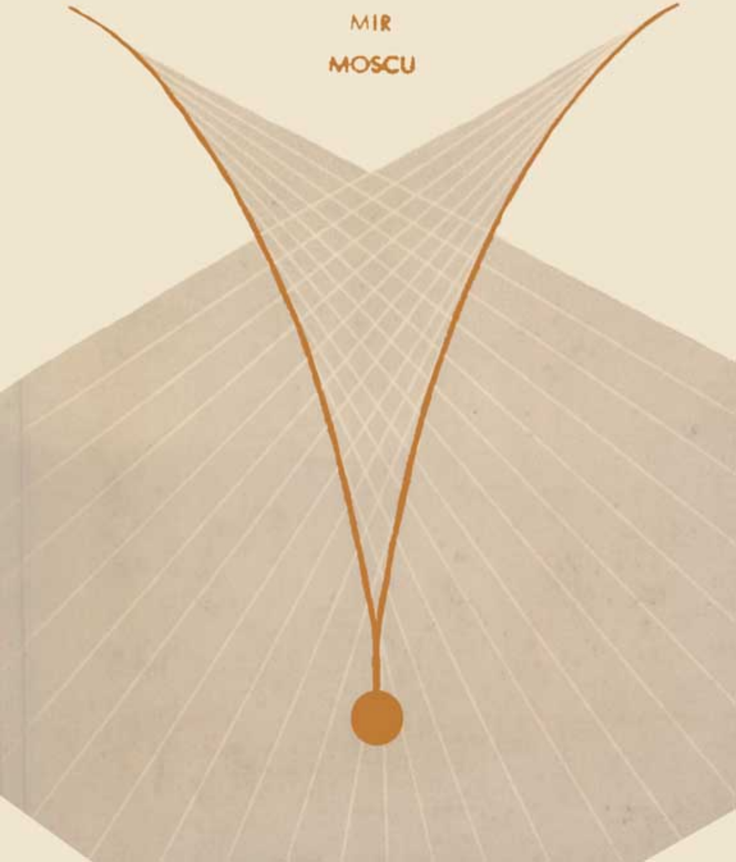
A. V. POGORÉLOV

Geometría diferencial

EDITORIAL
MIR
MOSCU



ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. V. POGORÉLOV

Geometría diferencial

TRADUCIDO DEL RUSO POR CARLOS VEGA,
CANDIDATO A DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

EDITORIAL MIR MOSCÚ

Impreso en la URSS. 1977

на испанском языке

INDICE

SEGUNDA PARTE
TEORIA DE SUPERFICIES

CAPITULO IV.

CAPITULO V.

CAPITULO VI.

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICION

La edición presente difiere de la primera (1955). Se han introducido modificaciones en casi todas las secciones del libro. Estas modificaciones son de carácter diverso. En unos casos se han mejorado las demostraciones, en otros, se ha cambiado el orden de exposición y, en los demás, se ha completado ésta con ejemplos y dibujos aclaratorios.

En el libro se exponen con suficiente detalle los temas fundamentales del curso correspondiente al programa de las Facultades de Física y Matemáticas. Los temas que rebasan los márgenes del programa son desarrollados, como regla, en forma descriptiva.

El autor

PREFACIO A LA TERCERA EDICION

La edición presente difiere de la anterior (1956) en que contiene ciertos perfeccionamientos de una serie de demostraciones. De modo substancial ha sido modificada únicamente la exposición del tema sobre la envolvente de una familia monoparamétrica de curvas y de superficies.

El autor

INTRODUCCION

La Geometría diferencial es la rama de las Matemáticas que estudia, aplicando métodos del análisis infinitesimal, imágenes geométricas, curvas y superficies, en primer lugar, y también familias de curvas y superficies. Un rasgo característico de la Geometría diferencial es que se ocupa ante todo de las propiedades «locales» de las curvas y superficies, o sea, de las propiedades de pedazos de curvas y superficies tan pequeños como se quiera.

La Geometría diferencial surgió y se desarrolló estrechamente ligada al análisis que, a su vez, nació en gran medida de problemas geométricos. Muchos conceptos geométricos precedieron los conceptos respectivos del análisis. Por ejemplo, el concepto de tangente precedió al de derivada y los conceptos de área y volumen, al de integral.

El surgimiento de la Geometría diferencial se remonta a la primera mitad del siglo XVIII ligándose a los nombres de L. Euler y G. Monge. La primera exposición sinóptica de la teoría de superficies pertenece a Monge («Aplicación del Análisis a la Geometría», 1795).

En 1827 Gauss publicó su obra «Estudio general sobre superficies curvas» que sentó las bases de la teoría de superficies en su forma actual. Desde entonces la Geometría diferencial deja de ser una simple aplicación del análisis y pasa a ocupar un lugar independiente en las Matemáticas.

El descubrimiento de la Geometría no euclidiana que se debe a N. I. Lobachevski influyó enormemente en el desarrollo de toda la Geometría incluida la diferencial. Así, con su conferencia «Sobre las hipótesis en las que se funda la Geometría», dictada en 1854, G. F. B. Riemann sentó las bases de la llamada Geometría de Riemann que, aplicada al caso de variedades multidimensionales, ocupa la misma posición respecto a la geometría del espacio euclídeo de n dimensiones que la geometría interior de una superficie arbitraria respecto a la geometría euclídea del plano.

El punto de vista teórico-conjuntista de F. Klein, expuesto en su programa de Erlangen (1872), fue desarrollado en la Geometría diferencial por E. Cartan que elaboró la teoría de espacios de conexión proyectiva y afín.

En Rusia la escuela de Geometría diferencial fue creada por F. Minding y K. M. Petersón que dedicaron sus investigaciones fundamentales a la teoría de doblamiento de superficies. Estas investigaciones fueron continuadas en los trabajos de muchos geómetras rusos y soviéticos.

El presente libro se basa en las conferencias de Geometría diferencial que el autor dictó en la Facultad de Física y Matemática de la Universidad de Járkov. El autor se propuso exponer rigurosamente los fundamentos de la Geometría diferencial y sus métodos típicos de investigación sin alterar considerablemente las tradiciones existentes. Muchas cuestiones concretas de Geometría diferencial aparecen en forma de ejercicios y problemas y la solución de éstos es una condición indispensable de la preparación de los estudiantes geómetras.

PRIMERA PARTE

Teoría de curvas

CAPITULO I

CONCEPTO DE CURVA

La curva es uno de los objetos fundamentales de la Geometría diferencial. En este capítulo el concepto de curva es aclarado en la medida en que lo requiere la exposición sucesiva.

§ 1. Curva elemental. Curva simple. Curva general

Antepondremos a la definición del concepto de curva alguna información sobre las aplicaciones de un conjunto arbitrario de puntos en el espacio.

Sea M un conjunto cualquiera de puntos del espacio. Se dice que se tiene una *aplicación* f del conjunto M en el espacio si a cada punto X del conjunto M se le hace corresponder un punto $f(X)$ del espacio. El punto $f(X)$ del espacio se denomina *imagen* del punto X. El conjunto de puntos $f(M)$ formado por las imágenes de todos los puntos del conjunto M, se denomina *imagen* del conjunto M.

Una aplicación f del conjunto M se llama *inyectiva* si son diferentes las imágenes de distintos puntos. Sea f una aplicación inyectiva. De un modo natural queda definida entonces la aplicación f^{-1} del conjunto $f(M)$ que asocia al punto $f(X)$ el punto X. Esta aplicación se denomina *inversa* de f.

Una aplicación f de un conjunto M se llama *continua* si cualesquiera que sean el punto X de M y el número

$\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que para todo punto Y de M la distancia entre los puntos $f(Y)$ y $f(X)$ será menor que ε siempre que la distancia entre Y y X sea menor que δ.

Sea f una aplicación inyectiva y continua de M. Si la aplicación f^{-1} del conjunto $f(M)$ también es continua, se dice que f es una *aplicación topológica*. Siendo f una aplicación topológica, suele decirse que el conjunto M y su imagen $f(M)$ son *homeomorfos* o *topológicamente equivalentes*.

Definamos la curva elemental.

Un conjunto γ de puntos del espacio se llamará *curva elemental* si es la imagen obtenida en el espacio por una aplicación topológica de un segmento abierto de la recta.

Sea γ una curva elemental y sea $a < t < b$ el segmento del que se obtiene por la aplicación f la curva. Sean $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ las coordenadas del punto de la curva correspondiente al punto t del segmento. El sistema de igualdades

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

se denomina *ecuaciones* de la curva γ en forma paramétrica.

Un conjunto G de puntos del espacio se llama *abierto* si para todo punto X de este conjunto se puede indicar un número $\varepsilon > 0$ tal que todos los puntos del espacio distanciados de X en menos de ε también pertenecen a G. Es obvio que el conjunto formado por cualquier colección de conjuntos abiertos será abierto.

Se llama *entorno* de un punto X del espacio cualquier conjunto abierto que contiene este punto.

Un conjunto M de puntos del espacio se llama conexo si no existen dos conjuntos abiertos G' y G'' que dividen el conjunto M en dos partes M' y M'' de modo que una pertenezca sólo a G' y la otra, sólo a G''.

Definamos ahora la curva simple.

Un conjunto γ de puntos del espacio se llamará *curva simple* si este conjunto es conexo y si para todo punto X del mismo existe un entorno tal que la parte de γ comprendida en él constituye una curva elemental.

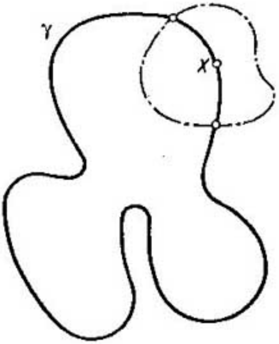


Fig. 1

La estructura «global» de una curva simple se aclara en el teorema siguiente.

La imagen obtenida en el espacio por una aplicación topológica de un segmento abierto o de una circunferencia es una curva simple.

Recíprocamente, cualquier curva simple es la imagen obtenida en el espacio por una aplicación topológica de un segmento abierto o de una circunferencia. Brevemente esto se enuncia así: *una curva simple es homeomorfa con un segmento abierto o una circunferencia.*

No daremos la demostración de este teorema. Notemos sólo que la curva simple se caracteriza plenamente por la propiedad, indicada en este teorema, de ser homeomorfa con un segmento abierto o una circunferencia; por consiguiente, puede ser definida mediante esta propiedad.

Una curva simple homeomorfa con una circunferencia se denomina *cerrada*.

Se llama entorno de un punto X de una curva simple γ la parte común de la curva γ y de un entorno espacial del punto X. Según la definición, todo punto de una curva simple posee un entorno que constituye una curva elemental. En lo sucesivo, al referirnos a un entorno de un punto de una curva, sobrentenderemos siempre un entorno elemental de este tipo (fig. 1).

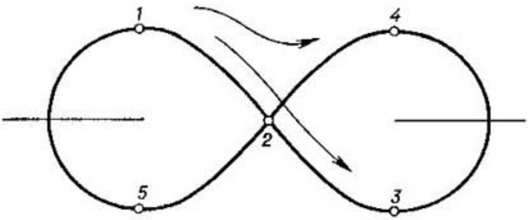


Fig. 2

Supongamos que la curva simple γ es la imagen obtenida por la aplicación topológica f del segmento abierto o la circunferencia g. Sea X un punto arbitrario de g y sea ω un entorno cualquiera de éste. Entonces la imagen de ω obtenida por la aplicación f es un entorno del punto $f(X)$ en la curva γ. Recíprocamente, cualquier entorno del punto $f(X)$ puede obtenerse de este modo.

Una aplicación f de un conjunto M en el espacio se denomina *localmente topológica* si para todo punto de este conjunto existe un entorno en el que la aplicación f es topológica.

Un conjunto γ de puntos del espacio se denominará *curva general* si este conjunto es la imagen obtenida por una aplicación localmente topológica de una curva simple en el espacio.

Diremos que la aplicación f_1 de una curva simple γ_1 y la aplicación f_2 de una curva simple γ_2 determinan una misma curva general γ, si entre los puntos de las curvas γ_1 y γ_2 puede establecerse una correspondencia topológica tal que coincidan en la curva γ las imágenes de los puntos correspondientes de estas curvas.

Con el fin de explicar la segunda parte de esta definición veamos un ejemplo. En la fig. 2 aparece una curva general. Puede interpretarse como la imagen de una circunferencia obtenida por una aplicación localmente topológica siguiendo dos procedimientos distintos que, desde el punto de vista de la definición dada, conducen a diferentes curvas y que se pueden evidenciar de la forma siguiente.

Supongamos que el punto se desplaza según la circunferencia. Entonces su imagen se desliza según la curva, con la particularidad de que el punto imagen, al recorrer la curva, puede tomar sucesivamente las posiciones 1, 2, 3, 4, 2, 5, pero también puede recorrer la curva en el orden 1, 2, 4, 3, 2, 5. Las aplicaciones correspondientes a estos recorridos determinan diferentes curvas generales aun cuando éstas coincidan en tanto que conjuntos puntuales.

Supongamos que la curva general γ es la imagen obtenida por la aplicación localmente topológica f de la curva simple $\bar{\gamma}$ en el espacio. Denominaremos entorno del punto $f(X)$ en la curva γ la imagen de cualquier entorno del punto X en la curva $\bar{\gamma}$ obtenida por la aplicación f. Puesto que la aplicación f es topológica en un entorno suficientemente pequeño del punto X, resulta que $f(X)$ posee en γ un entorno que constituye una curva elemental.

De este modo, *el estudio local de cualquier curva puede ser reducido a la consideración de una curva elemental.*

§ 2. Curva regular. Modos de representación analítica de una curva

Una curva γ se llamará *regular* (k veces diferenciable) si para todo punto de esta curva existe un entorno que admite una parametrización regular, o sea, puede ser representado por unas ecuaciones en forma paramétrica

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

donde f_1, f_2 y f_3 son funciones regulares (k veces continuamente diferenciables). Siendo $k = 1$, la curva se denomina *suave.*

Una curva se llama *analítica* si admite una parametrización analítica (f_1, f_2 y f_3 son funciones analíticas) en un entorno suficientemente pequeño de cada uno de sus puntos.

En lo sucesivo consideraremos exclusivamente curvas regulares.

Según hemos visto en el parágrafo anterior, toda curva puede ser representada, en un entorno de cada punto, por ecuaciones en forma paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son unas funciones definidas en un intervalo $a < t < b$.

De modo natural se plantea la cuestión: ¿cuándo el sistema de igualdades

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a < t < b)$$

determina una curva regular, o sea, cuándo estas igualdades pueden considerarse como ecuaciones de una curva? En muchos casos la respuesta se obtiene del teorema siguiente.

Teorema. Si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son unas funciones regulares que cumplen la condición

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 \quad (a < t < b),$$

entonces el sistema de igualdades

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a < t < b)$$

representa las ecuaciones de una curva γ. Esta curva es la imagen del segmento $a < t < b$ que se obtiene por la aplicación localmente topológica que asocia al punto t del segmento el punto del espacio con las coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$.

Aquí sólo debe demostrarse la afirmación de que la aplicación indicada es localmente inyectiva. Demostremos esta proposición.

Si es falsa, existe un t_0 en cuyo entorno, por pequeño que sea, se pueden señalar t_1 y t_2 ($t_1 \neq t_2$) tales que

$$x(t_1) - x(t_2) = 0, \; y(t_1) - y(t_2) = 0,$$
$$z(t_1) - z(t_2) = 0.$$

Según el teorema del valor medio, de aquí obtenemos

$$x'(\vartheta_1) = 0, \quad y'(\vartheta_2) = 0, \quad z'(\vartheta_3) = 0,$$

donde ϑ_1, ϑ_2 y ϑ_3 están comprendidos entre t_1 y t_2. Puesto que t_1 y t_2 son tan próximos a t_0 como se quiera, de la continuidad de las funciones $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ resulta

$$x'(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0, \quad z'(t_0) = 0$$

y, por consiguiente,

$$x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)=0.$$

Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado la proposición.

Con una selección adecuada de los ejes de coordenadas x, y y z, algunas curvas admiten la parametrización

$$x=t,\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)\quad (a<t<b)$$

o

$$y=\varphi(x),\quad z=\psi(x)\quad (a<x<b)$$

que viene a ser lo mismo. En muchos casos esta parametrización resulta especialmente cómoda. En relación con esto surge la cuestión: ¿cuándo admite una curva, al menos «localmente», semejante parametrización? La respuesta aparece en el teorema siguiente.

Teorema. Sea γ *una curva regular y sea*

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)\quad (a<t<b)$$

una parametrización regular de esta curva en un entorno del punto (x_0, y_0, z_0) *correspondiente a* $t=t_0$. *Supongamos que* $f_1'(t)\neq 0$ *en este punto. Entonces, en un entorno suficientemente pequeño del punto* t_0, *la curva* γ *puede definirse por las ecuaciones*

$$y=\varphi(x),\quad z=\psi(x),$$

donde φ *y* ψ *son funciones regulares de* x.

Efectivamente, según el teorema de las funciones implícitas, existe una función regular $\chi(x)$ que es igual a t_0 para $x=x_0$ y que satisface la ecuación

$$x=f_1(\chi(x))$$

para todo x próximo a x_0. Derivando esta identidad y tomando $x=x_0$, encontramos $1=f_1'(t_0)\,\chi'(x_0)$, de donde $\chi'(x)\neq 0$. De modo que la función $\chi(x)$ es monótona en un entorno de x_0 y, por consiguiente, siendo δ suficientemente pequeño, la aplicación del segmento $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ en el eje t, determinada por la igualdad $t=\chi(x)$, será topológica.

De aquí resulta que el entorno $\chi(x_0-\delta)<t<$ $<\chi(x_0+\delta)$ de la curva γ puede definirse mediante las ecuaciones

$$y = f_2(\chi(x)), \quad z = f_3(\chi(x))$$
$$(x_0 - \delta < x < x_0 + \delta).$$

Hemos demostrado el teorema.

Consideremos ahora la representación implícita de la curva limitándonos primero, para simplificar, a curvas planas.

Una curva se denomina *plana* si todos sus puntos pertenecen a un plano. Aceptaremos que éste es el plano xy.

Diremos que una curva plana viene definida por la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0,$$

entendiendo con ello exclusivamente que las coordenadas de los puntos de la curva satisfacen esta ecuación. Pero pueden existir puntos del plano que satisfagan esta ecuación y no pertenezcan a la curva y también puede suceder que el conjunto de todos los puntos del plano que satisfagan la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ no constituya siquiera una curva en el sentido de la definición dada en el parágrafo anterior.

El teorema siguiente desempeña un papel importante con relación a las curvas definidas por ecuaciones en forma implícita.

Teorema. Sea $\varphi(x, y)$ una función regular de las variables x e y. Sea M el conjunto de los puntos del plano xy que satisfacen la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0$$

y sea (x_0, y_0) un punto de este conjunto en el que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$. Entonces el punto (x_0, y_0) posee un entorno tal que todos los puntos del conjunto M pertenecientes a él forman una curva elemental regular.

Demostración. Supongamos, para concretar, que en el punto (x_0, y_0) es $\varphi_y \neq 0$. Según el teorema de las funciones implícitas, existen unos números δ y ε, mayores que cero, y una función regular $\psi(x)$, definida en el intervalo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, tales que todos los puntos $(x, \psi(x))$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ y, además, con estos puntos se agotan todos los puntos del rectángulo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$ que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$. La curva elemental de la que trata el teorema viene definida por la ecuación

$$y = \psi(x) \quad (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta).$$

Hemos demostrado el teorema.

El teorema correspondiente a las curvas espaciales consiste en lo siguiente.

Teorema. Sean $\varphi(x, y, z)$ *y* $\psi(x, y, z)$ *funciones regulares de las variables* x, y *y* z. *Sea* M *el conjunto de los puntos del espacio que satisfacen las ecuaciones*

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad y \quad \psi(x, y, z) = 0$$

y sea (x_0, y_0, z_0) *un punto de este conjunto en el cual es igual a dos el rango de la matriz*

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}.$$

Entonces el punto (x_0, y_0, z_0) *posee un entorno tal que todos los puntos del conjunto* M *pertenecientes a este entorno constituyen una curva elemental regular.*

La demostración de este teorema también se basa en la aplicación del teorema de las funciones implícitas y no difiere, en esencia, de la demostración del teorema correspondiente a las curvas planas.

§ 3. Puntos singulares de curvas regulares planas

Sea γ una curva regular plana y sea P un punto de la misma. El punto P de la curva γ se denomina *punto regular* respecto al grado dado de regularidad k si en un entorno de este punto la curva admite una parametrización k veces diferenciable

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

que en el punto P satisface la condición $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Si no existe tal parametrización, se dice que P es un *punto singular.*

Ejemplo. El punto $t = 0$ de la curva

$$x = t^3, \quad y = t^7 \quad (-1 < t < +1)$$

es regular respecto a las parametrizaciones dos veces diferenciables ya que la curva admite una representación equivalente

$$x = \tau, \ y = \mp |\tau|^{\frac{7}{3}} (-1 < \tau < 1).$$

Sin embargo, más adelante veremos que el punto $t = 0$ es singular respecto a las parametrizaciones analíticas.

En este parágrafo analizaremos detalladamente el problema sobre los puntos singulares de curvas analíticas planas respecto a parametrizaciones analíticas.

Lema. Sean γ una curva analítica y O un punto de la misma. Entonces, escogiendo convenientemente los ejes de coordenadas, la curva puede parametrizarse de modo que sus ecuaciones en un entorno del punto O sean de la forma

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ \ldots, \quad n_1 \leqslant m_1.$$

Demostración. Tomemos el punto O como origen de coordenadas. Sea

$$x = \alpha_1 s^{n_1} + \alpha_2 s^{n_2} + \ \ldots,$$
$$y = \beta_1 s^{m_1} + \beta_2 s^{m_2} + \ \ldots$$

una parametrización analítica de la curva. Sin perder generalidad podemos aceptar que al punto O le corresponde el valor del parámetro $s = 0$. Podemos aceptar también que $n_1 \leqslant m_1$. (Si $n_1 > m_1$, podemos cambiar de lugar x e y.)

Introduzcamos un parámetro nuevo t ligado a s mediante la igualdad

$$t = s \left(\frac{\alpha_1 s^{n_1} + \alpha_2 s^{n_2} + \ \ldots}{\alpha_1 s^{n_1}} \right)^{\frac{1}{n_1}}.$$

Escogido el parámetro de este modo, las ecuaciones de la curva γ en un entorno del punto O toman la forma

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ \ldots,$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema. Supongamos que en un entorno del punto O una curva analítica viene dada por las ecuaciones

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots, \quad n_1 \leqslant m_1.$$

Entonces, para que el punto O sea un punto singular de la curva es necesario y suficiente que al menos uno de los m_k no sea divisible por n_1.

Demostración. Necesidad. Observemos, en primer lugar, que n_1 y todos los m_k no pueden ser pares ya que entonces, por pequeño que sea t, se tendría $x(t) = x(-t)$ e $y(t) = y(-t)$, o sea, quedaría infringida la inyectividad de la aplicación en un entorno tan pequeño como se quiera del punto $t = 0$.

Supongamos que todos los m_k son múltiplos de n_1 (n_1 es obviamente impar). Introduzcamos en lugar de t el parámetro $s = t^{n_1}$. Entonces las ecuaciones de la curva en un entorno del punto O tomarán la forma

$$x = a_1 s,$$
$$y = b_1 s^{k_1} + b_2 s^{k_2} + \ldots$$

Es evidente que el punto O correspondiente al valor $s = 0$ del parámetro resulta un punto regular de la curva.

Suficiencia. Supongamos que al menos uno de los m_k no es divisible por n_1. Demostremos que O es un punto singular. Si el punto O es regular, la curva admite en un entorno del mismo una parametrización $x = f_1(\sigma)$, $y = f_2(\sigma)$, siendo f_1 y f_2 unas funciones analíticas que, para el valor $\sigma = \sigma_0$ correspondiente al punto O cumplen la condición $f_1'^2 + f_2'^2 \neq 0$.

Puesto que $f_2(\sigma)(f_1(\sigma))^{-1} = y(t)(x(t))^{-1}$ e $y(t)(x(t))^{-1}$ tiende a un límite finito igual a $f_2'(\sigma_0) \times \times (f_1'(\sigma_0))^{-1}$ cuando $t \to 0$, resulta que $f_1' \neq 0$ en el punto O y, por consiguiente, nuestra curva puede ser definida, según el teorema del parágrafo anterior, mediante la ecuación

$$y = \varphi(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

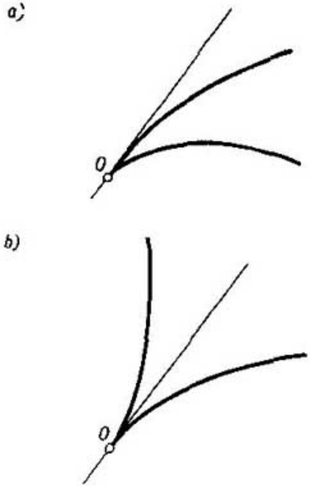


Fig. 3

donde $\varphi(x)$ es una función analítica de x. Introduciendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$ en esta ecuación, obtenemos la identidad

$$b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots = c_1 a_1 t^{n_1} + c_2 a_1^2 t^{2n_1} + \ldots$$

De aquí resulta que todos los m_k son múltiplos de n_1. Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado completamente el teorema.

Observación. Si el punto O es singular siendo n_1 y m_1 pares, se denomina *punto de retroceso de segunda especie.* En un entorno de este punto la curva tiene la forma indicada en la fig. 3, *a*.

Si el punto O es singular, m_1 no es divisible por n_1 y, además, n_1 es par y m_1 es impar, se dice que O es un *punto de retroceso de primera especie*. La forma de la curva en un entorno de semejante punto singular se indica en la fig. 3, *b*.

Para probar que un punto de una curva es singular, existe un criterio *suficiente* sencillo que ofrece el teorema siguiente.

Teorema. Supongamos que en un entorno del punto O la curva analítica γ viene definida por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones analíticas del parámetro t. Supongamos que las primeras derivadas distintas de cero de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son de orden n_1 y m_1, respectivamente, siendo $n_1 < m_1$.

Entonces el punto O será singular si m_1 no es divisible por n_1, con la particularidad de que O será un punto de retroceso de segunda especie si n_1 y m_1 son ambos pares, y será un punto de retroceso de primera especie si n_1 es par y m_1 es impar.

Este teorema se deduce directamente del anterior.

Para terminar, consideremos el problema de los puntos singulares de curvas analíticas planas definidas implícitamente.

Sea γ una curva analítica plana definida por la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0,$$

donde $\varphi(x, y)$ es una función analítica de las variables x e y.

Si $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$ en el punto $O(x_0, y_0)$ de la curva γ, este punto de la curva es regular como quedó demostrado en el § 2. De este modo sólo pueden ser singulares aquellos puntos de la curva en los cuales $\varphi_x = \varphi_y = 0$.

Sin perder generalidad, podemos aceptar que el punto O es el origen de coordenadas. En un entorno del punto O la curva γ admite una parametrización de tipo

$$x = a_1 t^{n_1},$$
$$y = b_1 t^{m_1} + b_2 t^{m_2} + \ldots;$$

podemos aceptar que $n_1 \leqslant m_1$ ya que de lo contrario podríamos cambiar los ejes x e y. Para determinar si O es un punto singular de la curva y para revelar el carácter de la singularidad en este punto, basta conocer los exponents n_1, m_1, $m_2 \ldots$

Para hallar estos exponentes, recurriremos a la identidad

$$\varphi(x(t),\ y(t)) \equiv 0.$$

Supongamos que el desarrollo de la función $\varphi(x, y)$ en serie de potencias de x e y comienza con los términos de segundo grado

$$\varphi(x, y) = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$$

Distinguiremos tres casos:

1. $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 > 0.$
2. $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 < 0.$
3. $a_{20}a_{02} - a_{11}^2 = 0.$

Realizando un giro de los ejes de coordenadas, se puede lograr que en el desarrollo de la función $\varphi(x, y)$ en serie de potencias desaparezca el término que contiene xy.

Introduciendo $x(t)$ e $y(t)$ en el desarrollo de la función $\varphi(x, y)$, obtenemos una identidad respecto a t. Si $n_1 < m_1$, el menor grado de t, igual a $2n_1$, lo tendrá sólo un término: $a_{20}a_1^2t^{2n_1}$. De aquí resulta $a_{20} = 0$, lo cual es imposible en el primer y segundo casos. Resta aceptar que $n_1 = m_1$. Entonces, en los dos primeros casos la potencia inferior corresponde a los términos $a_{20}a_1^2t^{2n_1}$ y $a_{02}b_1^2t^{2m_1}$. En el primer caso esto tampoco puede suceder ya que a_{20} y a_{02} son del mismo signo y de la identidad se deduce que $a_{20}a_1^2 + a_{02}b_1^2 = 0$.

De este modo no existe en el primer caso una curva analítica que satisfaga la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ y que contenga el punto O. En este caso, en un entorno suficientemente pequeño del punto O, no existe ningún punto, distinto de O, que verifique la ecuación $\varphi(x, y) = 0$. Si la curva se define como el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$, este punto se denomina *punto singular aislado*.

Ejemplo. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x^2 + y^2)(x - 1) = 0$$

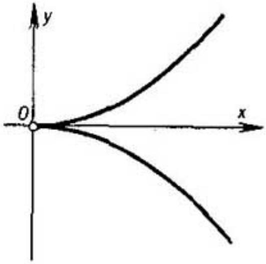


Fig. 4

consta de la recta $x = 1$ y del punto $(0, 0)$ que es un punto aislado de este lugar geométrico.

En el tercer caso podemos aceptar que $a_{20} = 0$ ya que $a_{20}a_{02} = 0$. El desarrollo de la función $\varphi(x, y)$ tiene la forma

$$\varphi(x, y) = a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + \ldots$$

Supongamos que $a_{30} \neq 0$. En el caso general esto corresponde a que las formas

$$\varphi_2 = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 \text{ y } \varphi_3 = a_{30}x^3 + \ldots + a_{03}y^3$$

no poseen divisores comunes.

Introduciendo $x(t)$ e $y(t)$ en el desarrollo de la función $\varphi(x, y)$, observamos que los términos de potencia inferior de t son $a_{02}b_1^2t^{2m_1}$ y $a_{30}a_1^3t^{3n_1}$. De aquí resulta que $2m_1 = 3n_1$, o sea, m_1 no es divisible por n_1. Por consiguiente, el punto O es un punto singular de la curva.

Si se acepta que m_1 y n_1 son ambos pares, resultan pares todos los m_k pues se expresan homogénea y linealmente en términos de m_1 y n_1. Pero anteriormente se ha señalado que n_1 y todos los m_k no pueden ser pares. Por esto, sólo n_1 es par. Ello significa que el punto singular O es un punto de retroceso de primera especie.

Ejemplo. Para la parábola semicúbica $y^2 - x^3 = 0$ el origen de coordenadas es un punto de retroceso de primera especie (fig. 4).

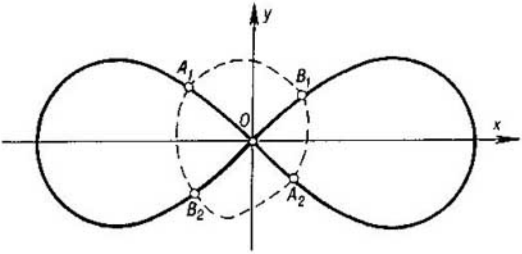


Fig. 5

Consideremos, finalmente, el segundo caso. En este caso la función $\varphi(x, y)$ puede representarse en la forma

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

donde A, B y C son funciones analíticas de x e y que en el punto O valen a_{20}, 0 y a_{02}, respectivamente, y que, por ende, satisfacen en una proximidad de este punto la desigualdad $AC - B^2 < 0$. Por eso, en un entorno pequeño del punto O se tiene

$$\varphi(x, y) = C(y - x\xi_1(x, y))(y - x\xi_2(x, y)),$$

donde ξ_1 y ξ_2 son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$A + 2B\xi + C\xi^2 = 0.$$

Es decir, en el segundo caso el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ en un entorno del punto O, consta de dos curvas analíticas $y - x\xi_1(x, y) = 0$ e $y - x\xi_2(x, y) = 0$ y el punto O es un punto regular de ambas ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}(y - x\xi_i(x, y))\Big|_0 = -\xi_i(0, 0) \neq 0.$$

Sin embargo, si la curva se define como el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0,$$

también en este caso el punto O se considera singular y se denomina punto *múltiple*.

Ejemplo. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2 (x^2 - y^2) = 0$$

(lemniscata de Bernoulli, fig. 5) consta en un entorno del punto múltiple (0, 0) de dos curvas analíticas $\widehat{A_1A_2}$ y $\widehat{B_1B_2}$.

§ 4. Asíntotas de curvas planas

Sea γ una curva no cerrada y sean

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a < t < b)$$

sus ecuaciones. Se dice que la curva se extiende infinitamente por un lado si $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ cuando $t \to a$ (o cuando $t \to b$). En cambio, si $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ tanto para $t \to a$ como para $t \to b$, se dice que la curva se extiende infinitamente por ambos lados. Es obvio que la propiedad de una curva de extenderse infinitamente no depende de su parametrización.

Supongamos que la curva γ se extiende infinitamente; por ejemplo, sea $x^2 + y^2 \to \infty$ para $t \to a$. Una recta g se denomina *asíntota* de la curva γ si la distancia $d(t)$ entre el punto de la curva γ y la recta g tiende a cero cuando $t \to a$ (fig. 6).

Teorema. Para que una curva γ que viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a < t < b)$$

y que se extiende infinitamente cuando $t \to a$, tenga una asíntota es necesario y suficiente que:

1. *Al menos uno de los cocientes $y(t)(x(t))^{-1}$ o $x(t) \times (y(t))^{-1}$ tienda a un límite finito cuando $t \to a$. Supongamos, para concretar, que $y(t)(x(t))^{-1} \to k$.*

2. *La expresión $y(t) - kx(t)$ tienda también a un límite para $t \to a$ una vez cumplida la primera condición.*

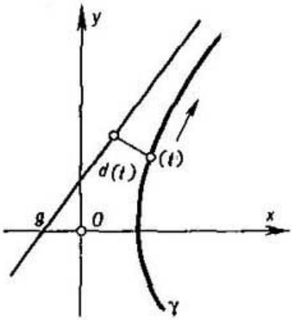


Fig. 6

Si este límite se designa por l, la ecuación de la asíntota será

$$y - kx - l = 0.$$

Demostración. Necesidad. Sea g:

$$y - kx - l = 0$$

la asíntota de la curva γ. La expresión

$$y(t) - kx(t) - l$$

coincide, salvo un factor constante, con la distancia entre el punto (t) de la curva γ y la recta g. Pero, como g es una asíntota, se tiene

$$y(t) - kx(t) - l \to 0 \qquad (*)$$

cuando $t \to a$.

Debe ser $x(t) \to \infty$ cuando $t \to a$ ya que, de lo contrario, la expresión $y(t) - kx(t) - l$ no puede permanecer acotada para $t \to a$ $(x^2(t) + y^2(t) \to \infty)$. Pero entonces de (*) resulta

$$\frac{y(t)}{x(t)} \to k$$

e

$$y(t) - kx(t) \to l.$$

Hemos demostrado la necesidad.

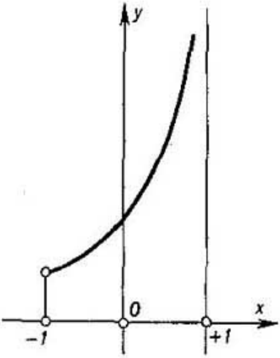


Fig. 7

Suficiencia. Puesto que para $t \to a$

$$\frac{y(t)}{x(t)} \to k \text{ e } y(t) - kx(t) \to l,$$

resulta

$$y(t) - kx(t) - l \to 0.$$

Pero esto significa que el punto (t) de la curva γ se acerca indefinidamente, cuando $t \to a$, a la recta

$$y - kx - l = 0,$$

que es, por consiguiente, la asíntota.

Hemos demostrado el teorema.

Ejemplo. La curva

$$x = t, \ y = \frac{1}{1-t} \quad (-1 < t < 1)$$

(rama de hipérbola) se extiende infinitamente cuando $t \to 1$ (fig. 7).

Para $t \to 1$ se tiene

$$\frac{x(t)}{y(t)} \to 0 \quad \text{y} \quad x(t) - 0 \cdot y(t) \to 1.$$

La curva tiene, por lo tanto, la asíntota

$$x - 1 = 0.$$

Consideremos ahora el problema sobre las asíntotas de una curva definida implícitamente por la ecuación

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Según hemos señalado, la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ define la curva únicamente en el sentido de que los puntos de la curva satisfacen la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ aun cuando con éstos no se agoten, hablando en términos generales, todos los puntos del plano que cumplen esta condición. El problema sobre la determinación de las asíntotas de la curva dada por la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ no es un problema plenamente definido: es posible indicar solamente un conjunto de rectas que contiene las asíntotas.

Nos limitaremos al caso de curvas algebraicas (en el que $\varphi(x, y)$ es un polinomio respecto a las variables x e y).

Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto arbitrario de la asíntota y sean

$$x = \bar{x} + \lambda u, \quad y = \bar{y} + \mu u$$

las ecuaciones paramétricas de la asíntota. Designemos por $Q(u)$ el punto de la curva más próximo al punto (u) de la asíntota. Las coordenadas del punto $Q(u)$ serán

$$x(u) = \bar{x} + \lambda u + \xi(u),$$
$$y(u) = \bar{y} + \mu u + \eta(u),$$

donde

$$\xi(u) \quad \text{y} \quad \eta(u) \to 0 \quad \text{cuando} \quad u \to \infty.$$

Indiquemos por φ_k el conjunto de términos de grado k en el polinomio φ. Entonces

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_{n-1} + \ldots + \varphi_0.$$

Introduciendo $x = x(u)$ e $y = y(u)$ en $\varphi(x, y)$ y despejando los términos que contienen u^n y u^{n-1}, obtendremos

$$\varphi(x(u), y(u)) = u^n \varphi_n(\lambda, \mu) + u^{n-1}\{\bar{x}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\lambda +$$
$$+ \bar{y}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\mu + \varphi_{n-1}(\lambda, \mu)\} + \ldots$$

En el segundo miembro de la igualdad no aparecen los términos de grado inferior a u^{n-1}.

Puesto que $\varphi(x(u), y(u)) \equiv 0$ y, por consiguiente,

$$\frac{1}{u^n}\varphi(x(u), y(u)) \to 0 \text{ para } u \to \infty,$$

resulta $\varphi_n(\lambda, \mu) = 0$.

Análogamente obtenemos

$$\bar{x}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\lambda + \bar{y}(\varphi_n(\lambda, \mu))'_\mu + \varphi_{n-1}(\lambda, \mu) = 0.$$

Puesto que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto arbitrario de la asíntota, esta igualdad es la ecuación de la asíntota.

Ejemplo. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x + 1 = 0.$$

Tenemos

$$\varphi_2(\lambda, \mu) = \lambda^2 - 3\lambda\mu + 2\mu^2 = 0.$$

Para λ y μ de aquí obtenemos, salvo un factor sin importancia, dos sistemas de valores $\lambda = 1$, $\mu = 1$ y $\lambda = 2$, $\mu = 1$. Introduciendo estos valores en la fórmula deducida anteriormente, hallamos las asíntotas:

$$-\bar{x} + \bar{y} + 1 = 0, \quad \bar{x} - 2\bar{y} + 2 = 0.$$

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO I

1. El punto M se desplaza en el espacio de modo que su proyección sobre el plano xy se mueve uniformemente sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ con velocidad angular ω y su proyección sobre el eje z se desliza uniformemente con velocidad c. La curva que describe el punto M se denomina *hélice simple*. Hallar la ecuación paramétrica de la hélice tomando el tiempo t como parámetro y aceptando que en el momento inicial $(t = 0)$ el punto M tiene las coordenadas a, 0, 0.

Respuesta. $x = a\cos\omega t$, $y = a \operatorname{sen} \omega t$, $z = ct$.

2. La hélice simple (ejercicio 1) se proyecta sobre el plano xy mediante un haz de rectas paralelas que forman el ángulo ϑ con el eje z. Hallar la ecuación de la proyección. ¿Para qué valores de ϑ la proyección tendrá puntos singulares? Aclarar el carácter de los puntos singulares.

Respuesta. Si el haz de rectas proyectantes es paralelo al plano Oyz, las ecuaciones de la proyección serán

$$x = a\cos\omega t, \quad y = ct \operatorname{tg}\vartheta + a \operatorname{sen}\omega t.$$

La proyección tendrá puntos singulares si $\operatorname{tg}\vartheta = \pm\frac{a\omega}{c}$. Los puntos singulares serán puntos de retroceso de primera especie.

3. Una circunferencia de radio a rueda uniformemente sin resbalar sobre una recta g con velocidad v. Hallar la ecuación de la curva γ que describe un punto M ligado fijamente a la circunferencia. ¿En qué condiciones la curva γ tendrá puntos singulares? Aclarar el carácter de los puntos singulares.

Respuesta. Si la recta g se toma por el eje x y si en el momento inicial el punto M se encuentra sobre el eje y por debajo del centro de la circunferencia, las ecuaciones de la curva γ serán:

$$x = vt - b \operatorname{sen} \frac{vt}{a}, \qquad y = a - b \cos \frac{vt}{a},$$

donde b es la distancia del punto M al centro de la circunferencia. La curva γ tiene puntos singulares si el punto M se halla sobre la circunferencia (en este caso la curva γ se denomina *cicloide*). Los puntos singulares son puntos de retroceso de primera especie.

4. Demostrar que la curva definida por la ecuación

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (\textit{astroide})$$

es una curva analítica. Hallar sus puntos singulares. Aclarar el carácter de los puntos singulares.

Respuesta. La curva admite una parametrización analítica obvia

$$x = a \cos^3 t, \; y = a \operatorname{sen}^3 t$$

y, por consiguiente, es analítica. Puntos singulares: $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. Los puntos singulares son puntos de retroceso de primera especie.

5. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de las curvas:

1. $x = a \operatorname{sen} t$,
$$y = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right) \quad (\textit{tractriz}).$$

2. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*folium de Descartes*).

Respuesta.
1. $x = 0$.
2. $x + y + a = 0$.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO I

1. Sea
$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t)$$
alguna parametrización de una curva elemental. Entonces, cualquier otra parametrización es de la forma

$$x = x(\sigma(\tau)), \; y = y(\sigma(\tau)), \; z = z(\sigma(\tau)),$$

donde $\sigma(\tau)$ es una función continua estrictamente monótona.

2. ¿Qué grado de regularidad de la curva definida por la ecuación implícita $\varphi(x, y) = 0$ puede garantizarse si la función φ es n veces diferenciable y $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$? ¿Puede tener la curva un grado de regularidad superior? Dar un ejemplo.

3. Dar un ejemplo de una curva que no admite parametrización suave de ninguna de sus partes.

4. Sea γ una curva analítica plana definida en un entorno del punto (x_0, y_0) mediante la ecuación $\varphi(x, y) = 0$, donde φ es una función analítica. Supongamos que en el punto (x_0, y_0) son iguales a cero la función φ y todas sus derivadas hasta la de orden $n-1$. Demostrar que, siendo reales y distintas todas las raíces del polinomio

$$P(\xi) = \sum_{k+l=n} \xi^k \left.\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^k\, \partial y^l}\right|_{(x_0,\, y_0)},$$

el punto (x_0, y_0) es un punto regular de la curva γ en el sentido de la definición del § 3.

5. Hallar las condiciones de existencia (análogas a las obtenidas en el § 4 para la curva plana) de una asíntota de una curva espacial $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ que se extiende infinitamente cuando $t \to a$.

Obtener la ecuación de la asíntota.

6. Hallar (por un procedimento análogo al aplicado en el § 4 para las curvas planas) la ecuación de las asíntotas de una curva espacial algebraica definida implícitamente por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

donde φ y ψ son polinomios respecto a x, y y z.

CAPITULO II

ELEMENTOS DE CURVAS RELACIONADOS CON EL CONCEPTO DE CONTACTO

Sean M y $\overline{M}$ dos conjuntos de puntos del espacio que poseen un punto común O. Sean X un punto arbitrario del conjunto M, $h(X)$ su distancia al conjunto $\overline{M}$ (extremo inferior de las distancias entre los puntos del conjunto $\overline{M}$ y el punto X) y $d(X)$ la distancia del punto X al punto O.

Diremos que el conjunto $\overline{M}$ *tiene contacto* con el conjunto M en el punto O si el cociente $h(X)(d(X))^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$ tiende a cero cuando el punto X se aproxima al punto O tanto como se quiera.

Empleando el concepto de contacto, se introducen muchos conceptos para las curvas. Los consideraremos en este capítulo.

§ 1. Función vectorial de argumento escalar

En lo que sigue utilizaremos ampliamente los medios rudimentarios del análisis vectorial. Con vista a ello, recordaremos la definición de algunos conceptos.

Sea G un conjunto cualquiera de puntos de una recta, de un plano o del espacio. Diremos que se ha definido una *función vectorial* f sobre el conjunto G si a cada punto X de este conjunto se hace corresponder un vector $f(X)$.

Para las funciones vectoriales, igual que en el análisis para las funciones escalares, se introduce el concepto de *límite*. Se dice que $f(X) \to a$ cuando $X \to X_0$ si $|f(X) - a| \to 0$ cuando $X \to X_0$.

Para las funciones vectoriales tienen lugar teoremas referentes al límite análogos a los teoremas referentes al límite para las funciones escalares.

Por ejemplo, *si $f(X)$ y $g(X)$ son funciones vectoriales y $\lambda(X)$ es una función escalar y si $f(X) \to a$, $g(X) \to b$ y $\lambda(X) \to m$ cuando $X \to X_0$, entonces*

$$f(X) \pm g(X) \to a \pm b,$$
$$\lambda(X) \cdot f(X) \to m \cdot a,$$
$$f(X) \cdot g(X) \to a \cdot b,$$
$$f(X) \times g(X) \to a \times b.$$

La demostración de estas proposiciones no difiere, hablando en términos generales, de la que se da en el análisis para las funciones escalares. A título de ejemplo, demostremos la última proposición. Tenemos

$$\begin{aligned} |f(X) \times g(X) - a \times b| &= \\ = |(f(X) - a) \times (g(X) - b) &+ (f(X) - a) \times b - \\ - (g(X) - b) \times a| \leqslant |f(X) - a|\,|g(X) - b| &+ \\ + |f(X) - a|\,|b| + |g(X) - b|\,|a|&. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $|f(X) \times g(X) - a \times b| \to 0$ cuando $X \to X_0$. Pero ello significa que $f(X) \times g(X) \to a \times b$.

Para las funciones vectoriales se introduce el concepto de *continuidad* del mismo modo que para las funciones escalares. A saber, la función $f(X)$ se denomina *continua en el punto* X_0 si $f(X) \to f(X_0)$ cuando $X \to X_0$.

Sean $f(X)$ y $g(X)$ *dos funciones vectoriales continuas en el punto* X_0 *y sea* $\lambda(X)$ *una función escalar continua en este punto. Entonces, las funciones vectoriales*

$$\lambda(X) f(X), \quad f(X) \pm g(X) \quad y \quad f(X) \times g(X),$$

así como la función escalar $f(X) \cdot g(X)$ *son continuas en el punto* X_0.

Esta propiedad de la continuidad es un corolario simple de las propiedades referentes al límite.

Concepto de derivada. Sea $f(t)$ una función vectorial definida en un intervalo. Diremos que la función vectorial f tiene *derivada* en el punto t del segmento si existe el límite del cociente

$$\frac{f(t+h) f - (t)}{h}$$

cuando $h \to 0$. La derivada en el punto t se designa por $f'(t)$.

Si $f(t)$ *y* $g(t)$ *son funciones vectoriales diferenciables en el punto* t *y* $\lambda(t)$ *es una función escalar diferenciable en este punto, entonces* $\lambda(t) f(t)$, $f(t) \pm g(t)$, $f(t) \times g(t)$ *y* $f(t)\, g(t)$ *son funciones diferenciables en el punto* t *con la particularidad de que*

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f',$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$
$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g',$$
$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Estas fórmulas de derivación se obtienen absolutamente del mismo modo que las correspondientes fórmulas de derivación de funciones escalares en el análisis.

La derivada de la función vectorial $f'(t)$ se denomina *segunda derivada de la función* $f(t)$ y se designa por $f''(t)$. Análogamente se definen la tercera, la cuarta, etc. derivadas.

Toda función que tiene derivadas continuas hasta el orden k-ésimo inclusive en un segmento (a, b) se denomina *función diferenciable* k *veces sobre este segmento*.

Sean e_1, e_2, e_3 tres vectores no pertenecientes a un mismo plano. Todo vector r admite una representación de forma

$$r = xe_1 + ye_2 + ze_3;$$

los números x, y y z se determinan unívocamente y se denominan *coordenadas del vector* r respecto a la base e_1, e_2 y e_3.

Sea $r(t)$ una función vectorial definida en un segmento. Definamos tres funciones escalares $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ mediante la condición

$$r(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3.$$

Entonces, *si las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son continuas o diferenciables, la función vectorial $r(t)$ es continua o diferenciable, respectivamente. Viceversa, si la función vectorial $r(t)$ es continua o diferenciable, las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son continuas o diferenciables, respectivamente.*

Para demostrar la segunda afirmación, multipliquemos escalarmente la igualdad $r(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3$ por un vector e_1' perpendicular a los vectores e_2 y e_3. Obtendremos $x(t)\,(e_1 e_1') = r(t)\, e_1'$. De aquí resulta que la continuidad o la diferenciabilidad de la función vectorial $r(t)$ implica la continuidad o la diferenciabilidad, respectivamente, de la función $x(t)$. Razonamientos análogos son aplicables a las funciones $y(t)$ y $z(t)$.

Para las funciones vectoriales tiene lugar la fórmula de Taylor. A saber, si $f(t)$ es una función n veces diferenciable, entonces

$$f(t+\Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}\left(f^{(n)}(t) + \varepsilon(t, \Delta t)\right),$$

donde $|\varepsilon(t, \Delta t)| \to 0$ *cuando* $\Delta t \to 0$.

En efecto,

$$f(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3.$$

Pero

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t x'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}\left(x^{(n)}(t) + \varepsilon_1\right),$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t y'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}\, y^{(n)}(t) + \varepsilon_2),$$

$$z(t+\Delta t) = z(t) + \Delta t z'(t) + \ldots + \frac{\Delta t^n}{n!}\left(z^{(n)}(t) + \varepsilon_3\right),$$

Multiplicando estas igualdades por e_1, e_2 y e_3, respectivamente, sumándolas y observando que $x^{(h)}(t)\,e_1 + y^{(h)}(t)\,e_2 + z^{(h)}(t)\,e_3 = f^{(h)}(t)$, obtenemos la fórmula de Taylor para la función vectorial $f(t)$.

Para la función vectorial el concepto de la integral en el sentido de Riemann se introduce del mismo modo absolutamente que para la función escalar. La integral de una función vectorial posee las propiedades corrientes. A saber, *si $f(t)$ es una función vectorial continua en el segmento $a \leqslant t \leqslant b$ y si $a < c < b$, entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Si m es una constante, entonces

$$\int_a^b mf(t)\,dt = m\int_a^b f(t)\,dt.$$

Si r es un vector constante, entonces

$$\int_a^b rf(t)\,dt = r\int_a^b f(t)\,dt,$$

$$\int_a^b r\times f(t)\,dt = r\times\int_a^b f(t)\,dt.$$

Tiene lugar la fórmula de derivación de la integral indefinida

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Para terminar notemos que la definición paramétrica de una curva mediante las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

equivale a su definición mediante una sola ecuación vectorial

$$r = r(t) = x(t)\,e_1 + y(t)\,e_2 + z(t)\,e_3,$$

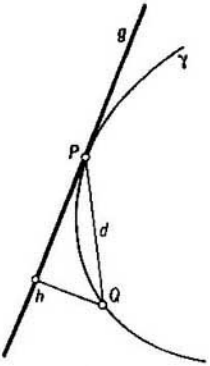


Fig. 8

donde e_1, e_2 y e_3 son vectores unitarios cuyas direcciones coinciden con las de los ejes de coordenadas x, y y z.

§ 2. Tangente a una curva

Sean γ una curva, P un punto de la misma y g una recta que pasa por el punto P. Tomemos sobre la curva un punto Q y designemos por d y h sus distancias hasta el punto P y la recta g, respectivamente.

Diremos que la recta g es *tangente* a la curva γ en el punto P si $\frac{h}{d} \to 0$ cuando $Q \to P$ (fig. 8).

Si la curva γ tiene tangente en el punto P, la recta PQ tiende hacia esta tangente cuando $Q \to P$. Recíprocamente, si la recta PQ tiende hacia una recta g cuando $Q \to P$, esta última es la tangente. Para demostrar esta afirmación basta observar que $\frac{h}{d}$ es el seno del ángulo que forman las rectas g y PQ.

Teorema. Una curva suave γ tiene en todo punto una tangente y ésta es única. Si

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

es la ecuación vectorial de la curva, la tangente en el punto P, correspondiente al valor t del parámetro, tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}'(t)$.

Demostración. Supongamos que la curva γ tiene una tangente g en el punto P, correspondiente al valor t del parámetro. Sea $\boldsymbol{\tau}$ el vector unitario cuya dirección es la de la recta g. La distancia d entre el punto Q, correspondiente al valor $t+\Delta t$ del parámetro, y el punto P es igual a $|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|$. La distancia h del punto Q a la tangente es igual a $|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|$. Según la definición de tangente,

$$\frac{h}{d}=\frac{|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}\to 0 \text{ para } \Delta t\to 0.$$

Pero

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}=\frac{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\times\boldsymbol{\tau}\right|}{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\right|}\to\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{r}'(t)|}.$$

De aquí resulta que

$$\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{\tau}=0.$$

Pero esto es posible sólo si el vector $\boldsymbol{\tau}$ tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}'(t)$. Por lo tanto, si la tangente existe, tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}'(t)$ y, por consiguiente, es única.

También es cierto que la recta g que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector $\boldsymbol{r}'(t)$ es la tangente, ya que para esta recta, según los razonamientos anteriores, se tiene

$$\frac{h}{d}=\frac{\left|(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\times\dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\right|}{|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|}\to\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}'(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^2}=0.$$

Hemos demostrado completamente el teorema.

Conociendo la dirección de la tangente, es fácil encontrar su ecuación. Efectivamente, si la curva está dada por la ecuación vectorial $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, el vector $\tilde{\boldsymbol{r}}$ de un punto arbitrario de la tangente puede ser representado así:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}(t)+\lambda\boldsymbol{r}'(t).$$

Esta es precisamente la ecuación de la tangente en la forma paramétrica (siendo λ el parámetro).

Deduzcamos la ecuación de la tangente para los distintos casos de la representación analítica de la curva.

Supongamos que la curva está dada por las ecuaciones en forma paramétrica

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Esta representación equivale a la representación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\, \boldsymbol{e}_1 + y(t)\, \boldsymbol{e}_2 + z(t)\, \boldsymbol{e}_3,$$

donde $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ son los vectores unitarios de los ejes de coordenadas. Sustituyendo la ecuación vectorial

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(t) + \lambda \boldsymbol{r}'(t)$$

por tres ecuaciones escalares, obtenemos las ecuaciones de la tangente en el caso de la representación paramétrica

$$\tilde{x} = x(t) + \lambda x'(t), \quad \tilde{y} = y(t) + \lambda y'(t),$$
$$\tilde{z} = z(t) + \lambda z'(t)$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{\tilde{x} - x(t)}{x'(t)} = \frac{\tilde{y} - y(t)}{y'(t)} = \frac{\tilde{z} - z(t)}{z'(t)}.$$

Si la curva es plana y viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

la ecuación de la tangente queda así:

$$\frac{\tilde{x} - x(t)}{x'(t)} = \frac{\tilde{y} - y(t)}{y'(t)}.$$

Si la curva viene dada por las ecuaciones

$$y = y(x), \quad z = z(x), \qquad (*)$$

la ecuación de la tangente se obtiene directamente de las ecuaciones de la tangente para el caso de la representación paramétrica de la curva. Basta observar que la representación de la curva por medio de las ecuaciones (*) equivale a la representación paramétrica

$$x = t, \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Las ecuaciones de la tangente para la curva dada por las ecuaciones (*) quedan así:

$$\tilde{x}-x=\frac{\tilde{y}-y(x)}{y'(x)}=\frac{\tilde{z}-z(x)}{z'(x)}$$

o, en forma equivalente,

$$\tilde{y}=y(x)+y'(x)(\tilde{x}-x),$$
$$\tilde{z}=z(x)+z'(x)(\tilde{x}-x).$$

En particular, si la curva es plana y viene dada por la ecuación $y=y(x)$, la ecuación de la tangente a esta curva será

$$\tilde{y}=y(x)+y'(x)(\tilde{x}-x).$$

Encontremos, por último, la ecuación de la tangente para la curva definida mediante las ecuaciones

$$\varphi(x,\ y,\ z)=0, \quad \psi(x,\ y,\ z)=0$$

en el punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ en el cual el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix}\varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}$$

es igual a dos. Sea

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

una parametrización regular de la curva en un entorno del punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

La ecuación de la tangente a la curva en el punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ es

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{x'_0}=\frac{\tilde{y}-y_0}{y'_0}=\frac{\tilde{z}-z_0}{z'_0}.$$

Es decir, para obtener las ecuaciones de la tangente basta conocer las razones $x'_0 : y'_0 : z'_0$. Calculemos estas razones. Tenemos las identidades

$$\varphi(x(t),\ y(t),\ z(t))\equiv 0 \quad \text{y} \quad \psi(x(t),\ y(t),\ z(t))_0\equiv 0.$$

Derivando respecto a t estas identidades, encontramos:

$$\varphi_x x'+\varphi_y y'+\varphi_z z'=0,$$
$$\psi_x x'+\psi_y y'+\psi_z z'=0.$$

De aquí resulta

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}}=\frac{y'}{\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}}=\frac{z'}{\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}}$$

y la ecuación de la tangente toma la forma

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}}=\frac{\tilde{y}-y_0}{\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}}=\frac{\tilde{z}-z_0}{\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}},$$

donde las derivadas $\varphi_x, \varphi_y, \ldots, \psi_z$ se calculan en el punto de tangencia (x_0, y_0, z_0).

Si la curva es plana y viene dada por la ecuación $\varphi(x, y) = 0$, la ecuación de la tangente será

$$\frac{\tilde{x}-x_0}{\varphi_y}=\frac{\tilde{y}-y_0}{-\varphi_x}.$$

Para deducir esta ecuación basta observar que la representación de la curva en el plano xy mediante la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ equivale a su representación en el espacio mediante las ecuaciones

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad z = 0.$$

Se denomina plano *normal* a una curva en un punto P el plano que pasa por el punto P y que es perpendicular a la tangente en este punto. No ofrece dificultad encontrar la ecuación de este plano una vez obtenida la ecuación de la tangente para cualquier caso de representación analítica de la curva; proponemos esto como un ejercicio sencillo.

§ 3. Plano osculador a una curva

Sean γ una curva, P un punto de la misma y α un plano que pasa por el punto P. Designemos por h la distancia entre un punto arbitrario Q de la curva y el plano α y por d la distancia de este punto al punto P.

Diremos que el plano α es un plano *osculador* a la curva γ en el punto P si la razón $\frac{h}{d^2} \to 0$ cuando $Q \to P$ (fig. 9).

Teorema. Una curva γ regular (por lo menos dos veces continuamente diferenciable) tiene en todo punto un plano

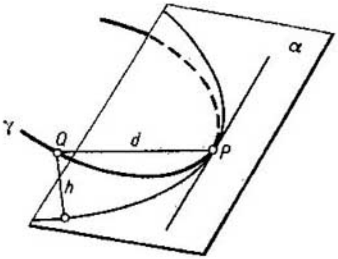


Fig. 9

osculador con la particularidad de que el plano osculador es único o bien es osculador cualquier plano que contiene la tangente a la curva. Si

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$$

es la ecuación de la curva γ, *el plano osculador en el punto correspondiente al valor* t *del parámetro es paralelo a los vectores* $\boldsymbol{r}'(t)$ *y* $\boldsymbol{r}''(t)$.

Demostración. Sea α el plano osculador a la curva γ en el punto P correspondiente al valor t del parámetro. Designemos por $\boldsymbol{e}$ el vector unitario de la normal al plano α. La distancia entre el punto Q, correspondiente al valor $t + \Delta t$ del parámetro, y el plano α es

$$h = |\,\boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{r}\,(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}\,(t))\,|.$$

La distancia de este punto al punto P es

$$d = |\,\boldsymbol{r}\,(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}\,(t)\,|.$$

Tenemos

$$\frac{h}{d^2} = \frac{|\,\boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{r}\,(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}\,(t))\,|}{(\boldsymbol{r}\,(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}\,(t))^2} =$$

$$= \frac{\left|\,\boldsymbol{e}\left(\boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t + \frac{\boldsymbol{r}''(t)}{2}\,\Delta t^2 + \varepsilon_1 \Delta t^2\right)\right|}{(\boldsymbol{r}'(t)\,\Delta t + \varepsilon_2 \Delta t)^2} =$$

$$= \frac{\left|\frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}'(t)}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}''(t)}{2} + \varepsilon_1'\right|}{\boldsymbol{r}'^2(t) + \varepsilon_2'}.$$

Puesto que $|\boldsymbol{r}'(t)|\neq 0$ y $\frac{h}{d^2}\to 0$, ε_1' y $\varepsilon_2'\to 0$ cuando $\Delta t\to 0$, resulta que $\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}'(t)=0$ y $\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}''(t)=0$. Es decir, si el plano osculador existe, los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ son paralelos al mismo.

Es fácil persuadirse de que el plano osculador existe siempre. Tomemos con este fin el plano α paralelo a los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ (en cuanto al vector nulo, aceptamos que cualquier plano le es paralelo). Entonces $\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}'(t)=$ $=\boldsymbol{e}\boldsymbol{r}''(t)=0$ y, por consiguiente,

$$\frac{h}{d^2}=\frac{|\varepsilon_1'|}{r'^2(t)+\varepsilon_2'}\to 0 \text{ cuando } \Delta t\to 0.$$

Por lo tanto, en todo punto de una curva existe el plano osculador. Es obvio que el plano osculador, siendo paralelo a los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$, es único si los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ no son paralelos. En cambio, si estos vectores son paralelos (o el vector $\boldsymbol{r}''(t)=0$), cualquier plano que comprenda la tangente a la curva será un plano osculador.

Hemos demostrado el teorema.

Obtengamos la ecuación del plano osculador. Sea $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ la ecuación vectorial de la curva y sea t el valor del parámetro correspondiente al punto P de la curva. Supongamos que en este punto los vectores $\boldsymbol{r}'(t)$ y $\boldsymbol{r}''(t)$ no son paralelos. Entonces $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$ será el vector de la normal al plano osculador. Si designamos por $\tilde{\boldsymbol{r}}$ el vector de un punto cualquiera del plano osculador referente al punto P, los vectores $\tilde{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}(t)$ y $\boldsymbol{r}'(t)\times$ $\times\boldsymbol{r}''(t)$ resultan perpendiculares. De aquí que la ecuación del plano osculador sea

$$(\tilde{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}(t))(\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t))=0$$

o

$$(\tilde{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}(t),\ \boldsymbol{r}'(t),\ \boldsymbol{r}''(t))=0.$$

Para el caso de la representación paramétrica de la curva

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),$$

de esta ecuación se obtiene la ecuación del plano osculador en la forma

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}-x(t) & \tilde{y}-y(t) & \tilde{z}-z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}=0.$$

Dejamos a cargo del lector la deducción de las ecuaciones del plano osculador en los restantes casos de la representación analítica de una curva.

Toda recta que pasa por un punto de la curva y es perpendicular a la tangente se denomina *normal* a la curva. En el caso en el que el plano osculador es único, entre estas rectas destacan dos rectas notables: *la normal principal*, que es la normal perteneciente al plano osculador, y *la binormal*, que es la normal perpendicular al plano osculador. Puesto que ya se conocen las ecuaciones de la tangente y del plano osculador, no ofrece dificultad deducir las ecuaciones de la normal principal y de la binormal; a título de ejercicio proponemos al lector obtener estas ecuaciones.

§ 4. Contacto de curvas

Sean γ y γ' dos curvas elementales con un punto común O. Tomemos en la curva γ' un punto P y designemos por h su distancia hasta la curva γ y por d, su distancia al punto O.

Diremos que la curva γ' tiene con la curva γ en el punto O un *contacto de orden n* si la razón

$$\frac{h}{d^n}\to 0 \quad \text{cuando } P\to O \text{ (fig. 10).}$$

Sean γ y γ' dos curvas generales con un punto común O. Diremos que la curva γ' tiene con la curva γ en el punto O un contacto de orden n si un entorno elemental del punto O de la curva γ' tiene un contacto de orden n con un entorno elemental de la curva γ.

Teorema. Sean γ y γ' dos curvas regulares planas, $\varphi(x, y)=0$ la ecuación de la curva γ y $x=x(t)$, $y=$ $=y(t)$ las ecuaciones de la curva γ'. Supongamos que $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$ en el punto $O(x_0, y_0)$. Entonces para que

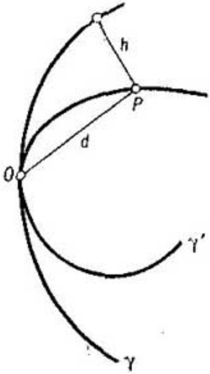


Fig. 10

la curva γ' tenga en el punto O un contacto de orden n con la curva γ, es necesario y suficiente que para el valor t correspondiente al punto O se cumplan las condiciones:

$$\varphi(x(t),\ y(t)) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t),\ y(t)) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(x(t),\ y(t)) = 0.$$

Demostración. Sea M un punto de la curva γ'. Por definición, su distancia $h(M)$ hasta la curva γ es el extremo inferior de las distancias de los puntos de la curva γ al punto M. Si los puntos M y O son suficientemente próximos, este extremo inferior se alcanza en un punto $\overline{M}$ de la curva γ.

Demostremos que el segmento $M\overline{M}$ va en dirección de la normal a la curva γ en el punto $\overline{M}$. En efecto, sea $\bar{r}(s)$ el vector de un punto de la curva γ y sea $\boldsymbol{m}$ el vector del punto M. El cuadrado de la distancia entre el punto M

y el punto de la curva es igual a $(\overline{r}(s)-m)^2$. Para el valor de s correspondiente al mínimo de esta distancia, tenemos

$$\frac{d}{ds}(\overline{r}(s)-m)^2=0,$$

de donde $(\overline{r}(s)-m)\,\overline{r}'(s)=0$ lo que significa que el vector $M\overline{M}$ va en dirección de la normal a la curva γ en el punto $\overline{M}$.

Sean ξ y η los cosenos directores de la recta $M\overline{M}$. Las coordenadas del punto $\overline{M}$ se pueden expresar a través de las coordenadas del punto M del modo siguiente:

$$\overline{x}=x+\xi h \quad \text{e} \quad \overline{y}=y+\eta h,$$

donde h es la distancia entre el punto M y la curva γ.

Las coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ del punto $\overline{M}$ satisfacen, por ser éste un punto de la curva γ, la ecuación $\varphi(x, y)=0$. Es decir,

$$\varphi(x+\xi h,\ y+\eta h)=0.$$

De aquí resulta que

$$\varphi(x, y)+\xi h\varphi_x(x, y)+\eta h\varphi_y(x, y)+h^2R=0,$$

donde R es una magnitud acotada en un entorno del punto $O(x_0, y_0)$.

Si $x\to x_0$ e $y\to y_0$, la expresión $\xi\varphi_x+\eta\varphi_y$ tiende a un límite distinto de cero ya que representa el producto escalar de dos vectores de coordenadas ξ, η y φ_x, φ_y que en el límite son distintos de cero y están dirigidos según la normal a la curva γ en el punto O. Por lo tanto, la magnitud $h=\dfrac{-\varphi}{\xi\varphi_x+\eta\varphi_y}-h^2R'$ es del mismo orden que φ cuando $M\to O$.

Supongamos que el punto M de la curva γ' corresponde al valor t del parámetro. Entonces, su distancia al punto O, igual a

$$|\,r(t)-r(t_0)\,|=|\,(t-t_0)(r'(t_0)+\varepsilon)\,|,$$

es de orden $|\,t-t_0\,|$ si M es suficientemente próximo a O. De aquí se deduce que para que la curva γ' tenga con la curva γ en el punto O un contacto de orden n

es necesario y suficiente que

$$\frac{\varphi(x(t)),\ y(t))}{(t-t_0)^n} \to 0 \text{ cuando } t \to t_0.$$

Pero esto significa que en el desarrollo de la función $\varphi(x(t),\ y(t))$ según las potencias de $(t-t_0)$ todos los términos hasta el n-ésimo inclusive son iguales a cero.

Hemos demostrado el teorema.

Ejemplo. Hallar la parábola de tipo

$$y-(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=0$$

que tenga un contacto de orden n con la curva

$$y=\varphi(x)$$

en el punto $(0,\ \varphi(0))$.

Según el teorema, para $x=0$ y $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$

$$\frac{d^k}{dx^k}(\varphi(x)-a_0-a_1x-\ldots-a_nx^n)=0,$$

de donde

$$a_0=\varphi(0),\ a_1=\varphi'(0),\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0).$$

La parábola buscada es

$$y=\varphi(0)+\varphi'(0)\,x+\frac{1}{2}\varphi''(0)\,x^2+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)\,x^n.$$

§ 5. Envolvente de una familia de curvas dependientes de un parámetro

Sea $S\ \{\gamma_\alpha\}$ una familia de curvas suaves en el plano dependientes de un parámetro α. Una curva suave γ se denomina *envolvente* de la familia S si en cada uno de sus puntos es tangente al menos a una curva de la familia y si cualquier segmento de la misma es tangente a un conjunto infinito de curvas de la familia (fig. 11).

Ejemplo. Una curva suave carente de partes rectilíneas es la envolvente de sus tangentes.

El teorema que viene a continuación resuelve en cierta medida el problema sobre la determinación de la envolvente.

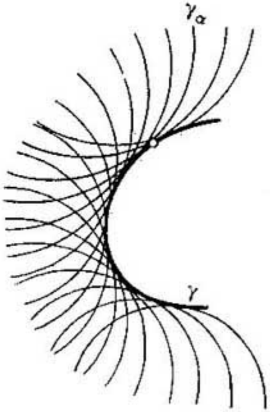


Fig. 11

Teorema. Supongamos que las curvas γ_α *de la familia S vienen dadas en una región G por las ecuaciones*

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, \quad a \leqslant \alpha \leqslant b,$$

donde φ *es una función continuamente diferenciable respecto a todos los argumentos que satisface la condición* $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$. *Entonces la envolvente* γ *de la familia S (si es que existe) se determina por las ecuaciones*

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0 \quad y \quad \varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

en el sentido de que para todo punto (x, y) *de la envolvente se puede indicar un valor* α *tal que el sistema de los valores* x, y, *y* α *satisfará ambas ecuaciones* $\varphi = 0$ *y* $\varphi_\alpha = 0$.

Demostración. Sea P (x, y) *un punto cualquiera de la envolvente* γ. *Pueden presentarse dos casos:*

1. Hay un conjunto infinito de curvas $\gamma_{\alpha_1}, \gamma_{\alpha_2}, \ldots$ de la familia tangentes en el punto P.

2. Hay sólo un número finito de curvas $\gamma_{\alpha_1}, \ldots, \gamma_{\alpha_n}$ de la familia tangentes en el punto P.

Analicemos el primer caso. Sin perder generalidad, podemos aceptar que la sucesión de números α_k converge a un número α_0 ($a \leqslant \alpha_0 \leqslant b$). Puesto que el punto P pertenece a cada una de las curvas $\gamma_{\alpha k}$, se tiene $\varphi(x, y, \alpha_k) = 0$. De aquí que

$$\varphi(x, y, \alpha_k) - \varphi(x, y, \alpha_l) = (\alpha_k - \alpha_l)\,\varphi_\alpha(x, y, \alpha^*) = 0,$$

donde α^* está comprendido entre α_k y α_l. Por consiguiente, $\varphi_\alpha(x, y, \alpha^*) = 0$. Pero α_k y $\alpha_l \to \alpha_0$ cuando k y $l \to \infty$; por esto,

$$\varphi(x, y, \alpha_0) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_\alpha(x, y, \alpha_0) = 0$$

y en el primer caso queda demostrado el teorema.

Consideremos el segundo caso. Supongamos que el teorema es falso y que, por consiguiente, $\varphi_\alpha(x, y, \alpha_k) \neq 0$ para cualquier α_k ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Designemos por ω_k^ε un ε-entorno cerrado del punto α_k en el segmento (a, b) y por δ un segmento pequeño de la envolvente γ que comprende el punto P. Si fijamos ε y tomamos δ suficientemente pequeño, para toda curva γ_α tangente a δ el valor α pertenecerá a uno de los entornos ω_k^ε. Si aceptamos lo contrario, llegaremos fácilmente a la conclusión de que en el punto P es tangente a la curva γ una curva de la familia distinta de las $\gamma_{\alpha k}$ lo cual es imposible.

Designemos por m_k el conjunto de puntos del segmento δ en los que son tangentes las curvas γ_α con $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$. Es obvio que m_k es un conjunto cerrado. Formemos el segmento $\bar{\delta}$, perteneciente a δ, que respecto a cada uno de los conjuntos m_k posee la siguiente propiedad: o bien el conjunto m_k comprende todo el segmento $\bar{\delta}$, o bien no contiene ningún punto del mismo. Es fácil construir el segmento $\bar{\delta}$. Primero construimos el segmento δ' tomando $\delta' = \delta$ si el segmento δ está íntegramente contenido en m_1, o tomando para δ' un segmento en el conjunto $\delta - m_1$ complementario de m_1 si δ no queda cubierto por m_1. Después, a partir del segmento δ' y del conjunto m_2, construimos de un modo análogo el segmento δ'', etc. Con un número finito de semejantes construcciones llegaremos a obtener el segmento $\overline{\delta}$ que posee las propiedades señaladas.

Supongamos que el conjunto m_k contiene el segmento $\overline{\delta}$. Siendo ε suficientemente pequeño, en un entorno del punto P la familia de curvas γ_α con $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ puede ser definida mediante la ecuación

$$\psi(x, y) = \alpha,$$

donde $\psi(x, y)$ es una función continuamente diferenciable que satisface la condición $\psi_x^2 + \psi_y^2 \neq 0$. Esto resulta de nuestra hipótesis de que $\varphi_\alpha(x, y, \alpha_k) \neq 0$ en el punto P.

La curva γ en el segmento $\overline{\delta}$ puede ser definida mediante las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuamente diferenciables que cumplen la condición $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Designemos por $\alpha(t)$ el valor del parámetro $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ que corresponde a la curva γ_α tangente al segmento $\overline{\delta}$ en el punto $(x(t), y(t))$. Es obvio que

$$\alpha(t) = \psi(x(t), y(t))$$

es una función continuamente diferenciable. Tenemos

$$\alpha' = \psi_x x' + \psi_y y'.$$

Puesto que x' e y' son los componentes del vector tangente a la curva γ, ψ_x y ψ_y son los componentes del vector de la normal a la curva $\gamma_{\alpha(t)}$ y puesto que las curvas $\gamma_{\alpha(t)}$ y γ son tangentes en el punto (t), resulta que $\alpha' = 0$ y, por consiguiente, $\alpha = \text{const}$.

Es decir, sólo una curva de la familia γ_α con $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ es tangente a la curva γ a lo largo del segmento $\overline{\delta}$ y, por consiguiente, en toda la familia S hay a lo sumo n curvas de este tipo. Pero, según la definición de la envolvente, debe haber un conjunto infinito. Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado el teorema.

Nota. El sistema de ecuaciones

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0 \text{ y } \varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

puede cumplirse, hablando en términos generales, para curvas que no son envolvente. Por ejemplo, la ecuación

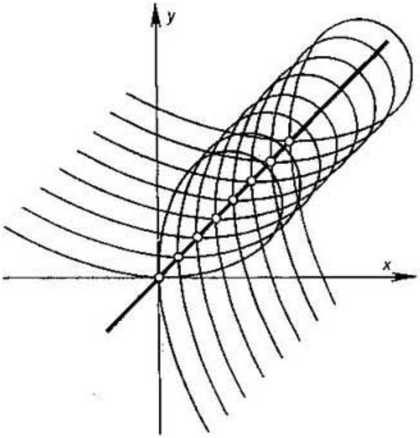


Fig. 12

de la envolvente de la familia de curvas

$$(x-\alpha)^3+(y-\alpha)^3-3(x-\alpha)(y-\alpha)=0$$

se verifica para la recta $x=y$ que, sin embargo, no es envolvente. Esta recta consta de los puntos múltiples de las curvas de la familia (fig. 12).

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO II

1. Para la hélice

$$x=\cos t,\ y=\operatorname{sen} t,\ z=t$$

hallar en el punto (1, 0, 0) las ecuaciones
a) de la tangente,
b) del plano osculador,
c) del plano normal,
d) de la normal principal,
e) de la binormal.

Respuesta. La ecuación de la tangente es

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1};$$

la ecuación del plano osculador es

$$y - z = 0;$$

la ecuación del plano normal es

$$y + z = 0;$$

la ecuación de la normal principal es

$$y = z = 0;$$

la ecuación de la binormal es

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

2. Determinar la ecuación de la tangente a la curva definida por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x$$

en el punto (0, 0, 1).

Respuesta.

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

3. Hallar la ecuación de la parábola de tipo

$$y = x^2 + ax + b$$

tangente en el punto (1, 1) a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Respuesta. $y = x^2 - 3x + 3$.

4. Hallar la curva $y = y(x)$ si se conoce que es constante e igual a a la longitud del segmento de la tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de intersección de la tangente con el eje x.

Respuesta. La tractriz

$$c \pm x = a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

5. Sobre las binormales de una hélice simple se toman segmentos de una misma longitud. Hallar la ecuación de la curva formada por los extremos de estos segmentos.

Respuesta. Una hélice.

6. ¿Bajo qué ángulos se cortan las curvas

$$xy = c_1 \text{ y } x^2 - y^2 = c_2?$$

7. Demostrar que si en el plano la curva γ se corta formando ángulo recto con las curvas de la familia

$$\varphi(x, y) = \text{const} \; (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0),$$

entonces esta curva satisface la ecuación

$$\frac{dx}{\varphi_x}=\frac{dy}{\varphi_y}.$$

8. Hallar la familia de curvas que cortan bajo un ángulo recto todas las circunferencias que pasan por dos puntos dados del plano.

Respuesta. Una familia de circunferencias.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene un contacto de orden dos con la parábola $y = x^2$ en su vértice.

Respuesta. $x^2 + y^2 = y$.

10. Hallar la envolvente de la familia de rectas que forman en el ángulo de coordenadas XOY triángulos de área $2a^2$.

Respuesta. La rama correspondiente al ángulo XOY de la hipérbola equilátera $xy = a^2$.

11. Hallar la envolvente de la familia de rectas sobre las cuales los ejes de coordenadas determinan un segmento de longitud constante a.

Respuesta. La astroide

$$|x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

12. Hallar la envolvente de las trayectorias de un punto material lanzado desde el origen de coordenadas con velocidad v_0.

Respuesta. La parábola de seguridad

$$y=-\frac{gx^2}{2v_0^2}+\frac{v_0^2}{2g}$$

g es la aceleración de la gravedad).

13. Hallar la envolvente de los rayos luminosos que parten del origen de coordenadas y son reflejados por la circunferencia

$$x^2+y^2=2ax.$$

Respuesta. El caracol de Pascal

$$(x^2+y^2-2ax)^2+\frac{4a^2}{3}\left(x^2+y^2-\frac{16ax}{9}\right)=0.$$

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO II

1. Sean γ una curva, P un punto de la misma y g una recta que pasa por dos distintos puntos R y S de la curva. Se dice que la curva γ tiene en el punto P una tangente en el sentido fuerte si las rectas g convergen a una recta g_P cuando R y $S \to P$.

Demostrar que toda curva suave posee en cada punto una tangente en el sentido fuerte y que ésta coincide con la tangente correspondiente a la definición habitual dada en el § 2.

Si la curva posee en cada punto una tangente en el sentido fuerte, la curva es suave.

2. Demostrar que si las tangentes a una curva suave pasan por un mismo punto, entonces la curva es un segmento de recta, una semirrecta o una recta.

3. Demostrar que las tangentes a la hélice

$$x = a\cos\omega t,\ y = a\operatorname{sen}\omega t,\ z = bt$$

forman ángulo constante con el plano xy. Demostrar que las normales principales de la hélice cortan el eje z.

4. Se denomina inversión la transformación para la cual los puntos correspondientes pertenecen a una misma semirrecta que arranca de un punto fijo S (centro de la inversión) siendo constante el producto de sus distancias a S. Demostrar que la inversión conserva los ángulos entre las curvas.

5. Demostrar que la curva es plana si las tangentes a la misma son paralelas a un plano.

6. ¿Bajo qué condición las rectas g_t

$$\begin{cases} a_1(t)x + b_1(t)y + c_1(t)z + d_1(t) = 0, \\ a_2(t)x + b_2(t)y + c_2(t)z + d_2(t) = 0, \end{cases}$$

son tangentes a la curva

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)?$$

Hallar esta curva

7. Hallar en el punto (x_0, y_0, z_0) la ecuación del plano osculador a la curva definida por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = 0 \text{ y } \psi(x, y, z) = 0.$$

8. Sean γ una curva, P un punto de la misma y α un plano que pasa por los tres distintos puntos Q, R y S de la curva. Se dice que la curva γ posee en el punto P un plano osculador en el sentido fuerte si los planos α convergen a un plano α_P cuando Q, R y $S \to P$.

Demostrar que toda curva regular (dos veces continuamente diferenciable) que en el punto P posee un plano osculador único en el sentido habitual (§ 3), tiene en dicho punto un plano osculador en el sentido fuerte y ambos coinciden.

9. Hallar la curva

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

a partir de sus planos osculadores

$$A(t)x + B(t)y + C(t)z + D(t) = 0.$$

10. Demostrar que la curva es plana si todos sus planos osculadores pasan por un mismo punto.

11. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que la curva

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

sea plana consiste en que

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

12. Demostrar que la propiedad de contacto de curvas es recíproca, o sea, si una curva suave γ_1 tiene un contacto de orden n con una curva suave γ_2, entonces la curva γ_2 tiene en el mismo punto un contacto de orden n con la curva γ_1.

Mostrar con un ejemplo que es substancial la exigencia de la suavidad.

13. Supongamos que las curvas γ_1, γ_2 y γ_3 poseen un punto común P en el que las curvas γ_1 y γ_2 y las curvas γ_2 y γ_3 tienen un contacto de orden n. Entonces las curvas γ_1 y γ_3 también tienen un contacto de orden n en el punto P.

14. Demostrar que es plana toda curva que en cada uno de sus puntos tiene un contacto de orden tres con el plano osculador.

15. Entre los puntos de los ejes de coordenadas x e y se ha establecido una correspondencia proyectiva

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},\quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Demostrar que la familia de las rectas que unen los puntos correspondientes de los ejes envuelve una curva de segundo grado.

16. Demostrar que si una familia monoparamétrica de curvas en el plano viene definida por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0 \text{ y } f(\alpha, \beta) = 0$$

siendo $f_\alpha^2 + f_\beta^2 \neq 0$, entonces la envolvente de esta familia satisface las ecuaciones

$$\varphi = 0,\ f = 0,\ \varphi_\alpha + \lambda f_\alpha = 0 \ y\ \varphi_\beta + \lambda f_\beta = 0$$

en el sentido de que para todo punto (x, y) de la envolvente se pueden indicar unos valores α, β y λ que junto con x e y satisfacen las cuatro ecuaciones señaladas.

La ecuación de la envolvente en forma implícita puede obtenerse por eliminación de α, β y λ de estas cuatro ecuaciones.

CAPITULO III

CUESTIONES DE LA TEORIA DE CURVAS RELACIONADAS CON LOS CONCEPTOS DE CURVATURA Y DE TORSION

§ 1. Longitud de arco de una curva. Parametrización intrínseca

Sea γ una curva elemental, o sea, la imagen de un segmento abierto g obtenida por una aplicación topológica f. Respecto a la quebrada Γ (fig. 13) diremos que *está bien inscrita* en la curva γ si las preimágenes de sus vértices sobre g tienen el mismo orden que en la quebrada. La propiedad de una quebrada de estar bien inscrita en la curva no depende del homeomorfismo f. Se dice que la curva es *rectificable en un entorno del punto P* si existe un entorno elemental de este punto tal que todas las quebradas bien inscritas en él resultan uniformemente acotadas en cuanto a la longitud. Una curva rectificable en un entorno de cada uno de sus puntos se denomina simplemente *rectificable*.

Entenderemos por segmento de una curva una porción de la misma homeomorfa a un segmento rectilíneo cerrado. Denominaremos *longitud de arco de un segmento* (o simplemente longitud de arco) el extremo superior de las longitudes de todas las quebradas bien inscritas en este segmento.

Teorema. Toda curva suave γ es rectificable. Si

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

es una parametrización suave de la curva y $\tilde{\gamma}$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ es un segmento de la curva γ, entonces la longitud de este segmento es

$$s(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt.$$

Demostración. Sea P un punto cualquiera de la curva y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ una parametrización suave de la curva en un entorno de este punto. Estimemos la longitud de una quebrada Γ bien inscrita en el entorno $\alpha < t < \beta$ del punto P.

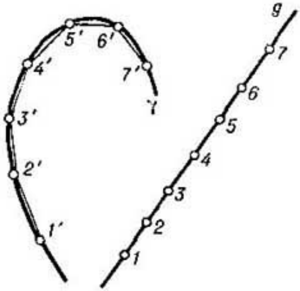


Fig. 13

Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n$ los valores del parámetro correspondientes a los vértices sucesivos de la quebrada. La longitud del lado de la quebrada que une los vértices (t_{i-1}) y (t_i) es igual a $|\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|$. La longitud de toda la quebrada es

$$s(\Gamma) = \sum_i |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|.$$

Tenemos

$$\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{r}'(t)\,dt.$$

De aquí resulta

$$|\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \leqslant (t_i - t_{i-1})\,M,$$

donde M es una constante que satisface la condición $|\boldsymbol{r}'(t)| \leqslant M$. Por consiguiente

$$s(\Gamma) \leqslant M \sum (t_i - t_{i-1}) = M(\beta - \alpha).$$

Es decir, las quebradas Γ, inscritas en un entorno suficientemente pequeño del punto P, están acotadas en conjunto y, por consiguiente, la curva γ es rectificable.

Determinemos la longitud de un segmento $\tilde{\gamma}$ de una curva γ definido por la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Observemos, ante todo, que repitiendo literalmente el razonamiento anterior podemos probar que son uniformemente acotadas las longitudes de las quebradas inscritas en el segmento $\tilde{\gamma}$. Por consiguiente, la longitud de arco del segmento $\tilde{\gamma}$ es finita.

Inscribamos en el segmento $\tilde{\gamma}$ una quebrada Γ que satisfaga las condiciones siguientes: 1) la longitud de la quebrada Γ difiere a lo sumo en ε de la longitud de arco del segmento $\tilde{\gamma}$; 2) para todo i es $|t_{i+1} - t_i| < \delta$. Aquí ε y δ son números positivos cualesquiera. Es fácil ver que tal quebrada existe. En efecto, por definición de la longitud de arco de un segmento de curva, existe una quebrada que cumple la primera condición. Agregándole nuevos vértices no alteraremos la primera condición y, al mismo tiempo, podremos cumplir la segunda. Además, podemos aceptar que el primer vértice de la quebrada coincide con el punto (a) y el último, con el punto (b).

Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_i |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| &= \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt + \\ &+ \left\{\sum_i (t_i - t_{i-1})\,|\boldsymbol{r}'(t_i)| - \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt\right\} + \\ &+ \left\{\sum_i |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| - \sum_i (t_i - t_{i-1})\,|\boldsymbol{r}'(t_i)|\right\}. \qquad (*)\end{aligned}$$

Por el modo de construir Γ, el primer miembro de esta igualdad difiere de $s(\tilde{\gamma})$ en ε a lo sumo. En cuanto al segundo miembro, es tan próximo a

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

como se quiera. En efecto, por definición de la integral, el segundo término de este miembro es pequeño si lo es δ. El tercer término puede ser representado en la forma

$$\sum\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \boldsymbol{r}'(t)\,dt\right| - \sum\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\boldsymbol{r}'(t_i)|\,dt$$

y, por consiguiente, su valor absoluto no pasa de

$$\sum\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\boldsymbol{r}'(t)-\boldsymbol{r}'(t_i)|\,dt=\int_a^b \varepsilon(t)\,dt,$$

donde $\varepsilon(t)\to 0$ cuando $\delta\to 0$ en virtud de que la función $\boldsymbol{r}'(t)$ es uniformemente continua. Luego, el tercer término de la igualdad (*) es pequeño si lo es δ.

Es decir, llegamos a la conclusión de que la longitud del segmento $\tilde{\gamma}$ de la curva γ difiere tan poco como se quiera de

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

y, por consiguiente, es igual a esta integral.

Hemos demostrado completamente el teorema.

Sean γ una curva rectificable y $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ una parametrización de la misma. Sea $s(t)$ la longitud de arco del segmento t_0t de la curva γ. Definamos la función $\sigma(t)$ mediante las condiciones

$$\sigma(t)=s(t) \text{ si } t_0<t,$$
$$\sigma(t)=-s(t) \text{ si } t_0>t,$$
$$\sigma(t_0)=0.$$

La función $\sigma(t)$ es estrictamente monótona. Por esto, podemos tomar σ como parámetro de la curva. Denominaremos esta parametrización *intrínseca*.

Teorema. La parametrización intrínseca de una curva regular (k veces diferenciable o analítica) sin puntos singulares es una parametrización regular (k veces diferenciable o analítica, respectivamente). Si $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\sigma)$ es la parametrización intrínseca de una curva, entonces

$$|\boldsymbol{r}'(\sigma)|=1.$$

Demostración. Sea $\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ una parametrización regular cualquiera de la curva γ en un entorno de un punto arbitrario correspondiente al valor σ_1 del parámetro. Para todo segmento perteneciente a este entorno tenemos

$$\sigma - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}\, dt.$$

Puesto que $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{r}}'^2(t)} > 0$ y $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ es una función k veces diferenciable de t, resulta que t es una función k veces diferenciable de σ. Pero para σ próximos a σ_1 se tiene $\boldsymbol{r}(\sigma) = \tilde{\boldsymbol{r}}(t(\sigma))$. De aquí se deduce que $\boldsymbol{r}(\sigma)$ es una función regular (k veces diferenciable). Tenemos

$$\frac{\delta \boldsymbol{r}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\sigma} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\left| \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} \right|}.$$

Por consiguiente,

$$\boldsymbol{r}'(\sigma) = 1.$$

Hemos demostrado el teorema.

Para terminar, daremos las fórmulas que permiten calcular la longitud de arco de una curva regular para los distintos casos de la representación analítica de la curva.

1. Si la curva viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

entonces

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

2. Si la curva viene dada por las ecuaciones

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

entonces

$$s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx.$$

En el caso de curvas planas pertenecientes al plano xy, en estas fórmulas hay que poner $z' = 0$.

§ 2. Curvatura de una curva

Sea P un punto cualquiera de una curva regular γ y sea Q un punto de la curva próximo a P. Designemos por $\Delta\vartheta$ el ángulo entre las tangentes a la curva en los puntos P y Q y por $|\Delta s|$ la longitud de arco del segmento PQ de la curva (fig. 14).

Denominaremos *curvatura* de la curva γ en el punto P el límite de la razón $\Delta\vartheta\,(|\Delta s|)^{-1}$ cuando $Q \to P$.

Teorema. Toda curva regular (dos veces continuamente diferenciable) tiene en cada punto una curvatura determinada k_1. Si

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

es la parametrización intrínseca de la curva, entonces

$$k_1 = |\boldsymbol{r}''(s)|.$$

Demostración. Supongamos que los puntos P y Q corresponden a los valores s y $s + \Delta s$ del parámetro. El ángulo $\Delta\vartheta$ es igual al ángulo entre los vectores unitarios tangentes $\boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$ y $\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s) = \boldsymbol{r}'(s + \Delta s)$.

Puesto que los vectores $\boldsymbol{\tau}(s)$ y $\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s)$ son unitarios y forman ángulo $\Delta\vartheta$, resulta que $|\boldsymbol{\tau}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)| = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}$ (fig. 15). Por ello

$$\frac{|\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s) - \boldsymbol{\tau}(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Observando que $\Delta\vartheta \to 0$ cuando $|\Delta s| \to 0$ debido a la continuidad de $\boldsymbol{\tau}(s)$ y pasando al límite, encontramos

$$|\boldsymbol{r}''(s)| = k_1.$$

Hemos demostrado el teorema.

Sea la curvatura distinta de cero en un punto dado de la curva. Consideremos el vector $\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{k_1}\boldsymbol{r}''(s)$. El vector $\boldsymbol{\nu}$ es unitario y se encuentra en el plano osculador a la curva (§ 3 del capítulo II). Además, este vector es perpendicular al vector tangente $\boldsymbol{\tau}$ ya que $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\nu}k_1 = 0$. Es decir, este vector

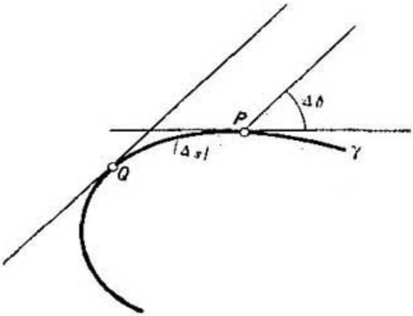


Fig. 14

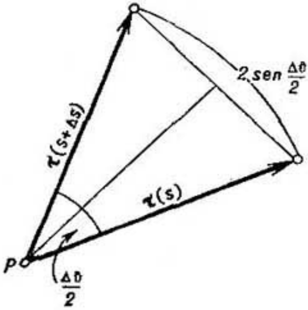


Fig. 15

tiene la dirección de la normal principal a la curva. Es evidente que la dirección del vector $\mathbf{v}$ no cambia si se modifica el origen de referencia de los arcos s o el sentido del recorrido. Al hablar en adelante del vector unitario de la normal principal de la curva, entenderemos por éste el vector $\mathbf{v}$.

Es obvio que el vector $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta}$ tiene la dirección de *la binormal* a la curva. Denominaremos este vector *vector unitario de la binormal a la curva.*

Hallemos la fórmula de la curvatura de una curva para cualquier parametrización. Supongamos que la curva viene dada por la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Expresemos la derivada segunda de la función vectorial $\boldsymbol{r}$ respecto al arco s en términos de las derivadas respecto a t. Tenemos

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_s s',$$

de donde

$$\boldsymbol{r}'^2 = s'^2.$$

Por consiguiente,

$$\boldsymbol{r}'_s = \frac{\boldsymbol{r}'}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}}.$$

Derivando esta igualdad una vez más respecto a t, obtenemos

$$\boldsymbol{r}''_{ss} s' = \frac{\boldsymbol{r}''}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2}} - \frac{(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'')\,\boldsymbol{r}'}{(\sqrt{\boldsymbol{r}'^2})^3}.$$

Elevando esta igualdad al cuadrado y observando que $s'^2 = \boldsymbol{r}'^2$, tendremos

$$k_1^2 = \frac{\boldsymbol{r}''^2\boldsymbol{r}'^2 - (\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'')^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3}$$

o, que viene a ser lo mismo,

$$k_1^2 = \frac{(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3}.$$

Para la curvatura de una curva dada por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

obtenemos de aquí

$$k_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}.$$

Si la curva es plana y se encuentra en el plano xy,

$$k_1^2 = \frac{(x''y' - y''x')^2}{(x'^2 + y'^2)^3}.$$

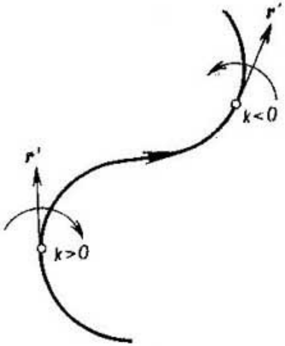


Fig. 16

Si la curva es plana y viene dada por la ecuación $y = y(x)$,

$$k_1^2 = \frac{y''^2}{(1+y'^2)^3}.$$

Nota. La curvatura de una curva es, por definición, no negativa. Para las curvas planas resulta conveniente en muchos casos asignar a la curvatura un signo considerándola en unos casos positiva y en otros, negativa. Esto se hace partiendo de que el vector $r'(t)$ tangente a la curva gira al desplazarse a lo largo de la curva en el sentido de los valores crecientes de t. *Según el sentido en que gira el vector $r'(t)$, la curvatura se considera positiva o bien negativa* (fig. 16). Si el signo de la curvatura de una curva plana se determina de este modo, para ella se obtiene la fórmula

$$k = \frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 - y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{o} \quad k = -\frac{x''y' - y''x'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En particular, si la curva viene dada por la ecuación $y = y(x)$, se tiene

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{o} \quad k = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Para terminar, hallemos todas las curvas que en cada punto tienen curvatura igual a cero. Tenemos

$$k_1 = |\boldsymbol{r}''(s)| = 0.$$

De aquí $\boldsymbol{r}''(s) = 0$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{a}s + \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son unos vectores constantes.

Es decir, *una curva cuya curvatura es siempre nula, es una recta o un segmento abierto de una recta.* La afirmación recíproca también es válida.

§ 3. Torsión de una curva

Sea P un punto cualquiera de una curva γ y sea Q un punto de la curva próximo a P. Designemos por $\Delta\vartheta$ el ángulo entre los planos osculadores a la curva en los puntos P y Q y por $|\Delta s|$, la longitud del segmento PQ de la curva. Entenderemos por torsión absoluta $|k_2|$ de la curva γ en el punto P el límite de la razón $\Delta\vartheta\,(|\Delta s|)^{-1}$ cuando $Q \to P$ (fig. 17).

Teorema. Toda curva regular (tres veces continuamente diferenciable) en cada punto en el que la curvatura es distinta de cero tiene una torsión absoluta $|k_2|$ determinada. Si

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

es la parametrización intrínseca de la curva, entonces

$$|k_2| = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{k_1^2}.$$

Demostración. Si en el punto P la curvatura de la curva γ es distinta de cero, también será, por continuidad, distinta de cero en los puntos próximos a P. En todo punto en el que la curvatura es distinta de cero, los vectores $\boldsymbol{r}'(s)$ y $\boldsymbol{r}''(s)$ son distintos de cero y no son paralelos. Por eso, en todo punto Q próximo a P existe un plano osculador determinado.

Sean $\boldsymbol{\beta}(s)$ y $\boldsymbol{\beta}(s + \Delta s)$ los vectores unitarios de la binormal en los puntos P y Q de la curva γ. El ángulo $\Delta\vartheta$ es igual al ángulo entre los vectores $\boldsymbol{\beta}(s)$ y $\boldsymbol{\beta}(s + \Delta s)$.

Puesto que los vectores $\boldsymbol{\beta}(s)$ y $\boldsymbol{\beta}(s + \Delta s)$ son unitarios y forman ángulo $\Delta\vartheta$, es $|\boldsymbol{\beta}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\beta}(s)| = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta\vartheta}{2}$.

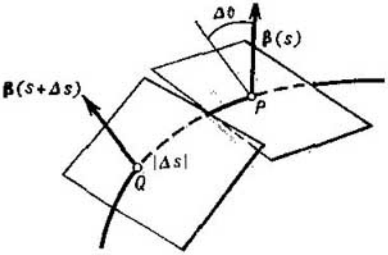


Fig. 17

Por eso

$$\frac{|\beta(s+\Delta s)-\beta(s)|}{|\Delta s|}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\Delta\vartheta}{2}}{|\Delta s|}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\cdot\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}.$$

Pasando al límite para $|\Delta s|\to 0$, obtenemos de aquí

$$|k_2|=|\beta'|.$$

El vector β' es perpendicular a β pues $\beta'\beta=\left(\frac{1}{k_2}\beta^2\right)'=$ $=0$. Es fácil ver que también es perpendicular a τ. En efecto,

$$\beta'=(\tau\times\nu)'=\tau'\times\nu+\tau]\times\nu'.$$

Pero $\tau'\parallel\nu$. Por esto $\beta'=\tau\times\nu'$, de donde resulta que β' es perpendicular a τ. Es decir, el vector β' es paralelo al vector ν y, por consiguiente,

$$|k_2|=|(\beta'\nu)|.$$

Tomando aquí $\nu=\frac{1}{k_1}r''$ y $\beta=\frac{r'\times r''}{k_1}$, obtenemos

$$|k_2|=\frac{|(r',r'',r''')|}{k_1^2}.$$

Hemos demostrado completamente el teorema.

Definamos ahora *la torsión* de una curva.

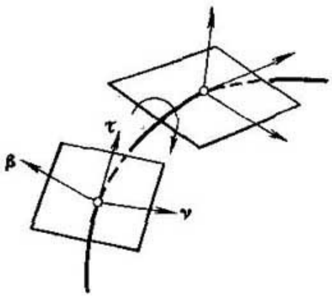


Fig. 18

Del paralelismo de los vectores $\boldsymbol{\beta}'$ y $\boldsymbol{\nu}$ se deduce que el plano osculador gira alrededor de la tangente a la curva cuando se desplaza a lo largo de la curva en el sentido de los valores crecientes de s. En vista de ello, *definiremos la torsión de la curva mediante la igualdad*

$$k_2 = \pm \mid k_2 \mid$$

y tomaremos el signo $(+)$ *si el plano osculador gira del vector* $\boldsymbol{\beta}$ *hacia el vector* $\boldsymbol{\nu}$ (fig. 18) *y el signo* $(-)$ *si gira del vector* $\boldsymbol{\nu}$ *hacia el vector* $\boldsymbol{\beta}$. Definiendo de este modo la torsión de la curva, tendremos $k_2 = \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\nu}$ o

$$k_2 = -\frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{k_1^2}.$$

Hallemos la fórmula para la torsión de una curva en el caso de cualquier parametrización regular $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Tenemos

$$\boldsymbol{r}'_s = \boldsymbol{r}'t', \quad \boldsymbol{r}''_{ss} = \boldsymbol{r}''t'^2 + \boldsymbol{r}'t'',$$
$$\boldsymbol{r}'''_{sss} = \boldsymbol{r}'''t'^3 + \{\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''\},$$

donde $\{\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''\}$ es una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{r}'$ y $\boldsymbol{r}''$. Introduciendo en la fórmula para k_2 las expresiones halladas para $\boldsymbol{r}'_s$, $\boldsymbol{r}''_{ss}$ y $\boldsymbol{r}'''_{sss}$ y observando que $t'^2 = \frac{1}{\boldsymbol{r}'^2}$, obtenemos

$$k_2 = -\frac{(r', r'', r''')}{(r' \times r'')^2}.$$

Para terminar este parágrafo, hallemos todas las curvas que en cada punto tienen torsión nula. Tenemos

$$k_2 = \beta' \nu = 0.$$

Como, además, $\beta' \tau = 0$ y $\beta' \beta = 0$, resulta que $\beta' = 0$, o sea, $\beta = \beta_0 = \text{const}$.

Los vectores τ y β son perpendiculares. Por esto, $r' \beta_0 = 0$. De aquí resulta $(r(s) - r_0)\beta_0 = 0$; ello significa que la curva se encuentra en el plano determinado por la ecuación vectorial $(r - r_0)\beta_0 = 0$.

Es decir, *toda curva cuya torsión es nula en cada punto, es una curva plana*. También es válida la afirmación recíproca.

§ 4. Fórmulas de Frenet. Ecuaciones intrínsecas de una curva

Las tres semirrectas que arrancan de un punto de la curva y tienen las direcciones de los vectores τ, ν y β son aristas de un ángulo triedro. Este ángulo triedro se denomina *triedro intrínseco*.

Para estudiar las propiedades de la curva en un entorno de un punto arbitrario P, en muchos casos resulta útil escoger el sistema cartesiano de coordenadas tomando como origen de coordenadas el punto P de la curva y como ejes de coordenadas, los ejes del triedro intrínseco. Más tarde obtendremos la ecuación de la curva respecto a este sistema de coordenadas.

Expresemos las derivadas de los vectores τ, ν y β respecto al arco de la curva en términos de los propios vectores τ, ν y β. Tenemos

$$\tau' = r'' = k_1 \nu.$$

Para hallar β' recordemos que el vector β' es paralelo al vector ν y que $\beta' \nu = k_2$. De aquí que

$$\beta' = k_2 \nu.$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{\nu}' = (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau})' = \boldsymbol{\beta}' \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}' = \\ = k_2\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau} + k_1\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu} = -(k_1\boldsymbol{\tau} + k_2\boldsymbol{\beta}).$$

Las fórmulas

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}' &= \phantom{-k_1\boldsymbol{\tau}} k_1\boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{\nu}' &= -k_1\boldsymbol{\tau} \quad -k_2\boldsymbol{\beta}, \\ \boldsymbol{\beta}' &= \phantom{-k_1\boldsymbol{\tau}} k_2\boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

se denominan *fórmulas de Frenet.*

Hallemos la descomposición del radio vector $\boldsymbol{r}(s + \Delta s)$ en un entorno de un punto arbitrario P correspondiente al arco s respecto a los ejes del triedro intrínseco en este punto. Tenemos

$$\boldsymbol{r}(s+\Delta s) = \boldsymbol{r}(s) + \Delta s \boldsymbol{r}'(s) + \frac{\Delta s^2}{2}\boldsymbol{r}''(s) + \frac{\Delta s^3}{6}\boldsymbol{r}'''(s) + \ldots$$

Pero en el punto P se tiene $\boldsymbol{r} = 0$, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{r}'' = k_1\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{r}''' = k_1'\boldsymbol{\nu} - k_1^2\boldsymbol{\tau} - k_1k_2\boldsymbol{\beta}$, ..., etc. Luego,

$$\boldsymbol{r}(s+\Delta s) = \left(\Delta s - \frac{k_1^2\Delta s^3}{6} + \ldots\right)\boldsymbol{\tau} + \\ + \left(\frac{k_1\Delta s^2}{2} + \frac{k_1'\Delta s^3}{6} + \ldots\right)\boldsymbol{\nu} + \left(-\frac{k_1k_2\Delta s^3}{6} + \ldots\right)\boldsymbol{\beta}.$$

Tomando como ejes x, y y z del sistema cartesiano de coordenadas la tangente, la normal principal y la binormal, obtenemos de aquí la ecuación de la curva referida a los ejes del triedro intrínseco

$$\begin{aligned} x &= \Delta s - \frac{k_1^2\Delta s^3}{6} + \ldots, \\ y &= \frac{k_1\Delta s^2}{2} + \frac{k_1'\Delta s^3}{6} + \ldots, \\ z &= -\frac{k_1k_2\Delta s^3}{6} + \ldots \end{aligned}$$

Las proyecciones de la curva sobre los planos del triedro intrínseco en un entorno de su vértice se determinan por los pares correspondientes de estas ecuaciones. El carácter de las proyecciones para $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$ puede verse en la fig. 19.

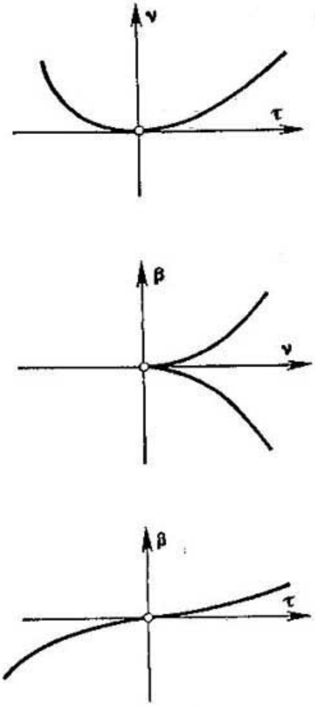


Fig. 19

Hemos visto que los coeficientes del desarrollo de la función $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$ en serie de potencias de Δs se expresan sólo a través de la curvatura y la torsión de la curva. Esto permite suponer que la curvatura y la torsión determinan en cierta forma la curva. Efectivamente, tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema. Sean $k_1(s)$ y $k_2(s)$ dos funciones regulares cualesquiera con la particularidad de que $k_1(s) > 0$. En, *tonces existe y es única, salvo la posición en el espacio, la curva para la cual $k_1(s)$ es la curvatura y $k_2(s)$ es la torsión en el punto correspondiente al arco s.*

Demostración. Si la curva, cuya existencia afirma el teorema, realmente existe, los vectores unitarios $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$, y $\boldsymbol{\beta}(s)$ de la tangente, la normal principal y la binormal satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \quad k_1\eta, \\ \eta' &= -k_1\xi \qquad -k_2\zeta, \\ \zeta' &= \quad k_2\eta \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

en virtud de las fórmulas de Frenet.

Por eso, para buscar la curva que nos interesa (de curvatura $k_1(s)$ y de torsión $k_2(s)$) resulta natural analizar las soluciones del sistema (*).

Sea $\xi(s)$, $\eta(s)$ y $\zeta(s)$ la solución de este sistema que satisface las condiciones iniciales $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ y $\zeta = \zeta_0$ para $s = s_0$, donde ξ_0, η_0 y ζ_0 son tres vectores unitarios recíprocamente perpendiculares de producto mixto $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = 1$.

Demostremos que para s cualquiera los vectores $\xi(s)$, $\eta(s)$ y $\zeta(s)$ son unitarios y recíprocamente perpendiculares y que $(\xi, \eta, \zeta) = 1$. Calculemos para ello $(\xi^2)'$, $(\eta^2)'$, $(\zeta^2)'$, $(\xi\eta)'$, $(\eta\zeta)'$ y $(\zeta\xi)'$. Empleando las ecuaciones del sistema, obtenemos para estas derivadas las expresiones siguientes:

$$(\xi^2)' = 2k_1(\xi\eta),\ (\xi\eta)' = k_1(\eta^2) - k_1(\xi^2) - k_2(\xi\zeta),$$
$$(\eta^2)' = -2k_1(\xi\eta) - 2k_2(\eta\zeta),\ (\eta\zeta)' = k_2(\eta^2) - {}$$
$$- k_2(\zeta^2) - k_1(\xi\zeta),$$
$$(\zeta^2)' = 2k_2(\eta\zeta),\ (\zeta\xi)' = k_1(\eta\zeta) + k_2(\xi\eta).$$

Considerando estas igualdades como un sistema de ecuaciones diferenciales para ξ^2, η^2, ζ^2, $\xi\eta$, $\eta\zeta$ y $\zeta\xi$, vemos que le satisfacen los valores $\xi^2 = 1$, $\eta^2 = 1$, $\zeta^2 = 1$, $\xi\eta = 0$, $\eta\zeta = 0$ y $\zeta\xi = 0$. Por otro lado, a este sistema le satisfacen los valores $\xi^2 = \xi^2(s)$, $\eta^2 = \eta^2(s)$, . . ., $(\zeta\xi) = \zeta(s)\,\xi(s)$. Ambas soluciones coinciden para $s = s_0$ y, por consiguiente, coinciden idénticamente en virtud del teorema de unicidad. Es decir, para todo s

$$\xi^2(s) = 1,\ \eta^2(s) = 1,\ \ldots,\ \zeta(s)\,\xi(s) = 0.$$

Demostremos que $(\xi(s), \eta(s), \zeta(s)) = 1$. Puesto que ξ, η y ζ son vectores unitarios recíprocamente perpendiculares, se tiene $(\xi, \eta, \zeta) = \pm 1$. El producto mixto (ξ, η, ζ) depende continuamente de s y es igual a $+1$ para $s = s_0$; por eso, es igual a $+1$ para todo s.

Consideremos ahora la curva γ definida por la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \int_{s_0}^{s} \xi(s)\,ds.$$

Observemos, ante todo, que la parametrización de la curva γ es intrínseca. En efecto, la longitud de arco del segmento $s_0 s$ de la curva γ es igual a

$$\int_{s_0}^{s} |\boldsymbol{r}'(s)|\,ds = \int_{s_0}^{s} |\xi(s)|\,ds = s - s_0.$$

La curvatura de la curva γ es igual a $|\boldsymbol{r}''(s)| = |\xi'(s)| = k_1(s)$. La torsión de la curva γ es igual a

$$-\frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{k_1^2} = -\frac{(\xi, k_1\eta, k_1'\eta + k_1\eta')}{k_1^2} =$$

$$= -\frac{(\xi, k_1\eta, k_1'\eta + k_1(-k_1\xi - k_2\zeta))}{k_1^2} = k_2(s).$$

Es decir, en el punto correspondiente al arco s la curva γ tiene la curvatura $k_1(s)$ y la torsión $k_2(s)$.

Hemos demostrado la existencia de la curva. Demostremos la unicidad.

Sean γ_1 y γ_2 dos curvas que en los puntos correspondientes al arco s tienen las mismas curvaturas $k_1(s)$ y torsiones $k_2(s)$. Hagamos que coincidan los puntos de las curvas γ_1 y γ_2 correspondientes al arco s_0 y los triedros intrínsecos en estos puntos. Sean $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\nu}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ y $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\nu}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ los vectores unitarios de las tangentes, las normales principales y las binormales de las curvas γ_1 y γ_2, respectivamente.

Las ternas de funciones vectoriales $\boldsymbol{\tau}_1(s)$, $\boldsymbol{\nu}_1(s)$, $\boldsymbol{\beta}_1(s)$ y $\boldsymbol{\tau}_2(s)$, $\boldsymbol{\nu}_2(s)$, $\boldsymbol{\beta}_2(s)$ son soluciones del sistema de ecuaciones para ξ, η y ζ. Los valores iniciales de estas soluciones coinciden. De aquí se deduce que las soluciones coinciden idénticamente. En particular, $\boldsymbol{\tau}_1(s) \equiv \boldsymbol{\tau}_2(s)$, o sea, $\boldsymbol{r}_1'(s) \equiv \boldsymbol{r}_2'(s)$. Integrando esta igualdad entre los límites s_0 y s, obtenemos

$$\boldsymbol{r}_1(s) \equiv \boldsymbol{r}_2(s).$$

Es decir, las curvas γ_1 y γ_2 difieren sólo por su posición en el espacio.

Hemos demostrado completamente el teorema.

El sistema de igualdades

$$k_1 = k_1(s) \quad \text{y} \quad k_2 = k_2(s)$$

se denomina *ecuaciones intrínsecas de la curva*. Según el teorema demostrado, *la curva se determina por las ecuaciones intrínsecas unívocamente a menos de un desplazamiento*.

§ 5. Curvas planas

En este parágrafo consideraremos la circunferencia osculatriz de una curva plana, la evoluta y la evolvente.

Sean γ una curva plana y P un punto sobre la misma. La circunferencia $\varkappa$ que pasa por el punto P se denomina *circunferencia osculatriz* de la curva γ en el punto P si la curva tiene en este punto un contacto de orden dos con la circunferencia. El centro de la circunferencia osculatriz se denomina *centro de curvatura* de la curva.

Hallemos la circunferencia osculatriz de la curva regular γ en un punto P donde la curvatura es distinta de cero. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva. La ecuación de una circunferencia cualquiera es

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})^2 - R^2 = 0,$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el vector del centro de la circunferencia y R es el radio.

Según el teorema del § 4 del capítulo II, para que la curva γ tenga un contacto de orden dos en el punto P con la circunferencia es necesario y suficiente que en

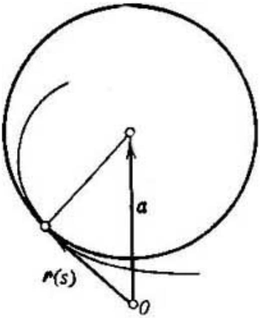


Fig. 20

este punto se cumplan las condiciones siguientes:

$$(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2=0,$$

$$\frac{d}{ds}\{\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2\}=2(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{r}'(s)=0,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\{(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})^2-R^2\}=2\boldsymbol{r}'^2(s)+2(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{r}''(s)=0.$$

De estas tres condiciones, la primera significa que el punto P pertenece a la circunferencia. La segunda condición permite ver que el vector $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})$ que va del centro de la circunferencia al punto P es perpendicular a la tangente a la curva; ello significa que el centro de la circunferencia se encuentra en la normal a la curva (fig. 20). La tercera condición determina el radio de la circunferencia. En efecto, se tiene $\boldsymbol{r}'^2(s)=1$ y $\boldsymbol{r}''(s)=$ $=k\mathbf{v}$; puesto que $|\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a}|$ representa en el punto P el radio R de la circunferencia y puesto que el vector $(\boldsymbol{r}(s)-\boldsymbol{a})$ es paralelo al vector $\mathbf{v}$, resulta $1-Rk=0$. Es decir, el radio de la circunferencia osculatriz es igual al radio de curvatura de la curva. De aquí se deduce que no existe circunferencia osculatriz de la curva en el punto P si la curvatura en el punto P es igual a cero. En este caso la circunferencia degenera en una recta y la tangente a la curva tiene con la curva un contacto de orden dos.

Hemos encontrado el radio y la posición del centro de la circunferencia osculatriz. Definamos ahora la evoluta de la curva.

Se denomina *evoluta* de una curva el lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva.

Hallemos la ecuación de la evoluta de una curva regular γ. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva. Entonces el vector del centro de curvatura de la curva es

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k}\boldsymbol{\nu}.$$

Veamos qué representa en sí la evoluta de una curva. Nos limitaremos a considerar los siguientes casos principales:

1. A lo largo de la curva se tiene $k'(s) > 0$ o bien $k'(s) < 0$ y $k(s)$ no se anula.

2. A lo largo de toda la curva se tiene $k'(s) > 0$ o bien $k'(s) < 0$ y $k(s)$ se anula para $s = s_0$.

3. Se tiene $k'(s) > 0$ para $s < s_0$, $k'(s) < 0$ para $s > s_0$, $k'(s_0) = 0$, $k''(s_0) \neq 0$ y $k(s)$ no se anula.

En el primer caso, la evoluta representa una curva regular sin puntos singulares (fig. 21, *a*). En efecto,

$$\tilde{\boldsymbol{r}}' = \left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\nu}}{k}\right)' = \boldsymbol{\tau} + \left(-\frac{\boldsymbol{\nu}k}{k} + \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)'\right) = -\boldsymbol{\nu}\frac{k'}{k^2} \neq 0.$$

En el segundo caso, la evoluta se descompone en dos curvas regulares que representan las evolutas de las partes de la curva γ correspondientes $s < s_0$ y a $s > s_0$ (fig. 21, *b*).

En el tercer caso, la evoluta representa una curva regular. El punto de la evoluta correspondiente al punto s_0 de la curva es un punto singular; ¡a saber, un punto de retroceso de primera especie (fig. 21, *c*). Demostremos esto.

Para $s = s_0$ se tiene

$$\tilde{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)' = 0,$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'' = -k\boldsymbol{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)' + \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)'',$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''' = -2k\boldsymbol{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'' + \boldsymbol{\nu}\left(\frac{1}{k}\right)'''.$$

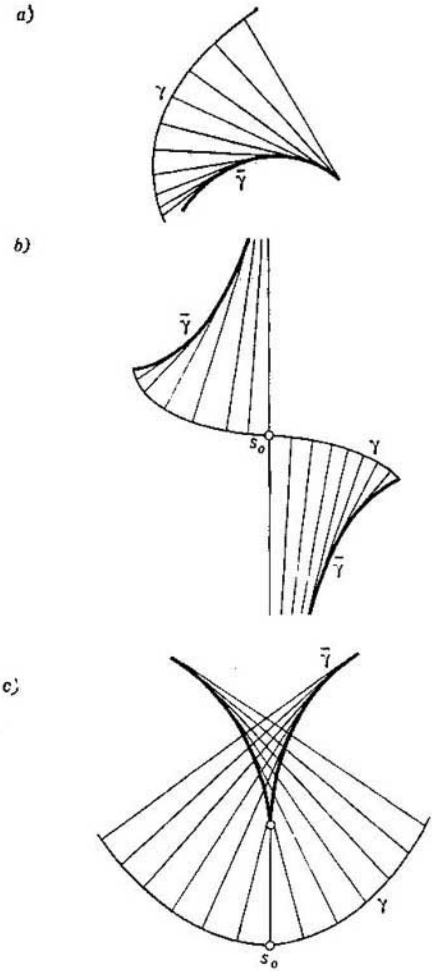


Fig. 21

Referiremos la evoluta a unas coordenadas rectangulares tomando como origen de coordenadas el punto $\widetilde{Q}(s_0)$ de la evoluta y dirigendo los ejes x e y según la tangente y la normal a la curva γ en el punto $Q(s_0)$. Escogido el sistema de coordenadas de esta forma, tendremos

$$\widetilde{x} = -\frac{k}{3}\left(\frac{1}{k}\right)''(s-s_0)^3+\ldots,$$

$$\widetilde{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)''(s-s_0)^2+\ldots$$

De aquí se deduce que el punto $\widetilde{Q}(s_0)$ de la evoluta es un punto singular, concretamente, un punto de retroceso de primera especie.

Consideremos algunas propiedades de la evoluta.

Sea γ una curva regular para la cual $k'(s)$ es siempre del mismo signo y $k(s)$ nunca se anula. En este caso, como hemos visto, la evoluta $\widetilde{\gamma}$ de la curva γ es una curva regular sin puntos singulares.

Hallemos la longitud de arco del segmento de la evoluta correspondiente al segmento s_1s_2 de la curva. Tenemos

$$\widetilde{s}(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} |\widetilde{r}'|\,ds = \int_{s_1}^{s_2} \left|\left(\frac{1}{k}\right)'\right| ds.$$

Puesto que k' conserva el signo, de aquí obtenemos

$$\widetilde{s}(s_1, s_2) = \left|\frac{1}{k(s_2)} - \frac{1}{k(s_1)}\right|.$$

Es decir, *la longitud de arco de un segmento de la evoluta es igual al valor absoluto de la diferencia entre los radios de curvatura de la curva en los puntos correspondientes a los extremos de este segmento.*

Mostremos que *la evoluta $\widetilde{\gamma}$ es la envolvente de las normales a la curva γ.* En efecto, el punto $\widetilde{Q}(s)$ de la evoluta se encuentra en la normal a la curva en el punto $Q(s)$. La tangente a la evoluta en el punto $\widetilde{Q}(s)$ tiene la dirección $\widetilde{r}' = \mathbf{v}\left(\frac{1}{k}\right)'$ y, por consiguiente, coincide con la normal a la curva en el punto $Q(s)$.

Supongamos que la curva viene dada por las ecuaciones

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Hallemos su evoluta partiendo de que es la envolvente de las normales a la curva. La ecuación de la normal es

$$(\tilde{x} - x(t))\, x'(t) + (\tilde{y} - y(t))\, y'(t) = 0$$

Por consiguiente, la envolvente se determina por las ecuaciones

$$(\tilde{x} - x)\, x' + (\tilde{y} - y)\, y' = 0$$

$$(\tilde{x} - x)\, x'' + (\tilde{y} - y)\, y'' - (x'^2 + y'^2) = 0.$$

De aquí obtenemos para x e y las expresiones siguientes:

$$\tilde{x} = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'} \quad \text{e} \quad \tilde{y} = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - x''y'}.$$

Se denomina *evolvente* de la curva γ la curva $\tilde{\gamma}$ para la cual la curva γ es la evoluta. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva γ. El vector $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ de un punto de la evolvente admite, obviamente, la representación

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(s) + \lambda(s)\, \boldsymbol{\tau}(s).$$

Derivando esta igualdad respecto a s, obtenemos

$$\tilde{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{\tau} + \lambda'\boldsymbol{\tau} + \lambda k \boldsymbol{\nu}.$$

Puesto que $\tilde{\boldsymbol{r}}'$ es perpendicular a $\boldsymbol{\tau}$, de aquí resulta que $\lambda' = -1$. Por consiguiente, $\lambda = c - s$.

Es decir, si la curva tiene una evolvente, ésta viene dada por la ecuación

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(s) + \boldsymbol{\tau}(c - s), \qquad (*)$$

donde $c = \text{const}$. Es fácil ver que toda curva definida por la ecuación (*) tiene como evoluta la curva γ y, por consiguiente, es para ella la evolvente. La ecuación de la evolvente en el caso de una parametrización arbitraria de la curva γ es, obviamente,

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(t) - \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}} \int \sqrt{\boldsymbol{r}'^2(t)}\, dt$$

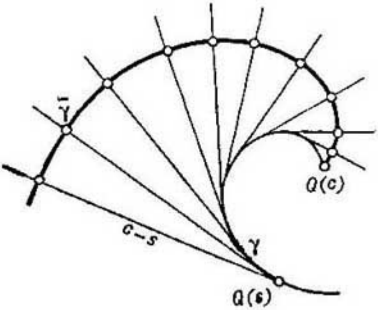


Fig. 22

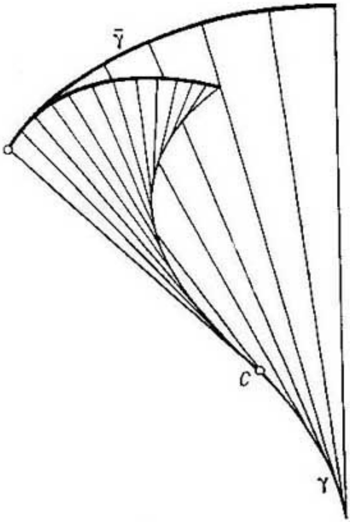


Fig. 23

o en forma escalar

$$\tilde{x} = x(t) - \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt,$$

$$\tilde{y} = y(t) - \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Un procedimiento claro que permite ver cómo se forma la evolvente es el siguiente. Imaginemos un hilo inextensible arrollado sobre la parte de la curva γ correspondiente a $s < c$ con un extermo en el punto $Q(c)$. Si desarrollamos el hilo tirando de su otro extremo, este extremo describirá la evolvente de la curva (fig. 22).

Veamos que representa la evolvente en dos casos principales:

1) $k(s)$ no se anula para todos los puntos $s < c$ de la curva;

2) $k(s)$ se anula sólo para $s = s_1$ siendo $k'(s_1) \neq 0$.

En el primer caso, la evolvente es una curva regular carente de sigularidades. Efectivamente,

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{r} - (s-c)\boldsymbol{\tau})' = -(s-c)k\boldsymbol{\nu} \neq 0$$

En el segundo caso, la evolvente es también una curva regular pero el punto $Q(s_1)$ de la evolvente es un punto singular; a saber, un punto de retroceso de segunda especie (fig. 23). Para demostrar esta afirmación basta referir la evolvente al sistema cartesiano rectangular de coordenadas que se obtiene tomando como origen de coordenadas el punto $Q(s_1)$ y como ejes de coordenadas las rectas paralelas a la tangente y a la normal a la curva γ en el punto $Q(s_1)$.

EJERCICIOS PARA EL CAPÍTULO III

1. Hallar la longitud del segmento $-a \leqslant x \leqslant a$ de la parábola

$$y = bx^2$$

Respuesta. $s = \dfrac{2ab\sqrt{1+4a^2b^2} + \ln(2ab + \sqrt{1+4a^2b^2})}{2b}$

2. Hallar la longitud del segmento de la curva

$$x = a \operatorname{ch} t,\ y = a \operatorname{sh} t,\ z = at$$

comprendido entre los puntos 0 y t.

Respuesta. $s = a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t$.

3. Hallar la longitud de arco de la astroide

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\,\mathrm{sen}^3\, t.$$

Respuesta. $s = 6a$.

4. Hallar la longitud del segmento $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ de la cicloide

$$x = a\,(t - \mathrm{sen}\, t),\ y = a\,(1 - \cos t).$$

Respuesta. $s = 8a$.

5. Hallar la fórmula para la longitud de arco de una curva definida en coordenadas polares por la ecuación

$$\rho = \rho\,(\vartheta).$$

Respuesta. $s\,(\vartheta_1, \vartheta_2) = \int\limits_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\vartheta.$

6. Hallar la curvatura de la curva

$$x = t - \mathrm{sen}\, t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}.$$

Respuesta. $k_1 = \frac{1}{4}\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2\frac{t}{2}}$.

7. Hallar la curvatura de la curva definida por las ecuaciones en forma implícita

$$x + \mathrm{sh}\, x = \mathrm{sen}\, y + y,$$
$$z + e^z = x + \ln\,(1 + x) + 1$$

en el punto (0, 0, 0).

Respuesta. $k_1 = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

8. Hallar la curvatura y la torsión en un punto arbitrario de la curva dada en el ejercicio 2.

Respuesta. $k_1 = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$ y $k_2 = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$.

9. Calcular la torsión de la curva

$$x = a\,\mathrm{ch}\, t\cos t,\ y = a\,\mathrm{ch}\, t\,\mathrm{sen}\, t,\ z = at.$$

Respuesta. $k_2 = -a\,\mathrm{ch}\, t$.

10. Probar que son constantes la curvatura y la torsión de una hélice simple.

11. Hallar la fórmula para la curvatura de una curva plana dada por una ecuación en coordenadas polares.

$$\textit{Respuesta.}\quad k_1 = \frac{\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''}{\left(1 + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

12. Mostrar que es constante la torsión de la curva

$$r = a\int b\,(t) \times b'\,(t)\, dt,$$

donde $b(t)$ es una función vectorial que satisface las condiciones $|b(t)| = 1$ y $|b^1(t)| \neq 0$ y $a = \text{const}$.

13. Mostrar que es constante la razón entre la curvatura y la torsión de la curva

$$x = a\int \operatorname{sen} \alpha(t)\, dt, \quad y = a\int \cos \alpha(t)\, dt, \quad z = bt.$$

14. Hallar la evoluta de la parábola

$$y^2 = 2px.$$

Respuesta. La parábola semicúbica $27py^2 = 8(x-p)^3$.

15. Hallar la evoluta de la tractriz

$$x = -a\left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right), \qquad y = a \operatorname{sen} t.$$

Respuesta. La catenaria $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$.

16. Hallar la evoluta de la astroide

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Respuesta. La astroide $|x+y|^{\frac{2}{3}} + |x-y|^{\frac{2}{3}} = 2$.

17. Hallar las evolventes de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Respuesta. $x = R(\cos \vartheta + (\vartheta - c)\operatorname{sen}\vartheta)$,

$y = R(\operatorname{sen}\vartheta - (\vartheta - c)\cos\vartheta)$.

18. Hallar todas las curvas planas de ecuación intrínseca dada $k = k(s)$.

Respuesta. $x = \int \operatorname{sen}\alpha(s)\, ds$, $y = \int \cos\alpha(s)\, ds$, donde $\alpha(s) = \int k(s)\, ds$.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO III

1. Una función $f(t)$ definida en el intervalo $a < t < b$ se denomina función de variación acotada si para cualesquiera $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tales que $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b$ las sumas

$$\sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

resultan uniformemente acotadas.

Demostrar que la curva γ es rectificable si, y sólo si, admite en un entorno de cada uno de sus puntos una parametrización de tipo

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son funciones de variación acotada.

2. Supongamos que la curva posee una de las cuatro propiedades siguientes

1) las tangentes a la curva forman un ángulo constante con cierta dirección;

2) las binormales a la curva forman un ángulo constante con cierta dirección;

3) las normales principales a la curva son paralelas a cierto plano;

4) es constante el cociente entre la curvatura y la torsión de la curva. Demostrar que la curva posee entonces las tres propiedades restantes.

Hallar la forma general de la curva que tiene estas propiedades.

3. Demostrar que la curva es una hélice simple si su curvatura y torsión son constantes y diferentes de cero.

4. Dadas dos curvas, demostrar que ambas son planas si entre los puntos de las mismas existe una correspondencia biunívoca tal que coinciden las binormales a las curvas en los puntos correspondientes.

5. Demostrar que toda curva de torsión constante y de curvatura distinta de cero puede ser representada por la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = c \int \boldsymbol{b}(t) \times \boldsymbol{b}'(t)\, dt,$$

donde $\boldsymbol{b}(t)$ es una función vectorial que satisface las condiciones

$$|\boldsymbol{b}(t)| = 1 \text{ y } \boldsymbol{b}'(t) \neq 0.$$

6. Reconstruir la curva si se conoce una de las tres funciones vectoriales $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{\nu}(s)$ o $\boldsymbol{\beta}(s)$.

7. Si entre los puntos de dos curvas se puede establecer una correspondencia tal que las tangentes a estas curvas en los puntos correspondientes sean paralelas, también serán paralelas las normales principales y las binormales. Demostrar.

8. Las curvas γ_1 y γ_2 se denominan curvas de Bertrand si entre las mismas se puede establecer una correspondencia puntual biunívoca tal que coincidan las normales principales en los puntos correspondientes.

Probar las siguientes propiedades de las curvas γ_1 y γ_2:

a) la distancia entre los puntos correspondientes de las curvas γ_1 y γ_2 es constante;

b) las tangentes a las curvas γ_1 y γ_2 en los puntos correspondientes forman un ángulo constante;

c) la curvatura y la torsión de cada una de estas curvas verifican la relación

$$a \operatorname{sen} \vartheta k_1 - a \cos \vartheta k_2 = \operatorname{sen} \vartheta,$$

donde a es la distancia entre los puntos correspondientes de las curvas γ_1 y γ_2 y ϑ es el ángulo entre las tangentes en los puntos correspondientes.

9. Demostrar que la curva es una curva de Bertrand si su curvatura y torsión verifican la relación lineal

$$a \operatorname{sen} \vartheta\, k_1 - a \cos \vartheta k_2 = \operatorname{sen} \vartheta.$$

10. Demostrar que es una curva de Bertrand la curva definida por la ecuación vectorial

$$r = a \int e(t)\, dt + b \int e(t) \times e'(t)\, dt,$$

donde $e(t)$ es una función vectorial que satisface las condiciones $|e(t)| = 1$ y $|e'(t)| = 1$. Recíprocamente, toda curva de Bertrand puede ser definida por una ecuación vectorial de este tipo.

11. Supongamos que la curva γ_2 se obtiene de la curva γ_1 por efecto de una transformación proyectiva. Demostrar que siendo igual a cero la curvatura (la torsión) de la curva γ_1 en el punto P, también será igual a cero la curvatura (respectivamente la torsión) de la curva γ_2 en el punto correspondiente.

SEGUNDA PARTE

Teoría de superficies

CAPITULO IV

CONCEPTO DE SUPERFICIE

§ 1. Superficie elemental. Superficie simple. Superficie general

Una región del plano se llamará región *elemental* si es la imagen de un círculo abierto obtenida por una aplicación topológica. O sea, una región elemental es una región homeomorfa a un círculo.

Sea γ una curva cerrada simple en el plano. Es bien conocido el teorema de Jordan de que toda curva cerrada simple divide el plano en dos regiones siendo frontera de cada una de éstas. Una de las regiones es finita y la otra infinita. Resulta que la región finita es homeomorfa a un círculo. Es decir, *el conjunto interior de un cuadrado, de un rectángulo o de una elipse representan regiones elementales.*

Definamos la superficie elemental.

Un conjunto Φ de puntos del espacio se denominará *superficie elemental* si es la imagen en el espacio de una región elemental en el plano obtenida por una aplicación topológica.

Sea Φ una superficie elemental y sea G la región elemental en el plano cuya imagen por la aplicación topológica f es la superficie Φ. Sean u y v las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario perteneciente a la región y sean x, y y z las coordenadas del punto correspondiente de la superficie. Las coordenadas x, y y z del punto de la superficie son funciones de las coordenadas del punto de la región G:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v) \quad \text{y} \quad z = f_3(u, v). \qquad (*)$$

Este sistema de igualdades que define la aplicación f de la región G en el espacio se denomina *ecuaciones* de la superficie en forma paramétrica; u y v se denominan *coordenadas curvilíneas* sobre la superficie.

Para u o v fijados, las ecuaciones (*) determinan una curva que se encuentra sobre la superficie. Estas curvas se denominan *líneas coordenadas.*

Un conjunto Φ de puntos del espacio se denomina *superficie simple* si este conjunto es conexo y si todo punto X del mismo tiene un entorno G tal que la parte de Φ perteneciente a G sea una superficie elemental.

Toda superficie elemental es una superficie simple. Pero las superficies simples no se limitan ni mucho menos a las superficies elementales exclusivamente. Por ejemplo, la esfera es una superficie simple pero no elemental.

La estructura global de las superficies simples no puede describirse de un modo tan general y sencillo como en el caso de las curvas simples. La siguiente consideración permite hacerse una idea acerca de la variedad de las superficies simples. *Si de una superficie simple arbitraria se extrae cualquier conjunto cerrado de puntos de modo que no se altere el carácter conexo de la parte restante, esta parte restante será también una superficie simple.*

Una superficie simple se denomina completa si el punto límite de cualquier sucesión convergente de puntos de la superficie también es un punto de la superficie. Por ejemplo, la esfera y el paraboloide son superficies completas mientras el segmento esférico no es una superficie completa (se trata del segmento esférico sin la circunferencia que lo limita).

Si una superficie simple completa es finita, se denomina cerrada. Aparte de la esfera, es una superficie cerrada, por ejemplo, el toro, o sea, la superficie engendrada por una circunferencia que gira alrededor de una recta que pertenece al plano de la circunferencia y no la corta (fig. 24).

Definamos el concepto de un *entorno* de un punto sobre una superficie simple.

Se denomina entorno de un punto X sobre una superficie simple Φ la parte común de la superficie Φ y de un entorno espacial del punto X. Según la definición,

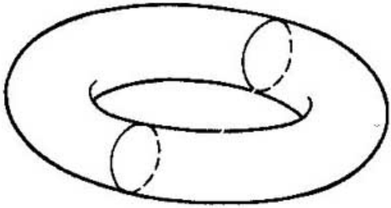


Fig. 24

todo punto de una superficie simple posee un entorno que es una superficie elemental. Al referirnos en adelante a un entorno de un punto de una superficie, entenderemos por él un entorno elemental de este tipo.

Un conjunto Φ de puntos del espacio se denominará *superficie general* si es la imagen de una superficie simple obtenida por una aplicación localmente topológica de la misma en el espacio.

Diremos que la aplicación f_1 de una superficie simple Φ_1 y la aplicación f_2 de una superficie simple Φ_2 determinan una misma superficie general Φ si entre los puntos de las superficies Φ_1 y Φ_2 puede establecerse una correspondencia topológica tal que coincidan en la superficie Φ las imágenes de los puntos correspondientes de estas superficies.

Supongamos que la superficie general Φ es la imagen de la superficie simple $\overline{\Phi}$ obtenida por la aplicación localmente topológica f. Denominaremos entorno del punto $f(X)$ sobre la superficie Φ la imagen de cualquier entorno del punto X sobre la superficie $\overline{\Phi}$ obtenida por la aplicación f. Puesto que la aplicación f es topológica en un entorno suficientemente pequeño del punto X, resulta que $f(X)$ posee sobre Φ un entorno que constituye una superficie elemental. De este modo, *el estudio «local» de cualquier superficie se reduce a la consideración de una superficie elemental.*

§ 2. Superficie regular. Representación analítica de una superficie

De la definición de superficie general se deduce que para cada punto de la misma existe un entorno que constituye una superficie elemental.

Una superficie Φ se llamará *regular* (k veces diferenciable) si para todo punto de esta superficie existe un entorno que admite una parametrización regular, o sea, puede ser representado por unas ecuaciones en forma paramétrica

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

donde f_1, f_2 y f_3 son unas funciones regulares (k veces continuamente diferenciables) definidas en una región elemental G del plano uv. Siendo $k = 1$, la superficie se denomina *suave*.

Una superficie se llama *analítica* si admite una parametrización analítica (f_1, f_2 y f_3 son funciones analíticas) en un entorno suficientemente pequeño de cada uno de sus puntos.

En lo sucesivo consideraremos superficies regulares exclusivamente.

Según la definición, una superficie regular puede ser representada en un entorno de cada uno de sus puntos por las ecuaciones en forma paramétrica

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

donde $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son unas funciones regulares de las variables u y v definidas en una región G del plano uv. De un modo natural se plantea la cuestión: ¿cuándo el sistema de igualdades

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

donde $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son unas funciones regulares en una región G del plano uv, determina una superficie? En muchos casos la respuesta se obtiene del teorema siguiente.

Teorema. Si $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son unas funciones regulares en una región G del plano uv tales que el *rango de la matriz*

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

es igual a dos en todo punto de G, entonces el sistema de igualdades

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

define una superficie Φ. Esta superficie es la imagen de la superficie simple G que se obtiene por la aplicación localmente topológica que asocia al punto (u, v) de la región G el punto del espacio con las coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$.

Es obvio que en este teorema requiere demostración sólo la afirmación de que la aplicación indicada es localmente inyectiva. Demostremos esto.

Supongamos que la afirmación es falsa; entonces existe un punto (u_0, v_0) de la región G tal que en cualquier entorno suyo, por pequeño que sea, se pueden señalar dos puntos distintos (u_1, v_1) y (u_2, v_2) tales que

$$x(u_1, v_1) - x(u_2, v_2) = 0, \quad y(u_1, v_1) - y(u_2, v_2) = 0,$$
$$z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2) = 0.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} x(u_1, v_1) - x(u_2, v_2) &= (x(u_1, v_1) - x(u_1, v_2)) + \\ &\quad + (x(u_1, v_2) - x(u_2, v_2)) = \\ &= (v_1 - v_2)\, x_v(u_1, \vartheta_1) + (u_1 - u_2)\, x_u(\vartheta_1', v_2) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} y(u_1, v_1) - y(u_2, v_2) &= \\ &= (v_1 - v_2)\, y_v(u_1, \vartheta_2) + (u_1 - u_2)\, y_u(\vartheta_2', v_2) = 0, \\ z(u_1, v_1) - z(u_2, v_2) &= \\ &= (v_1 - v_2)\, z_v(u_1, \vartheta_3) + (u_1 - u_2)\, z_u(\vartheta_3', v_2) = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $u_1 - u_2$ y $v_1 - v_2$ no se anulan simultáneamente, de las tres igualdades obtenidas deducimos que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u(\vartheta_1', v_2) & y_u(\vartheta_2', v_2) & z_u(\vartheta_3', v_2) \\ x_v(u_1, \vartheta_1) & y_v(u_1, \vartheta_2) & z_v(u_1, \vartheta_3) \end{pmatrix}$$

es menor que dos, o sea, que son iguales a cero sus determinantes de segundo orden. Debido a la continuidad de las funciones $x_u, x_v, \ldots, z_v$, de aquí se deduce que todos los determinantes de segundo orden de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

son iguales a cero en el punto (u_0, v_0), o sea, el rango de la matriz es menor que dos. Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado la proposición.

Con una selección adecuada de los ejes de coordenadas x, y y z, algunas superficies admiten la parametrización de toda la superficie en forma

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v),$$

donde $f(u, v)$ es una función definida en una región G del plano uv. Las ecuaciones de esta superficie pueden representarse en forma equivalente $z = f(x, y)$.

Este tipo de parametrización de la superficie se caracteriza por su claridad. La correspondencia entre los puntos de la superficie y los puntos de la región del plano xy se obtiene proyectando mediante rectas paralelas al eje z.

Diremos que una superficie Φ *viene definida implícitamente por la ecuación*

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

entendiendo con ello exclusivamente que las coordenadas de los puntos de la superficie satisfacen la ecuación dada, con la particularidad de que pueden existir puntos del espacio que satisfagan la ecuación dada y no pertenezcan a la superficie Φ.

En el estudio de las superficies definidas por la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ desempeña un papel importante el teorema siguiente.

Teorema. Sea $\varphi(x, y, z)$ una función regular de las variables x, y y z. Sea M el conjunto de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ y sea (x_0, y_0, z_0) un punto de este conjunto en el que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$. *Entonces el punto (x_0, y_0, z_0) posee un entorno tal que todos* *los puntos del conjunto M pertenecientes a él forman una superficie elemental regular.*

Demostración. Supongamos, para concretar, que $\varphi_z \neq 0$ en el punto (x_0, y_0, z_0). Según el teorema de las funciones implícitas, existen unos números δ y ε, mayores que cero, y una función regular $\psi(x, y)$, definida en la región $|x - x_0| < \delta$ e $|y - y_0| < \delta$, tales que todos los puntos $(x, y, \psi(x, y))$, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < < \delta$, satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ y, además, con estos puntos se agotan los puntos del paralelepípedo $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $|z - z_0| < \varepsilon$ que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$. La superficie elemental de la que trata el teorema viene definida por la ecuación

$$z = \psi(x, y), \ |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta.$$

Hemos demostrado el teorema.

§ 3. Parametrizaciones especiales de una superficie

Toda superficie regular en un entorno de cada uno de sus puntos admite un conjunto infinito de parametrizaciones.

En efecto, sea

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

alguna parametrización de la superficie en un entorno del punto $Q(u_0, v_0)$.

Si $\varphi(\alpha, \beta)$ y $\psi(\alpha, \beta)$ son unas funciones regulares arbitrarias que satisfacen en el punto (α_0, β_0) las condiciones

$$u_0 = \varphi(\alpha_0, \beta_0), \quad v_0 = \psi(\alpha_0, \beta_0), \quad \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi_\beta \\ \psi_\alpha & \psi_\beta \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces las ecuaciones

$$x = x(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)),$$
$$y = y(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta)),$$
$$z = z(\varphi(\alpha, \beta), \psi(\alpha, \beta))$$

también ofrecen una parametrización regular de la superficie. Esto se deduce de un modo evidente de que las fórmulas

$$u = \varphi(\alpha, \beta) \text{ y } v = \psi(\alpha, \beta)$$

definen una aplicación topológica de un entorno suficientemente pequeño del punto (α_0, β_0) del plano $\alpha\beta$ en un entorno del punto (u_0, v_0) del plano uv.

Al estudiar las superficies regulares, resulta a veces útil valerse de parametrizaciones especiales. Consideremos las más usuales de éstas.

Teorema. Sean Φ una superficie regular y

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

una parametrización regular suya en un entorno del punto P. Supongamos que en el punto P es

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces en un entorno del punto P la superficie Φ puede ser representada por la ecuación

$$z = f(x, y),$$

donde f es una función regular.

Demostración. Según el teorema de las funciones implícitas, existen unas funciones regulares $u(x, y)$ y $v(x, y)$ que introducidas en las ecuaciones $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ convierten estas últimas en identidades.

Puesto que

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 1,$$

resulta que

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Introduciendo unos parámetros nuevos α y β mediante las fórmulas

$$u = u(\alpha, \beta) \quad \text{y} \quad v = v(\alpha, \beta),$$

obtenemos

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = z(u(\alpha, \beta), \; v(\alpha, \beta))$$

o, que es lo mismo,

$$z = f(x, y).$$

Hemos demostrado el teorema.

Teorema. Sea Φ *una superficie regular y sea* u *y* v *una parametrización regular suya. Supongamos que en un entorno de un punto* (u_0, v_0) *se dan dos ecuaciones diferenciales*

$$\left.\begin{array}{l} A_1(u, v)\,du + B_1(u, v)\,dv = 0, \\ A_2(u, v)\,du + B_2(u, v)\,dv = 0, \end{array}\right\} \qquad (*)$$

cuyos coeficientes satisfacen en el punto (u_0, v_0) *la condición*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces la superficie Φ *puede ser parametrizada en un entorno de este punto de modo que las líneas coordenadas sean las curvas integrales de las ecuaciones* (*).

Demostración. Podemos aceptar, sin perder generalidad, que $A_2 \neq 0$ y $B_1 \neq 0$. Sea $v = \varphi(\alpha, u)$ la solución de la primera de las ecuaciones (*) que para $u = u_0$ es igual a α y sea $u = \psi(\beta, v)$ la solución de la segunda ecuación que para $v = v_0$ es igual a β. Las ecuaciones $v = \varphi(\alpha, u)$ y $u = \psi(\beta, v)$ en un entorno del punto (u_0, v_0) pueden resolverse respecto a α y β, respectivamente, ya que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 1 \neq 0 \quad \text{para} \quad u = u_0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 1 \neq 0 \quad \text{para} \quad v = v_0.$$

Sean $\alpha = \alpha(u, v)$ y $\beta = \beta(u, v)$ estas soluciones. Mostremos que

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \beta_u \\ \alpha_v & \beta_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Puesto que $\alpha(u, v) = \text{const}$ es la integral de la primera ecuación (*), las ecuaciones

$$A_1 du + B_1 dv = 0 \text{ y } \alpha_u du + \alpha_v dv = 0$$

resultan compatibles; de aquí que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ \alpha_u & \alpha_v \end{vmatrix} = 0.$$

Análogamente

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} = 0.$$

Si suponemos que

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} = 0,$$

obtendremos inmediatamente que

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

lo cual es imposible. Luego,

$$\begin{vmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

De aquí se deduce que $\alpha (u, v)$ y $\beta (u, v)$ pueden tomarse como nuevos parámetros en la superficie. Si procedemos así, las líneas coordenadas ($\alpha =$ const y $\beta =$ $=$ const) serán curvas integrales de las ecuaciones (*).

Hemos demostrado el teorema.

Nota. El sistema de ecuaciones (*) que figura en el enunciado del teorema suele darse con frecuencia mediante una sola ecuación de segundo orden

$$A\, du^2 + 2B\, du\, dv + C\, dv^2 = 0.$$

La condición respectiva que se impone a los coeficientes se reduce a la desigualdad

$$AC - B^2 < 0.$$

§ 4. Puntos singulares sobre una superficie regular

Un punto P de una superficie regular se denomina *regular* respecto al grado de regularidad k dado si en un entorno de este punto la superficie admite una parametrización k veces diferenciable

$$x = x (u, v), \quad y = (u, v), \quad z = z (u, v)$$

que satisface la condición: el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

es igual a dos en el punto P. En el caso contrario, el punto P se denomina *singular*. Una línea sobre la superficie se denomina *línea singular* si todos los puntos de la misma son singulares.

Para las superficies, el estudio de los puntos singulares representa un problema más complicado que en el caso de las curvas. Nos limitaremos al análisis de los casos más sencillos.

Sea

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

una parametrización regular de la superficie en un entorno de un punto Q. Supongamos que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

es igual a dos en todo el entorno del punto Q salvo el propio punto Q en el cual el rango es menor que dos.

Emplearemos para la ecuación de la superficie la notación vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, donde $\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\, \boldsymbol{e}_1 + y(u, v)\, \boldsymbol{e}_2 + z(u, v)\, \boldsymbol{e}_3$ ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$ son los vectores unitarios dirigidos según los ejes x, y y z). Entonces la condición de que el rango de la matriz mencionada es igual a dos o es menor que dos se reduce a que $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ o $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = 0$, respectivamente.

Consideremos la función vectorial

$$\xi = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}. \qquad (*)$$

Se comprueba directamente que ella es invariante respecto a las transformaciones de coordenadas con jacobiano mayor que cero. Si el jacobiano es menor que cero, la función cambia de signo solamente.

Un punto Q de una superficie será desde luego singular si ξ_P no tiende hacia un límite determinado cuando $P \to Q$. En efecto, si Q es un punto regular, en un entorno del mismo se puede introducir una parametrización (α, β)

regular tal que $r_\alpha \times r_\beta \neq 0$ en el punto Q y, por consiguiente para $P \to Q$

$$\frac{r_\alpha \times r_\beta}{|r_\alpha \times r_\beta|} = \pm \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

tiende a un límite determinado.

Adelantándonos un poco, observemos que $\xi(u, v)$ es el vector unitario de la normal a la superficie en el punto P. La normal a la superficie se define independientemente de cualquier parametrización concreta de la superficie. Si Q es un punto regular de la superficie, la normal a la superficie en un entorno de este punto depende continuamente de la posición del punto y, por consiguiente, cuando $P \to Q$ el vector unitario $\xi_P(u, v)$ tiende a un límite determinado que es el vector unitario de la normal a la superficie en el punto Q.

Ejemplo. El punto (0, 0) de la superficie

$$x = u^3, \quad y = v^3, \quad z = (u^6 + v^6)^{\frac{1}{3}}$$

(fig. 25) es un punto singular. Es fácil ver que $\xi(u, v)$ no tiende a ningún límite determinado cuando u y v tienden a cero arbitrariamente.

Supongamos ahora que ξ_P tiende hacia un límite determinado ξ_Q cuando $P \to Q$. Entonces el criterio que acabamos de exponer no da respuesta a la pregunta de si el punto Q es singular o regular.

Sean u_0 y v_0 las coordenadas curvilíneas del punto Q. Tomemos en el plano uv un contorno simple pequeño $\bar{\gamma}$ que envuelve el punto (u_0, v_0). Sea γ el contorno que le corresponde sobre la superficie. Proyectemos el contorno γ sobre el plano σ que pasa por el punto Q y que es perpendicular al vector ξ_Q.

El punto Q será desde luego un punto singular si la proyección $\tilde{\gamma}$ del contorno γ sobre el plano σ no envuelve el punto Q o lo envuelve más de una vez.

Supongamos que la afirmación es falsa y que Q es un punto regular. Entonces la superficie admite una parametrización $r = r(\alpha, \beta)$ que satisface en Q la condición $r_\alpha \times r_\beta \neq 0$ de donde se deduce que r_α y r_β son vectores no paralelos y distintos de cero.

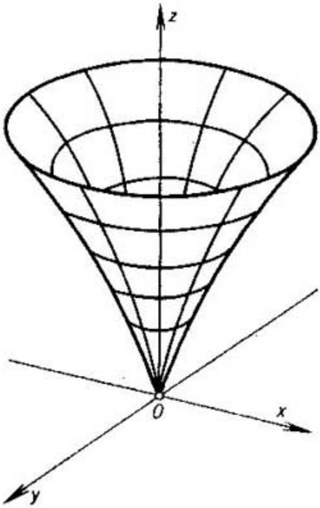


Fig. 25

Sea $\alpha = \alpha_0 + \xi(t)$ y $\beta = \beta_0 + \eta(t)$ la ecuación del contorno γ. Entonces el contorno en el plano σ dado por la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(Q) + \xi(t)\,\boldsymbol{r}_\alpha(Q) + \eta(t)\,\boldsymbol{r}_\beta(Q)$$

difiere poco de $\tilde{\gamma}$. Pero como este contorno se obtiene de $\bar{\gamma}$ mediante una transformación afín, resulta que él, y por ende el contorno $\tilde{\gamma}$, envuelve el punto Q de la misma forma que el contorno $\bar{\gamma}$ envuelve el punto (α_0, β_0), o sea, una vez.

Ejemplo. El punto (0, 0) de la superficie

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^5$$

(fig. 26) es singular. Al recorrer la circunferencia $\bar{\gamma}$ dada por la ecuación $u^2 + v^2 = \varepsilon^2$, el punto correspondiente de $\tilde{\gamma}$ recorre dos veces la circunferencia $x^2 + y^2 = \varepsilon^4$. Es

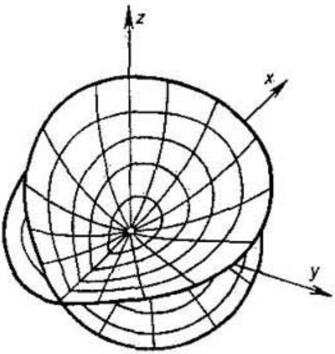


Fig. 26

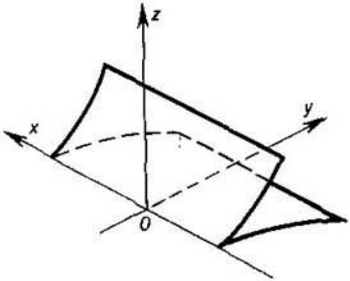


Fig. 27

decir, $\tilde{\gamma}$ envuelve dos veces el punto (0, 0).

Ejemplo. Todos los puntos de la superficie

$$x = u, \quad y = v^2, \quad z = v^3$$

situados en el eje x ($v = 0$) son singulares (fig. 27). Aquí el plano σ es el plano xy. El contorno γ de la circunferencia correspondiente $\bar{\gamma}$ dada por la ecuación $(x - a)^2 +$

$+ y^2 = s^2$ se encuentra íntegramente en el semiplano $y \geqslant 0$ (ya que $y = v^2$) y, por consiguiente, no envuelve ni una sola vez ningún punto Q $(a, 0)$ del eje x.

Una línea singular del tipo considerado en este ejemplo se denomina *arista de retroceso* de la superficie. Todo plano perpendicular a la arista de retroceso corta la superficie a lo largo de una curva para la cual el punto de la arista de retroceso es un punto singular; a saber, es un punto de retroceso. En el ejemplo considerado estas secciones representan parábolas semicúbicas.

Para concluir, diremos unas palabras sobre los puntos singulares de la superficie dada por la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$.

Señalemos, ante todo, que los puntos singulares de la superficie sólo pueden ser aquellos en los cuales $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$. En efecto, si en el punto Q de la superficie una de las derivadas parciales, digamos φ_z, es distinta de cero, la superficie admite en un entorno de Q una parametrización regular de tipo $z = \psi(x, y)$, de donde resulta que Q es un punto regular.

Supongamos que $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ en el punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie. Desarrollando la función φ por la fórmula de Taylor en un entorno del punto Q, obtenemos

$$a_{11}(x-x_0)^2 + a_{22}(y-y_0)^2 + a_{33}(z-z_0)^2 +$$
$$+ 2a_{12}(x-x_0)(y-y_0) + 2a_{13}(x-x_0)(z-z_0) +$$
$$+ 2a_{23}(y-y_0)(z-z_0) + R = 0.$$

Resulta que si la forma cuadrática $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ es definida, o sea, se anula sólo si todos los ξ_k son iguales a cero, entonces en un entorno suficientemente pequeño del punto (x_0, y_0, z_0) no existe otro punto del espacio, salvo el propio punto (x_0, y_0, z_0), que satisfaga la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$. Por esto la superficie Φ no puede representarse por la ecuación $\varphi = 0$ en un entorno del punto Q.

Nota. Frecuentemente se entiende por una superficie definida mediante la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ el lugar geométrico de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación $\varphi = 0$. Dada esta definición de superficie, en

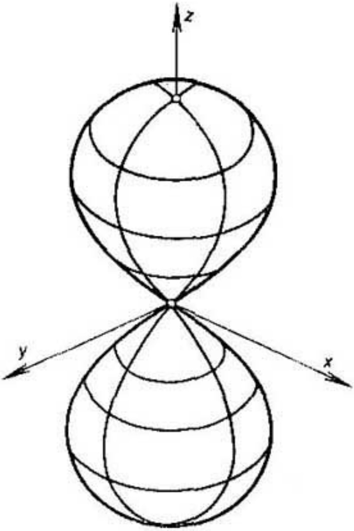


Fig. 28

el caso que acabamos de considerar el punto se denomina punto singular *aislado*.

Ejemplo. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $(x^2 + y^2 + z^2)(1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0$ consta de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y del punto $(0, 0, 0)$ que es un punto aislado de este lugar geométrico.

Si la forma cuadrática $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ es indefinida pero no se descompone en el producto de dos formas lineales, el lugar geométrico de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ tiene, en una proximidad del punto (x_0, y_0, z_0), la forma semejante a un cono de segundo orden cuya ecuación es $\varphi(x, y, z) - R = 0$. Si la superficie se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$, el punto (x_0, y_0, z_0) se denomina punto *cónico*.

Ejemplo. El origen de coordenadas es un punto cónico del lugar geométrico formado por los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2a^2 (z^2 - x^2 - y^2) = 0$$

(fig. 28).

Si la forma cuadrática $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ se descompone en el producto de dos formas lineales, pueden presentarse distintos casos. El punto puede resultar singular (por ejemplo, el punto $(0, 0, 0)$ de la superficie $xy - z^3 = 0$) o regular (por ejemplo, el punto $(0, 0, 0)$ de la superficie $xy - xz^2 = 0$). En este caso es necesario estudiar los términos posteriores del desarrollo de la función φ.

Las consideraciones de todos los capítulos siguientes se refieren únicamente a las regiones de superficies con puntos regulares. En particular, para las parametrizaciones empleadas se da por cumplida la condición $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$. En lo sucesivo no volveremos a mencionar esto de modo especial.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PARA EL CAPITULO IV

1. Hallar la ecuación de la superficie formada por las semirrectas que arrancan del punto (a, b, c) y cortan la parábola

$$z = 0, \ y^2 = 2px.$$

Respuesta. $(bz - cy)^2 = 2p (z - c) (az - cx)$.

2. Hallar la ecuación del cilindro circunscrito al elipsoide

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$$

y con generatrices paralelas a la recta $x = y = z$.

Respuesta. $(x + 4y + 9z)^2 - 14 (x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1) = 0$.

3. Hallar el lugar geométrico formado por las proyecciones del centro del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sobre sus planos tangentes.

Respuesta. $x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

4. Hallar la ecuación de la superficie que se obtiene al girar la curva

$$x = \varphi (u), \ z = \psi (u), \ y = 0$$

alrededor del eje z.

Respuesta. $x = \varphi (u) \cos v, \ y = \varphi (u) \operatorname{sen} v, \ z = \psi (u)$.

5. La recta g se desplaza en el espacio de modo que se cumplen las condiciones siguientes:

a) la recta siempre forma un ángulo recto con el eje z;

b) el punto de intersección de la recta g y del eje z se desplaza uniformemente con una velocidad a;

c) la recta gira uniformemente alrededor del eje z con una velocidad angular ω.

Hallar la ecuación de la superficie que describe en su movimiento la recta g.

Respuesta. $x = v \cos \omega u$, $y = v \operatorname{sen} \omega u$, $z = au$.

Aquí u es el tiempo y v es la distancia del punto de la superficie al eje z. Esta superficie se denomina superficie helicoidal simple o *helicoide*.

6. Tres familias de superficies vienen dadas por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = u = \text{const},$$
$$\psi(x, y, z) = v = \text{const},$$
$$\chi(x, y, z) = w = \text{const}.$$

Demostrar que si en el punto (x_0, y_0, z_0) el jacobiano

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(x, y, z)} \neq 0,$$

las tres familias se pueden definir en un entorno de este punto mediante la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w).$$

Las superficies de las diferentes familias se obtienen tomando $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ y $w = \text{const}$.

7. Se denomina superficie de traslación la superficie que se obtiene por un movimiento de traslación de una curva a lo largo de otra. Demostrar que toda superficie de traslación puede ser dada por la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(u) + \boldsymbol{\psi}(v),$$

donde $\boldsymbol{\varphi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ son dos funciones vectoriales una de las cuales depende sólo de u y la otra, sólo de v.

8. Probar que es una superficie de traslación la superficie formada por el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos pertenecen a dos curvas dadas.

9. Hallar la línea singular en la seudoesfera

$$x = \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Respuesta. La línea singular $u = \frac{\pi}{2}$ es una arista de retroceso.