Capítulo VI

SUPERFICIES CURVILÍNEAS ELEMENTALES Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN

§ 73. La esfera y el cuerpo esférico

Se denomina *esfera de radio R con centro en el punto C* (fig. 211) el conjunto de todos los puntos del espacio que se encuentran a la distancia dada R de un punto fijo C.

Con otras palabras la esfera de radio R con centro en el punto C es un conjunto de todos los puntos M del espacio que satisfacen la condición

$$|CM| = R. \qquad (1)$$

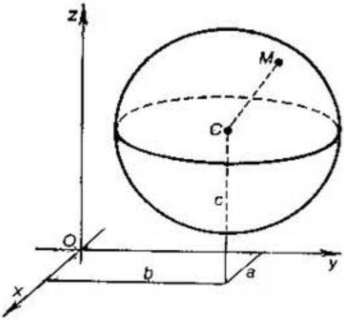

Fig. 211

Se denomina *diámetro de la esfera* el segmento que une dos puntos de ésta y pasa por su centro. Es evidente que la longitud del diámetro de la esfera de radio R es igual a $2R$.

Si en el espacio está definido un cierto sistema cartesiano rectangular de coordenadas y $(a;\ b;\ c)$ son las coordenadas del punto C, y $(x;\ y;\ z)$ son las coordenadas del punto M, entonces la condición (1) toma la forma

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R.$$

De aquí se deduce que la esfera de radio R con el centro en el punto $C\ (a;\ b;\ c)$ tiene la ecuación

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (2)$$

En particular, la esfera de radio R con el centro en el origen de coordenadas tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (3)$$

Problema 1. Hágase la ecuación de la esfera de radio $R = 5$ con el centro en el origen de coordenadas.

△ Sustituyendo directamente en la ecuación (3) el valor del radio obtendremos

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25. \quad \blacktriangle$$

Problema 2. Escríbase la ecuación de la esfera con centro en el punto C (2; —3; 5) y radio igual a 6.

△ Sustituyendo el valor de las coordenadas del punto C y el valor del radio en la ecuación (2), obtendremos

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36. \quad \blacktriangle$$

Problema 3. Hállese el centro y el radio de la esfera

$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 100.$$

△ Comparando la ecuación dada con la ecuación de la esfera (2) vemos, que $a = -4$, $b = 3$, $c = 0$, $R = 10$. Por consiguiente, C (—4; 3; 0), $R = 10$. ▲

Problema 4. Demuéstrese que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

es la ecuación de la esfera.

△ Transformemos el primer miembro de la ecuación dada formando los cuadrados de los binomios que contienen x, y y z respectivamente:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 5 = (x - 1)^2 - 1 + \\ + (y + 2)^2 - 4 + (z - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + \\ + (z - 3)^2 - 9.$$

Por consiguiente, la superficie dada tiene la ecuación

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

Esta ecuación representa una ecuación de la esfera con centro en el punto C (1; —2; 3) y radio $R = 3$. ▲

Se denomina *cuerpo esférico* (*globo*) *de radio R con centro en el punto C* el conjunto de todos los puntos del espacio, cuya distancia del punto fijo C no sobrepasa el número dado R.

Con otras palabras, el cuerpo esférico de radio R con centro en el punto C es el conjunto de todos los puntos M del espacio que satisfacen la condición

$$|CM| \leqslant R.$$

En coordenadas esta condición tiene la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqslant R^2.$$

La esfera de radio R con centro en el punto C se denomina *superficie esférica*. Al respecto se dice que ella limita el globo de radio R con centro en el punto C.

Teorema. *A través de cuatro puntos cualesquiera no situados en un mismo plano pasa una sola esfera.*

□ Sea que A, B, D, E son cuatro puntos que no están situados en un mismo plano. Es suficiente demostrar que existe un solo punto C equidistante de los cuatro puntos dados. Es evidente, que el punto C será el centro de la esfera que pasa por los puntos dados.

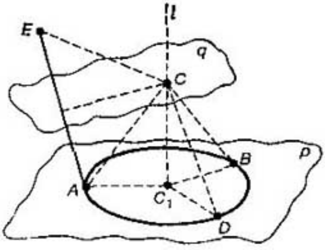

Fig. 212

Por los puntos A, B, D que, evidentemente, no están situados en una misma recta, pasa un solo plano p y una sola circunferencia. Sea que C_1 es el centro de esta circunferencia. Está claro, que el conjunto de todos los puntos del espacio equidistantes de los tres puntos A, B, D, es la perpendicular l al plano p que pasa por el punto C_1 (fig. 212).

Examinemos ahora los puntos A y E. El conjunto de todos los puntos del espacio equidistantes de los puntos A y E es el plano q, que es perpendicular a la recta AE y pasa por el punto medio del segmento AE. El plano q cortará obligatoriamente la recta l, ya que el punto E no está situado en el plano p. Es evidente, que el punto C, que es la intersección del plano q con la recta l, será equidistante de todos los cuatro puntos dados A, B, D, E. De la construcción se ve que el punto C es el único punto del espacio, que satisface esta condición. ■

§ 74. Posición recíproca del plano y la esfera

Sea que están definidos el plano p y la esfera ω de radio R con centro en el punto C. Analicemos su posición recíproca en el espacio.

Tracemos a través del punto C la recta l perpendicular al plano p. Sea que C_1 es el punto de intersección de la recta l con el plano p.

Si $|CC_1| > R$, la esfera ω no tiene puntos comunes con el plano p (fig. 213), ya que el punto C_1 está situado fuera

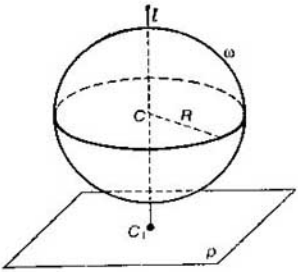

Fig. 213

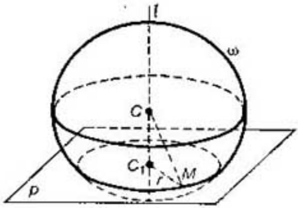

Fig. 214

de la esfera de radio R con centro en el punto C, y los demás puntos del plano p distan del punto C más que el punto C_1.

Si $|CC_1| < R$, el plano p corta la esfera ω por la circunferencia (fig. 214) con centro en el punto C_1 y radio

$$r = \sqrt{R^2 - |CC_1|^2}.$$

De hecho, si M es un punto arbitrario perteneciente a p y ω, entonces del triángulo rectangular CC_1M obtenemos

$$|C_1M| = \sqrt{|CM|^2 - |CC_1|^2} = \sqrt{R^2 - |CC_1|^2} = r.$$

Por último, si $|CC_1| = R$, el plano p con la esfera ω tiene un punto común, que es el punto C_1 (fig. 215).

El plano que tiene con la esfera solamente un punto común se denomina *plano tangente* de esta esfera, y su punto común, *punto de tangencia*.

De lo expuesto se deduce que si $|CC_1| = R$, entonces el plano p es un plano tangente a la esfera ω, además, el punto C_1 es un punto de tangencia. Por su construcción el plano p

es perpendicular al diámetro que pasa por el punto de tangencia C_1.

Teorema. *El plano es tangente a la esfera, si pasa por un punto de ésta y es perpendicular a su diámetro, que pasa por dicho punto.*

En efecto, si M es un punto arbitrario del plano p diferente del punto C_1 (véase fig. 215), entonces $|CM| > |CC_1|$, y, por lo tanto, el punto M no pertenece a la esfera ω. Por consiguiente, el punto C_1 es el único punto común del plano p y de la esfera ω, es decir, el plano p es un plano tangente a la esfera ω. ■

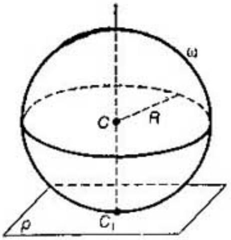

Fig. 215

Problema 1. ¿Cómo están situados los planos definidos por las ecuaciones $x = 3$, $x = 5$ y $x = 7$ respecto a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25?$$

△ La esfera dada es la esfera de radio $R = 5$ con centro en el origen de coordenadas O (0; 0; 0).

El primer plano dista del centro de la esfera $d = 3$. Por consiguiente, corta la esfera por la circunferencia de radio $r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ con centro en el punto (3; 0; 0).

El segundo plano dista del centro de la esfera $d = 5$. Por consiguiente, el plano es tangente a la esfera en el punto (5; 0; 0).

El tercer plano se encuentra del centro de la esfera a la distancia $d = 7 > R$. Por consiguiente, el plano no tiene puntos comunes con la esfera. ▲

Problema 2. El plano $y = 3$ corta la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z = 16$$

por cierta circunferencia. Hállese su radio y centro.

△ Transformando la ecuación de la esfera a la forma

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 18,$$

vemos que la esfera dada es la esfera de radio $R = \sqrt{18}$ con centro en el punto (1; 0; —1).

El plano $y = 3$ dista del centro de la esfera $d = 3$. Por consiguiente, él corta la esfera por la circunferencia de radio $r = \sqrt{18 - 9} = 3$ con centro en el punto (1; 3; —1). ▲

§ 75*. Superficies de revolución

1. Sea que en el plano p están definidas la curva L y cierta recta l. Se llama *superficie de revolución*, la superficie engendrada por una curva L que gira alrededor de la recta l.

Sea que la curva L está situada en el plano xOy (fig. 216) y tiene la ecuación

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1)$$

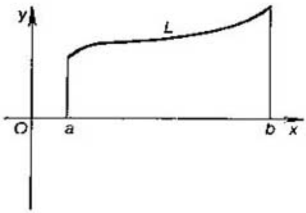

Fig. 216

Hallemos la ecuación de la superficie engendrada por la revolución de una curva alrededor del eje Ox (fig. 217). Es evidente, que el punto M con las coordenadas $(x; y; z)$, donde $x \in [a; b]$, pertenece a la superficie de revolución buscada si, y sólo si,

$$\sqrt{y^2 + z^2} = |f(x)|.$$

En efecto, los puntos $(x; y; z)$ y $(x; f(x); 0)$ están situados en una misma circunferencia con centro en el punto $(x; 0; 0)$.

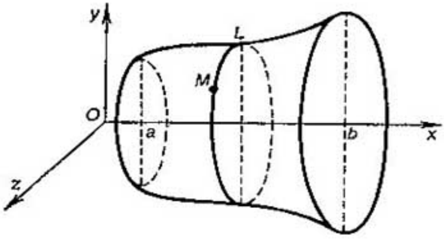

Fig. 217

Así pues, la ecuación de la superficie, engendrada por la curva (1) que gira alrededor del eje Ox, tiene la forma

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2, \quad x \in [a; b]. \quad (2)$$

Señalemos que la ecuación (2) se obtiene de la ecuación (1) del modo siguiente: ambos miembros de la ecuación (1) se elevan al cuadrado y y^2 se sustituye por $y^2 + z^2$.

En particular, si la curva L está definida por la ecuación

$$y^2 = F(x), \tag{3}$$

entonces la ecuación de la superficie, engendrada por esta curva al girar alrededor del eje Ox, tiene la forma

$$y^2 + z^2 = F(x), \tag{4}$$

es decir, simplemente sustituimos y^2 por $y^2 + z^2$.

2. Se denomina *elipsoide de revolución*, la superficie engendrada por la revolución de una elipse alrededor de uno de sus ejes.

Sea que en el plano xOy la elipse está definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Hagamos la ecuación de la superficie, engendrada por la revolución de la elipse alrededor del eje Ox. La ecuación de la elipse (5) se reduce a la forma (3), por consiguiente, para obtener la ecuación del elipsoide de revolución es suficiente sustituir en la ecuación (5) y^2 por $y^2 + z^2$. Luego de la sustitución obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Esta ecuación se escribe habitualmente así:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si $a > b$ la ecuación (6) define un elipsoide de revolución, estirado a lo largo del eje Ox (fig. 218), si $a < b$ la ecuación (6) determina un elipsoide de revolución comprimido a lo largo del eje Ox (fig. 219) y si $a = b$, define una esfera.

Problema 1. La elipse con los semiejes $b = 6$ y $a = 4$ y el centro en el origen de coordenadas gira en torno a su eje menor, coincidente con el eje Ox. Escríbase la ecuación de la superficie descrita por una elipse en revolución.

△ Escribamos la ecuación de la elipse dada:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Sustituyendo y^2 por $y^2 + z^2$ en esta ecuación, obtendremos la ecuación buscada del elipsoide de revolución:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2+z^2}{36}=1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1. \quad \blacktriangle$$

3. Se denomina ***hiperboloide de revolución***, la superficie engendrada por la revolución de una hipérbola alrededor de

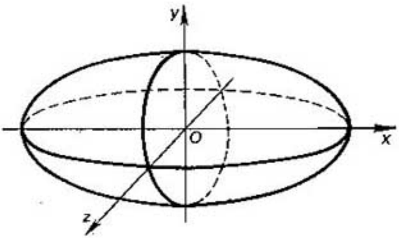

Fig. 218

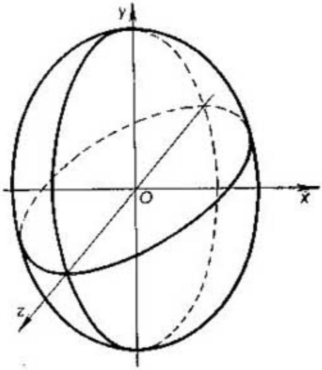

Fig. 219

uno de sus ejes. En caso de que la hipérbola gire en torno a su eje real se genera *un hiperboloide de revolución de dos hojas* (fig. 220) y en caso de que la hipérbola gire en torno a su eje imaginario se engendra *un hiperboloide de revolución de una hoja* (fig. 221).

Sea que en el plano xOy la hipérbola está definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7}$$

Escribamos la ecuación de la superficie, engendrada por la revolución de una hipérbola alrededor de su eje real Ox. La ecuación de la hipérbola (7) se reduce a la forma (3); por consiguiente, para obtener la ecuación de la superficie del hiperboloide de revolución de dos hojas es suficiente sustituir y^2 por $y^2 + z^2$ en la ecuación de la hipérbola. Luego de la sustitución obtendremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Cuando la hipérbola (7) gira alrededor de su eje imaginario, es necesario sustituir en la ecuación (7) x^2 por $x^2 + z^2$; luego, obtendremos

$$\frac{x^2+z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

Problema 2. La hipérbola con los semiejes $a = 3$ y $b=4$ gira en torno a su eje imaginario, coincidente con el eje Oy.

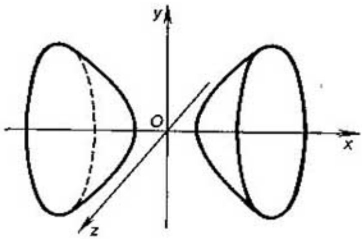

Fig. 220

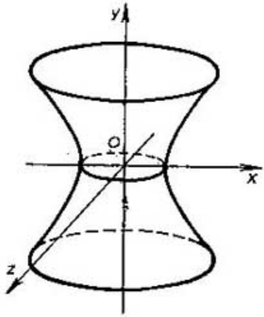

Fig. 221

El centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas. Escríbase la ecuación de la superficie engendrada por la revolución de esta hipérbola.

△ Escribamos la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Para obtener la ecuación del hiperboloide de revolución, sustituyamos en la ecuación de la hipérbola x^2 por $x^2 + z^2$. Después de la sustitución obtendremos

$$\frac{x^2+z^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1. \ \blacktriangle$$

4. Se denomina *paraboloide de revolución* la superficie engendrada por la revolución de una parábola en torno a su eje de simetría (fig. 222).

Sea que en el plano $x\hat{O}y$ la parábola está definida por la ecuación

$$x^2 = 2py. \tag{10}$$

Para obtener la ecuación de la superficie de revolución, es necesario sustituir en la ecuación (10) x^2 por $x^2 + z^2$; luego, obtendremos

$$x^2 + z^2 = 2py.$$

Señalemos una propiedad notable más de esta superficie. Si hacemos cristalina la superficie interior del paraboloide de revolución, y en su foco (se denomina foco del paraboloide de revolución el foco de la parábola giratoria) colocamos una fuente de luz, entonces todos los rayos de luz, al reflejarse de la superficie del paraboloide, irán paralelamente al eje del paraboloide.

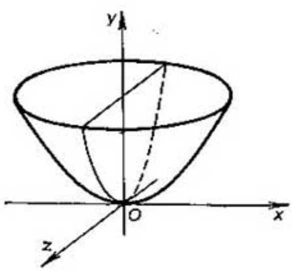

Fig. 222

Esta propiedad se utiliza ampliamente en la fabricación de reflectores de luz (proyectores, faros de automóviles, proyectores cinematográficos y otros aparatos).

Problema 3. Escríbase la ecuación de la superficie engendrada por la revolución de la parábola $y^2 = 2x$ en torno al eje Ox.

△ Para hacer la ecuación del paraboloide de revolución, engendrado por la revolución de una parábola en torno al eje Ox, es necesario en la ecuación $y^2 = 2x$ sustituir y^2 por $y^2 + z^2$; luego de la sustitución obtendremos

$$y^2 + z^2 = 2x. \quad \blacktriangle$$

5. Si hacemos girar una recta, paralela a cualquier eje de coordenadas, alrededor de este eje, se generará *una superficie circular cilíndrica.*

Sea dada una recta que está situada en el plano yOz y que tiene la ecuación $y = a$. Es fácil ver que la superficie de revolución de esta recta en torno al eje Oz tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Dicha superficie cilíndrica está representada en la figura 223.

Problema 4. Escríbase la ecuación de la superficie cilíndrica, engendrada por la revolución de la recta $y = 3$, situada en el plano xOy en torno al eje Ox.

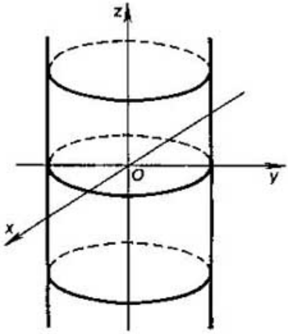

Fig. 223

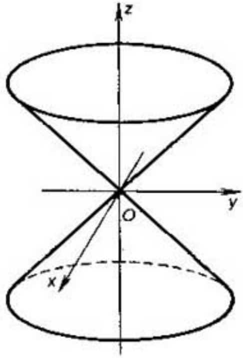

Fig. 224

△ Sustituyamos en la ecuación $y^2 = 3^2$, y^2 por $y^2 + z^2$ y obtendremos como resultado

$$y^2 + z^2 = 9. \blacktriangle$$

6. Sea dada una recta situada en el plano yOz y que pasa por el origen de coordenadas:

$$y = kz, \quad k \neq 0.$$

Es evidente, que la ecuación de la superficie de revolución de esta recta en torno al eje Oz tiene la forma

$$x^2 + y^2 = k^2z^2.$$

La ecuación obtenida es la ecuación de la superficie de revolución buscada, la cual se llama *superficie circular cónica* (fig. 224).

Problema 5. Hágase la ecuación de la superficie de revolución de la recta $2x = 3y$, $z = 0$ en torno al eje Ox.

△ Utilizando la fórmula (2), de la ecuación $3y = 2x$ hallamos $9(y^2 + z^2) = 4x^2$. Esta es la ecuación buscada. ▲

§ 76*. Superficies cilíndricas

Si a través de cada punto de la curva L se traza una recta paralelamente al vector dado $\boldsymbol{a}$, engendramos una superficie que se denomina *superficie cilíndrica*. Se denominan *generatrices* de una superficie cilíndrica las rectas paralelas al vector $\boldsymbol{a}$ y pertenecientes a dicha superficie, en tanto que la curva L se denomina *directriz* de la superficie cilíndrica (fig. 225).

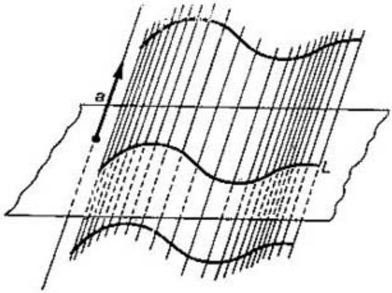

Fig. 225

Si en una sección de una superficie cilíndrica por un plano, que es perpendicular a sus generatrices (*en la sección normal*) se forma una circunferencia, la superficie cilíndrica se denomina *circular*. Si en la sección se forma una elipse, la superficie cilíndrica se denomina *elíptica*, si se forma una hipérbola se llama *hiperbólica*, si se forma una parábola, *parabólica*.

Sea que en el espacio se da un sistema rectangular de coordenadas $Oxyz$, y sea que en el plano xOy se da la curva L, cuya ecuación tiene en este plano la forma

$$F(x;\ y) = 0. \qquad (1)$$

Escribamos la ecuación de la superficie cilíndrica con las generatrices paralelas al vector $\boldsymbol{a} = (\alpha;\ \beta;\ \gamma)$, $\gamma \neq 0$, si por directriz se toma la curva L (fig. 226).

Examinemos un punto arbitrario de esta superficie $M(x;\ y;\ z)$. La generatriz l, que pasa a través del punto M, cortará el plano xOy en el punto N situado en la curva L. Si designamos las coordenadas del punto N en el espacio con $(x_1;\ y_1;\ 0)$, entonces el vector $\overrightarrow{MN}$ tiene las coordenadas $(x_1 - x;\ y_1 - y;\ 0 - z)$.

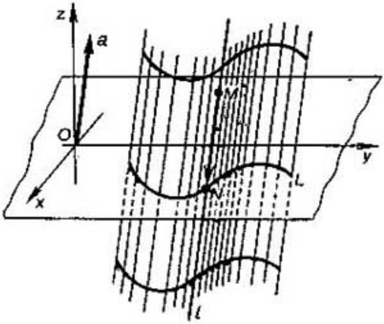

Fig. 226

De acuerdo con la definición de la superficie cilíndrica los vectores a y $\overrightarrow{MN}$ son colineales, es decir,

$$\overrightarrow{MN} = \lambda a;$$

por consiguiente, tenemos el sistema de ecuaciones

$$x_1 - x = \lambda\alpha,\quad y - y_1 = \lambda\beta,\quad 0 - z = \lambda\gamma.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones respecto a λ, x_1 y y_1, obtendremos

$$\lambda = -\frac{z}{\gamma},\quad x_1 = x - z\frac{\alpha}{\gamma},\quad y_1 = y - z\frac{\beta}{\gamma}. \qquad (2)$$

Puesto que el punto N está situado en la curva L, entonces $F(x_1;\ y_1) = 0$. Sustituyendo x_1 y y_1 según las fórmulas (2), obtendremos la ecuación

$$F\left(x - z\frac{\alpha}{\gamma};\quad y - z\frac{\beta}{\gamma}\right) = 0, \qquad (3)$$

la cual, evidentemente, será la ecuación de la superficie cilíndrica dada.

Problema 1. Hágase la ecuación de la superficie cilíndrica, cuya directriz está situada en el **plano** xOy y tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, y las generatrices son paralelas al vector $\boldsymbol{a} = (0;\ 1;\ 1)$.

△ Puesto que de acuerdo con la condición del problema $F(x;\ y) = x^2 + y^2 - 4$ y $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, en virtud

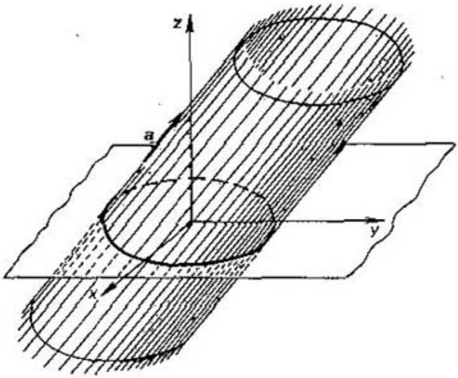

Fig. 227

de la fórmula (3) la ecuación de la superficie cilíndrica dada tiene la forma

$$\left(x - z\ \frac{0}{1}\right)^2 + \left(y - z\cdot\frac{1}{2}\right)^2 - 4 = 0$$

o, definitivamente,

$$x^2 + (y - z)^2 - 4 = 0.$$

Esta superficie está ilustrada en la figura 227. ▲

Se puede mostrar análogamente, que si la directriz de la superficie cilíndrica L está situada en el plano xOz y se define por la ecuación $F(x;\ z) = 0$, y el vector $\boldsymbol{a}$ no es paralelo a este plano, la superficie cilíndrica tiene la ecuación

$$F\left(x - y\frac{\alpha}{\beta};\quad z - y\,\frac{\gamma}{\beta}\right) = 0.$$

Por fin, si L se define por la ecuación $F(y;\ z) = 0$ y $\boldsymbol{a}$ no es paralelo al plano yOz, la ecuación de la superficie cilíndrica tiene la forma

$$F\left(y - x\frac{\beta}{\alpha};\quad z - x\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0.$$

Señalemos que si la directriz de la superficie cilíndrica está situada en el plano xOy, y las generatrices son paralelas al eje Oz, la ecuación de la superficie cilíndrica en el espacio coincide con la ecuación de la directriz y tiene la forma

$$F(x; y) = 0. \tag{4}$$

La ecuación (4), como una ecuación del conjunto de los puntos del plano, define la curva L, y, al mismo tiempo, la ecuación (4), como ecuación del conjunto de los puntos del espacio, define la superficie cilíndrica.

Así pues, cada una de las ecuaciones

$$F(x;\ y) = 0,\quad F(x;\ z) = 0,\quad F(y;\ z) = 0$$

pueden ser interpretadas de dos modos: si ésta es la ecuación del conjunto de los puntos del plano, entonces es la ecuación de la línea L, situada en el plano de sus variables; pero si ésta es la ecuación del conjunto de los puntos del espacio, entonces cada una de estas ecuaciones define la superficie cilíndrica con la directriz L y las generatrices paralelas al eje de una variable ausente.

Examinemos varios ejemplos.

1. La ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

en el plano xOy define una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas y el radio r (fig. 228, *a*). La misma ecuación define en el espacio una superficie circular cilíndrica, cuya directriz es una circunferencia situada en el plano xOy, y las generatrices son paralelas al eje Oz (fig. 228, *b*).

2. La ecuación

$$x^2 + z^2 = 4$$

en el plano xOz define una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio $r = 2$ (fig. 229, *a*). La misma ecuación define en el espacio una superficie circular cilíndrica, cuya directriz es una circunferencia situada en el plano xOz, y las generatrices son paralelas al eje Oy (fig. 229, *b*).

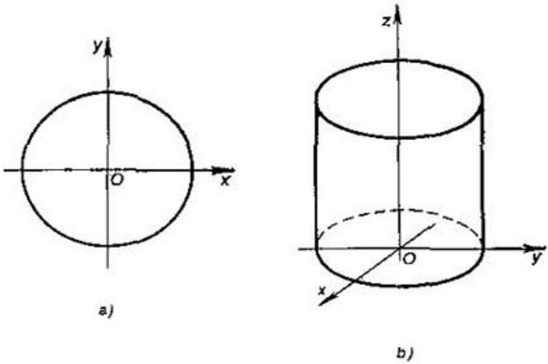

Fig. 228

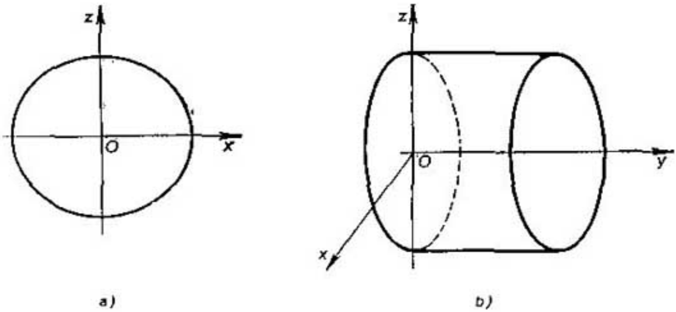

Fig. 229

3. La ecuación

$$y^2 + z^2 + 9 = 0$$

tanto en el plano como en el espacio define un conjunto vacío, ya que la suma de los números no negativos no puede ser un número negativo.

4. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el plano xOy define una elipse con centro en el origen de coordenadas y semiejes a y b (fig. 230, a). La misma ecua-

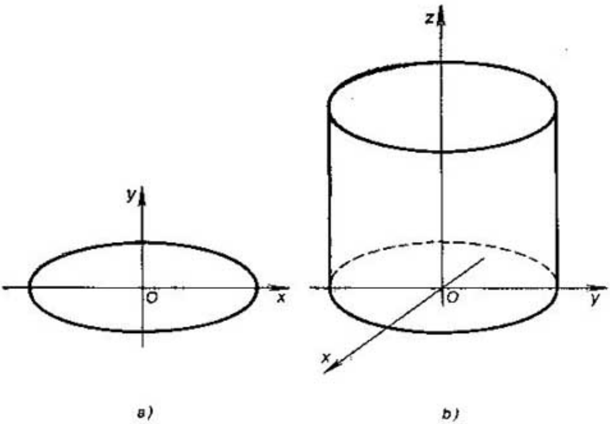

Fig. 230

ción define en el espacio una superficie elíptica cilíndrica con una directriz en el plano xOy y las generatrices paralelas al eje Oz (fig. 230, b).

5. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el plano xOy define una hipérbola con centro en el origen de coordenadas y semiejes a y b (fig. 231, a). Esta ecuación define en el espacio una superficie hiperbólica cilíndrica con las generatrices paralelas al eje Oz (fig. 231, b).

6. La ecuación

$$y^2 = 2px$$

en el plano xOy define una parábola (fig. 232, a), y en el espacio, una superficie parabólica cilíndrica con las generatrices paralelas al eje Oz (fig. 232, b).

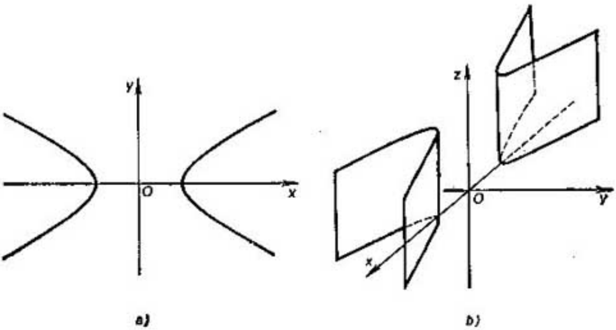

Fig. 231

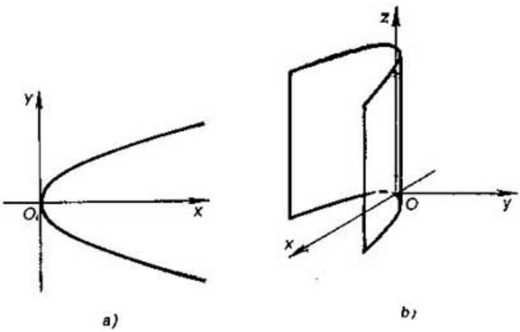

Fig. 232

Problema 2. Determínese el tipo de superficie $3x^2 + 6y^2 - 24 = 0$.

△ Reduzcamos la ecuación dada a la forma:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Esta ecuación define en el espacio una superficie elíptica cilíndrica con directriz en el plano xOy y generatrices paralelas al eje Oz. ▲

§ 77 *. Superficies cónicas

Se denomina *superficie cónica* la unión de todas las rectas que pasan por cada punto de una curva dada y cierto punto fijo del espacio no situado en esta curva. La curva dada se denomina *directriz*, el punto dado fijo, *vértice*, y las rectas se llaman *generatrices* de la superficie cónica (fig. 233).

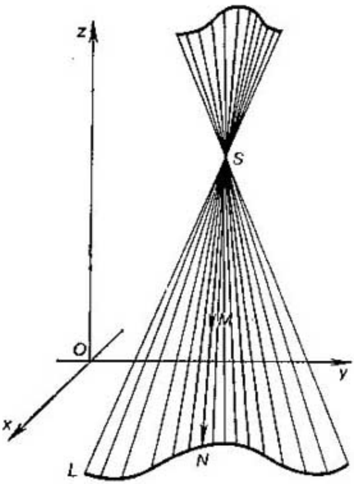

Fig. 233

Es fácil ver que las superficies cónicas están formadas por dos huecos con un vértice común.

Las superficies cónicas y cilíndricas tienen una propiedad notable: todas ellas se desarrollan en un plano sin pliegues ni discontinuidades y, viceversa, se pueden obtener superficies cónicas y cilíndricas encorvando material de hojas planas. Debido a esta propiedad estas superficies adquirieron amplia aplicación en la técnica.

Deduzcamos la ecuación de la superficie cónica.

Si M es un punto arbitrario de esta superficie, diferente del vértice S, y N es el punto de intersección de la generatriz SM con la directriz L, entonces los vectores $\overrightarrow{SM}$ y $\overrightarrow{SN}$ son colineales. Por lo tanto, existe tal número λ que

$$\overrightarrow{SM} = \lambda\overrightarrow{SN}. \qquad (1)$$

Sea que, para simplificar, la curva L está situada en el plano xOy y tiene la ecuación

$$F(x;\ y) = 0, \qquad (2)$$

y el vértice S que está situado en el eje Oz tiene las coordenadas $(0;\ 0;\ c)$, $c \neq 0$. Entonces

$$\overrightarrow{SM} = (x;\ y;\ z - c), \quad \overrightarrow{SN} = (\xi;\ \eta;\ -c),$$

donde $(x;\ y;\ z)$ son las coordenadas del punto M, y $(\xi;\ \eta)$ son las coordenadas del punto N en el plano xOy. De la igualdad vectorial (1) obtenemos las siguientes igualdades para las coordenadas:

$$x = \lambda\xi, \quad y = \lambda\eta, \quad z - c = -\lambda c.$$

De aquí hallamos

$$\xi = \frac{cx}{c-z}, \qquad \eta = \frac{cy}{c-z}.$$

Dado que las coordenadas ξ, η satisfacen la ecuación (2), las coordenadas $(x;\ y;\ z)$ satisfacen la ecuación

$$F\left(\frac{cx}{c-z},\ \frac{cy}{c-z}\right) = 0. \tag{3}$$

Esta es la ecuación de la superficie cónica con vértice en el punto $S\ (0;\ 0;\ c)$, $c \neq 0$ y directriz $F\ (x;\ y) = 0$. Así pues, la ecuación de la superficie cónica (3) se obtiene de la ecuación de la directriz (2) al sustituir x por $\frac{cx}{c-z}$ y y por $\frac{cy}{c-z}$.

Problema. Escríbase la ecuación de la superficie cónica con vértice en el punto $(0;\ 0;\ c)$, $c > 0$ y directriz

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

△ La superficie cónica dada tiene la ecuación

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{cx}{c-z}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{cy}{c+z}\right)^2 = 1.$$

Después de realizar las transformaciones correspondientes obtenemos la ecuación buscada:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z-c)^2}{c^2}. \quad ▲$$

§ 78. Cono y cono truncado

Examinemos en el plano p la figura acotada D y cierto punto S del espacio no situado en el plano p. La unión de todos los segmentos SM, donde $M \in D$, se denomina *cono con vértice en el punto S y base D* (fig. 234).

Se llama *altura del cono* el segmento de la perpendicular trazada a través del vértice del cono al plano de la base. La longitud de dicho segmento también se llama altura del cono.

Es evidente que un cono con vértice S y base D está acotado por el plano p y la superficie cónica, cuyo vértice se encuentra en el punto S, y la directriz es la frontera de la

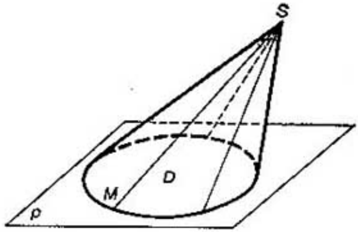

Fig. 234

figura D. Se denomina *superficie lateral del cono* aquella parte de la superficie cónica que es la frontera del cono.

Si la base del cono es un círculo y el vértice del cono se proyecta en el centro del círculo, entonces tal cono se denomina *cono circular recto*.

El cono circular recto puede ser engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus

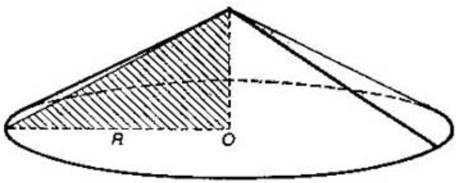

Fig. 235

catetos (fig. 235). Entonces la hipotenusa describe la superficie lateral, y el cateto, no situado en el eje de revolución, la base del cono.

Se denomina *cono truncado* (fig. 236) la parte del cono comprendida entre su base y cierto plano q, que es paralelo a la base y se interseca con el cono. Se denomina *base superior* la figura D_1 del plano q, que es parte de la frontera del cono truncado, y la figura D del plano p se llama, en este caso, *base inferior*. Se denomina *altura del cono truncado* la distancia entre los planos de las bases.

El cono truncado, que es parte del cono circular recto, puede ser obtenido por la rotación de un trapecio rectangular alrededor de su altura OO_1 (fig. 237). El lado lateral del trapecio describe la superficie lateral del cono, la base superior del trapecio, la base superior del cono, y la base

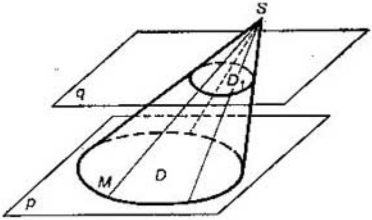

Fig. 236

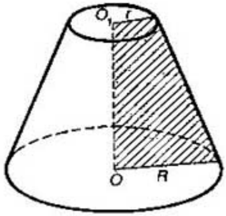

Fig. 237

inferior del trapecio, la base inferior de este cono truncado.

En caso general la base del cono puede ser cualquier figura limitada, por ejemplo, cualquier polígono. Por lo tanto, cualquier pirámide es un cono.

El cono se denomina *elíptico* si la base del cono es una figura limitada por la elipse. Es evidente, que el cono circular recto es un caso particular del cono elíptico.

§ 79. El cilindro

Examinemos en el plano p la figura limitada D y cierto vector $\boldsymbol{a}$, que no es paralelo al plano p. Entonces, la unión de todos los segmentos MN tales, que $M \in D$ y $\overrightarrow{MN} = \boldsymbol{a}$ se denomina *cilindro con base D* (fig. 238). Es evidente, que el conjunto D' de todos los puntos N, que se obtienen con el traslado paralelo de los puntos $M \in D$ (al vector $\boldsymbol{a}$) está situado en el plano q que es paralelo al plano p. Además, la figura D' es congruente a la figura D.

Las figuras D y D' se denominan *bases del cilindro*. La distancia entre los planos de las bases se denomina *altura del cilindro*.

Se denomina *superficie lateral del cilindro* la parte de la superficie cilíndrica que es la frontera del cilindro.

Si la base del cilindro es un círculo y las generatrices de la superficie cilíndrica son perpendiculares a los planos de las bases, tal cilindro se denomina *cilindro circular recto.*

El cilindro circular recto puede ser engendrado por la revolución de un rectángulo en torno a uno de sus lados (fig. 239). El lado del rectángulo paralelo al eje de revolución y no situado en él, describe la superficie lateral, y los lados perpendiculares al eje de revolución, las bases del cilindro.

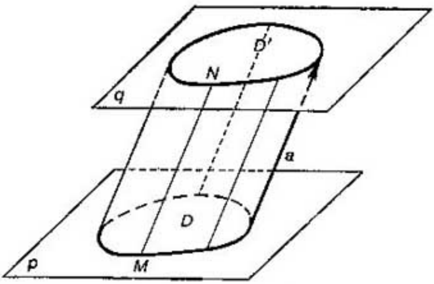

Fig. 238

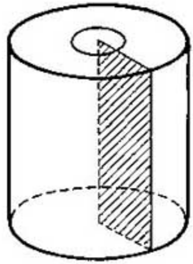

Fig. 239

En caso general, la base del cilindro puede ser cualquier figura limitada, por ejemplo, cualquier polígono. Por lo tanto, cualquier prisma es un cilindro.

Si la base del cilindro es una figura, limitada por una elipse, el cilindro se denomina *elíptico.* En particular, el cilindro circular recto es un caso especial del cilindro elíptico

Problemas para el capítulo VI

6.1. Escríbase la ecuación de la esfera con centro en el origen de coordenadas y radio $R = 6$.

6.2. El punto M $(-2;\ 2;\ 1)$ está situado en la esfera, y el centro de la esfera se encuentra en el origen de coordenadas. Escríbase la ecuación de la esfera.

6.3. Se da la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y tres puntos: A $(2;\ -1;\ 1)$, B $(2;\ 2;\ -1)$, C $(-1;\ -2;\ 5)$. Determínese, cuál de estos puntos se encuentra dentro de la esfera, en la esfera y fuera de la esfera.

6.4. Hállense el centro y el radio de las esferas:

a) $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 81$;

b) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 72$.

6.5. Demuéstrese que las siguientes ecuaciones son ecuaciones de esferas:

a) $x^2 + y^2 + 2y + z^2 + z - 1 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 43 = 0$.

6.6. ¿Qué figura es la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y del plano:

a) $y = 1$; $b = \frac{1}{2}$; c) $y = 2$?

6.7. ¿Qué figura es la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ y del plano $z = 1$?

6.8. El plano $z = -1$ corta la esfera $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ por cierta circunferencia. Hállense su centro y el radio.

6.9. El centro de la esfera se encuentra en el plano $z = 4$, y la misma esfera es tangente al plano xOy en el punto M (2; 3; 0). Fórmese la ecuación de la esfera y determínense las coordenadas de su centro.

6.10. Los puntos A (3; −5; 6) y B (5; 7; −1) son los extremos de uno de los diámetros de la esfera. Escríbase la ecuación de esta esfera.

6.11. Se dan los puntos: A (2; −5; 8), B (8; −2; 5), C (5; −8; 2) y D (−2; −8; −5). Escríbase la ecuación de la esfera si sabemos que estos puntos están situados en su superficie.

6.12. Hállense las coordenadas del punto, que es simétrico al centro de la esfera $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 24$ respecto al plano tangente a la esfera en el punto M (−1; 0; 3).

6.13. Los puntos A (7; −2; 4) y B (9; −8; 6) están situados en la superficie de la esfera y en la recta que atraviesa su centro. Fórmese la ecuación de la esfera.

6.14. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$ en torno al eje Oy.

6.15. La elipse con los semiejes $a = 6$, $b = 4$ y el centro en el origen de coordenadas gira en torno a su eje mayor, coincidente con el eje Oz. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución. Ilústrese la superficie en la figura.

6.16. Escríbase la ecuación de la superficie descrita por una hipérbola que gira en torno a su eje real, coincidente con el eje Ox. Los semiejes de la hipérbola son $a = 8$ y $b = 6$, su centro coincide con el origen de coordenadas. Ilústrese la superficie en una figura.

6.17. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ en torno al eje Oz. Ilústrese la superficie en una figura.

6.18. Hágase la ecuación de la superficie de revolución de la parábola $y^2 = 6z$ en torno al eje Oz. Ilústrese la superficie en una figura.

6.19. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución de la recta $x - 3 = 0$ en torno al eje Oz. Ilústrese la superficie en una figura.

6.20. Escríbase la ecuación de la superficie de revolución de la recta $\begin{cases} 3x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$ en torno al eje Ox.

6.21. Hágase la ecuación de la superficie cilíndrica, cuya directriz está situada en el plano xOy y tiene la ecuación $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, y la generatriz es paralela al vector $\boldsymbol{a}$ (1; 0; 1).

6.22. ¿Qué superficies se definen por las ecuaciones:

a) $x^2+y^2=25$;

b) $x^2+y^2+z^2=25$;

c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

d) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$;

e) $y^2=6x$?

6.23. Una curva está definida en el espacio por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\operatorname{sen} t, \\ z=4. \end{cases}$$

Escríbase la ecuación de la superficie cónica con el vértice en el origen de coordenadas, para la cual la curva dada es la directriz.

6.24. Hágase la ecuación de la superficie cónica obtenida por el giro de dos rectas cruzadas: $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0$, $x=0$, en torno al eje Oz.

6.25. Determínese el tipo de superficie $14x=y^2+z^2$ y construyase su imagen.

6.26. Determínese qué superficie está definida por la ecuación $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{12}=1$, y establézcase, por qué línea se corta con el plano $z-1=0$.

6.27. Determínese, qué superficie está definida por la ecuación $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{8}=1$ y por qué línea se interseca con el plano $z+2=0$.

6.28. Determínese, qué superficie está definida por la ecuación $x^2+y^2-4z=0$ y establézcase por qué línea se corta con el plano $z-2=0$.

Capítulo VII

VOLÚMENES DE LOS CUERPOS Y ÁREAS DE LAS SUPERFICIES

§ 80. Volumen del paralelepípedo

Por unidad de medida de los volúmenes se toma el volumen de un cubo la longitud de la arista del cual es igual a la unidad de longitud. Por ejemplo, $1\ m^3$ es el volumen del cubo, cuya longitud de la arista es igual a $1\ m$, y $1\ cm^3$ es el volumen del cubo cuya longitud de la arista es igual a $1\ cm$. Es evidente, que $1\ m^3 = 100^3\ cm^3$.

Si está elegida la unidad de longitud, entonces cualquier cubo, cuya longitud de la arista es igual a la unidad se denomina *unitario*. El volumen del cubo unitario es igual a la unidad de volumen respectiva. Se denomina *volumen del cuerpo* el número de cubos unitarios y sus partes, encerrados en el cuerpo dado. Este número puede ser entero, fraccionario o, en general, un número real arbitrario no negativo.

En adelante, al demostrar las afirmaciones concernientes a los volúmenes, se supone que se cumplen las siguientes propiedades:

1) los poliedros congruentes tienen volúmenes iguales (*propiedad de invariación*);

2) el volumen de un poliedro, que es la unión de varios poliedros, dos cualesquiera de los cuales no tienen puntos interiores comunes, es igual a la suma de los volúmenes de estos poliedros (*propiedad de aditividad*).

De la propiedad (2) se deduce la *propiedad de monotonía*: el volumen de una parte del poliedro no es superior al volumen de todo el poliedro.

Los poliedros que tienen volúmenes iguales se denominan *equivalentes*.

Deduzcamos, ante todo, la fórmula para el volumen del paralelepípedo rectangular. Recordemos, que se denominan *dimensiones* del paralelepípedo rectangular, las longitudes de sus tres aristas, que convergen en un mismo vértice. Una de ellas se puede considerar como longitud, otra, como anchura, y la tercera, como altura.

Teorema 1. *El volumen del paralelepípedo rectangular es igual al producto de sus tres dimensiones, es decir,*

$$V = abc, \tag{1}$$

donde a, b, c son las tres dimensiones del paralelepípedo.

□ Es evidente que si en el paralelepípedo rectangular todas las tres dimensiones son números enteros

$$a = m, \quad b = p, \quad c = q,$$

entonces él se divide por los planos, paralelos a las caras, en mpq cubos unitarios, y, por lo tanto, su volumen es igual al producto abc.

Examinemos ahora el caso, cuando todas las tres dimensiones a, b, c son números racionales (en particular, pueden ser también enteros). Reduzcamos estos números a un denominador común. Entonces

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{p}{n}, \quad c = \frac{q}{n},$$

donde n, m, p, q son números naturales.

Dividamos un cubo unitario en n^3 cubos de volúmenes iguales por los planos paralelos a las caras. El volumen de cada cubo es igual a $\frac{1}{n^3}$.

El paralelepípedo rectangular examinado contiene mpq cubos pequeños, y, por lo tanto, su volumen V es igual a la suma de los volúmenes de todos estos cubos:

$$V = mpq \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = abc.$$

Examinemos, por último, el caso general cuando las dimensiones a, b, c son números reales (en particular, pueden ser también racionales). Designemos sus n-ésimas aproximaciones decimales con insuficiencia y exceso por a_n, b_n, c_n y a'_n, b'_n, c'_n respectivamente. Designemos por V_n y V'_n los volúmenes de los paralelepípedos, cuyas dimensiones son a_n, b_n, c_n y a'_n, b'_n, c'_n respectivamente. Entonces

$$V_n = a_n b_n c_n, \quad V'_n = a'_n b'_n c'_n,$$

ya que en el caso, cuando todas las tres dimensiones del paralelepípedo son números racionales, esta fórmula queda demostrada.

De acuerdo con la propiedad de monotonía de los volúmenes $V_n \leqslant V \leqslant V'_n$, es decir,

$$a_n b_n c_n \leqslant V \leqslant a'_n b'_n c'_n.$$

Pasando al límite con $n \to \infty$ en esta desigualdad, obtenemos la fórmula (1). ■

Corolario. *El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH, \tag{2}$$

donde Q es el área de la base del paralelepípedo y H es su altura.

□ Tomemos por base del paralelepípedo rectangular el rectángulo, cuyas longitudes de los lados son iguales a a y b

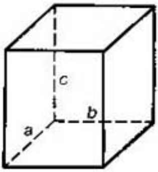

Fig. 240

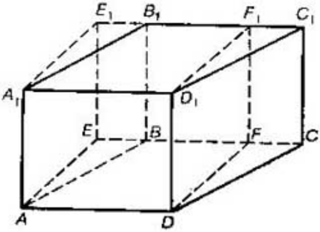

Fig. 241

(fig. 240). Entonces $ab = Q$ es el área de la base del paralelepípedo, $c = H$ es su altura, y, por lo tanto, la fórmula (2) se deduce de la fórmula (1). ■

Teorema 2. *El volumen del paralelepípedo recto es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH, \tag{3}$$

donde Q es el área de la base del paralelepípedo, y H es su altura.

□ Examinemos el paralelepípedo recto, cuya base es el paralelogramo $ABCD$ (fig. 241). Trazando a través de las aristas AA_1 y DD_1 los planos AA_1E_1E y DD_1F_1F perpendicularmente a la recta BC, construyamos el paralelepípedo $AEFDA_1E_1F_1D_1$. Este paralelepípedo es equivalente al dado, ya que el prisma triangular $AEBA_1E_1B_1$ es congruente al prisma triangular $DFCD_1F_1C_1$. De acuerdo con la fórmula (2)

$$V = S_{AEFD}H,$$

donde S_{AEFD} es el área del rectángulo $AEFD$. Entonces, puesto que este rectángulo es equivalente al paralelogramo $ABCD$, es decir, $F_{AEFD} = Q$, la fórmula (3) queda demostrada. ■

Problema. La base de un paralelepípedo recto es un rombo, cuya área es igual a S. Las áreas de las secciones diagonales son iguales a S_1 y S_2. Hállese el volumen del paralelepípedo.

△ Para determinar el volumen del paralelepípedo es necesario hallar su altura H (fig. 242). Designemos con d_1 y d_2 las longitudes de las diagonales de la base. Entonces

$$d_1 \cdot H = S_1, \quad d_2 \cdot H = S_2, \quad d_1 \cdot d_2 = 2S.$$

De estas ecuaciones hallamos

$$\frac{S_1}{H} \cdot \frac{S_2}{H} = 2S, \quad H = \sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2}{2S}}.$$

Por consiguiente,

$$V = S \cdot H = S\sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2}{2S}} = \sqrt{\frac{S \cdot S_1 \cdot S_2}{2}}. \quad ▲$$

§ 81. Volumen del prisma recto

Teorema. *El volumen de un prisma recto es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH,$$

donde Q es el área de la base del prisma y H es su altura.

□ Examinemos primeramente el prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 243). Reconstruyámoslo convirtiéndolo en el paralelepípedo recto $ACBDA_1C_1B_1D_1$. Es evidente, que el área de la base $ACBD$ de este paralelepípedo es igual a $2Q$, y la altura es igual a H, por lo tanto, su volumen es igual a $2QH$.

Dado que los prismas $ABCA_1B_1C_1$ y $ABDA_1B_1D_1$ son congruentes, sus volúmenes son iguales. Por consiguiente, si V es el volumen del prisma dado, entonces $2V = 2QH$, es decir, $V = QH$. Para el prisma triangular el teorema queda demostrado.

Consideremos ahora, un **prisma** n-angular **recto arbitrario** $(n > 3)$. Tracemos por una de las aristas laterales del

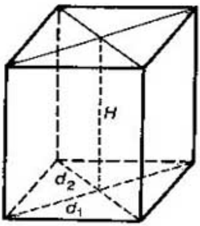

Fig. 242

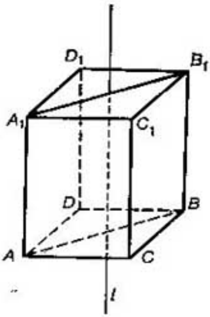

Fig. 243

prisma secciones diagonales (fig. 244). Entonces el prisma dado se descompondrá en $n - 2$ prismas triangulares con

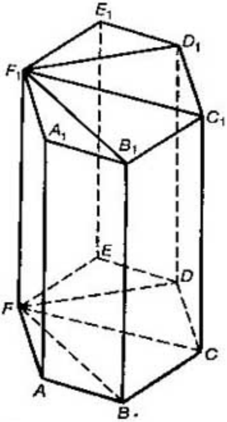

Fig. 244

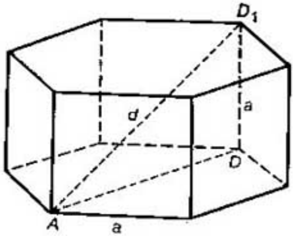

Fig. 245

una **altura** H. La suma de sus volúmenes es igual al volumen del prisma dado. Por lo tanto, si $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-2}$ son las áreas de las bases de los prismas triangulares obtenidos, entonces $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-2} = Q$ y

$$V = Q_1H + Q_2H + \ldots + Q_{n-2}H =$$
$$= (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-2})\,H = QH. \blacksquare$$

Problema. Hállese el volumen de un prisma hexagonal recto cuya diagonal mayor es igual a d, y las caras laterales son cuadrados.

$\triangle$ Designemos con a (fig. 245) la longitud de un lado de la base del prisma y hallemos el área de la base:

$$Q = 6 \cdot \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} 60^\circ = 3 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Del triángulo ADD_1, según el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$|AD_1|^2 = |AD|^2 + |DD_1|^2,$$

es decir, $d^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$, $a = \dfrac{d}{\sqrt{5}}$.

Por consiguiente,

$$V = QH = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}} \cdot d^3. \blacktriangle$$

§ 82. Volumen del cilindro recto

Sea que en el espacio está dado un cuerpo acotado D. Denominemos *circunscrito* alrededor del cuerpo D, todo poliedro K que contiene el cuerpo D, e *inscrito* en el cuerpo D todo poliedro K' comprendido en D.

Si para el cuerpo D existen sucesiones de los poliedros inscritos y circunscritos

$$K'_n \subset D \subset K_n, \quad n \in N,$$

cuyos volúmenes V'_n y V_n tienen un límite común

$$\lim_{n\to\infty} V'_n = \lim_{n\to\infty} V_n = V,$$

el número V se denomina *volumen del cuerpo D*.

Señalemos, que el volumen del cuerpo, definido de tal modo, posee las propiedades de invariación y aditividad.

Observación. Se puede demostrar, que si para el cuerpo D existen dos sucesiones de los cuerpos inscritos y circunscritos (no obligatoriamente poliedros) cuyos volúmenes tienen un límite común V, entonces el volumen del cuerpo D es igual al número V.

Teorema. *El volumen de un cilindro recto es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH,$$

donde Q es el área de la base y H es la altura del cilindro.

□ Puesto que el área de la base del cilindro es igual a Q, existen sucesiones de los poliedros circunscritos e inscritos con las áreas Q_n y Q'_n tales que

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} Q'_n = Q.$$

Construyamos las sucesiones de los prismas, cuyas bases son los poliedros circunscritos e inscritos examinados anteriormente, y las aristas laterales son paralelas a la generatriz del cilindro dado y tienen la longitud H.

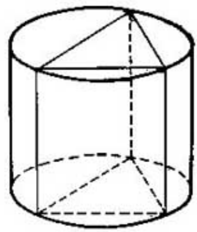

Fig. 246

Estos prismas son, para el cilindro dado, circunscritos e inscritos. Sus volúmenes se hallan por las fórmulas

$$V_n = Q_nH \text{ y } V'_n = Q'_nH.$$

Por consiguiente,

$$V = \lim_{n\to\infty} Q_nH = \lim_{n\to\infty} Q'_nH = QH. \blacksquare$$

Corolario. *El volumen de un cilindro circular recto se calcula por la fórmula*

$$V = \pi R^2 H,$$

donde R es el radio de la base y H, la altura del cilindro.

□ Puesto que la base del cilindro circular es el círculo del radio R, entonces $Q = \pi R^2$, y, por lo tanto, $V = QH = \pi R^2 H$. ■

Problema. En un cilindro circular recto está inscrito un prisma triangular regular (fig. 246). Hállese la razón entre el volumen del cilindro y el volumen del prisma.

■ Dado que el cilindro y el prisma tienen una misma altura, la razón de sus volúmenes es igual a la razón de las áreas de las bases:

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{Q_c}{Q_p}.$$

Es evidente que $Q_c = \pi R^2$, donde R es el radio de la base del cilindro. La base del prisma es un triángulo regular inscrito en la circunferencia del radio R. La longitud de su lado es igual a $\sqrt{3}R$ y por lo tanto $Q_p = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$.

Por consiguiente,

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \approx 2,4. \ \blacktriangle$$

§ 83. Cálculo del volumen de un cuerpo según las áreas de sus secciones paralelas

Examinemos el cuerpo D limitado por los planos $x = a$ y $x = b$ (fig. 247). Designemos con $S(x)$ el área de la sección del cuerpo D por un plano que pasa por el punto con la

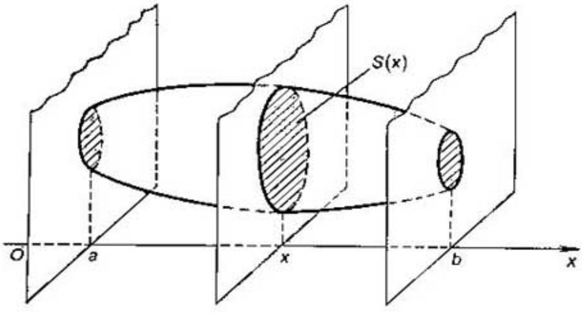

Fig. 247

abscisa $x \in [a; b]$ y es perpendicular al eje Ox. Supongamos que

1) la función $S(x)$ es continua en $[a; b]$;

2) para x_1 y x_2 cualesquiera de $[a; b]$ las secciones del cuerpo D por los planos $x = x_1$ y $x = x_2$ son tales que una de ellas se proyecta en la otra.

Se denomina *cuerpo con secciones paralelas admisibles* el cuerpo D, que posee estas propiedades.

Teorema. *El volumen de un cuerpo con secciones paralelas admisibles se calcula por la fórmula*

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \qquad (1)$$

□ Descompongamos el segmento $[a;\ b]$ con los puntos

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\,i, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

en n segmentos $[x_{i-1};\ x_i]$ de longitud

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Sea que m_i y M_i son los valores máximo y mínimo de la función $S(x)$ en el segmento $[x_{i-1};\ x_i]$.

Descompongamos el cuerpo D en n capas por medio de los planos $x = x_i$, donde $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. Destaquemos la i-ésima capa correspondiente al segmento $[x_{i-1};\ x_i]$,

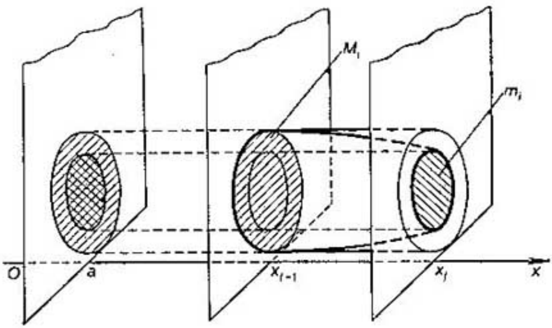

Fig. 248

y construyamos dos cilindros de Δx_i de altura; uno con la base del área M_i, que comprende la i-ésima capa, y el otro con la base del área m_i, comprendida en la i-ésima capa (fig. 248). Los volúmenes de estos cilindros son iguales a $M_i \Delta x_i$ y $m_i \Delta x_i$.

Al efectuar las construcciones indicadas para cada capa, obtendremos dos cuerpos escalonados D'_n y D''_n tales, que $D'_n < D < D''_n$. Sus volúmenes son iguales a

$$V'_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad V''_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Como la función $S(x)$ es continua, entonces V'_n y V''_n cuando $n \to \infty$ tienen el mismo límite, igual a $\int_a^b S(x)\,dx$. Por consiguiente, el volumen del cuerpo D se calcula por la fórmula (1). ■

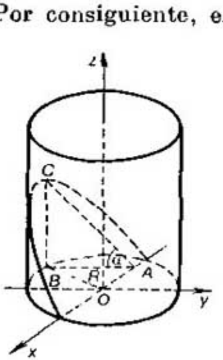

Fig. 249

Nota. Se puede demostrar que la fórmula (1) es válida también en el caso cuando la condición 2) no se cumple para el cuerpo D.

Problema. Determínese el volumen de un cuerpo, cortado de un cilindro circular recto, por el plano que pasa por el diámetro de la base y forma con el plano de ésta el ángulo α ($\alpha < 90°$). El radio de la base del cilindro es igual a R.

∠ Introduzcamos el sistema de coordenadas así como está señalado en la figura 249 y examinemos las secciones del cuerpo dado por los planos perpendiculares al eje Ox.

Calculemos el área de la sección por el plano, que pasa por el punto A con la abscisa x, $|x| < R$. Esta sección representa un triángulo rectangular ABC, y por lo tanto

$$S(x) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2}|AB|^2 \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(R^2 - |OA|^2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Aplicando la fórmula (1), obtenemos

$$V = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha.$$

Respuesta. $V = \frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha$. ▲

§ 84. Volumen de un cuerpo de revolución

Examinemos un cuerpo de revolución, obtenido por el giro en torno al eje de las abscisas, de un trapecio curvilíneo, que corresponde a una función continua no negativa $y = f(x)$,

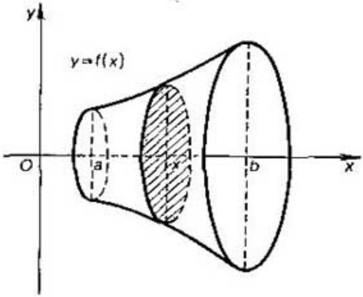

Fig. 250

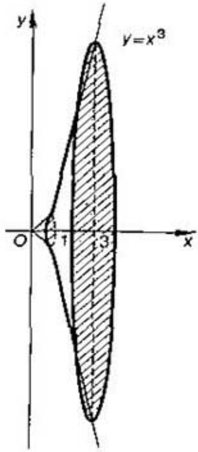

Fig. 251

$x \in [a; b]$ (fig. 250). Es evidente, que la sección de este cuerpo por el plano que pasa a través del punto con la abscisa $x \in [a; b]$ y es perpendicular al eje Ox, es el círculo del radio $f(x)$. Por consiguiente,

$$S(x) = \pi f^2(x),$$

y el volumen del cuerpo de revolución que se examina se calcula por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Problema 1. Hállese el volumen de un cuerpo, que se obtiene girando en torno al eje Ox un trapecio curvilíneo, que corresponde a la función $y = x^3$, $x \in [1; 3]$ (fig. 251).

$\triangle$ Según la fórmula (1) obtenemos

$$V = \pi \int_1^3 x^6\, dx = \frac{\pi}{7} x^7 \Big|_1^3 = \frac{\pi}{7}(3^7 - 1).$$

Respuesta. $V = \frac{2186}{7}\pi$. ▲

Problema 2. Hállese el volumen de un cuerpo, que se obtiene girando en torno al eje de las abscisas un trapecio

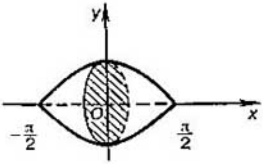

Fig. 252

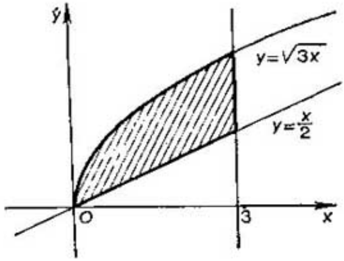

Fig. 253

curvilíneo, que corresponde a la función $y = \cos x$, $x \in \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (fig. 252).

$\triangle$ Según la fórmula (1) obtenemos

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Respuesta. $V = \frac{\pi^2}{2}$. ▲

Problema 3. Hállese el volumen de un cuerpo, formado por el giro en torno al eje de las abscisas, de la figura, limitada por las líneas $y = \sqrt{3x}$, $y = \frac{x}{2}$ y $x = 3$ (fig. 253).

$\triangle$ Es evidente, que el volumen del cuerpo de revolución dado es igual a la diferencia de los volúmenes de los cuerpos, obtenidos por el giro de los trapecios curvilíneos, correspondientes a las funciones $y = \sqrt{3x}$ e $y = \frac{x}{2}$, $x \in [0;\ 3]$. Por consiguiente,

$$V = \pi \int_0^3 3x\, dx - \pi \int_0^3 \frac{x^2}{4}\, dx = \frac{3\pi}{2} x^2 \Big|_0^3 - \frac{\pi}{12} x^3 \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2}\pi - \frac{27}{12}\pi = \frac{45}{4}\pi.$$

Respuesta. $V = \frac{45}{4}\pi$. ▲

§ 85. Volumen del cono circular recto

Teorema 1. *El volumen del cono circular recto con una altura H y un radio de base R se calcula por la fórmula*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

□ El cono dado se puede considerar como un cuerpo obtenido por el giro de un triángulo con los vértices en los puntos $O\ (0;\ 0)$, $B\ (H;\ 0)$, $A\ (H;\ R)$ en torno al eje Ox (fig. 254). El triángulo OAB es un trapecio curvilíneo correspondiente a la función $y = \frac{R}{H} x$, $x \in [0;\ H]$. Por lo tanto, utilizando la fórmula (1) del § 84, obtenemos

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \quad ■$$

Corolario. *El volumen del cono circular recto es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura, es decir,*

$$V = \frac{1}{2} QH,$$

donde Q es el área de la base, y H, la altura del cono.

Teorema 2. *El volumen del cono truncado con los radios de las bases r y R y la altura H se calcula según la fórmula*

$$V = \frac{1}{3}\pi H (r^2 + R^2 + rR).$$

□ El cono truncado puede obtenerse girando el trapecio $OABC$ (fig. 255) en torno al eje Ox. La recta AB pasa por los puntos $(0;\ r)$ y $(H;\ R)$ y tiene, por lo tanto, la ecuación

$$y=\frac{R-r}{H}x+r.$$

Utilizando la fórmula (1) del § 84, obtenemos

$$V=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2dx.$$

Para calcular la integral hagamos la sustitución

$$u=\frac{R-r}{H}x+r,\quad du=\frac{R-r}{H}dx.$$

Es evidente, que cuando x varía en los límites de 0 a H, la variable u varía de r a R, y, por lo tanto

$$V=\pi\int_r^R u^2\frac{H}{R-r}du=\frac{\pi H}{R-r}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_r^R=$$

$$=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr).\ ■$$

Problema. Hállese el volumen de un cuerpo obtenido por el giro de un triángulo isósceles en torno al eje l que

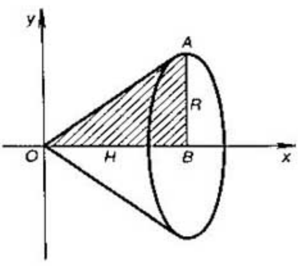

Fig. 254

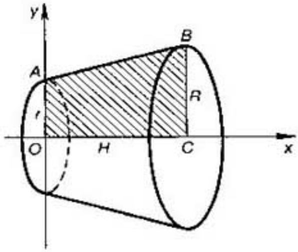

Fig. 255

pasa por el vértice de la base paralelamente al lado lateral. La longitud del lado lateral es igual a a, el ángulo del vértice es igual a α $\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

△ Sea que ABC es un triángulo dado (fig. 256). Tracemos los segmentos CL y BK perpendiculares al eje l. Entonces el volumen V del cuerpo obtenido por el giro del $\triangle ABC$, se calcula según la fórmula

$$V = V_c - V'_k - V''_k,$$

donde V_c es el volumen del cilindro obtenido por el giro del rectángulo $KBCL$, y V'_k y V''_k son los volúmenes de los conos formados al girar los $\triangle AKB$ y $\triangle ALC$.

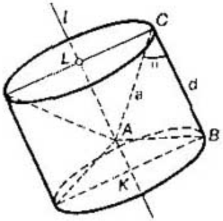

Fig. 256

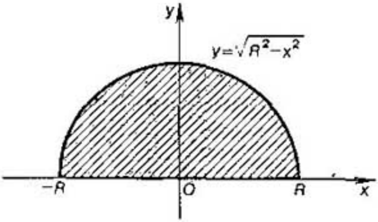

Fig. 257

Por consiguiente,

$$V = \pi |LC|^2 |BC| - \frac{\pi}{3} |KB|^2 |AK| - \frac{\pi}{3} |LC|^2 |AL|,$$

puesto que $|LC| = |KB|$ y $|AK| + |AL| = |BC|$,

$$V = \pi |LC|^2 \left(|BC| - \frac{1}{3} |BC| \right) = \frac{2}{3} \pi |LC|^2 |BC|.$$

Según la condición $|BC| = a$, y del $\triangle ALC$: $|LC| = a \operatorname{sen} \alpha$.

Por consiguiente,

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \operatorname{sen}^2 \alpha. \ \blacktriangle$$

§ 86. Volumen de la esfera y de sus partes

Teorema 1. *El volumen de la esfera de radio R se calcula por la fórmula*

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \qquad (1)$$

☐ La esfera es un cuerpo de revolución. Se obtiene girando en torno al eje Ox un trapecio curvilíneo, que corresponde a la función $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$ (fig. 257).

Por consiguiente, según la fórmula para el volumen de un cuerpo de revolución obtenemos

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=$$

$$=2\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3. \blacksquare$$

Análogamente se obtiene la fórmula para el volumen de una capa esférica, que se obtiene girando en torno al eje Ox,

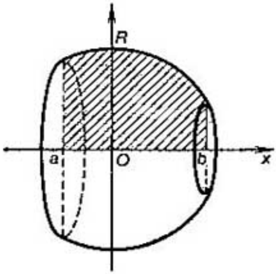

Fig. 258

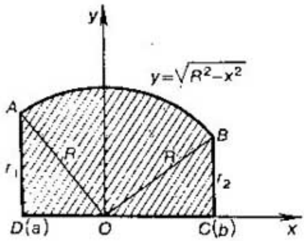

Fig. 259

un trapecio curvilíneo, que corresponde a la función $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[a;\ b]$ (fig. 258).

En efecto,

$$V=\pi\int_{a}^{b}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2(b-a)-\frac{b^3-a^3}{3}\right). \qquad (2)$$

Teorema 2. *El volumen de una capa esférica cuyos radios de la base son iguales a r_1 y r_2, y la altura es igual a H, se calcula por la fórmula*

$$V=\frac{1}{6}\pi H\,(3r_1^2+3r_2^2+H^2). \qquad (3)$$

□ En la figura 259 se ve que $H=b-a$, por lo tanto, la fórmula (2) se transforma del modo siguiente:

$$V=\pi H\left(R^2-\frac{b^2+ab+a^2}{3}\right)=\pi H\left(R^2-\frac{(b-a)^2+3ab}{3}\right)=$$

$$=\pi H\left(R^2-ab-\frac{H^2}{3}\right).$$

De los triángulos rectangulares AOD y BOC hallamos

$$r_1^2 = R^2 - a^2, \quad r_2^2 = R^2 - b^2.$$

Por consiguiente,

$$r_1^2 + r_2^2 = 2R^2 - a^2 - b^2 = 2R^2 - (b-a)^2 - 2ab = \\ = 2R^2 - H^2 - 2ab,$$

y, por lo tanto,

$$R^2 - ab = \frac{r_1^2 + r_2^2 + H^2}{2}.$$

Así pues,

$$V = \pi H \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + H^2}{2} - \frac{H^2}{3} \right) = \pi H \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{H^2}{6} \right). \quad ■$$

Señalemos que si $r_1 = r_2 = 0$ y $H = 2R$, la fórmula (3) se transforma en la fórmula (1) para el volumen de la esfera

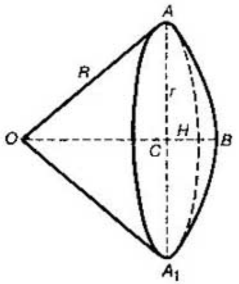

Fig. 260

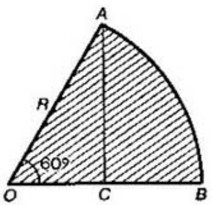

Fig. 261

de radio R. Si consideramos en la fórmula (3) $r_1 = r$ y $r_2 = 0$, obtendremos la fórmula para el volumen de *un segmento esférico.*

Corolario. *El volumen de un segmento esférico con un radio de base igual a r y la altura H se calcula según la fórmula*

$$V = \frac{1}{6} \pi H (3r^2 + H^2). \tag{4}$$

Se denomina *sector esférico* el cuerpo, que es obtenido girando un sector circular en torno a su lado.

El sector esférico obtenido por el giro del sector circular AOB (fig. 260) cuyo ángulo $\widehat{AOB} < 90°$ consta del cono OAA_1 y del segmento esférico ABA_1. Por lo tanto, el volumen del sector esférico es igual a la suma de los volúmenes del cono y del segmento esférico.

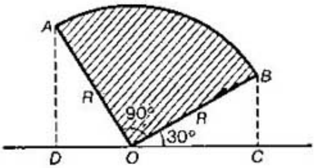

Fig. 262

Problema 1. Hállese el volumen del sector esférico de radio R, si el ángulo en su sección axial es igual a 120°.

△ El sector esférico dado se obtiene girando el sector circular OAB en torno al lado OB (fig. 261). Su volumen V es igual a la suma del volumen V_k del cono circular recto con el radio de base $|AC|$ y la altura $|OC|$ y del volumen V_{seg} del segmento esférico con el mismo radio de base $|AC|$ y la altura $|BC|$.

Es evidente que

$$|OC| = \frac{1}{2} R, \quad |AC| = \frac{\sqrt{3}}{2} R, \quad |BC| = \frac{1}{2} R.$$

Según las fórmulas respectivas obtenemos

$$V_k = \frac{1}{3} \pi |AC|^2 |OC| = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{3}{4} R^2 \cdot \frac{1}{2} R = \frac{\pi}{8} R^3,$$

$$V_{seg} = \frac{1}{6} \pi \cdot \frac{1}{2} R \left(3 \cdot \frac{3}{4} R^2 + \frac{R^2}{4}\right) = \frac{5\pi}{24} R^3.$$

Por consiguiente,

$$V = V_k + V_{seg} = \frac{\pi}{3} R^3. \ \blacktriangle$$

Problema 2. Hállese el volumen del cuerpo obtenido por el giro del sector circular AOB, ilustrado en la figura 262 en torno a la recta DC.

△ El volumen V del cuerpo dado lo hallamos por la fórmula

$$V = V_{ce} - V'_k - V''_k,$$

donde V_{ce} es el volumen de la capa esférica con los radios de las bases $|AD|$ y $|BC|$ y la altura $|DC|$, V'_k es el volumen del cono con el radio de la base $|AD|$ y la altura

$|DO|$, V''_k es el volumen del cono con radio de la base $|BC|$ y altura $|OC|$.

Dado que

$$|DO| = |BC| = \frac{1}{2} R, \quad |AD| = |OC| = \frac{\sqrt{3}}{2} R,$$

entonces

$$V'_k = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{3}{4} R^2 \cdot \frac{1}{2} R = \frac{\pi}{8} R^3,$$

$$V''_k = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{4} R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{\pi \sqrt{3}}{24} R^3.$$

Para calcular el volumen de la capa esférica recurramos a la fórmula (3):

$$V_{ce} = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{1}{2} R + \frac{\sqrt{3}}{2} R\right) \left(3 \cdot \frac{R^2}{4} + 3 \cdot \frac{3R^2}{4} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} R + \frac{\sqrt{3}}{2} R\right)^2\right) = \frac{\pi}{12} (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4}\right) R^3 =$$

$$= \frac{\pi}{24} (1 + \sqrt{3})(8 + \sqrt{3}) R^3 = \frac{\pi}{24} (11 + 9\sqrt{3}) R^3.$$

Por consiguiente,

$$V = \frac{\pi}{24} (11 + 9\sqrt{3}) R^3 - \frac{\pi}{8} R^3 - \frac{\pi \sqrt{3}}{24} R^3 =$$

$$= \frac{8\pi}{24} R^3 + \frac{8\sqrt{3}\pi}{24} R^3 = \frac{\pi}{3} (1 + \sqrt{3}) R^3.$$

Respuesta. $V = \frac{\pi}{3} (1 + \sqrt{3}) R^3$. ▲

En conclusión obtendremos dos fórmulas útiles, para los volúmenes del segmento y del sector esféricos.

El volumen del segmento esférico de radio R y altura H se calcula según la fórmula

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H). \tag{5}$$

□ Del triángulo rectangular OCA se deduce (véase fig. 259) que

$$|AC|^2 = |OA|^2 - |OC|^2,$$

es decir, $r^2 = R^2 - (R - H)^2 = 2RH - H^2$.

Sustituyendo esta expresión para r^2 en la fórmula (4), obtendremos la fórmula (5). ■

El volumen del sector esférico de radio R se calcula por la fórmula

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

donde R es el radio de la esfera, y H es la altura del segmento esférico respectivo.

☐ Realmente, si $H < R$, entonces

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H) + \frac{1}{3}\pi r^2 (R - H),$$

donde el primer sumando es el volumen del segmento esférico, y el segundo sumando es el volumen del cono. Dado que $r^2 = 2RH - H^2$, entonces $V = \frac{1}{3}\pi H^2 (3R - H) + \frac{1}{3}\pi (2RH - H^2)(R - H) = \frac{2}{3}\pi R^2 H$. Análogamente se analiza el caso de $R > H$.

§ 87 *. Volumen de un cilindro arbitrario

Teorema 1. *El volumen de un cilindro arbitrario es igual al producto del área de su base por la altura, es decir,*

$$V = QH, \tag{1}$$

donde Q es el área de la base, y H es la altura del cilindro.

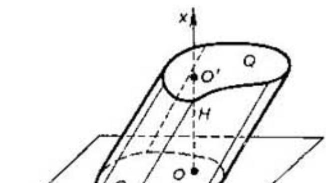

Fig. 263

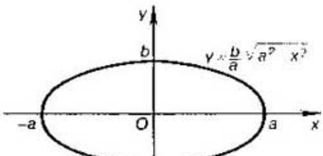

Fig. 264

☐ Tomemos por dirección del eje Ox la dirección perpendicular al plano de la base del cilindro dado (fig. 263). Entonces el cilindro puede considerarse como un cuerpo con secciones paralelas, cuya área es igual a Q. Por eso, utilizando la fórmula (1) del § 83, obtenemos

$$V=\int_0^H Q\,dx=Q\int_0^H dx=QH. \blacksquare$$

Corolario 1. *El volumen del prisma es igual al producto del área de su base por la altura.*

□ En efecto, el prisma es un cilindro, cuya base es un polígono. ■

Corolario 2. *Si la base del cilindro es una elipse con los semiejes a y b, entonces*

$$V=\pi abH, \tag{2}$$

donde H es la altura del cilindro. En particular, si la base del cilindro es el círculo de radio R, entonces

$$V=\pi R^2H. \tag{3}$$

□ El área de la base (fig. 264) se calcula por la fórmula

$$Q=2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Para calcular la integral hagamos la sustitución

$$x=a\cos t,\quad t\in[0;\ \pi];$$

$$dx=-a\operatorname{sen} t\,dt.$$

Entonces

$$Q=2ab\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 t\,dt=ab\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\pi ab.$$

Por consiguiente, el área de la figura limitada por la elipse con los semiejes a y b es igual a πab.

Sustituyendo el valor hallado para Q en la fórmula (1), obtendremos la fórmula (2). En particular, si $a=b=R$, obtendremos la fórmula (3). ■

Teorema 2. *El volumen de un cilindro inclinado es igual al producto del área de su sección perpendicular por la longitud de la generatriz.*

Demostremos este teorema sólo para un caso particular, o sea, cuando el cilindro es un prisma. Para el prisma el teorema 2 se enuncia en la forma siguiente:

el volumen de un prisma inclinado es igual al producto del área de su sección perpendicular por la longitud de la arista lateral.

□ Puesto que cualquier prisma puede dividirse en prismas triangulares, la suma de cuyos volúmenes es igual al volumen del prisma dado, es suficiente efectuar la demostración para el prisma triangular.

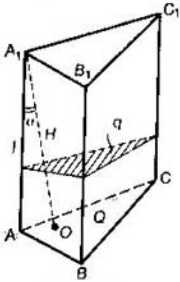

Fig. 265

Examinemos el prisma inclinado $ABCA_1B_1C_1$ (fig. 265). Sea que l es la longitud de la arista lateral, Q es el área de la base, y H es la altura del prisma. Designemos con α la magnitud del ángulo entre el plano de la base y el plano de la sección perpendicular del prisma.

Dado que la altura del prisma OA_1 forma con la arista lateral AA_1 un ángulo de magnitud α, entonces del $\triangle AA_1O$ obtenemos: $H = l \cos \alpha$. Por lo tanto

$$V = QH = Ql \cos \alpha = ql,$$

donde $q = Q \cos \alpha$ es el área de la sección perpendicular del prisma.

Problema. La longitud de la arista lateral de un prisma triangular es igual a 15 cm, y las distancias entre las aristas laterales son iguales a 17 cm, 25 cm y 26 cm. Hállese el volumen del prisma.

△ La sección perpendicular de un prisma dado es un triángulo con los lados cuyas longitudes son de 17 cm, 25 cm y 26 cm. No es difícil calcular que su área es igual a 204 cm². Por eso en virtud del teorema 2

$$V = 204 \text{ cm}^2 \cdot 15 \text{ cm} = 3060 \text{ cm}^3. \ \blacktriangle$$

§ 88. Volumen de la pirámide y de la pirámide truncada

Teorema 1. *El volumen de la pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura, es decir,*

$$V = \frac{1}{3} QH, \tag{1}$$

donde Q es el área de la base, y H es la altura de la pirámide.

□ Tracemos a través del vértice de la pirámide un plano p, paralelo al plano de la base (fig. 266). Elijamos el eje Ox del modo siguiente: el punto O está situado en el plano p, el eje Ox es perpendicular a p y está dirigido a la base de la pirámide. Entonces, la abscisa del vértice es igual a cero, y la abscisa del punto A de intersección del plano de la base con el eje Ox es igual a la altura de la pirámide H.

Designemos con $S(x)$ el área de la sección de la pirámide por el plano, que pasa paralelamente a la base a una distancia del vértice igual a x. Como sabemos (§ 58) en la pirámide

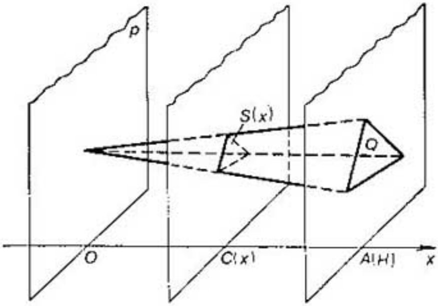

Fig. 266

el área de la base y el de una sección, paralela a la base, se relacionan como los cuadrados de sus distancias del vértice. Por lo tanto,

$$\frac{S(x)}{Q}=\frac{x^2}{H^2}, \quad \text{es decir,} \quad S(x)=\frac{Q}{H^2}x^2.$$

Para calcular el volumen de la pirámide apliquemos la fórmula (1) del § 83

$$V=\int_0^H \frac{Q}{H^2}x^2\,dx=\frac{Q}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{1}{3}QH. \blacksquare$$

Teorema 2. *El volumen de una pirámide truncada que tiene una altura igual a H y las áreas de las bases iguales a Q y q se calcula por la fórmula*

$$V=\frac{1}{3}H\left(q+Q+\sqrt{qQ}\right).$$

□ El volumen de la pirámide truncada $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ se puede hallar como la diferencia de los volúmenes de las pirámides $SABCDE$ y $SA_1B_1C_1D_1E_1$ (fig. 267).

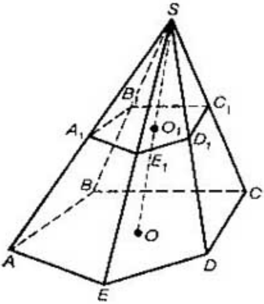

Fig. 267

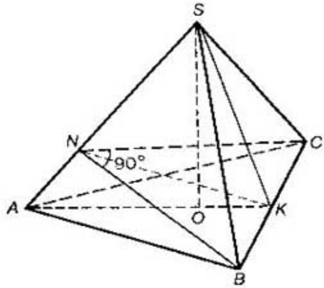

Fig. 268

Por lo tanto

$$V = \frac{1}{3} Q (H + h) - \frac{1}{3} qh,$$

donde h es la altura de la pirámide que completa la pirámide truncada hasta la pirámide normal. Puesto que $\frac{Q}{q} = \frac{(h+H)^2}{h^2}$, entonces

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}} = 1 + \frac{H}{h}, \quad \frac{H}{h} = \frac{\sqrt{Q} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}}$$

y, por consiguiente,

$$h = \frac{H \sqrt{q}}{\sqrt{Q} - \sqrt{q}}.$$

De este modo,

$$V = \frac{1}{3} QH + \frac{1}{3} h (Q - q) = \frac{1}{3} QH +$$

$$+ \frac{1}{3} H \sqrt{q} (\sqrt{Q} + \sqrt{q}) = \frac{1}{3} H (Q + \sqrt{qQ} + q). \blacksquare$$

Problema. Hállese el volumen de una pirámide triangular regular, la cual tiene un lado de la base igual a a y el ángulo entre las caras laterales igual a 90°.

$\triangle$ Sea que $SABC$ es la pirámide dada (fig. 268), y $\angle BNC$ es el ángulo lineal de un ángulo de dos caras con la arista AS.

Dado que el ΔABC es regular, $|AB| = a$, entonces $|BK| = \frac{a}{2}$, $|AK| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Por consiguiente, para el área de la base obtenemos la expresión

$$Q = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Hallemos la altura de la pirámide $H = |SO|$. Puesto que los triángulos ASO y ANK son rectangulares y tienen un ángulo agudo común, ellos son semejantes.

De la semejanza de estos triángulos se deduce que

$$\frac{|SO|}{|NK|} = \frac{|AS|}{|AK|}. \tag{3}$$

Aquí $|NK| = |BK| = \frac{a}{2}$, ya que $\widehat{BNK} = 45°$;

$$|AS| = \sqrt{|OS|^2 + |AO|^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}.$$

Por consiguiente, de (3) obtenemos:

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}, \quad 2H^2 = \frac{a^2}{3}, \quad H = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Así pues,

$$V = \frac{1}{3}QH = \frac{a^3}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3. \quad \blacktriangle$$

§ 89 *. Volumen de un cono arbitrario

Teorema. *El volumen de un cono arbitrario es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura, es decir,*

$$V = \frac{1}{3}QH, \tag{1}$$

donde Q es el área de la base, y H es la altura del cono.

$\square$ Examinemos un cono con el vértice S y la base Φ (fig. 269). Sea que el área de la base Φ es igual a Q, y la altura del cono, a H. Entonces, existen las sucesiones de los polígonos Φ_n y Φ'_n con las áreas Q_n y Q'_n tales, que $\Phi_n \subset \Phi \subset \Phi'_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} Q'_n = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q$.

Es evidente, que la pirámide con el vértice S y la base Φ'_n será inscrita en el cono dado, y la pirámide con el vértice S y la base Φ_n será circunscrita alrededor del cono.

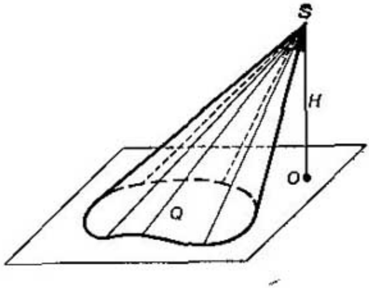

Fig. 269

Los volúmenes de estas pirámides son respectivamente iguales a

$$V_n = \frac{1}{3} Q_n H \quad \text{y} \quad V'_n = \frac{1}{3} Q'_n H.$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} V'_n = \frac{1}{3} QH,$$

la fórmula (1) queda demostrada. ■

Corolario. *El volumen del cono, cuya base es una elipse con los semiejes a y b se calcula según la fórmula*

$$V = \frac{1}{3} \pi abH. \tag{2}$$

En particular, *el volumen del cono, cuya base es un círculo de radio R, se calcula según la fórmula*

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \tag{3}$$

donde H es la altura del cono.

Como sabemos (§ 87), el área de una elipse con los semiejes a y b es igual a πab y, por lo tanto, la fórmula (2) se obtiene de la (1), cuando $Q = \pi ab$. Si $a = b = R$, se obtiene la fórmula (3). ■

§ 90. Area de la superficie del cilindro, del cono y del cono truncado

Por área de la superficie lateral del cilindro se toma el área de la desarrollante de su superficie lateral. Por lo tanto, *el área de la superficie lateral de un cilindro circular*

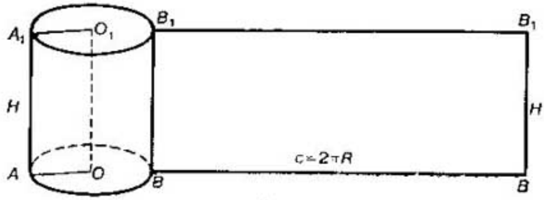

Fig. 270

recto es igual al área del rectángulo respectivo (fig. 270) y se calcula según la fórmula

$$S_{\text{l.c.}} = 2\pi RH, \tag{1}$$

donde R es el radio de la base, y H es la altura del cilindro. Si al área de la superficie lateral del cilindro adicionamos el área de sus dos bases, obtenemos *el área de la superficie total del cilindro*

$$S_{\text{tot.}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(H + R).$$

Por área de la superficie total del cono se toma el área de la desarrollante de su superficie lateral. Por eso, *el área de la superficie lateral del cono circular recto* es igual al área del sector circular respectivo (fig. 271) y se calcula por la fórmula

$$S_{\text{l.k.}} = \pi RL, \tag{2}$$

donde R es el radio de la base, y L es la longitud de la generatriz del cono. Si al área de la superficie lateral del cono adicionamos el área de su base, obtendremos el área de la superficie total del cono

$$S_{\text{tot.}} = \pi RL + \pi R^2 = \pi R\,(L + R).$$

Análogamente, por área de la superficie lateral del cono truncado se toma el área de la desarrollante respectiva. Por eso, en el caso del cono circular recto (fig. 272) *el área de la superficie lateral del cono truncado* se calcula por la fórmula

$$S_{\text{l.k.t.}} = \pi (r_1 + r) L,$$

donde r_1 y r son los radios de las bases, y L es la longitud de la generatriz del cono truncado.

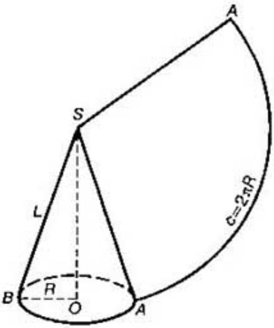

Fig. 271

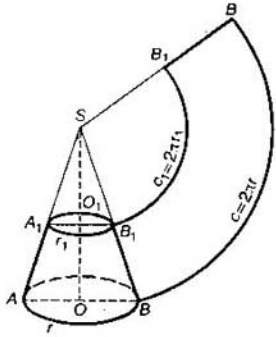

Fig. 272

Problema. En un cono está inscrito un cilindro (fig. 273). La altura del cono es 4 veces mayor que la altura del cilin-

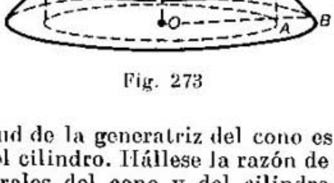

Fig. 273

dro, y la longitud de la generatriz del cono es 6 veces mayor que la altura del cilindro. Hállese la razón de las áreas de las superficies laterales del cono y del cilindro.

△ Según las fórmulas (1) y (2) obtenemos

$$S_{\text{l.c.}} = 2\pi\,|OA|\,|OO|_1, \quad S_{\text{l.k.}} = \pi\,|OB|\,|KB|.$$

Según la condición $|KB| = 6\,|OO_1|$. Por consiguiente,

$$\frac{S_{\text{l.k.}}}{S_{\text{l.c.}}} = \frac{3\,|OB|}{|OA|}.$$

De los triángulos semejantes OBK y O_1A_1K hallamos

$$\frac{|OB|}{|O_1A_1|} = \frac{|OK|}{|O_1K|}.$$

Según la condición $|OK| = 4\,|O_1O|$. Por consiguiente,

$$\frac{|OB|}{|O_1A_1|} = \frac{4}{3}.$$

Teniendo en cuenta que $|O_1A_1| = |OA|$, obtenemos

$$\frac{S_{\text{l.k.}}}{S_{\text{l.c.}}} = 3\cdot\frac{4}{3} = 4,$$

es decir, el área de la superficie lateral del cono es 4 veces mayor que el área de la superficie lateral del cilindro. ▲

§ 91. Area de una superficie de revolución

El área de la superficie lateral para el cilindro y el cono fue definida con ayuda del área de la desarrollante. Sin embargo, tal procedimiento no es aplicable para cualquier superficie. Por ejemplo, no se puede desarrollar la esfera en un plano.

Definamos, para el caso general, el área de la superficie de revolución y demos la fórmula para calcularla.

Sea dado el arco AB de una curva (fig. 274), cuya ecuación $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, donde $f(x)$ es una función no negativa, que tiene una derivada continua.

Dividamos el segmento $[a; b]$ por medio de los puntos

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\,i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

en n segmentos de igual longitud. Tracemos a través de los puntos x_i rectas, paralelas al eje Oy y designemos con M_i los puntos de intersección de estas rectas con el arco AB, La quebrada $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ se denomina *inscrita* en el arco AB.

Si la partición del segmento $[a;\ b]$ es bastante menuda, es decir, si n es bastante grande, las áreas de las superficies formadas por la rotación del arco AB alrededor del eje Ox y de la quebrada inscrita en el arco se diferenciarán poco entre sí.

La superficie engendrada por la revolución de la quebrada consta de las superficies laterales n de los conos truncados (o cilindros). Ya sabemos calcular su área.

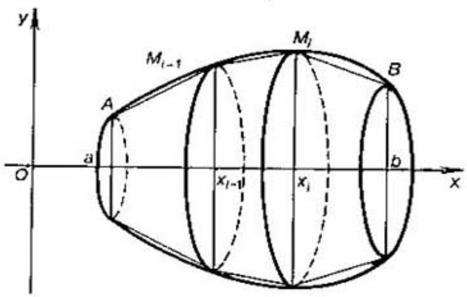

Fig. 274

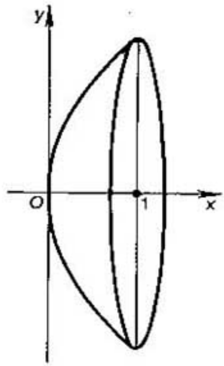

Fig. 275

Se denomina *área de la superficie* formada por la rotación del arco AB, el límite al cual tiende cuando $n \to \infty$, el área de la superficie, formada por la rotación de la quebrada $AM_1 \ldots M_{n-1}B$, inscrita en AB.

Se puede demostrar que el área de la superficie formada por la rotación de la curva AB alrededor del eje Ox se calcula por la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

o, más breve,

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \qquad (1)$$

No presentamos la demostración de esta fórmula.

Problema 1. Hállese el área de la superficie obtenida por la rotación del arco de la parábola $y = 2\sqrt{x}, 0 \leqslant x \leqslant 1$ (fig. 275) alrededor del eje Ox.

△ Puesto que $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, de acuerdo con la fórmula (1), el área de la superficie de revolución se expresará por la fórmula

$$S = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx,$$

de donde obtenemos

$$S = 4\pi\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1).$$

Respuesta. $S = \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. ▲

Si la curva AB está definida por las ecuaciones paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen derivadas continuas, entonces

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + \psi'(t))^2}\,dt,$$

o, más breve,

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y| \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \qquad (2)$$

Problema 2. Calcúlese el área de la superficie formada por la rotación del arco de la cicloide

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi],$$

alrededor del eje Ox.

△ Puesto que $x' = a(1 - \cos t)$ y $y' = a \operatorname{sen} t$, según la fórmula (2) obtenemos

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \times$$

$$\times \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2 \frac{t}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt.$$

Hagamos la sustitución: $u = \cos \frac{t}{2}$, $du = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt$. Entonces

$$S = 16\pi a^2 \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

Respuesta. $S = \frac{64}{3} \pi a^2$. ▲

§ 92. Area de la esfera y de sus partes

Teorema 1. *El área de la esfera de radio R se calcula según la fórmula*

$$S = 4\pi R^2. \tag{1}$$

La esfera de radio R puede ser obtenida por la revolución de la semicircunferencia definida por la ecuación

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R;\ R],$$

alrededor del eje Ox.

Entonces, según la fórmula para el área de una superficie de revolución obtenemos

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \times$$

$$\times \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 4\pi R^2. \quad ■$$

Análogamente se deduce la fórmula para el área de una zona esférica que se obtiene girando el arco de una circunferencia (fig. 276) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [a;\ b]$, en torno al eje Ox.

En efecto,

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi \int_a^b R\,dx = 2\pi R\,(b-a). \qquad (2)$$

Teorema 2. *El área de una zona esférica de radio R y altura H se calcula por la fórmula*

$$S = 2\pi RH. \qquad (3)$$

□ La fórmula (3) se obtiene de la fórmula (2), ya que $H = b - a$. ■

Un segmento esférico puede obtenerse por la revolución del arco de la circunferencia

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad a \leqslant x \leqslant R,$$

alrededor del eje Ox. Por consiguiente, el segmento esférico ès un caso particular de la zona esférica ($b = R$).

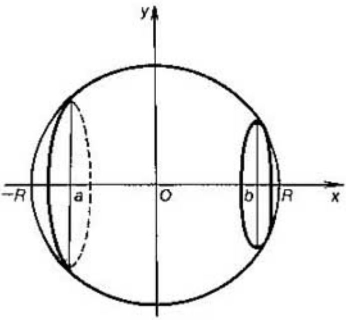

Fig. 276

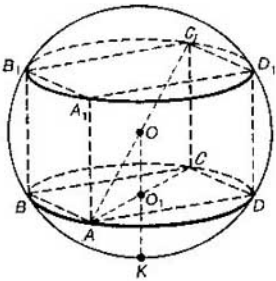

Fig. 277

Corolario. *El área del segmento esférico de radio R y altura H se calcula según la fórmula* (3).

Problema. En una esfera está inscrito un cubo con la arista a (fig. 277). Hállense las áreas:

a) de la esfera;

b) de la zona esférica cortada por los planos de las caras superior e inferior del cubo;

c) del segmento esférico cortado por el plano de la cara inferior del cubo.

△ a) La diagonal del cubo con la arista a es igual a $\sqrt{3}a$. Por consiguiente, $|AC_1| = \sqrt{3}a$. Por otro lado, si R es el radio de la esfera, $|AC_1| = 2R$. Por lo tanto, $2R = \sqrt{3}a$, es decir, $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Por la fórmula (1) hallamos el área S de la esfera:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{3}{4} a^2 = 3\pi a^2.$$

b) En el caso dado, es evidente que la altura de la zona esférica es igual a a. Considerando en la fórmula (3) $H = a$ y $R = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, hallamos el área S_1 de la zona esférica

$$S_1 = 2\pi RH = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \pi \sqrt{3} a^2.$$

c) La altura del segmento esférico es igual a la longitud del segmento O_1K. Calculémosla:

$$|O_1K| = |OK| - |OO_1| = R - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a.$$

Considerando que en la fórmula (3) $H = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a$ y $R = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, hallamos el área del segmento esférico:

$$S_2 = 2\pi RH = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{\sqrt{3}-1}{2} a = \frac{3-\sqrt{3}}{2} a^2. \ ▲$$

Problemas para el capítulo VII

7.1. Los poliedros Φ_1 y Φ_2 tienen los volúmenes V_1 y V_2. Hállese el volumen de la figura $\Phi_1 \cup \Phi_2$, si se sabe que el volumen de la figura $\Phi_1 \cap \Phi_2$ es igual $0{,}5V_2$.

7.2. Los poliedros Φ_1 y Φ_2 tienen los volúmenes V_1 y V_2. ¿En qué caso el volumen de la figura $\Phi_1 \cup \Phi_2$ será igual a V_1?

7.3. Hállese la razón de los volúmenes de las partes del cubo cortado por el plano que pasa a través de su eje de simetría.

7.4. Se da el paralelepípedo rectangular, cuyo volumen es igual a V. Hállense los volúmenes de las partes del paralelepípedo cortado por el plano que pasa por su eje de simetría.

7.5. El cubo de volumen V está cortado por el plano que atraviesa su centro de simetría. Hállense los volúmenes de las partes del cubo.

7.6. La diagonal del cubo es igual a l. Hállese el volumen del cubo.

7.7. La diagonal de un paralelepípedo rectangular, cuya base es un cuadrado de lado a, es igual a l ($l > \sqrt{2}a$). Hállese el volumen del paralelepípedo dado.

7.8. Demuéstrese que el volumen del paralelepípedo rectangular es igual a $\sqrt{Q_1Q_2Q_3}$, si las áreas de sus caras son iguales a Q_1, Q_2 y Q_3.

7.9. Los lados de la base de un paralelepípedo recto son iguales a 7 cm y $\sqrt{18}$ cm y forman un ángulo de 45°, la diagonal menor del paralelepípedo forma con el plano de la base un ángulo de 45°. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.10. La diagonal de un paralelepípedo rectangular es igual a 12 cm y forma con el plano de la cara lateral un ángulo de 30° y con la arista lateral un ángulo de 45°. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.11. La diagonal del paralelepípedo rectangular es igual a l y forma con una cara un ángulo de 30° y con la otra, de 45°. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.12. La diagonal de un paralelepípedo rectangular forma con la base un ángulo de 60°, el ángulo diedro entre la sección diagonal y la cara lateral es igual a 45°. Hállese el volumen del paralelepípedo, si la diagonal de la base es igual a d.

7.13. En un paralelepípedo recto las aristas procedentes de un vértice son iguales a 1 m, 2 m y 3 m, además, las dos aristas menores forman un ángulo de 60°. Calcúlese el volumen del paralelepípedo.

7.14. En un paralelepípedo recto los lados de la base son iguales a 10 cm y 17 cm. Una de las diagonales de la base es igual a 21 cm, la diagonal mayor del paralelepípedo es igual a 29 cm. Calcúlese el volumen del paralelepípedo.

7.15. La diagonal de un paralelepípedo rectangular es igual a 13 cm, y las diagonales de sus caras laterales son iguales a $4\sqrt{10}$ cm y $3\sqrt{17}$ cm. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.16. De base de un paralelepípedo recto sirve un paralelogramo con un ángulo de 120° y los lados iguales a 3 cm y 4 cm. La diagonal menor del paralelepípedo es igual a la diagonal mayor de la base. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.17. En un paralelepípedo inclinado la proyección de una arista lateral sobre el plano de la base es igual a 5 cm, y la altura a 12 cm. La sección perpendicular a la arista lateral es un rombo con un área de 24 cm² y una diagonal igual a 8 cm. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.18. De base del paralelepípedo inclinado sirve un rombo con un lado igual a a y un ángulo agudo de 30°. La diagonal de una cara lateral es perpendicular al plano de la base, y la arista lateral forma con el plano de la base un ángulo de 60°. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.19. De un lingote de cobre que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular de 80 cm × 20 cm × 5 cm de dimensiones, se lamina una hoja de 1 mm de espesor. Determínese el área de esta hoja.

7.20. De una hoja de lata cuadrada con un lado igual a a se fabricó un tanque del mayor volumen posible con una base cuadrada sin tapa. Hállense las dimensiones lineales del tanque.

7.21. De base de un prisma recto sirve un triángulo isósceles cuyos lados son iguales a 5 cm, 5 cm y 6 cm; la altura del prisma es igual a la altura mayor de este triángulo. Hállese el volumen del prisma.

7.22. De base de un prisma recto sirve un triángulo con los lados de 7,5 cm, 6,5 cm y 7 cm, y la arista lateral del prisma igual a $1\frac{2}{7}$ cm. Calcúlese la arista del cubo equivalente al prisma dado.

7.23. La altura de un prisma triangular recto es igual a 6 m, su volumen es igual 2880 m³. Las áreas de las caras laterales se relacionan como 17 : 17 : 16. Hállense las longitudes de los lados de la base.

7.24. La longitud de la diagonal de un prisma cuadrangular regular es igual a 3,5 m, y la de la cara lateral es igual a 2,5 m. Hállese el volumen del prisma.

7.25. La diagonal de la longitud a de un prisma cuadrangular regular forma un ángulo de 30° con la cara lateral. Hállese el volumen del prisma.

7.26. En un prisma triangular regular el lado de la base es igual a a. Hállese el volumen del prisma, si la diagonal de la cara lateral forma un ángulo α con la otra cara lateral.

7.27. La base de un prisma recto es un triángulo isósceles con lados de 5 cm, 5 cm y 6 cm; la diagonal de la cara menor lateral forma un ángulo de 45° con la cara lateral mayor. Hállese el volumen del prisma.

7.28. En la base de un prisma recto se encuentra un triángulo con lados de 3 cm y 5 cm y un ángulo de 120° entre ellos. El área mayor de las caras laterales es igual a 35 cm². Hállese el volumen del prisma.

7.29. En la base de un prisma recto hay un triángulo rectangular con área S y un ángulo agudo igual a α. El área de la cara lateral mayor es igual a Q. Hállese el volumen del prisma.

7.30. La arista lateral de un prisma triangular regular es igual a la altura de la base, y el área de la sección trazada a través de esta arista lateral y la altura de la base es igual a Q. Hállese el volumen del prisma.

7.31. La longitud de una traviesa de ferrocarril es igual a 2,7 m, su sección transversal está representada en la figura 278 (las dimensiones se dan en centímetros). ¿Cuántas traviesas se pueden cargar en una plataforma cuya capacidad de carga es de 17 toneladas? (La densidad de la madera se admite igual a 0,8 g/cm³).

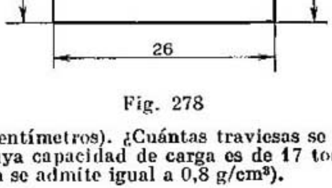

Fig. 278

7.32. Una piscina para agua tiene la forma de un prisma cuadrangular regular y su volumen es igual a 32 m^3. El fondo y las paredes laterales de la piscina hay que cubrirlos con baldosas. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de la piscina para que la cantidad empleada de baldosas sea mínima? ¿Cuántas baldosas se requerirán, si su tamaño es de 20 cm $\times$ 20 cm?

7.33. En un cilindro, cuya altura es igual al diámetro de la base, está trazado un plano paralelo a su eje, que corta de la base un arco igual a 120°. El perímetro de la sección es igual a $(8 + 4\sqrt{3})$ cm. Calcúlese el volumen del cilindro.

7.34. La diagonal de la sección axial de un cilindro circular recto es igual a $d = 16$ cm y forma un ángulo de 60° con el plano de la base. Hállese el volumen del cilindro.

7.35. Un cilindro está formado por la rotación de un rectángulo, cuya área es igual a S, alrededor de uno de sus lados. Hállese el volumen del cilindro, si la longitud de la circunferencia, circunscrita por el punto de intersección de las diagonales del rectángulo, es igual a C.

7.36. En un cilindro circular recto el área de la sección perpendicular a la generatriz es igual a M, y el área de la sección axial es igual a N. Determínese el volumen del cilindro.

7.37. Paralelamente al eje del cilindro circular recto está trazada la sección distante del eje en d y que corta de la circunferencia de la base un arco de magnitud α. El área de la sección es igual a S. Hállese el volumen del cilindro.

7.38. Un árbol de acero, cuyo diámetro es igual a 8,4 cm y la longitud a 97 cm, se tornea de manera que su diámetro disminuya en 0,2 cm. ¿En cuánto disminuirá la masa del árbol después del torneado? (La densidad del acero es de 7,4 g/cm^3).

7.39. Durante la construcción del metro se utilizaron anillos de hormigón armado con un radio exterior de 5,5 m e interior de 5,1 m. ¿Cuál es el volumen de tal anillo si su longitud es de 100 m? ¿En qué por ciento disminuirá el volumen, si las longitudes de ambos radios se reducen en 0,4 m?

7.40. En un prisma inclinado los lados de la base son iguales a 4 cm, 13 cm y 15 cm. La arista lateral es igual a $10\sqrt{2}$ cm y está inclinada hacia el plano de la base bajo un ángulo de 45°. Calcúlese el volumen del prisma.

7.41. La base del prisma inclinado tiene la forma de un paralelogramo con lados de 6 dm y 12 dm y un ángulo agudo igual a 60°. La arista lateral del prisma es igual a 14 dm y forma con el plano de la base un ángulo igual a 30°. Hállese el volumen del prisma.

7.42. El paralelepípedo inclinado tiene como base un rombo con un ángulo agudo igual a α. Cada arista del paralelepípedo es igual a a. La arista lateral que pasa por el vértice del ángulo agudo del rombo forma con los lados de la base ángulos iguales a α. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.43. La base de un prisma inclinado tiene la forma de un triángulo equilátero con un lado igual a a. Una de las caras laterales del prisma es perpendicular al plano de la base y representa un rombo cuya diagonal es igual a b. Hállese el volumen del prisma.

7.44. La base del prisma tiene la forma de un trapecio isósceles, cuyas bases son iguales a 28 cm y 44 cm, y los lados laterales, a 17 cm.

Una de las secciones diagonales del prisma, perpendicular a la base, es un rombo con un ángulo igual a 45°. Hállese el volumen del prisma.

7.45. Todas las caras del paralelepípedo son rombos con diagonales iguales a 6 cm y 8 cm. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.46. La base del paralelepípedo inclinado tiene la forma de un rectángulo con lados a y b, y la arista lateral, igual a c, forma con los lados adyacentes de la base ángulos iguales a α. Hállese el volumen del paralelepípedo.

7.47. Calcúlese el volumen de la pirámide que tiene como base un rectángulo con lados de 6 cm y 8 cm, y cada arista lateral es igual a 13 cm.

7.48. La altura de una pirámide hexagonal regular es igua a 1 m, su apotema forma con la altura un ángulo de 30°. Calcúlese el volumen de la pirámide.

7.49. Las aristas laterales a, b y c de una pirámide triangular son recíprocamente perpendiculares. Demuéstrese que su volumen es igual a $\frac{abc}{6}$.

7.50. La superficie total de una pirámide cuadrangular regular es igual a 108 cm^2. El ángulo diedro de la base es igual a 60°. Calcúlese el volumen de la pirámide.

7.51. En una pirámide cuadrangular regular el lado de la base es igual a a, el ángulo plano del vértice, a α. Hállese el volumen de la pirámide.

7.52. La base de una pirámide es un rombo con lado a y ángulo agudo α. Todos los ángulos diedros de la base son iguales a φ. Hállese el volumen de la pirámide.

7.53. La base de una pirámide es un rombo con lado a y ángulo agudo α, la altura de la pirámide es igual a h. Hállese el volumen de la pirámide.

7.54. La base de una pirámide es un triángulo isósceles, cuya altura es igual a h, y el ángulo del vértice es α. La altura de la pirámide es igual a H. Hállese el volumen de la pirámide.

7.55. El área de la superficie de un tetraedro regular es igual a S. Hállese su volumen.

7.56. La pirámide Keops tiene la forma de una pirámide cuadrangular con una altura de ≈ 150 m y una arista lateral de ≈ 220 m. Hállese el volumen de la pirámide.

7.57. Uno de los diamantes extraídos en Yakutia tiene una masa de 42 quilates y la forma de un octaedro regular. Hállese la arista de este octaedro. (La densidad del diamante es de 3,5 g/cm^3, un quilate es igual a 0,2 g).

7.58. Las caras laterales de una pirámide triangular son recíprocamente perpendiculares, y sus áreas son iguales a a^2, b^2 y c^2. Determínese el volumen de la pirámide.

7.59. En una pirámide triangular truncada la altura es igual a 10 m, los lados de la base inferior son iguales a 27 m, 29 m y 52 m, y el perímetro de la base superior es igual a 72 m. Determínese el volumen de la pirámide truncada.

7.60. Los lados de la base de una pirámide cuadrangular truncada regular son iguales a 40 cm y 10 cm. El área de la superficie total de la pirámide es igual a 3400 cm^2. Calcúlese el volumen de la pirámide truncada.

7.61. En una pirámide a través del punto medio de la altura está trazado un plano paralelo a la base. Determínese el volumen de la pirámide truncada formada, si la altura de la misma es igual a 18 cm, y el área de la base es de 400 cm².

7.62. Los lados de las bases de una pirámide triangular truncada son iguales a a y b $(a > b)$, el ángulo diedro de la base mayor es igual a α. Hállese el volumen de la pirámide truncada.

7.63. En una pirámide cuadrangular truncada regular los lados de la base son iguales a a y b $(a > b)$, el ángulo agudo de la cara lateral es igual a α. Determínese el volumen de la pirámide truncada.

7.64. El lado de la base de una pirámide triangular regular es igual a a, el ángulo entre las caras laterales es igual a φ. Hállese el área de la superficie lateral.

7.65. Calcúlense los volúmenes de los cuerpos formados por rotación en torno al eje Ox de las figuras planas limitadas por las líneas:

a) $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$, y $y = 0$;

b) $xy = 4, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$;

c) $y = x^2, \quad y = 1$;

d) $y = \dfrac{x^2}{2}, \quad y = -x + \dfrac{3}{2}$;

e) $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \dfrac{2}{\pi} x, \quad x > 0$;

f) $y^2 = x, \quad x^2 = y$; g) $y^2 = (x-1)^3, \quad x = 2$;

h) $x^2 - y^2 = 1, \quad x = a + 1 \ (a > 0)$.

7.66. La generatriz de un cono es igual a $\sqrt{6}$ cm y forma un ángulo de 45° con el plano de la base. Hállese el volumen del cono.

7.67. La sección axial de un cono es un triángulo regular con un lado de 6 cm. Hállese el volumen del cono.

7.68. Hállese el volumen del cono cuyo diámetro de base es igual a 6 cm, y el ángulo entre la generatriz y el plano de la base es igual a 30°.

7.69. El ángulo del vértice de la sección axial de un cono es igual a 90°, el área de la sección es igual a 18 cm². Hállese el volumen del cono.

7.70. A través del vértice de un cono bajo el ángulo φ se trazó un plano hacia la base, que corta de la circunferencia de la base el arco φ; la distancia entre el plano de la sección y el centro de la base es igual a d. Determínese el volumen del cono.

7.71. Un triángulo rectangular con catetos iguales a 8 cm y 15 cm gira alrededor del cateto mayor. Calcúlese el volumen del cuerpo de revolución.

7.72. A través del vértice de un cono bajo un ángulo de 45° está trazado un plano hacia la base, que corta un cuarto de la circunferencia de la base de radio $R = 3$ cm. Calcúlese el volumen del cono.

7.73. Un triángulo con lados iguales a 10 dm, 17 dm y 22 dm gira alrededor del lado mayor. Determínese el volumen del cuerpo de revolución.

7.74. Un triángulo rectangular, cuya área es igual a S y el ángulo agudo igual a α gira alrededor del eje que contiene la hipotenusa. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.75. Un triángulo isósceles, cuya base es igual a a y el ángulo de la base es igual a α, gira alrededor del eje que contiene la base. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.76. Un triángulo rectangular con área S y ángulo agudo α gira alrededor del eje, trazado a través del vértice de un ángulo recto paralelamente a la hipotenusa. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.77. Un triángulo isósceles, cuyo ángulo del vértice es igual a β, y el lado lateral, a m, gira alrededor del eje que contiene el lado lateral. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.78. Un montón cónico de grano tiene una altura de 2,4 m, y una circunferencia de base de 20 m. ¿Cuántas toneladas de grano hay en el montón, si la masa de 1 m^3 de grano es igual a 750 kg?

7.79. El cascajo se coloca en un montón que tiene la forma de un cono con una inclinación del talud igual a 33°. ¿Qué altura debe tener el montón para que su volumen sea igual a 10 m^3?

7.80. Los radios de las bases de un cono truncado son iguales a 1 dm y 9 dm, la generatriz es igual a 1 m. Hállese el volumen del cono truncado.

7.81. Los radios de las bases de un cono truncado y su altura se relacionan como 3 : 6 : 4. Calcúlese el volumen del cono truncado, si su generatriz es igual a 25 cm.

7.82. Un trapecio isósceles con un ángulo agudo igual a 60° gira alrededor del eje que pasa por su lado lateral. Calcúlese el volumen del cuerpo de revolución, si las bases del trapecio son iguales a 6 cm y 20 cm.

7.83. Un rombo con lado a y un ángulo agudo α gira alrededor del eje que pasa a través del vértice de un ángulo agudo perpendicularmente a su lado. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.84. Un rombo con diagonal mayor d y ángulo agudo α, gira alrededor de una recta paralela al lado del rombo, que dista d del punto de intersección de las diagonales. Hállese el volumen del cuerpo de revolución.

7.85. Un tronco de 15,5 m de longitud tiene los diámetros de los extremos iguales a 42 cm y 35 cm. Hállese el error relativo admisible, calculando el volumen del tronco por multiplicación del área de la sección transversal media del tronco por su longitud.

7.86. ¿Qué cuerpo tiene mayor volumen: la esfera de radio 1 dm o el prisma triangular regular, cada arista del cual es igual a 2 dm?

7.87. El modelo de una esfera con un diámetro de 12 cm y el modelo de un cubo con una arista de 1 dm están fabricados del mismo material. ¿Qué modelo tiene menor masa?

7.88. El radio OM divide un semicírculo con diámetro AB en dos sectores de modo que $AMB = 120°$. Hállese la razón de los volúmenes de las figuras formadas por la rotación de estos sectores alrededor de (AB).

7.89. La sección de una esfera por un plano perpendicular a su diámetro divide el diámetro en relación 1 : 2. Hállese la relación de los volúmenes de las partes de la esfera.

7.90. La sección de un globo por un plano, perpendicular a su radio, divide el radio por la mitad. Hállese la relación de los volúmenes de las partes del globo.

7.91. Calcúlese el volumen de un segmento esférico, si el radio de la circunferencia de su base es igual a 56 cm, y el radio del globo es igual a 65 cm.

7.92. El sector AOB con un ángulo $\widehat{AOB}$ igual a 30° gira alrededor de la recta ON, perpendicular a $|OB|$. Hállese el volumen del cuerpo de revolución, si el radio del sector es igual a R.

7.93. En una esfera de radio R esta formado un sector con ángulo α en la sección axial. Hállese su volumen.

7.94. En una esfera de radio 2 dm se taladró un orificio cilíndrico a lo largo de su diámetro. Calcúlese el volumen de la parte restante, si el radio del orificio es igual a 1 dm.

7.95. El arco de la sección axial de un sector esférico es igual a 120°. Hállese la razón entre su volumen y volumen del segmento esférico correspondiente.

7.96. Calcúlese el volumen de una esfera circunscrita alrededor de un cubo cuya arista es igual a 1 m.

7.97. Un lado de la base de un tetraedro regular es igual a a, el ángulo diedro de la base es igual a φ. Determínese el volumen de la esfera inscrita en el tetraedro.

7.98. En una esfera, cuyo volumen es igual a V, está inscrito un prisma triangular recto. La base del prisma es un triángulo rectangular con un ángulo agudo igual a α, y la cara lateral mayor es un cuadrado. Hállese el volumen del prisma.

7.99. En una esfera de radio R está inscrito un cono, cuya generatriz forma con la altura el ángulo α. Hállese el volumen del cono.

7.100. En una esfera de radio R está inscrita una pirámide cuadrangular, cuyas aristas laterales están inclinadas hacia el plano de la base de la pirámide bajo el ángulo φ. Determínese el volumen de la pirámide, si en su base está situado un rectángulo, cuya diagonal forma con el lado mayor un ángulo igual a α.

7.101. Hállese el volumen de una esfera inscrita en una pirámide triangular regular con la arista de la base igual a a y el ángulo plano del vértice igual a α.

7.102. En un cono está inscrita una esfera, cuyo área del círculo mayor es igual a S. Hállese el volumen del cono, si el ángulo entre su altura y la generatriz es igual a α.

7.103. En un cilindro está inscrito un prisma cuadrangular, dos aristas laterales del cual están situados en la sección axial del cilindro, y las otras dos, en un plano perpendicular a esta sección. En una de las aristas el ángulo diedro es igual a α. La altura del prisma es igual al perímetro de su base, y la suma de las diagonales de la base es igual a s. Hállese el volumen del prisma.

7.104. Alrededor de un cono está circunscrita una pirámide. La base de la pirámide es un triángulo rectangular, uno de los ángulos agudos del cual es igual a α. Determínese el volumen del cono, si sabemos que el radio de su base es igual a r y la generatriz está inclinada hacia el plano de la base bajo el ángulo β.

7.105. El área de la sección axial de un cilindro es igual a Q. Hállese el área de la superficie lateral del cilindro.

7.106. La diagonal de la desarrollante de la superficie lateral de un cilindro es igual a l y forma el ángulo α con el lado de la desarrollante de la circunferencia respectiva de la base del cilindro. Hállese el área de la superficie total del cilindro.

7.107. El segmento que une los puntos diametralmente opuestos de las bases superior e inferior del cilindro, es igual a 10 cm y está inclinado hacia el plano de la base bajo un ángulo de 60°. Hállese el área de las superficies lateral y total del cilindro.

7.108. ¿Cuántos metros cuadrados de hojalata se consumen en la fabricación de 1 millón de latas de conserva de 10 cm de diámetro y 5 cm de altura (para desechos y costuras se debe adicionar el 10% del material)?

7.109. La altura de un cilindro es igual a h, la diagonal de la sección axial forma el ángulo φ con el plano de la base. Hállese el área de la superficie lateral del cilindro.

7.110. Un lado del rectángulo es igual a h, el ángulo entre sus diagonales es igual a φ. Hállese el área de la superficie lateral del cilindro, formado por la rotación del rectángulo alrededor del eje que contiene el lado dado.

7.111. Un cuadrado con un lado igual a a gira en torno al eje que es paralelo a su lado y se encuentra del lado más próximo a una distancia igual al largo de éste. Hállese el área de la superficie del cuerpo de revolución.

7.112. La generatriz del cono es igual a l, el ángulo del vértice de la sección axial es igual φ. Hállese el área de las superficies lateral y total del cono.

7.113. El área de la base del cono es Q, la longitud de la generatriz es l. Hállense las áreas de las superficies lateral y total del cono.

7.114. El techo cónico de un silo de torre tiene un diámetro de 6 m y una altura de 2 m. ¿Cuántas hojas de hierro para techar se requerirá para este techo, si el tamaño de una hoja es de 0,7 m × 1,4 m, y para las costuras y recortes se emplea el 10% del área total del techo?

7.115. Un triángulo rectangular con un cateto igual a a y con un ángulo opuesto a él igual a 30°, gira alrededor de la hipotenusa. Hállese el área de la superficie de la figura de revolución obtenida.

7.116. Un triángulo isósceles cuya longitud de la base es igual a b, y el ángulo del vértice, a φ, gira en torno a la base. Hállese el área de la superficie de la figura de revolución obtenida.

7.117. Los lados de un paralelogramo son iguales a a y b, y el ángulo entre ellos es igual a α. Hállese el área de la superficie de un cuerpo, formado por la rotación del paralelogramo alrededor del lado b.

7.118. Calcúlense las áreas de las superficies formadas por la rotación de las siguientes curvas en torno al eje Ox:

a) $y = x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; b) $y^2 = 2px, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}$;

c) $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$;

d) $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \ (b \geqslant a)$;

e) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a \operatorname{sen}^3 t; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t}{3}(t^2 - 3), \quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}; \end{cases}$

g) $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t, \\ y=2\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 2t. \end{cases}$

7.119. En una esfera por un lado del centro están trazadas dos secciones paralelas, cuyas áreas son iguales a 49π dm^2 y 4π m^2. Hállese el área de la superficie de la esfera, si la distancia entre las secciones es igual a 9 dm.

7.120. La arista de un cubo es igual a a. Una esfera pasa por cuatro vértices de la base inferior del cubo y es tangente a las cuatro aristas de su base superior. Hállese el área de la esfera.

7.121. Hállese el área de la zona esférica, si los radios de sus bases son iguales a 20 m y 24 m y el radio de la esfera es igual a 25 m.

7.122. ¿A qué distancia del centro de la esfera de radio R se encuentra un manantial puntiforme de luz, si él ilumina un tercio de la superficie de la esfera?

7.123. Considerando que el radio del globo terráqueo es igual a 6400 km, hállese el área de aquella parte de la superficie terrestre, que se observa por el cosmonauta desde la nave cósmica a la altura de 300 km de la superficie de la Tierra.

Indicación. Considérese, que la parte visible de la superficie terrestre es un segmento esférico.

7.124. La distancia máxima de alejamiento de la nave cósmica «Vostok» de la superficie terrestre fue de 302 km, la distancia mínima, de 175 km. ¿Qué por ciento de la superficie terrestre pudo observar Y. A. Gagarin en esos momentos? El radio de la Tierra es igual a 6370 km.

RESPESTAS

Capítulo I

1.2. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) $2\boldsymbol{b}$ ó $2\boldsymbol{d}$; f) $\mathbf{0}$; g) $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}$ ó $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; h) $\boldsymbol{d}$ ó $\boldsymbol{a}$. **1.3.** a) $\boldsymbol{b}$; b) $-\boldsymbol{b}$; c) 0; d) $\mathbf{0}$. **1.4.** 10 H. **1.5.** 0. **1.6.** 2 H. **1.7.** $3\overrightarrow{MO}$. **1.9.** a) $\overrightarrow{AS}$; b) $\overrightarrow{AB}$. **1.11.** a) $k=\pm 1$; b) $|k|>1$; c) $|k|<1$. **1.12.** a) $k=\pm 1$; b) $|k|>3$; c) $|k|<5$. **1.13.** a) $\frac{5}{|\boldsymbol{a}|}$; b) $-\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$. **1.14.** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM}$. **1.15.** $-2\overrightarrow{CB}$. **1.16.** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$. **1.17.** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$; $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$; $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. **1.18.** $2\boldsymbol{m}$; $2\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}$; $2\boldsymbol{n}$; $2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$. **1.19.** a) $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$; b) $2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$. **1.20.** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$; b) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$; c) $\boldsymbol{a}$; d) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$; e) $\boldsymbol{b}$; f) $-\boldsymbol{c}$; g) $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; h) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$. **1.21.** $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\ -1\right)$. **1.22.** a) $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; c) $(1;\ 0)$; d) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; e) $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; f) $(1;\ 1)$; g) $\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; h) $(-1;\ 0)$; i) $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; j) $(2;\ 0)$. **1.23.** $\overrightarrow{OE}=4\boldsymbol{i}$; $\overrightarrow{OA}=-2\boldsymbol{i}+2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}+2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{OB}=4\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{BC}=4\boldsymbol{i}$; $\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{i}-2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{DE}=-2\boldsymbol{i}-2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{OC}=4\boldsymbol{i}+4\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$; $\overrightarrow{OD}=6\boldsymbol{i}+2\sqrt{3}\,\boldsymbol{j}$. **1.24.** a) $-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$; b) $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$; c) $\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$; d) $\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$; e) $-\boldsymbol{i}$; f) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$; g) $-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; h) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. **1.25.** $\overrightarrow{AB}=(-4;\ 3;\ 0)$, $\overrightarrow{BA}=(4;\ -3;\ 0)$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|=5$, $\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}=\left(\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5};\ 0\right)$.

1.26. $(-3;\ 0;\ \pm 2\sqrt{5})$. **1.27.** $\sqrt{3}$; $\sqrt{11}$. **1.28.** -1; $-\frac{1}{2}$. **1.29.** a) $12\sqrt{2}$; b) 24; c) $-12\sqrt{2}$; d) 0; e) -24. **1.30.** a) -10; b) 25; c) -39; d) 61; e) 1101. **1.31.** a) 0; b) 3. **1.32.** $-\frac{3}{2}$. **1.33.** a) 0; b) 14; c) 34; d) 78. **1.34.** $\left(\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right)$; $\left(-\frac{4}{5};\ \frac{3}{5}\right)$. **1.36.** 5. **1.37.** 6. **1.38.** -6. **1.39.** a) 4; b) -6; c) para cualquier α. **1.40.** $\alpha_1=-4$, $\beta_1=2$ y $\alpha_2=-8$, $\beta_2=-2$. **1.41.** $b_1=4\sqrt{2}\,i+3\sqrt{2}\,j$; $b_2=-4\sqrt{2}\,i-3\sqrt{2}\,j$. **1.42.** $x=(2;\ -3;\ 0)$. **1.43.** a) $b=i+0{,}5j-0{,}5k$; b) $b=\left(-\frac{2}{9};\ \frac{4}{9};\ \frac{4}{9}\right)$. **1.44.** a) $b=\frac{100}{7}i-\frac{150}{7}j-\frac{300}{7}k$; b) $b=(-24;\ 32;\ 30)$. **1.45.** $x=(2;\ 3;\ -2)$. **1.46.** $\cos(\widehat{a;\ i})=\frac{3}{5}$.

1.47. $\cos(\widehat{a;\ i})=\frac{3}{13}$; $\cos(\widehat{a;\ j})=-\frac{4}{13}$; $\cos(\widehat{a;\ k})=\frac{12}{13}$. **1.48.** 90°. **1.49.** 45°. **1.50.** a) 90°; b) 90°; c) $\approx 146°$. **1.51.** 90°, 45°, 45°. **1.52.** $D(-1;\ 1;\ 1)$, $(\widehat{\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BD}})=120°$. **1.53.** 45°. **1.54.** 90°. **1.55.** $\cos\hat{B}=-\frac{1}{3}$. **1.56.** a) $\frac{3}{\sqrt{26}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; c) $\frac{9}{\sqrt{38}}$; d) 0; e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$. **1.57.** a) Izquierda; b) ni izquierda y ni derecha, ya que los vectores son coplanares; b) derecha. **1.58.** a) $6k$; b) $-12j$; c) $7i-2j-5k$. **1.59.** 25 unidades cuadradas. **1.60.** a) $-4i+7j+6k$; b) $i+2j+k$; c) $-3i+4j+2k$; d) $3i+6j+3k$; e) $-2i+6j+3k$; f) $4i-2j-k$; g) $4i-2j-6k$; h) $5i+10j+5k$; i) $20i+10j+20k$; j) $20i+10j+15k$. **1.61.** $7\sqrt{5}$ unidades cuadradas. **1.62.** 48 unidades cuadradas; 4,8 unidades lineales; 9,6 unidades lineales. **1.63.** $\sqrt{429}$. **1.64.** 210. **1.67.** $4\,|\,a;\ b;\ c\,|$. **1.69.** -50. **1.70.** No son coplanares; la terna es derecha. **1.71.** Son coplanares. **1.72.** 27 unidades cúbicas. **1.73.** $(3;\ -5)$. **1.74.** $\left(\frac{5}{2};\ -2\right)$. **1.79.** 13 unidades de trabajo. **1.80.** $M=-2i-3j+6k$, $|M|=7$. **1.81.** 2 H. **1.82.** a) No; b) Sí. **1.84.** $3\sqrt{5}$ unidades lineales.

Capítulo II

2.1. a), b), c) Sí; d) no. **2.3.** a) Sí, b) no. **2.4.** a) $\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=2+2t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=t, \\ y=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=3+t, \\ y=-2+3t; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=2, \\ y=-3t. \end{cases}$ **2.7.** a) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-4}$; b) $x=1$; c) $\frac{x-\frac{1}{2}}{-3}=\frac{y-1{,}5}{-2}$; d) $y=-3$. **2.9.** $x=2$. **2.10.** $(3;\ -7)$,

$\boldsymbol{a}=(5;\ 4)$. **2.11.** $y=1$. **2.12.** $\begin{cases} x=2-7t, \\ y=-1+11t. \end{cases}$ **2.13.** a) $9x-y+15=0$; b) $x-7y+17=0$; b) $3x-5y-1=0$; c) $2x+3y=0$. **2.14.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}=1$. **2.15.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{-\frac{5}{7}}=1$. **2.16.** a) $(4;\ 0)$, $(0;\ -6)$; b) $\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$, $(0;\ 4)$. **2.17.** $(-3;\ 1)$. **2.18.** 6 unidades cuadradas. **2.19.** $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$. **2.20.** $x+y-6=0$. **2.21.** $\pm 2x+y-8=0$. **2.22.** 20 unidades cuadradas. **2.23.** (MP): $3x-y-2=0$; (NE): $x-5y+4=0$; (ND): $x+3y-12=0$. **2.24.** (AB): $2x-y+5=0$; (BC): $2x+y-9=0$; (AC): $2x-5y-15=0$; (AA_1): $x-y=0$; (BB_1): $10x-y-3=0$; (CC_1): $2x+7y-3=0$; $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. **2.25.** $2x-3y+4=0$. **2.26.** $2x-3y=0$. **2.28.** $4x-y-11=0$. **2.29.** $3x-2y-13=0$. **2.31.** $(-5;\ 6)$, $\boldsymbol{n}=\left(-3;\ \frac{1}{7}\right)$ **2.32.** $4x+y-5=0$. **2.34.** $y=4$. **2.35.** $2x+5y-26=0$. **2.36.** $x-y-7=0$. **2.37.** $2x+5y-4=0$ y $2x+5y+25=0$. **2.38.** $x-y+7=0$. **2.39.** $2x+3y+2=0$, $3x-2y+3=0$, $y=0$. **2.40.** a) $x-2y-5=0$, $\boldsymbol{n}=(1;\ -2)$; b) $4x-3y-10=0$, $\boldsymbol{n}=(4;\ -3)$; c) $2x+3y-6=0$, $\boldsymbol{n}=(2;\ 2)$; d) $x-15y-20=0$, $\boldsymbol{n}=(1;\ -15)$. **2.41.** a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$; b) $\frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}$; c) $\begin{cases} x=3+3t, \\ y=2t. \end{cases}$ **2.43.** a) $(3;\ 2)$; b) $(4;\ 3)$; c) $(2;\ 5)$; d) $(3;\ 2)$; e) no se intersecan. **2.44.** $\left(\frac{11}{6};\ \frac{35}{6}\right)$; $(-3;\ 1)$; $\left(9\frac{3}{7};\ -9\frac{5}{14}\right)$. **2.45.** $(-2;\ 5)$; $(1;\ -3)$; $(5;\ -9)$; $(8;\ -17)$. **2.46.** $(1;\ 3)$; $(2;\ 1)$; $(5;\ 4)$; $(6;\ 2)$. **2.48.** $x=4$; $y=-3$. **2.49.** $x=5$; $y=-2$. **2.50.** $y=\frac{2}{3}x$. **2.51.** $k=\frac{1}{5}$. **2.52.** $\alpha=135°$. **2.53.** $k=1$. **2.54.** $k=-\frac{1}{4}$. **2.56.** a) $=135°$; b) $=60°$; c) $\alpha=0°$; d) $\alpha=90°$. **2.57.** $\alpha\approx 121°$. **2.58.** $k=\frac{3}{7}$. **2.59.** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $b=\frac{13}{4}$. **2.60.** La primera recta. **2.61.** $y=-2x-4$. **2.62.** a) $\varphi=60°$; b) $\varphi=60°$; c) $\varphi\approx 44°$; d) $\varphi\approx 53°$; e) $\varphi=0°$. **2.63.** a) Son paralelas; b) no son perpendiculares; c) no son paralelas ni perpendiculares. **2.64.** $b=18$. **2.65.** $a=\frac{1}{4}$. **2.66.** a) $\varphi=45°$; b) $\varphi=45°$; c) $\varphi\approx 38°$; d) $\varphi\approx 79°$; e) $\varphi=90°$. **2.67.** a) Son paralelas; b) son perpendiculares; c) no son paralelas ni perpendiculares. **2.68.** $a=1$. **2.69.** $b=1$. **2.70.** a) Coinciden; b) $(4;\ -4)$; c) son paralelas; d) son paralelas. **2.71.** a) $\varphi=45°$; b) $\varphi=60°$; c) $\varphi\approx 53°$; d) $\varphi\approx 63°$; e) $\varphi=0°$. **2.72.** a) Son paralelas; b) son perpendiculares; c) no son paralelas ni perpendiculares. **2.73.** $a=-3$. **2.74.** $a=-\frac{1}{5}$. **2.75.** a) $k=\frac{3}{4}$;

b) $k=-\frac{4}{3}$. **2.76.** a) $2x-3y-23=0$; b) $3x+2y-2=0$. **2.77.** $12x-18y+83=0$. **2.78.** $x-y-17{,}5=0$. **2.79.** $x+y-4=0$. **2.80.** a), d), e). **2.81.** a) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-5=0$, $d=5$; b) $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-20=0$. $d=20$; c) $-x-5=0$, d $=5$; d) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$, $d=2$; e) $-\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-13=0$, $d=13$. **2.82.** $\frac{6}{\sqrt{13}}$. **2.83.** $\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y\pm 3=0$. **2.84.** a) 5; b) 10. **2.85.** a) 2,5; b) 3; c) 6,5. **2.86.** $\frac{8}{\sqrt{13}}$. **2.87.** $5x+4y-23=0$, $d=\frac{3}{\sqrt{41}}$. **2.88.** $4x+3y+16=0$, $4x+3y-14=0$. **2.89.** $6x+4y-3=0$. **2.90.** $4x+y-6=0$, $3x+2y-7=0$.

Capítulo III

3.1. a) $x^2+y^2=16$; b) $x^2+y^2=\frac{16}{9}$; c) $(x+4)^2+(y-2)^2=25$; d) $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$. **3.2.** a) $(0;\ 0)$, $R=6$; b) $(0;\ 0)$, $R=\sqrt{7}$; c) $(5;\ 3)$, $R=7$; d) $\left(-7;\ -\frac{1}{2}\right)$, $R=8$; e) $(2{,}5;\ 0)$, $R=5\sqrt{2}$. **3.3.** a) $(1;\ -2)$, $R=5$; b) $(3;\ -5)$, $R=5$. **3.4.** $x^2+y^2=9$. **3.5** $(x-3^2)+(y-7)^2=49$. **3.6.** $(x-2)^2+(y-3)^2=4$. **3.7.** $(x-2)^2+(y+1)^2=25$. **3.8.** $(x-5)^2+y^2=9$, $(x-11)^2+y^2=9$. **3.9.** $(x-2)^2+(y\pm 3)^2=9$. **3.10.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **3.11.** Fuera de la circunferencia; b) en la circunferencia; c) dentro de la circunferencia; d) fuera de la circunferencia; e) dentro de la circunferencia; f) fuera de la circunferencia. **3.12.** a) Corta; b) está tangente; c) pasa fuera de la circunferencia. **3.13.** $3x+2y-6=0$. **3.14.** $(x-6)^2+(y-6)^2=25$. **3.15.** $(x+2)^2+y^2=4$; $(0;\ 0)$, $(-2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$. **3.16.** $(x-1{,}5)^2+(y-2)^2=6{,}25$. **3.17.** $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$. **3.18.** $\left(-\frac{19}{25};\ 6\frac{17}{25}\right)$, $(-2;\ -2)$. **3.19.** $3x-4y=0$. **3.20.** 8. **3.21.** $(x+2)^2+(y+1)^2=40$. **3.22.** $(x-5)^2+(y+2)^2=1$. **3.23.** $x^2+y^2=2$. **3.24.** $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=5\operatorname{sen} t. \end{cases}$ **3.25.** $(-4;\ 0)$. **3.26.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **3.28.** $(-3;\ 0)$, $(3;\ 0)$, $2c=6$. **3.29.** a) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **3.30.** a) $a=4$, $b=3$, $(4;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, $(0;\ -3)$, $F_1(\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{7};$

0); b) $a=2$, $b=\frac{2}{3}$, (2; 0), $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(0;\ -\frac{2}{3}\right)$, $F_1\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3};\ 0\right)$; c) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$, $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6};\ 0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6};\ 0\right)$; d) $a=2$, $b=1$, (2; 0), (−2; 0), (0; 1), (0; −1), $F_1(\sqrt{3};\ 0)$, $F_2(-\sqrt{3};\ 0)$. **3.31.** $\left(-3;\ \frac{8}{5}\right)$, $\left(-3;\ -\frac{8}{5}\right)$. **3.32.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. **3.33.** $a=5$, $b=3$, $2c=8$, $F_1(4;\ 0)$. $\varepsilon=\frac{4}{5}$. **3.34.** $2a=14$, $2b=10$, $F_1(-2\sqrt{6};\ 0)$, $F_2(2\sqrt{6};\ 0)$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{6}}{7}$. **3.35.** $\frac{x^2}{22}+\frac{y^2}{16}=1$. **3.36.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **3.37.** 0,0167. **3.38.** 0,0045. **3.39.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16/3}=1$. **3.40.** $\varepsilon=0{,}6$. **3.41.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$. **3.42.** $S=24$ unidades cuadradas. **3.43.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **3.44.** $4\sqrt{3}$. **3.45.** 3 y 7. **3.46.** $x=3\cos t$ y $y=2\operatorname{sen} t$. **3.47.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$. **3.48.** $y=\frac{3}{5}x-3\sqrt{2}$ y $y=\frac{3}{5}x+3\sqrt{2}$. **3.49.** (4; −5). **3.50.** (0; −5) y (0; 5). **3.51.** $3x-y-12=0$. **3.52.** $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{144}=1$. **3.53.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{14}=0$. **3.54.** (−6; 0) y (6; 0). **3.55.** a) $a=4$, $b=3$; b) $a=\frac{1}{4}$, $b=1$; c) $a=3$, $b=1$, d) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{3}$; e) $a=2$, $b=2$; f) $a=4$, $b=3$. **3.56.** a) 4 y 3; b) (−5; 0), (5; 0); c) (4; 0), (−4; 0); d) $y=\pm\frac{3}{4}k$. **3.57.** a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$; c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; d) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; e) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; f) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. **3.59.** $x=-5$ y $x=5$. **3.60.** $y=\pm\frac{3}{4}x$; $\varepsilon=\frac{5}{4}$. **3.61.** $y=\pm x$; $\varepsilon=\sqrt{2}$. **3.62.** $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$, (−4; 0), (4; 0), $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}x$. **3.63.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$. **3.64.** $a=b$. **3.65.** $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. **3.66.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$. **3.67.** a) No; b) (4; 0) y $\left(5;\ \frac{9}{4}\right)$; b) $\left(5;\ \frac{9}{4}\right)$ es el punto de tangencia. **3.68.** $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{36}=1$. **3.69.** $\frac{x^2}{4}-$

$-\frac{y^2}{12}=1$. **3.70.** $y=2x\pm\sqrt{3}$. **3.71.** Hipérbola. **3.72.** $y^2=16x$. **3.73.** $y^2=1{,}8x$. **3.74.** $\left(\frac{11}{4};\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$, $\left(\frac{11}{4};-\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$. **3.75.** $y^2=16x$. **3.76.** $y^2=4x$; $\alpha\approx 37°$. **3.77.** a) (0; 0), (4; 4); b) (0; 0), (4; -4); c) (4; 4); d) (1; 2), $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{3}\right)$. **3.78.** $x-2y+6=0$. **3.79.** $(x-2)^2+y^2=16$; (2; 4), (2; -4). **3.80.** $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$. **3.81.** $x'^2-y'^2=4$. **3.82.** $y'^2=3x'$. **3.83.** a) $\sqrt{5}$ y $2\sqrt{3}$; $(-\sqrt{5};0)$, $(\sqrt{5};0)$, $(0;-2\times\sqrt{3})$, $(0;2\sqrt{3})$; $F_1(0;-\sqrt{7})$, $F_2(0;\sqrt{7})$; b) 4 y 3; $(-3;0)$, $(3;0)$, $(0;-4)$, $(0;4)$; $F_1(0;-\sqrt{7})$, $F_2(0;\sqrt{7})$; c) 3 y $\frac{3}{2}$; $\left(-\frac{3}{2};0\right)$, $\left(\frac{3}{2};0\right)$, $(0;-3)$, $(0;3)$; $F_1\left(0;-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $F_2\left(0;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. **3.84.** a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$; c) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$; d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; e) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$. **3.85.** $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$. **3.86.** $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2};2\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}}{2};2\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{21}}{2};-2\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}}{2};-2\right)$. **3.87.** $\frac{(x-5)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$. **3.88.** a) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$ ó $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$; b) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; c) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; d) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$. **3.89.** a) 3 y 4; b) $(0;-4)$, $(0;4)$; c) $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$; d) $y=\pm\frac{3}{4}x$. **3.90.** $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$. **3.91.** $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$ ó $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$. **3.92.** a) $x^2=8y$; b) $x^2=-12y$; c) $y^2=6x$; d) $y^2=-10x$. **3.93.** $x^2=-12y$. **3.94.** $y^2=-24x$. **3.95.** $(y-5)^2=8(x+4)$, $y=5$, $x=-6$. **3.96.** $(y+4)^2=-4(x+2)$, $(-6;0)$. **3.97.** (4; 2) y (-4; 2). **3.99.** $x^2=y$. **3.100.** $y^2+9x-36=0$. **3.101.** $x^2=5y$; $y+1{,}25=0$. **3.102.** $2x-3y-2=0$. **3.103.** $90y=x^2$. **3.104.** a) Elipse; b) hipérbola; c) parábola d) parábola; e) un par de rectas que se cortan; f) un par de rectas paralelas; g) un punto; h) una circunferencia; i) elipse.

Capítulo IV

4.4. Seis rectas. **4.5.** Cuatro planos. **4.6.** No es válido. **4.7.** No es válido. **4.8.** Tres pares de aristas que se cruzan. **4.9.** 24. **4.11.** Para la construcción se puede tomar dos puntos arbitrarios:

uno situado en el plano de las rectas dadas, pero no penteneciente a ninguna de ellas y el otro, fuera del plano que pasa por las rectas dadas. La recta que atraviesa estos puntos es la buscada. **4.13.** Conjunto, todas las rectas son paralelas. **4.14.** Sí. **4.21.** a) 90°; b) 0°; c) 90°; d) 45°. **4.25.** $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. **4.26.** 4 cm. **4.28.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ cm. **4.29.** $|MK| \approx 3{,}5$ cm. **4.31.** Rectangular. **4.39.** 45° y 135°. **4.40.** $\frac{3}{16}m^2$. **4.41.** $1{,}17\sqrt{5}$ cm². **4.46.** $\frac{3}{8}ah$. **4.47.** a) Se puede; b); c); d) no. **4.48.** 60°. **4.49.** $\approx 17{,}1$ cm; $\approx 20{,}1$ cm. **4.50.** 6 cm y 3 cm ó 4 cm y 7 cm. **4.51.** 4 cm, 8 cm, 12 cm. **4.52.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **4.53.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **4.54.** $a\sqrt{2}$. **4.55.** $m\sqrt{\cos\beta}$. **4.56.** 50m². **4.57.** $\approx 10{,}1$ cm. **4.58.** 256 cm². **4.59.** 32 cm. **4.62.** Tetraedro y cubo. **4.63.** Icosaedro. **4.64.** $\arccos\frac{1}{3}$. **4.65.** $2\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.7.** $\approx 7{,}8$ H.

Capítulo V

5.1. a) $\overrightarrow{AM} = t(r_1 + r_2 + r_3)$; b) $\overrightarrow{CM} = t(r_1 + r_2 - r_3)$; c) $\overrightarrow{BM} = t(-r_1 r + {}_2 + r_3)$; d) $\overrightarrow{DM} = t(r_1 - r_2 + r_3)$; e) $\overrightarrow{CM} = t(r_1 - r_3)$ $t \in \boldsymbol{R}$.

5.2. a) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 3 + t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -2 - t, \\ z = \sqrt{2}\, t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{3} + 3t, \\ z = \frac{1}{4} + 5t. \end{cases}$

5.3. a) $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$; b) $\frac{x-2}{\sqrt{3}} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$; b) $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$. **5.4.** a) $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-4}$; b) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{-2}$; c) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{0}$.

5.5. $\begin{cases} x = -7 + 8t, \\ y = 11 - 9t, \\ z = 6 - 12t; \end{cases}$ $\frac{x+7}{8} = \frac{y-11}{-9} = \frac{z-6}{-12}$.

5.6. $\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-5 \\ 6 & -6 & -5 \\ 2 & 3 & -10 \end{vmatrix}=0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$;

b) $\begin{vmatrix} x-2 & y & z-4 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0$, $\frac{x}{\frac{50}{23}}-\frac{y}{\frac{50}{17}}+\frac{z}{50}=1$;

c) $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+5 \\ 5 & 2 & 8 \\ -5 & -2 & 9 \end{vmatrix}=0$, $\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{y}{\frac{1}{5}}=1$.

5.7. a) $2x+3y-13=0$; b) $4x-6y+z-40=0$; c) $7y-4z=0$; d) $y-2=0$. 5.8. a) $4x-7z+24=0$; b) $z+11=0$; c) $7x-2y+7z-37=0$. 5.9. $2y-z=0$. 5.10. $x+2z-4=0$. 5.11. 16 unidades cuadradas. 5.12. a) 45°; b) 90°; c) $\approx 70°$; d) 60°. 5.13. a) Son paralelas y no coinciden; b) son perpendiculares; c) se intersecan, pero no son perpendiculares; d) coinciden. 5.14. a) $k=\frac{28}{3}$; b) $k=0$; c) para cualquier k. 5.15. a) $\alpha=-\frac{9}{5}$, $\beta=-\frac{16}{3}$; b) $\alpha=0$, $\beta=\frac{16}{3}$; c) $\alpha=5$, β es un número cualquiera. 5.16. $8x-2y-5z-23=0$. 5.17. $2x+3y+z-11=0$. 5.18. $5y+3z+7=0$. 5.19. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$. 5.20. a) $\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y+\frac{7}{3}}{-3}=\frac{z}{-3}$; b) $\frac{x-\frac{3}{2}}{0}=\frac{y+5}{0}=\frac{z}{2}$; c) $-x=y=z$; d) $\frac{x+\frac{3}{11}}{0}=\frac{y-\frac{15}{11}}{1}=\frac{z}{11}$; e) $\frac{x}{7}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$; f) $\frac{x-\frac{1}{3}}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-6}$. 5.21. $\frac{x}{0}=\frac{y}{4}=\frac{z-\frac{11}{4}}{3}$; $\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z-\frac{11}{4}}{1}$; $\frac{x}{3}=\frac{y-\frac{11}{3}}{2}=\frac{z}{0}$.

5.22. a) $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=-1+7t, \\ z=4t; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=3+t, \\ y=2+2t, \\ z=t. \end{cases}$

5.23. $2x+15y+7z+7=0$. 5.24. $5x+5z-8=0$. 5.25. a) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$; b) $-\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-2=0$; c) $-z-\frac{13}{2}=0$. 5.26. a) $\frac{7}{6}$; b) 4; c) 16. 5.27. a) 3; b) $\frac{11}{3}$; c) 14. 5.28. $\frac{6}{\sqrt{29}}$.

5.29. a) $\frac{75}{14}$; a) $\frac{15\sqrt{38}}{76}$; b) 0. **5.30.** a) 60°; b) 90°; c) $\approx 79°$. **5.31.** a) Son perpendiculares; b) son paralelas; c) son paralelas; d) son perpendiculares. **5.32.** $\alpha=2$. **5.33.** $\frac{x}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-2}$. **5.34.** $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{-5}$. **5.35.** a) No están situadas; b) están situadas; c) están situadas, d) no están situadas. **5.36.** a) Sí; b) no. **5.37.** a) Sí; b) no. **5.38.** a) 30°; b) $\approx 65°$; c) 0°. **5.39.** a) Son paralelas, la recta no está situada en el plano; b) son paralelas, la recta no está situada en el plano; c) se intersecan en el punto (0; 0; -2) no son perpendiculares; d) son perpendiculares, se intersecan en el punto (-2; 4; 4); e) la recta está situada en el plano. **5.40.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$. **5.41.** $11x+9y+7z-235=0$. **5.42.** $\alpha=-13$, $\beta=2$. **5.43.** $\begin{cases} 3x+2y-z-5=0, \\ x-8y-13z+9=0. \end{cases}$ **5.44.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+2}{1}$, $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1}$.

Capítulo VI

6.1. $x^2+y^2+z^2=36$. **6.2.** $x^2+y^2+z^2=9$. **6.3.** El punto A está situado dentro de la esfera; el punto B, en la esfera; el punto C, fuera de la esfera. **6.4.** a) (0; 1; -3), $R=9$; b) (2; -4; 1), $R=6\sqrt{2}$. **6.6.** a) Un punto; b) la circunferencia $x^2+z^2=\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{2}$; c) un conjunto vacío. **6.7.** La circunferencia $x^2+y^2=9$, $z=1$. **6.8.** El centro de la circunferencia está situado en el punto (1; 2; -1), $R=3$. **6.9.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$, C (2; 3; 4). **6.10.** $(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2{,}5)^2=49{,}25$. **6.11.** $x^2+y^2+z^2=93$. **6.12.** (-5; 2; 5). **6.13.** $(x-8)^2+(y+5)^2+(z-5)^2=44$. **6.14.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{14}+\frac{z^2}{25}=1$. **6.15.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$. **6.16.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{36}=1$. **6.17.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$. **6.18.** $x^2+y^2=6z$. **6.19.** $x^2+y^2=0$. **6.20.** $9x^2-4y^2-4z^2=0$. **6.21.** $\frac{(x-z)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **6.22.** a) Una superficie cilíndrica circular, el eje de la superficie cilíndrica coincide con el eje Oz, $R=5$; b) una esfera con centro en el origen de coordenadas y radio $R=5$; b) una superficie cilíndrica elíptica con generatrices paralelas al eje Oz; d) una superficie cilíndrica hiperbólica con generatrices paralelas al eje Oz;

e) Una superficie cilíndrica parabólica. 6.23. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$. 6.24. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=0$. 6.25. Un paraboloide de rotación alrededor del eje Ox. 6.26. Un hiperboloide de rotación de dos hojas, por una hipérbola. 6.27. Un hiperboloide de rotación de una hoja, por una hipérbola. 6.28. Un paraboloide de revolución, por una parábola.

Capítulo VII

7.1. $V_1+0{,}5V_2$. Indicación. $V(\Phi_1\cup\Phi_2)=V(\Phi_1)+V(\Phi_2)-V(\Phi_1\cap\Phi_2)$. 7.2. $\Phi_2\subset\Phi_1$. 7.3. 1. 7.4. $0{,}5V$. 7.6. $\frac{l^3}{3\sqrt{3}}$. 7.7. $a^2\sqrt{l^2-2a^2}$. 7.9. 105 cm^3. 7.10. $216\sqrt{2}$ cm$^3\approx 306$ cm^3. 7.11. $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$. 7.12. $\frac{d^3\sqrt{3}}{2}$. 7.13. $3\sqrt{3}$ m$^3\approx 5{,}2$ m^3. 7.14. 3360 cm^3. 7.15. 144 cm^3. 7.16. 360 cm^3. 7.17. 312 cm^3. 7.18. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. 7.19. 8 m^2. 7.20. $\frac{2a}{3}$ y $\frac{a}{6}$. 7.21. 57,6 cm^3. 7.22. 3 cm. 7.23. 32 m, 34 m. 7.24. 6 m^3. 7.25. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. 7.26. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4\operatorname{sen}\alpha}\times\sqrt{\cos(30^\circ-\alpha)\cos(30^\circ+\alpha)}$. 7.27. $12\sqrt{7}$ cm$^3\approx 31{,}7$ cm^3. 7.28. $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm$^3\approx 32{,}5$ cm^3. 7.29. $\frac{1}{2}Q\sqrt{S}\operatorname{sen}2\alpha$. 7.30. $Q\sqrt{\frac{Q}{3}}$. 7.31. ≈ 170. 7.32. 4 m $\times$ 4 m $\times$ 2 m, 1200. 7.33. 16π cm^3. 7.34. $128\pi\times\sqrt{3}$ cm^3. 7.35. CS. 7.36. $\frac{N}{2}\sqrt{\pi M}$. 7.37. $\frac{\pi\, dS}{\operatorname{sen}\alpha}$. 7.38. $\approx 1{,}9$ kg. 7.39. 1300 m^3; 7,5 %. 7.40. 240 cm^3. 7.41. $252\sqrt{3}$ dm$^3\approx 436{,}5$ dm^3. 7.42. $2a^3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$. 7.43. $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$. 7.44. $\approx 14{,}9$ dm^3. 7.45. $18\sqrt{39}$ cm$^3\approx 112$ cm^3. 7.46. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 7.47. 192 cm^3. 7.48. $2\sqrt{3}$ m$^3\approx 3{,}5$ m^3. 7.50. 122,4 cm^3. 7.51. $\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha<\frac{\pi}{2}$. 7.52. $\frac{a^3}{6}\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{tg}\varphi$. 7.53. $\frac{1}{3}a^2h\operatorname{sen}\alpha$. 7.54. $\frac{1}{3}h^2H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 7.55. $\frac{1}{3}S\sqrt{2S\sqrt{3}}$. 7.56. $\approx 2{,}6$ millones de m^3. 7.57. $\approx 1{,}7$ cm. 7.58. $\frac{abc}{3}\sqrt{2}$.

7.59. 1900 m³. 7.60. 5600 cm³. 7.61. 2100 cm³. 7.62. $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$.
7.63. $\frac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 7.64. $\frac{3a^3}{4\sqrt{1-2\cos\varphi}}$, $\frac{\pi}{3}<\varphi<\pi$. 7.65. a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) 12π; c) $1{,}6\pi$; d) $\frac{272}{15}\pi$; e) $\frac{\pi^2}{12}$; f) $0{,}3\pi$; g) $\frac{\pi}{4}$; h) $\frac{\pi(a+3)a^2}{3}$. 7.66. $\pi\sqrt{3}$ cm³. 7.67. $9\pi\sqrt{3}$ cm³. 7.68. $3\pi\sqrt{3}$ cm³. 7.69. $18\pi\sqrt{3}$ cm³. 7.70. $\frac{2\pi d^3}{3\operatorname{sen}2\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.
7.71. 320π cm³. 7.72. $4{,}5\pi\sqrt{2}$ cm³. 7.73. 448π dm³. 7.74. $\frac{2}{3}\pi S\times\sqrt{S\operatorname{sen}2\alpha}$. 7.75. $\frac{1}{12}\pi a^3\operatorname{tg}^2\alpha$. 7.76. $\frac{4}{3}\pi S\sqrt{S\operatorname{sen}2\alpha}$. 7.77. $\frac{1}{3}\times\pi m^3\operatorname{sen}^2\beta$. 7.78. ≈ 19 t. 7.79. $\approx 1{,}6$ m. 7.80. 182π dm³. 7.81. $10\,500\pi$ cm³. 7.82. 1946π cm³. 7.83. $2\pi a^3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.
7.84. $\pi d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 7.85. 2 %. 7.86. Es más grande el volumen de la esfera. 7.87. El modelo de la esfera es más ligero. 7.88. 3 : 1. 7.89. 20 : 7. 7.90. 5 : 27. 7.91. $\frac{166\,912}{3}\pi$ cm³. 7.92. $\frac{\pi}{3}R^3$. 7.93. $\frac{4}{3}\times\pi R^3\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$. 7.94. $4\sqrt{3}\pi$ dm³. 7.95. 3 : 1. 7.96. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m^3$.
7.97. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$. 7.98. $\frac{3V\sqrt{2}}{8\pi}\operatorname{sen}2\alpha$. 7.99. $\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{sen}^2 2\alpha\times\cos^2\alpha$. 7.100. $\frac{4}{3}R^3\operatorname{sen}^2 2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}2\alpha$. 7.101. $\frac{\pi}{6}a^3\times\left(\frac{\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{3}+3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)$. 7.102. $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{\pi}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.
7.103. $\frac{s^3\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha}{8\operatorname{sen}^5\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 7.104. $\frac{r^3}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.
7.105. πQ. 7.106. $\frac{l^2}{2\pi}(\cos^2\alpha+\pi\operatorname{sen}2\alpha)$. 7.107. $25\sqrt{3}\pi$ cm² ≈ 136 cm², $(25\sqrt{3}+12{,}5)\pi$ cm² ≈ 175 cm². 7.108. ≈ 35 miles de m². 7.109. $\pi h^2\operatorname{ctg}\varphi$. 7.110. $2\pi h^2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. 7.111. $12\pi a^2$. 7.112. $\pi l^2\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}$,

$\pi l^2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}\right)$. **7.113.** $\pi l \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$, $\pi l \sqrt{\frac{Q}{\pi}} + Q$.

7.114. ≈ 40 hojas. **7.115.** $\frac{1}{2} \pi a (2 + \sqrt{3})$. **7.116.** $\dfrac{\pi b^2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}$.

7.17. $2\pi a (a+b) \operatorname{sen} \alpha$. **7.118.** a) $\frac{61\pi}{1728}$; b) $\frac{2\pi p^3}{3} (2\sqrt{2} - 1)$; c) $2\pi \times$ $\times (\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2}))$; d) $4\pi^2 ab$; e) $\frac{12}{5} \pi a^2$; f) π; h) $\frac{128}{5} \pi$.

7.119. 25πm². **7.120.** $\frac{41}{16} \pi a^2$. **7.121.** 400π m², 1100π m². **7.122.** $3R$.

7.123. $\approx 11{,}5$ millones de km². **7.124.** 2,3 % y 1,3 %.

ALGUNAS FÓRMULAS Y ECUACIONES

I. Vectores

1. La longitud del vector $\boldsymbol{a} = (x;\ y;\ z)$ es:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. El producto escalar de los vectores $\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $\boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ es:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

3. El producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ y $\boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

$$[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

4. El producto mixto de los vectores $\boldsymbol{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ y $\boldsymbol{c} = (x_3;\ y_3;\ z_3)$ es:

$$(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

5. El coseno del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$,

$$\cos\,(\widehat{\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

II. La recta en el plano

1. Ecuación general de la recta:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0.$$

2. Las ecuaciones paramétricas de una recta con vector director $\boldsymbol{a} = (a_1;\ a_2)$, que pasa por el punto $(x_0;\ y_0)$ son:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases} \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

3. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $(x_1;\ y_1)$ y $(x_2;\ y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

4. La ecuación segmentaria de una recta, es decir, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a;\ 0)$ y $(0;\ b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

5. Ecuación de una recta con coeficiente angular k y ordenada inicial b:

$$y = kx + b.$$

6. Ecuación de una recta que pasa por el punto $(x_0;\ y_0)$ perpendicularmente al vector $n = (A;\ B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

7. La ecuación normal de una recta es:

$$x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi - p = 0, \quad p > 0,$$

donde p es la distancia del origen de coordenadas a la recta, φ es la magnitud del ángulo entre el eje Ox y el vector normal de la recta.

8. La distancia d del punto $(x_1;\ y_1)$ a la recta, definida por la ecuación normal es:

$$d = |\, x_1 \cos\varphi + y_1 \operatorname{sen}\varphi - p \,|.$$

9. El coseno del ángulo entre las rectas definidas por las ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ es:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

10. La tangente del ángulo entre las rectas, definidas por las ecuaciones $y = k_1x + b_1$ y $y = k_2x + b_2$ es:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1k_2 + 1}\right|.$$

III. Curvas de segundo orden

1. Ecuación de la circunferencia de radio R con centro en el punto $(a;\ b)$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

2. Ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b,$$

donde a es el semieje mayor, b es el menor.

3. Ecuación canónica de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a es el semieje real, b, el imaginario.

4. Ecuación canónica de la parábola:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

5. La dependencia entre la distancia semifocal c y los semiejes a y b es:

para la elipse $c^2 = a^2 - b^2$,

para la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$.

IV. Volúmenes de los cuerpos

1. Paralelepípedo rectangular con dimensiones a, b, c:

$$V = abc.$$

2. Prisma con área de base Q y altura H:

$$V = QH.$$

3. Pirámide con área de base Q y altura H:

$$V = \frac{1}{3} QH.$$

4. Pirámide truncada con áreas de las bases iguales a Q y q y altura H:

$$V = \frac{1}{3}(Q + \sqrt{Qq} + q) H.$$

5. Cilindro circular con radio de la base igual a R y altura H:

$$V = \pi R^2 H.$$

6. Cono circular con radio de la base igual a R y altura H:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

7. Cono truncado circular con radios de las bases R y r y altura H:

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2).$$

8. Esfera de radio R:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

9. El cuerpo formado por la rotación alrededor del eje Ox de un trapecio curvilíneo, correspondiente a la función $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ es:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

10. El cuerpo situado entre los planos $x = a$, $x = b > a$, con área $S(x)$ perpendicular al eje Ox de la sección,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

V. **Areas de las superficies laterales**
1. Pirámide regular con perímetro de base P y apotema h:

$$S = \frac{1}{2} Ph.$$

2. Pirámide regular truncada con perímetros de bases P y P_1 y apotema h:

$$S = \frac{1}{2}(P + P_1)\,h.$$

3. Cilindro recto circular con radio de base R y altura H:

$$S = 2\pi RH.$$

4. Cono recto circular con radio R y generatriz D:

$$S = \pi RL.$$

5. Cono recto circular truncado con radios de bases R y r y generatriz L:

$$S = \pi (R + r) L.$$

VI. **Areas de lás superficies**
1. La esfera de radio R es:

$$S = 4\pi R^2$$

2. La superficie formada por la rotación alrededor del eje Ox del gráfico de la función $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ es:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

BREVE ESBOZO HISTÓRICO

El inicio de la geometría data de tiempos remotos y se debió a necesidades prácticas (medición de parcelas de tierra, volúmenes de cuerpos). Esto lo testimonian los textos de autores de la Grecia Antigua, por ejemplo, de Eudemo de Rodas (siglo IV a.n.e.) y Herodoto (siglo IV a.n.e.).

«Sestiostris, rey de Egipto, cuenta Nerodoto, repartió las tierras dando a cada egipcio una parcela según el sorteo. Conforme a estas parcelas sus dueños pagaban cada año los impuestos. Si una de las parcelas era inundada por el Nilo, su dueño se dirigía al rey. El rey mandaba a los agrimensores (geómetras), los cuales medían en cuanto disminuyó la parcela y según los resultados se reducía el impuesto».

Se necesitaba almacenar la cosecha recogida de las parcelas. Surgió la necesidad de calcular las capacidades de los depósitos de granos. En el papiro de Ajmes (aproximadamente 1700 a.n.e.) hay problemas de cálculo de volúmenes de los depósitos de granos.

Así pues, ya a los antiguos egipcios les eran conocidos los más simples datos y nociones de geometría.

En las matemáticas egipcias de aquel entonces no había definiciones, axiomas, teoremas y sus demostraciones. La exposición de los conocimientos matemáticos se reducía a ejemplos y prescripciones destinados a la solución de problemas aislados.

Sin embargo, el desarrollo de la geometría como ciencia tuvo lugar principalmente en la Grecia Antigua. Aquí se iban acumulando datos sobre las relaciones métricas en los triángulos, sobre las mediciones de las áreas y volúmenes, relación de semejanza y de las proporciones de figuras, secciones cónicas, problemas de construcción.

Con el nombre de Tales de Mileto (aprox. 625-547 a.n.e.), filósofo y matemático griego, está relacionada la aparición de las primeras demostraciones de algunos teoremas de geometría (el diámetro divide el círculo por la mitad; los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales; el criterio de igualdad de los triángulos por un lado y dos ángulos). Es interesante señalar que Tales utilizaba los conocimientos teóricos para resolver problemas prácticos (medición de la altura de una pirámide según la sombra que ella produce; determinación de la distancia de un barco al litoral).

De este modo se dió el inicio a la formación científica de la geometría.

El trabajo iniciado por Tales fue continuado posteriormente por otros sabios: Pitágoras (aproximadamente 580-500 a.n.e.), Hipócrates de Quíos (segunda mitad del siglo V a.n.e.), Eudoxio de Cíclico (aproximadamente 480-355 a.n.e.).

Los «Elementos» de Euclides (aprox. 365-300 a.n.e.) son la primera obra teórica de las matemáticas que se conservó hasta nuestros días.

Euclides realizó su actividad científica en Alejandría. Este sabio escribió no sólo trabajos de matemática, sino también de física, astronomía y música.

Cuentan de Euclides, que amaba la ciencia abnegadamente y nunca admitía la insinceridad. Una vez el rey Ptolomeo le preguntó, si había una vía más corta para el conocimiento de la geometría, que el estudio de los Elementos, respondiendo Euclides con orgullo que en la geometría no existía el camino de reyes.

Los Elementos son la obra cumbre de Euclides. En ella fueron formulados los principales postulados (axiomas) de la geometría, de los cuales, con ayuda de razonamientos lógicos, se deducían las distintas propiedades de las figuras más simples en el plano y en el espacio. En esta obra por primera vez se formaron las bases del método axiomático.

Durante dos mil años la geometría se estudió por los Elementos de Euclides. Esta obra era casi el único manual de geometría en las escuelas.

Solamente a finales del siglo XVIII fueron escritos nuevos manuales de geometría por grandes matemáticos, que eran a la vez profesores de talento.

El desarrollo de la geometría, justamente hasta el siglo XVII, tuvo lugar no tan intensamente. El renacimiento de las ciencias y las artes en Europa contribuía al desarrollo de la geometría.

En la primera mitad del siglo XVII R. Descartes (1596-1650), filósofo, matemático, físico y fisiólogo francés, propuso un enfoque completamente nuevo a la solución de los problemas de geometría. Las investigaciones matemáticas de René Descartes están estrechamente ligadas a sus trabajos filosóficos y de física. El creó el método de coordenadas que permitió introducir en la geometría los métodos del álgebra y, posteriormente, del análisis. En 1637 Descartes introdujo por primera vez en la geometría las nociones de variable y de función. Para Oescartes la variable se expresa como un segmento de variable longitud e invariable dirección (coordenada instantánea de un punto que, moviéndose, describe una curva) y como una variable numérica continua que recorre un conjunto de números, que forman un segmento de coordenadas. La imagen de variable doble acondicionó la penetración recíproca de la geometría y el álgebra, a la cual aspiraba Descartes.

«La variable cartesiana, señalaba F. Engels, fue el punto de viraje en la matemática. Debido a ella el movimiento y, por lo tanto, la dialéctica formaron parte de las matemáticas» [1]).

A partir de este momento la geometría se desarrolla impetuosamente. Aparece la geometría analítica, en la cual por métodos algebraicos se investigan las curvas y las superficies definidas por ecuaciones algebraicas. El método de coordenadas creado por Descartes

---

[1]) C. Marx y F. Engels. Obras completas, vol. 20, pág. 573.

se considera como su logro principal en la geometría analítica, ciencia que ha sido elaborada a la vez por él y por Pierre Fermat (1601-1665).

Los métodos de análisis matemático empleados en la geometría por L. Euler (1707-1783) y C. Monge (1746-1818) echaron las bases de la geometría diferencial. Sus partes principales, la teoría de las curvas y la teoría de las superficies, se desarrollaron y generalizaron intensamente en los trabajos de C. Gauss (1777-1855) y otros geómetras.

La geometría comenzaba a dar sus pasos como ciencia física y sus primeros resultados describían las propiedades de las magnitudes físicas observadas. Luego, hasta la segunda mitad del siglo XIX, la geometría tenía como objeto las relaciones y las formas de los cuerpos del espacio, cuyas propiedades se definían por medio de axiomas formulados por Euclides. Entre estos axiomas, el axioma de las paralelas (quinto postulado) fue con frecuencia llamado mancha negra en la obra genial de Euclides la cual es como si se dividiera en dos partes. Una parte consta de teoremas que no dependen del quinto postulado y la otra contiene teoremas, cuyas demostraciones se basan bien directamente en el axioma de las paralelas o bien en los teoremas, demostrados basándose en este axioma.

Naturalmente surgía la pregunta: «¿No es posible librarse del quinto postulado como axioma o demostrarlo?»

Las tentativas de demostrar el axioma de las paralelas duraron más de dos mil años. Casi todos los eminentes matemáticos probaron sus fuerzas en la solución de este problema. Sin embargo, el problema quedaba sin resolver. Para salir de esta situación y encontrar una vía correcta a la solución del problema era necesario no temer a enfrentarse a las personalidades de prestigio, tener un espíritu revolucionario, gran audacia científica, se necesitaba un genio del pensamiento matemático, capaz de romper con los prejuicios multiseculares y de una forma nueva comprender y resolver el problema.

El gran matemático ruso Nicolás I. Lobachevski (1792-1856) resultó ser tal genio y revolucionario en la ciencia. Por primera vez N. I. Lobachevski estableció rigurosa y científicamente la infructuosidad de las tentativas de demostrar el axioma de las rectas paralelas. El demostró que es imposible deducir la afirmación de este axioma de los demás axiomas de Euclides.

En 1826 N. I. Lobachevski construyó la geometría que tiene por base un sistema de axiomas, que se diferencia del sistema de axiomas de Euclides sólo en el axioma de las rectas paralelas.

Como resultado apareció una geometría lógicamente no contradictoria, que se diferencia sustancialmente de la euclídea.

Las ideas de N. I. Lobachevski eran tan originales e inesperadas, y hasta tal punto adelantaron su siglo, que no fueron comprendidas incluso por los grandes matemáticos de aquel tiempo.

N. I. Lobachevski, insigne profesor y rector (dirigente) de la Universidad de Kazán, se ocupaba incansablemente de todos los asuntos de la Universidad. Trabajaba constantemente por mejorar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas, escribió manuales de álgebra y geometría. Condenó siempre a las personas que no deseaban trabajar debidamente y aportar el máximo posible a la sociedad.

N. I. Lobachevski era no sólo un geómetra de fuerza creativa excepcional, sino también un matemático dotado de un talento multifacético.

Después de que las ideas de Lobachevski ganaron notoriedad, su geometría empezó a desarrollarse impetuosamente, especialmente en los trabajos de B. Riemann (1826-1866), A Kelly (1821-1895), F. Klein (1849-1925), D. Hilbert (1862-1943).

Los trabajos de B. Riemann adquirieron un significado especial debido a que sus ideas y las ideas de N. I. Lobachevski constituyeron la base matemática de la teoría de la relatividad de A. Einstein (1879-1955).

La geometría de N. I. Lobachevski y, seguidamente descubierta, la geometría no euclidiana de Riemann son parte sólida de la ciencia moderna y encuentran aplicación en la solución de los complicados problemas teóricos y prácticos de la matemática, de la física y de la técnica modernas. Sin embargo, la geometría de Euclides conserva su importancia en lo que se refiere a la práctica, en la construcción, en la técnica y, por lo tanto, es objeto de estudio en las escuelas de enseñanza general y de peritaje.

El desarrollo de la geometría y sus aplicaciones en las distintas ramas de las matemáticas y de las ciencias naturales evidencian la importancia de la geometría como uno de los medios más profundos y fecundos, por las ideas y por los métodos, en el conocimiento de la realidad objetiva.

La ciencia matemática soviética siempre prestó gran atención al desarrollo de la geometría logrando en esta rama del saber notables éxitos.

A nuestros lectores:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per, 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

En 1984 Mir publica:

A. Tsipkin

MANUAL DE MATEMATICAS PARA LA ENSEÑANZA MEDIA

El manual está destinado para las escuelas de enseñanza media general y técnica y contiene una exposición amplia de las partes de las matemáticas que integran el programa de enseñanza media. La obra se compone de los siguientes apartados: elementos de la teoría de conjuntos, números reales, números complejos, método de coordenadas, geometría, trigonometría, teoría de los límites, principios del cálculo diferencial e integral, funciones elementales.
Algunos de los apartados que integran este libro no forman parte actualmente del programa escolar, pero son imprescindibles para una mejor compreusión de los fundamentos de las matemáticas. Entre ellos cabe señalar: la divisibilidad de los números enteros y polinomios, los algoritmos de Euclides, el teorema fundamental del álgebra, las curvas de segundo orden, etc. Junto con los conocimientos elementales que tienen carácter general, en el manual se examinan las propiedades aproximadas de las fracciones continuas y se da uno de los más simples y conocidos métodos del cálculo aproximado, el método de tangentes de Newton.
El manual tiene fundamentalmente un carácter teórico y puede servir no sólo como guía, sino que también como un libro de repaso y se da uno de los más simples y conocidos métodos del cálculo paración de los exámenes de ingreso en los centros de enseñanza superior.

N. Efímov

GEOMETRÍA SUPERIOR

En este libro se examina un gran número de problemas. Se da una argumentación matemática de la geometría euclídea y de las geometrías no euclídeas de Lovachevski y Rieman, de la geometría proyectiva, geometría de Minkovski y de las cuestiones geométricas de la teoría espacial de la relatividad, así como una noción general de las formas topológicas de la geometría de curvatura constante. La obra se divide en tres partes. El material principal se expone en las dos primeras. El libro se caracteriza por la claridad de su exposición, aunque las cuestiones que trata, por decirlo así, no siempre son sencillas. Ha sido reeditado varias veces en la URSS y en otros países. La obra está dirigida a los estudiantes de los centros docentes superiores, así como a todos aquellas personas que se interesan por la matemática.