ es un punto arbitrario de esta circunferencia. Entonces

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1. \qquad (2)$$

Comparemos el punto $P(X;\ Y)$ situado en la circunferencia con el punto $P_1(x;\ y)$ tal que

$$x = X \quad \text{y} \quad y=\frac{b}{a}Y. \ *$$

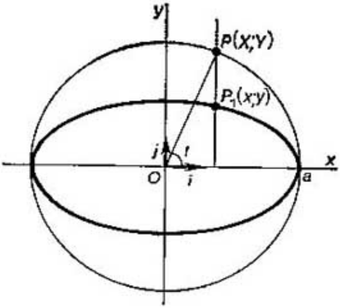


Fig. 110

El punto P_1 se obtiene por medio de un desplazamiento del punto P, con el cual la abscisa no varía y la ordenada disminuye en la razón $\frac{b}{a}$. Las coordenadas del punto P_1 satisfacen la ecuación de la elipse. En efecto,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{X^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{a}Y\right)^2}{b^2}=\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

Por consiguiente, el punto P_1 está situado en la elipse.

De este modo, la elipse (1) puede ser obtenida a partir de la circunferencia (2) por medio de la compresión uniforme hacia el eje OX, con la cual las ordenadas de los puntos disminuyen en la misma razón, igual a $\frac{b}{a}$.

De aquí resulta, que la forma de la elipse depende del valor de la razón $\frac{b}{a}$; cuanto menor sea esta razón, tanto más comprimida estará la elipse, y, viceversa, cuanto menor ~~mayor~~ sea esta razón, tanto menos comprimida y más redondeada estará la elipse. Siempre que los valores de la razón $\frac{b}{a}$ sean próximos a la unidad, la elipse se diferenciará poco de la circunferencia. Cuando la razón $\frac{b}{a}$ toma un valor máximo, es decir, cuando $\frac{b}{a}=1$, la elipse se transforma en circunferencia.

Como característica de la forma de la elipse es más cómodo utilizar no la razón $\frac{b}{a}$, sino la razón $\frac{c}{a}$. La relación entre la distancia semifocal c y el semieje mayor a se denomina *excentricidad* de la elipse. La excentricidad se designa con la letra ε.

De esta forma,

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Puesto que $0 \leqslant c < a$, la excentricidad de la elipse satisface las desigualdades

$$0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Expresemos la excentricidad de la elipse por medio de la razón $\frac{b}{a}$ de los semiejes de la elipse:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

de donde

$$\varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{3}$$

De la fórmula obtenida se deduce, que a los valores menores de la razón $\frac{b}{a}$ les corresponden los valores mayores de la excentricidad. Por lo tanto, cuanto mayor es la excentricidad, tanto más comprimida está la elipse. Para valores pequeños de excentricidad la elipse se diferencia poco de la circunferencia. Si $\varepsilon=0$, la elipse se transforma en una circunferencia. De este modo, la excentricidad de la circunferencia es igual a cero.

Problema 1. Construir las elipses

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Calcular la excentricidad para cada elipse.

△ Por las ecuaciones dadas hallamos los semiejes de las elipses: $a_1 = 5$, $b_1 = 4$ y $a_2 = 5$, $b_2 = 3$. Señalamos en el dibujo (fig. 111) los vértices de la primera elipse: los puntos A_1 (5; 0), B_1 (0; 4), C_1 (—5; 0), D_1 (0; —4). Dos vértices de la segunda elipse se encuentran en los puntos A_1 y C_1, los otros dos, en los puntos B_2 (0; 3) y D_2 (0; —3).

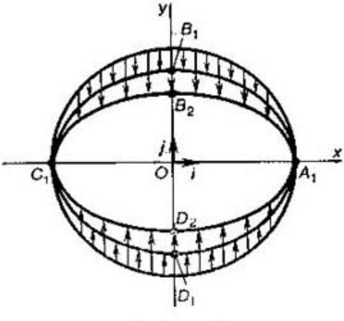


Fig. 111

Construyamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Los puntos de la primera elipse los obtendremos desplazando hacia el eje OX los puntos de esta circunferencia, con lo cual las ordenadas disminuyen en la razón $\frac{b_1}{a_1} = \frac{4}{5}$. Los puntos de la segunda elipse los obtendremos desplazando los puntos de la circunferencia, con lo cual las ordenadas disminuyen en la razón $\frac{b_2}{a_2} = \frac{3}{5}$. Señalemos, que es suficiente obtener los puntos de la elipse en uno de los cuadrantes del plano de coordenadas y, luego, utilizar la simetría de la elipse respecto a los ejes de coordenadas. En la figura 111 la primera elipse está expresada por medio de la curva $A_1B_1C_1D_1$, la segunda, por medio de la curva $A_1B_2C_1D_2$.

Hallamos las excentricidades de las elipses por la fórmula (3):

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

La excentricidad de la segunda elipse es mayor que la de la primera; esto quiere decir que la segunda elipse está más comprimida a su eje mayor.

Observación. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser construida, aplicando los mismos métodos que se estudian en el álgebra y los inicios del análisis. Para esto, es necesario resolver la ecuación de la elipse respecto a la variable y y construir los gráficos de las funciones $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ y $y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Naturalmente, es suficiente construir un gráfico de una de estas funciones y, luego, utilizar la simetría de la elipse respecto al eje Ox.

5) *La elipse* (1) *puede ser definida por las ecuaciones paramétricas*

$$x=a\cos t,\quad y=b\operatorname{sen} t,\quad 0\leqslant t<2\pi. \tag{4}$$

En el punto anterior fue demostrado que si el punto $P(X;\ Y)$ está situado en la circunferencia de radio $R=a$ con el centro en el origen de coordenadas, entonces el punto $P_1(x;\ y)$, donde $x=X$, $y=\frac{b}{a}Y$, está situado en la elipse (1) (véase la fig. 110). Las coordenadas de los puntos de la circunferencia de radio $R=a$ con el centro en el origen de coordenadas se expresan por medio de la magnitud t del ángulo entre el radio vector del punto P y el eje Ox de la manera siguiente:

$$X=a\cos t,\quad Y=a\operatorname{sen} t,\quad 0\leqslant t<2\pi.$$

Por consiguiente, las coordenadas x y y de los puntos de la elipse se expresan por medio del mismo parámetro t por las ecuaciones (4). Realmente,

$$x=X=a\cos t,$$
$$y=\frac{b}{a}Y=\frac{b}{a}a\operatorname{sen} t=b\operatorname{sen} t,\quad 0\leqslant t<2\pi.$$

Si $a=b$ obtenemos las ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

Problema 2. Se da la elipse $9x^2+16y^2=144$. Escríbanse sus ecuaciones paramétricas.

△ Reduzcamos la ecuación de la elipse a la forma canónica:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,$$

de donde $a^2=16$, $b^2=9$, y, por consiguiente, $a=4$, $b=3$. Según las fórmulas (4) obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x=4\cos t,\quad y=3\operatorname{sen} t. \ \blacktriangle$$

Problema 3. Se dan las ecuaciones paramétricas de la elipse

$$x = 5\cos t, \quad y = 3\operatorname{sen} t.$$

Escríbase su ecuación canónica.

△ En el caso dado obtenemos $a = 5$, $b = 3$. Por consiguiente, la ecuación canónica de la elipse será la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \quad \blacktriangle$$

§ 40. Hipérbola

Se denomina *hipérbola* el conjunto de los puntos de un plano para cada uno de los cuales el módulo de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos del plano es una cantidad constante y menor que la distancia entre estos puntos.

Los puntos fijos se denominan *focos* de la hipérbola y la distancia entre ellos, *distancia focal*.

Designemos los focos de la hipérbola con las letras F_1 y F_2. Sea que la distancia focal $|F_1F_2| = 2c$.

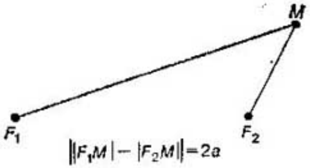


Fig. 112

Si M es un punto arbitrario de la hipérbola (fig. 112), entonces según la definición de la hipérbola el módulo de la diferencia $||F_1M| - |F_2M||$ es constante. Designándolo con $2a$, obtendremos

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a \qquad (1)$$

Señalemos, que según la definición de la hipérbola $2a < 2c$, es decir, $a < c$.

La igualdad (1) es la ecuación de la hipérbola.

Escojamos un sistema de coordenadas de manera, que el eje de las abscisas pase por los focos de la hipérbola; el eje de ordenadas lo trazamos por el punto medio del segmento F_1F_2 perpendicularmente a éste (fig. 113). Entonces serán focos de la hipérbola los puntos $F_1(-c; 0)$ y $F_2(c; 0)$.

Sea que $M(x; y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola, entonces $|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ y $|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Sustituyendo los valores $|F_1M|$ y $|F_2M|$ en la ecuación (1) obtenemos

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a. \tag{2}$$

La ecuación obtenida representa la ecuación de la hipérbola en el sistema de coordenadas escogido. Esta ecuación puede ser reducida a una forma más sencilla.

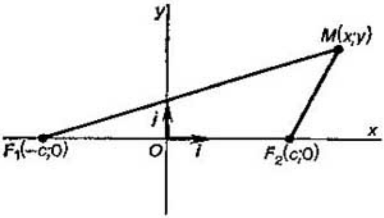


Fig. 113

Sea $x \geqslant 0$, entonces la ecuación (2) puede escribirse sin el signo del módulo de la manera siguiente:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \qquad (*)$$

ó

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{3}$$

Elevemos al cuadrado ambos miembros de la igualdad obtenida:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Después de realizar las simplificaciones y transformaciones correspondientes:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{c}{a}x - a. \tag{4}$$

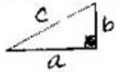
$$(x-c)^2+y^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2,$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2,$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2. \tag{5}$$

Según la definición de la hipérbola $a<c$, por lo tanto c^2-a^2 es un número positivo. Designémoslo con b^2, es decir, pongamos $b^2=c^2-a^2$. Entonces la ecuación (5) tomará la forma



$$\frac{b^2}{a^2}x^2-y^2=b^2.$$

Dividiendo por b^2 término a término, obtendremos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6}$$

Si $x<0$, la ecuación (2) se reescribe sin el signo del módulo del modo siguiente:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a, \quad (**)$$

y exactamente lo mismo que en el caso $x \geqslant 0$, se transforma a la forma (6).

La ecuación (6) se denomina *ecuación canónica de la hipérbola.*

Observación. La elevación al cuadrado de ambos miembros de la ecuación (3) y (4) no alteró la equivalencia de las ecuaciones. Es evidente, que para todos los valores x y y ambos miembros de la ecuación (3) son no negativos. El primer miembro de la ecuación (4) también es siempre no negativo. Si $x \geqslant a$, el segundo miembro de la ecuación (4) es positivo, ya que

$$\frac{c}{a}x-a>\frac{c}{a}a-a=c-a>0.$$

Así pues, los puntos extraños podrían aparecer solamente a condición de que $0 \leqslant x<a$, pero de la ecuación (6) se deduce que $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$, es decir, $|x| \geqslant a$.

Problema 1. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola que pasa por el punto $M\left(-5; \frac{9}{4}\right)$, si la distancia focal de la hipérbola es igual a 10.

Δ Puesto que $|F_1F_2| = 10$, $c = 5$. Escribamos la ecuación canónica de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Según la condición el punto $M\left(-5; \frac{9}{4}\right)$ pertenece a la hipérbola, por consiguiente,

$$\frac{25}{a^2} - \frac{81}{16b^2} = 1.$$

La segunda ecuación para determinar a^2 y b^2 ofrece la relación

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - a^2.$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{25}{a^2} - \dfrac{81}{16b^2} = 1, \\ b^2 = 25 - a^2. \end{cases}$$

hallaremos $a^2 = 16$, $b^2 = 9$. La ecuación buscada será la ecuación $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. ▲

Problema 2. Demuéstrese, que la ecuación $20x^2 - 29y^2 = 580$ es una ecuación de la hipérbola. Hállense las coordenadas de los focos.

Δ Dividiendo por 580 ambos miembros de la ecuación, obtendremos

$$\frac{x^2}{29} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Esta es una ecuación de la hipérbola para la cual $a^2 = 29$, $b^2 = 20$. De la relación $c^2 = a^2 + b^2$ hallamos $c^2 = 29 + 20 = 49$, $c = 7$. Por consiguiente, los focos de la hipérbola están situados en los puntos $F_1(-7; 0)$ y $F_2(7; 0)$. ▲

§ 41. Investigación de la hipérbola por medio de su ecuación canónica

Examinemos una hipérbola definida en un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas por medio de su ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Señalemos las siguientes propiedades de la hipérbola:

1) *La hipérbola* (1) *no tiene puntos comunes con el eje* Oy, *y corta el eje* Ox *en dos puntos.*

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la hipérbola (1) con el eje Oy es necesario resolver conjuntamente sus ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad x=0.$$

Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación de la hipérbola, obtendremos $y^2 = -b^2$, lo que quiere decir que el sistema no tiene soluciones. Por consiguiente, la hipérbola no corta el eje de ordenadas.

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la hipérbola (1) con el eje Ox es necesario resolver conjuntamente sus ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=0.$$

El punto de intersección de la hipérbola con el eje Ox debe tener la ordenada $y = 0$ y pertenecer, al mismo tiempo, a la hipérbola. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de la hipérbola, obtendremos

$$x = \pm a.$$

Así pues, los puntos de intersección de la hipérbola (1) con el eje Ox serán los puntos A $(a; 0)$ y B $(-a; 0)$; éstos se denominan *vértices* de la hipérbola.

El segmento AB se denomina *eje real* de la hipérbola. La longitud del segmento AB es, evidentemente, igual a $2a$. El número a se denomina *semieje real* de la hipérbola, el número b, *semieje imaginario*.

2) *La hipérbola tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí.*

En la ecuación (1) las variables x y y figuran solamente a la segunda potencia. Por consiguiente, si las coordenadas del punto N $(x; y)$ satisfacen la ecuación (1), las coordenadas de los puntos N_1 $(-x; y)$ y N_2 $(x; -y)$ también satisfarán la misma ecuación.

Es fácil ver, que el punto N_1 es simétrico al punto N respecto al eje de ordenadas, y el punto N_2 es simétrico al punto N respecto al eje de abscisas.

De este modo, la hipérbola tiene dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí.

3) *La hipérbola tiene un centro de simetría.*

Si las coordenadas del punto N $(x;\ y)$ satisfacen la ecuación (1), la misma ecuación también la satisfacen las coordenadas del punto K $(-x;\ -y)$. Es evidente, que el punto K es simétrico al punto N respecto al origen de coordenadas. Así pues, la hipérbola tiene un centro de simetría. El centro de simetría de la hipérbola se denomina *centro de la hipérbola.*

4) *La hipérbola* (1) *se interseca con la recta $y = kx$ en dos puntos si $|k| < \frac{b}{a}$. Si $|k| \geqslant \frac{b}{a}$, la hipérbola y la recta no tienen puntos comunes.*

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de la hipérbola (1) y la recta $y = kx$, es necesario resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx. \end{cases} \tag{2}$$

Sustituyendo y, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1,$$

de donde

$$(b^2 - k^2a^2)\, x^2 = a^2b^2.$$

Si $b^2 - k^2a^2 \leqslant 0$, o sea, si $|k| \geqslant \frac{b}{a}$, la ecuación obtenida y, por lo tanto, el sistema (2) no tiene soluciones. Por consiguiente, las rectas que pasan por el origen de coordenadas con un coeficiente angular, cuyo módulo es mayor o igual a $\frac{b}{a}$, no intersecan la hipérbola (1). Las rectas con las ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ se denominan *asíntotas de la hipérbola* (1).

Si $b^2 - k^2a^2 > 0$, es decir, si $|k| < \frac{b}{a}$, el sistema (2) tiene dos soluciones:

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \quad y = \pm \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}. \tag{3}$$

Por consiguiente, cada recta que atraviesa el origen de coordenadas con un coeficiente angular, cuyo módulo es menos de $\frac{b}{a}$, interseca la hipérbola (1) en dos puntos (fig. 114). Si $k = 0$, de la fórmula (3) obtenemos $x = \pm a$, $y = 0$, es decir, la recta $y = 0$ corta la hipérbola en sus vértices.

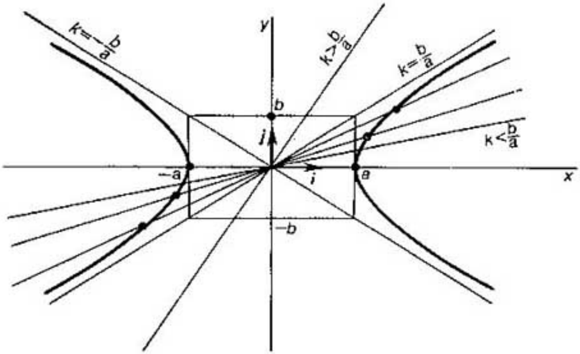


Fig. 114

Puesto que la hipérbola es simétrica respecto a los ejes de coordenadas, es suficiente estudiar su forma en el primer cuadrante del plano de coordenadas. De las fórmulas

$$x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \quad y = \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2a^2}}, \quad k > 0$$

resulta, que al crecer k de cero hasta $\frac{b}{a}$ (en este caso, la recta $y = kx$ gira en sentido antihorario), tanto las abscisas como las ordenadas de los puntos de intersección de la recta con la hipérbola crecen. La recta $y = kx$ corta la hipérbola en los puntos cada vez más alejados del origen de coordenadas. Así pues, la hipérbola (1) tiene la forma ilustrada en la figura 114. Consta de dos partes no ligadas entre sí que se denominan sus *ramas*.

Observación 1. La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede ser construida también, utilizando los métodos que se estudian en el álgebra y en los inicios del análisis. Con este propósito, hace falta resolver la ecuación de la hipérbola respecto a la variable y y construir los gráficos de las funciones

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \text{ y } y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Es suficiente construir el gráfico de una de estas funciones y luego utilizar la simetría de la hipérbola respecto al eje Ox.

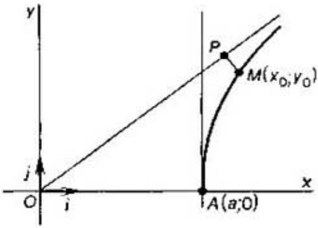


Fig. 115

Observación 2*. Se puede precisar la posición de los puntos de la hipérbola (1) respecto a sus asíntotas $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Hallemos la distancia de un punto de la hipérbola, situado en el primer cuadrante del plano de coordenadas, a la recta $y = \frac{b}{a}x$. Escribamos su ecuación en la forma $bx - ay = 0$. El problema de determinación de la distancia de un punto a una recta se estudió en el 36.

Sea que $M(x_0; y_0)$ es un punto de la hipérbola ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$). Es evidente, que el factor normalizante de la recta $bx - ay = 0$ es igual a

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{c},$$

y la ecuación normalizada tiene la forma

$$\frac{bx - ay}{c} = 0.$$

Por consiguiente, para la distancia buscada MP (fig. 115) obtenemos la expresión

$$|MP| = \frac{|bx_0 - ay_0|}{c} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{c(bx_0 + ay_0)}.$$

Como $M(x_0; y_0)$ es un punto de la hipérbola (1), $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. Por lo tanto

$$|MP| = \frac{a^2b^2}{c(bx_0 + ay_0)}.$$

De la fórmula obtenida se deduce, que si el punto $M(x_0; y_0)$ se mueve por la hipérbola, de manera que su abscisa x_0 crece ilimitadamente, entonces su distancia hasta la recta $y = \frac{b}{a}x$ decrece ilimitadamente. Debido a la simetría, se puede hacer una deducción análoga también para los otros cuadrantes del plano.

Tal como ya vimos (fig. 114), la rama derecha de la hipérbola está situada por encima de la asíntota $y = -\frac{b}{a}x$ y por debajo de la asíntota $y = \frac{b}{a}x$. Por lo tanto, la razón $\frac{b}{a}$ de los semiejes de la hipérbola determina su forma. Cuanto menor es esta razón, tanto más comprimida está la hipérbola hacia el eje Ox. Como en el caso de la elipse, para caracterizar la forma de la hipérbola es más cómodo utilizar no la razón $\frac{b}{a}$, sino la razón $\frac{c}{a}$.

La razón de la distancia semifocal c respecto al semieje real a se denomina *excentricidad* de la hipérbola. La excentricidad se designa con la letra ε. De este modo,

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

Puesto que para la hipérbola $c > a$, entonces la excentricidad de la hipérbola satisface la desigualdad $\varepsilon > 1$.

Expresemos la excentricidad de la hipérbola por medio de la razón $\frac{b}{a}$ de sus semiejes: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ es decir,

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{4}$$

La fórmula (4) muestra, que a menores valores de la razón $\frac{b}{a}$ les corresponden menores valores de la excentricidad. Por consiguiente, cuanto menor es la excentricidad de la hipérbola, tanto más fuerte está comprimida ella al eje de las abscisas.

Observación. La hipérbola se denomina *equilátera* (*isósceles*), si las longitudes de sus semiejes son iguales entre sí. Puesto que para la hipérbola equilátera $a = b$, su ecuación tiene la forma

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{5}$$

Son asíntotas de la hipérbola equilátera las rectas $y = x$ y $y = -x$. Así pues, las asíntotas de la hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí.

Calculemos la excentricidad de la hipérbola equilátera. Según la fórmula (4) hallamos

$$\varepsilon=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

La hipérbola equilátera se estudia en la escuela. Su ecuación no tiene la forma (5), ya que la hipérbola se analiza en otro sistema de coordenadas. Sobre esto se tratará en el § 43.

Problema 1. Hállense las asíntotas de las hipérbolas

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Constrúyanse las hipérbolas. Hállese la excentricidad para cada hipérbola.

△ Para la primera hipérbola se tiene $a_1 = 5$, $b_1 = 4$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{4}{5}x$ y $y = -\frac{4}{5}x$. Para la segunda hipérbola $a_2 = 5$, $b_2 = 2$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{2}{5}x$ y $y = -\frac{2}{5}x$. Antes de trazar la hipérbola, se deben construir sus asíntotas y marcar los vértices de la hipérbola. En la figura 116 están reproducidas ambas hipérbolas.

Hallemos las excentricidades de las hipérbolas según la fórmula (4):

$$\varepsilon_1=\sqrt{1+\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{41}}{5},$$
$$\varepsilon_2=\sqrt{1+\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{29}}{5}.$$

La excentricidad de la segunda hipérbola es menor, por consiguiente se aproxima más al eje Ox que la primera. ▲

Problema 2. Se dan los focos de la hipérbola $F_1(-10; 0)$ y $F_2(10; 0)$ y su asíntota $4x + 3y = 0$. Escribir la ecuación de la hipérbola.

△ Escribiendo la ecuación de la asíntota en la forma $y = -\frac{4}{3}x$, hallamos la razón de los semiejes de la hipérbola $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. De la condición del problema se deduce que $c = 10$

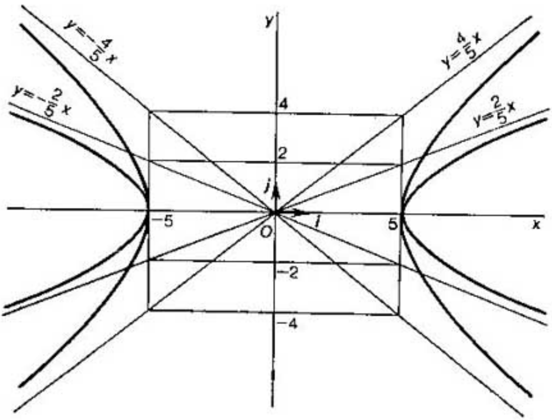


Fig. 116

Por lo tanto, $a^2 + b^2 = 100$. El problema se redujo a la resolución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Sustituyendo $b = \frac{4}{3}a$ en la segunda ecuación del sistema, obtenemos

$$a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100,$$

de aquí que $a^2 = 36$. Ahora hallemos $b^2 = (\frac{4}{3}a)^2 = \frac{16}{9} \cdot 36 = 64$. Por consiguiente, la hipérbola tiene la ecuación $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. ▲

Problema 3. Escríbase la ecuación de la hipérbola, cuyos vértices se encuentran en los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

y los focos, en los vértices de la misma elipse. Hágase el dibujo.

△ Designemos con a_h, b_h los semiejes de la hipérbola y con c_h, su distancia semifocal. Sea que a_e, b_e son los semiejes de la elipse, c_e, su distancia semifocal. Para formar

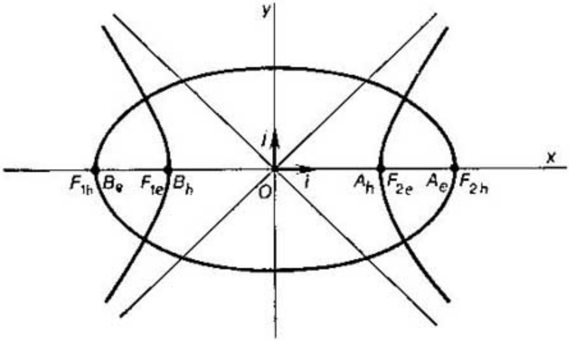


Fig. 117

la ecuación de la hipérbola, es necesario hallar a_h^2 y b_h^2. De la ecuación de la elipse tenemos $a_e^2 = 25$, $b_e^2 = 16$. De la relación $c_e^2 = a_e^2 - b_e^2$ hallamos $c_e^2 = 25 - 16 = 9$. Según la condición del problema $a_h = c_e$ y $c_h = a_e$, por consiguiente, $a_h^2 = c_e^2$ y $c_h^2 = a_e^2$. Por lo tanto, $a_h^2 = 9$ y $c_h^2 = 25$. Puesto que para la hipérbola $c_h^2 = a_h^2 + b_h^2$, entonces $b_h^2 = c_h^2 - a_h^2 = 25 - 9 = 16$. Por consiguiente la ecuación buscada de la hipérbola es como sigue:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

El dibujo se ofrece en la figura 117. ▲

§ 42. Parábola

Se denomina *parábola* el conjunto de los puntos de un plano, para cada uno de los cuales la distancia a un punto fijo es igual a la distancia a una recta fija, que no pasa por el punto fijo.

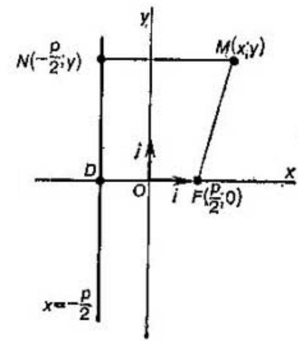


Fig. 118

El punto fijo se denomina *foco* de la parábola, la recta fija, *directriz*. La distancia del foco a la directriz se denomina *parámetro focal* de la parábola y se designa con p.

Escojamos un sistema de coordenadas de la manera siguiente. Tracemos por el foco F el eje Ox perpendicularmente a la directriz. Designemos con D (fig. 118) el punto de intersección del eje de abscisas con la directriz, por origen de coordenadas O tomemos el punto medio del segmento DF y por dirección positiva del eje Ox, la dirección del rayo OF.

En el sistema de coordenadas elegido el foco F tiene las coordenadas $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, y la directriz tiene la ecuación

$$x+\frac{p}{2}=0.$$

Sea que $M(x; y)$ es un punto cualquiera del conjunto buscado. Bajemos del punto M a la directriz una perpendicular y sea que N es la base de esta perpendicular. Entonces, $|MN|$ es la distancia del punto M a la directriz y, por consiguiente,

$$|MF|=|MN|.$$

Puesto que

$$|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

$$|MN|=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

entonces

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. \qquad (1)$$

La ecuación obtenida es una ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas elegido. Esta ecuación puede ser simplificada.

Como ambos miembros de la ecuación (1) son no negativos, la ecuación

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

es equivalente a la ecuación inicial (1). Luego de realizar transformaciones evidentes posteriores

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

obtendremos la ecuación (2)

$$y^2=2px.$$

Esta se denomina *ecuación canónica de la parábola.*

Señalemos las siguientes propiedades de la parábola:

1) *La parábola tiene un eje de simetría.*

La variable y entra en la ecuación (2) solamente a la segunda potencia. Por lo tanto, si las coordenadas del punto $N_1(x;\ y)$ satisfacen la ecuación de la parábola, las coordenadas del punto $N_2(x;\ -y)$ también la satisfarán. El punto N_1 es simétrico al punto N_2 respecto al eje Ox. Por consiguiente, el eje Ox es el eje de simetría de la parábola (2). El eje de simetría de la parábola se denomina *eje de la parábola.* El punto de intersección de la parábola con el eje se denomina *vértice de la parábola.* El vértice de la parábola (2) se encuentra en el origen de coordenadas.

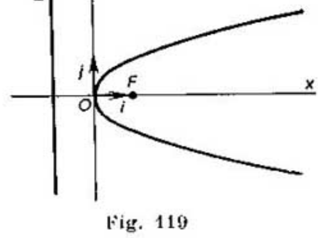


Fig. 119

2) *La parábola* (2) *está situada en el semiplano* $x \geqslant 0$.

Realmente, puesto que el parámetro focal p es positivo, a la ecuación (2) la pueden satisfacer sólo los puntos con abscisas no negativas, es decir, los puntos del semiplano $x \geqslant 0$.

3) *La parábola* (2) *es una agrupación de los gráficos de las funciones* $y=+\sqrt{2px}$ y $y=-\sqrt{2px}$ (fig. 119).

Para convencerse de esto es suficiente resolver la ecuación (2) respecto a la variable y.

Observación. La forma de la parábola es bien conocida del curso de secundaria básica, en el cual la parábola se estudia como un gráfico de la función

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \tag{3}$$

La diferencia entre las ecuaciones (2) y (3) de la parábola se debe a que en los distintos sistemas de coordenadas una misma curva se define por medio de distintas ecuaciones. En el párrafo que sigue esta cuestión se esclarece detalladamente.

Problema 1. Se da la parábola $y^2 = 3x$. Hállense los puntos de la parábola, cuya distancia hasta el foco es igual a 1.

△ Puesto que $2p = 3$, $\frac{p}{2} = \frac{3}{4}$ y el foco de la parábola se encuentra en el punto $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$.

Sea que $M(x; y)$ es el punto buscado. Entonces, de acuerdo con la condición

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+(y-0)^2}=1.$$

Por consiguiente, para hallar las coordenadas del punto M, hace falta resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=1, \\ y^2=3x. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=1, \quad x+\frac{3}{4}=1, \quad x=\frac{1}{4},$$

$$y^2=3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}, \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Así pues, existen dos puntos, cuya distancia al foco es igual a 1: $\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ▲

Problema 2. El rayo de luz $y = -2$ cae sobre un espejo, cuya sección axial es la parábola $y^2 = 24x$ (fig. 120). Hállese la ecuación de la recta a la cual pertenece el rayo reflejado.

△ Si el rayo incidente es paralelo al eje óptico principal del espejo parabólico, entonces el rayo reflejado pasa por su foco. En el caso dado el eje del espejo parabólico coincide con el eje Ox. La recta $y = -2$ es paralela al eje de abscisas y, por lo tanto, el rayo reflejado pasará por el foco de la parábola $y^2 = 24x$. Puesto que $2p = 24$, es decir, $\frac{p}{2} = 6$, el foco de la parábola es el punto $F\ (6;\ 0)$.

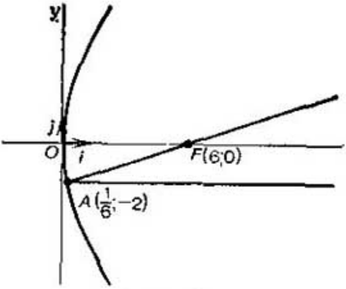


Fig. 120

Para hallar el punto de incidencia del rayo de luz, es necesario resolver el sistema de las ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 = 24x, \\ y = -2. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallaremos el punto de incidencia del rayo $A\ (\frac{1}{6};\ -2)$. El rayo reflejado pertenece a la recta que pasa por los puntos $(\frac{1}{6};\ -2)$ y $(6;\ 0)$. Escribamos la ecuación de esta recta:

$$\frac{y-0}{-2-0} = \frac{x-6}{\frac{1}{6}-6}.$$

De ella obtenemos $12x - 35y - 72 = 0$. ▲

La solución de este problema ilustra una propiedad óptica importante inherente al espejo parabólico: si una fuente de luz se sitúa en su foco, entonces todos sus rayos forman, al reflejarse de la superficie del espejo, un haz de rayos paralelos al eje de la parábola. Esta propiedad se utiliza para la fabricación de faros de automóvil, proyectores, antenas de radares, etc.

§ 43. Ecuación de la elipse, de la hipérbola y de la parábola en otros sistemas de coordenadas (no canónicos)

Apliquemos las fórmulas deducidas en el 13 de transformación de un sistema cartesiano rectangular de coordenadas en otro con vistas a estudiar las ecuaciones no canónicas de la hipérbola, parábola y elipse.

1) Examinemos la ecuación

$$xy = a, \ a > 0. \qquad (1)$$

Del curso escolar se sabe que la ecuación (1) se denomina ecuación de la hipérbola y tiene el gráfico representado en la figura 121.

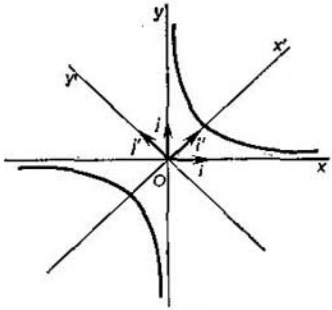


Fig. 121

Veamos cuál será la ecuación de esta hipérbola en otro sistema de coordenadas, o sea, en el sistema que se obtiene del inicial girando los vectores básicos en un ángulo de $\alpha = 45°$.

En el caso dado las coordenadas viejas x y y se expresan por medio de las nuevas x' y y' de la manera siguiente:

$$\begin{cases} x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45°, \\ y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45°, \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) las variables viejas por las nuevas, obtenemos

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = a$$

ó

$$x'^2 - y'^2 = 2a. \qquad (2)$$

Hemos obtenido la ecuación canónica de la hipérbola equilátera. Por consiguiente, la ecuación (1) define la hipérbola equilátera. Los ejes viejos de coordenadas son las asíntotas de la hipérbola, por lo tanto, la ecuación (1) se denomina ecuación de la hipérbola relativa a las asíntotas (ver fig. 121). Comparando las ecuaciones (1) y (2), vemos que el eje real de la hipérbola, definida por la ecuación (1), es igual a $\sqrt{2a}$.

El nuevo sistema de coordenadas O, i', j' se denomina *canónico*, ya que en él la ecuación de la hipérbola tiene una forma canónica.

La ecuación $xy = a$, $a < 0$ se reduce a la forma canónica análogamente. Para obtener los nuevos vectores básicos es necesario en este caso girar los viejos vectores básicos en un ángulo de $\alpha = -45°$.

Problema 1. Se da la ecuación canónica de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 18$. Escríbase su ecuación relativa a las asíntotas.

△ Giremos en un ángulo de $\alpha = -45°$. Entonces, las coordenadas viejas se expresan por medio de las nuevas según las fórmulas

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'). \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación dada los valores x y y, obtenemos

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(x' - y')^2 = 18$$

o después de las simplificaciones $x'y' = 9$. ▲

2) Examinemos la ecuación

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0. \tag{3}$$

Les es bien conocida esta ecuación y su gráfico: una parábola con un eje paralelo al eje de ordenadas. Escribiendo la ecuación (3) en la forma

$$y = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}, \tag{4}$$

hallamos las coordenadas del vértice de la parábola

$$x_0=-\frac{\beta}{2\alpha},\quad y_0=\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}.$$

Pasemos a un nuevo sistema de coordenadas, cuyas direcciones de los ejes coinciden con las direcciones de los ejes del sistema viejo, y el origen de coordenadas O' se encuentra en el vértice de la parábola. El punto O' tiene, por consiguiente, las coordenadas $\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha};\ \gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$. Considerando en las fórmulas de traslación

$$a=-\frac{\beta}{2\alpha},\quad b=\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha},$$

obtendremos

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}+x', \\ y=\gamma-\dfrac{\beta^2}{4\alpha}+y'. \end{cases}$$

Así se expresan en el caso dado las coordenadas viejas x y y por medio de las nuevas x' y y'. Sustituyendo en la ecuación (4) las coordenadas viejas por las nuevas, obtenemos la ecuación

$$y'=\alpha x'^2,\quad \alpha\neq 0.$$

Así pues, si la parábola tiene en cierto sistema de coordenadas la ecuación (3), entonces siempre se puede pasar a un sistema de coordenadas nuevo, en el cual la ecuación de la parábola tendrá una forma más sencilla: $y'=\alpha x'^2$, $\alpha\neq 0$. Aún más, siempre se puede escoger un sistema de coordenadas de manera que el coeficiente en la ecuación de la parábola sea positivo. En efecto, sea que $\alpha<0$, es decir, la parábola está situada tal, como está ilustrado en la figura 122. Entonces, en el sistema O', i'', j'', que se obtiene del sistema O', i', j', girando los ejes en un ángulo de $\alpha = 180^\circ$, la ecuación de la parábola tendrá la forma $y''=-\alpha x''^2$. Considerando que $\alpha_1=-\alpha$, obtenemos $y''=\alpha_1 x''^2$, donde $\alpha_1>0$.

3) Sea que en cierto sistema de coordenadas la parábola está definida por la ecuación

$$y=\alpha x^2,\quad \alpha>0. \tag{5}$$

Pasemos a un nuevo sistema de coordenadas que se obtiene del inicial girando los vectores básicos en un ángulo de

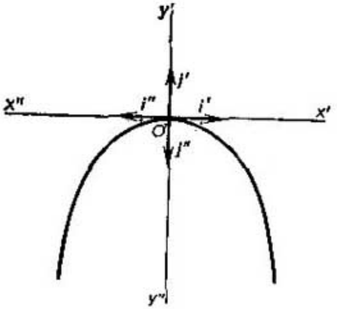


Fig. 122

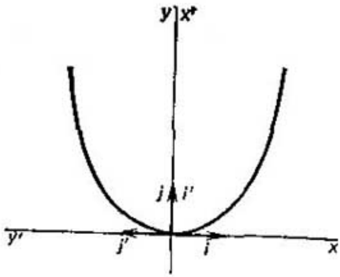


Fig. 123

$\alpha = 90°$ (fig. 123). Las fórmulas de giro toman, en este caso, la forma

$$\begin{cases} x = x' \cos 90° - y' \operatorname{sen} 90°, \\ y = x' \operatorname{sen} 90° + y' \cos 90° \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x = -y'; \\ y = x'. \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación (5) las coordenadas viejas por las nuevas, obtenemos

$$x' = \alpha y'^2 \quad \text{ó} \quad y'^2 = \frac{1}{\alpha} x'.$$

Designemos $\frac{1}{\alpha}$ con $2p$, entonces

$$y'^2 = 2px'.$$

Hemos obtenido la ecuación canónica de la parábola. Así pues, por medio de la ecuación (5) se define la parábola con el parámetro focal igual a $\frac{1}{2\alpha}$.

De los resultados obtenidos en el punto 2) se deduce, que el parámetro focal de la parábola definido por la ecuación $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ es igual a $\frac{1}{2|\alpha|}$.

Problema 2. Se da la ecuación de la parábola

$$y = 2x^2 + 6x + 7.$$

Hay que reducirla a la forma canónica. Hállese la distancia del foco de la parábola a su directriz.

△ Formemos un cuadrado perfecto en el segundo miembro de la ecuación dada

$$y = 2(x^2 + 3x) + 7 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}.$$

Las coordenadas del vértice de la parábola son $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$.

Pasemos a un nuevo sistema de coordenadas, que se obtiene de la inicial trasladando el origen de coordenadas al pun-

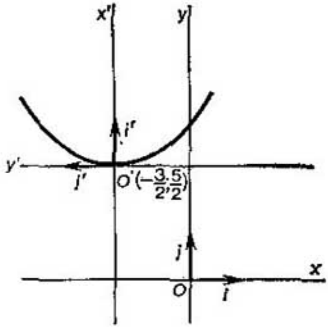


Fig. 124

to $O'\left(-\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right)$ y girando los vectores básicos en un ángulo de $\alpha = 90°$ (fig. 124). Según las fórmulas (3) del § 13, obtenemos

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + x' \cos 90° - y' \operatorname{sen} 90° = -\frac{3}{2} - y'. \\ y = \frac{5}{2} + x' \operatorname{sen} 90° + y' \cos 90° = \frac{5}{2} + x'. \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores de x y y en la ecuación de la parábola, obtendremos

$$\frac{5}{2} + x' = 2\left(-\frac{3}{2} - y' + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2},$$

es decir, $x' = 2y'^2$, ó $y'^2 = \frac{1}{2}x'$.

De la ecuación obtenida resulta que la distancia del foco de la parábola a la directriz (parámetro focal) es igual a $\frac{1}{4}$. ▲

4) Examinemos la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_2}{b_2}=1, \quad a<b. \tag{6}$$

Esta ecuación se parece a la ecuación canónica de la elipse, pero no es tal, ya que en la ecuación canónica de la elipse $a \geqslant b$.

Pasemos del sistema de coordenadas xOy al sistema $x'Oy'$, que se obtiene del sistema inicial girando los vectores básicos en un ángulo de $\alpha = 90°$. Las fórmulas de giro tienen, en este caso, la forma

$$\begin{cases} x = -y', \\ y = x'. \end{cases}$$

Por lo tanto, en el nuevo sistema la ecuación dada se escribirá así:

$$\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1, \quad a<b.$$

Hemos obtenido la ecuación canónica de la elipse. Por consiguiente, por medio de la ecuación (6) se define la elipse cuyo eje mayor está situado en el eje Oy, y el eje menor, en el eje Ox. Los focos de tal elipse están situados en los puntos F_1 $(0; c)$ y F_2 $(0; -c)$, donde $c=\sqrt{b^2-a^2}$ (fig. 125).

Problema 3. Demuéstrese que la curva definida por la ecuación

$$25x^2+16y^2-50x+64y-311=0,$$

es una elipse. Hállense sus semiejes y las coordenadas de los focos. Hacer el dibujo.

△ Transformemos la ecuación dada en la forma

$$25(x-1)^2+16(y+2)^2=400.$$

Pasemos del sistema de coordenadas xOy al sistema $x'O'y'$, conservando la dirección de los ejes y pongamos el origen de coordenadas en el punto O' $(1; -2)$. Entonces, las coordenadas viejas y nuevas estarán ligadas por medio de las fórmulas de traslación

$$\begin{cases} x = 1 + x', \\ y = -2 + y'. \end{cases}$$

Por lo tanto, en el nuevo sistema de coordenadas la curva tiene la ecuación

$$25x'^2 + 16y'^2 = 400$$

ó

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{25} = 1.$$

Así pues, la curva dada es una elipse cuyos semiejes son iguales a 5 y 4. La distancia semifocal es $c = \sqrt{25 - 16} = 3$. Los focos de la elipse tienen en el nuevo sistema las

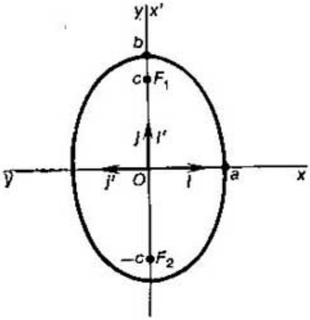


Fig. 125

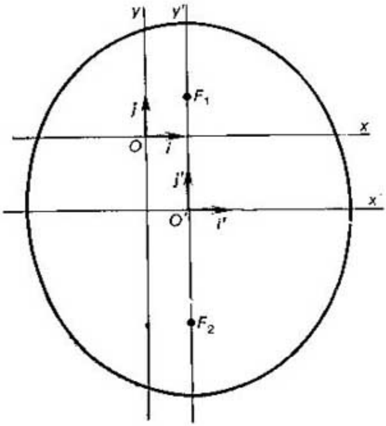


Fig. 126

coordenadas (0; 3) y (0; —3). Por las fórmulas de traslación hallamos sus coordenadas en el viejo sistema: son (1; 1) y (1; —5). El dibujo se da en la figura 126.

Problema 4. Escríbase la ecuación de la elipse, un eje de la cual pertenece al eje de ordenadas y es igual a 12, y el otro, al eje de las abscisas y es igual a 8.

△ Según la condición del problema $b = 6$, $a = 4$, por consiguiente,

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1. \ \blacktriangle$$

Problema 5. Escríbase la ecuación de la elipse, cuyo primer eje pertenece al eje de ordenadas y es igual a 20, y la distancia entre los focos es igual a 16. El centro de la elipse se encuentra en el punto (0; 0).

△ La ecuación buscada de la elipse puede ser escrita en la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Puesto que $2c = 16$ y $2b = 20$ entonces $c = 8$, $b = 10$, y, como los focos están situados en el eje Oy, $a^2 = b^2 - c^2 = 100 - 64 = 36$. Por consiguiente, la elipse tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1. \ \blacktriangle$$

Problema 6. Hállense las longitudes de los semiejes de la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ y calcúlense las coordenadas de sus focos.

△ Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Por consiguiente, $a^2 = 16$, $b^2 = 25$ y $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$. Como resultado tenemos $a = 4$, $b = 5$, $F_1\,(0;\ 3)$; $F_2\,(0;\ -3)$. ▲

§ 44. Ecuación general de segundo orden con dos variables

En el capítulo II hemos analizado la ecuación general de primer orden con dos variables, es decir, la ecuación que tiene la forma

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0. \tag{1}$$

Hemos establecido, que el conjunto de todos los puntos del plano, cuyas coordenadas x y y satisfacen la ecuación (1), es una recta.

La ecuación general de segundo orden con dos variables tiene la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \tag{2}$$

Surge la pregunta natural ¿qué representa el conjunto de los puntos del plano, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2)? Con otras palabras, ¿qué conjuntos de los puntos del plano pueden definirse por medio de esta ecuación?

Mostremos, que existen ocho distintos tipos de tales conjuntos.

□ 1) Considerando que en la ecuación (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad F = -1, \quad B = D = E = 0,$$

obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Así pues, la ecuación (2) puede ser la ecuación de la elipse.

2) Poniendo en la ecuación (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = -\frac{1}{b^2}, \quad F = -1, \quad B = D = E = 0,$$

obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por consiguiente, la ecuación (2) puede ser una ecuación de la hipérbola.

3) Si en la ecuación (2) ponemos

$$C = 1, \quad D = -2p, \quad A = B = E = F = 0,$$

obtendremos

$$y^2 = 2px.$$

La ecuación (2) puede ser una ecuación de la parábola.

4) Si en la ecuación (2) los coeficientes se eligen de la manera siguiente:

$$A = a^2, \quad C = -b^2, \quad B = D = E = F = 0,$$

la ecuación tomará la forma

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Puesto que $a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$, esta ecuación es una ecuación de dos rectas:

$$ax - by = 0 \text{ y } ax + by = 0.$$

De este modo, la ecuación (2) puede definir un par de rectas que se cortan.

5) Al tomar en la ecuación (2)

$$C = 1, \quad F = -a^2, \quad A = B = D = E = 0,$$

obtendremos

$$y^2 - a^2 = 0,$$

es decir, la ecuación de dos rectas $y = a$, $y = -a$.

Por consiguiente, la ecuación (2) puede ser la ecuación de dos rectas paralelas.

6) Considerando que en la ecuación (2)

$$C = 1, \quad A = B = D = E = F = 0,$$

obtendremos

$$y^2 = 0.$$

Tal ecuación se considera como una ecuación del par de rectas coincidentes, ya que de ella se deduce que $y \cdot y = 0$ y, igualando cada factor a cero, obtenemos $y = 0$ y $y = 0$. Así pues, por la ecuación (2) se puede definir un par de rectas coincidentes.

7) Si en la ecuación (2) tomamos

$$A = a^2, \quad C = b^2, \quad B = D = E = F = 0,$$

obtendremos

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0.$$

A esta ecuación la satisfacen las coordenadas sólo de un punto del plano, es decir, del punto (0; 0).

De aquí se deduce, que la ecuación (2) puede definir un punto.

8) Considerando que en la ecuación (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad F = 1, \quad B = D = E = 0,$$

obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Esta ecuación no se satisface por las coordenadas de ningún punto del plano. Así sucede en el caso cuando

$$C = 1, \quad F = a^2 \neq 0, \quad A = B = D = E = 0.$$

En el plano no hay puntos, cuyas coordenadas satisfagan la ecuación

$$y^2 + a^2 = 0.$$

Así pues, la ecuación (2) puede ser una ecuación del conjunto vacío. ■

Hemos mostrado que la ecuación (2) puede ser una ecuación de 1) la elipse, 2) la parábola, 3) la hipérbola, 4) del par de rectas que se cortan, 5) del par de rectas paralelas, 6) del par de rectas coincidentes, 7) del punto, 8) del conjunto vacío. Es notable que, además de los ocho tipos de conjuntos citados, no existen otros conjuntos, cuyas ecuaciones tengan la forma (2). Esto se deduce de la siguiente afirmación que aceptamos sin demostrar.

Sea que un conjunto de los puntos del plano se define en cierto sistema de coordenadas por medio de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Entonces, siempre es posible pasar (con ayuda de las fórmulas (3) del § 13) a un nuevo sistema de coordenadas, en el cual esta ecuación tendrá uno de los nuevo tipos siguientes:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$ 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$ 3) $y^2 = 2px;$

4) $a^2x^2 - b^2y^2 = 0;$ 5) $y^2 - a^2 = 0;$ 6) $y^2 = 0;$

7) $a^2x^2 + b^2y^2 = 0;$ 8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$ 9) $y^2 + a^2 = 0.$

Las ecuaciones del 1) al 9) se denominan canónicas.

Los conjuntos, definidos por las ecuaciones del 4) al 6), están constituidos por rectas. Las rectas se estudian en el capítulo II. Los conjuntos definidos por las ecuaciones del 7) al 9) (el punto y el conjunto vacío) no presentan interés. Estas curvas tienen gran importancia para la cosmonáutica y astronomía, la mecánica y arquitectura. Eran ya conocidas en la Grecia antigua. Los matemáticos griegos no conocían ni el método de coordenadas ni las ecuaciones, no obstante les eran bien conocidas todas las propiedades de la elipse, hipérbola y parábola. Obtenían y estudiaban estas curvas como secciones planas de una superficie cónica (véase el

§ 77, capítulo VI). Desde entonces la elipse, hipérbola y parábola se denominan *secciones cónicas*. La elipse, hipérbola y parábola tienen también otra denominación común. Las ecuaciones de estas curvas contienen obligatoriamente por lo menos un sumando de segundo orden x^2, y^2 o xy. Por lo tanto, la elipse, hipérbola y parábola se denominan *curvas de segundo orden*.

A lo largo de toda la historia del desarrollo de la ciencia y la técnica las curvas de segundo orden han provocado constantemente la atención de muchos investigadores y científicos. Esto se debe a que la elipse, la hipérbola y la parábola son muy frecuentes en los fenómenos de la naturaleza y de la actividad humana que nos rodean. Demos sólo algunos ejemplos. Una piedra o proyectil lanzados bajo un ángulo agudo respecto al horizonte, vuela por una curva próxima a la parábola (la forma de la curva se distorsiona un poco debido a la resistencia del aire). Para construir diversos proyectores y antenas se utilizan los llamados «espejos parabólicos». En la producción se emplean, en algunos mecanismos, «piñones elípticos». A menudo dos magnitudes están relacionadas entre sí por una dependencia inversamente proporcional (por ejemplo, la presión y el volumen del gas de acuerdo con la ley de Boyle—Mariotte). De gráfico de tal dependencia funcional sirve la hipérbola.

Las curvas de segundo orden adquirieron un significado científico especialmente grande después de los descubrimientos hechos por el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571—1630) y por el físico y matemático inglés Isaac Newton (1643—1727). Observando los desplazamientos visibles de los planetas en la esfera celeste, Kepler descubrió tres leyes, una de las cuales postula, que cada planeta se mueve por una elipse y el Sol se encuentra en uno de sus focos. Newton no sólo fundamentó teóricamente las leyes del movimiento de los planetas, sino que demostró, que todo cuerpo puede moverse bajo la acción de la atracción de otro cuerpo solamente bien por una elipse, bien por una parábola o bien por una hipérbola. En particular, por estas curvas se mueven todos los cometas del sistema solar.

Actualmente cuando en torno a la Tierra giran por las órbitas elípticas millares de satélites artificiales,cuando han sido enviadas a la Luna, Venus y Marte decenas de estaciones cósmicas, las curvas de segundo orden se utilizan aún más intensamente que antes.

Problemas para el capítulo III

3.1. Escríbase la ecuación de la circunferencia:
a) de radio $R = 4$ con el centro en el origen de coordenadas;
b) de radio $R = \frac{4}{3}$ con el centro en el origen de coordenadas;
c) de radio $R = 5$ con el centro en el punto $C(-4;\ 2)$;
d) de radio $R = \frac{7}{5}$ con el centro en el punto $C\left(-1;\ -\frac{3}{5}\right)$.

3.2. Hállense el centro y el radio de la circunferencia:
a) $x^2+y^2=36$; b) $x^2+y^2=7$;
c) $(x-5)^2+(y-3)^2=49$; d) $(x+7)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=64$;
e) $(x-2{,}5)^2+y^2=50$.

3.3. Demuéstrese que la ecuación dada es una ecuación de la circunferencia. Hállense su centro y radio:
a) $x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$;
b) $x^2 - 6x + 10y + y^2 + 9 = 0$.

3.4. Fórmese la ecuación de la circunferencia, cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, si la circunferencia es tangente a la recta $x = 3$.

3.5. Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo centro se encuentra en el punto $C(3;\ 7)$, si se sabe que es tangente al eje Ox.

3.6. Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo centro está situado en el punto de intersección de las rectas $2x + 3y - 13 = 0$, $x + y - 5 = 0$, si es tangente al eje de ordenadas.

3.7. Escríbase la ecuación de la circunferencia, que pasa por el punto $N(6;\ 2)$ con el centro en el punto $C(2;\ -1)$.

3.8. Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo centro se encuentra en el eje de abscisas, si la circunferencia es tangente a las rectas $x = 8$ y $y = 3$.

3.9. Escríbase la ecuación de la circunferencia, si se sabe que es tangente al eje de abscisas y a las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

3.10. Escríbase la ecuación de la circunferencia, que pasa por el punto $M(2;\ 1)$ y es tangente a los ejes de coordenadas.

3.11. Determínese, cómo está situado el punto $M(-2;\ 1)$ respecto a cada una de las circunferencias (dentro, fuera o en la circunferencia):
a) $x^2 + y^2 = 2$; b) $x^2 + y^2 - 5 = 0$; c) $x^2 + y^2 = 25$;
d) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 5$; e) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$;
f) $x^2 + y^2 = 0{,}01$.

3.12. Determínese cómo está situada la recta respecto a la circunferencia (la interseca, es tangente a ella o pasa fuera de ésta), si la recta y la circunferencia están definidas por las ecuaciones siguientes:
a) $2x - y - 3 = 0$ y $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;
b) $x - 2y - 1 = 0$ y $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$;
c) $x + 3y + 10 = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$.

3.13. Hállese la ecuación de la línea de los centros de dos circunferencias $(x - 2)^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + (y - 3)^2 = 9$.

3.14. Se dan los puntos M_1 (2; 3) y M_2 (10; 9). Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo diámetro es el segmento M_1M_2.

3.15. Una circunferencia es tangente al eje de ordenadas en el origen de coordenadas y pasa a través del punto M_1 (—4; 0). Escríbase la ecuación de la circunferencia y hállense los puntos de intersección con las bisectrices de los ángulos de coordenadas.

3.16. Escríbase la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos M_1 (0; 0), M_2 (3; 0) y M_3 (0; 4).

3.17. Escríbase la ecuación de la circunferencia, circunscrita alrededor de un triángulo, cuyos lados pertenecen a las rectas $x - 3y + 1 = 0$, $9x - 2y - 41 = 0$, $7x + 4y + 7 = 0$.

3.18. Determínense las coordenadas de los puntos de intersección de la recta $y - 7x - 12 = 0$ y la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

3.19. Escríbase la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ el cual es perpendicular a la recta $4x + 3y - 25 = 0$.

3.20. Calcúlese la distancia más corta del punto A (8; —6) a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

3.21. Escríbase la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos M (4; 1) y N (0; 5), si se sabe que su centro se encuentra en la recta $x + y + 3 = 0$.

3.22. Hállese la ecuación de la circunferencia que es simétrica a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ respecto a la recta $y = x - 3$.

3.23. La circunferencia está definida por las ecuaciones $x = \sqrt{2} \cos t$, $y = \sqrt{2} \operatorname{sen} t$ $0 \leqslant t < 2\pi$. Escríbase la ecuación canónica de esta circunferencia.

3.24. La circunferencia está definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$. Escríbase la ecuación paramétrica de esta circunferencia.

3.25. Las circunferencias están definidas por las ecuaciones $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$ y $(x - 1)^2 + y^2 = 25$. Hállense los puntos de intersección de las circunferencias dadas.

3.26. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si la distancia focal es igual a 8 y la elipse pasa a través del punto (0; —3).

3.27. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si su foco se encuentra en el punto (6; 0) y la elipse corta el eje de ordenadas en el punto (0; —3).

3.28. Demuéstrese que la ecuación $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$ es una ecuación de la elipse. Hállense las coordenadas de los focos y la distancia focal.

3.29. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si:

a) sus semiejes son iguales a 7 y 3;

b) sus semiejes son iguales a 3 y 4;

c) su semieje mayor es igual a 5 y la distancia focal es igual a 6;

d) su semieje menor es igual a 4 y la distancia focal es igual a 6.

3.30. Determínense para cada una de las siguientes elipses sus semiejes, las coordenadas de los vértices y focos:

a) $9x^2 + 16y^2 = 144$; b) $x^2 + 9y^2 = 4$;

c) $4x^2 + 9y^2 = 1$; d) $0{,}25x^2 + y^2 = 1$.

3.31. Se da la elipse $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$. Determínense las ordenadas de los puntos de la elipse, cuyas abscisas son iguales a —3.

3.32. Las ordenadas de los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ están disminuidas en 3 veces por el valor absoluto. Escríbase la ecuación de la nueva curva obtenida.

3.33. Se da la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Hállense su semieje mayor, su semieje menor, la distancia focal, las coordenadas de los focos y de las vértices y la excentricidad.

3.34. Se da la elipse $25x^2+49y^2=1225$. Determínense las longitudes de los ejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad.

3.35. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si su semieje mayor $a=5$ y la excentricidad $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

3.36. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, cuya distancia del foco a los extremos del eje mayor son iguales a 1 y 9.

3.37. La Tierra se mueve por una órbita elíptica, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Calcúlese la excentricidad de la órbita de la Tierra, si el punto de la órbita terrestre (perihelio) más próximo al Sol se encuentra a la distancia de 147 millones de km de éste y el punto de la órbita terrestre más alejado del Sol (afelio), a la distancia de 152 millonesde km de él.

3.38. El nueve de julio de 1980 fueron lanzados en la Unión Soviética, con un cohete portador, ocho satélites artificiales de la Tierra «Cosmos-1192-1199». Calcúlese la excentricidad de la órbita de estos satélites artificiales, si todos los ochos satélites se mueven por una órbita elíptica, en uno de cuyos focos se encuentra el centro de la Tierra. La distancia máxima de la superficie de la Tierra es de 1522 km; la distancia mínima de la superficie de la tierra es de 1451 km. El radio medio de la Tierra es igual aproximadamente a 6371 km.

3.39. Escríbase la ecuación canónica de la elipse, si la elipse pasa por el punto $M\ (2;\ -2)$, y su semieje mayor es igual a 4.

3.40. Hállese la excentricidad de la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

3.41. Hállese la ecuación canónica de la elipse, si los extremos de su eje mayor son tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=100$, y se sabe que $a=2b$.

3.42. Calcúlese el área del cuadrilátero, cuyos dos vértices se encuentran en los focos de la elipse $9x^2+25y^2-225=0$ y los otros dos vértices coinciden con los extremos de su eje menor.

3.43. El lado del rombo es igual a 10. A través de sus dos vértices opuestos pasa una elipse, cuyos focos coinciden con los otros dos vértices del rombo. Escríbase la ecuación de la elipse, tomando por ejes de coordenadas las diagonales del rombo, si las coordenadas del foco son $(8;\ 0)$.

3.44. Determínese la longitud de la cuerda de la elipse $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=$ $=1$ que divide por la mitad el ángulo entre los ejes.

3.45. Se da la elipse $15x^2+25y^2-375=0$. A través del foco está trazada una perpendicular a su eje mayor. Determínese la distancia desde los puntos de intersección de esta perpendicular con la elipse hasta el foco.

3.46. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la elipse $4x^2+$ $+9y^2-36=0$.

3.47. Se dan las ecuaciones paramétricas de la elipse

$$x=7\cos t,\quad y=4\operatorname{sen} t.$$

Escríbase su ecuación canónica.

3.48. Hállense las ecuaciones de las tangentes a la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, cuyo coeficiente angular es igual a $\frac{3}{5}$.

3.49. Hállese el punto de tangencia de la recta $5x - 2y - 30 = 0$ con la elipse $75x^2 + 24y^2 - 1800 = 0$.

3.50. Se dan la elipse $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Hállense los puntos de su intersección.

3.51. Escríbase la ecuación de la tangente a la elipse en el punto $(3; -3)$, si su ecuación es $36x^2 + 12y^2 - 432 = 0$.

3.52. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si la distancia focal es igual a 30 y la hipérbola pasa por el punto $(-9; 0)$.

3.53. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si su foco se encuentra en el punto $(-5\sqrt{2}; 0)$ y la hipérbola corta el eje de las abscisas en el punto $(6; 0)$.

3.54. Demuéstrese que la ecuación $11x^2 - 25y^2 - 275 = 0$ es una ecuación de la hipérbola. Hállense las coordenadas de los focos.

3.55. Determínense los semiejes de cada una de las hipérbolas siguientes:

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; b) $16x^2 - y^2 = 1$; c) $x^2 - 9y^2 = 9$;

d) $16x^2 - 9y^2 = 1$; f) $x^2 - y^2 = 4$; g) $9x^2 - 16y^2 = 144$.

3.56. Para la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ hállense:
a) los semiejes;
b) las coordenadas de los focos;
c) las coordenadas de los vértices;
d) las ecuaciones de las asíntotas.

3.57. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si:
a) su semieje real es igual a 4, y el imaginario, a 13;
b) la distancia focal es igual a 16, y el semieje imaginario, a 6;
c) la distancia focal es igual a 6 y $\varepsilon = 1,5$;
d) el semieje real es igual a 8 y $\varepsilon = \frac{5}{4}$;
e) la ecuación de la asíntota es $y = \frac{3}{2}x$, y el semieje real es igual a 2;
f) el semieje imaginario es igual a 3 y $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

3.58. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, si las distancias de uno de sus vértices a los focos son iguales a 9 y 1, respectivamente.

3.59. Se da la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$; escríbanse las ecuaciones de las rectas paralelas, que limitan una parte del plano, que no contiene ni un solo punto de la hipérbola.

3.60. Hállense las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Constrúyase la hipérbola y hállese su excentricidad.

3.61. Hállense las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$. Constrúyase la hipérbola y calcúlese su excentricidad.

3.62. Se da la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$. Hállense las coordenadas de sus focos y vértices, la excentricidad y la ecuación de las asíntotas. Hágase el dibujo.

3.63. Fórmese la ecuación canónica de la hipérbola, si su semieje real es igual a 5, y la excentricidad a 1,4.

3.64. Determínense bajo qué condición las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son perpendiculares entre sí.

3.65. Fórmese la ecuación de la hipérbola, si la ecuación de su asíntota es $y = \frac{1}{2}x$, y uno de los focos se encuentra en el punto $(-5; 0)$.

3.66. Escríbase la ecuación canónica de la hipérbola, conociendo, que sus asíntotas tienen la ecuación $y = \pm 2x$, y la distancia focal es igual a 10.

3.67. Se] da la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Hállense los puntos de intersección de la hipérbola con las rectas:

a) $x - y + 1 = 0$;
b) $9x - 4y - 36 = 0$;
c) $5x - 4y - 16 = 0$.

3.68. Fórmese la ecuación de la hipérbola, cuyos focos se encuentran en los vértices de la elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ y los vértices, en los focos de la elipse.

3.69. Los focos de la hipérbola coinciden con los focos de la elipse $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$. Escríbase la ecuación de la hipérbola, si su excentricidad es igual a 2.

3.70. Hállense las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, cuyo coeficiente angular es igual a 2.

3.71. La excentricidad de la trayectoria del movimiento del primer cohete espacial soviético, lanzado hacia la Luna el 2 de enero de 1959 es igual a 1,05. Determínese la forma de la trayectoria del cohete.

3.72. Escríbase la ecuación de la parábola, si las coordenadas del foco son $(4; 0)$ y la ecuación de la directriz es $x + 4 = 0$.

3.73. Escríbase la ecuación canónica de la parábola, que pasa a través del punto $(5; 3)$.

3.74. Se da la parábola $y^2 = 5x$. Hállense los puntos de la parábola, cuya distancia del foco es igual a 4.

3.75. Fórmese la ecuación canónica de la parábola, cuyo foco se encuentra en el punto de intersección de la recta $2x - 5y - 8 = 0$ con el eje de las abscisas. Constrúyase esta parábola.

3.76. Fórmese la ecuación canónica de la parábola que pasa por el punto N (9; 6), determínese el ángulo $\alpha = \widehat{(\vec{i}; \overrightarrow{FN})}$, donde F es un foco de la parábola.

3.77. Hállense los puntos de intersección de la parábola $y^2 = 4x$ y las rectas:

a) $x = y$; b) $x = -y$;
c) $x - 2y + 4 = 0$;
d) $3x - 2y + 1 = 0$.

Constrúyase el dibujo.

3.78. Escríbase la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 6x$ en el punto $(6; 6)$.

3.79. Escríbase la ecuación de la circunferencia, cuyo centro coincide con el foco de la parábola $y^2 = 8x$, si se sabe que la circunferencia es tangente a la directriz de la parábola. Determínense las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola y la circunferencia, y constrúyase el dibujo.

3.80. Redúzcase la ecuación de la elipse $\frac{(x+6)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ a la forma canónica.

3.81. Se da la hipérbola $xy = 2$. Redúzcase su ecuación a la forma canónica.

3.82. Redúzcase la ecuación de la parábola $3y = x^2 + 4x - 11$ a la forma canónica.

3.83. Determínense para cada una de las siguientes elipses sus semiejes, coordenadas de los vértices y coordenadas de los focos:

a) $12x^2 + 5y^2 - 60 = 0$;

b) $16x^2 + 9y^2 - 144 = 0$;

c) $4x^2 + y^2 = 9$.

3.84. Escríbase la ecuación de la elipse, situada simétricamente respecto a los ejes de coordenadas con los focos en el eje Oy, si:

a) sus semiejes son iguales a 3 y 4;

b) sus semiejes son iguales a 6 y 3;

c) su eje mayor es igual a 8 y su distancia focal, a 6;

d) su semieje menor es igual a 4 y la excentricidad $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

e) su semieje menor es igual a 6 y la distancia focal, a 8.

3.85. Escríbase la ecuación de la elipse, cuya suma de los semiejes es igual a 8 y la distancia entre los focos es igual a 8. Los focos se encuentran en el eje de ordenadas y están situados semétricamente respecto al punto $(0; 1)$.

3.86. Se da la elipse $16x^2 + 7y^2 - 112 = 0$. Determínense las coordenadas de los puntos de la elipse, cuya distancia al foco es igual a 2,5.

3.87. La circunferencia $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 4$ es tangente a la elipse y pasa por sus focos. Fórmese la ecuación de la elipse, si su eje mayor es paralelo al eje de las abscisas.

3.88. Fórmese la ecuación de la hipérbola, situada simétricamente respecto a los ejes de coordenadas, con los focos en el eje de ordenadas, si:

a) los semiejes son iguales a 3 y 6;

b) $c = 5$; $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

c) la ecuación de la asíntota es $y = \frac{12}{5}x$, y el eje real es igual a 24;

d) $\varepsilon = \frac{5}{3}$, y el semieje es igual a 4.

3.89. Para la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = -144$ hállense: a) los semiejes; b) las coordenadas de los vértices; c) las coordenadas de los focos; d) las ecuaciones de las asíntotas.

3.90. Escríbase la ecuación de la hipérbola, si la distancia entre sus vértices es igual a 24, y los focos tienen las coordenadas $(-10;\ 2)$ y $(16;\ 2)$.

3.91. Fórmese la ecuación de la hipérbola, si sus semiejes son iguales a 5 y 4, el centro tiene las coordenadas $(3;\ 2)$, y el eje real es paralelo al eje de las abscisas.

3.92. Escríbase la ecuación de la parábola con el vértice en el origen de coordenadas, si:

a) la parábola está situada en el semiplano superior simétricamente respecto al eje de ordenadas y el parámetro focal es igual a 4;

b) la parábola está situada en el semiplano inferior simétricamente respecto al eje de ordenadas y el parámetro focal es igual a 6;

c) la parábola está situada en el semiplano derecho simétricamente respecto al eje de las abscisas, y su parámetro focal es igual a 3;

d) la parábola está situada en el semiplano izquierdo simétricamente respecto al eje de las abscisas y su parámetro focal es igual a 5.

3.93. Escríbase la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y es simétrica respecto al eje de ordenadas, si las coordenadas del foco son $F\ (0;\ -3)$.

3.94. El foco de la parábola tiene las coordenadas $F\ (-6;\ 0)$, y la ecuación de la directriz es $x - 6 = 0$. Fórmese la ecuación de la parábola.

3.95. Hállese la ecuación de la parábola, conociendo, que su vértice se encuentra en el eje $A\ (-4;\ 5)$, y el foco, en el punto $B\ (-2;\ 5)$. Escríbase la ecuación de su eje y de la directriz.

3.96. Se dan el foco de la parábola $(-3;\ -4)$ y la ecuación de su directriz $x + 1 = 0$. Escríbase la ecuación de la parábola y hállense los puntos de intersección de la parábola con los ejes de coordenadas.

3.97. Determínense las coordenadas del punto que está situado en la parábola $x^2 = 8y$, si la distancia de este punto a la directriz es igual a 4.

3.98. Constrúyanse en un solo dibujo las siguientes parábolas: $x^2 = \frac{1}{2}y$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$.

3.99. El foco de una parábola está situado en el punto $F\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$, la directriz es paralela al eje de abscisas y corta en el eje de ordenadas un segmento cuya longitud es igual a $\frac{1}{4}$. Escríbase la ecuación de la parábola.

3.100. La parábola pasa por los puntos $A\ (0;\ 6)$ y $B\ (4;\ 0)$ simétricamente respecto al eje de abscisas. Escríbase la ecuación de la parábola y constrúyala.

3.101. Fórmese la ecuación de la parábola y escríbase la ecuación de su directriz, si la parábola pasa por los puntos de intersección de la recta $y = x$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 10y = 0$ y es simétrica respecto al eje de ordenadas. Constrúyanse la circunferencia, la recta y la parábola.

3.102. Escríbase la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 = 6y$ en el punto $\left(2;\ \frac{2}{3}\right)$.

3.103. La cuerda del puente colgante tiene la forma de una parábola (fig. 127). Se requiere formar su ecuación respecto a los ejes de coordenadas señalados en la figura, si la flecha de la cuerda $|OA| = 10$ y la longitud del puente $|BC| = 60$.

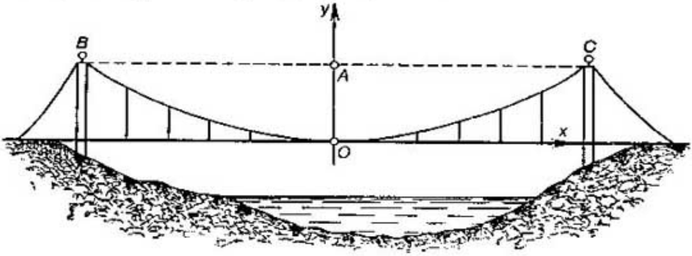


Fig. 127

3.104. Qué conjunto está definido en el plano por las siguientes ecuaciones de segundo orden:

a) $3x^2 + 4y = 12$; b) $3x^2 - 4y^2 = 12$;
c) $x^2 - 4y = 3$; d) $y^2 - 4x = 0$;
e) $25x^2 - 9y^2 = 0$; f) $5y^2 - 125 = 0$;
g) $36x^2 + 49y^2 = 0$; h) $x^2 + (y - 2)^2 = 7$;
i) $5x^2 - 10x + 3y^2 + 6y + 7 = 0$.

Capítulo IV

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO. POLIEDROS

§ 45. Axiomas principales de la estereometría

Las figuras tridimensionales (cuerpos) más sencillas son: el cubo, el prisma, la pirámide, la esfera, el cono, el cilindro, etc., y sus propiedades ya se estudian en el curso de geometría de la escuela secundaria. Es de señalar, que algunas propiedades de las figuras tridimensionales se utilizaron al estudiar los vectores en el capítulo I del presente manual.

En este capítulo se estudia, más detalladamente que antes, la parte de la geometría relativa a la posición de las rectas y planos en el espacio. La parte de la geometría que dedica al estudio de las figuras situadas en el espacio, se denomina *estereometría*.

Las nociones principales de la estereometría son *el punto*, *la recta* y *el plano*. El espacio está constituido por un conjunto infinito de puntos. Las rectas y los planos constan de un conjunto infinito de puntos del plano y no coinciden con todo el espacio.

Enunciemos *los axiomas principales de la estereometría*. Recordemos, que los axiomas son proposiciones adoptadas sin demostraciones. Los axiomas de la geometría son una abstracción de las respectivas propiedades del mundo real que nos rodea.

Supongamos, que para cualquier plano del espacio se cumplan todos los axiomas, definiciones y teoremas de la planimetría. Supongamos, además, que son válidos los siguientes axiomas de la estereometría:

1. *A través de dos puntos distintos cualesquiera se traza una sola recta.*

2. *Si dos puntos distintos de una recta pertenecen al plano, todos los puntos de la recta pertenecen a este plano.*

3. *A través de tres puntos cualesquiera, que no están situados en una misma recta, pasa uno y sólo un plano.*

4. *Si dos planos distintos se cortan, entonces se intersecan por la recta.*

Utilizando estos axiomas, demostremos las siguientes afirmaciones:

1. *A través de una recta y un punto que no le pertenece pasa un único plano.*

2. *A través de dos rectas que se intersecan pasa un único plano.*

□ 1. Tomemos en la recta dada l dos puntos cualesquiera A y B (fig. 128). Entonces, de acuerdo con el axioma 3 a través del punto dado M y los puntos A y B pasa

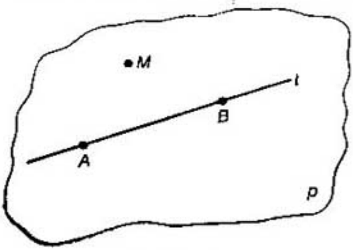


Fig. 128

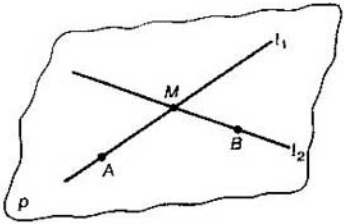


Fig. 129

un solo plano p y todos los puntos de la recta l pertenecen al plano p. Por consiguiente, el plano p pasa por la recta l y por el punto M que no le pertenece. No hay otro plano igual, ya que él debe pasar por tres puntos A, B, M, que no están situados en una misma recta y, por consiguiente, debe coincidir con el plano p. ■

2. Efectivamente, sea que las rectas l_1 y l_2 se intersecan en el punto M (fig. 129). Tomemos en las rectas l_1 y l_2 cualesquiera puntos A y B, diferentes del punto M. Entonces, a través de los tres puntos A, B, M pasa un único plano p. En virtud del axioma 2 el plano p pasa por las rectas dadas l_1 y l_2.

§ 46. Posición recíproca de las rectas en el espacio

Dos puntos distintos en el espacio pueden situarse o no situarse en un mismo plano. Examinemos los respectivos ejemplos.

Sea que los puntos A, B, C no se encuentran en una misma recta. Tracemos a través de ellos el plano p y escojamos cierto punto S, que no pertenece al plano p (fig. 130).

Entonces, las rectas AB y BC están situadas en un mismo plano, o sea, en el plano p, las rectas AS y CB no se encuentran en un mismo plano. Efectivamente, si ellas estuviesen situadas en un mismo plano, también los puntos A, B, C, S se encontrarían en este plano, lo que es imposible, ya que S no está situado en el plano, que pasa por los puntos A, B, C.

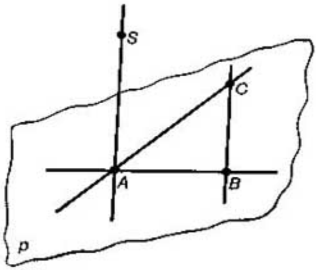


Fig. 130

Dos rectas distintas que están situadas en un mismo plano y no se intersecan, se denominan *paralelas*. Las rectas coincidentes también se denominan paralelas. Si las rectas l_1 y l_2 son paralelas, se escribe $l_1 \parallel l_2$.

De este modo, $l_1 \parallel l_2$, si, primero, existe un plano p tal que $l_1 \subset p$ y $l_2 \subset p$ y, segundo, bien $l_1 \cap l_2 = \varnothing$ o bien $l_1 = l_2$.

Dos rectas que no están situadas en un mismo plano se denominan *cruzadas*. Es evidente, que las rectas cruzadas no se intersecan y son paralelas.

Demostremos una propiedad muy importante de las rectas paralelas, denominada *transitividad del paralelismo*.

Teorema. *Si dos rectas son paralelas a la tercera, son paralelas entre sí.*

☐ Sea que $l_1 \parallel l_2$ y $l_2 \parallel l_3$. Es necesario demostrar que $l_1 \parallel l_3$.

Si las rectas l_1, l_2, l_3 están situadas en un mismo plano, entonces esta afirmación fue demostrada en la planimetría. Supongamos que las rectas l_1, l_2, l_3 no se encuentran en un mismo plano.

Tracemos a través de las rectas l_1 y l_2 el plano p_1 y a través de las rectas l_2 y l_3, el plano p_2 (fig. 131).

Es de señalar, que la recta l_3 contiene por lo menos un punto M, que no pertenece al plano p_1.

Tracemos a través de la recta l_1 y el punto M el plano p_3, el cual se cortará con el plano p_2 por una cierta recta l.

Demostremos que l coincide con l_3. Demostrémoslo, recurriendo al «método a la inversa».

Supongamos que la recta l no coincide con la recta l_3. Entonces, l interseca la recta l_2 en un cierto punto A. De

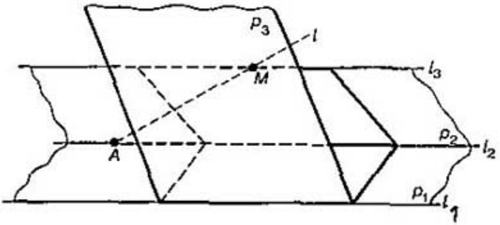


Fig. 131

aquí se deduce, que el plano p_3 pasa a través del punto $A \in p_1$ y de la recta $l_1 \subset p_1$ y, por consiguiente, coincide con el plano p_1. Esta deducción contradice, a que el punto $M \in p_3$ no pertenece al plano p_1. Por consiguiente, nuestra suposición no es válida y, por lo tanto, $l = l_3$.

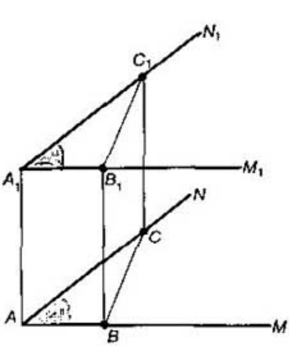


Fig. 132

Así pues, está demostrado que las rectas l_1 y l_3 están situadas en el mismo plano p_3. Demostremos que las rectas l_1 y l_3 no se intersecan.

Realmente, si l_1 y l_3 se intersecaran, por ejemplo, en el punto B, el plano p_2 pasaría a través de la recta l_2 y del punto $B \in l_1$, y por consiguiente, coincidiría con p_1, lo que es imposible. ■

Problema. Demostrar, que los ángulos con los lados codirigidos tienen iguales magnitudes.

△ Sea que los ángulos MAN y $M_1A_1N_1$ tienen los lados codirigidos: el rayo AM es codirigido con el rayo A_1M_1, y el rayo AN está codirigido con el rayo A_1N_1 (fig. 132). Tracemos en los rayos AM y A_1M_1 los segmentos AB y A_1B_1, cuyas longitudes son iguales. Entonces,

$$[BB_1] \parallel [AA_1] \text{ y } |BB_1| = |AA_1|$$

como lados opuestos del paralelogramo.

Análogamente, tracemos en los rayos AN y A_1N_1 los segmentos AC y A_1C_1, cuyas longitudes son iguales. Entonces,

$$[CC_1] \parallel [AA_1] \text{ y } |CC_1| = |AA_1|.$$

De la transitividad del paralelismo se deduce que $[BB_1] \parallel$ $\parallel [CC_1]$. Y puesto que $|BB_1| = |CC_1|$, entonces BB_1C_1C es un paralelogramo, y, por lo tanto, $|BC| = |B_1C_1|$.

Por consiguiente, $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ y $\widehat{BAC} = \widehat{B_1A_1C_1}$. ▲

§ 47. Criterio de paralelismo de una recta y un plano

Si una recta pertenece al plano o no tiene con éste ni un solo punto común, la recta y el plano se denominan *paralelos*. Si la recta l y el plano p son paralelos, escribamos $l \parallel p$. Así pues, $l \parallel p$, si $l \subset p$ o $l \cap p = \varnothing$.

Demostremos en primer término, un teorema no complicado, pero importante.

Teorema 1. *Si los planos p y q se intersecan y la recta $l \subset q$ es paralela al plano p, l es paralela a la recta, que sirve de intersección de los planos p y q.*

□ El caso cuando l se encuentra en el plano p, es evidente, ya que entonces $l = p \cap q$.

Sea que l no tiene puntos comunes con p. Entonces, si las rectas l y $l_1 = p \cap q$ se intersecaran, la recta l se intersecaría con el plano p, lo que contradice a la condición. Por consiguiente, las rectas l y l_1 son paralelas. ■

Demostremos ahora el siguiente *criterio de paralelismo de una recta y un plano.*

Teorema 2. *Para que la recta l sea paralela al plano p, es necesario y suficiente, que la recta l sea paralela a cierta recta situada en el plano p.*

□ Señalemos que el caso cuando l se encuentra en el plano p, es evidente. Por lo tanto examinaremos sólo el caso, cuando l no está situada en p.

Sea que la recta l y el plano p son paralelos (fig. 133). Demostremos que entonces en el plano p se tiene una recta, paralela a la recta l. Tracemos el plano q a través de la recta

l y de un cierto punto $M \in p$. Entonces, la recta l es paralela a la recta l_1, que es la intersección de los planos p y q.

Demostremos ahora la afirmación recíproca: si en el plano p se tiene una recta paralela a l, l es paralela a p.

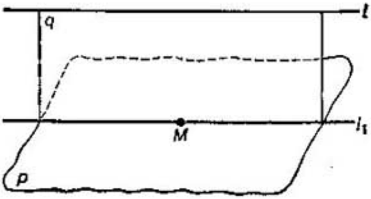


Fig. 133

Sea que l es paralela a la recta $l_1 \subset p$. Supongamos que l y p tienen un punto común M_0. Entonces, M_0 pertenece al plano p y al plano q, en el cual están situadas las rectas l y l_1 y, por lo tanto, M_0 pertenece a la recta $l_1 = p \cap q$, lo que contradice a la condición. Por consiguiente, la recta l y el plano p no tienen puntos comunes.

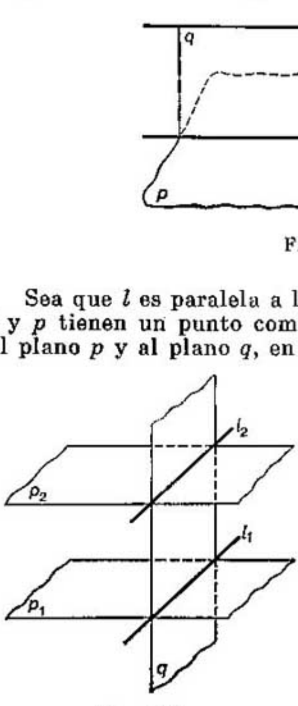


Fig. 134

§ 48. Planos paralelos

Dos planos p y q se denominan *paralelos*, si coinciden o no tienen puntos comunes. Si p y q son paralelos, se escribe $p \parallel q$. Así pues, $p \parallel q$, si bien $p = q$ o bien $p \cap q = \varnothing$.

Teorema 1. *Si dos planos paralelos están cortados por el tercer plano, las rectas de intersección son paralelas.*

□ Sea que los planos paralelos p_1 y p_2 están cortados por el plano q, y sea que $l_1 = p_1 \cap q$, $l_2 = p_2 \cap q$ (fig. 134). Examinemos el caso sustancial cuando p_1 y p_2 son distintos. En este caso, las rectas l_1 y l_2 no pueden tener puntos comunes, ya que su punto común también sería común para los planos p_1 y p_2.

De este modo, las rectas l_1 y l_2 están situadas en el mismo plano q y no tienen puntos comunes. Conforme a la definición $l_1 \parallel l_2$. ■

Demostremos ahora, el siguiente *criterio de paralelismo de dos planos.*

Teorema 2. *Si dos rectas paralelas que se cortan de un plano son paralelas respectivamente a dos rectas de otro plano, estos planos son paralelos.*

□ Si los planos p_1 y p_2 coinciden, entonces, de acuerdo a la definición, tenemos $p_1 \parallel p_2$.

Examinemos el caso cuando p_1 y p_2 son planos distintos. Sea que las rectas a_1 y b_1, que se cortan y pertenecen al

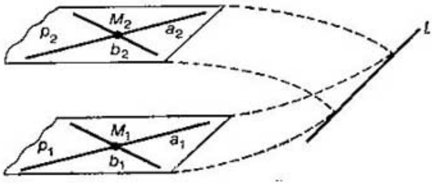


Fig. 135

plano p_1, son respectivamente paralelas a las rectas a_2 y b_2, que se cortan y pertenecen al plano p_2: $a_1 \parallel a_2$ y $b_1 \parallel b_2$ (fig. 135). Demostremos, utilizando «el método a la inversa», que los planos p_1 y p_2 no se cortan.

Supongamos que p_1 y p_2 se cortan y $p_1 \cap p_2 = l$. Del criterio de paralelismo de una recta y de un plano se deduce, que $a_1 \parallel p_2$, $b_1 \parallel p_2$ y, por lo tanto (véase el teorema 1 del § 47), $a_1 \parallel l$ y $b_1 \parallel l$, lo que es imposible, ya que a_1 y b_1 se intersecan. ■

Problema. Construir el plano que pasa por el punto dado M paralelamente al plano dado p.

△ Tomemos en el plano p dos puntos a_1 y a_2 que se cortan (fig. 136). Trazamos luego, a través del punto M y la recta a_1 el plano p_1, y a través del punto M y la recta a_2, el plano p_2. Tracemos en el plano p_1 a través del punto M la recta b_1 paralelamente a la recta a_1. Análogamente, tracemos en el plano p_2 a través de M la recta $b_2 \parallel a_2$. El plano q, que pasa a través de las rectas que se cortan b_1, b_2, será el buscado. ▲

Teorema 3. *A través de un punto, que no está situado en el plano dado, se puede trazar un solo plano, paralelo al dado.*

□ Ya está demostrado, que a través del punto M, que no está situado en el plano p, se puede trazar el plano $q \parallel p$.

Demostremos, utilizando «el método a la inversa», que este plano es el único. Supongamos que a través del punto

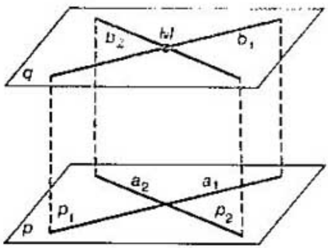


Fig. 136

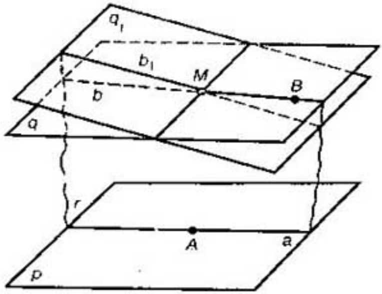


Fig. 137

M pasan dos planos q y q_1, paralelos al plano p (fig. 137). Escojamos en el plano q cierto punto B, que no pertenece al plano q_1. Tracemos el plano r a través de los puntos M, B y de cierto punto $A \in p$. Del teorema 1 se deduce, que la recta $a = p \cap r$ es paralela a la recta $b = q \cap r$, y a la recta $b_1 = q_1 \cap r$, lo que es imposible, ya que las rectas b y b_1 se intersecan en el punto M. ■

§ 49. Angulo entre las rectas en el espacio

Sea que en el espacio están definidas las rectas l y m. Tracemos a través de cierto punto A del espacio las rectas $l_1 \parallel l$ y $m_1 \parallel m$ (fig. 138).

Señalemos que el punto A puede ser elegido arbitrariamente, en particular, puede situarse en una de las rectas dadas. Si las rectas l y m se cortan, se puede tomar por punto A el punto de intersección de estas rectas (entonces, $l_1 = l$ y $m_1 = m$).

Se denomina *ángulo entre las rectas no paralelas* l y m la magnitud del mínimo de los ángulos adyacentes, formados por las rectas que se cortan l_1 y m_1 ($l_1 \parallel l$, $m_1 \parallel m$). Se considera, que el ángulo entre las rectas paralelas es igual a cero.

El ángulo entre las rectas l y m se denota $(\widehat{l;\, m})$. De la definición se deduce, que si él se mide en grados, entonces $0° \leqslant (\widehat{l;\, m}) \leqslant 90°$, y si se mide en radianes, $0 \leqslant \leqslant (\widehat{l;\, m}) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Problema. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 139). Hállese el ángulo entre las rectas AB y DC_1.

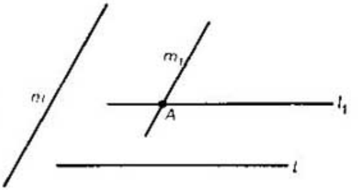


Fig. 138

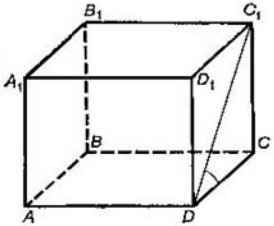


Fig. 139

△ Las rectas AB y DC_1 son cruzadas. Puesto que la recta DC es paralela a la recta AB, de acuerdo con la definición, el ángulo entre las rectas AB y DC_1 es igual a $\widehat{C_1DC}$. Por consiguiente, $(\widehat{AB;\, DC_1}) = 45°$. ▲

Las rectas l y m se denominan *perpendiculares*, si $(\widehat{l;\, m}) = = \frac{\pi}{2}$. Por ejemplo, en el cubo (véase la figura 139) la recta A_1D_1 es perpendicular a las rectas DC, DC_1, CC_1.

§ 50. Perpendicularidad de la recta y del plano

La recta y el plano se denominan *perpendiculares*, si la recta es perpendicular a cualquier recta perteneciente a este plano (fig. 140).

Si la recta l es perpendicular al plano p, se escribe $l \perp p$.

Es evidente, que si una recta es perpendicular al plano, ella corta este plano. En efecto, si l no corta p, $l \parallel p$. Entonces, en p hay una recta $l' \parallel l$, lo que contradice a que $l \perp p$.

Problema 1. Demuéstrese que por el punto dado M se puede trazar una sola recta que sea perpendicular al plano p.

△ Sea que por el punto M pasan dos rectas distintas l_1 y l_2 que son perpendiculares al plano p (fig. 141). Tracemos a través de las rectas intersecadas l_1 y l_2 el plano q y examinemos la recta $m = p \cap q$. Obtendremos, que en el plano q están trazadas dos perpendiculares a la recta m a través del punto M, lo que es imposible. Por consiguiente, nuestra suposición no es válida. ▲

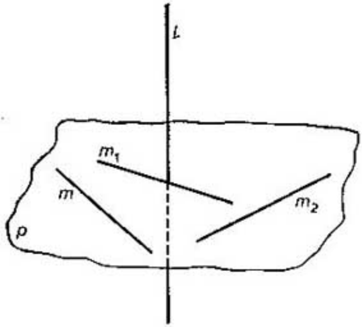


Fig. 140

Demostremos, ahora, el criterio de perpendicularidad de la recta y del plano.

Teorema. *Si la recta es perpendicular a dos rectas intersecadas pertenecientes a un plano, esta recta es perpendicular al plano.*

□ Sea que la recta NM es perpendicular a dos rectas intersecadas l_1 y l_2 del plano p (fig. 142). Se requiere demostrar que la recta NM es perpendicular al plano p, es decir, es perpendicular a toda recta $l \subset p$.

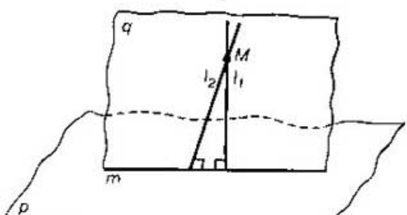


Fig. 141

Tracemos a través del punto $N \in p$ las rectas l_1', l_2' y l' de manera que $l_1' \parallel l_1$, $l_2' \parallel l_2$ y $l' \parallel l$ (fig. 143). Evidentemente, es suficiente demostrar que la recta NM es perpendicular a la recta l', si ella es perpendicular a las rectas l_2' y l_1'.

Tomemos en las rectas l_1' y l_2' por distintos lados del punto N cuatro puntos A, B, C, D de manera que

$$|AN| = |BN| = |CN| = |DN|.$$

El cuadrilátero $ABCD$ será un rectángulo, además, $|AD| = |BC|$. Luego, puesto que la recta NM es per-

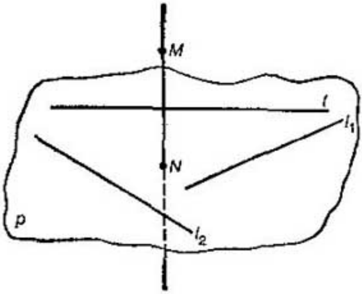


Fig. 142

pendicular a las rectas AC y BD, entonces $|MA| = |MC| = |MB| = |MD|$ (fig. 144). De aquí se deduce

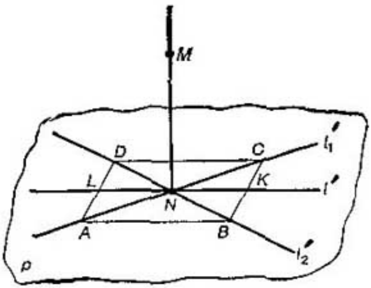


Fig. 143

que los triángulos ADM y BCM son congruentes (por tres lados). El punto N es el centro de simetría del rectángulo $ABCD$, y, por lo tanto, $|LN| = |NK|$ y $|LD| = |BK|$. De la congruencia de los triángulos MLD y MBK

se deduce que $|ML| = |MK|$. Así pues, el triángulo MLK es isósceles, y $|MN|$ es su mediana. Por consiguiente, la recta NM es perpendicular a la recta KL. ■

Problema 2. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 145). Demuéstrese que la recta AC es perpendicular al plano de la sección BDD_1B_1.

△ Puesto que $ABCD$ es un cuadrado, $(AC) \perp (BD)$. Como $ABCDA_1B_1C_1D_1$ es un cubo, la recta D_1D es perpendicular

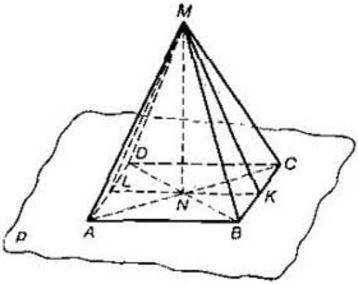


Fig. 144

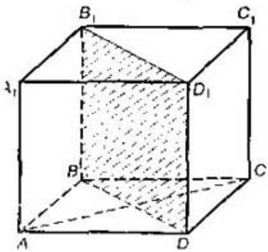


Fig. 145

al plano de la base $ABCD$ y, por consiguiente, $(D_1D) \perp (AC)$. Las rectas D_1D y BD se intersecan y pertenecen al plano de la sección BDD_1B_1. Según el criterio de perpendicularidad de la recta y del plano, la recta AC es perpendicular al plano BDD_1B_1. ▲

§ 51. Teorema de las tres perpendiculares

Sea que del punto M que no está situado en el plano p, está trazada la recta MN perpendicular al plano p, y cierta recta MK que corta el plano p, pero no es perpendicular a él (fig. 146). La longitud del segmento MN se denomina *longitud de la perpendicular* al plano p, que pasa por el punto M.

La recta MK se denomina *oblicua* al plano p, y la recta NK, donde $N \in p$ y $K \in p$, se denomina *proyección* de esta oblicua sobre el plano p. La longitud del segmento MK se denomina *longitud de la oblicua* al plano p, y la longitud del segmento NK, *longitud de la proyección* de esta oblicua. El punto de intersección de la perpendicular MN con el plano p se denomina *base de la perpendicular*, y el punto de intersección del plano p con la oblicua, *base de la oblicua.*

Tienen lugar las siguientes propiedades:

1) la longitud de la perpendicular MN (fig. 147) al plano p es menor que la longitud de cualquier oblicua MK al plano p;

2) las longitudes de las oblicuas MK y MK_1 al plano p son iguales cuando, y sólo cuando son iguales las longitudes de sus proyecciones sobre este plano;

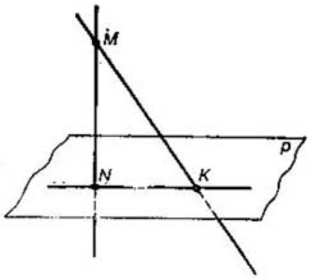


Fig. 146

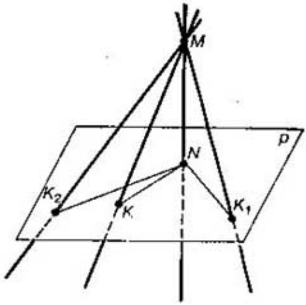


Fig. 147

3) la longitud de la oblicua MK es menor que la longitud de la oblicua MK_2 al plano p cuando, y sólo cuando la longitud de la proyección de la oblicua MK sobre el plano p es menor que la longitud de la proyección de la oblicua MK_2.

□ La propiedad 1) se deduce de que en el triángulo rectangular la longitud de la hipotenusa es mayor que la longitud de cualquier cateto.

La propiedad 2) se deduce de los criterios de igualdad de los triángulos rectangulares. De hecho, si $|MK| = |MK_1|$, entonces $\Delta MNK \cong \Delta MNK_1$, y, por lo tanto, $|NK| = |NK_1|$. Análogamente, si $|NK| = |NK_1|$, $\Delta MNK \cong \Delta MNK_1$ y $|MK| = |MK_1|$.

La propiedad 3) se deduce del teorema de Pitágoras. En efecto,

$$|MK|^2 = |MN|^2 + |NK|^2,$$
$$|MK_2|^2 = |MN|^2 + |NK_2|^2,$$

y, por lo tanto, $|MK| < |MK_2|$ cuando, y sólo cuando $|NK| < |NK_2|$. ■

La propiedad 1) de la oblicua y de la perpendicular al plano hace natural la siguiente definición de la distancia de un punto al plano.

Para cualquier punto M que no esté situado en el plano p, la longitud del segmento MN de la perpendicular al plano p, $N \in p$, que pasa por el punto M se denomina *distancia del punto M al plano p*. La distancia del punto $M \in p$ al plano p se considera igual a cero.

Problema 1. Los catetos del triángulo rectangular ABC ($\hat{C} = 90°$) son iguales a 4 cm y 3 cm. El punto M se encuentra a la distancia de $\sqrt{6}$ cm del plano del triángulo ABC y a la misma distancia de todos sus vértices. Hállese la distancia del punto M a los vértices del triángulo.

△ La distancia del punto M al plano del triángulo ABC es la longitud de la perpendicular trazada por el punto M a este plano, y las distancias del punto M a los vértices, son las longitudes de las respectivas oblicuas (fig. 148). Puesto que $|MA| = |MB| = |MC|$, las longitudes de las proyecciones de estas oblicuas también son iguales. Por lo tanto, la base de la perpendicular MN es el punto medio de la hipotenusa del triángulo ABC. Del $\triangle ABC$ tenemos $|AB| = \sqrt{16+9} = 5$ (cm). Del $\triangle MNA$ tenemos $|MA| = \sqrt{6{,}25 + 6} = 3{,}5$ (cm). ▲

Teorema. *Para que la recta $l \subset p$ sea perpendicular a la oblicua al plano p, es necesario y suficiente que la recta l sea perpendicular a la proyección de la oblicua (en el plano p).*

Este teorema se denomina *teorema de las tres perpendiculares*.

□ Sea que $(MN) \perp p$, (MK) es una oblicua, (NK) es una proyección sobre el plano p (fig. 149). Demostremos primeramente la siguiente afirmación (suficiencia): si $l \perp (NK)$, $l \perp (MK)$.

Puesto que $l \perp (MN)$ y $l \perp (NK)$, en virtud del criterio de perpendicularidad de la recta y del plano, la recta l es perpendicular al plano MNK, y, por lo tanto, $l \perp (MK)$ (en la fig. 146 $l \parallel l_1$).

Demostremos, ahora, la afirmación recíproca (necesidad): si $l \perp (MK)$, $l \perp (NK)$.

Como $l \perp (MN)$ y $l \perp (MK)$, la recta l es perpendicular al plano MNK y, por consiguiente, $l \perp (NK)$. ■

Problema 2. Demuéstrese que la magnitud del ángulo entre la oblicua MK al plano p y la recta AK que está situada en el plano p y que pasa por el pie de la oblicua será

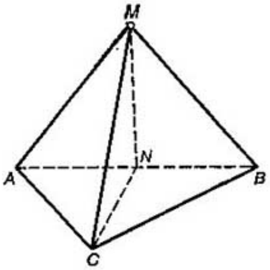


Fig. 148

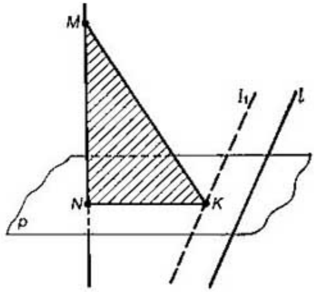


Fig. 149

la mínima, si (AK) es la proyección de la oblicua MK sobre el plano p.

△ Sea que N es la base de la perpendicular MN al plano p. Tracemos del punto N en el plano p la perpendicular NB

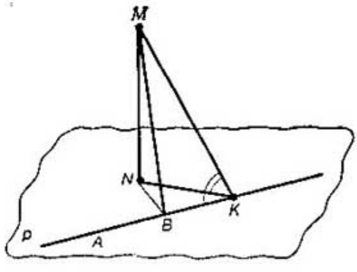


Fig. 150

(fig. 150) a la recta AK. Del teorema de las tres perpendiculares se deduce que $(MB) \perp (AK)$. De los triángulos rectangulares MNK, MNB y MBK obtenemos sen $\widehat{MKN} =$

$= \frac{|MN|}{|MK|} < \frac{|MB|}{|MK|} = \operatorname{sen} \widehat{MKB}$, y, por lo tanto, $\widehat{MKN} < \widehat{MKB}$, lo que se requiería demostrar. ▲

El ángulo entre la oblicua l al plano p y su proyección sobre este plano se denomina *ángulo entre la recta l y el plano p* y se designa $(\widehat{l; p})$. Si l es la oblicua a p, de acuerdo

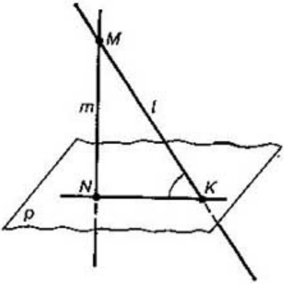


Fig. 151

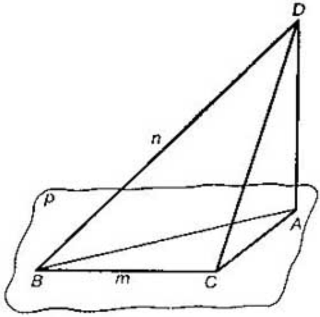


Fig. 152

con la definición $0 < (\widehat{l; p}) < \frac{\pi}{2}$. Se considera que $(\widehat{l; p}) = 0$, si $l \parallel p$ y $(\widehat{l; p}) = \frac{\pi}{2}$, si $l \perp p$.

Así pues, el ángulo entre la recta l y el plano p está definido en todos los casos. Además, siempre $0 \leqslant (\widehat{l; p}) \leqslant \frac{\pi}{2}$, si el ángulo se mide en radianes y $0° \leqslant (\widehat{l; p}) \leqslant 90°$, si el ángulo se mide en grados.

En la figura 151 se ve que si $l = (MK)$ es una oblicua al plano p, y $m = (MN)$ es una perpendicular a p, $(\widehat{l; p}) = \frac{\pi}{2} - (\widehat{l; m})$.

Es fácil ver que esta fórmula es válida también en otros casos, es decir, cuando $l \parallel p$ o $l \perp p$.

Problema 3. Del vértice A del triángulo rectangular ABC ($\hat{C} = 90°$) está trazada la perpendicular AD a su plano. Hállese la distancia del punto D al cateto BC, si $|BC| = m$, $|DB| = n$.

△ Puesto que $(AD) \perp p$, (DC) es una oblicua (fig. 152) y (AC) es la proyección de esta oblicua sobre el plano p. Según el teorema de las tres perpendiculares $(DC) \perp (BC)$, ya que $(BC) \perp (AC)$ según la condición. Del triángulo rectangular BCD hallamos: $|CD| = \sqrt{n^2 - m^2}$. Esto es la distancia del punto D al cateto BC. ▲

§ 52. Angulos diedros

Recordemos, que cualquier recta l en un plano divide el conjunto de todos los puntos del plano, que no pertenecen a esta recta, en dos conjuntos, de manera que si los puntos M y N pertenecen a distintos conjuntos, el segmento MN se corta con la recta l, y, si los puntos M y N pertenecen a uno de los conjuntos, entonces el segmento MN no se interseca con la recta l. Estos conjuntos se denominan *semiplanos abiertos* con la frontera l. La unión del semiplano abierto con su frontera se denomina *semiplano* con la frontera l.

Recordemos también que se denomina ángulo (en el plano) la figura constituida por dos rayos con un origen común y limitada por una parte del plano por ellos.

Dos rayos con un origen común limitan dos ángulos con lados comunes. Si los lados del ángulo forman una recta, tal ángulo se denomina *llano*.

Examinemos en el espacio la figura Γ formada por dos semiplanos diferentes α y β con una misma frontera l (fig. 153). Esta figura divide el conjunto de los puntos del espacio que no le pertenecen en dos partes, H_1 y H_2, para las cuales ella es frontera común. Cada una de las figuras $\Phi = H_1 \cup \Gamma$ y $\Phi = H_2 \cup \Gamma$ se denomina *ángulo diedro* con la arista l y las caras α y β.

Todos los puntos de un ángulo diedro, no pertenecientes a las caras, forman su región interior. El ángulo diedro se denomina *llano*, si sus caras forman un solo plano.

Designemos el ángulo diedro con el signo $\angle$ y con las letras que indican sus caras y arista. La letra que designa la arista del ángulo diedro se pone entre las letras que señalan sus caras, por ejemplo: $\angle \alpha l \beta$. A veces, el ángulo diedro se denota brevemente, poniendo solamente la denominación de la arista, por ejemplo: $\angle l$.

Se da el ángulo diedro $\alpha l \beta$. Tracemos a través de un punto arbitrario O de la arista de este ángulo diedro el plano p

Fig. 153

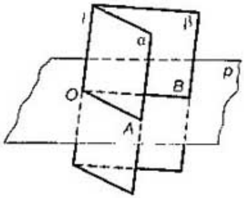


Fig. 154

perpendicular a la arista l (fig. 154). Obtendremos el ángulo AOB

$$\angle AOB = p \cap \angle \alpha l \beta.$$

Señalemos, que la magnitud de este ángulo no depende de la posición del punto O en la arista l. De hecho, si en la arista l escogemos otro punto O_1 y trazamos otro plano p_1 perpendicular a la arista l, la magnitud del ángulo $A_1O_1B_1$ será igual a la magnitud del ángulo AOB (fig. 155), ya que éstos son ángulos con lados codirigidos.

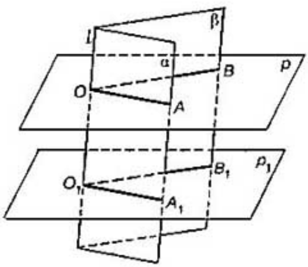


Fig. 155

El ángulo, que es la intersección del ángulo diedro por un plano perpendicular a su arista, se denomina *ángulo lineal* del ángulo diedro. De la definición se deduce, que los lados del ángulo lineal son perpendiculares a la arista del ángulo diedro.

Se denomina *magnitud* del ángulo diedro la magnitud de su ángulo lineal. La magnitud del ángulo diedro $\alpha l \beta$ se designa con $\widehat{\alpha l \beta}$ por ejemplo, $\widehat{\alpha l \beta} = 30°$, $\widehat{\alpha l \beta} = 45°$, etc.

El ángulo diedro se denomina *agudo*, *recto* u *obtuso* en función de que su ángulo lineal sea agudo, recto u obtuso.

Es de señalar, que cualesquiera dos planos p y q que se cortan dividen el conjunto de todos los puntos del espacio, no pertenecientes a estos planos, en cuatro conjuntos que no se intersecan. Cada una de estas partes se encuentra dentro del ángulo diedro respectivo. La magnitud del menor de estos cuatro ángulos diedros se denomina *ángulo entre los planos intersecados dados* p, q y se designa con $\widehat{(p;\ q)}$. El ángulo entre dos planos paralelos se considera igual a 0°.

De la definición se deduce que

$$0' \leqslant \widehat{(p;\ q)} \leqslant 90°.$$

§ 53. Planos perpendiculares

Dos planos se denominan *perpendiculares*, si el ángulo entre estos planos es recto. Si los planos p y q son perpendiculares, se escribe $p \perp q$.

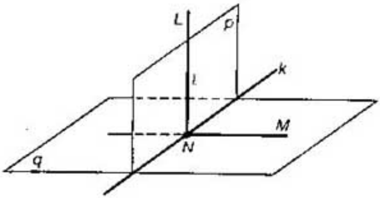


Fig. 156

Demostremos el siguiente criterio de perpendicularidad de los planos.

Teorema. *Si un plano pasa a través de una perpendicular a otro plano, estos planos son perpendiculares.*

□ Sea que la recta l está situada en el plano p y es perpendicular al plano q. Demostremos que $p \perp q$ (fig. 156).

Tracemos a través del punto $N = l \cap q$ en el plano q la recta NM perpendicular a la recta $k = p \cap q$. Entonces, $\angle LNM$ será el ángulo lineal del ángulo diedro formado por los planos p y q. Puesto que $l \perp q$, este ángulo es recto. Por consiguiente, $p \perp q$. ■

Problema. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ en el cual está construida la sección diagonal BB_1D_1D (véase fig. 145).

Demuéstrese que el plano de la sección diagonal y el plano de la base del cubo son perpendiculares.

△ El plano BB_1D_1D pasa a través de la recta (D_1D) que es perpendicular al plano de la base del cubo; por lo tanto, según el teorema demostrado el plano de la sección diagonal y el plano de la base del cubo son perpendiculares. ▲

§ 54. Proyección ortogonal de las figuras

Examinemos un cierto plano p y el punto M. Se denomina *proyección ortogonal* del punto M sobre el plano p la base M_0 de la perpendicular al plano p trazada a través

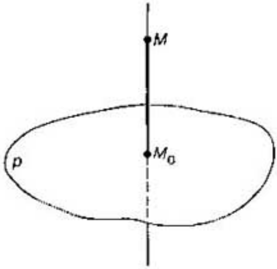


Fig. 157

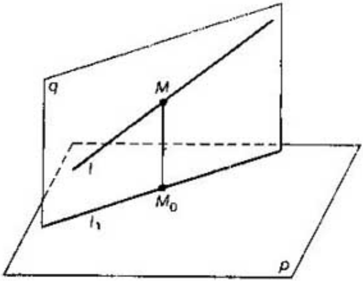


Fig. 158

del punto M (fig. 157). En este caso, el plano p se denomina *plano de proyección*.

Existe una única perpendicular al plano p trazada a través del punto dado. Por lo tanto, para cada punto del espacio existe una única proyección ortogonal M_0 de este punto sobre el plano dado. En particular, si $M \in p$, $M_0 = M$.

En adelante, para ser más breves, hablando sobre proyecciones ortogonales, vamos a usar habitualmente el término «proyección», omitiendo la palabra «ortogonal».

Se denomina *proyección de la recta* l sobre el plano p el conjunto de puntos del plano p que son las proyecciones de los puntos de esta recta.

Examinemos algunas propiedades de las proyecciones de las rectas sobre el plano.

1) Si la recta l no es perpendicular al plano de proyección, su proyección sobre este plano es una recta.

□ Si la recta l está situada en el plano p, esta afirmación es evidente.

Sea que la recta l no está situada en el plano p, y sea que M_0 es la proyección del punto M, que pertenece a l y no pertenece a p, sobre el plano p (fig. 158). Tracemos el plano q a través de las rectas l y M_0M.

Los planos p y q son perpendiculares según el criterio de perpendicularidad de los planos. Por consiguiente, la recta $l_1 = p \cap q$ es la proyección de la recta l sobre el plano p. ■

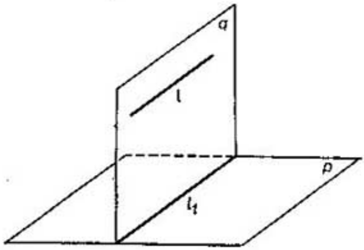


Fig. 159

De aquí se deduce que las proyecciones del rayo y del segmento (que no son perpendiculares al plano p) representan un rayo y un segmento, respectivamente. Si l es una perpendicular a p, entonces, según la definición, la proyección de l sobre p será un punto (el punto de intersección de la recta l y el plano p).

De esta propiedad se deduce, que la definición general de la proyección de una recta sobre el plano no contradice a la definición de la proyección de una oblicua sobre el plano.

2) Si la recta l es paralela al plano de proyección, entonces también es paralela a la recta l_1, que es su proyección.

□ Realmente, al trazar el plano q (fig. 159) a través de las rectas l y l_1, obtendremos $l_1 = q \cap p$. Por consiguiente, $l_1 \parallel l$. ■

De aquí resulta, que la proyección de un segmento, paralelo al plano de proyección, es un segmento congruente al dado.

3) La proyección de dos rectas paralelas, que no son perpendiculares al plano de proyección, son las rectas paralelas.

□ Sea que el plano q pasa a través de la recta l y de su proyección l', y q_1, a través de la recta l_1 y de su proyección l'_1 (fig. 160). Los planos q y q_1 son paralelos, ya que son perpendiculares al plano p y pasan a través de las rectas paralelas l y l_1. Pero entonces, también $l' \parallel l'_1$ como rectas de intersección de los planos paralelos q, q_1 por el plano p. ■

De aquí se deduce que las proyecciones de las rectas intersecadas (que no están situadas en un plano perpendicular al plano p) se cortan.

4) La razón de las longitudes de las proyecciones de dos segmentos paralelos, que no son perpendiculares al plano de proyección, sobre un plano dado, es igual a la razón de las longitudes de los segmentos a proyectar.

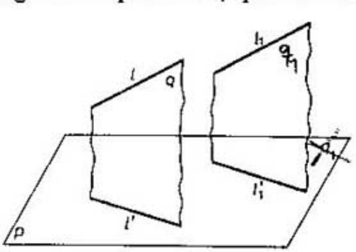


Fig. 160

□ En vez de los segmentos dados pueden ser examinados los segmentos congruentes a ellos, situados en una misma recta. Como la recta y su proyección pertenecen al mismo plano, la afirmación a demostrar se deduce del teorema sobre los segmentos proporcionales en el plano. ■

Se denomina *proyección de la figura F* sobre el plano p el conjunto de puntos, que son proyecciones de los puntos de la figura F sobre este plano.

Problema 1. Represéntese la proyección del triángulo ABC sobre el plano dado p.

△ Si el plano del $\triangle ABC$ (p_1) no es perpendicular al plano p, la proyección del triángulo ABC sobre este plano será cierto triángulo $A_1B_1C_1$ (la proyección del segmento es un segmento) (fig. 161).

Si $p_1 \perp p$, la proyección del triángulo dado ABC sobre el plano p será el segmento A_1C_1 (fig. 162).

Si $p_1 \parallel p$, la proyección del $\triangle ABC$ sobre el plano p será $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$ ▲.

Problema 2. Una de las diagonales del rombo $ABCD$ es perpendicular al plano dado p. ¿Cuál es la proyección de dicho rombo sobre este plano?

△ Sea que $[BD] \perp p$ (fig. 163).

Entonces, el plano del rombo $ABCD$ (p_1) es perpendicular al plano p, y la proyección $[A_1C_1]$ de la diagonal AC pertenecerá a $l = p_1 \cap p$.

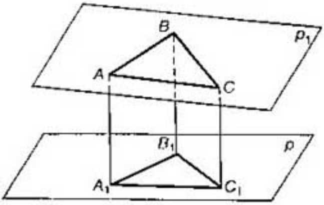


Fig. 161

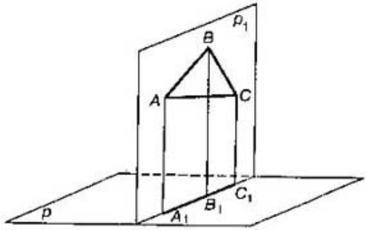


Fig. 162

Según la propiedad del rombo $[AC] \perp [BD]$, de acuerdo con la condición $(BD) \perp p$; según la definición de la recta, perpendicular al plano, $(BD) \perp l$. Entonces, los puntos B,

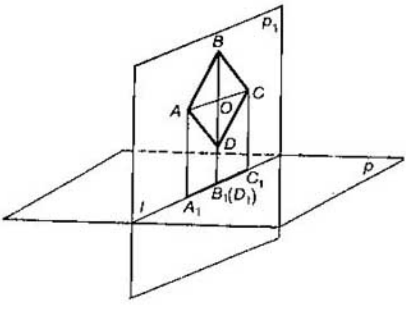


Fig. 163

D y el punto O de intersección de las diagonales se proyectan en el punto B_1 (D_1) del segmento A_1C_1. Por lo tanto, la proyección del rombo $ABCD$ sobre el plano p es el segmento A_1C_1. ▲

§ 55. Area de la proyección de un polígono

Recordemos, que se denomina ángulo entre la recta y el plano el ángulo entre la recta dada y su proyección en el plano (fig. 164).

Teorema. *El área de la proyección ortogonal de un polígono sobre el plano es igual al área del polígono a proyectar, multiplicado por el coseno del ángulo, formado por el plano del polígono y el plano de la proyección.*

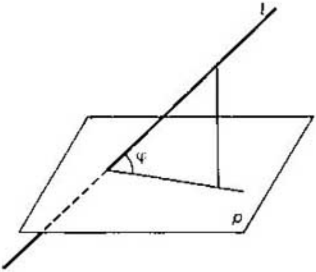


Fig. 164

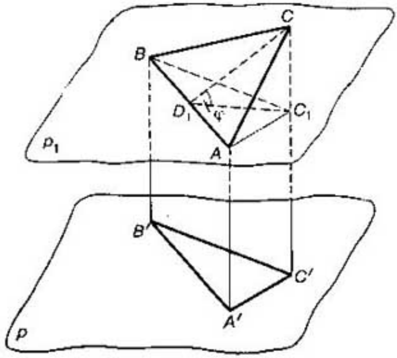


Fig. 165

□ Todo polígono puede ser dividido en triángulos, cuya suma de las áreas es igual al área del polígono. Por lo tanto, es suficiente demostrar el teorema para el triángulo.

Sea que $\triangle ABC$ se proyecta sobre el plano p. Examinemos dos casos: a) uno de los lados del $\triangle ABC$ es paralelo al plano p; b) ninguno de los lados del $\triangle ABC$ es paralelo a p.

Examinemos el primer caso: sea que $[AB] \parallel p$.

Tracemos a través de (AB) el plano $p_1 \parallel p$ y proyectemos ortogonalmente $\triangle ABC$ sobre p_1 y sobre p (fig. 165); obtendremos $\triangle ABC_1$ y $\triangle A'B'C'$. Según la propiedad de la proyección tenemos que $\triangle ABC_1 \cong \triangle A'B'C'$ y, por lo tanto

$$S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle A'B'C'}.$$

Tracemos $[CD_1] \perp [AB]$ y el segmento D_1C_1. Entonces, $[D_1C_1] \perp [AB]$ y $\widehat{CD_1C_1} = \varphi$ es la magnitud del ángulo entre el plano del $\triangle ABC$ y el plano p_1. Por lo tanto,

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} \mid AB \mid \cdot \mid C_1D_1 \mid = \frac{1}{2} \mid AB \mid \cdot \mid CD_1 \mid \cdot \cos\varphi =$$
$$= S_{\triangle ABC} \cos\varphi,$$

y, por consiguiente, $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cos\varphi$.

Estudiemos el segundo caso. Tracemos el plano $p_1 \parallel p$ por aquel vértice del $\triangle ABC$, cuya distancia al plano p es la mínima (supongamos que es el vértice A). Proyectemos

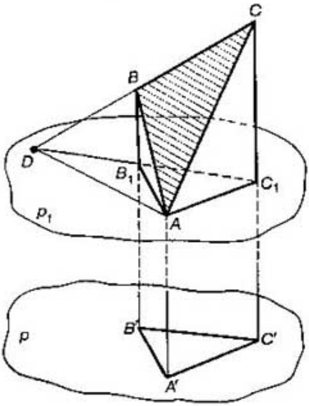


Fig. 166

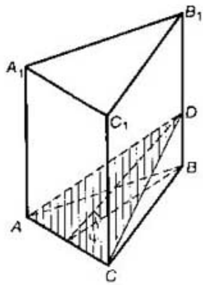


Fig. 167

el $\triangle ABC$ sobre los planos p_1 y p (fig. 166); sean sus proyecciones respectivamente $\triangle AB_1C_1$ y $\triangle A'B'C'$. Sea que $(BC) \cap$ $\cap\, p_1 = D$. Entonces

$$R_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle ADC_1} - S_{\triangle ADB_1} =$$
$$= (S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ADB}) \cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cos\varphi. \blacksquare$$

Problema. Por el lado de la base de un prisma triangular regular está trazado un plano bajo el ángulo $\varphi = 30°$ respecto al plano de su base. Hállese el área de la sección formada, si el lado de la base del prisma $a = 6$ cm.

△ Ilustremos la sección del prisma dado (fig. 167). Puesto que el prisma es regular, sus aristas laterales son perpendiculares al plano de la base. Esto quiere decir, que

$\triangle ABC$ es la proyección del $\triangle ADC$, por lo tanto

$$S_{\triangle ADC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\varphi} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$$

ó

$$S_{\triangle ADC} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 18\ (\text{cm}^2). \ \blacktriangle$$

§ 56. Angulos triedros y poliedros

Sean dados el $\triangle ABC$ y el punto S, que no pertenece al plano del triángulo (fig. 168). Se denomina *ángulo triedro* la agrupación de todos los rayos, que tienen un origen común en el punto S y cortan el triángulo dado (fig. 169). El

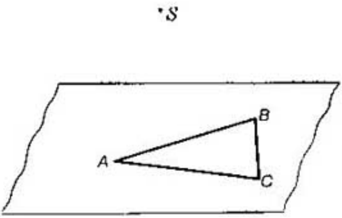


Fig. 168

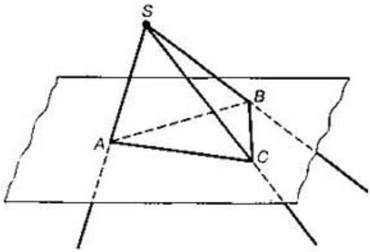


Fig. 169

punto S se denomina *vértice* del ángulo triedro, y los rayos SA, SB, SC, sus *aristas*. Los ángulos ASB, BSC, CSA se denominan *caras* del ángulo triedro o sus *ángulos planos*. La magnitud de cada uno de ellos pertenece al intervalo $]0°; 180°[$.

En general, si se dan el polígono $ABC \ldots N$ y el punto S, que no pertenece al plano del polígono, entonces la unión de todos los rayos que tienen su origen común en el punto S y cortan el polígono dado (fig. 170), se denomina *ángulo poliedro*. El punto S se denomina *vértice* del ángulo poliedro, los rayos SA, SB, $\ldots$, SN, sus *aristas*. Los ángulos ASB, BSC, $\ldots$, se denominan *caras* del ángulo poliedro o sus *ángulos planos*; la magnitud de cada uno de sus ángulos planos pertenece al intervalo $]0°; 180°[$. Los ángulos poliedros se denominan *triedros*, *tetraedros*, etc, en función del número de caras. El ángulo poliedro se designa bien con una letra, que denota el vértice, o bien con varias letras que señalan el vértice y los puntos en cada arista.

El ángulo poliedro se denomina *convexo*, si se encuentra por un lado del plano de cada una de sus caras. De lo contrario, el ángulo poliedro se denomina *no convexo*. En la figura 171 está presentado un ángulo pentaedro no convexo.

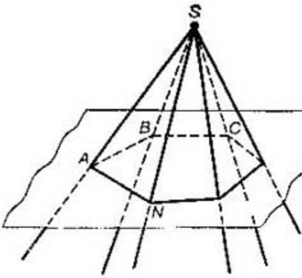


Fig. 170

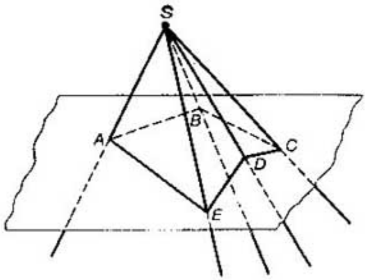


Fig. 171

El ángulo poliedro convexo se denomina *regular*, si todas sus caras y todos sus ángulos diedros son congruentes.

Examinemos las propiedades de los ángulos triedros y poliedros planos.

Teorema 1. *La magnitud de cada ángulo plano de un ángulo triedro es menor que la suma de las magnitudes de sus otros dos ángulos planos.*

□ Sea que se da el ángulo de tres caras $SABC$. Designemos con α, β, γ (fig. 172) las magnitudes de sus ángulos planos. Sea que γ es la máxima. Es suficiente demostrar que $\gamma < \alpha + \beta$.

Tracemos en el plano de la cara ASB el rayo SM de manera que $\widehat{ASM} = \widehat{ASC} = \beta$. Sea que N es el punto de intersección del segmento AB y el rayo SM. Tracemos en el rayo SC tal segmento SD, que $|SD| = |SN|$. Entonces, $\Delta ASD \cong \Delta ASN$ por dos lados y por el ángulo entre ellos.

En el $\triangle ADB$

$$|AD| + |DB| > |AB|,$$

y según la construcción

$$|AB| = |AN| + |NB| \quad \text{y} \quad |AD| = |AN|.$$

Por consiguiente, $|DB| > |NB|$.

Expresemos, ahora, $|DB|$ y $|BN|$ de los triángulos BSD y BSN, aplicando el teorema del coseno:

$$|BD|^2 = |BS|^2 + |DS|^2 - 2|BS| \cdot |DS| \cdot \cos\alpha,$$

$$|BN|^2 = |BS|^2 + |NS|^2 - 2|BS| \cdot \cos\widehat{NSB}.$$

Puesto que $|DS| = |NS|$ y $|DB| > |NB|$, $\cos\alpha <$ $< \cos\widehat{NSB}$, y, por lo tanto, $\widehat{NSB} < \alpha$. Entonces,

$$\widehat{ASN} + \widehat{NSB} < \alpha + \beta \quad \text{ó} \quad \gamma < \alpha + \beta. \blacksquare$$

Del teorema demostrado se deduce directamente, que la magnitud de cada ángulo plano de un ángulo triedro es mayor

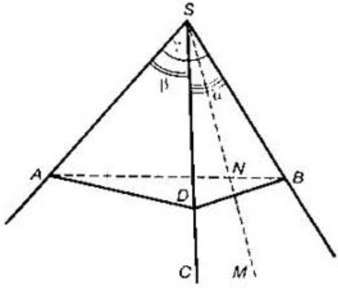


Fig. 172

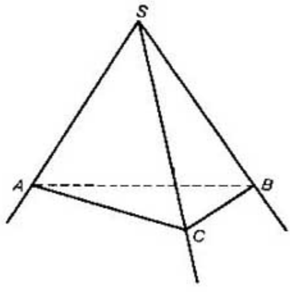


Fig. 173

que la diferencia de las magnitudes de sus otros dos ángulos planos, por ejemplo, $\alpha > \gamma - \beta$, $\beta > \gamma - \alpha$.

Teorema 2. *La suma de las magnitudes de todos los tres ángulos planos de un ángulo triedro es menor de 360°.*

□ Sea que se da el ángulo triedro $SABC$ (fig. 173). Si a través de los puntos A, B, C se traza un plano, obtendremos otros tres ángulos triedros: $ASBC$, $BSAC$ y $CSAB$.

Apliquemos a cada uno de ellos el teorema de la suma de las magnitudes de dos ángulos planos del ángulo triedro:

$$\widehat{SAB}+\widehat{SAC}>\widehat{BAC},\quad \widehat{SBC}+\widehat{SBA}>\widehat{ABC},$$

$$\widehat{SCA}+\widehat{SCB}>\widehat{ACB}.$$

Sumando término a término estas desigualdades, obtendremos

$$\widehat{SAB}+\widehat{SAC}+\widehat{SBC}+\widehat{SBA}+\widehat{SCA}+\widehat{SCB}>$$

$$>\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB},$$

y puesto que la suma de las magnitudes de los ángulos interiores del triángulo es igual a 180°, entonces

$$(\widehat{SAC}+\widehat{SCA})+(\widehat{SCB}+\widehat{SBC})+(\widehat{SAB}+\widehat{SBA})>180^\circ. \quad (1)$$

Designemos $\widehat{ASC}=\alpha$, $\widehat{BSC}=\beta$, $\widehat{ASB}=\gamma$, entonces de los triángulos ASC, ASB, BSC tenemos

$$\widehat{SCA}+\widehat{SAC}=180^\circ-\alpha,$$

$$\widehat{SCB}+\widehat{SBC}=180^\circ-\beta,$$

$$\widehat{SAB}+\widehat{SBA}=180^\circ-\gamma.$$

Ahora, la desigualdad (1) toma la forma

$$180^\circ-\alpha+180^\circ-\beta+180^\circ-\gamma>180^\circ,$$

de donde resulta que

$$\alpha+\beta+\gamma<360^\circ. \blacksquare$$

Dividiendo el ángulo poliedro convexo en ángulos triedros, se puede demostrar la siguiente afirmación.

La suma de las magnitudes de todos los ángulos planos del ángulo poliedro convexo es menor de 360°, y cada ángulo plano es menor que la suma de los demás ángulos planos.

§ 57. Prisma

Si a través de cada punto de una línea quebrada plana se trazan rectas, que sean paralelas a la dirección dada, la cual no es paralela al plano de la línea quebrada, obtenedremos *una superficie prismática infinita* (fig. 174).

Si a través de cada punto de un polígono se trazan rectas que sean paralelas a la dirección dada, la cual no es paralela al plano del polígono, obtendremos *un prisma infinito*.

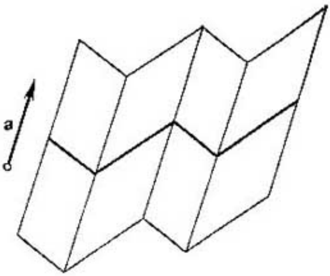


Fig. 174

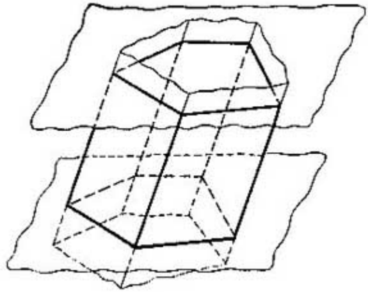


Fig. 175

Dos planos paralelos cualesquiera, que no son paralelos a la dirección elegida, cortan de ella un polígono denominado *prisma* (fig. 175). Las partes de los planos paralelos, cortados por una superficie prismática, se denominan *bases del prisma*.

Las caras laterales del prisma representan paralelogramos, y su unión constituye *la superficie lateral* del prisma. Los lados comunes de los paralelogramos se denominan *aristas laterales* del prisma, y los lados de la base se denominan a veces *aristas de la base*.

Los prismas se denominan *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, *n-angulares* en función del número de vértices del polígono que forma la base (fig. 176). El segmento que une dos vértices del prisma, no situados en una misma cara, se denomina *diagonal* del prisma. Es evidente, que el prisma triangular no tiene diagonales. Aplicando el método de inducción matemática se puede demostrar, que el número de diagonales del prisma n-angular es igual a $n(n - 3)$. Por ejemplo, el prisma cuadrangular tiene $4 \cdot (4 - 3) = 4$

(fig. 177), en tanto que el pentagonal, $5 \cdot (5 - 3) = 10$, diagonales. El plano que pasa por dos aristas laterales del prisma, no situadas en una misma cara, se denomina *plano*

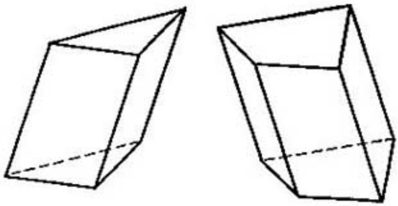


Fig. 176

diagonal (fig. 178). El segmento de una perpendicular, trazado de un punto cualquiera de la base superior al plano de la base inferior, se denomina *altura del prisma*. El prisma, cuyas aristas laterales son perpendiculares a los

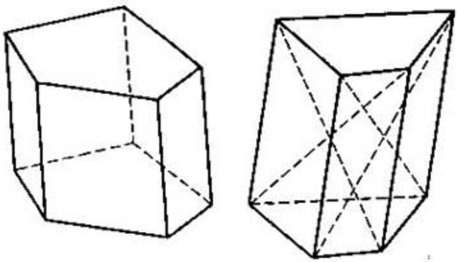


Fig. 177

planos de las bases, se denomina *recto* (fig. 179). Si las aristas laterales del prisma no son perpendiculares a los planos de las bases, el prisma se denomina *oblicuo*. El prisma recto, que tiene por base un polígono regular, se denomina *regular*.

Se denomina *sección perpendicular* del prisma (fig. 180), la proyección de las bases de éste sobre el plano perpendicular a las aristas del prisma. Es evidente, que la sección perpendicular del prisma es un polígono, que se obtiene en la sección del prisma infinito correspondiente, por un plano perpendicular a las aristas del prisma.

Teorema. *El área de la superficie lateral del prisma es igual al producto del perímetro de la sección perpendicular*

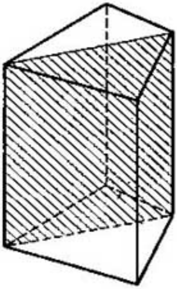


Fig. 178

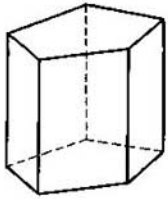


Fig. 179

por la longitud de la arista lateral del prisma, es decir,

$$S_{\text{lat.}} = P \cdot l,$$

donde P es el perímetro de la sección perpendicular, y l, la longitud de la arista lateral.

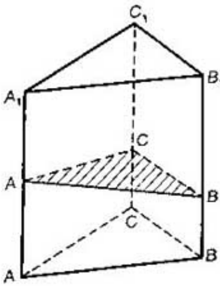


Fig. 180

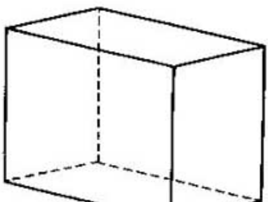


Fig. 181

□ Hagamos la demostración para el prisma triangular (véase fig. 180).

Sea que $A'B'C'$ es una sección perpendicular del prisma dado. Puesto que $(A'B') \perp (BB_1)$, $[A'B']$ es la altura del paralelogramo ABB_1A_1. Su área es igual a

$$S_{ABB_1A_1} = |A'B'| \cdot l.$$

Análogamente,

$$S_{BCC_1B_1} = |B'C'| \cdot l, \quad S_{ACC_1A_1} = |A'C'| \cdot l.$$

Por consiguiente,

$$S_{\text{lat.}} = (|A'B'| + |B'C'| + |A'C'|) \cdot l = P \cdot l. \blacksquare$$

Se denomina *paralelepípedo* el prisma que tiene por base un paralelogramo. De la definición se deduce, que todas las caras del paralelepípedo son paralelogramos (fig. 181). Para

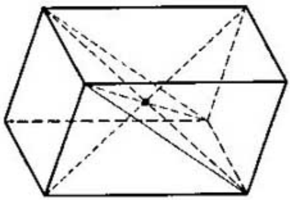


Fig. 182

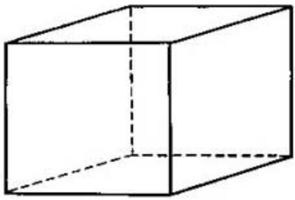


Fig. 183

el paralelepípedo es válido el siguiente teorema: *el punto medio de la diagonal del paralelepípedo es su centro de simetría.* De este teorema se deduce que las caras opuestas del paralelepípedo son congruentes de dos en dos y paralelas, y todas las diagonales del paralelepípedo se intersecan en un punto, que las divide por la mitad (fig. 182).

Se denomina *recto*, el paralelepípedo cuyas aristas laterales son perpendiculares al plano de su base. Las caras laterales del paralelepípedo recto son polígonos (fig. 183). Se denomina *paralelepípedo rectangular*, el paralelepípedo recto, cuyas bases son rectángulos. Todas las caras del paralelepípedo rectangular son rectángulos. Se denomina *cubo*, el paralelepípedo rectangular, cuyas tres aristas procedentes de un mismo vértice son congruentes. Así pues, todas la caras del cubo son cuadrados congruentes.

§ 58. Pirámide y pirámide truncada

El lector ya tiene una idea sobre la pirámide, del curso de geometría del octavo grado. Recordemos, cómo se puede construir una pirámide. Construyamos en el plano p un polígono cualquiera, por ejemplo, el pentágono $ABCDE$. Tomemos el punto S fuera del plano p. Al unir por medio de segmentos el punto S con todos los puntos del polígono, obtendremos la pirámide $SABCDE$ (fig. 184). El punto S se denomina *vértice*, y el polígono $ABCDE$, *base* de esta pirámide. De este modo, la pirámide con el vértice S y la base $ABCDE$ es una unión de todos los segmentos $[SM]$, donde $M \in ABCDE$.

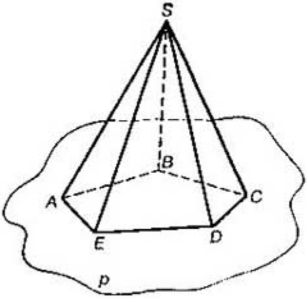


Fig. 184

Los triángulos SAB, SBC, SCD, SDE, SEA se denominan *caras laterales* de la pirámide, los lados comunes de las caras laterales SA, SB, SC, SD, SE se denominan *aristas laterales*.

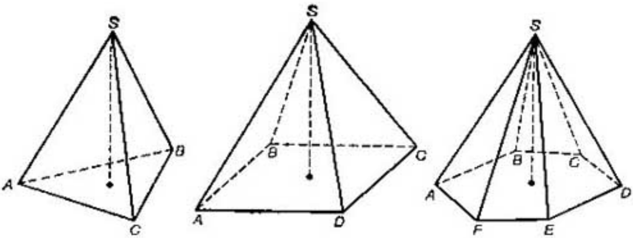


Fig. 185

Las pirámides se denominan *triángulares*, *cuadrangulares*, *n-angulares* en función del número de lados de la base. En la figura 185 están ilustradas las pirámides triangular, cuadrangular, hexagonal.

El plano que pasa a través del vértice de la pirámide y de la diagonal de la base se denomina *diagonal*, y la sección obtenida, sección *diagonal*. En la figura 186 una de las secciones diagonales de la pirámide hexagonal está rayada.

Se denomina *altura* de la pirámide el segmento de la perpendicular trazado a través del vértice de la pirámide al plano de su base (los extremos de este segmento son el vértice de la pirámide y la base de la perpendicular).

La pirámide se denomina *regular*, si la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice de la pirámide se proyecta a su centro.

Todas las caras laterales de la pirámide regular son triángulos isósceles congruentes. Todas las caras laterales de la pirámide regular son congruentes.

La altura de la cara lateral de la pirámide regular trazada de su vértice se denomina *apotema* de una pirámide. Todas las apotemas de la pirámide regular son congruentes.

Si designamos un lado de la base con a, y la apotema, con h, el área de una cara lateral de la pirámide es igual a $\frac{1}{2}ah$.

La suma de las áreas de todas las caras laterales de la pirámide se denomina *área de la superficie lateral* de la pirámide y se designa con $S_{\text{lat.}}$.

Puesto que la superficie lateral de la pirámide regular consta de n caras congruentes, entonces

$$S_{\text{lat}} = \frac{1}{2}ahn = \frac{Ph}{2},$$

donde P es el perímetro de la base de la pirámide. Por consiguiente,

$$S_{\text{lat}} = \frac{Ph}{2},$$

es decir, *el área de la superficie lateral de la pirámide regular es igual a la mitad del producto del perímetro de la base por la apotema.*

El área de la superficie total de la pirámide se calcula según la fórmula

$$S = S_{\text{bas}} + S_{\text{lat}}.$$

El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de su base S_{bas} por la altura H:

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{bas}}H.$$

La deducción de esta y de algunas otras fórmulas se dará en uno de los capítulos posteriores.

Construyamos ahora una pirámide, por otro método. Sea dado un ángulo poliedro, por ejemplo, de cinco caras con el vértice S (fig. 187). Tracemos el plano p de manera que interseque todas las aristas del ángulo poliedro dado en distintos puntos A, B, C, D, E (fig. 188). Entonces, la pirámide

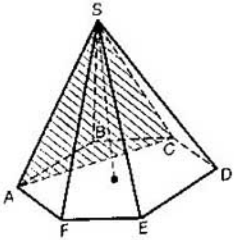


Fig. 186

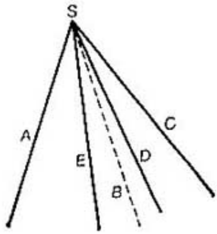


Fig. 187

$SABCDE$ puede ser considerada como la intersección del ángulo poliedro y el semiespacio con la frontera p, que contiene el vértice S.

Es evidente que el número de todas las caras de la pirámide puede ser arbitrario, pero no menor de cuatro. Cuando el ángulo triedro se corta por un plano, obtenemos una pirámide triangular de cuatro caras. Cualquier pirámide triangular se denomina a veces *tetraedro*.

La pirámide truncada puede ser obtenida, si la pirámide se corta por un plano paralelo al plano de la base. En la figura 189 se ofrece una pirámide cuadrangular truncada.

Las pirámides truncadas se denominan también *triangulares, cuadrangulares, n-angulares* en función del número de los lados de la base. De la construcción de la pirámide truncada se deduce que ella tiene dos bases: *superior* e *inferior*. Las bases de la pirámide truncada representan dos poliedros cuyos lados son paralelos de dos en dos. Las caras laterales de la pirámide truncada representan trapecios.

Se denomina *altura* de la pirámide truncada el segmento de una perpendicular trazado de un punto cualquiera de la base superior al plano de la base inferior.

Se denomina *pirámide truncada regular* la parte de la pirámide regular, comprendida entre la base y el plano de la sección paralelo a la base. La altura de la cara lateral de la pirámide truncada regular (del trapecio) se denomina *apotema*.

Se puede demostrar que las aristas laterales de la pirámide truncada regular son congruentes, así como todas las caras laterales y todas las apotemas.

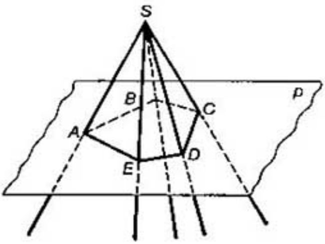


Fig. 188

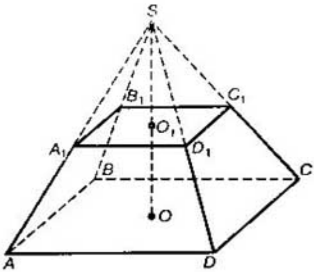


Fig. 189

Si en la pirámide n-angular truncada regular se designan con a y b_n las longitudes de los lados de las bases superior e inferior y con h, la longitud de la apotema, el área de cada cara lateral de la pirámide es igual a

$$\frac{1}{2}(a+b_n)\,h.$$

La suma de las áreas de todas las caras laterales de la pirámide se denomina *área de su superficie lateral* y se designa con S_{lat}. Es evidente, que para la pirámide n-angular truncada regular

$$S_{lat} = n \cdot \frac{1}{2}(a+b_n)\,n.$$

Puesto que $na = P$ y $nb_n = P_1$ son los perímetros de las bases de la pirámide truncada,

$$S_{lat} = \frac{1}{2}(P+P_1)\,h,$$

es decir, *el área de la superficie lateral de la pirámide truncada regular es igual a la mitad del producto de la suma de los perímetros de sus bases por la apotema.*

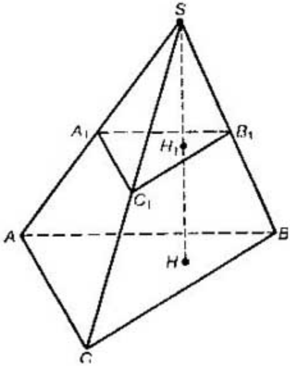


Fig. 190

Teorema. *Si la pirámide se corta con un plano paralelo a la base,*

1) las aristas laterales y la altura se dividirán en partes proporcionales;

2) en la sección se obtendrá un polígono semejante a la base;

3) las áreas de la sección y de la base se relacionan como los cuadrados de sus distancias del vértice.

□ Es suficiente demostrar el teorema para la pirámide triangular.

Puesto que los planos paralelos se cortan por un tercer plano por las rectas paralelas, entonces $(AB) \parallel (A_1B_1)$, $(BC) \parallel (B_1C_1)$, $(AC) \parallel (A_1C_1)$ (fig. 190).

Las rectas paralelas dividen los lados del ángulo en partes proporcionales, y por lo tanto,

$$\frac{|SA|}{|SA_1|}=\frac{|SB|}{|SB_1|}=\frac{|SC|}{|SC_1|};$$

por consiguiente, $\triangle SAB \sim \triangle SA_1B_1$ y

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|}=\frac{|SB|}{|SB_1|};$$

$\triangle SBC \sim SB_1C_1$ y

$$\frac{|BC|}{|B_1C_1|}=\frac{|SB|}{|SB_1|}=\frac{|SC|}{|SC_1|}.$$

Así pues,

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|}=\frac{|BC|}{|B_1C_1|}=\frac{|AC|}{|A_1C_1|}.$$

Los respectivos ángulos de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son congruentes, como ángulos con lados paralelos e igual-mente dirigidos. Por lo tanto

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1.$$

Las áreas de los triángulos semejantes se relacionan como los cuadrados de los lados respectivos:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{|AB|^2}{|A_1B_1|^2},$$

pero

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|SH|}{|SH_1|}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{|SH|^2}{|SH_1|^2}. \blacksquare$$

§ 59 *. Poliedros

La mayoría de los minerales tienen una estructura cristalina en forma de diversos poliedros.

Desde los tiempos más antiguos en la creación técnica del hombre predominan las formas espaciales más sencillas, o sea, los poliedros; sirven de ejemplo las pirámides de Egipto, numerosas torres, edificios y distintas obras de ingeniería.

Demos la definición general del poliedro convexo.

El conjunto de puntos del espacio se denomina *acotado*, si existe tal número M, que $|AB| \leqslant M$ para cualesquiera puntos A y B de este conjunto.

Ejemplos de conjuntos acotados son la esfera, el cilindro, el cono, la pirámide, el prisma; cualquier conjunto de puntos del especio, que es una unión o intersección del número finito de los conjuntos anteriormente citados, también será, evidentemente, un conjunto acotado.

El punto M del espacio se denomina *punto de frontera* del conjunto, si en cualquier esfera con el centro en el punto M se comprenden tanto los puntos pertenecientes a este conjunto, como los no pertenecientes. El conjunto de todos los puntos de frontera del conjunto dado se denomina su *frontera.*

El conjunto se denomina *cerrado*, si contiene todos los puntos de frontera. El conjunto se denomina *abierto*, si no le pertenece ninguno de los puntos de frontera.

Ejemplos de conjuntos cerrados son el semiespacio, el ángulo diedro y la esfera. Las fronteras de estos conjuntos son el plano, la unión de dos semiplanos y la esfera respectivamente.

El conjunto de puntos del espacio se denomina *convexo*, si para dos de sus puntos cualesquiera, el segmento que les une pertenece a este conjunto.

Ejemplos de conjuntos convexos son la esfera, el cilindro, la pirámide triangular, el semiplano, el ángulo triedro. De ellos la esfera, el cilindro y la pirámide triangular son, además, conjuntos acotados. El semiplano y el ángulo diedro son conjuntos no acotados.

El conjunto abierto, acotado convexo de los puntos del espacio se denomina *poliedro abierto convexo*, si su frontera es una unión de un número finito de los polígonos denominados *caras* del poliedro dado.

La unión del poliedro abierto convexo y de su frontera se denomina poliedro cerrado convexo o simplemente *poliedro convexo*.

La frontera del poliedro se denomina *superficie del poliedro*. El área de la superficie del poliedro es igual a la suma de las áreas de todas sus caras.

§ 60 *. Poliedros regulares

El poliedro convexo se denomina *regular*, si todas sus caras son poliedros regulares congruentes, y todos sus ángulos poliedros son congruentes y regulares.

De la definición se deduce, que todos los ángulos diedros del poliedro regular son congruentes, así como son congruentes todos los ángulos planos y todas sus aristas. Se puede demostrar el teorema:

En cualquier poliedro regular se puede inscribir una esfera y alrededor de cualquier poliedro regular se puede circunscribir una esfera, además, los centros de estas esferas coinciden.

El centro común de las esferas inscrita y circunscrita del poliedro regular se denomina *centro* de este poliedro.

La frontera del poliedro regular es la superficie cerrada, que representa la unión de todas sus caras.

Los poliedros regulares eran conocidos ya en la Grecia Antigua (en el siglo V a.n.e.). Fueron mencionados por primera vez por Platón, desde entonces obtuvieron el título de los cinco cuerpos de Platón. El famoso libro «Principios» de Euclides comenzaba por la descripción de la construcción del triángulo regular y terminaba con la descripción de los cinco cuerpos poliedros regulares.

Hasta hoy día los poliedros regulares han conservado sus denominaciones griegas.

1. El cubo. Sea que en el sistema rectangular de coordenadas $Oxyz$ están definidos por medio de sus ecuaciones seis

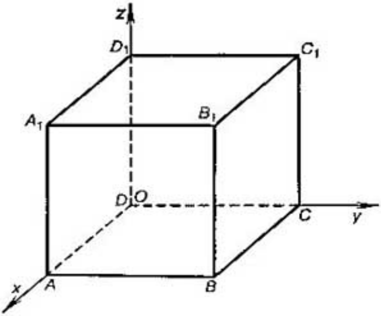


Fig. 191

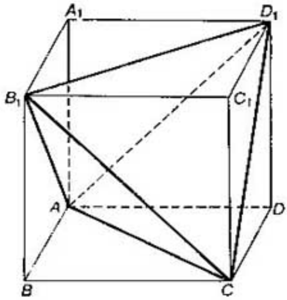


Fig. 192

planos: $x = 0$ y $x = a$, $y = 0$ y $y = a$, $z = 0$ y $z = a$ Examinemos la intersección de seis semiplanos: $x \geqslant 0$. $x \leqslant a$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant a$, $z \geqslant 0$, $z \leqslant a$.

Es fácil ver que el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 191) es la intersección de los seis semiplanos. La frontera de este poliedro está constituida por seis cuadrados congruentes; los ángulos poliedros son en cada vértice triedros y congruentes, así como son también congruentes todos sus ángulos planos y todos los ángulos diedros. Por consiguiente, el poliedro obtenido es *regular* y se denomina *hexaedro regular* (denominación griega) o *cubo*. Es de señalar que cualquier paralelepípedo es un hexaedro.

2. Tetraedro regular. Los vértices A, B_1, C, D_1 del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ no están situados en un mismo plano y, por consiguiente, son vértices de cierto tetraedro. Es fácil ver, que los cuatro triángulos regulares congruentes (fig. 192) son frontera del tetraedro obtenido AB_1CD_1

$$\triangle AB_1C \cong \triangle ACD_1 \cong \triangle AD_1B_1 \cong \triangle B_1CD_1$$

(ya que todos sus lados representan diagonales de los cuadrados congruentes). Los ángulos poliedros en cada vértice del tetraedro son triedros y congruentes; también son congruentes todos los ángulos planos y todos los ángulos diedros. Por consiguiente, el poliedro obtenido es regular y se denomina *tetraedro regular*.

3. **Octaedro regular.** Construyamos en un sistema rectangular de coordenadas seis puntos: $A\ (a;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ a;\ 0)$,

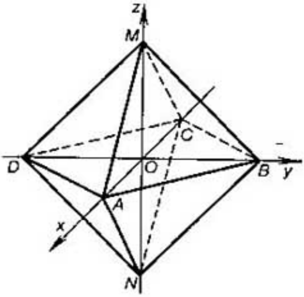


Fig. 193

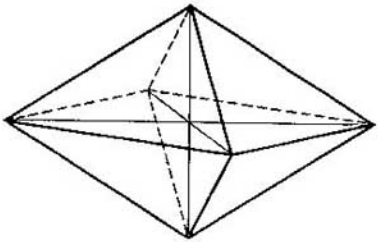


Fig. 194

$C\ (-a;\ 0;\ 0)$, $D\ (0;\ -a;\ 0)$, $M\ (0;\ 0;\ a)$ y $N\ (0;\ 0;\ -a)$. Cada terna de puntos $(M,\ A,\ B)$, $(M,\ B,\ C)$, $(M,\ C,\ D)$, $(M,\ D,\ A)$, $(N,\ A,\ B)$, $(N,\ B,\ C)$, $(N,\ C,\ D)$ y $(N,\ D,\ A)$ define un plano (fig. 193).

El octaedro $MABCDN$ será la intersección de ocho semiespacios, limitados por los planos (MAB), (MBC), . . ., . . ., (NDA), que contienen el punto O. Su frontera consta de ocho triángulos regulares congruentes (sus lados son congruentes como las hipotenusas de los triángulos rectangulares congruentes). Todos sus ángulos poliedros son de cuatro caras, regulares y congruentes. Por consiguiente, el octaedro obtenido es regular. Tal octaedro se denomina *octaedro regular* («octaedro» significa «poliedro de ocho caras triangulares»). Existen también octaedros no regulares, por ejemplo, la bipirámide cuadrangular regular (fig. 194) (todas las caras de la bipirámide cuadrangular regular son triángulos isósceles).

4. **Icosaedro regular.** La frontera de este poliedro está constituida por veinte triángulos regulares congruentes

(fig. 195). El icosaedro regular tiene doce ángulos de cinco caras regulares congruentes. Todos sus ángulos diedros son congruentes, así como todos sus ángulos planos («icosaedro» traducido del griego quiere decir «poliedro de veinte caras»).

5. **Dodecaedro regular.** La frontera de este poliedro está constituida por doce pentágonos regulares congruentes

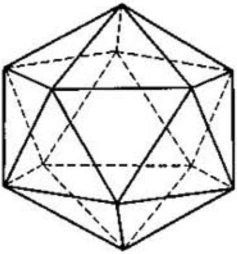


Fig. 195

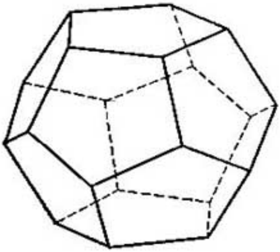


Fig. 196

(fig. 196). El dodecaedro regular tiene veinte ángulos triedros regulares congruentes. Todos sus ángulos diedros son congruentes, así como son congruentes todos los ángulos planos («dodecaedro» traducido del griego significa «poliedro de doce caras»).

Está demostrado que existen sólo cinco poliedros convexos regulares.

Problemas para el capítulo IV

4.1. ¿Cuántos planos se pueden trazar en el espacio a través: a) de un punto; b) de dos puntos distintos; c) de tres puntos distintos que no están situados en una misma recta; d) de tres puntos distintos; e) de cuatro puntos?

4.2. ¿Cuántos planos se pueden trazar en el espacio a través: a) de una recta; b) de dos rectas intersecadas; c) de dos rectas arbitrarias?

4.3. ¿Cuántos planos se pueden trazar en el espacio a través: a) de una recta y un punto; b) de dos rectas intersecadas y un punto?

4.4. En el espacio se dan cuatro puntos, ninguno de los tres de ellos pertenecen a una misma recta. A través de cada par de puntos dados está trazada una recta. ¿Cuántas rectas de éstas se pueden trazar?

4.5. En el espacio se dan cuatro puntos, ninguno de los tres de ellos pertenecen a una misma recta. A través de cada tres de estos puntos está trazado un plano. ¿Cuántos planos de éstos se pueden trazar?

4.6. ¿Es válida la afirmación: si la recta l_1 corta la recta l_2, y la recta l_2 corta la recta l_3, la recta l_1 corta la recta l_3?

4.7. ¿Es válida la afirmación: si las rectas l_1, l_2 son cruzadas y las rectas l_2, l_3 también lo son, entonces son cruzadas l_1 y l_3?

4.8. ¿Cuántos pares de aristas cruzadas, es decir, de aristas situadas en las rectas cruzadas, hay en la pirámide triangular?

4.9. ¿Cúantos pares de aristas paralelas y cruzadas hay en el paralelepípedo?

4.10. Demuéstrese, que a través de dos rectas paralelas pasa un solo plano.

4.11. ¿Como construir una recta que se cruza con:

a) cada una de dos rectas intersecadas;

b) cada una de dos rectas paralelas?

4.12. ¿Cuántos planos, paralelos a la recta l, se pueden trazar a través del punto dado A, fuera de esta recta?

4.13. La recta l es paralela al plano p. ¿Cuántas rectas paralelas a la recta l se pueden trazar en el plano p? ¿Cuál es la posición recíproca de todas estas rectas?

4.14. Se sabe que la recta l es paralela a la recta m, la cual es paralela al plano p. ¿Será la recta l paralela al plano p?

4.15. Sea que las rectas l y m son paralelas, y a través de cada una de ellas está trazado un plano. Demuéstrese que si estos planos se intersecan, la recta de su intersección es paralela a las rectas l y m.

4.16. Demuéstrese que si un plano interseca una de las dos rectas paralelas, él interseca la otra.

4.17. Demuéstrese que si una recta corta uno de los planos paralelos, ella corta también el otro.

4.18. Demuéstrese que si el plano p_1 es paralelo al plano p_2, y p_2 es paralelo al plano p_3, p_1 es paralelo a p_3. (*Propiedad de transitividad*).

4.19. Demuéstrese que los segmentos de las rectas paralelas comprendidos entre planos paralelos, tienen longitudes iguales.

4.20. Constrúyase un plano que pase a través de la recta dada l paralelamente a la recta m (las rectas l y m se cruzan).

4.21. Se da el cubo $ABCDA_1B_1M_1D_1$. Hállese el ángulo entre las rectas: a) AD y BB_1; b) AD y A_1D_1; c) AC y B_1D_1; d) AC y A_1D_1.

4.22. Demuéstrese, que si dos rectas son perpendiculares a un mismo plano, estas rectas son paralelas.

4.23. Demuéstrese que si dos planos son perpendiculares a una misma recta, estos planos son paralelos.

4.24. Los segmentos AB y BC son lados del cuadrado $ABCD$. A través de las rectas AB y BC están trazados los planos p_1 y p_2 respectivamente. La recta l es la línea de intersección de los planos p_1 y p_2, además, $l \perp (AB)$. Demuéstrese que $(AB) \perp p_2$.

4.25. El punto O es el centro del cuadrado con el lado m. El segmento OM es perpendicular al plano del cuadrado, $|OM| = \frac{m}{2}$. Hállese la distancia del punto M al vértice del cuadrado.

4.26. Hállese la distancia del punto M al plano del triángulo equilátero, si el lado de este triángulo es igual a $3\sqrt{3}$ cm, y la distancia del punto a cualquiera de los vértices del triángulo es igual a 5 cm.

4.27. Hállese el conjunto de todos los puntos del espacio, equidistantes de tres puntos dados.

4.28. En el triángulo rectangular isósceles ABC los catetos son iguales a a cm. Del vértice del ángulo recto C trazamos al plano del ΔABC la perpendicular CD, además, $|CD| = 2a$ cm. Hállese la distancia del punto D a la hipotenusa AB.

4.29. Los catetos del triángulo rectangular ABC son iguales a 4 cm y 3 cm. A través del vértice del ángulo recto C del triángulo trazamos la perpendicular n al plano ABC. Hállese la distancia del punto $M \in n$ a la hipotenusa del triángulo, si $|MC| = 2{,}6$ cm.

4.30. Si las caras de un ángulo diedro sirven de prolongación a las caras del otro, tales ángulos diedros se denominan verticales. Demuéstrese que los ángulos diedros verticales son congruentes.

4.31. La perpendicular MA está trazada del punto M de una circunferencia al plano de un círculo, limitado por esta circunferencia. Del punto M se trazó el diámetro MB; $[BC]$ es una cuerda arbitraria. El punto A está unido con los puntos B y C. Determínese la forma del triángulo ABC.

4.32. Demuéstrese que si los planos p y q son perpendiculares, y la recta $l \subset p$ es perpendicular a la recta $m = p \cap q$, entonces $l \perp q$.

4.33. Sean dados tres planos p, q, r, que se cortan de dos en dos. Demuéstrese que si $p \perp r$ y $q \perp r$, la recta $m = p \cap q$ es perpendicular al plano r.

4.34. Demuéstrese, que si el plano es perpendicular a uno de los dos planos paralelos, es también perpendicular al otro.

4.35. Se denomina *bisector* el semiplano, que tiene por su arista, la arista del ángulo diedro y que lo divide en dos partes congruentes. Demuéstrese que los semiplanos bisectores de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.

4.36. Indíquese en el modelo del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ las proyecciones de las siguientes figuras sobre el plano de la cara AA_1B_1B: $[C_1D_1]$, $[AD]$, $[C_1D]$, $[DB_1]$, $\triangle C_1CD$, $\triangle ACD$, del cuadrado BB_1C_1C.

4.37. Se da el cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. a) Hállese la proyección del punto $M \in [B_1C_1]$ sobre los planos de las caras $ABCD$, AA_1D_1D, AA_1B_1B. b) Hállese la proyección del punto $N = [DC_1] \cap [CD_1]$ sobre los planos de las caras señaladas.

4.38. ¿Cuáles son las proyecciones de dos rectas l_1 y l_2 sobre el plano p, si:

a) las rectas l_1 y l_2 se cortan;

b) las rectas l_1 y l_2 se cruzan;

c) las rectas l_1 y l_2 son paralelas?

Examínense todos los casos posibles.

4.39. Los puntos A y B pertenecen al plano p; los segmentos congruentes AA_1 y BB_1 son perpendiculares al plano p y están situados por distintos lados respecto a éste. Hállense las magnitudes de los ángulos del cuadrilátero AA_1BB_1, si $|AA_1| = |AB|$.

4.40. La hipotenusa de un triángulo rectangular es igual a m, la magnitud de su ángulo agudo es de 60°. Hállese el área de proyección de este triángulo sobre el plano, que forma un ángulo de 30° con el plano del triángulo.

4.41. Los lados del triángulo son iguales a 3,9 cm, 4,1 cm y 2,8 cm. Hállese el área de su proyección sobre el plano, que forma un ángulo de 60° con el plano del triángulo.

4.42. Constrúyase la sección del cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ por el plano, que atraviesa los puntos M, N y K, si

$$M = A_1, \quad |ND_1| = |ND|, \quad |DK| = 2|KC|,$$
$$N \in [DD_1], \quad K \in [DC].$$

4.43. Constrúyase la sección del cubo $ABCDA'B'C'D'$ con la arista a por el plano, que pasa por los puntos medios de las aristas $[AD]$ y $[B'C']$ y por los vértices A' y C. Hállese el área de la sección.

4.44. Constrúyase la sección del cubo por un plano, de manera que ésta sea un hexágono regular.

4.45. Trácense en el tetraedro $MABC$ a través del punto medio de la arista $[AB]$, paralelamente a las aristas de las secciones: a) $[AC]$ y $[AM]$; b) $[BC]$ y $[CM]$; c) $[BC]$ y $[AM]$.

4.46. Hállese el área de la sección trazada por los puntos medios de dos aristas laterales adyacentes de una pirámide cuadrangular regular con el lado a y la altura h, perpendicularmente a la base de la pirámide.

4.47. Determínese si existe un ángulo triedro, cuyos ángulos planos son iguales a: a) 120°, 97°, 33°; b) 120°, 120°, 130°; c) 108°, 92°, 160°; d) 157°, 82°, 64°.

4.48. En un ángulo triedro dos ángulos planos son de 45°, y el ángulo diedro entre ellos, de 90°. Hállese el tercer ángulo plano.

4.49. Los lados de la base de un paralelepípedo recto son iguales a $3\sqrt{2}$ cm y 14 cm, el ángulo entre ellos es de 135°, la arista lateral, de 12 cm. Hállense las diagonales del paralelepípedo.

4.50. La diagonal de un prisma cuadrangular regular es igual a 9 cm; la superficie total del prisma es de 144 cm². Hállense el lado de la base y la arista lateral del prisma.

4.51. La superficie total de un paralelepípedo rectangular es igual a 352 cm². Hállense sus dimensiones si se relacionan como 1 : 2 : 3.

4.52. La arista de un cubo es igual a a. Hállese el área de la sección del cubo por el plano, que pasa por los extremos de las aristas provenientes de un mismo vértice.

4.53. La arista del cubo es igual a a. Hállese la longitud del segmento que une los puntos medios de dos aristas cruzadas.

4.54. En la pirámide cuadrangular regular $MABCD$ el lado de la base es igual a a, la apotema de la pirámide es igual a $\frac{3}{2}a$. Hállese la altura de la pirámide.

4.55. Hállese la altura de la pirámide cuadrangular regular, si su arista lateral es igual a m, y el ángulo plano del vértice es igual a β.

4.56. Se da una pirámide cuya altura es igual a 16 m, y el área de la base es igual a 512 m². Hállese el área de la sección de la pirámide por el plano, trazado paralelamente a la base a la distancia de 5 m del vértice.

4.57. Hállese la arista lateral de la pirámide cuadrangular regular cuyo lado de la base es igual a 14 cm, y el área de la sección diagonal es de 14 cm².

4.58. Un rombo con las diagonales de 12 cm y 16 cm sirve de base de una pirámide. La altura de la pirámide pasa por el punto de intersección de las diagonales y es igual a 6,4 cm. Hállese el área de la superficie total de la pirámide.

4.59. La altura de una pirámide cuadrangular regular es igual a 28 cm, la arista lateral es de 36 cm. Hállese el lado de la base.

4.60. Demuéstrese, que la arista lateral de una pirámide triangular regular es perpendicular a la arista opuesta de la base.

4.61. Demuéstrese, que la superficie lateral de una pirámide regular es igual al área de la base, dividida por el coseno del ángulo entre el plano de la arista lateral y el plano de la base.

4.62. Las aristas de dos poliedros regulares son iguales, en tanto que las áreas de las superficies se relacionan como $\sqrt{3} : 6$. Determínense estos poliedros.

4.63. Si designamos con a la arista de un poliedro regular, entonces el área de su superficie es igual a $S = 5a^2 \sqrt{3}$. Determínese el poliedro.

4.64. Hállese el ángulo diedro entre las caras de un tetraedro regular.

4.65. Hállese el ángulo diedro entre las caras adyacentes de un octaedro regular.

4.66. Los puntos M, A, B y C no pertenecen a un mismo plano; $(MA) \perp (BC)$, $(MB) \perp (AC)$. Demuéstrese que $(MC) \perp (AB)$.

4.67. Sobre el punto A actúan las fuerzas $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, además $|\boldsymbol{F}_1| = 3\text{H}$, $|\boldsymbol{F}_2| = 4\text{H}$ y $|\boldsymbol{F}_3| = 5\text{H}$. La magnitud del ángulo entre las fuerzas $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ es igual a $60°$, y la fuerza $\boldsymbol{F}_3$ es perpendicular a cada una de ellas. Hállese la magnitud de la resultante.

Capítulo V *

ECUACIONES DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS EN EL ESPACIO

§ 61. Ecuaciones de la recta

Sea que l es cierta recta en el espacio. Lo mismo que en planimetría (§ 27), cualquier vector $\boldsymbol{a} \neq 0$, colineal a la recta l, se denomina *vector director* de esta recta. La posición de una recta en el espacio se define por entero por un vector director y por un punto perteneciente a la recta. Sea que

Fig. 197

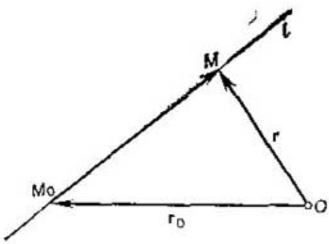


Fig. 198

la recta l con el vector director $\boldsymbol{a}$ pasa por el punto M_0, y M es un punto arbitrario del espacio. Es evidente, que el punto M (fig. 197) pertenece a la recta l cuando y sólo cuando el vector $\overrightarrow{M_0M}$ es colineal al vector $\boldsymbol{a}$, es decir,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{a}, \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{1}$$

Si los puntos M y M_0 están definidos por sus radiovectores $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{r}_0$ (fig. 198) respecto a cierto punto O del espacio, entonces $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, y la ecuación (1) toma la forma

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}, \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) se denominan *ecuaciones vectoriales paramétricas* de la recta. La variable t en las ecuaciones vectoriales paramétricas de la recta se denomina *parámetro*.

Sea que el punto M_0 de la recta l y el vector director $\boldsymbol{a}$ están dados por sus coordenadas:

$$M_0 (x_0;\ y_0;\ z_0), \quad \boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3).$$

Entonces, si $(x;\ y;\ z)$ son coordenadas del punto arbitrario M de la recta l, entonces

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$$

y la ecuación vectorial (1) es equivalente a las tres ecuaciones siguientes:

$$x - x_0 = ta_1, \quad y - y_0 = ta_2, \quad z - z_0 = ta_3$$

ó

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2, \\ z = z_0 + ta_3, \quad t \in R. \end{cases} \tag{3}$$

Las ecuaciones (3) se denominan *ecuaciones paramétricas de la recta* en el espacio.

Problema 1. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto M_0 $(-3;\ 2;\ 4)$ y que tiene el vector director $\boldsymbol{a} = (2;\ -5;\ 3)$.

△ En el caso dado $x_0 = -3$, $y_0 = 2$, $z_0 = 4$; $a_1 = 2$; $a_2 = -5$; $a_3 = 3$. Sustituyendo estos valores en las fórmulas (3), obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta dada

$$\begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 2 - 5t, \\ z = 4 + 3t, \quad t \in R. \end{cases} \blacktriangle$$

Eliminemos el paramétro t de la ecuación (3). Esto se puede hacer ya que $\boldsymbol{a} \neq 0$ y, por lo tanto, una de las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$ es notoriamente diferente de cero.

Sea que primeramente todas las coordenadas son diferentes de cero. Entonces

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_2}, \quad t = \frac{z - z_0}{a_3}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}. \qquad (4)$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones canónicas de la recta.*

Es de señalar, que las ecuaciones (4) forman un sistema de dos ecuaciones con tres variables x, y y z.

Si en las ecuaciones (3) una de las coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$, por ejemplo a_1, es igual a cero, entonces, eliminando el parámetro t, obtendremos de nuevo un sistema de dos ecuaciones con tres variables x, y y z:

$$x=x_0, \quad \frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

Estas ecuaciones también se denominan *ecuaciones canónicas de la recta*. Para la uniformidad ellas también se escriben convencionalmente en la forma (4)

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3},$$

considerando, que si el denominador es igual a cero, también es igual a cero el nominador respectivo. Estas ecuaciones son ecuaciones de la recta, que pasa por el punto M_0 $(x_0,$ $y_0;$ $z_0)$ paralelamente al plano de coordenadas yOz, ya que su vector director $(0;\ a_2;\ a_3)$ es paralelo a este plano.

Por fin, si en las ecuaciones (3) dos coordenadas del vector $\boldsymbol{a}$, por ejemplo, a_1 y a_2, son iguales a cero, estas ecuaciones toman la forma

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad z=z_0+ta_3, \quad t\in \boldsymbol{R}.$$

Estas son las ecuaciones de la recta, que pasa por el punto $M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$ paralelamente al eje Oz. Para tal recta $x=x_0$, $y=y_0$ y z es un número cualquiera. También en este caso, para la uniformidad, las ecuaciones de la recta pueden ser escritas (con la misma reserva) en la forma (4)

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

Así pues, para cualquier recta del espacio se pueden escribir las ecuaciones canónicas (4), y, viceversa, cualquier ecuación tipo (4), a condición de que, por lo menos, uno de los coeficientes a_1, a_2, a_3 no es igual a cero, define cierta recta del espacio.

Problema 2. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto $M_0(-1;\ 1;\ 7)$ paralelamente al vector $\boldsymbol{a} = (1;\ 2;\ 3)$.

△ En el caso dado, las ecuaciones (4) se escriben de la manera siguiente:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{3}. \quad \blacktriangle$$

Formemos la ecuación de la recta, que pasa por dos puntos dados $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Es evidente, que por vector director de esta recta se puede tomar el vector $\boldsymbol{a} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ y por punto M_0, a través del cual pasa una recta, el punto, por ejemplo M_1. Entonces, las ecuaciones (4) se escribirán del modo siguiente:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{5}$$

Estas son las ecuaciones de la recta que pasa por los dos puntos dados $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Problema 3. Escríbanse las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $M_1(-4;\ 1;\ -3)$ y $M_2(-5;\ 0;\ 3)$.

△ En el caso dado, $x_1 = -4$, $y_1 = 1$, $z_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_2 = 0$, $z_2 = 3$. Al sustituir estos valores en las fórmulas (5), obtendremos

$$\frac{x+4}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{6}. \quad \blacktriangle$$

Problema 4. Escríbanse las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $M_1(3;\ -2;\ 1)$ y $M_2(5;\ -2;\ \frac{1}{2})$.

△ Después de sustituir las coordenadas de los puntos M_1 y M_2 en las ecuaciones (5) obtendremos

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-\frac{1}{2}}. \quad \blacktriangle$$

§ 62. Ecuación del plano que pasa por tres puntos dados no situados en una misma recta

Sea que los puntos M_1, M_2, M_3 no están situados en una misma recta. Como sabemos, tres puntos tales determinan unívocamente cierto plano p (fig. 199). Formulemos la ecuación del plano p. Sea que M es un punto arbitrario del espacio. Es evidente que el punto M pertenece al plano p cuando y sólo cuando los vectores $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ son coplanares. Para que tres vectores sean coplanares es necesario y suficiente que su producto mixto sea igual a cero

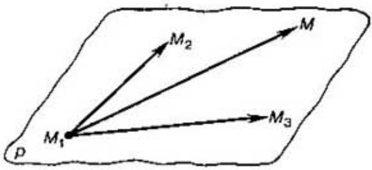


Fig. 199

(el 23*, teorema 2). Por lo tanto, la ecuación del plano que pasa por tres puntos no situados en una misma recta, puede ser escrita en la siguiente forma:

$$(\overrightarrow{M_1M};\ \overrightarrow{M_1M_2};\ \overrightarrow{M_1M_3}) = 0. \tag{1}$$

Si los puntos M_1, M_2 y M_3 están definidos por las coordenadas en un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas, entonces la ecuación (1) puede ser escrita en coordenadas. Sea que M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, M_3 $(x_3;\ y_3;\ z_3)$ son los puntos dados. Designemos con x, y y z las coordenadas de un punto arbitrario M del plano p. Hallemos las coordenadas de los vectores que entran en la ecuación (1):

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1).$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1).$$

El producto mixto de tres vectores es igual al determinante de tercer orden, en cuyas líneas se encuentran las coordenadas de los vectores (véase el 24*). Por consiguiente, la ecuación (1) en coordenadas tiene la forma

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Hallemos la ecuación del plano que pasa por los tres puntos $A\ (a;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ b;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ c)$ de los cuales

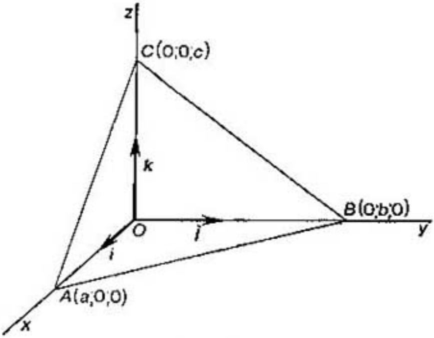


Fig. 200

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Estos puntos están situados en los ejes de coordenadas (fig. 200).

Considerando en la ecuación (2) $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$, $z_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, $z_3 = c$, obtendremos

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0.$$

Desarrollando el determinante en elementos de primera línea, obtendremos la ecuación

$$bc\ (x-a)+acy+abz=0$$

ó

$$bcx+acy+abz=abc,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (3)$$

La ecuación (3) se denomina *ecuación segmentaria de un plano*, ya que los números a, b y c señalan, qué segmentos están cortados por un plano en los ejes de coordenadas.

Problema. Escríbase la ecuación del plano que pasa por los puntos M_1 (—1; 4; —1), M_2 (—13; 2; —10), M_3 (6; 0; 12). Simplifíquese la ecuación obtenida. Obténgase la ecuación segmentaria del plano.

△ En el caso dado, la ecuación (2) se escribe en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z+1 \\ -12 & -2 & -9 \\ 7 & -4 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta es la ecuación del plano dado. Al desarrollar el determinante en la primera línea, obtendremos

$$-62(x+1)+93(y-4)+62(z+1)=0,$$

de donde

$$-2x+3y+2z-12=0.$$

Dividiendo término a término entre 12 y trasladando el término independiente de la ecuación al segundo miembro, obtendremos la ecuación segmentaria del plano dado

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1.$$

De la ecuación se deduce que el plano dado corta en los ejes de coordenadas los segmentos, cuyas longitudes son iguales a 6, 4 y 6 respectivamente. El eje Ox corta el plano en un punto con abscisa negativa, el eje Oy, en un punto con ordenada positiva, el eje Oz, en un punto con z-coordenada positiva. ▲

§ 63. Ecuación del plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a un vector dado

Sea dado cierto punto M_0 y el vector no nulo $\boldsymbol{n}$. A través del punto M_0 se puede trazar sólo un plano p perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$ (fig. 201).

Deduzcamos la ecuación del plano p. Sea que M es un punto arbitrario del espacio. Es evidente, que el punto M pertenece al plano p, si, y sólo si, el vector $\overrightarrow{M_0M}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$. Como sabemos (véase el § 18) para que dos vectores sean perpendiculares es necesario y suficiente que su producto escalar sea igual a cero. Por lo tanto, la ecuación del plano que pasa por el punto M_0 perpendicularmente al vector $\boldsymbol{n}$, puede ser escrita en la forma

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0. \qquad (1)$$

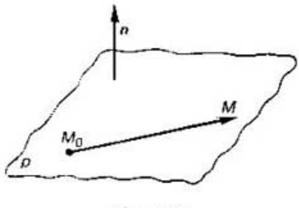


Fig. 201

El vector $\boldsymbol{n}$ en la ecuación (1) se denomina *vector normal de un plano*. Por vector normal se puede tomar un vector cualquiera, que sea perpendicular al plano.

Sea que el punto M_0 y el vector $\boldsymbol{n}$ están definidos por sus coordenadas en un cierto sistema rectangular de coordenadas:

$$M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0),\qquad \boldsymbol{n}=(A;\ B;\ C).$$

Designemos con x, y y z las coordenadas de un punto arbitrario M del plano p. Entonces, el vector $\overrightarrow{M_0M}$ tiene las coordenadas $x-x_0$, $y-y_0$ y $z-z_0$, y la ecuación (1) en coordenadas (véase el 19) se escribe en la siguiente forma:

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0. \qquad (2)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación del plano que pasa a través de un punto $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ perpendicularmente al vector $(A;\ B;\ C)$*.

Problema 1. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0\,(-3;\ 4;\ 7)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}=(1;\ -2;\ 6)$.

△ En el caso dado $x_0=-3$, $y_0=4$, $z_0=7$; $A=1$, $B=-2$, $C=6$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (2), obtendremos la ecuación buscada

$$1\,(x+3)-2\,(y-4)+6\,(z-7)=0,$$

6

$$x-2y+6z-31=0. \ ▲$$

Problema 2. Se dan los puntos $M_1\,(2;\ -1;\ 3)$ y $M_2\,(4;\ 5;\ 0)$. Escríbase la ecuación del plano que pasa por el punto M_2 y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}=(2;\ 6;\ -3)$.

△ Por vector normal del plano se puede tomar el vector $n = \overrightarrow{M_1M_2} = (2;\ 6;\ -3)$. Después de sustituir las coordenadas del vector normal y las coordenadas del punto $M_0 = M_2\,(4;\ 5;\ 0)$ en la ecuación (2) obtendremos

$$2\,(x-4)+6\,(y-5)-3z=0$$

ó

$$2x+6y-3z-38=0. \ \blacktriangle$$

Problema 3. En un triángulo con los vértices en los puntos $A_1\,(-5;\ 2;\ 7)$, $A_2\,(5;\ 0;\ 6)$, $A_3\,(0;\ -1;\ 2)$, está trazada la mediana A_1M_0. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto M_0 y es perpendicular a la mediana A_1M_0.

△ Por el vector normal del plano se puede tomar el vector $n = \overrightarrow{A_1M_0}$. Determinemos sus coordenadas. El punto M_0 es el punto medio del segmento A_2A_3, por lo tanto, si $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ son sus coordenadas, entonces

$$x_0=\frac{5+0}{2}=\frac{5}{2}, \quad y_0=\frac{0-1}{2}=-\frac{1}{2}, \quad z_0=\frac{6+2}{2}=4.$$

Las coordenadas del vector normal $n = (A;\ B;\ C)$ son, por consiguiente, iguales a $A = \frac{5}{2}+5 = \frac{15}{2}$, $B = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$, $C = 4 - 7 = -3$. La ecuación (2) tiene en el caso dado la forma

$$\frac{15}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)-3\,(z-4)=0$$

ó

$$15x-5y-6z-16=0. \ \blacktriangle$$

§ 64. Ecuación general del plano

Examinemos en el espacio un plano arbitrario. Sea que $M_0\,(x_0;\ y_0;\ z_0)$ es cierto punto de este plano y $n = (A;\ B;\ C)$, su vector normal cualquiera. En el párrafo anterior fue demostrado, que la ecuación de este plano tiene la forma

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0.$$

Escribámosla así:

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Designando con D el número $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$, obtendremos la ecuación

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Así pues, cada plano en el espacio puede ser definido por la ecuación (1), es decir, por una ecuación lineal con tres variables.

También es válida la afirmación inversa: toda ecuación lineal con tres variables, es decir, toda ecuación tipo (1) define un plano.

En efecto, en la ecuación (1), por lo menos uno de los coeficientes A, B, C no es igual a cero, de lo contrario la ecuación (1) es lineal. Sea que, por ejemplo, $C \neq 0$, entonces la ecuación puede escribirse en la siguiente forma:

$$A(x-0) + B(y-0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0.$$

De acuerdo con el párrafo anterior la ecuación obtenida y, por consiguiente, la ecuación (1) determinan el plano que pasa por el punto $M_0\left(0; 0; -\frac{D}{C}\right)$ y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}(A; B; C)$.

La ecuación (1) se denomina *ecuación general del plano*.

Subrayemos, que en esta ecuación los coeficientes A, B, C son coordenadas de un vector del plano. Por ejemplo, si el plano está definido por la ecuación $3x + 4y - 5z + 17 = 0$, se puede concluir inmediatamente que él es perpendicular al vector $(3; 4; -5)$.

Problema. Hállese el vector normal unitario del plano

$$7x + 4y - 4z + 1 = 0.$$

△ Por vector normal del plano dado se puede tomar el vector $\boldsymbol{n} = (7; 4; -4)$. Hallemos su longitud: $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9$. Por consiguiente, el vector normal unitario es el vector $\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; -\frac{4}{9}\right)$. El vector que lo es contrario $\left(-\frac{7}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right)$, también será, evidentemente, un vector normal unitario del plano dado. ▲

Analicemos cómo se sitúa el plano respecto al sistema de coordenadas en función de los valores A, B, C, D en la ecuación general del plano.

a) Si en la ecuación (1) $A = 0$, es decir, si esta ecuación tiene la forma $By + Cz + D = 0$, el vector normal tiene las coordenadas (0; B; C). El vector con tales coordenadas es perpendicular al eje Ox, por consiguiente, el plano es paralelo a este eje. Si no sólo $A = 0$, sino que $D = 0$, es decir, si la ecuación tiene la forma $By + Cz = 0$, el plano pasa a través del origen de coordenadas. Por lo tanto, cuando $A = D = 0$ el plano pasa por el eje Ox. Análogamente se analizan los casos cuando $B = 0$ (el plano es paralelo al eje de ordenadas) o $C = 0$ (el plano es paralelo al eje de las z-ordenadas).

b) Si en la ecuación (1) $A = 0$ y $B = 0$, es decir, si la ecuación tiene la forma $Cz + D = 0$, el vector normal tiene las coordenadas (0; 0; C). El vector con tales coordenadas es perpendicular al plano xOy, por consiguiente, en este caso el plano (1) es paralelo al plano de coordenadas xOy. Si no sólo $A = B = 0$, sino que $D = 0$, es decir, si la ecuación tiene la forma $Cz = 0$, el plano no sólo es paralelo al plano de coordenadas xOy, sino que pasa por el origen de coordenadas. Por lo tanto, cuando $A = B = D = 0$ la ecuación (1) define el plano de coordenadas xOy.

Análogamente se analizan los casos, cuando otro par cualquiera de coeficientes es en la ecuación (1), para las variables x, y, z, igual a cero.

c) Si en la ecuación (1) $D = 0$, es decir, si la ecuación tiene la forma $Ax + By + Cz = 0$, el plano pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector (A; B; C).

d) Si en la ecuación (1) todos los coeficientes para las variables y el término independiente son diferentes de cero, la ecuación puede ser transformada en la ecuación segmentaria de un plano:

$$\frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)} \frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)} = 1.$$

En este caso, el plano corta los ejes de coordenadas en los puntos: $\left(-\frac{D}{A}; 0; 0\right)$, $\left(0; -\frac{D}{B}; 0\right)$, $\left(0; 0; -\frac{D}{C}\right)$. Es fácil construir el plano por estos tres puntos.

§ 65. Cálculo del ángulo entre los planos. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Examinemos dos planos p_1 y p_2 con los vectores normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$. El ángulo φ entre los planos p_1 y p_2 se expresa por el ángulo $\psi = (\widehat{\boldsymbol{n}_1; \boldsymbol{n}_2})$ en la forma siguiente: si $\psi \leqslant 90°$, $\varphi = \psi$ (fig. 202, *a*); si $\psi > 90°$, entonces $\varphi = 180° - \psi$

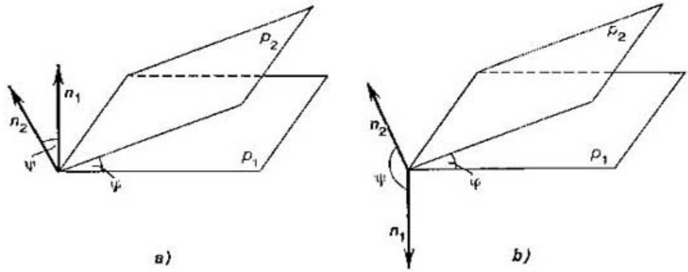


Fig. 202

(fig. 202, *b*). Es evidente que en todo caso es válida la igualdad

$$\cos\varphi = |\cos\psi|.$$

Según la fórmula (1) del § 20 tenemos

$$\cos\psi = \cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1; \boldsymbol{n}_2}) = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}$$

y, por consiguiente, el coseno del ángulo entre los planos p_1 y p_2 puede calcularse según la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|}. \qquad (1)$$

Si los planos están definidos por las ecuaciones generales $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, entonces por sus vectores normales se puede tomar los vectores $\boldsymbol{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (A_2\ B_2; C_2)$.

Escribiendo el segundo miembro de la fórmula (1) en coordenadas obtendremos

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{2}$$

Problema 1. Calcúlese el ángulo entre los planos

$$x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x + \sqrt{2}y - z + 13 = 0.$$

△ En el caso dado

$$A_1 = 1,\quad B_1 = -\sqrt{2},\quad C_1 = 1,\ A_2 = 1,\ B_2 = \sqrt{2},\quad C_2 = -1.$$

Según la fórmula (2) obtenemos

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}\,\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, el ángulo entre los planos dados es igual a 60°. ▲

Los planos con los vectores normales $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$:

a) son paralelos cuando y sólo cuando los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ son colineales;

b) son perpendiculares cuando y sólo cuando los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ son perpendiculares, es decir, cuando $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2 = 0$.

De aquí obtenemos las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos planos definidos por las ecuaciones generales.

Para que los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ sean paralelos, es necesario y suficiente que se cumplan las igualdades

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{3}$$

Si cualquiera de los coeficientes A_2, B_2, C_2 es igual a cero, se sobrentiende, que es igual a cero también el coeficiente correspondiente A_1, B_1, C_1.

Si no se cumple por lo menos una de estas dos igualdades, los planos no son paralelos, es decir, ellos se cortan.

Para que sean perpendiculares los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{4}$$

Problema 2. Señalar los planos paralelos y perpendiculares entre los siguientes pares de planos:

$$2x + 5y + 7z - 1 = 0 \text{ y } 3x - 4y + 2z = 0,$$
$$y - 3z + 1 = 0 \text{ y } 2y - 6z + 5 = 0,$$
$$4x + 2y - 4z + 1 = 0 \text{ y } 2x + y + 2z + 3 = 0.$$

△ Para el primer par de planos

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 2\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 7\cdot 2 = 0,$$

es decir, se cumple la condición de perpendicularidad. Los planos son perpendiculares.

Para el segundo par de planos tenemos

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad \text{ya que } \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6},$$

y los coeficientes A_1 y A_2 son iguales a cero. Por consiguiente, los planos del segundo par son paralelos.

Para el tercer par tenemos

$$\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}, \quad \text{ya que } \frac{2}{1} \neq \frac{-4}{2},$$

y $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 4\cdot 2 + 2\cdot 1 - 4\cdot 2 \neq 0$, es decir, los planos del tercer par no son paralelos ni perpendiculares.

§ 66. Condiciones de coincidencia e intersección de los planos

Si los planos p_1 y p_2 definidos por las ecuaciones

$$A_1x+B_1y+C_1z + D_1=0 \text{ y } A_2x+B_2y + C_2z + D_2=0, \quad (1)$$

tienen un punto común, entonces sus coordenadas satisfacen cualquiera de las ecuaciones (1). Por lo tanto, para hallar los puntos comunes de los planos dados se debe resolver el sistema de las ecuaciones

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \quad (2)$$

es decir, el sistema de dos ecuaciones con tres variables. Cuando se cumple la condición

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \quad (3)$$

el sistema (2) no tiene soluciones. En efecto, supongamos lo inverso, o sea, que $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ son las soluciones del sistema. Entonces, si

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=k,$$

de la segunda ecuación del sistema (2) obtenemos

$$A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0=-D_2,$$

y de la primera

$$k\,(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0)=-D_1$$

y, por consiguiente, $\frac{D_1}{D_2}=k$, lo que contradice a la condición (3).

Sabemos que la condición $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, es la condición de paralelismo de los planos. Así pues, siempre que se cumplan las condiciones (3), los planos p_1 y p_2 son paralelos y no coinciden.

En el caso, cuando los coeficientes y los términos independientes del sistema (2) satisfacen la condición

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}, \tag{4}$$

el sistema tiene la forma

$$\begin{cases} k\,(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema determina un mismo plano. Así pues, la condición (4) es la condición necesaria y suficiente de coincidencia de los planos.

Si los planos p_1, p_2 no son paralelos, es decir, si ellos se cortan, entonces

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\quad \text{ó}\quad \frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}. \tag{5}$$

En este caso las ecuaciones (2) son las ecuaciones de la recta l de intersección de los planos p_1 y p_2. Mostremos cómo se pueden hallar las ecuaciones canónicas de esta recta. Para escribir las ecuaciones canónicas de la recta, hace falta saber las coordenadas de cierto punto suyo y las coordenadas de su vector director $\boldsymbol{a}$. Por coordenadas del punto M_0 se puede tomar cualquier solución del sistema (2). Por vector director $\boldsymbol{a}$ de la recta l se puede tomar el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$, es decir, de los vectores normales de los planos p_1 y p_2. En efecto (fig. 203), el vector $[\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2]$ es, según la definición del producto vectorial, perpendicular

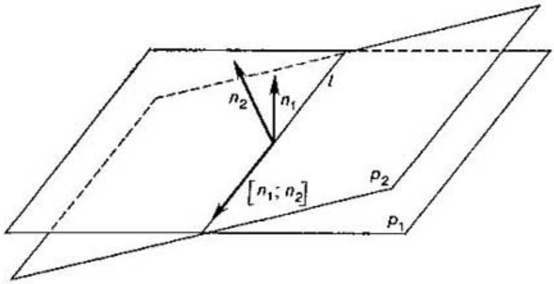


Fig. 203

a los vectores $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ y, por lo tanto, dicho vector es paralelo a los planos p_1 y p_2 y, por consiguiente, colineal a la recta l de su intersección.

Problema 1. Fórmese la ecuación canónica de una recta, que es la intersección de los planos $x - 2y + z + 1 = 0$ y $2x - y + 3x - 2 = 0$.

△ Puesto que $\boldsymbol{n}_1 = (1;\ -2;\ 1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (2;\ -1;\ 3)$, entonces

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}.$$

Para determinar las coordenadas de cualquier punto de una recta dada hallemos cualquier solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Considerando que, por ejemplo, $z = 0$, obtendremos

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x - y = 2, \end{cases}$$

de donde $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. Por consiguiente, el sistema inicial tiene la solución $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$, y, por lo tanto, la recta dada pasa por el punto $M\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$.

Conociendo las coordenadas de un punto de la recta y las coordenadas de su vector director, escribimos las ecuaciones canónicas de la recta dada

$$\frac{x - \frac{5}{3}}{-5} = \frac{y - \frac{4}{3}}{-1} = \frac{z}{3}. \ \blacktriangle$$

Es de señalar, que si los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ se intersecan, la ecuación de todo plano que pasa por la recta de su intersección, puede ser escrita en la forma

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

donde α y β son ciertos números.

Problema 2. Escríbase la ecuación del plano, que pasa por la recta de intersección de los planos $3x - 2y - z + 4 = 0$ y $x - 4y - 3z - 2 = 0$ y el punto M_0 $(1; 1; -2)$.

△ Formemos la ecuación de los planos, que pasan por la recta de intersección de los planos dados:

$$\alpha (3x - 2y - z + 4) + \beta (x - 4y - 3z - 2) = 0.$$

Puesto que M_0 pertenece al plano buscado, entonces

$$\alpha (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 + 4) + \beta (1 - 4 \cdot 1 + 6 - 2) = 0,$$

y, por consiguiente,

$$7\alpha + \beta = 0,$$

de donde se deduce, por ejemplo, que $\alpha = 1$, $\beta = -7$.

La ecuación buscada del plano será

$$3x - 2y - z + 4 - 7 (x - 4y - 3z - 2) = 0,$$

ó

$$2x - 13y - 10z - 9 = 0. \ \blacktriangle$$

§ 67. Ecuación normal del plano

Sea que q es un plano arbitrario (fig. 204). Designemos con p la distancia entre el origen de coordenadas y el plano q, y con α, β, γ, los ángulos entre el vector normal $\boldsymbol{n}$ del plano q y los ejes de coordenadas. Es evidente, que la posición del plano en el espacio se define por entero por las magnitudes α, β, γ y p. Expresemos la ecuación del plano q por medio de estas magnitudes.

Sea que M_0 es el punto de intersección del plano q y de una recta perpendicular a él, que pasa por el origen de

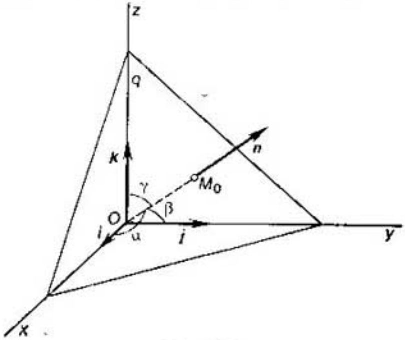


Fig. 204

coordenadas, $\boldsymbol{n}_0$ es el vector normal unitario del plano q. Las coordenadas del punto M_0 y del vector $\boldsymbol{n}_0$ se expresan por medio de las magnitudes dadas α, β, γ y p del modo siguiente:

$$M_0\ (p \cos \alpha;\ p \cos \beta;\ p \cos \gamma),$$

$$\boldsymbol{n}_0 = (\cos \alpha;\ \cos \beta;\ \cos \gamma).$$

En el párrafo 63 obtuvimos la ecuación del plano que pasa por el punto $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ y tiene el vector normal $(A;\ B;\ C)$: $A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0$.

Sustituyendo en esta ecuación las coordenadas del punto M_0 y del vector $\boldsymbol{n}_0$, obtendremos la ecuación del plano q

$$\cos \alpha\,(x - p \cos \alpha) + \cos \beta\,(y - p \cos \beta) + \\ + \cos \gamma\,(z - p \cos \gamma) = 0$$

ó

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p\,(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \\ + \cos^2 \gamma) = 0.$$

Puesto que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son las coordenadas del vector normal unitario n_0, entonces $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ y, por consiguiente,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{1}$$

La ecuación (1) se denomina *ecuación normal del plano.* En esta ecuación los coeficientes de las variables x, y y z son las coordenadas del vector normal unitario del plano, y el término independiente $(-p)$, tomado con signo menos, es igual a la distancia entre el origen de coordenadas y el plano.

Por ejemplo, la ecuación $\sqrt{2}x - y - z + 20 = 0$ no es una ecuación normal, ya que el vector $(\sqrt{2}; -1; -1)$ no es unitario y el término independiente de la ecuación es positivo. Multipliquemos ambos miembros de la ecuación dada por $\left(-\frac{1}{2}\right)$. La ecuació obteniba

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 10 = 0$$

es normal, ya que el vector $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, como es fácil comprobar, es unitario, y el término independiente de la ecuación es negativo. El vector normal del plano examinado forma con los ejes de coordenadas tales ángulos α, β y γ que

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2},$$

es decir, $\alpha = 135°$, $\beta = \gamma = 60°$. El plano pasa a la distancia de 10 unidades de longitud del origen de coordenadas.

La ecuación general del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

siempre puede ser transformada de manera tal, que se reduzca a la forma normal. Para esto es necesario multiplicar ambos miembros de la ecuación por el factor normalizador

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \text{ si } D \leqslant 0, \qquad \text{y} -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

si $D > 0$.

En efecto, si $D \leqslant 0$, la ecuación

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+$$
$$+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

es normal, ya que el vector

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

es unitario y $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \leqslant 0$. Si $D > 0$, la ecuación

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y-$$
$$-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

es normal.

Problema. Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y el plano $4x+\sqrt{11}y+3z+150=0$.

△ Puesto que $D = 150 > 0$, el factor normalizador es igual a

$$-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{1}{\sqrt{16+11+9}}=-\frac{1}{6}.$$

La ecuación normal del plano dado es la ecuación

$$-\frac{2}{3}x-\frac{\sqrt{11}}{6}y-\frac{1}{2}z-25=0.$$

Teniendo en cuenta el sentido geométrico del término independiente de la ecuación normal del plano, obtenemos, que la distancia buscada es igual a 25. ▲

§ 68. Distancia de un punto a un plano

Hallemos la distancia d del punto arbitrario $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ al plano q definido por su ecuación normal

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

Esta distancia es igual a la longitud del segmento M_1K, donde K es la proyección del punto M_1 sobre el plano q

(fig. 205). Sea que M_0 es el punto de intersección del plano q con la recta perpendicular a él, que pasa por el origen de coordenadas; $\boldsymbol{n}_0$ es el vector normal unitario del plano q.

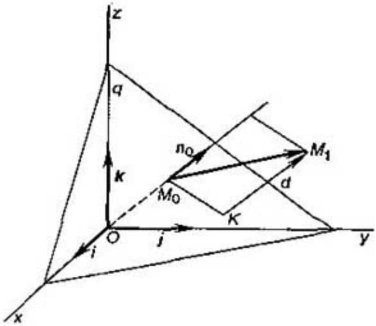


Fig. 205

La distancia buscada d es igual al módulo de la proyección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sobre la dirección del vector $\overrightarrow{KM_1}$ o, como $\overrightarrow{KM_1}$ y $\boldsymbol{n}_0$ son colineales, sobre la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$. De este modo,

$$d = |\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}_0}\overrightarrow{M_0M_1}|. \tag{1}$$

Expresemos la proyección del vector $\overrightarrow{M_0M_1}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{n}_0$ por el producto escalar de estos vectores.

De acuerdo con la fórmula (3) del § 17 obtendremo

$$d = |\mathrm{pr}_{\boldsymbol{n}_0}\overrightarrow{M_0M_1}| = |\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\boldsymbol{n}_0|.$$

Puesto que $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - p\cos\alpha;\ y_1 - p\cos\beta;\ z_1 - - p\cos\gamma)$ y $\boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha;\ \cos\alpha;\ \cos\gamma)$, entonces

$$d = |\,(x_1 - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y_1 - p\cos\beta)\cos\beta + + (z_1 - p\cos\gamma)\cos\gamma\,|$$

y, por consiguiente,

$$d = | x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p |.$$

Así pues, la distancia de un punto a un plano es igual al módulo del número, obtenido como resultado de la sustitución de las coordenadas del punto dado, en el primer miembro de la ecuación normal del plano.

Problema 1. Determínese la distancia del punto M (0; 1; 1) al plano $\sqrt{23}x - 7y - 3z + 73 = 0$.

Normalizamos la ecuación del plano. Puesto que el factor normalizador es igual a $-\frac{1}{\sqrt{23+49+9}} = -\frac{1}{9}$, obtenemos

$$-\frac{\sqrt{23}}{9}x + \frac{7}{9}y + \frac{3}{9}z - \frac{73}{9} = 0.$$

Según la fórmula (2) hallemos la distancia

$$d = \left| -\frac{\sqrt{23}}{9}\cdot 0 + \frac{7}{9}\cdot 1 + \frac{3}{9}\cdot 1 - \frac{73}{9} \right| = \frac{|7+3-73|}{9} = 7. \ \blacktriangle$$

Problema 2. Hállese la distancia entre los planos paralelos

$$x - 2y + 2z - 3 = 0 \text{ y } 2x - 4y + 4z - 30 = 0.$$

$\triangle$ Para determinar la distancia entre dos planos paralelos es suficiente escoger en uno de ellos un punto cualquiera y luego hallar la distancia de este punto al otro plano. El punto (15; 0; 0) pertenece, evidentemente, al segundo plano. La ecuación normal del primer plano es la ecuación

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0.$$

Hallamos la distancia d por la fórmula (2):

$$d = \left| \frac{1}{3}\cdot 15 - \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot 0 - 1 \right| = 4.$$

§ 69. Cálculo de un ángulo entre rectas

El problema de cálculo de un ángulo entre dos rectas en el espacio se resuelve del mismo modo que en el plano (32). Designemos con φ la magnitud del ángulo entre las rectas l_1 y l_2, y con ψ, la magnitud del ángulo entre los vectores directores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de estas rectas. Entonces, si $\psi \leqslant 90°$

(fig. 206, *a*), $\varphi = \psi$; si $\psi > 90°$ (fig. 206, *b*), $\varphi = 180° - \psi$. Es evidente que en ambos casos la igualdad $\cos\varphi = |\cos\psi|$

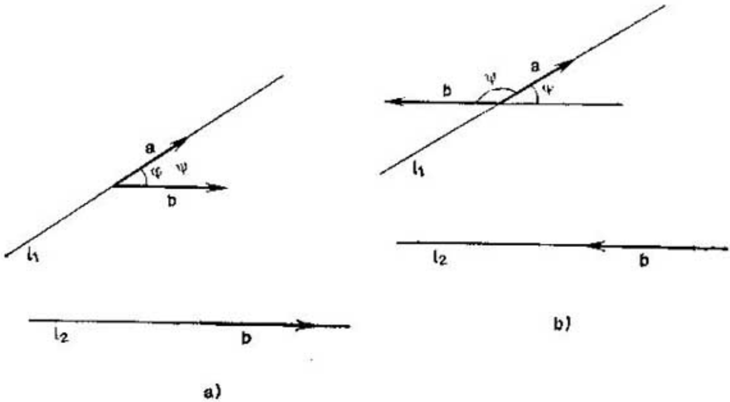


Fig. 206

es válida. Según la fórmula (1) del 20 tenemos

$$\cos\psi = \cos(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|},$$

por consiguiente,

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

Sea que las rectas están definidas por sus ecuaciones canónicas

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} \quad y \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}.$$

Entonces, el ángulo φ entre las rectas se determina con ayuda de la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (1)$$

Si una de las rectas (o ambas) está definida no por las ecuaciones canónicas, entonces para calcular el ángulo es necesario hallar las coordenadas de los vectores directores de estas rectas y, luego, hacer uso de la fórmula (1).

Problema 1. Calcúlese el ángulo entre las rectas

$$\frac{x+3}{-\sqrt{2}}=\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z-7}{-2} \quad \text{y} \quad \frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{y+1}{\sqrt{3}}=\frac{z-1}{\sqrt{6}}.$$

△ Los vectores directores de las rectas tienen las coordenadas: $\boldsymbol{a}=(-\sqrt{2};\sqrt{2};\ -2)$, $\boldsymbol{b}=(\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ \sqrt{6})$. Según la fórmula (1) hallamos

$$\cos\varphi=\frac{|-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2\sqrt{6}\,|}{\sqrt{2+2+4}\,\sqrt{3+3+6}}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, el ángulo entre las rectas dadas es igual a 60°. ▲

Problema 2. Calcúlese el ángulo entre las rectas

$$\begin{cases} 3x-12z+7=0, \\ x+y-3z-1=0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 4x-y+z=0, \\ y+z+1=0. \end{cases}$$

△ Tomemos por vector director $\boldsymbol{a}$ de la primera recta el producto vectorial de los vectores normales $\boldsymbol{n}_1=(3;\ 0;\ -12)$ y $\boldsymbol{n}_2=(1;\ 1;\ -3)$ de los planos que definen esta recta. Según la fórmula (4) del 22 obtenemos

$$\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=12\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

Análogamente hallamos el vector director de la segunda recta:

$$\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

Según la fórmula (1) calculamos el coseno del ángulo buscado:

$$\cos\varphi=\frac{|\,12\cdot(-2)-3\cdot(-4)+3\cdot 4\,|}{\sqrt{12^2+3^2+3^2}\,\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=0.$$

Por consiguiente, el ángulo entre las rectas dadas es igual a 90°. ▲

Problema 3. En la pirámide triangular $MABC$ las aristas MA, MB y MC son recíprocamente perpendiculares (fig. 207);

sus longitudes son iguales a 4, 3, 6 respectivamente. El punto D es el punto medio de $[MA]$. Hállese el ángulo φ entre las rectas CA y DB.

△ Sea que $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DB}$ son los vectores directores de las rectas CA y DB.

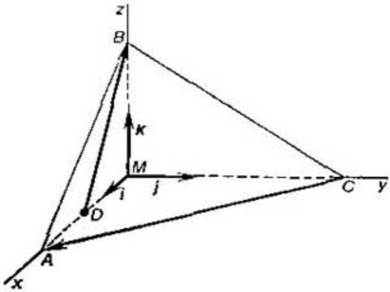


Fig. 207

Tomemos el punto M por origen de coordenadas. Según la condición del problema tenemos $A\ (4;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 3)$, $C\ (0;\ 6;\ 0)$, $D\ (2;\ 0;\ 0)$. Por lo tanto $\overrightarrow{CA} = (4;\ -6;\ 0)$, $\overrightarrow{DB} = (-2;\ 0;\ 3)$.

Hagamos uso de la fórmula (1):

$$\cos\varphi = \frac{|4\cdot(-2)+(-6)\cdot 0+0\cdot 3|}{\sqrt{16+36+0}\ \sqrt{4+0+9}} = \frac{4}{13}.$$

Por la tabla de los cosenos determinamos, que el ángulo entre las rectas CA y DB es igual, aproximadamente, a 72°. ▲

§ 70. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas

Las rectas con los vectores directores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$:

a) son paralelas si, y sólo si, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales;

b) son perpendiculares cuando y sólo cuando los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares, es decir, cuando $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

De aquí obtenemos las condiciones necesarias y suficientes de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas, definidas por las ecuaciones canónicas.

Para que las rectas

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{y} \quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$$

sean paralelas, es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \tag{1}$$

En caso de que cualquiera de los números b_1, b_2, b_3 sea igual a cero, deberá anularse también el número que le corresponda a_1, a_2, a_3.

Para que las rectas sean perpendiculares es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \tag{2}$$

Problema 1. Entre los siguientes pares de rectas señálense los pares de rectas paralelas y perpendiculares:

a) $\dfrac{x-0{,}3}{2}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-1}{-13}$ y $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z+2}{2}$;

b) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y-2z+1=0 \end{cases}$ y $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{4}$;

c) $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=4+3t, \\ z=4+t \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x+y-5=0, \\ 3y-2z+9=0. \end{cases}$

a) Es evidente que los vectores directores $\boldsymbol{a}=(2;\,4;\,-13)$ y $\boldsymbol{b}=(3;\,5;\,2)$ no son colineales. Por consiguiente, las rectas no son paralelas. Comprobemos la condición de perpendicularidad

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2\cdot 3+4\cdot 5-13\cdot 2=0.$$

Las rectas son perpendiculares.

b) El vector director de la segunda recta tiene las coordenadas $\boldsymbol{b}=(3;\,2;\,4)$. Por vector director de la primera recta se puede tomar el producto vectorial de los vectores normales $n_1 = (2; -3; 0)$ y $n_2 = (4; -2 -2)$ de los planos que definen esta recta:

$$a = [n_1; n_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6i + 4j + 8k.$$

La condición (1) se cumple, ya que $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$. Las rectas son paralelas.

c) El vector director de la primera recta tiene las coordenadas $a = (2; 3; 1)$. Es fácil reducir las ecuaciones de la segunda recta a la forma canónica

$$\frac{x-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = y = \frac{z-\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}.$$

Por consiguiente, $b = \left(-\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}\right)$.

Los vectores a y b no son paralelos. Tampoco son perpendiculares, ya que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 + \frac{3}{2} \neq 0.$$

Las rectas dadas no son paralelas ni perpendiculares.

Problema 2. Hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto M_0 (2; −3; 4) perpendicularmente a las rectas

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad \text{y} \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{3}.$$

△ Sea que el vector $(a; b; c)$ es el vector director de la recta buscada. Entonces sus ecuaciones tienen la forma

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y+3}{b} = \frac{z-4}{c}.$$

Utilizando la condición (2) de perpendicularidad de las rectas, obtendremos un sistema de dos ecuaciones respecto a las incógnitas a, b y c:

$$\begin{cases} a - b + c = 0, \\ 2a + b + 3c = 0. \end{cases}$$

Este sistema se resuelve fácilmente. Su solución es

$$\left(-\frac{4c}{3};\ -\frac{c}{3};\ c\right),$$

donde c es un número arbitrario. Por consiguiente, la ecuación de la recta buscada tiene la forma

$$\frac{x-2}{-\frac{4c}{3}}=\frac{y+3}{-\frac{c}{3}}=\frac{z-4}{c},$$

$c \neq 0$. De donde

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-3}. \ \blacktriangle$$

§ 71. Rectas cruzadas. Condición de pertenencia de dos rectas a un mismo plano

Como se sabe (46), las rectas l_1 y l_2 se denominan cruzadas, si no están situadas en un mismo plano. Sea que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores directores de estas rectas, y los puntos M_1 y M_2 pertenecen a las rectas l_1 y l_2 (fig. 208) respectivamente. Entonces, los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ no son coplanares, y, por lo tanto, su producto mixto no es igual a cero, es decir, $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0$.

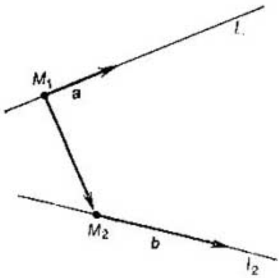


Fig. 208

También es válida la afirmación inversa: si $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0$, los vectores $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\overrightarrow{M_1M_2}$ no son coplanares, y, por consiguiente, las rectas l_1 y l_2 no están situadas en un mismo plano, es decir, se cruzan. Así pues, dos rectas se cruzan cuando y sólo cuando se cumple la condición

$$(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores directores de las rectas, y M_1 y M_2 son puntos pertenecientes a las rectas dadas respectivamente.

La condición

$$(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \overrightarrow{M_1M_2}) = 0 \tag{2}$$

es la condición necesaria y suficiente para que las rectas se sitúen en un mismo plano. Si las rectas están definidas por sus ecuaciones canónicas

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{y} \quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3},$$

entonces $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$, $M_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ y la condición (2) se escribe del modo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Problema. Analícese la situación recíproca de las rectas:

a) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-4}{1}$ y $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3}$;

b) $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=3-8t, \\ z=7+4t \end{cases}$ y $\begin{cases} x=2-t, \\ y=5+t, \\ z=7+t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 5x+y-z+17=0 \end{cases}$ y $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-8}{2}$.

△ a) En el caso dado $\boldsymbol{a} = (2;\ 3;\ 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1;\ 2;\ 3)$, $M_1\,(2;\ 4;\ 4)$, $M_2\,(3;\ -1;\ 3)$. Comprobamos la condición (3):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 26+6+3 \neq 0.$$

Por consiguiente, las rectas dadas se cruzan.

b) Los vectores directores de las rectas tienen las coordenadas $\boldsymbol{a} = (2;\ -8;\ 4)$, $\boldsymbol{b} = (-1;\ 1;,1)$. La primera recta pasa por el punto M_1 (3; 3; 7), la segunda recta, por el punto M_2 (2; 5; 7). Comprobemos la condición (3):

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -4 + 8 - 4 = 0.$$

Las rectas dadas están situadas en un mismo plano. Los vectores directores de las rectas son, evidentemente, no colineales. Por consiguiente, las rectas se cruzan.

c) Tomemos por vector director de la primera recta el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{n}_1 = (1;\ 1;\ 1)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (5;\ 1;\ -1)$, es decir, de los vectores normales de los planos que definen la primera recta:

$$\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

De la ecuación de la segunda recta vemos que $\boldsymbol{b} = (1;\ -3;\ 2)$. Los vectores directores de las rectas dadas son colineales, ya que $\frac{-2}{1} = \frac{6}{-3} = \frac{-4}{2}$. Por consiguiente, las rectas dadas son paralelas. Puesto que el punto M_3 (4; 2; 8) perteneciente a la segunda recta no satisface las ecuaciones de la primera recta, las rectas dadas no coinciden. ▲

§ 72. Cálculo del ángulo entre una recta y un plano. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de una recta y un plano

Examinemos la recta l con el vector director $\boldsymbol{a}$ y el plano p con el vector normal $\boldsymbol{n}$. Designemos con φ el ángulo entre la recta l y el plano p, y con ψ, el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$. Es fácil ver que $\varphi = 90° - \psi$, si $\psi \leqslant 90°$ (fig. 209, *a*) y $\varphi = \psi - 90°$, si $\psi > 90°$ (fig. 209, *b*). En ambos casos es válida la igualdad sen $\varphi = |\cos\psi|$.

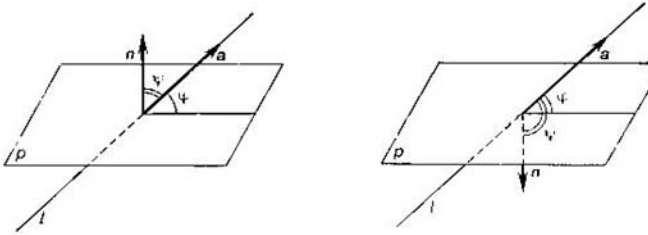
Por la fórmula (1) del § 20 hallamos

$$\cos\psi = \cos\widehat{(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{n})} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{n}|},$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{n}|}.$$

Si son conocidas las coordenadas cartesianas rectangulares del vector director de la recta y del vector normal del



a)

b)

Fig. 209

plano $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ y $\boldsymbol{n} = (A;\ B;\ C)$, entonces el ángulo φ puede ser calculado con ayuda de la fórmula

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|a_1A + a_2B + a_3C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1}$$

Problema 1. Calcúlese el ángulo entre la recta y el plano:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-7}{-1}$ y $4x + y + z + 13 = 0$;

b) $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = -4t \end{cases}$ y $x + 2y - z + 1 = 0$,

c) $\begin{cases} 3x - 2y + z + 1 = 0, \\ 4x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$ y $2x - y - 2z + 5 = 0$.

△ a) En el caso dado $\boldsymbol{a} = (2;\ 2;\ -1)$, $\boldsymbol{n} = (4;\ 1;\ 1)$. Por la fórmula (1) calculamos el seno del ángulo buscado:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{|2\cdot4 + 2\cdot1 - 1\cdot1|}{\sqrt{4+4+1}\ \sqrt{16+1+1}} = \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El ángulo entre la recta y el plano es igual a $45°$.
b) Puesto que $\boldsymbol{a} = (-3;\ -1;\ -4)$ y $\boldsymbol{n} = (1;\ 2;\ -1)$,

entonces

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|-3-2+4|}{\sqrt{9+1+16}\,\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{26}\,\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{39}} \approx 0{,}08.$$

Por la tabla de senos hallamos que $\varphi \approx 5°$.

c) Tomemos por vector director de la recta el producto vectorial de los vectores normales $\boldsymbol{n}_1 = (3;\ -2;\ 1)$ 1) $\boldsymbol{n}_2 = (4;\ -3;\ 4)$ de los planos que definen la recta. Hallemos sus coordenadas:

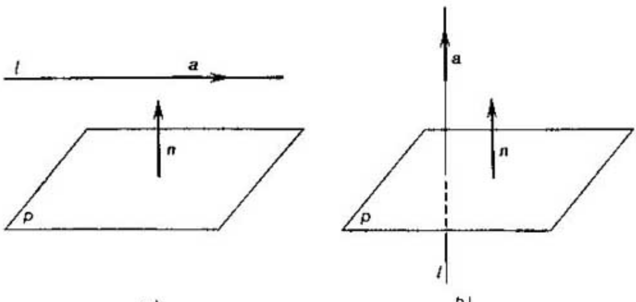
$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -5\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Las coordenadas del vector normal del plano dado las hallamos de su ecuación $\boldsymbol{n} = (2;\ -1;\ -2)$. Por la fórmula (1) calculamos el seno del ángulo buscado:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{|-10+8+2|}{\sqrt{25+64+1}\,\sqrt{4+1+4}} = 0.$$

El ángulo entre la recta y el plano es igual a cero. ▲

La recta con el vector director $\boldsymbol{a}$ y el plano con el vector normal $\boldsymbol{n}$ son paralelas si, y sólo si, los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ son



a) b)

Fig. 210

perpendiculares (fig. 210, *a*). Es evidente, que para que la recta y el plano sean perpendiculares, es necesario y suficiente que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{n}$ sean colineales (fig. 210, *b*).

Si la recta y el plano están definidos por las ecuaciones

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{y} \quad Ax+By+Cz+D=0,$$

ellos son:

a) paralelos si, y sólo si,

$$a_1A + a_2B + a_3C = 0; \tag{2}$$

b) perpendiculares cuando y sólo cuando

$$\frac{a_1}{A}=\frac{a_2}{B}=\frac{a_3}{C}.$$

La recta está situada en el plano si, y sólo si, en primer lugar, es paralela al plano y, en segundo lugar, por lo menos, un punto suyo pertenece al plano. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente de pertenencia de la recta $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ consiste en el cumplimiento de las dos igualdades siguientes: $a_1A + a_2B + a_3C = 0$ y $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. (4)

Problema 2. Entre los siguientes pares de rectas y planos indíquense los paralelos o perpendiculares; en caso de intersecarse una recta y un plano, hállese el punto de intersección:

a) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-5}$ y $7x-2y+3z-1=0$;

b) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ y $x-y+z-3=0$;

c) $\begin{cases} 6x+3y-2z-21=0, \\ 6x+\text{[illegible]}y+2z-31=0 \end{cases}$ y $2x-6y-3z-91=0$.

△ a) El vector director do la recta tiene las coordenadas $\boldsymbol{a} = (3;\ 3;\ -5)$, el vector normal del plano, $\boldsymbol{n} = (7;\ -2;\ 3)$. Es evidente, que los vectores son no colineales; por consiguiente, la recta no es perpendicular al plano. Comprobemos la condición (2) de paralelismo de la recta y el plano

$$a_1A + a_2B + a_3C = 3\cdot 7 - 3\cdot 2 - 5\cdot 3 = 0.$$

La condición se cumple. La recta y el plano dados son paralelos.

b) En el caso dado $\boldsymbol{a} = (2;\ 3;\ 4)$ y $\boldsymbol{n} = (1;\ -1;\ 1)$. Los vectores no son colineales, por eso la condición (3) no se cumple. Comprobemos la condición (2) de paralelismo de la recta y el plano:

$$a_1A + A_2B + a_3C = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 + 4\cdot 1 \neq 0.$$

La condición no se cumple. La recta y el plano no son paralelos y, por consiguiente, se cortan. Para determinar las coordenadas del punto de intersección es necesario resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{4}, \\ x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Tal sistema es fácil resolver, escribiendo previamente las ecuaciones de la recta en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$$

Sustituyendo los valores x, y y z en la ecuación del plano, obtendremos

$$2t - (1 + 3t) + 1 + 4t - 3 = 0,$$

de donde $t = 1$ y, por lo tanto, $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$. La recta y el plano se intersecan en el punto $(2;\ 4;\ 5)$.

c) Tomemos por vector director de la recta el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{n}_1 = (6;\ 3;\ -2)$ y $\boldsymbol{n}_2 = (6;\ 1;\ 2)$, es decir, de los vectores normales que definen la recta dada. Hallemos sus coordenadas:

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1;\ \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{i} - 24\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}.$$

El vector normal $\boldsymbol{n}$ del plano dado tiene las coordenadas $(2;\ -6;\ -3)$. La condición (3) de perpendicularidad de la recta y del plano está cumplida, ya que

$$\frac{8}{2} = \frac{-24}{-6} = \frac{-12}{-3}.$$

La recta y el plano dados son perpendiculares. Para determinar el punto de intersección de la recta y del plano escribamos la ecuación de la recta en la forma paramétrica. El vector director de la recta ya está hallado, es el vector $\boldsymbol{a} = (8; -24; -12)$ o el vector colineal a él $(2; -6; -3)$. Nos resta hallar un punto cualquiera de la recta. Consideramos que $x = 0$, entonces

$$\begin{cases} 3y - 2z = 21, \\ y + 2z = 31, \end{cases}$$

de donde $y = 13$, $z = 9$. El punto $(0; 13; 9)$ pertenece a la recta. Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de la recta tienen la forma

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 13 - 6t, \\ z = 9 - 3t. \end{cases}$$

Sustituyendo los valores x, y y z en la ecuación del plano, obtendremos

$$4t - 6(13 - 6t) - 3(9 - 3t) - 91 = 0$$

o $49t = 196$, $t = 4$. El punto de la recta, que se obtiene para un valor del parámetro $t = 4$, pertenece al plano. La recta y el plano se cortan en el punto $(8; -11; -3)$. ▲

Problema 3. ¿Para qué valores C y D la recta $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ pertenece al plano $x + 2y + Cz + D = 0$?

△ En el caso dado las condiciones (4) de pertenencia de la recta al plano tienen la forma:

$$-2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot C = 0, \qquad -2 + 2\cdot 1 + 3\cdot C + D = 0.$$

Por consiguiente, $C = -2$ y $D = 6$. ▲

Problema 4. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(4; -3; 1)$ paralelamente a las rectas:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

△ La ecuación del plano que pasa por el punto dado M_0 tiene la forma

$$A(x - 4) + B(y + 3) + C(z - 1) = 0.$$

Este plano será paralelo a las rectas dadas si, y sólo si, para cada una de las rectas está cumplida la condición (2) de paralelismo de la recta y del plano. Por lo tanto, para determinar los coeficientes A, B y C tenemos dos ecuaciones

$$6A + 2B - 3C = 0,$$
$$5A + 4B + 2C = 0,$$

de las cuales hallamos fácilmente: $A = \frac{8}{7}C$, $B = -\frac{27}{14}C$.

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

La ecuación buscada del plano será la ecuación

$$\frac{8}{7}C(x-4) - \frac{27}{14}C(y+3) + C(z-1) = 0 \qquad C \neq 0,$$

ó $16x - 27y + 14z - 159 = 0$. ▲

Problema 5. Hállense las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto M_0 $(-5; 0; 8)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + 5z = 0$.

△ Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto dado M_0 tienen la forma

$$\frac{x+5}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z-8}{a_3}.$$

Esta recta será perpendicular al plano dado cuando y sólo cuando esté cumplida la condición (3) de perpendicularidad de la recta y el plano:

$$\frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{-3} = \frac{a_3}{5},$$

es decir, cuando el vector $n = (2; -3; 5)$ es el vector director de la recta. Por consiguiente, la ecuación buscada tiene la forma

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-8}{5}. \text{ ▲}$$

Problema 6. Hállense las ecuaciones de proyección de la recta

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-7}$$

sobre el plano

$$2x - y - 3z + 6 = 0.$$

△ La proyección de la recta sobre el plano es la recta de intersección de dos planos: del plano dado y del plano que es perpendicular al dado y atraviesa la recta dada. Por lo tanto, para resolver el problema es suficiente hallar la ecuación del plano que contiene la recta dada y es perpendicular al plano dado. Sea que

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

es la ecuación del plano dado. Entonces, de la condición de perpendicularidad de los planos obtenemos la ecuación

$$2A - B - 3C = 0,$$

y de la condición (4) de pertenencia de la recta al plano, las ecuaciones

$$9A - 4B - 7C = 0 \text{ y } A - B + D = 0.$$

De las ecuaciones obtenidas se deduce que:

$$A = -5C, \quad B = -13C, \quad D = -8C.$$

Así pues, la ecuación del plano que es perpendicular al plano dado y que pasa por la recta dada será la ecuación

$$-5Cx - 13Cy + Cz - 8C = 0, \qquad C \neq 0,$$

ó $5x + 13y - z + 8 = 0$.

La proyección buscada es la intersección del plano dado y el hallado. Por consiguiente, sus ecuaciones son

$$\begin{cases} 5x + 13y - z + 8 = 0, \\ 2x - \ \ y - 3z + 6 = 0. \end{cases} \ ▲$$

Problemas para el capítulo V

5.1. Se da el paralelepípedo $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Escríbanse por medio de los vectores $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{r}_3$ las ecuaciones vectoriales paramétricas de las rectas: a) AC_1; b) CA_1; c) BD_1; d) DB_1; e) CD_1.

5.2. Escríbanse las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto M_0 y que tiene un vector director $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_0(1;\ 2;\ 3)$ $\qquad \boldsymbol{a}(2;\ -2;\ 1)$;

b) $M_0(3;\ -2;\ 0)$, $\qquad \boldsymbol{a}(1;\ -1;\ \sqrt{2})$;

c) $M_0\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$, $\qquad \boldsymbol{a}(0;\ 3;\ 5)$.

5.3. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto M_0 y que tiene un vector director $\boldsymbol{a}$, si:

a) $M_0\,(-2;\ 0;\ 1)$, $\boldsymbol{a}\,(2;\ -3;\ 4)$;

b) $M_0\,(2;\ -1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}\,(\sqrt{3};\ \sqrt{2};\ 1)$;

c) $M_0\,(3;\ 0;\ -3)$, $\boldsymbol{a}\,(0;\ 1;\ 0)$.

5.4. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por los puntos M_1 y M_2, si:

a) $M_1\,(3;\ -1;\ 0)$, $M_2\,(-2;\ -5;\ 4)$;

b) $M_1\,(1;\ -1;\ 4)$, $M_2\,(4;\ -1;\ 2)$;

c) $M_1\,(0;\ 1;\ -5)$, $M_2\,(-2;\ 1;\ -5)$.

5.5. Se da un triángulo con los vértices en los puntos $A\,(1;\ -2;\ -4)$, $B\,(1;\ 6;\ -8)$, $C\,(-7;\ 11;\ 6)$. El segmento CM es la mediana del triángulo. Escríbanse las ecuaciones paramétricas y canónicas de la recta CM.

5.6. Hágase la ecuación del plano que atraviesa los puntos M_1, M_2, M_3, si:

a) $M_1\,(-2;\ 3;\ 5)$, $M_2\,(4;\ -3;\ 0)$, $M_3\,(0;\ 6;\ -5)$;

b) $M_1\,(2;\ 0;\ 4)$, $M_2\,(3;\ 1;\ -2)$, $M_3\,(0;\ -3;\ -1)$;

c) $M_1\,(3;\ 1;\ -5)$, $M_2\,(8;\ 3;\ 3)$, $M_3\,(-2;\ -1;\ 4)$.

Escríbase para cada plano la ecuación segmentaria.

5.7. Escríbase la ecuación del plano que atraviesa el punto M_0 y es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$, si:

a) $M_0\,(2;\ 3;\ 5)$, $\boldsymbol{n} = (4;\ 6;\ 0)$;

b) $M_0\,(3;\ -5;\ -2)$, $\boldsymbol{n} = (4;\ -6;\ 1)$;

c) $M_0\,(0,\ 0;\ 0)$, $\boldsymbol{n} = (0;\ -7;\ 4)$;

d) $M_0\,(1,\ 2,\ 3)$, $\boldsymbol{n} = (0;\ 1;\ 0)$.

5.8. Escríbase la ecuación del plano que atraviesa el punto M_0 y es paralelo al plano dado, si:

a) $M_0\,(1,\ -5,\ 4)$ $\quad 4x-7z+6=0$;

b) $M_0\,(3,\ 4,\ -11)$, $\quad z=0$;

c) $M_0\,(2,\ -1,\ 3)$, $\quad \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{7}+\dfrac{z}{2}=1$.

5.9. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0\,(1;\ 2;\ 4)$ y el eje de las abscisas.

5.10. Hállese la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1\,(2;\ -1;\ 1)$ y $M_2\,(0;\ 1;\ 2)$ paralelamente al eje de ordenadas.

5.11. Calcúlese el área del triángulo que se corta del ángulo de coordenadas yOz por el plano $2x-3y+6z-24=0$.

5.12. Calcúlese el ángulo entre los planos:

a) $x-4y-8z+1=0$ y $x+20y+7z=0$;

b) $6x+3y-2z-7=0$ y $x+2y+6z-5=0$;

c) $8x+4y+z=0$ y $2x-2y+z+13=0$;

d) $x-z-7=0$ y $y-z+5=0$.

5.13. Determínese, cuáles de los siguientes pares de los planos son paralelos, perpendiculares o coinciden:

a) $2x+3y+4z-12=0$ y $6x+9y+12z-12=0$;

b) $3x+4y-z+1=0$ y $x-2y-5z+3=0$;

c) $2x+3y-4z=0$ y $2x+y+z-13=0$;

d) $10x-12y+6z-240=0$ y $\dfrac{x}{24}-\dfrac{y}{20}+\dfrac{z}{40}=1$.

5.14. Determínese, para qué valores k son perpendiculares los siguientes planos:

a) $3x + ky + 4z - 5 = 0$ y $4x - 3y + 4z + 2 = 0$;

b) $3x + 4y + kz - 6 = 0$ y $4x - 3y + 4z + 1 = 0$;

c) $kx + 4y + 3z - 4 = 0$ y $3y - 4z + 3 = 0$.

5.15. Determínese, para qué valores α y β son paralelos los planos siguientes:

a) $3x + \alpha y + 4z - 3 = 0$ y $4x - 3y + \beta z + 4 = 0$;

b) $3x + \alpha y + 4z - 2 = 0$ y $4x + \beta z + 5 = 0$;

c) $3x + y + \alpha z - 1 = 0$ y $6x + 2y + 10z + \beta = 0$.

5.16. Escríbase la ecuación del plano que pasa por los puntos M_1 (3; −2; 1) y M_2 (6; 0; 5) y es perpendicular al plano $x - y + 2z - 4 = 0$.

5.17. Hágase la ecuación del plano que pasa por el punto $M_0(1; 2; 3)$ y es perpendicular a los planos $x - y + z - 7 = 0$, $3x + 2y - 12z + 5 = 0$.

5.18. Escríbase la ecuación del plano que pasa por el punto M_0 (3; −2; 1) perpendicularmente a los planos $3y - 5x + 1 = 0$, $x = 0$.

5.19. Escríbanse las ecuaciones canónicas de la recta de intersección de los planos $x - 2y + 3z - 4 = 0$ y $3x + 2y - 5z - 4 = 0$.

5.20. Hállense las ecuaciones canónicas de las rectas siguientes:

a) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 3x-1=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3=0, \\ y+5=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y+2z=0, \\ 2x+3y-z=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x+5y-6=0, \\ x-2y+3=0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} y+2z=0, \\ 3y-z=0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y+z=0, \\ 3x-1=0. \end{cases}$

5.21. Hállense las ecuaciones canónicas de la rectas, formadas por la intersección del plano $2x - 3y - 4z + 11 = 0$ con los planos de coordenadas.

5.22. Hállense las ecuaciones paramétricas de la recta:

a) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3y+2y-5z-4=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z+1=0; \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

5.23. Hállese la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - 3y + z - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 1 = 0$ y el punto M_0 (1; −2; 3).

5.24. Hállese la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ paralelamente al vector (2; −1; −2).

5.25. Normalícense las ecuaciones de los planos:

a) $3x - 6y + 2z + 21 = 0$;

b) $5x + 12y + 26 = 0$;

c) $2z + 13 = 0$.

5.26. Hállese la distancia del origen de coordenadas al plano:

a) $4x - 2y - 4z + 7 = 0$;

b) $15x + 16y - 12z - 100 = 0$;

c) $\sqrt{2}x + y - z + 32 = 0$.

5.27. Hállese la distancia de un punto a un plano:

a) M (1; 2; 4), $2x + 2y - z - 11 = 0$;

b) $M(7;\ 0;\ -7)$, $\quad 18x - 6y + 9z + 14 = 0$;

c) $M(\sqrt{5};\ \sqrt{12};\ 2)$ $\quad y\sqrt{3} + z + 20 = 0$.

5.28. Calcúlese la distancia del punto $M(0;\ 1;\ -3)$ al plano que pasa por los puntos $M_1(3;\ 1;\ -5)$, $M_2(8;\ 3;\ 3)$ $M_3(-2;\ -1;\ 4)$.

5.29. Calcúlese la distancia entre los planos paralelos:

a) $3x - 6y - 2z + 35 = 0$ y $6x - 12y - 4z - 5 = 0$;

b) $5x + 2y - 3z - 5 = 0$ y $10x + 4y - 6z + 5 = 0$;

c) $7x - y + \sqrt{2}z - 3\sqrt{2} = 0$ y $7\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z - 6 = 0$

5.30. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

a) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$ y $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$;

b) $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 3t-2, \\ z = -6t+1 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-4y+3z+1=0, \\ x-6y-6z+2=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-2z-3=0, \\ x+2y+2z+9=0. \end{cases}$

5.31. Determínese, cuáles de los siguientes pares de rectas son paralelas y cuáles son perpendiculares:

a) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{-2}$ y $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-3}{1}$;

b) $\begin{cases} x = t, \\ y = -4t, \\ z = -3t \end{cases}$ y $\begin{cases} x = t, \\ y = -8-4t, \\ z = -3-3t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-2z-7=0, \\ x+y-3z+5=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y-5z=0, \\ x-2y+3z-13=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-4z=0, \\ 2x-y-9z+2=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 3y+3z-11=0, \\ 2x-2y-z+11=0. \end{cases}$

5.32. Se dan las rectas

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{\alpha} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2};$$

para qué valor α son perpendiculares.

5.33. Hállense las ecuaciones canónicas de la recta que está situada en el plano yOz, que pasa por el origen de coordenadas perpendicularmente a la recta $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$.

5.34. Hállense las ecuaciones canónicas de la recta que pasa por el punto $M_0(2;\ -3;\ 4)$ perpendicularmente a las rectas

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+5}{1}, \quad \frac{x-8}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

5.35. Determínese, si están situadas en un mismo plano las rectas siguientes:

a) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ y $\frac{x+49}{48}=\frac{y+37}{37}=\frac{z}{4}$;

b) $\frac{x-10}{11}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{-13}$ y $\begin{cases} x=-2+3t, \\ y=-1, \\ z=4-t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3z+2=0; \\ 2y-z-6=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-12z+49=0, \\ 4y-37z+148=0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=3z-1, \\ y=-5z+7 \end{cases}$ y $\begin{cases} y=2x-5, \\ z=7x+2. \end{cases}$

5.36. Determínese si se intersecan las rectas siguientes:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ y $\frac{x}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{1}$;

b) $\frac{x-4}{-6}=\frac{y+4}{4}=\frac{z}{-2}$ y $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$.

5.37. Determínese si las rectas dadas son cruzadas:

a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-1}$ y $\frac{x}{-2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-4}{1}$;

b) $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y-3z+1=0; \\ x-y+z+3=0. \end{cases}$

5.38. Calcúlese el ángulo entre la recta y el plano:

a) $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+5}{0}$ y $y+z+7=0$;

b) $\begin{cases} x=7+5t, \\ y=4+t, \\ z=5+4t \end{cases}$ y $3x-y+2z-5=0$;

c) $\begin{cases} 7x-5y+5z-11=0, \\ x-y+3z+7=0 \end{cases}$ $6x-3y-6z+13=0$.

5.39. Analícese la situación recíproca de los siguientes pares de rectas y planos (en caso de intersección de la recta y el plano, hállese el punto de intersección):

a) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+10}{-4}=\frac{z+3}{1}$ y $y+4z+1=0$;

b) $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ y $2x-y-2z-8=0$;

c) $\begin{cases} x=12+4t, \\ y=9+3t, \\ z=1+t \end{cases}$ y $3x+5y-z-2=0$;

d) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-5}{1}$ y $4x+3y+z-8=0$;

e) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+5}{2}$ y $4x+y-7=0$.

5.40. Hállese la ecuación de la recta que pasa por el punto M_0 (2; 0; −1) perpendicularmente al plano $2x+3y-z+7=0$.

5.41. Hállese la ecuación del plano que pasa por el punto M_0 (7; 9; 11) perpendicularmente a la recta $\frac{x}{11}=\frac{y}{9}=\frac{z}{7}$.

5.42. ¿Para qué valores de α y β la recta $\frac{x+\alpha}{8}=\frac{y-1}{\beta}=\frac{z-4}{3}$ pertenece al plano $x-2y-4z+1=0$?

5.43. Hállese la ecuación de la proyección de la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ sobre el plano $3x+2y-z-5=0$.

5.44. Hállense las ecuaciones canónicas de las proyecciones de la recta

$$\begin{cases} 3x-2y-z-2=0, \\ x+4y-5z-10=0 \end{cases}$$

sobre los planos de coordenadas.