CAPITULO V

ELEMENTOS PRINCIPALES DE SUPERFICIES RELACIONADOS CON EL CONCEPTO DE CONTACTO

§ 1. Plano tangente a una superficie

Sean Φ una superficie, P un punto de la misma y α un plano que pasa por el punto P. Tomemos en la superficie un punto Q y designemos por d y h sus distancias al punto P y al plano α, respectivamente.

Diremos que el plano α es *el plano tangente* a la superficie en el punto P si el cociente $\frac{h}{d} \to 0$ cuando $Q \to P$ (fig. 29).

Teorema. Una superficie suave Φ *tiene en todo punto un plano tangente que es único. Si* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ *es una parametrización suave de la superficie, entonces el plano tangente en el punto* $P(u, v)$ *es paralelo a los vectores* $\boldsymbol{r}_u(u, v)$ y $\boldsymbol{r}_v(u, v)$.

Demostración. Supongamos que la superficie Φ tiene plano tangente α en el punto $P(u, v)$. Sea $\boldsymbol{n}$ el vector unitario perpendicular al plano α. La distancia d entre el punto $Q(u + \Delta u, v + \Delta v)$ y el punto $P(u, v)$ es igual a $|\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|$. La distancia del punto Q al plano α es igual a

$$|(\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\,\boldsymbol{n}|$$

de modo que

$$\frac{h}{d} = \frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v))\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v)|}.$$

Por definición, $\frac{h}{d} \to 0$ cuando Δu y Δv tienden independientemente a cero. En particular,

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v))\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v) - \boldsymbol{r}(u, v)|} \to 0 \text{ cuando } \Delta u \to 0,$$

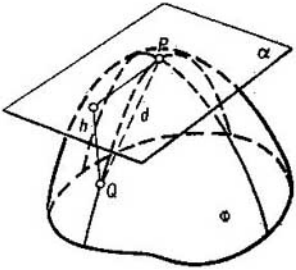

Fig. 29

Pero

$$\frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v)-\boldsymbol{r}(u,\ v))\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v)-\boldsymbol{r}(u,\ v)|}=$$

$$=\frac{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v)-\boldsymbol{r}(u,\ v)}{\Delta u}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v)-\boldsymbol{r}(u,\ v)}{\Delta u}\right|}\rightarrow\frac{|\boldsymbol{r}_u(u,\ v)\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}_u(u,\ v)|}.$$

Es decir,

$$\boldsymbol{r}_u(u,\ v)\,\boldsymbol{n}=0.$$

Puesto que $\boldsymbol{r}_u(u,\ v)\neq 0$ (ya que $\boldsymbol{r}_u(u,\ v)\times\boldsymbol{r}_v(u,\ v)\neq 0$), la igualdad $\boldsymbol{r}_u(u,\ v)\,\boldsymbol{n}=0$ es posible sólo si el vector $\boldsymbol{r}_u(u,\ v)$ es paralelo al plano α.

Análogamente se demuestra que el vector $\boldsymbol{r}_v(u,\ v)$ es también paralelo al plano α y, como los vectores $\boldsymbol{r}_u(u,\ v)$ y $\boldsymbol{r}_v(u,\ v)$ son distintos de cero y no son paralelos ($\boldsymbol{r}_u(u,\ v)\times\boldsymbol{r}_v(u,\ v)\neq 0$), el plano tangente es único si es que existe.

Demostremos ahora la existencia del plano tangente. Supongamos que el plano α es paralelo a los vectores $\boldsymbol{r}_u(u,\ v)$ y $\boldsymbol{r}_v(u,\ v)$. Mostremos que es el plano tangente a la superficie en el punto $P(u,\ v)$.

Tenemos

$$\frac{h}{d}=\frac{|(\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u,\ v))\,\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{r}(u+\Delta u,\ v+\Delta v)-\boldsymbol{r}(u,\ v)|}=$$

$$=\frac{|(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})\,\Delta u+(\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\,\Delta v+\varepsilon_1\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\,|}{|\boldsymbol{r}_u\Delta u+\boldsymbol{r}_v\Delta v+\varepsilon_2\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}\,|}=$$

$$=\frac{\left|(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+(\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\varepsilon_1\right|}{\left|\boldsymbol{r}_u\dfrac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\boldsymbol{r}_v\dfrac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}+\varepsilon_2\right|},$$

donde $|\varepsilon_1|$ y $|\varepsilon_2|$ tienden a cero cuando $\Delta u,\ \Delta v\to 0$.

Supongamos que existe una sucesión de pares Δu y Δv convergentes a cero y tales que el valor que les corresponde $\frac{h}{d}>\varepsilon>0$. De la sucesión de pares Δu y Δv puede despejarse una sucesión contenida en ella para la cual resulten convergentes las razones

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}\quad \text{y}\quad \frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}.$$

Sean ξ y η los valores límites de estas expresiones. Es obvio que $\xi^2+\eta^2=1$. Pasando al límite de la razón $\frac{h}{d}$ según la sucesión contenida despejada de los pares Δu y Δv, obtenemos

$$\frac{h}{d}\to\frac{|(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})\,\xi+(\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})\,\eta\,|}{|\boldsymbol{r}_u\xi+\boldsymbol{r}_v\eta\,|}.$$

Puesto que $(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n})=0$, $(\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n})=0$ y $\boldsymbol{r}_u\xi+\boldsymbol{r}_v\eta\neq 0$ ($\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ no son paralelos), resulta que $\frac{h}{d}\to 0$. Pero esto contradice a la hipótesis de que todos los valores de $\frac{h}{d}$ anteriores al valor límite son mayores que $\varepsilon>0$.

Hemos demostrado completamente el teorema.

Conociendo la dirección del plano tangente, es fácil obtener su ecuación.

Sea $\tilde{\boldsymbol{r}}$ el vector de un punto arbitrario del plano tangente a la superficie en el punto $P\,(u,\ v)$. Entonces los vectores $\tilde{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}\,(u,\ v)$, $\boldsymbol{r}_u\,(u,\ v)$ y $\boldsymbol{r}_v\,(u,\ v)$ son paralelos al plano tangente y, por consiguiente, el producto mixto de los mismos es igual a cero. De aquí obtenemos la ecuación del plano tangente

$$(\tilde{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}(u, v), \quad \boldsymbol{r}_u(u, v), \quad \boldsymbol{r}_v(u, v)) = 0$$

Supongamos que la superficie viene dada por las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

De la ecuación vectorial del plano tangente se deduce que la ecuación del plano tangente correspondiente a esta forma de representación de la superficie es

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x(u, v) & \tilde{y} - y(u, v) & \tilde{z} - z(u, v) \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación del plano tangente a la superficie representada por la ecuación $z = z(x, y)$ se obtiene de la ecuación que acabamos de encontrar. Basta observar que la representación de la superficie mediante la ecuación $z = z(x, y)$ es simplemente la denotación abreviada de la representación paramétrica

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v).$$

Por eso la ecuación del plano tangente a la superficie representada por la ecuación $z = z(x, y)$ será

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x & \tilde{y} - y & \tilde{z} - z \\ 1 & 0 & z_x(x, y) \\ 0 & 1 & z_y(x, y) \end{vmatrix} = 0,$$

o bien,

$$\tilde{z} - z - p(\tilde{x} - x) - q(\tilde{y} - y) = 0,$$

donde por p y q se han designado las primeras derivadas de la función $z(x, y)$.

Determinemos, por último, la ecuación del plano tangente para el caso en el que la superficie viene dada por la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$. Sea (x, y, z) un punto de la superficie en el que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$ y sea $x =$

$= x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ una parametrización suave de la superficie en un entorno de este punto. Si en la ecuación de la superficie introducimos $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ en lugar de x, y y z, obtendremos una identidad respecto a u y v. Derivando esta identidad, obtendremos en el punto (x, y, z)

$$\varphi_x x_u + \varphi_y y_u + \varphi_z z_u = 0,$$
$$\varphi_x x_v + \varphi_y y_v + \varphi_z z_v = 0.$$

Considerando estas igualdades como un sistema de ecuaciones para φ_x, φ_y y φ_z y resolviéndolo, encontramos

$$\frac{\varphi_x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

En el caso de la representación paramétrica de la superficie, la ecuación del plano tangente es

$$(\tilde{x} - x)\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + (\tilde{y} - y)\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + (\tilde{z} - z)\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 0.$$

Teniendo en cuenta la proporción anterior, obtenemos la ecuación del plano tangente a la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$ en el punto (x, y, z)

$$(\tilde{x} - x)\,\varphi_x + (\tilde{y} - y)\,\varphi_y + (\tilde{z} - z)\,\varphi_z = 0.$$

Se denomina *normal* a la superficie en el punto P la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano tangente en este punto.

No ofrece dificultad obtener la ecuación de la normal una vez encontrada la ecuación del plano tangente para los distintos casos de representación de la superficie; proponemos esto como un ejercicio.

§ 2. Lema sobre la distancia de un punto a una superficie. Contacto entre una curva y una superficie

Sean Φ una superficie y Q un punto arbitrario del espacio. Se denomina distancia del punto Q a la superficie Φ el extremo inferior de las distancias entre los puntos de la superficie y el punto Q.

Lema. Sea Φ *una superficie suave definida por la ecuación* $\varphi(x, y, z) = 0$. *Supongamos que en el punto* $O(x_0, y_0, z_0)$ *de la superficie se tiene* $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$. *Si* $Q(x, y, z)$ *es un punto del espacio próximo al punto* O *pero no perteneciente a la superficie, entonces al introducir las coordenadas del punto* Q *en la ecuación de la superficie* Φ *se obtiene una magnitud* λ *que tiene el orden de la magnitud* h, *o sea, de la distancia del punto* Q *a la superficie, en el sentido de que la razón* $\frac{\lambda}{h}$ *tiende a un límite determinado distinto de cero cuando el punto* Q *se aproxima tanto como se quiera al punto* O *pero sin tocar la superficie.*

Demostración. Puesto que el punto O pertenece a la superficie Φ, existe un $\varepsilon > 0$ tal que todos los puntos del espacio que distan del punto O a lo sumo en ε y que satisfacen la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$ pertenecen a la superficie Φ.

Supongamos que el punto Q se encuentra a una distancia del punto O menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Sea P_n una sucesión de puntos de la superficie cuyas distancias a Q tienden a la distancia entre este punto y la superficie Φ. Los puntos P_n forman una sucesión acotada $\left(\text{sus distancias a } Q \text{ son menores que } \frac{\varepsilon}{2}\right)$; por eso, de la sucesión de puntos P_n se puede despejar una sucesión convergente contenida en ella. Sin perder generalidad, podemos aceptar que la propia sucesión P_n converge a un punto P. Debido a la continuidad de la función φ en el entorno del punto O, el punto P satisface la ecuación $\varphi(x, y, z) = 0$. De aquí resulta que el punto P pertenece a la superficie Φ. De este modo, si el punto Q es suficientemente próximo al punto O, el extremo inferior de las distancias entre los puntos de la superficie y el punto Q se alcanza en un punto P perteneciente a la superficie.

Demostremos ahora que el segmento PQ tiene la dirección de la normal a la superficie en el punto P. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ una parametrización suave de la superficie en el punto P y sea a el vector del punto Q. Como la función $(\boldsymbol{r}(u, v) - a)^2$ alcanza su mínimo en el punto P,

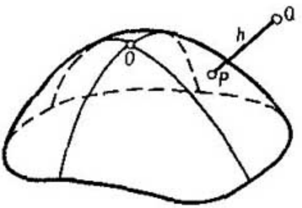

Fig. 30

debe ser

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{r}_u = 0 \text{ y } (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{r}_v = 0;$$

pero ello significa que el segmento PQ tiene la dirección de la normal a la superficie en el punto P.

Sean $\bar{x}$, $\bar{y}$, y $\bar{z}$ las coordenadas del punto P; ξ, η y ζ los cosenos directores de la normal a la superficie en el punto P; x, y y z las coordenadas del punto Q y h la distancia entre los puntos P y Q (fig. 30).

Tenemos

$$\bar{x} = x + \xi h, \quad \bar{y} = y + \eta h \quad \text{y} \quad \bar{z} = z + \zeta h.$$

Puesto que el punto P pertenece a la superficie, es

$$\varphi(x + \xi h, \quad y + \eta h, \quad z + \zeta h) = 0.$$

De aquí

$$\varphi(x, y, z) + h(\varphi_x\xi + \varphi_y\eta + \varphi_z\zeta) + h\varepsilon = 0,$$

donde $\varepsilon \to 0$ cuando $Q \to 0$.

Dividiendo esta igualdad por h y pasando al límite para $Q \to O$, obtenemos

$$\frac{\varphi(x, y, z)}{h} \to -(\varphi_x\xi + \varphi_y\eta + \varphi_z\zeta)_{(O)}.$$

La expresión que figura en el segundo miembro es distinta de cero ya que representa el producto escalar de los vectores (ξ, η, ζ) y $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ que son paralelos y distintos de cero.

Hemos demostrado completamente el lema.

Apliquemos el lema demostrado al problema sobre el contacto entre una curva y una superficie.

Sean Φ y γ una superficie elemental y una curva elemental que tienen un punto común O. Sea h la distancia entre un punto arbitrario Q de la curva y la superficie. Diremos que la curva γ tiene *un contacto de orden n* con la superficie Φ si $\frac{h}{d^n} \to 0$ cuando $Q \to P$. Comprenderemos el contacto entre una curva general y una superficie general como el contacto entre los entornos elementales del punto común.

Teorema. Sean Φ y γ una superficie regular elemental y una curva regular que tienen un punto común O. Sea $\varphi(x, y, z) = 0$ la ecuación de la superficie en un entorno del punto O, con la particularidad de que $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq \neq 0$ en este punto y sea $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ una parametrización regular de la curva γ en un entorno del punto O, con la particularidad de que $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq \neq 0$ en el punto O. Para que la curva γ tenga un contacto de orden n con la superficie Φ en el punto O es necesario y suficiente que para el valor de t correspondiente al punto O se cumplan las condiciones

$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\varphi = 0, \quad \ldots \quad \frac{d^n}{dt^n}\varphi = 0.$$

Demostración. Supongamos que al punto O le corresponde el valor $t = t_0$. Si $Q \to O$, se tiene $t \to t_0$.

Según el lema, $\varphi(x(t), y(t), z(t))$ es del orden de la distancia entre el punto Q y la superficie Φ. En cuanto a la distancia entre los puntos Q y O, ésta es de orden $|t - t_0|$ ya que

$$\left|\frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}\right| \to |r'(t_0)| \neq 0.$$

Por eso, para que en el punto O haya un contacto de orden n entre la curva γ y la superficie Φ, es necesario y suficiente que para $t \to t_0$

$$\frac{\varphi(x(t), y(t), z(t))}{(t - t_0)^n} \to 0.$$

Pero esto es posible si, y sólo si, para $t = t_0$ se anulan la función $\varphi(x(t), y(t), z(t))$ y sus derivadas hasta la de orden n.

Hemos demostrado el teorema.

Ejemplo. Hallemos *la esfera osculatriz* de una curva, o sea, la esfera con la cual la curva tiene un contacto de orden tres.

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva. La ecuación de la esfera es

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})^2 = R^2,$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el vector del centro de la esfera y R es el radio. Introduciendo $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ en esta ecuación y derivando, obtenemos sucesivamente:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\tau} = 0,$$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,k_1\boldsymbol{\nu} + 1 = 0,$$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})(k_1'\boldsymbol{\nu} - k_1^2\boldsymbol{\tau} - k_1k_2\boldsymbol{\beta}) = 0,$$

de donde

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,k_1k_2\boldsymbol{\beta} + \frac{k_1'}{k_1} = 0.$$

Es decir,

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\tau} = 0,$$

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\nu} = -\frac{1}{k_1} \quad \text{y} \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1'}{k_1^2k_2}.$$

De aquí

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}| = \sqrt{\left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{k_1'}{k_1^2k_2}\right)^2},$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\nu}}{k_1} + \frac{\boldsymbol{\beta}k_1'}{k_1^2k_2}.$$

§ 3. Paraboloide osculador. Clasificación de los puntos de las superficies

Sean Φ una superficie regular (dos veces continuamente diferenciable) y P un punto de la misma. Sea U un paraboloide de vértice P tangente a la superficie en este punto. Designemos por h y d las distancias de un punto arbitrario Q de la superficie al paraboloide y al punto P, respectivamente (fig. 31).

El paraboloide U se denomina *paraboloide osculador* a la superficie en el punto P si la razón $\frac{h}{d^2} \to 0$ cuando

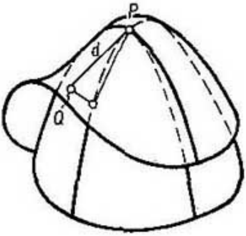

Fig. 31

$Q \to P$. No queda excluido que el paraboloide degenere en un cilindro parabólico o en un plano.

Teorema. En todo punto P de una superficie Φ regular (dos veces continuamente diferenciable) existe y es único el paraboloide osculador que, en particular, puede degenerar en un cilindro parabólico o en un plano.

Demostración. Introduzcamos en el espacio unas coordenadas cartesianas rectangulares x, y y z tomando por el origen de coordenadas el punto P, por el plano xy el plano tangente en el punto P y por el eje z la normal a este plano, o sea, la normal a la superficie.

Escogido de esta forma el sistema de coordenadas, la superficie puede ser representada en un entorno del punto P mediante la ecuación

$$z = z(x, y),$$

donde $z(x, y)$ es una función dos veces diferenciable en un entorno del punto (0, 0). Demostremos esto.

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ una parametrización dos veces diferenciable de la superficie. Puesto que el vector $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq$ $\neq 0$ y tiene la dirección del eje z, resulta que

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

De aquí se deduce, como quedó probado en el § 3 del capítulo IV, que la superficie puede ser representada en un entorno de P mediante la ecuación

$$z = z(x, y),$$

donde $z(x, y)$ es una función dos veces diferenciable. Observemos que $z(0, 0) = 0$, pues el punto P pertenece a la superficie y que $z_x(0, 0)$ y $z_y(0, 0)$ son iguales a cero ya que el plano tangente a Φ en P, o sea, el plano $z = z_x(0, 0)\,x + z_y(0, 0)\,y$, debe coincidir con el plano $z = 0$.

La ecuación del paraboloide U, incluyendo los casos de su degeneración en un cilindro parabólico o en un plano, puede ser representada mediante la ecuación de tipo

$$z - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0.$$

Supongamos que existe el paraboloide osculador en el punto P. Mostremos que es único. Sea

$$z - \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0$$

la ecuación del paraboloide osculador. Según el lema del parágrafo anterior, al introducir las coordenadas del punto Q en la ecuación del paraboloide, se obtiene una magnitud λ que tiene el orden de la distancia del punto Q al paraboloide. Por esto $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ cuando $Q \to P$.

Desarrollando en un entorno del origen de coordenadas la función $z(x, y)$ según la fórmula de Taylor, obtenemos

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2 + y^2)\,\varepsilon_1(x, y),$$

donde con r, s y t se han designado las derivadas segundas de z y $\varepsilon_1(x, y) \to 0$ cuando $x, y \to 0$. Introduciendo las coordenadas x, y y $z(x, y)$ del punto Q de la superficie en la ecuación del paraboloide, obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{2}\{(r-a)x^2 + 2(s-b)xy + (t-c)y^2\} + \\ + (x^2 + y^2)\,\varepsilon_1(x, y).$$

El cuadrado de la distancia del punto Q al punto P es $d^2 = x^2 + y^2 + z^2(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) \times \varepsilon_2(x, y)$, donde $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $Q \to P$.

Puesto que la razón $\frac{\lambda}{d^2}$ tiende a cero cuando x e y tienden independientemente a cero, ello tendrá lugar también si, por ejemplo, $y=0$ y $x\to 0$. Pero en este caso

$$\frac{\lambda}{d^2}=\frac{\frac{1}{2}(r-a)\,x^2+x^2\varepsilon_1}{x^2+x^2\varepsilon_2}$$

y, por consiguiente, $\frac{\lambda}{d^2}\to 0$ cuando $x\to 0$ si, y sólo si, $a=r$. Análogamente se demuestra que $c=t$. Demostremos, por último, que $b=s$. Supongamos con este fin que x e y tienden a cero pero de modo que siempre $x=y$. Entonces

$$\frac{\lambda}{d^2}=\frac{(s-b)\,x^2+2x^2\varepsilon_1}{2x^2+2x^2\varepsilon_2}.$$

De aquí se ve que la condición $\frac{\lambda}{d^2}\to 0$ cuando $x\to 0$ implica la igualdad $b=s$.

Es decir, si existe el paraboloide osculador en el punto P, es único. Su ecuación respecto al sistema de coordenadas que hemos escogido será

$$z-\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)=0. \qquad (*)$$

Demostremos ahora que el paraboloide $(*)$ siempre es osculador. En efecto, para este paraboloide se tiene

$$\frac{\lambda}{d^2}=\frac{(x^2+y^2)\,\varepsilon_1}{x^2+y^2+(x^2+y^2)\,\varepsilon_2}\to 0$$

cuando x e $y\to 0$.

Hemos demostrado completamente el teorema.

La existencia y unicidad del paraboloide osculador permite dar la siguiente clasificación de los puntos de la superficie:

1. Un punto de una superficie se denomina *elíptico* si el paraboloide osculador en este punto es un paraboloide elíptico (fig. 32, *a*).

2. Un punto de una superficie se denomina *hiperbólico* si el paraboloide osculador en este punto es un paraboloide hiperbólico (fig. 32, *b*).

3. Un punto de una superficie se denomina *parabólico* si el paraboloide osculador en este punto degenera en un cilindro parabólico (fig. 32, *c*).

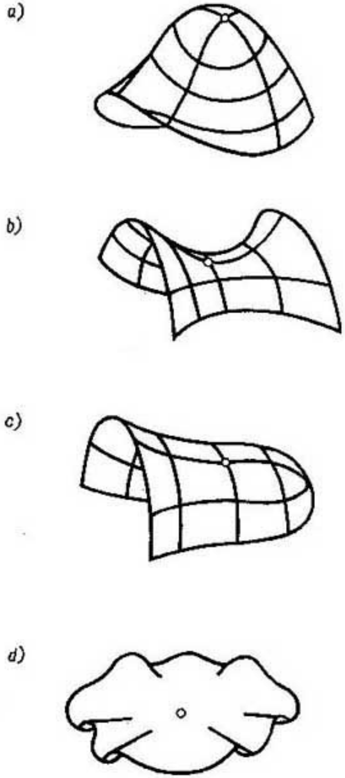

Fig. 32

4. Un punto de una superficie se denomina *punto plano* si el paraboloide osculador en este punto degenera en un plano (el plano tangente a la superficie) (fig. 32, *d*).

Para terminar, señalemos que *del mismo modo que el plano tangente reproduce en una primera aproximación* *la forma de la superficie, en un entorno del punto de tangencia, el paraboloide osculador la reproduce en una segunda aproximación.*

§ 4. Envolvente de una familia de superficies dependientes de uno o dos parámetros

Sea S $\{F_\alpha\}$ una familia monoparamétrica de superficies suaves dependientes de un parámetro α. Una superficie suave F se denomina *envolvente* de la familia S si en cada uno de sus puntos es tangente al menos a una superficie de la familia y si cualquier porción de la misma es tangente a un conjunto infinito de superficies de la familia.

Teorema. Sea dada una familia monoparamétrica S $\{F_\alpha\}$ de superficies suaves

$$\varphi(x, y, z, \alpha) = 0, \quad a \leqslant \alpha \leqslant b,$$

donde φ es una función continuamente diferenciable respecto a todos sus argumentos y tal que satisface la condición $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$. Entonces, si la superficie suave F es la envolvente de esta familia, se determina por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z, \alpha) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$$

en el sentido de que para todo punto (x, y, z) de la superficie F puede señalarse un valor α tal que los cuatro valores x, y, z y α satisfarán ambas ecuaciones $\varphi = 0$ y $\varphi_\alpha = 0$.

La demostración de este teorema representa en esencia una repetición de la demostración del teorema correspondiente para las curvas (§ 5 del capítulo II); por eso, la expondremos sin entrar en detalles.

Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario de la superficie F. Distinguiremos dos casos:

1. Hay un conjunto infinito de superficies F_{α_1}, F_{α_2}, ... de la familia tangentes en el punto P.

2. Hay un número finito de superficies F_{α_1}, ..., F_{α_n} de la familia tangentes en el punto P.

Consideremos el primer caso. Sin perder generalidad, podemos aceptar que la sucesión de números α_k converge a un número α_0. Puesto que $\varphi(x, y, z, \alpha_k) = 0$ para todo k, se tiene

$$\varphi(x, y, z, \alpha_k) - \varphi(x, y, z, \alpha_l) =$$
$$= (\alpha_k - \alpha_l)\,\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha^*) = 0,$$

de donde $\varphi(x, y, z, \alpha^*) = 0$. Pasando al límite cuando k y $l \to \infty$, obtenemos

$$\varphi(x, y, z, \alpha_0) = 0 \text{ y } \varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_0) = 0,$$

y el teorema queda demostrado en el primer caso.

Consideremos el segundo caso. Supongamos que la afirmación del teorema es falsa y que, por consiguiente, para todo k ($k = 1, 2, \ldots, n$) es $\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_k) \neq 0$. Designemos por ω_k^ε un ε-entorno cerrado del punto α_k y por f una porción pequeña de la superficie F que contiene el punto P. (Entendemos por una porción de la superficie una región cerrada de la superficie, o sea, la región más su frontera). Si la porción f es suficientemente pequeña y F_α es tangente a f, entonces α pertenece a uno de los entornos ω_k^ε.

Designemos por m_k el conjunto de puntos de f en los que son tangentes las superficies F_α con el parámetro α perteneciente a ω_k^ε. Todo conjunto m_k es cerrado. Existe una porción $\bar{f}$ de la superficie contenida en f que respecto a cada uno de los conjuntos m_k posee la propiedad siguiente: o bien el conjunto m_k contiene $\bar{f}$ o bien no contiene ningún punto de la misma. La porción $\bar{f}$ se construye del mismo modo que el segmento δ en la demostración del teorema correspondiente a las curvas.

Supongamos que $\bar{f}$ pertenece a m_k. Puesto que $\varphi_\alpha(x, y, z, \alpha_k) \neq 0$, las superficies F_α para las cuales $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ con ε suficientemente pequeño pueden ser representadas en un entorno del punto P mediante la ecuación

$$\psi(x, y, z) = \alpha,$$

donde ψ es una función continuamente diferenciable que satisface la condición $\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 \neq 0$. En la porción $\bar{f}$ la superficie F puede definirse mediante las ecuaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, donde

$x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son funciones continuamente diferenciables que satisfacen la condición $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$.

Designemos por $\alpha(u, v)$ el valor del parámetro $\alpha \subset \subset \omega_k^\varepsilon$ que corresponde a la superficie F_α tangente a la porción $\overline{f}$ en el punto (u, v):

$$\alpha(u, v) = \psi(x(u, v), y(u, v), z(u, v));$$

es evidente que $\alpha(u, v)$ es una función continuamente diferenciable.

Tenemos

$$\alpha_u = \psi_x x_u + \psi_y y_u + \psi_z z_u,$$
$$\alpha_v = \psi_x x_v + \psi_y y_v + \psi_z z_v.$$

Pero los vectores (x_u, y_u, z_u) y (x_v, y_v, z_v) son vectores tangentes a la superficie F, el vector (ψ_x, ψ_y, ψ_z) es normal a la superficie F_α y las superficies F y F_α son tangentes, de aquí que $\alpha_u = 0$ y $\alpha_v = 0$. Por consiguiente, $\alpha = \text{const}$.

Es decir, para $\alpha \subset \omega_k^\varepsilon$ sólo una superficie de la familia es tangente a la porción $\overline{f}$ y, por consiguiente, en toda la familia hay a lo sumo n superficies de este tipo. Pero, según la definición de la envolvente, debe haber un conjunto infinito. Llegamos a una contradicción. Hemos demostrado el teorema.

Sea $S\{F_{\alpha\beta}\}$ una familia biparamétrica de superficies suaves. Una superficie suave F se denomina *envolvente* de la familia S si en cada uno de sus puntos es tangente al menos a una superficie de la familia y si a lo largo de toda curva sobre la superficie F es tangente a ella un conjunto infinito de superficies de la familia.

Teorema. Dada una familia biparamétrica de superficies

$$\varphi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad a \leqslant \alpha \leqslant b, \quad c \leqslant \beta \leqslant d,$$

donde $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0$, *la envolvente de la misma se determina por las ecuaciones*

$$\varphi = 0, \quad \varphi_\alpha = 0 \text{ y } \varphi_\beta = 0.$$

No daremos la demostración de este teorema ya que no lo emplearemos en la exposición sucesiva.

§ 5. Envolvente de una familia de planos dependientes de un parámetro

Analicemos la estructura de una superficie F que representa la envolvente de una familia monoparamétrica de planos.

Consideremos la forma vectorial de la ecuación de los planos de la familia

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}(\alpha) + a(\alpha) = 0$$

lo que corresponde a la denotación escalar

$$xb_1(\alpha) + yb_2(\alpha) + zb_3(\alpha) + a(\alpha) = 0.$$

Sin perder generalidad, podemos asumir que el vector $\boldsymbol{b}$ es unitario pues siempre podemos dividir la ecuación por $|\boldsymbol{b}(\alpha)|$ ($\boldsymbol{b}(\alpha) \neq 0$). Respecto a la función vectorial $\boldsymbol{b}(\alpha)$ y a la función escalar $a(\alpha)$ aceptaremos que son dos veces diferenciables y que, además, son distintas de cero $\boldsymbol{b}'(\alpha)$ y $\boldsymbol{b}''(\alpha)$.

La envolvente F satisface las ecuaciones

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{b} + a = 0 \text{ y } \boldsymbol{r}\boldsymbol{b}' + a' = 0. \qquad (*)$$

Para α fijo estas ecuaciones determinan una recta g_α. Es decir, la superfice F es descrita por la recta g_α.

Consideremos tres planos:

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{b} + a = 0, \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{b}' + a' = 0 \quad y \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{b}'' + a'' = 0; \qquad (**)$$

los dos primeros determinan la envolvente. Respecto a estos tres planos pueden hacerse tres hipótesis principales:

1. Los tres planos (**) no tienen puntos comunes para ningún α.

2. Los tres planos (**) se cortan en un único punto S, el mismo para todos los α.

3. Los tres planos (**) se cortan en un punto $S(\alpha)$ cuya posición depende substancialmente de α, en el sentido de que siendo $\tilde{\boldsymbol{r}}(\alpha)$ el vector del punto $S(\alpha)$, se tiene $\tilde{\boldsymbol{r}}'(\alpha) \neq 0$.

Consideremos el primer caso. Sea $\boldsymbol{n}(\alpha)$ el vector unitario de la recta g_α. Tenemos

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{b}'\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}''\boldsymbol{n} = 0.$$

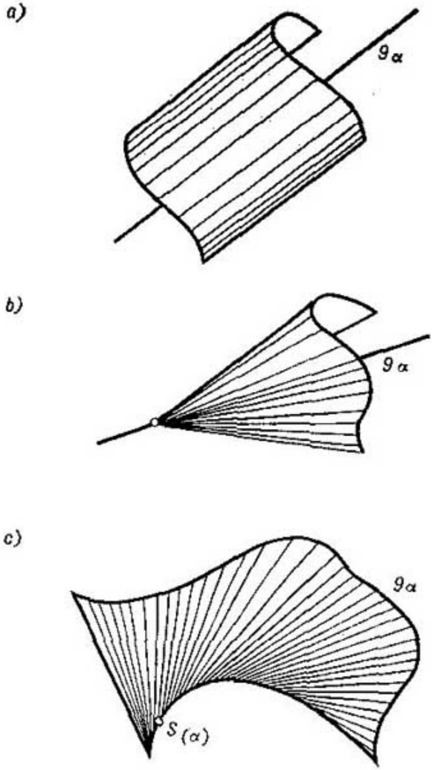

Fig. 33

Derivando las dos primeras igualdades, encontramos

$$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}'=0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b}''\boldsymbol{n}+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}'=0.$$

De aquí resulta que $\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}' = 0$ y $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{n}' = 0$. Puesto que, ademas, $\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n} = 0$, se tiene $\boldsymbol{n}' = 0$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{n}$ no depende de α. Es decir, en este caso todas las rectas g_α son paralelas y la superficie F, formada por las rectas g_α, es *cilíndrica* (fig. 33, *a*).

En el segundo caso, las rectas g_α pasan por un punto fijo (S) del espacio y, por consiguiente, la superfice F F es *cónica* (fig. 33, *b*).

Consideremos, finalmente, el tercer caso. Mostremos que *en este caso las rectas g_α, que forman la superficie F, son tangentes a una curva* (fig. 33, *c*).

Sea $\tilde{\boldsymbol{r}}(\alpha)$ el vector del punto de intersección de los planos (**). Tenemos

$$\tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{b}+a=0, \ \tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{b}'+a'=0 \ \text{y} \ \tilde{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{b}''+a''=0.$$

Derivando la primera igualdad y restándole la segunda, obtenemos $\tilde{\boldsymbol{r}}'\boldsymbol{b}=0$. Análogamente, de la segunda y tercera igualdades enconamos $\tilde{\boldsymbol{r}}'\boldsymbol{b}' = 0$. De aquí resulta que $\tilde{\boldsymbol{r}}' \parallel (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}')$.

Ya que la recta g_α pasa por el punto $S(\alpha)$ y es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}'$, debe ser paralela al vector $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}' \parallel \tilde{\boldsymbol{r}}'$ y es de esta forma tangente a la curva

$$\boldsymbol{r}=\tilde{\boldsymbol{r}}(\alpha)$$

que describe el punto $S(\alpha)$. Esta curva se denomina *arista de retroceso* de la superficie.

Los resultados de este parágrafo pueden resumirse en el teorema siguiente.

Teorema. La envolvente de una familia monoparamétrica de planos en los casos principales representa una región de una superficie cilíndrica, o bien de una superficie cónica, o bien de una superficie formada por las tangentes a una curva espacial.

Es fácil comprobar mediante un estudio directo que, recíprocamente, los planos tangentes forman en cada uno de estos casos una familia monoparamétrica. Proponemos esto como un ejercicio.

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO V

1. Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

en el punto (x', y', z').

Respuesta. $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$

2. Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera

$x = a \cos v \operatorname{sen} u,\ y = a \cos v \cos u,\ z = a \operatorname{sen} v$

en el punto $(a, 0, 0)$.

Respuesta. $x - a = 0$.

3. Probar que todos los planos tangentes a la superficie definida por la ecuación

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

pasan por el origen de coordenadas.

4. Probar que las superficies

$$x^2+y^2+z^2=\alpha x,\ x^2+y^2+z^2=\beta y \text{ y } x^2+y^2+z^2=\gamma z$$

se cortan formando ángulo recto.

5. Probar que las normales a la superficie

$$x=\varphi(u)\cos v,\ y=\varphi(u)\operatorname{sen} v,\ z=\psi(u)$$

cortan el eje z.

6. Hallar la superficie formada por las normales a la superficie

$$y = x \operatorname{tg} z$$

trazadas en los puntos de la recta

$$y=x,\quad z=\frac{\pi}{4}.$$

Respuesta. Un paraboloide biperbólico.

7. Hallar en el punto. $(0, 0, c)$ la ecuación del paraboloide osculador al elipsoide dado en el ejercicio 1.

Respuesta. $z=c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$

8. Estudiar el carácter de los puntos (elípticos, hiperbólicos, parabólicos, planos) en las superficies de segundo orden.

9. Hallar la posición del centro y el radio de la esfera osculatriz a la hélice

$$x = a\cos t,\ y = a \operatorname{sen} t,\ z = bt$$

en el punto $(a, 0, 0)$.

Respuesta. El centro en $(-\frac{b^2}{a}, 0, 0)$ y el radio igual a $a+\frac{b^2}{a}$.

10. Hallar la envolvente de la familia de esferas

$$(x-a)^2+y^2+z^2=1.$$

Respuesta. El cilindro $y^2+z^2=1$.

11. Hallar la envolvente de la familia de planos que forman en el ángulo de coordenadas $x, y, z > 0$ tetraedros de volumen constante.

Respuesta. $xyz = \text{const}$.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO V

1. Demostrar que si una superficie suave Φ y un plano α tienen sólo un punto común P, el plano es el plano tangente a la superficie en el punto P.

2. Demostrar que son paralelos a una recta los planos tangentes a la superficie de traslación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}(u) + \boldsymbol{V}(v)$$

trazados en los puntos de cualquier curva de traslación (las líneas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$).

3. Demostrar que las familias de elipsoides o de hiperboloides de una o dos hojas cofocales determinadas por las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$$

se cortan formando ángulo recto.

4. Demostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una línea, todo punto de esta línea es un punto parabólico o un punto plano.

5. Sean Φ una superficie, P un punto de la misma y α el plano tangente en el punto P. Demostrar que

1) si el punto P es elíptico, todos los puntos de la superficie Φ suficientemente próximos a P se encuentran a un lado del plano α;

2) si el punto P es hiperbólico, podrán encontrarse puntos de la superficie tan próximos a P como se quiera situados a distintos lados del plano α;

3) si el punto P es parabólico o plano, pueden darse ambos casos (citar ejemplos).

6. Demostrar que la transformación proyectiva (afín, en particular) conserva la propiedad de un punto de ser punto elíptico, hiperbólico o plano.

7. Demostrar que la curva γ sobre una superficie es plana si todos sus puntos son planos.

8. Diremos que una curva es *esférica* si todos sus puntos pertenecen a una esfera.

Sea

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

una curva y sea $P(t_0)$ un punto cualquiera de la misma. Para que esta curva sea esférica es necesario y suficiente que la curva definida por la ecuación

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)|^2}$$

sea plana; demostrar esta proposición.

9. Sea γ una curva cualquiera sobre la superficie Φ que pasa por el punto P. Demostrar que la tangente a la curva γ en el punto P se encuentra en el plano tangente a la superficie en este punto.

10. Sea U el paraboloide osculador a la superficie Φ en el punto P. Demostrar que cualquier curva de la superficie que pase por el punto P tiene en este punto un contacto de orden dos con el paraboloide.

11. Demostrar que cualquier transformación analítica del espacio

$$x' = \varphi_1(x, y, z),\ y' = \varphi_2(x, y, z),\ z' = \varphi_3(x, y, z),$$

donde φ_1, φ_2 y φ_3 son unas funciones analíticas con el jacobiano distinto de cero, conserva la propiedad de una curva y de una superficie de tener un contacto de orden dado.

12. Demostrar que si el borde de una superficie pertenece a un plano, esta superficie es una región de este plano o la superficie tiene puntos elípticos.

Demostrar que toda superficie cerrada tiene puntos elípticos.

13. Demostrar que la recta pertenece íntegramente a la superficie de segundo grado si la recta tiene un contacto de orden dos con la superficie.

14. Demostrar que no tiene envolvente la familia de superficies definidas por las ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = \alpha,$$

donde φ es una función regular de las variables x, y y z.

15. Demostrar que la superficie es una superficie de revolución si todas las normales a la misma cortan una recta determinada

16. Demostrar que la superficie es una esfera o una región de una esfera si las normales a la misma pasan por un mismo punto.

CAPITULO VI

PRIMERA FORMA CUADRATICA DE UNA SUPERFICIE Y CUESTIONES ADJUNTAS DE LA TEORIA DE SUPERFICIES

Sean Φ una superficie regular, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ alguna parametrización regular de la misma y $\boldsymbol{n}$ el vector unitario de la normal a la superficie en el punto (u, v).

En la teoría de superficies desempeñan un papel importante tres formas cuadráticas ligadas a la superficie:

$$d\boldsymbol{r}^2, \quad -d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n} \quad \text{y} \quad d\boldsymbol{n}^2.$$

La primera forma cuadrática $I = d\boldsymbol{r}^2$ es definida positiva ya que no toma valores negativos y se anula sólo para $du = dv = 0$. En efecto, si $d\boldsymbol{r}^2 = 0$, entonces $d\boldsymbol{r} =$

$= \boldsymbol{r}_u du + \boldsymbol{r}_v dv = 0$. Pero como $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, esto es posible sólo si $du = dv = 0$.

Para los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie emplearemos las designaciones: $\boldsymbol{r}_u^2 = E$, $\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v = F$ y $\boldsymbol{r}_v^2 = G$. Es decir,

$$I = d\boldsymbol{r}^2 = (\boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2\, du^2 + 2\,(\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)\, du\, dv + \boldsymbol{r}_v^2\, dv^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2.$$

En este capítulo consideraremos algunas cuestiones de la teoría de superficies ligadas a la primera forma cuadrática.

§ 1. Longitud de una curva sobre una superficie

Consideremos una superficie simple Φ y una curva γ que se encuentra sobre ella. Sean P_0 un punto común de la superficie y de la curva, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, v)$ alguna parametrización de la superficie en un entorno del punto P_0 y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$ alguna parametrización de la curva en un entorno de este punto. Supongamos que u_0, v_0 y t_0 son los valores de los parámetros correspondientes al punto P_0.

Siendo δ suficientemente pequeño, todo punto $P\,(t)$ de la curva con $|\, t - t_0 \,| < \delta$ pertenece al entorno parametrizado del punto P_0 de la superficie. Por consiguiente, a todo punto $P\,(t)$ le corresponden unívocamente los valores $u\,(t)$ y $v\,(t)$ de modo que $\boldsymbol{r}\,(t) = \boldsymbol{r}\,(u\,(t),\ v\,(t))$. Denominaremos ecuaciones de la curva sobre la superficie a las igualdades $u = u\,(t)$, $v = v\,(t)$.

Sean Φ una superficie regular y γ una curva regular sobre ella. Sean $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, v)$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$ sus parametrizaciones regulares en un entorno del punto P_0 que cumplen las condiciones habituales $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$ y $\boldsymbol{r}'^2\,(t) \neq 0$. Entonces, las funciones $u\,(t)$ y $v\,(t)$, que figuran en las ecuaciones de la curva sobre la superficie

$$u = u\,(t), \quad v = v\,(t),$$

son funciones regulares y, además, $u'^2\,(t) + v'^2\,(t) \neq 0$.

Para demostrar esta afirmación basta aplicar el teorema de las funciones implícitas al sistema de ecua-

ciones
$$x(t)=x(u,v),\quad y(t)=y(u,v),\quad z(t)=z(u,v)$$
respecto a las cuales se conoce de antemano que las funciones $u(t)$ y $v(t)$ las satisfacen.

Sean ahora Φ una superficie general y γ una curva general. Por definición, la superficie Φ es la imagen obtenida por una aplicación localmente topológica φ de una superficie $\overline{\Phi}$ en el espacio. Diremos que la curva γ se encuentra sobre la superficie Φ si en la superficie $\overline{\Phi}$ existe una curva $\overline{\gamma}$ cuya imagen por la aplicación φ es la curva γ.

De ello se deduce que si $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ es una parametrización de la superficie Φ en un entorno del punto $\varphi(\overline{P})$ y $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ es una parametrización de la curva en un entorno de este punto, entonces existen unas funciones $u=u(t)$ y $v=v(t)$ que satisfacen la igualdad $\boldsymbol{r}(t)=$ $=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$. Es decir, *toda curva sobre la superficie siempre puede ser dada en un entorno de cada uno de sus puntos mediante las igualdades* $u=u(t)$, $v=v(t)$, *con la particularidad de que las funciones* $u(t)$ *y* $v(t)$ *son regulares si la superficie y la curva lo son.*

Consideremos la longitud de una curva sobre una superficie. Sea Φ una superficie regular y $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ una parametrización regular de la misma. Sea γ una curva regular sobre la superficie dada por las ecuaciones $u=u(t)$, $v=v(t)$. Hallemos la expresión de la longitud de arco del segmento de la curva con extremos en los puntos $P_0(t_0)$ y $P(t)$.

Tenemos
$$s(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt=\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{r}'(u(t),v(t)|\,dt=$$
$$=\int_{\gamma(P_0,P)}|d\boldsymbol{r}(u,v)|=\int_{\gamma(P_0,P)}\sqrt{I},$$
donde I es la primera forma cuadrática de la superficie.

Como vemos, para medir las longitudes de las curvas sobre la superficie es suficiente conocer la primera forma cuadrática de la superficie. Debido a ello se dice que la primera forma cuadrática determina *la métrica* de la superficie y esta forma suele denominarse con frecuencia *elemento lineal de la superficie*.

La primera forma cuadrática no determina la superficie unívocamente. Es fácil citar ejemplos de distintas superficies que, con una parametrización adecuada, tengan idénticas las formas cuadráticas. Pero, hablando en términos generales, tomadas arbitrariamente dos superficies, no existen parametrizaciones para las cuales coincidan las primeras formas cuadráticas. Volveremos a tratar este problema más adelante.

§ 2. Angulo entre curvas sobre una superficie

Introduzcamos el concepto de dirección sobre la superficie. Denominaremos *dirección* $(du : dv)$ sobre la superficie Φ, dada por la ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, a la dirección del vector $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$. A veces designaremos esta dirección simplemente por (d).

Denominaremos *ángulo entre las direcciones* $(du : dv)$ y $(\delta u : \delta v)$ el ángulo que forman los vectores

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv \quad \text{y} \quad \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, \delta u + \boldsymbol{r}_v\, \delta v.$$

Hallemos la expresión para el ángulo de las direcciones (d) y (δ).

Tenemos

$$d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} = |d\boldsymbol{r}|\,|\delta\boldsymbol{r}|\cos\vartheta,$$

$$d\boldsymbol{r}^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = I\,(d),$$

$$\delta\boldsymbol{r}^2 = E\, \delta u^2 + 2F\, \delta u\, \delta v + G\, \delta v^2 = I\,(\delta),$$

$$d\boldsymbol{r}\delta\boldsymbol{r} = E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G dv \delta v = J\,(d,\delta).$$

De aquí obtenemos para $\cos\vartheta$ la siguiente expresión:

$$\cos\vartheta = \frac{I\,(d,\ \delta)}{\sqrt{I\,(d)\, I\,(\delta)}}.$$

Diremos que la curva γ sobre la superficie definida por la ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ tiene en el punto (u,v) la dirección $(du : dv)$ si el vector $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv$ es el vector tangente a la curva en este punto.

Si la curva sobre la superficie viene dada por las ecuaciones $u = u(t)$, $v = v(t)$, entonces en el punto $(u(t), v(t))$ tiene la dirección $(u'(t) : v'(t))$.

Si dos curvas γ y $\bar{\gamma}$ sobre la superficie Φ tienen el punto común (u, v) se denomina *ángulo* de estas curvas en el punto (u, v) el ángulo de sus direcciones en dicho punto. Es decir, el ángulo de las curvas sobre la superficie es el ángulo que forman las tangentes a las curvas; por consiguiente, no depende de la parametrización de la superficie ni de la parametrización de la curva.

Ejemplo. Las líneas coordenadas sobre la superficie (las líneas $u = \text{const}$ y las líneas $v = \text{const}$) tienen las direcciones $(0 : dv)$ y $(\delta u : 0)$. Pos esto, para el ángulo de las líneas coordenadas obtenemos la expresión

$$\cos\vartheta = \frac{F\,dv\delta u}{\sqrt{G\,dv^2}\sqrt{E\delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

De aquí se deduce que *la red de coordenadas sobre la superficie es ortogonal (o sea, las líneas coordenadas se cortan en ángulo recto) si, y sólo si,* $F = 0$.

Supongamos dada en un entorno del punto (u_0, v_0) de la superficie regular Φ una familia de curvas sobre la superficie definidas mediante la ecuación $\varphi(u, v) = \text{const}$ siendo $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$ en el punto (u_0, v_0). Construyamos otra familia de curvas ortogonal a la primera. Con este fin hallemos la ecuación diferencial de las líneas de la segunda familia aceptando que existe esta familia.

La dirección de la línea de la primera familia en el punto (u, v) es $(\varphi_v : -\varphi_u)$. Si designamos por $(du : dv)$ la dirección de la línea de la segunda familia en este punto, la condición de ortogonalidad de estas direcciones será

$$E\varphi_v\,du + F(\varphi_v\,dv) - \varphi_u\,du) - G\varphi_u\,dv = 0,$$

o sea,

$$(E\varphi_v - F\varphi_u)\,du + (F\varphi_v - G\varphi_u)\,dv = 0. \qquad (*)$$

Esta es precisamente la ecuación diferencial de las líneas de la segunda familia.

Teorema. En un entorno de todo punto de la superficie se puede introducir una parametrización ortogonal regular *con la particularidad de que una familia de líneas coordenadas se puede escoger arbitrariamente.*

En efecto, sea $\varphi(u, v) =$ const una familia de curvas sobre la superficie y sea $\varphi(u, v)$ una función regular que satisface la condición $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$. Consideremos dos ecuaciones diferenciales

$$\varphi_u\, du + \varphi_v\, dv = 0,$$
$$(E\varphi_v - F\varphi_u)\, du + (F\varphi_v - G\varphi_u)\, dv = 0.$$

Las curvas integrales de la primera ecuación son las curvas de la familia dada mientras que las curvas integrales de la segunda ecuación representan sus trayectorias ortogonales.

Según el § 3 del capítulo IV, la superficie puede parametrizarse de modo que las curvas indicadas constituyan las líneas coordenadas ya que

$$\begin{vmatrix} E\varphi_v - E\varphi_u & F\varphi_v - G\varphi_u \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix} = E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2 \neq 0$$

debido a que la primera forma cuadrática es definida.

Hemos demostrado el teorema.

§ 3. Area de una superficie

Sea F una superficie suave y sea G una región de la misma limitada por un número finito de curvas suaves a trozos. Dividamos la región G en regiones pequeñas empleando para ello curvas suaves a trozos. Sea g una de estas regiones. Tomemos en g un punto arbitrario P y proyectemos esta región sobre el plano tangente en el punto P. Si la región g es suficientemente pequeña, esta proyección resulta inyectiva y en el plano tangente se obtiene una región $\bar{g}$ limitada también por curvas suaves a trozos. Designemos por $\sigma(\bar{g})$ el área de la región $\bar{g}$ (fig. 34).

Por *área* de la región G de la superficie F entendemos el límite

$$\lim \sum \sigma(\bar{g}),$$

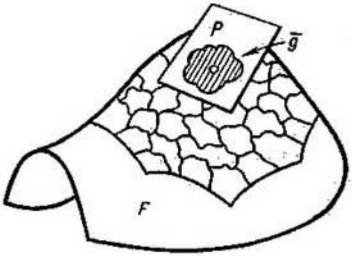

Fig. 34

donde la suma se refiere a todas las regiones g de la partición de G y el paso al límite se realiza aceptando que las dimensiones de las regiones g de la partición de G disminuyen indefinidamente.

Esta definición del área de una superficie corresponde plenamente a la intuición que, cuando se trata de medir un área, nos hace dividir la superficie y «aplanar» los trozos obtenidos. Demostraremos que, así definida, el área de la superficie posee efectivamente su característica propiedad aditiva y obtendremos asimismo la fórmula que permite calcular el área cualquiera que sea la parametrización de la superficie.

Supongamos, para simplificar los razonamientos, que existe una parametrización suave válida para toda la superficie:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(u, v).$$

A la región G sobre la superficie le corresponde una región $\tilde{G}$ del plano uv limitada por curvas suaves a trozos y a una partición de la región G mediante curvas suaves a trozos en regiones g le corresponde una partición de la región G en regiones $\tilde{g}$ mediante curvas suaves a trozos.

Determinemos el área $\sigma\,(\tilde{g})$ de la región $\tilde{g}$. Consideremos con este fin las coordenadas cartesianas rectangulares x, y y z tomando como origen de coordenadas el punto P de la superficie, como plano xy el plano tangente en P y como eje z la normal a este plano.

La región g de la superficie F se define en coordenadas cartesianas mediante las ecuaciones
$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \subset \tilde{g}$.
Las igualdades

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \subset \tilde{g}$$

determinan una aplicación biunívoca de la región $\bar{g}$ sobre $\tilde{g}$. Los números u y v pueden ser considerados como las coordenadas curvilíneas en la región $\bar{g}$.

Como se sabe, el área de una región se determina, en coordenadas curvilíneas, mediante la fórmula

$$\sigma(\bar{g}) = \iint_{\tilde{g}} \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| du\, dv.$$

El vector $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ tiene la dirección de la normal a la superficie y como la normal en el punto P coincide con el eje z, resulta que el módulo del vector $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ en este punto es igual al valor absoluto de su componente respecto al eje z, o sea,

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\|.$$

De ello se deduce, por continuidad, que para cualesquiera u, v de $\tilde{g}$ se tiene

$$\left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v + \varepsilon_g(u, v),$$

donde ε_g es tan pequeño como se quiera si son pequeñas las dimensiones de la región g.

Para la suma de las áreas $\sigma(\bar{g})$ tenemos

$$\sum \sigma(\bar{g}) = \sum \iint_{\tilde{g}} (|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| + \varepsilon_g(u, v))\, du\, dv =$$

$$= \iint_{G} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv + \sum \iint_{\tilde{g}} \varepsilon_g\, du\, dv.$$

Si la partición de G se ha realizado en regiones g suficientemente menudas, las magnitudes ε_g resultarán menores que cualuier $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, debido a la continuidad uniforme de $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ en $\widetilde{G}$. Por esto,

$$\left| \sum \iint\limits_{\widetilde{g}} \varepsilon_g \, du \, dv \right| < \varepsilon \sum \sigma(\widetilde{g}) = \varepsilon\sigma(\widetilde{G}),$$

donde $\sigma(\widetilde{G})$ es el área de la región $\widetilde{G}$.

De aquí se deduce que

$$\sum \sigma(\widetilde{g}) \to \iint\limits_{\widetilde{G}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv$$

cuando las regiones g de la partición de la región G disminuyen indefinidamente. Con esto queda probado que el área existe y se expresa mediante la fórmula

$$\sigma(G) = \iint\limits_{\widetilde{G}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv.$$

La propiedad aditiva del área de la superficie se deduce de la propiedad aditiva de la integral. Efectivamente, supongamos que una curva suave a trozos divide la región G en dos regiones G_1 y G_2; sean $\widetilde{G}_1$ y $\widetilde{G}_2$ las regiones correspondientes del plano uv. Tenemos

$$\iint\limits_{\widetilde{G}} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv = \iint\limits_{\widetilde{G}_1} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv + \\ + \iint\limits_{\widetilde{G}_2} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv.$$

Pero esto significa que

$$\sigma(G) = \sigma(G_1) + \sigma(G_2);$$

esta fórmula expresa la propiedad aditiva del área de la superficie.

Ahora, cuando hemos demostrado que el área es aditiva, podemos calcular el área de una superficie dividiéndola en partes y empleando para cada parte una parametrización adecuada.

Para terminar, mostremos que el área de la superficie se determina por su primera forma cuadrática exclusivamente. En efecto,

$$|r_u \times r_v|^2 = r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2 = EG - F^2,$$

de donde

$$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

En particular, si la superficie viene dada por la ecuación $z = z(x, y)$ se tiene

$$\sigma = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

§ 4. Aplicación conforme

Sean Φ_1 y Φ_2 dos superficies regulares. Una aplicación topológica de la superficie Φ_1 sobre la superficie Φ_2 se denomina *conforme* si conserva los ángulos de las curvas, o sea, si las curvas correspondientes de estas superficies forman, al cortarse, ángulos idénticos.

Teorema. Si dos superficies regulares Φ_1 y Φ_2 se han parametrizado de modo que son proporcionales los coeficientes de sus primeras formas cuadráticas, entonces es conforme la aplicación de una de las superficies sobre la otra que asocia los puntos de coordenadas iguales. Recíprocamente, si las superficies Φ_1 y Φ_2 se han parametrizado de modo que resulta conforme la correspondencia que asocia puntos de coordenadas iguales, entonces son proporcionales las primeras formas cuadráticas de las superficies.

Demostración. Sean

$$I_1 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$
$$I_2 = \lambda (E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)$$

las primeras formas cuadráticas de las superficies Φ_1 y Φ_2. Si la aplicación de Φ_1 sobre Φ_2 consiste en asociar puntos de coordenadas iguales, las curvas correspondientes tienen ecuaciones internas idénticas $u = u(t)$, $v = v(t)$ y, por consiguiente, se obtiene una misma expresión para el ángulo que forman las curvas correspondientes, o sea, la aplicación es conforme. Hemos demostrado la primera parte del teorema.

Demostremos la segunda parte del teorema.

Sea (u, v) una parametrización arbitraria de la superficie Φ_1. Parametricemos la superficie Φ_2 tomando como coordenadas de cualquier punto de la misma las coordenadas del punto de Φ_1 que le corresponde por la aplicación conforme. Sean

$$I_1 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2,$$
$$I_2 = E_2\,du^2 + 2F_2\,du\,dv + G_2\,dv^2$$

las primeras formas cuadráticas de las superficies correspondientes a estas parametrizaciones. Mostremos que los coeficientes E_1, F_1 y G_1 son proporcionales a E_2, F_2 y G_2.

Puesto que la aplicación es conforme, la ortogonalidad de las direcciones (d) y (δ) respecto a la forma I_1 implica la ortogonalidad de las mismas respecto a la forma I_2. Por esto, de

$$E_1\,du\,\delta u + F_1\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_1\,dv\,\delta v = 0$$

se deduce

$$E_2\,du\,\delta u + F_2\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G_2\,dv\,\delta v = 0.$$

Eliminando δu y δv, obtenemos de aquí

$$\frac{E_1\,du + F_1\,dv}{E_2\,du + F_2\,dv} = \frac{F_1\,du + G_1\,dv}{F_2\,du + G_2\,dv}.$$

Como du y dv son arbitrarios, tomando $dv = 0$ obtenemos

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{F_1}{F_2}$$

y para $du = 0$ obtenemos

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1}{G_2}.$$

Hemos demostrado completamente el teorema.

Aparte de conservar los ángulos, la aplicación conforme posee otra propiedad notable; a saber, *son semejantes en primera aproximación las figuras suficientemente pequeñas que se corresponden en las superficies por la aplicación conforme.* Efectivamente, sea F_1 una figura pequeña de la superficie Φ_1. La distancia entre sus puntos (u, v) y $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ en primera aproximación es igual a

$$E\Delta u^2 + 2F\,\Delta u\,\Delta v + G\,\Delta v^2,$$

La distancia entre los puntos correspondientes de la figura F_2 de la superficie Φ_2 en primera aproximación es igual a

$$\lambda (E\Delta u^2 + 2F\Delta u\Delta v + G\Delta v^2).$$

Es decir, el coeficiente de alteración es igual a λ y, por consiguiente, es casi constante si la figura F_1 es suficientemente pequeña.

Teorema. Sean Φ_1 y Φ_2 dos superficies regulares y P_1 y P_2 dos puntos arbitrarios de las mismas. Entonces existe una aplicación conforme de un entorno del punto P_1 de la superficie Φ_1 sobre un entorno del punto P_2 de la superficie Φ_2.

La demostración de este teorema se basa en la posibilidad de parametrizar una superficie regular en un entorno de cualquier punto de modo que su primera forma cuadrática correspondiente a esta parametrización sea

$$I = \lambda (u, v) (du^2 + dv^2).$$

No daremos la demostración de esta proposición; señalemos sólo que, una vez parametrizadas de este modo las superficies Φ_1 y Φ_2 en los entornos de los puntos respectivos P_1 y P_2, la aplicación conforme del entorno del punto P_1 de la superficie Φ_1 sobre el entorno del punto P_2 de la superficie Φ_2 se obtiene por asociación de puntos de idénticas coordenadas.

Para terminar, veamos un ejemplo de aplicación conforme de la esfera sobre el plano.

Sea ω la esfera de radio R y centro en el punto $(0, 0, R)$. Consideremos la aplicación de la esfera ω sobre el plano xy consistente en su proyección desde el polo S $(0, 0, 2R)$. Esta aplicación se denomina *proyección estereográfica* (fig. 35).

Tomemos como coordenadas curvilíneas los ángulos u y v representados en la fig. 35. Entonces, las ecuaciones del plano serán

$$x = 2R \operatorname{tg} u \cos v, \quad y = 2R \operatorname{tg} u \operatorname{sen} v$$

y las ecuaciones de la esfera serán

$$x = 2R \operatorname{sen} u \cos u \cos v, \quad y = 2R \operatorname{sen} u \cos u \operatorname{sen} v,$$

$$z = 2R \operatorname{sen}^2 u.$$

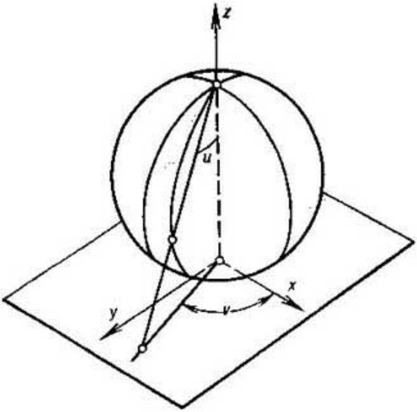

Fig. 35

El elemento lineal del plano será

$$ds^2 = \frac{4R^2}{\cos^4 u}\,(du^2 + \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u\, dv^2)$$

y el elemento lineal de la esfera será

$$ds^2 = 4R^2\,(du^2 + \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u\, dv^2).$$

De ello se deduce que la aplicación es conforme.

§ 5. Superficies isométricas. Doblamiento de superficies

Las superficies Φ_1 y Φ_2 se llaman *isométricas* si existe una aplicación inyectiva de la superficie Φ_1 sobre la superficie Φ_2 tal que las curvas correspondientes de estas superficies tengan longitudes iguales.

Teorema. Si las superficies regulares Φ_1 y Φ_2 se pueden parametrizar de modo que sus primeras formas cuadráticas sean iguales, estas superficies son isométricas. La aplicación isométrica consiste en hacer corresponder los puntos de coordenadas iguales. Recíprocamente, si las superficies

Φ_1 y Φ_2 son isométricas, pueden ser parametrizadas de modo que sus primeras formas cuadráticas sean iguales.

Demostración. La primera parte del teorema es obvia. Basta observar primero que si la curva γ_1 sobre la superficie Φ_1 viene dada por las ecuaciones $u = u(t)$, $v = v(t)$, la curva que le corresponde sobre la superficie Φ_2 viene dada por las mismas ecuaciones $u = u(t)$, $v = v(t)$ y emplear después la fórmula para la longitud de arco de una curva.

Demostremos la segunda parte del teorema.

Sea P_1 un punto arbitrario de la superficie Φ_1 y sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ cualquier parametrización regular de la superficie en un entorno de este punto.

Sea $P_2(u, v)$ el punto de la superficie Φ_2 que corresponde por isometría a $P_1(u, v)$ y sea $\boldsymbol{r}_2(u, v)$ el vector de este punto. La ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$$

determina una parametrización de la superficie Φ_2 en un entorno del punto P_2. No podemos demostrar en este momento que es regular; sólo podremos hacerlo en el capítulo IX. Pero supongamos que la parametrización $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$ de la superficie Φ_2 es regular. Mostremos que, dada esta parametrización, la primera forma cuadrática de la superficie Φ_2 coincide con la primera forma cuadrática de la superficie Φ_1.

Sea γ_1 una curva arbitraria sobre la superficie Φ_1 y sean $u = u(t)$, $v = v(t)$ sus ecuaciones. La curva que le corresponde por isometría sobre la superficie Φ_2 viene dada por las mismas ecuaciones. Por esto,

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{E_1 u'^2 + 2F_1 u'v' + G_1 v'^2}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{F_2 u'^2 + 2F_2 u'v' + G_2 v'^2}\, dt.$$

Puesto que esta igualdad es válida para todo t, los integrandos son iguales. Como la curva γ_1 es totalmente arbitraria, los integrandos son iguales cualesquiera que sean los valores de u' y v'; pero esto es posible sólo si $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ y $G_1 = G_2$.

Hemos demostrado el teorema.

Es evidente que las superficies iguales son isométricas. La afirmación recíproca, hablando en términos generales, es falsa. Es fácil dar ejemplos de superficies isométricas que no sean iguales. Veamos uno.

La región rectangular $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < 1$ del plano xy es isométrica a la región del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ determinada por las condiciones $0 < z < 1$, $x > 0$ $y > 0$. Basta señalar que esta región del cilindro admite la parametrización $x = \cos u$, $y = \operatorname{sen} u$, $z = v$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < 1$. El elemento lineal del cilindro correspondiente a esta parametrización es $du^2 + dv^2$. De aquí se ve que la aplicación definida por las igualdades $x = u$, $y = v$ es isométrica.

Puesto que los ángulos de las curvas sobre la superficie y el área de la superficie se determinan por la primera forma cuadrática y puesto que las superficies isométricas, adecuadamente parametrizadas, tienen las primeras formas cuadráticas iguales, resulta que *la aplicación isométrica conserva los ángulos de las curvas y conserva las áreas*, o sea, las curvas correspondientes de superficies isométricas forman ángulos iguales y las regiones correspondientes tienen áreas iguales.

Hemos demostrado con un ejemplo que superficies distintas, adecuadamente parametrizadas, pueden tener las primeras formas cuadráticas iguales. Se plantean dos preguntas: ¿en qué grado la primera forma cuadrática determina la superficie? y ¿existe una superficie que tiene como primera forma cuadrática una forma cuadrática escogida arbitrariamente?

Resulta que «localmente» la superficie no queda determinada, ni mucho menos, por su primera forma cuadrática. Se conoce, por ejemplo, el teorema siguiente. *Para todo entorno ω suficientemente pequeño de un punto P de una superficie analítica existen superficies isométricas a ω y distintas de ella.*

Algunas superficies «globalmente» quedan determinadas unívocamente por la primera forma cuadrática. Por ejemplo, *cualquier superficie regular Φ, cerrada y convexa, queda determinada unívocamente por la primera forma cuadrática*, en el sentido de que toda superficie regular Φ' isométrica a Φ es igual a Φ. Se puede señalar una clase suficientemente amplia de superficies infinitas que se determinan unívocamente por la primera forma cuadrática. Como ejemplo de una superficie de esta clase podemos señalar un paraboloide elíptico cualquiera.

Se denomina *doblamiento* de la superficie toda deformación continua de la misma que no altera las longitudes de las curvas sobre la superficie. Una idea clara del doblamiento de la superficie se puede obtener doblando una hoja de papel.

Puesto que el doblamiento de la superficie no altera las longitudes de las curvas y, por consiguiente, en todo momento del doblamiento la superficie permanece isométrica a la superficie inicial, obtenemos que durante *el doblamiento de la superficie, adecuadamente parametrizada, su primera forma cuadrática no varía.*

Resulta que «localmente» las superficies, como regla, son suscpetibles al doblamiento. Por ejemplo, tiene lugar el teorema: *para todo punto de una superficie analítica que no sea plano existe un entorno que admite doblamientos continuos.*

Pero entre las superficies existen las que «globalmente» no admiten doblamientos continuos. Así son, por ejemplo, todas las superficies convexas cerradas.

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO VI

1. Hallar la primera forma cuadrática de la superficie de revolución

$$x = \varphi(u) \cos v, \quad y = \varphi(u) \operatorname{sen} v, \quad z = \psi(u).$$

Respuesta. $I = (\varphi'^2 + \psi'^2)\, du^2 + \varphi^2\, dv^2$.

2. Demostrar que la superficie de revolución puede parametrizarse de modo que su primera forma cuadrática sea

$$I = du^2 + G(u)\, dv^2.$$

3. Hallar la longitud de arco de la curva dada por la ecuación $u = v$ sobre una superficie con la primera forma cuadrática

$$I = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\, dv^2.$$

Respuesta. $s = |\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|$.

4. Hallar el ángulo que forman las líneas coordenadas $x = x_0$ e $y = y_0$ sobre la superficie $z = axy$.

Respuesta. $\cos\vartheta = \dfrac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2x_0^2}\sqrt{1+a^2y_0^2}}$.

5. Demostrar que es ortogonal la red de coordenadas u, v sobre el helicoide

$$x = au\cos v,\ y = au \operatorname{sen} v,\ z = bv.$$

6. Hallar la familia de curvas que forman ángulo recto con las generatrices rectilíneas $x = \text{const}$ del paraboloide $z = axy$.

Respuesta. $(1 + a^2x^2)\, y^2 = \text{const}$.

7. Hallar sobre la esfera las curvas que forman ángulo constante con los meridianos (estas curvas se denominan loxodrómicas).

8. Hallar el área del cuadrilátero del helicoide (ejercicio 5) limitado por las curvas

$$u=0,\quad u=\frac{b}{a},\quad v=0 \text{ y } v=1.$$

Respuesta. $\sigma = \dfrac{b^2}{a}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$.

9. Demostrar que son iguales las áreas de las regiones de los paraboloides

$$z=\frac{a}{2}(x^2+y^2) \text{ y } z=axy$$

que se proyectan en una misma región del plano xy.

10. Demostrar que la superficie es localmente isométrica al plano si admite una parametrización tal que los coeficientes de su primera forma cuadrática no dependan de u ni de v.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO VI

1. Demostrar que siendo $U(x, y)$ y $V(x, v)$ la parte real y la parte imaginaria, respectivamente, de una función de variable compleja $x + iy$, son iguales las áreas de las regiones de las superficies

$$z = U(x, y) \text{ y } z = V(x, y)$$

que se proyectan en una misma región del plano xy.

2. Demostrar que existe una aplicación conforme de la superficie de revolución (ejercicio 1) sobre el plano por efecto de la cual los meridianos de la superficie (las líneas $v = \text{const}$) se transforman en rectas que pasan por el origen de coordenadas y los paralelos (las líneas $u = \text{const}$), en círculos con centro en el origen de coordenadas.

Considerar el caso particular en el que

$$\varphi(u) = \cos u \text{ y } \psi(u) = \operatorname{sen} u$$

(esfera).

3. Demostrar que existe una aplicación conforme de la superficie de revolución sobre el plano por cuyo efecto los meridianos y los paralelos de la superficie se transforman en rectas $x =$ const o $y =$ const. Considerar el caso particular en el que la superficie es una esfera.

4. Demostrar que ni siquiera localmente existe una aplicación isométrica de la esfera sobre el plano.

5. Demostrar que siendo $U(x, y) + iV(x, y)$ una función analítica de variable compleja $x + iy$ con la particularidad de que en el punto (x_0, y_0)

$$\begin{vmatrix} U_x & V_x \\ U_y & V_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

es conforme la aplicación del plano sobre sí mismo que asocia al punto con coordenadas cartesianas x e y el punto con coordenadas cartesianas $U(x, y)$ y $V(x, y)$.

6. Sea

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

el elemento lineal de una superficie analítica. Consideremos la ecuación diferencial

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

en el plano complejo. Sea $\varphi(u, v) =$ const la solución de esta ecuación y sean $U(x, y)$ y $V(x, y)$ las partes real e imaginaria de la función $\varphi(x, y)$. Demostrar que siendo

$$\begin{vmatrix} U_u & V_u \\ U_v & V_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

es conforme la aplicación de la superficie sobre el plano que hace corresponder al punto (u, v) de la superficie el punto del plano de coordenadas cartesianas U y V. (En este resultado puede basarse la demostración del teorema del § 4 del capítulo VI en el caso de superficies analíticas.)

7. La aplicación de una superficie sobre otra se denomina *autálica* si las regiones correspondientes por esta aplicación tienen áreas iguales.

Demostrar que es isométrica toda aplicación conforme y autálica de una superficie sobre otra.

8. Demostrar que cualquier aplicación isométrica del plano sobre sí mismo es un movimiento o bien un movimiento seguido de una aplicación especular.

9. Sean Φ_1 y Φ_2 superficies isométricas y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u, v)$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$ sus parametrizaciones. La aplicación isométrica consiste en poner en coorespondencia los puntos de coordenadas iguales. Sea $\Phi_{\lambda,\mu}$ la superficie definida por la ecuación $\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{r}_1(u, v) + \mu\boldsymbol{r}_2(u, v)$. Demostrar que las superficies $\Phi_{\lambda,\mu}$ y $\Phi_{\mu,\lambda}$ son isométricas.

10. Demostrar que existe una aplicación isométrica del helicoide

$$x = u\cos v,\quad y = u\operatorname{sen} v,\quad z = mv$$

sobre el catenoide

$$x=\alpha\cos\beta,\quad y=\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta,\quad z=m\,\mathrm{arch}\,\frac{\alpha}{m}$$

tal que las generatrices rectilíneas del helicoide corresponden a los meridianos del catenoide.

11. Demostrar que cualquier superficie helicoidal admite una aplicación isométrica sobre cierta superficie de revolución por cuyo efecto las hélices corresponden a los paralelos (teorema de Bour).

12. Una red de curvas sobre una superficie se denomina red de Chébyshev si son iguales los lados opuestos de todo cuadrilátero formado por las líneas de la red. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que la red de coordenadas sobre la superficie sea una red de Chébyshev es que $E_v = G_u = 0$.

13. Demostrar que si la red de coordenadas es una red de Chébyshev, las coordenadas u y v pueden escogerse de modo que el elemento lineal de la superficie tome la forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2,$$

donde ω es el ángulo que forman las líneas coordenadas.

14. Demostrar que en la superficie de traslación

$$r = U(u) + V(v)$$

las líneas coordenadas forman una red de Chébyshev.

CAPITULO VII

SEGUNDA FORMA CUADRATICA DE UNA SUPERFICIE Y CUESTIONES ADJUNTAS DE LA TEORIA DE SUPERFICIES

Sean Φ una superficie regular, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ alguna parametrización regular de la misma y $\boldsymbol{n}(u, v)$ el vector unitario de la normal a la superficie en el punto $P(u, v)$.

Se denomina segunda forma cuadrática de la superficie la forma cuadrática

$$-d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{n} = (-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u)\, du^2 + (-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v - \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u)\, du\, dv + (-\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v)\, dv^2.$$

Para los coeficientes de esta forma emplearemos las notaciones siguientes

$$-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u = L,\quad -\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v - \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u = 2M,\quad -\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v = N.$$

Puesto que $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ y, por consiguiente,

$$d(d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}) = (d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}) + (d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}) = 0,$$

se tiene

$$II = d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,du^2 + 2(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\,du\,dv + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,dv^2,$$

de donde

$$L = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n}, \quad M = \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n}, \quad N = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n}.$$

Puesto que $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$ y $|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v| = \sqrt{EG-F^2}$, se tiene

$$L = \frac{(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$M = \frac{(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$N = \frac{(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

En particular, si la superficie viene dada por la ecuación $z = z(x, y)$, se tiene

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

§ 1. Curvatura de una curva sobre una superficie

Sean Φ una superficie regular, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ alguna parametrización regular de la misma y γ una curva regular sobre la superficie que pasa por el punto $P(u, v)$ y tiene en este punto la dirección $(du : dv)$. Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva γ.

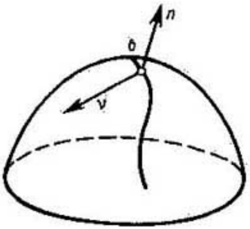

Fig. 36

Consideremos el producto escalar $(\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n})$. El vector $\boldsymbol{r}''$ tiene la dirección de la normal principal a la curva y su módulo es igual a la curvatura de la curva. De ello resulta que

$$(\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n}) = k\cos\vartheta,$$

donde k es la curvatura de la curva y ϑ es el ángulo que forman la normal principal a la curva y la normal a la superficie (fig. 36). Pero

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}''\boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{r}_{uu}u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u'v' + \boldsymbol{r}_{vv}v'^2 + \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v'')\,\boldsymbol{n} = \\ &= (\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n})\,u'^2 + 2\,(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n})\,u'v' + (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n})\,v'^2.\end{aligned}$$

Por esto

$$k\cos\vartheta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{II}{I}.$$

El segundo miembro de esta igualdad depende sólo de la dirección de la curva en el punto $P\,(u,\ v)$. Es decir,

$$k\cos\vartheta = k_0 = \text{const}$$

en el punto $P\,(u,\ v)$ para todas las curvas γ que pasan por este punto y tienen en él una misma dirección (o sea, una misma tangente).

La igualdad

$$k\cos\vartheta = k_0 = \text{const}$$

expresa el teorema de Meusnier.

La magnitud k_0 se denomina *curvatura normal* de la superficie en la dirección dada $(du : dv)$. Salvo el signo, es igual a la curvatura de la curva que se obtiene en la intersección de la superficie y el plano que es perpendicular al plano tangente y que comprende la dirección $(du : dv)$.

La curvatura normal de la superficie en la dirección dada coincide con la curvatura normal del paraboloide osculador en esta misma dirección.

Efectivamente, si referimos la superficie y su paraboloide osculador en el punto P a las coordenadas cartesianas rectangulares tomando como plano xy el plano tangente en este punto y como eje z la normal al mismo, la superficie y el paraboloide vienen dados por las ecuaciones

$$z = z(x, y),$$

$$z = \frac{1}{2}(z_{xx}|_P x^2 + 2z_{xy}|_P xy + z_{yy}|_P y^2).$$

De aquí se ve que la primera y la segunda formas cuadráticas de la superficie y del paraboloide en el punto P son iguales y, por consiguiente, son iguales las curvaturas normales.

El resultado expuesto permite hallar la ecuación del paraboloide osculador en el sistema de coordenadas ligado de un modo natural a cualquier parametrización (u, v) de la superficie si tomamos el plano tangente en el punto $P(u_0, v_0)$ como plano xy, la normal al mismo como eje z y los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ como vectores de la base.

La ecuación del paraboloide se puede representar, evidentemente, en la forma

$$\boldsymbol{r} = (u-u_0)\boldsymbol{r}_u + (v-v_0)\boldsymbol{r}_v + \\ + \frac{1}{2}\{A(u-u_0)^2 + 2B(u-u_0)(v-v_0) + C(v-v_0)^2\}\boldsymbol{n}.$$

La curvatura normal del paraboloide en la dirección $(du : dv)$ será

$$\frac{A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2}{\boldsymbol{r}_u^2\,du^2 + 2(\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv + \boldsymbol{r}_v^2\,dv^2}.$$

Comparando esta expresión con la curvatura normal de la superficie en la misma dirección y teniendo en cuenta

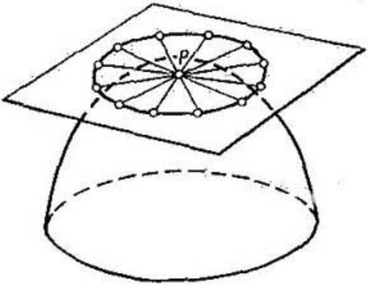

Fig. 37

que du y dv son arbitrarios, deducimos que

$$A = L, \quad B = M \text{ y } \quad C = N.$$

Por esto, la ecuación del paraboloide en forma paramétrica es

$$x = u - u_0, \quad y = v - v_0,$$

$$z = \frac{1}{2}\{L(u-u_0)^2 + 2M(u-u_0)(v-v_0) + N(v-v_0)^2\}$$

lo que equivale a

$$z = \frac{1}{2}(Lx^2 + 2Mxy + Ny^2).$$

A partir de un punto arbitrario $P(u, v)$ de la superficie tomemos en cada dirección $(du : dv)$ un segmento igual a $\left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{2}}$, donde k es la curvatura normal de la superficie en esta dirección. El lugar geométrico de los extremos de estos segmentos se denomina *indicatriz de curvatura* de la superficie en el punto P (fig. 37).

También se denomina con frecuencia *indicatriz de Dupin*.

Veamos qué representa en sí la indicatriz de curvatura. Para ello consideremos en el plano tangente a la superficie las coordenadas cartesianas que se obtienen al tomar el punto de tangencia como origen de coordenadas, las rectas que comprenden los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ como ejes de coordenadas y los propios vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ como vectores de la base. Sean x e y las coordenadas del punto de la indicatriz de curvatura correspondiente a la dirección $(du : dv)$. Tenemos

$$x\boldsymbol{r}_u + y\boldsymbol{r}_v = \left|\frac{1}{k}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{\boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv}{|\boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv|}.$$

Elevando al cuadrado esta igualdad y observando que $x : y = du : dv$, obtenemos

$$Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{|L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2|} = \frac{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}{|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2|}.$$

De aquí resulta

$$|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2| = 1.$$

Esta es precisamente la ecuación de la indicatriz de curvatura.

De este modo, *la indicatriz de curvatura representa una elipse en un punto elíptico de la superficie* ($LN - M^2 > 0$), *un par de hipérbolas conjugadas en un punto hiperbólico* ($LN - M^2 < 0$) *y un par de rectas paralelas en un punto parabólico* ($LN - M^2 = 0$).

Es evidente que *la superficie y su paraboloide osculador tienen la misma indicatriz de curvatura.*

La indicatriz de curvatura se puede introducir también de otro modo, de carácter más geométrico. Sean P un punto arbitrario de la superficie y α el plano tangente en este punto. Designemos por M_h el lugar geométrico de los puntos de la superficie cuyas distancias a α son iguales a h. Sometámoslo a una transformación de semejanza tomando P como centro de semejanza y $\frac{1}{\sqrt{h}}$ como coeficiente de semejanza. Designemos por $\frac{1}{\sqrt{h}} M_h$ el conjunto de puntos obtenido.

Si el plano tangente en P se toma como plano xy y la normal como eje z, la ecuación de la superficie será

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+(x^2+y^2)\,\varepsilon(x,y),$$

donde $\varepsilon(x, y)\to 0$ cuando x, $y\to 0$. De aquí que los puntos de M_h satisfacen la ecuación

$$h=\left|\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+(x^2+y^2)\,\varepsilon(x,y)\right|.$$

Puesto que las coordenadas de un punto de $\frac{1}{\sqrt{h}}M_h$ difieren en el factor $\sqrt{h}$ de las coordenadas del punto correspondiente de M_h, ellas satisfacen la ecuación

$$1=\left|\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+(x^2+y^2)\,\varepsilon\left(x\sqrt{h},\ y\sqrt{h}\right)\right|.$$

De aquí se ve que $\frac{1}{\sqrt{h}}M_h$ converge a la indicatriz de curvatura cuando $h\to 0$.

§ 2. Direcciones asintóticas. Líneas asintóticas. Direcciones conjugadas. Redes conjugadas sobre la superficie

La dirección $(du : dv)$ en el punto $P(u, v)$ sobre la superficie regular Φ se denomina *asintótica* si la curvatura normal de la superficie en esta dirección es igual a cero. Es decir, la dirección $(du : dv)$ será asintótica si, y sólo si, se cumple la condición

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0.$$

De ello resulta que *en un punto elíptico de la superficie no existen direcciones asintóticas, en un punto hiperbólico existen dos direcciones asintóticas, en un punto parabólico existe una dirección asintótica y, finalmente, en un punto plano cualquier dirección es asintótica.*

Una curva sobre la superficie se denomina *línea asintótica* si su dirección es asintótica en todo punto.

De aquí se deduce que

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=0$$

es la ecuación diferencial de las líneas asintóticas.

Si la superficie contiene una recta, ésta será obviamente una línea asintótica.

Señalemos una propiedad sencilla de las líneas asintóticas. *El plano tangente a la superficie en todo punto de una línea asintótica es el plano osculador.* Efectivamente, si en el punto P de la línea asintótica γ la curvatura es igual a cero, el plano tangente a la superficie en el punto P será el plano osculador ya por el hecho de comprender la tangente a la curva. Si la curvatura de γ en el punto P es distinta de cero, el plano tangente contiene los vectores $d\boldsymbol{r}$ y $d^2\boldsymbol{r}$ (el primero porque el plano es tangente y el segundo porque la curva γ es asintótica y, por consiguiente, satisface la condición $d^2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n} = 0$). De aquí se deduce que también en este caso el plano tangente es el plano osculador a la línea asintótica.

Veamos en qué condiciones resultan asintóticas las líneas coordenadas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ de la superficie. Introduciendo sucesivamente $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ en la ecuación de las líneas asintóticas, deducimos que *la red de coordenadas será asintótica si, y sólo si, son iguales a cero los coeficientes L y N de la segunda forma cuadrática.*

Teorema. En un entorno de un punto hiperbólico de la superficie siempre se puede introducir una parametrización tal que las líneas coordenadas sean asintóticas.

Esto se deduce del teorema general del § 3 del capítulo IV puesto que las líneas asintóticas satisfacen la ecuación

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

para la cual se cumplen las condiciones del teorema mencionado ($LN - M^2 < 0$).

Sea P un punto arbitrario de la superficie Φ y sean $(du : dv)$ y $(\delta u : \delta v)$ dos direcciones sobre la superficie en el punto P. Las direcciones (d) y (δ) se denominan *conjugadas* si las rectas g_d y g_δ que comprenden estas direcciones son diámetros conjugados de la indicatriz de Dupin en el punto P.

Es decir, para que las direcciones (d) y (δ) sean conjugadas es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$L\,du\,\delta u + M\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0.$$

Una comprobación directa permite ver que la condición de conjugación de las direcciones (d) y (δ) admite una denotación compacta

$$dr \cdot \delta n = 0$$

o

$$\delta r \cdot dn = 0.$$

Las direcciones asintóticas son autoconjugadas.

Supongamos que sobre la superficie se tienen dos familias γ_α' y γ_β'' de líneas que forman una red en el sentido de que por todo punto de la superficie pasa una línea de cada familia. Entonces, la red de líneas formada por las familias γ_α' y γ_β'' se denomina *red conjugada* si en todo punto tienen direcciones conjugadas las líneas pertenecientes a las distintas familias que forman la red.

Si la red de coordenadas es una red conjugada, el coeficiente M de la segunda forma cuadrática de la superficie es igual a cero. Para comprobarlo bastará escribir la condición de conjugación para las direcciones $(du: 0)$ y $(0 : \delta v)$.

En un entorno de todo punto de la superficie que no sea un punto plano se puede introducir una parametrización tal que las líneas coordenadas formen una red conjugada, con la particularidad de que una familia de líneas coordenadas se puede escoger arbitrariamente siempre que las líneas de esta familia no tengan direcciones asintóticas.

§ 3. Direcciones principales sobre la superficie. Líneas de curvatura

La dirección $(du : dv)$ sobre la superficie se denomina *dirección principal* si la curvatura normal de la superficie alcanza en esta dirección su valor extremo. Es decir, se trata de *las direcciones que coinciden con las direcciones de los ejes de la indicatriz de curvatura.*

De aquí se deduce que en el caso general en todo punto de la superficie existen dos direcciones principales. Por coincidir con las direcciones de los ejes de la indicatriz de curvatura, *las direcciones principales son ortogonales y conjugadas* y, por consiguiente, satisfacen las condiciones

$$I(d, \delta) = E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, du\, \delta v = 0$$

(condición de ortogonalidad) y

$II\,(d, \delta) = L\,du\,\delta u + M\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0$

(condición de conjugación).

Eliminando δu y δv de estas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Esta es la condición necesaria y suficiente para que la dirección $(du : dv)$ sea principal. Se puede escribir en otra forma, más simétrica

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Las direcciones principales no quedan definidas en dos casos: en el caso de un punto plano ya que en él cualquier dirección es principal (pues la curvatura normal es igual a cero en cualquier dirección) y en un caso especial de un punto elíptico en el que la indicatriz de curvatura es una circunferencia (el punto se denomina entonces *umbílico*). En un punto umbílico, al igual que en un punto plano, cualquier dirección es principal. Esto queda reflejado en la condición $(*)$ que determina las direcciones principales. Dicha condición se cumple idénticamente sólo en dos casos: si $L = M = N = 0$ (punto plano) o si los coeficientes de la primera forma cuadrática son proporcionales a los coeficientes de la segunda forma cuadrática (punto umbílico).

Las curvaturas normales de la superficie correspondientes a las direcciones principales se denominan *curvaturas principales*.

Teorema de Rodrigues. Si la dirección (d) *es dirección principal, se tiene*

$$d\boldsymbol{n} = -k\,d\boldsymbol{r},$$

donde k *es la curvatura normal de la superficie en esta dirección. Recíprocamente, si en la dirección* (d)

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\,d\boldsymbol{r},$$

entonces (d) *es una dirección principal.*

Demostración. Sea (δ) la otra dirección principal, perpendicular a la primera. El vector $d\boldsymbol{n}$ que es perpendicular a $\boldsymbol{n}$ admite la representación

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r} + \mu\, \delta\boldsymbol{r}.$$

Multiplicando esta igualdad por $\delta\boldsymbol{r}$ y observando que $d\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0$ debido a la conjugación de las direcciones (d) y (δ) y que $d\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0$ debido a la ortogonalidad de estas direcciones, obtenemos

$$\mu\, \delta\boldsymbol{r}^2 = 0,$$

de donde $\mu = 0$. Es decir, $d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r}$. Multiplicando esta igualdad por $d\boldsymbol{r}$, obtenemos

$$(d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{n}) = \lambda\, d\boldsymbol{r}^2,$$

de donde se deduce que $\lambda = -k$. Hemos demostrado la primera parte del teorema.

Demostremos la afirmación recíproca. Sea (d) una dirección tal que

$$d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r}.$$

Demostremos que es una dirección principal. Sea (δ) la dirección perpendicular a (d). Entonces, multiplicando la igualdad $d\boldsymbol{n} = \lambda\, d\boldsymbol{r}$ por $\delta\boldsymbol{r}$, obtenemos $d\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0$. Pero esto significa que las direcciones (d) y (δ) son conjugadas. Como son, además, ortogonales, resulta que son principales.

Hemos demostrado el teorema.

Una línea sobre la superficie se denomina *línea de curvatura* si su dirección es en todo punto una dirección principal.

De ello se deduce que

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación diferencial de las líneas de curvatura.

Si las líneas coordenadas sobre la superficie son líneas de curvatura, los coeficientes F y M de la primera y de la segunda, respectivamente, formas cuadráticas son iguales a cero.

En efecto, $F = 0$ porque la red de coordenadas es ortogonal y $M = 0$ porque la red es conjugada.

Teorema. En un entorno de todo punto P de la superficie que no sea un punto umbílico ni un punto plano, la superficie puede parametrizarse de modo que las líneas coordenadas sean líneas de curvatura.

Efectivamente, la ecuación diferencial de las líneas de curvatura tiene la forma

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0. \qquad (**)$$

Puesto que en todo punto próximo a P existen dos, y sólo dos, direcciones principales, el trinomio

$$A + 2B\xi + C\xi^2$$

tiene dos raíces reales. Por eso, $AC - B^2 < 0$. Según el teorema del § 3 del capítulo IV de aquí se deduce que existe una parametrización para la cual las líneas coordenadas serán curvas integrales de la ecuación $(**)$, es decir, serán líneas de curvatura.

Para terminar, demostremos un teorema que en algunos casos permite hallar con facilidad líneas de curvatura sobre la superficie.

Teorema. Si dos superficies se cortan a lo largo de una curva γ formando ángulo constante y si esta curva es línea de curvatura sobre una de las superficies, también será línea de curvatura sobre la otra.

Demostración. Al derivar sobre la primera superficie a lo largo de la curva γ, tenemos

$$d\boldsymbol{n}_1 = \lambda_1 d\boldsymbol{r}.$$

Para la segunda superficie es

$$d\boldsymbol{n}_2 = \lambda_2\,d\boldsymbol{r} + \mu\boldsymbol{n}_1 + \nu\boldsymbol{n}_2.$$

Multipliquemos esta igualdad escalarmente por $\boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$. Entonces, tendremos

$$\boldsymbol{n}_1\,d\boldsymbol{n}_2 = \mu(\boldsymbol{n}_1^2) + \nu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) \text{ y } \boldsymbol{n}_2\,d\boldsymbol{n}_2 = \mu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) + \nu(\boldsymbol{n}_2^2).$$

Pero $\boldsymbol{n}_2 d\boldsymbol{n}_2 = 0$ y $\boldsymbol{n}_1\,d\boldsymbol{n}_2 = d(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) - \boldsymbol{n}_2\,d\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2\,d\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2\lambda_1\,d\boldsymbol{r} = 0$. Es decir,

$$\mu\boldsymbol{n}_1^2 + \nu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) = 0 \text{ y } \mu(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2) + \nu\boldsymbol{n}_2^2 = 0. \qquad (***)$$

Si las superficies no son tangentes a lo largo de la curva γ, se tiene $n_1^2 n_2^2 - (n_1 n_2)^2 = | n_1 \times n_2 |^2 \neq 0$, y, por consiguiente, las igualdades (***) pueden darse sólo si $\mu = \nu = 0$. Pero entonces para la segunda superficie se tiene $dn_2 = \lambda_2 \, dr$, o sea, γ es línea de curvatura de la segunda superficie.

Si las superficies son tangentes a lo largo de γ, la afirmación del teorema se hace evidente ya que, en virtud del teorema de Rodrígues, si la dirección de la línea γ es principal en una superficie, también será principal en la otra.

Hemos demostrado el teorema.

Corolario. Si la esfera (o el plano) forma un ángulo constante con una superficie cualquiera, la línea de intersección es una línea de curvatura.

Esto resulta de que *toda curva trazada sobre la esfera (o sobre el plano) es una línea de curvatura.*

§ 4. Relación entre las curvaturas principales de una superficie y la curvatura normal en una dirección arbitraria. Curvaturas media y gaussiana de una superficie

Expresemos la curvatura normal de la superficie en una dirección arbitraria a través de las curvaturas normales principales. Para ello consideremos las coordenadas cartesianas rectangulares x, y, y z tomando como plano xy el plano tangente a la superficie en un punto arbitrario O y como eje z la normal a la superficie. Escojamos las direcciones de los ejes x e y de modo que coincidan con las direcciones principales en el punto O.

Sea $z = z(x, y)$ la ecuación de la superficie en un entorno del punto O referida a estas coordenadas. En el punto O se tiene $z_x = 0$ y $z_y = 0$. Por eso, en el punto O se tiene

$$I = dx^2 + dy^2,$$
$$II = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

Puesto que en el punto O las direcciones $(0 : dy)$ y $(\delta x : 0)$ son conjugadas por ser direcciones principales, se tiene

$s = 0$ y, por consiguiente,

$$II = r\,dx^2 + t\,dy^2.$$

De aquí que la curvatura normal en una dirección arbitraria $(dx: dy)$ sea

$$k = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Tomando las direcciones $(0 : dy)$ y $(\delta x : 0)$, vemos que r y t son las curvaturas principales.

Sea ϑ el ángulo que forman una dirección arbitraria $(dx : dy)$ y la dirección principal $(dx : 0)$, sea k_v la curvatura normal en esta dirección y sean k_1 y k_2 las curvaturas principales correspondientes a las direcciones $(dx : 0)$ y $(0 : \delta y)$, respectivamente. Entonces de la expresión (*) para la curvatura normal se obtiene *la fórmula de Euler para la curvatura normal en una dirección arbitraria*:

$$k_v = k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \operatorname{sen}^2 \vartheta.$$

De la fórmula de Euler se deduce que para obtener la curvatura normal en una dirección arbitraria basta conocer las curvaturas principales de la superficie.

Hallemos la expresión para las curvaturas principales en el caso de cualquier representación paramétrica de la superficie.

Sean k_1 y k_2 las curvaturas principales de la superficie; supongamos, para concretar, que $k_1 \geqslant k_2$. En tal caso, como sabemos, k_1 es el máximo y k_2 es el mínimo del cociente de las formas cuadráticas

$$\frac{II}{I} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}.$$

Sean $\bar{\xi}$ y $\bar{\eta}$ los valores de las variables ξ y η para los cuales este cociente alcanza el máximo (sabemos ya que estos valores de ξ y η existen). Entonces, para todos los valores de ξ y η se tiene

$$II - k_1 I \leqslant 0,$$

con la particularidad de que para $\xi = \bar{\xi}$ y $\eta = \bar{\eta}$ se alcanza la igualdad. De ello se deduce que para estos valores es

$$(II-k_1I)'_{\xi}=0,$$
$$(II-k_1I)'_{\eta}=0,$$

o sea,

$$L\bar{\xi}+M\bar{\eta}-k_1(E\bar{\xi}+F\bar{\eta})=0,$$
$$M\bar{\xi}+N\bar{\eta}-k_1(F\bar{\xi}+G\bar{\eta})=0.$$

Eliminando $\bar{\xi}$ y $\bar{\eta}$ de estas igualdades, obtenemos la ecuación para k_1

$$\begin{vmatrix} L-k_1E & M-k_1F \\ M-k_1F & N-k_1G \end{vmatrix}=0.$$

Realizando razonamientos análogos para k_2, obtenemos la misma ecuación. Es decir, *las curvaturas principales k_1 y k_2 son raíces de la ecuación de segundo grado*

$$\begin{vmatrix} L-kE & M-kF \\ M-kF & N-kG \end{vmatrix}=0,$$

o sea,

$$k^2(EG-F^2)-k(LG-2MF+NE)+(LN-M^2)=0.$$

Definamos ahora los conceptos de curvaturas media y gaussiana de una superficie. La semisuma de las curvaturas principales de la superficie

$$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$$

se denomina *curvatura media* de la superficie.

Las siguientes propiedades justifican el término de «curvatura media».

Si k_v y $k_{v+\frac{\pi}{2}}$ son las curvaturas normales de la superficie en dos direcciones recíprocamente perpendiculares, la semisuma de las mismas es igual a la curvatura media de la superficie.

El valor medio de las curvaturas normales de la superficie en un punto dado de la superficie, o sea, el valor

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_{\vartheta}\,d\vartheta,$$

es igual a la curvatura media de la superficie.

Ambas propiedades se obtienen fácilmente de la fórmula de Euler.

El producto de las curvaturas principales de la superficie

$$K = k_1 k_2$$

se denomina curvatura *gaussiana* o *curvatura total* de la superficie.

Hallemos las expresiones de las curvaturas media y gaussiana de la superficie en términos de los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas.

Por cuanto las curvaturas principales k_1 y k_2 de la superficie satisfacen la ecuación

$$k^2 (EG - F^2) - k (LG - 2MF + NE) + (LN - M^2) = 0,$$

en virtud de la propiedad de las raíces de una ecuación de segundo grado tenemos

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2},$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

En particular, si la superficie viene dada por la ecuación $z = z(x, y)$, se tiene

$$H = \frac{1}{2}\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

donde p, q, r, s y t son las designaciones habituales de las derivadas de la función $z(x, y)$.

Notemos que el signo de la curvatura gaussiana se determina por la expresión $LN - M^2$. Por esto, *la curvatura gaussiana es positiva en los puntos elípticos, es negativa en los puntos hiperbólicos y es igual a cero en los puntos parabólicos y en los puntos planos.*

Sea M un conjunto cualquiera de puntos de una superficie. Construyamos a partir de un punto arbitrario O los vectores unitarios de las normales a la superficie en los puntos del conjunto M. Los extremos de estos vecto-

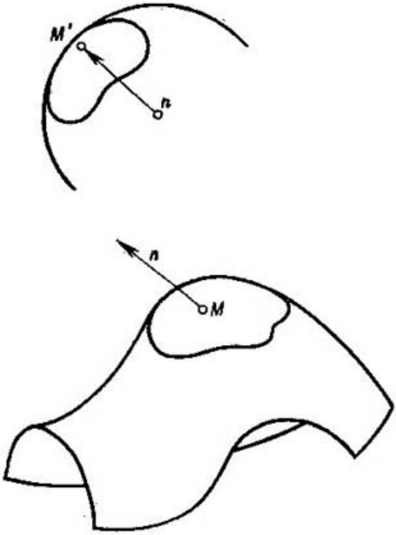

Fig. 38

res forman un conjunto M' sobre la esfera unitaria. Este conjunto se denomina *imagen esférica* del conjunto M (fig. 38).

Existe una relación importante entre el área de la superficie, el área de su imagen esférica y la curvatura gaussiana de la superficie. Esta relación se formula en el teorema siguiente.

Teorema de Gauss. El cociente del área de la imagen esférica de una región sobre la superficie al área de esta región tiende al valor absoluto de la curvatura gaussiana en el punto dado O de la superficie cuando la región tiende a este punto.

Demostraremos este teorema suponiendo que la curvatura gaussiana en el punto O es distinta de cero y que la región G, que tiende al punto O, está limitada por un número finito de curvas suaves a trozos. Esto se debe a que la imagen esférica de la región G puede no ser una región si la curvatura gaussiana en el punto O es igual a cero. Por eso, para poder analizar el caso general, habría que definir el concepto de área para un conjunto cualquiera.

Sea, pues, O un punto elíptico o hiperbólico de la superficie y sea G una región perteneciente a un entorno suficientemente pequeño del punto O y limitada por un número finito de curvas suaves a trozos.

Parametricemos la superficie en el entorno del punto O de modo que las líneas coordenadas que pasan por el punto O tengan en este punto direcciones principales.

La ecuación

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{n}(u, v),$$

donde $\boldsymbol{n}(u, v)$ es el vector unitario de la normal a la superficie, representa la parametrización de la esfera unitaria en un enotorno del punto O' correspondiente al punto O de la superficie. Efectivamente, en el punto O' la condición $\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v \neq 0$ se cumple de un modo evidente ya que $\boldsymbol{n}_u = -k_1\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{n}_v = -k_2\boldsymbol{r}_v$; por continuidad, también se cumple en un entorno de este punto. La imagen esférica G' de la región G representa una región limitada por un número finito de curvas suaves a trozos si la región G pertenece a un entorno suficientomente pequeño del punto O. Su área es

$$\sigma(G') = \iint_G |\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v| \, du \, dv.$$

Puesto que el área de la región G es

$$\sigma(G) = \iint_G |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du \, dv,$$

se tiene

$$\frac{\sigma(G')}{\sigma(G)} \to \frac{|\boldsymbol{n}_u \times \boldsymbol{n}_v|(O)}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|(O)} = |k_1k_2|.$$

Hemos demostrado el teorema.

§ 5. Superficies regladas

Una superficie Φ se denomina *superficie reglada elemental* si por todo punto P de esta superficie pasa una recta que tiene común con la superficie un segmento conteniendo el punto P, con la particularidad de que los extremos de este segmento no pertenecen a la superficie.

Ejemplo. Sean $\boldsymbol{a}(u)$ y $\boldsymbol{b}(u)$ dos funciones vectoriales que están definidas en un entorno del punto $u = u_0$ y que satisfacen en este punto las condiciones $\boldsymbol{b}(u_0) \neq 0$ y $\boldsymbol{b}(u_0) \times \boldsymbol{a}'(u_0) \neq 0$. Entonces, para ε suficientemente pequeño, la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u), \quad |u - u_0| < \varepsilon \text{ y } |v| < \varepsilon, \quad (*)$$

define una superficie reglada elemental.

Efectivamente, para ε suficientemente pequeño se tiene $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, ya que para $u = u_0$ y $v = 0$ es $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{a}'(u_0) \times \boldsymbol{b}(u_0) \neq 0$. De aquí se deduce que siendo ε suficientemente pequeño, la ecuación (*) define efectivamente una superficie. Esta superficie es una superficie reglada elemental; ello se deduce de que por un punto arbitrario (u', v') de esta superficie pasa la recta $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u') + t\boldsymbol{b}(u')$ tal que su segmento $|t| < \varepsilon$ pertenece a la superficie y sus extremos no le pertenecen.

Una superficie Φ se denomina *superficie reglada general* si todo punto de la misma tiene un entorno que es una superficie reglada elemental.

Los segmentos rectilíneos sobre la superficie reglada se denominan *generatrices rectilíneas*.

Puesto que por todo punto de una superficie reglada pasa una generatriz rectilínea, resulta que en cada punto de una superficie reglada existe una dirección en la cual es igual a cero la curvatura normal de la superficie. De ello se deduce que *sobre la superficie reglada no puede haber puntos elípticos. La curvatura gaussiana de la superficie reglada es negativa o igual a cero.*

Las generatrices rectilíneas son líneas asintóticas.

Hallemos una representación paramétrica local de una superficie reglada arbitraria, o sea, su representación paramétrica en un entorno suficientemente pequeño de un punto arbitrario P.

Distinguiremos los casos siguientes:

1. El punto P es hiperbólico.

2. Todos los puntos de un entorno suficientemente pequeño del punto P son parabólicos.

3. Todos los puntos de un entorno del punto P son puntos planos.

En el primer caso al menos una familia de líneas asintóticas en un entorno del punto P está formada por rectas.

Efectivamente, o bien todas las líneas asintóticas en el entorno del punto P son rectas o bien existen líneas asintóticas γ tan próximas a P como se quiera que no son rectas. Pero entonces son rectas todas las líneas asintóticas que cortan γ.

Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u)$ es la ecuación de la línea asintótica γ y $\boldsymbol{b}(u)$ es el vector unitario de la segunda dirección asintótica, entonces la superficie puede ser dada en un entorno del punto P mediante la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Consideremos el segundo caso. En este caso las generatrices rectilíneas son líneas de curvatura. Por todo punto Q próximo a P pasa sólo una generatriz rectilínea. Tracemos sobre la superficie, por el punto P, la curva γ de ecuación $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u)$ de modo que su dirección en el punto P no coincida con la dirección de la generatriz. El vector unitario $\boldsymbol{b}(u)$ de la generatriz es una función regular de u. En un entorno del punto P la superficie puede ser dada mediante la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Consideremos ahora el tercer caso. Como todos los puntos próximos a P son puntos planos y como en un punto plano cualquier dirección es principal y la curvatura normal en cualquier dirección es igual a cero, resulta por el teorema de Rodrígues que $d\boldsymbol{n} = 0$ en el entorno del punto P. Por consiguiente, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_0 = \text{const}$. Puesto que $\boldsymbol{n}d\boldsymbol{r} = 0$ se tiene $\boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0$. Es decir, en el tercer caso un entorno suficientemente pequeño del punto P es una región de un plano. Sean $\boldsymbol{a}_0$ y $\boldsymbol{b}_0$ dos vectores constantes independientes cualesquiera pertenecientes a este plano. Entonces la superficie puede ser dada en el entorno del punto P mediante la ecuación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_0 u + \boldsymbol{b}_0 v.$$

Es decir, en todos los casos considerados *la superficie reglada en un entorno suficientemente pequeño de todo punto admite una parametrización de tipo*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(u) + v\boldsymbol{b}(u).$$

Estudiemos ahora una clase importante de superficies regladas, las superficies desarrollables.

Una superficie Φ se denomina *superficie desarrollable* si es localmente isométrica al plano, o sea, si para todo punto de esta superficie existe un entorno isométrico a una región del plano.

Resulta *que para que la superficie sea desarrollable es necesario y suficiente que su curvatura gaussiana sea siempre igual a cero* (capítulo VIII §2 y capítulo IX § 6). Es decir, las superficies desarrollables se pueden definir como las superficies de curvatura gaussiana nula.

Toda superficie que sea la envolvente de una familia monoparamétrica de planos es una superficie desarrollable. Efectivamente, en virtud del teorema de Rodrígues, la dirección a lo largo de la generatriz rectilínea es dirección principal. Pero como la curvatura normal en esta dirección es igual a cero, también es igual a cero la curvatura gaussiana.

Estudiemos la estructura de la superficie desarrollable en un entorno de un punto arbitrario P. Distinguiremos dos casos:

1. En el entorno del punto P la curvatura media $H = 0$
2. En el entorno del punto P la curvatura media $H \neq 0$.

En el primer caso son iguales a cero las curvaturas principales de la superficie en todo punto próximo al punto P. Por consiguiente, todo punto próximo a P es un punto plano. Pero entonces, según hemos demostrado anteriormente, el punto P tiene un entorno que es una región de un plano.

Consideremos el segundo caso. Tomemos sobre la superficie la red de coordenadas formada por líneas de curvatura. Supongamos que las líneas u (o sea, v = const) son aquellas líneas de curvatura a lo largo de las cuales es igual a cero la curvatura normal de la superficie.

Según el teorema de Rodrígues, se tiene $\boldsymbol{n}_u = 0$ ya que la curvatura normal en la dirección de la línea u es igual a cero. De ello se deduce que las normales a la superficie a lo largo de la línea u son paralelas.

Demostremos que las líneas u son rectas. Tenemos $\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{n} = 0$. De aquí obtenemos que $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{n} = 0$ a lo largo de la línea u. Es decir, la línea u es plana. Además, el vector $\boldsymbol{n}_v \neq 0$ tiene la dirección de la normal a la línea u. Pero como $(\boldsymbol{n}_v)_u = (\boldsymbol{n}_u)_v = 0$, las normales a la línea u son paralelas. Esto puede ocurrir sólo si la línea u es una recta.

Es decir, en ambos casos *la superficie desarrollable es reglada y el plano tangente no varía a lo largo de las generatrices rectilíneas*. De este modo, en el segundo de los casos considerados el plano tangente depende sólo de un parámetero (v) y, por consiguiente, *la superficie desarrollable es la envolvente de una familia monoparamétrica de planos.*

§ 6. Superficies de revolución

Una superficie F se denomina *superficie de revolución* si se obtiene al girar una curva alrededor de un eje. Las líneas de intersección de la superficie con los planos que pasan por el eje de revolución se denominan *meridianos* y las líneas de intersección con los planos perpendiculares al eje de revolución se denominan *paralelos* (fig. 39).

Obtengamos la ecuación de la superficie de revolución que resulta al girar alrededor del eje z la curva γ

$$x = \varphi(u), \qquad z = \psi(u)$$

perteneciente al plano xz. Por efecto del giro de ángulo v, el punto $(\varphi(u), 0, \psi(u))$ de la curva γ se transforma en el punto

$$(\varphi(u) \cos v,\ \varphi(u) \operatorname{sen} v,\ \psi(u)).$$

De aquí que la ecuación de la superficie de revolución sea

$$x = \varphi(u) \cos v,\ y = \varphi(u) \operatorname{sen} v,\ z = \psi(u).$$

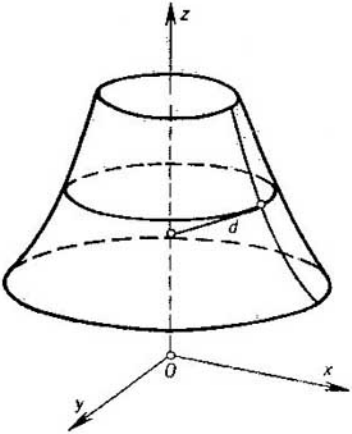

Fig. 39

Las líneas $v = \text{const}$ son los meridianos de la superficie y las líneas $u = \text{const}$ son los paralelos.

La primera forma cuadrática de la superficie es

$$I = (\varphi'^2 + \psi'^2)\, du^2 + \varphi^2\, dv^2.$$

Como vemos, *los meridianos y los paralelos de la superficie de revolución forman una red ortogonal* ($F = 0$). Desde luego, este resultado es geométricamente evidente.

La segunda forma cuadrática de la superficie es

$$II = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\, du^2 + \frac{\psi'\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}\, dv^2.$$

Como vemos, los paralelos y los meridianos forman una red conjugada ($M = 0$). Puesto que la red es, además, ortogonal, *los paralelos y los meridianos son líneas de curvatura.* Geométricamente esto también queda claro pues los planos que pasan por el eje y los planos perpendiculares al eje cortan la superficie de revolución formando ángulos constantes y, según el corolario del teorema del § 3 del capítulo VII, las líneas de intersección (o sea, los meridianos y los paralelos) deben ser líneas de curvatura.

Es importante señalar que los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas dependen sólo de u.

Hallemos las curvaturas principales de la superficie de revolución. Sean k_1 la curvatura del meridiano, sea k_2 la curvatura del paralelo y ϑ el ángulo que forma la tangente al meridiano con el eje de la superficie. Puesto que el plano del meridiano corta la superficie en ángulo recto, *la curvatura normal de la superficie en la dirección del meridiano es igual a la curvatura del meridiano*, o sea, es igual a k_1. Para la curvatura de la superificie en la dirección del paralelo obtenemos, por el teorema de Meusnier, el valor $k_2 \cos \vartheta$. La magnitud $k_2 \cos \vartheta$ tiene un sentido geométrico sencillo; a saber, *si designamos por d la longitud del segmento de la normal a la superficie comprendido entre el punto de la superficie y el eje* (fig. 39), *se tiene*

$$k_2 \cos \vartheta = \frac{1}{d}.$$

Para terminar este parágrafo *veamos un ejemplo de una superficie de revolución de curvatura gaussiana negativa constante.*

Supongamos que el eje de revolución es el eje z. La ecuación del meridiano de la superficie en el plano xz es

$$x = x(z).$$

La curvatura normal de la superficie en la dirección del meridiano es

$$k_1 = \frac{x''}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La curvatura normal de la superficie en la dirección del paralelo es

$$k_2 = -\frac{1}{x(1 + x'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

De aquí que la curvatura gaussiana de la superficie sea

$$K = \frac{-x''}{x(1 + x'^2)^2}.$$

Multiplicando esta ecuación por xx', obtenemos

$$Kxx' = \frac{-x'x''}{(1+x'^2)^2}.$$

Integrando, encontramos

$$Kx^2 + c = \frac{1}{1+x'^2},$$

donde c es una constante arbitraria. Para poder integrar en funciones elementales, pongamos $c = 1$. Entonces,

$$Kx^2 = \frac{-x'^2}{1+x'^2}.$$

Pongamos $x' = \operatorname{tg} \vartheta$. Tenemos

$$Kx^2 = -\operatorname{sen}^2 \vartheta \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sen} \vartheta.$$

Luego,

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{ctg} \vartheta \quad \text{y} \quad dz = \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{\cos^2 \vartheta}{\operatorname{sen} \vartheta} d\vartheta = \\ = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \vartheta} - \operatorname{sen} \vartheta \right) d\vartheta,$$

de donde

$$z = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\cos \vartheta + \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) + c.$$

La constante c no tiene importancia y corresponde a un desplazamiento del meridiano paralelamente al eje.

La ecuación del meridiano es

$$x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sen} \vartheta, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\cos \vartheta + \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Esta curva se denomina *tractriz*. Su propiedad distintiva consiste en que tiene longitud constante el segmento de la tangente comprendido entre el punto de tangencia y el eje z. De modo que la superficie que hemos encontrado se obtiene girando la tractríz. Esta superficie se denomina *seudoesfera*.

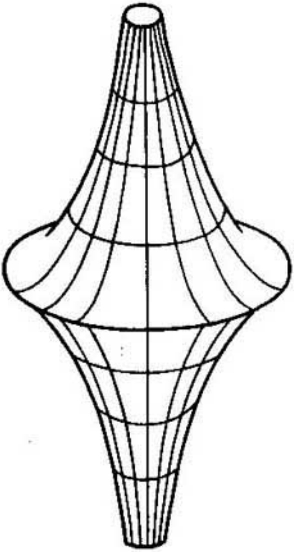

Fig. 40

Sus ecuaciones son

$$x = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{-K}} \left(\cos \vartheta + \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right).$$

La fig. 40 ofrece una idea de la forma de la seudoesfera.

EJERCICIOS PARA EL CAPITULO VII

1. Calcular la segunda forma cuadrática para la superficie helicoidal

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = v,$$

Respuesta. $\dfrac{-2du\,dv}{\sqrt{u^2+1}}$.

2. Hallar la curvatura normal del paraboloide $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$ en el punto (0, 0) en la dirección $(dx:dy)$.

Respuesta. $k=\dfrac{adx^2+bdy^2}{dx^2+dy^2}$.

3. Mostrar que cualquiera que sea la parametrización del plano la segunda forma cuadrática es idénticamente igual a cero y que cualquiera que sea la parametrización de la esfera la segunda forma cuadrática es proporcional a la primera.

4. Hallar las líneas asintóticas de la superficie

$$z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Respuesta. $x=c_1y$, $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=c_2$.

5. Determinar las líneas asintóticas del catenoide

$$x=\operatorname{ch}u\cos v,\quad y=\operatorname{ch}u\operatorname{sen}v,\quad z=u.$$

Respuesta. $u+v=\text{const}$ y $u-v=\text{const}$.

6. Mostrar que sobre el helicoide una familia de líneas asintóticas está formada por rectas y la otra, por hélices.

7. Sobre la superficie

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

hallar la familia de líneas conjugada de la familia $y=\text{const}$.

Respuesta. $1-by^2=\lambda x^2$, donde λ es una constante arbitraria.

8. Mostrar que las curvas de traslación ($u=\text{const}$ y $v=\text{const}$) forman una red conjugada sobre la superficie de traslación

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{U}(u)+\boldsymbol{V}(v).$$

9. Determinar las curvaturas principales del paraboloide

$$z=a(x^2+y^2)\ \text{en el punto}\ (0,\ 0,\ 0).$$

Respuesta. $2a$ y $2a$.

10. Determinar las líneas de curvatura sobre el helicoide

$$x=u\cos v,\quad y=u\operatorname{sen}v,\quad z=cv.$$

Respuesta.

$$\ln(u+\sqrt{u^2+c^2})-v=\text{const},$$
$$\ln(u+\sqrt{u^2+c^2})+v=\text{const}.$$

11. Hallar las líneas de curvatura del paraboloide

$$z=axy.$$

Respuesta.
$$\ln(ay+\sqrt{1+a^2y^2})\pm\ln(ax+\sqrt{1+a^2x^2})=\text{const}.$$

12. Hallar las curvaturas media y gaussiana del paraboloide $z = axy$ en el punto $x = y = 0$.

Respuesta. $K = -a^2$, $H = 0$.

13. Mostrar que la curvatura media del helicoide es igual a cero.

14. Mostrar que la curvatura media del catenoide

$$z = a \operatorname{Arch} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

es igual a cero.

15. Mostrar que la red asintótica es ortogonal si la curvatura media de la superficie es igual a cero.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO VII

1. Sean $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ una superficie arbitraria, (u_k, v_k) una sucesión de puntos convergente al punto (u_0, v_0) y $(a:b)$ una dirección en el punto (u_0, v_0) en la que es distinta de cero la curvatura normal de la superficie.

Mostrar que si

$$\frac{u_k - u_0}{v_k - v_0} \to \frac{a}{b}$$

cuando $k \to \infty$, la dirección de la recta de intersección de los planos tangentes a la superficie en los puntos (u_0, v_0) y (u_k, v_k) converge a la dirección conjugada de $(a:b)$.

2. Demostrar que por efecto de una aplicación proyectiva (afín, en particular) de una superficie toda red conjugada se transforma en una red conjugada y toda red asintótica se transforma en una red asintótica.

3. Demostrar que forman una red conjugada las secciones de la superficie correspondientes a un haz de planos que pasan por una recta arbitraria g y las líneas de tangencia de esta superficie con los conos circunscritos a ella que tienen sus vértices en la recta g (*teorema de Koenigs*).

4. Demostrar que las curvas de traslación sobre la superficie de traslación

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{U}(u) + \boldsymbol{V}(v)$$

(o sea, las curvas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$) forman una red conjugada.

5. Demostrar que sobre las superficies de Petersón

$$\boldsymbol{r} = \frac{\overline{U}(u) + \overline{V}(v)}{U(u) + V(v)},$$

donde $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son unas funciones vectoriales y U y V son unas funciones escalares de los argumentos indicados, las familias $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ forman una red conjugada.

6. Demostrar que la superficie es una esfera o una región de una esfera si todo punto de la misma es umbílico.

7. Hallar los puntos umbílicos del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

8. Demostrar que si las líneas asintóticas de diferentes familias tienen en el punto común curvaturas distintas de cero, entonces sus torsiones son iguales en valor absoluto pero tienen signos opuestos.

El valor absoluto de la torsión es igual al valor absoluto de la curvatura gaussiana de la superficie en el punto dado (*teorema de Beltrami y Enneper*).

9. Sea $\boldsymbol{r}(u, v, w)$ una función vectorial de los argumentos u, v y w. Demostrar que siendo

$$r_u r_v = r_v r_w = r_w r_u = 0$$

es

$$r_{uv} r_w = r_{vw} r_u = r_{wu} r_v = 0.$$

10. Sean dadas tres familias de superficies $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, $\psi(x, y, z) = \text{const}$ y $\chi(x, y, z) = \text{const}$, con la particularidad de que el jacobiano

$$\frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(x, y, z)} \neq 0.$$

Se dice que estas familias forman un sistema *triortogonal* de superficies si cualesquiera dos superficies de diferentes familias se cortan formando ángulo recto.

Demostrar que las superficies de distintas familias de un sistema triortogonal se cortan a lo largo de líneas de curvatura.

11. Hallar las líneas de curvatura sobre la superficie de segundo orden

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$$

incluyéndola en un sistema triortogonal de superficies confocales de segundo orden.

12. Una superficie Φ se denomina *paralela* a la superficie F si es el lugar geométrico de los extremos de los segmentos de longitud constante llevados sobre las normales a la superficie F. Consideremos como puntos correspondientes de las superficies F y Φ los extremos de los segmentos que se mencionan en la definición.

Demostrar que:

1) los planos tangentes en los puntos correspondientes de las superficies F y Φ son paralelos;

2) la propiedad de paralelismo es recíproca (o sea, si Φ es paralela a F, también F es paralela a Φ);

3) las líneas de curvatura de la superficie F corresponden a las líneas de curvatura de la superficie Φ.

13. Si el punto P de la superficie F no es punto umbílico ni punto plano, entonces en un entorno del punto P las superficies paralelas a F y las superficies desarrollables formadas por las nor-

males a la superficie F a lo largo de las líneas de curvatura forman un sistema triortogonal de superficies. Demostrar esta afirmación.

14. Demostrar que por efecto de la inversión las líneas de curvatura de la superficie dada corresponden a las líneas de curvatura de la superficie transformada.

15. Demostrar que por efecto de una aplicación conforme del espacio sobre sí mismo la esfera se transforma en una esfera o en el plano. Basándose en ello, demostrar a su vez que toda aplicación conforme es el resultado de transformaciones de semejanza, de movimiento, de reflexión especular y de inversión.

16. Expresar las curvaturas media y gaussiana de la superficie paralela en términos de las curvaturas media y gaussiana de la superficie dada y de la distancia entre las superficies.

17. Supongamos que la superficie F

$$r = f(u, v)$$

es deformada de modo que en el momento t se transforma en la superficie F_t

$$r = f(u, v) + t\lambda(u, v)\, n.$$

Demostrar que para valores pequeños de t la variación del área de la superficie, determinada por la deformación, con precisión de hasta términos de orden t es igual a

$$2t \int\limits_F \lambda H\, d\sigma,$$

donde H es la curvatura media de la superficie F y $d\sigma$ es el elemento del área de esta superficie.

18. Una superficie F se denomina *área mínima* si para todo punto P de la misma existe un entorno ω limitado por una curva simple γ tal que cualquier otra superficie limitada por γ tenga un área no menor que el entorno ω de la superficie F. Demostrar que la curvatura media de toda superficie de área mínima es igual a cero.

19. Demostrar que la aplicación esférica de una superficie de área mínima es conforme en un entorno de todo punto que no sea un punto plano.

20. Demostrar que, sobre una superficie de área mínima, el área de una región G limitada por una curva γ es igual a

$$\sigma = \frac{1}{2} \int\limits_\gamma (r, dr, n)$$

(*fórmula de Schwarz*).

21. Demostrar que toda superficie de área mínima que sea reglada es un plano o un helicoide.

22. Demostrar que toda superficie de área mínima que sea una superficie de revolución es un plano o un catenoide.

23. Hallar en cuadraturas todas las superficies de revolución que tengan curvatura gaussiana constante.

CAPITULO VIII

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE SUPERFICIES

En los dos capítulos anteriores hemos tocado varios problemas de la teoría de superficies para cuya solución se requiere sólo conocer la primera y la segunda formas cuadráticas de la superficie.

Es natural preguntarse: ¿hasta qué grado la primera y la segunda formas cuadráticas determinan la superficie y qué condiciones deben cumplir las formas cuadráticas

$$Edu^2 + 2F\,dudv + Gdv^2 \quad \text{y} \quad Ldu^2 + 2M\,dudv + Ndv^2$$

a fin de que exista una superficie para la cual estas formas cuadráticas sean su primera y segunda, respectivamente, formas cuadráticas?

Responderemos a esta pregunta con el teorema de Bonnet en el último parágrafo de este capítulo.

§ 1. Fórmulas de derivación

Las fórmulas de derivación para las superficies representan un análogo de las fórmulas de Frenet para las curvas. Expresan las derivadas de los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ en términos de estos vectores y los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas de la superficie. Obtengamos estas fórmulas.

Puesto que los vetores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ no se encuentran en un mismo plano, todo vector puede ser representado como una combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$. En particular,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{uu} &= \Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_v + \lambda_{11}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{r}_{uv} &= \Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{12}^2\boldsymbol{r}_v + \lambda_{12}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{r}_{vv} &= \Gamma_{22}^1\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{22}^2\boldsymbol{r}_v + \lambda_{22}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{n}_u &= \alpha_{11}\boldsymbol{r}_u + \alpha_{12}\boldsymbol{r}_v + \alpha_{10}\boldsymbol{n},\\
\boldsymbol{n}_v &= \alpha_{21}\boldsymbol{r}_u + \alpha_{22}\boldsymbol{r}_v + \alpha_{20}\boldsymbol{n}.
\end{aligned}$$

Mostremos que los coeficientes Γ_{ij}^k, λ_{ij} y α_{ij} se expresan efectivamente en términos de los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas de la superficie.

Observemos, ante todo, que los coeficientes α_{10} y α_{20} son iguales a cero. Para ello bastará multiplicar escalarmente por $\boldsymbol{n}$ las dos últimas igualdades. Tendremos

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}=\alpha_{10} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}=\alpha_{20}.$$

Pero

$$\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2)_u=0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}^2)_v=0.$$

Para hallar las expresiones de α_{11} y α_{12}, multipliquemos la igualdad

$$\boldsymbol{n}_u=\alpha_{11}\boldsymbol{r}_u+\alpha_{12}\boldsymbol{r}_v$$

escalarmente por $\boldsymbol{r}_u$ y por $\boldsymbol{r}_v$. Tendremos

$$-L=\alpha_{11}E+\alpha_{12}F,$$
$$-M=\alpha_{11}F+\alpha_{12}G,$$

de donde

$$\alpha_{11}=\frac{-LG+MF}{EG-F^2} \quad \text{y} \quad \alpha_{12}=\frac{LF-ME}{EG-F^2}.$$

De un modo análogo se obtienen α_{21} y α_{22}:

$$\alpha_{21}=\frac{NF-MG}{EG-F^2} \quad \text{y} \quad \alpha_{22}=\frac{-NE+MF}{EG-F^2}.$$

Para hallar los coeficientes λ_{11}, λ_{12} y λ_{22}, multipliquemos por $\boldsymbol{n}$ las tres primeras fórmulas. Obtendremos

$$\lambda_{11}=L, \quad \lambda_{12}=M \quad \text{y} \quad \lambda_{22}=N.$$

Para hallar los coeficientes Γ_{ij}^k, multipliquemos las tres primeras igualdades por $\boldsymbol{r}_u$ y por $\boldsymbol{r}_v$. Obtendremos así seis relaciones para los coeficientes Γ_{ij}^k:

$$\Gamma_{11}^1E+\Gamma_{11}^2F=\frac{1}{2}E_u,$$
$$\Gamma_{11}^1F+\Gamma_{11}^2G=F_u-\frac{1}{2}E_v,$$
$$\Gamma_{12}^1E+\Gamma_{12}^2F=\frac{1}{2}E_v,$$
$$\Gamma_{12}^1F+\Gamma_{12}^2G=\frac{1}{2}G_u,$$
$$\Gamma_{22}^1E+\Gamma_{22}^2F=F_v-\frac{1}{2}G_u,$$
$$\Gamma_{22}^1F+\Gamma_{22}^2G=\frac{1}{2}G_v.$$

De estas seis ecuaciones pueden determinarse los seis coeficientes Γ_{ij}^{h}. No daremos las fórmulas para los coeficientes Γ_{ij}^{h}; señalemos sólo que, a diferencia de los demás coeficientes, éstos *se expresan exclusivamente en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas.*

Es decir, hemos demostrado que las derivadas de los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ se expresan efectivamente a través de los vectores $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ y $\boldsymbol{n}$ con coeficientes que dependen sólo de los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas de la superficie.

Para terminar, hallemos los coeficientes Γ_{ij}^{h} en el caso en que la primera forma cuadrática de la superficie es

$$I = du^2 + Gdv^2.$$

Tomando $E = 1$ y $F = 0$ en las ecuaciones para Γ_{ij}^{h}, obtenemos

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^{1} = 0, && \Gamma_{11}^{2} = 0, \\ &\Gamma_{12}^{1} = 0, && \Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}, \\ &\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2}G_u, && \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}. \end{aligned}$$

§ 2. Fórmulas de Gauss-Petersón-Codazzi

La primera y la segunda formas cuadráticas de la superficie no son independientes. La relación entre los coeficientes de estas formas puede ser obtenida del modo siguiente.

Tenemos las igualdades evidentes

$$(\boldsymbol{r}_{uu})_v - (\boldsymbol{r}_{uv})_u = 0, \quad (\boldsymbol{r}_{vv})_u - (\boldsymbol{r}_{uv})_v = 0$$
$$\text{y } (\boldsymbol{n}_u)_v - (\boldsymbol{n}_v)_u = 0.$$

Si en estas igualdades sustituimos las expresiones que figuran entre paréntesis por las fórmulas de derivación, y, después de derivarlas, de nuevo realizamos esta sustitución, obtendremos tres igualdades vectoriales de tipo

$$A_1\boldsymbol{r}_u + B_1\boldsymbol{r}_v + C_1\boldsymbol{n} = 0,$$
$$A_2\boldsymbol{r}_u + B_2\boldsymbol{r}_v + C_2\boldsymbol{n} = 0,$$
$$A_3\boldsymbol{r}_u + B_3\boldsymbol{r}_v + C_3\boldsymbol{n} = 0,$$

donde $A_1, A_2, \ldots, C_3$ son expresiones que, de modo bien determinado, se obtienen de los coeficientes de la primera y de la segunda formas cuadráticas de la superficie y de sus derivadas. De estas tres relaciones vectoriales se deducen nueve relaciones escalares:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0,$$
$$A_2 = 0, \quad B_2 = 0, \quad C_2 = 0,$$
$$A_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad C_3 = 0.$$

Hallemos, por ejemplo, la relación $B_1 = 0$. B_1 representa el coeficiente de $\boldsymbol{r}_v$ en la expresión $\omega = (\boldsymbol{r}_{uu})_v - (\boldsymbol{r}_{uv})_u$ después de sustituir las derivadas de los vectores $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{r}_v$ de acuerdo con las fórmulas de derivación. Tenemos

$$\omega = (\Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n})_v - (\Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_u + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n})_u =$$
$$= \{(\Gamma^2_{11})_v\,\boldsymbol{r}_v + \Gamma^1_{11}\boldsymbol{r}_{uv} + \Gamma^2_{11}\boldsymbol{r}_{vv} + L\boldsymbol{n}_v\} -$$
$$- \{(\Gamma^2_{12})_u\,\boldsymbol{r}_v + \Gamma^1_{12}\boldsymbol{r}_{uu} + \Gamma^2_{12}\boldsymbol{r}_{uv} + M\boldsymbol{n}_u\} + \{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}\},$$

donde $\{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}\}$ contiene sólo los vectores $\boldsymbol{r}_u$ y $\boldsymbol{n}$. Sustituyendo los vectores $\boldsymbol{r}_{uu}$, $\boldsymbol{r}_{uv}$, $\boldsymbol{r}_{vv}$, $\boldsymbol{n}_u$ y $\boldsymbol{n}_v$ de acuerdo con las fórmulas de derivación, obtenemos

$$\omega = \Big\{ (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - (\Gamma^2_{12})_u - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} -$$
$$- E\,\frac{LN - M^2}{EG - F^2} \Big\}\, \boldsymbol{r}_v + \{\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{n}\}.$$

De este modo, la relación $B_1 = 0$ tiene la forma

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{E}\,\{(\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \ldots - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\}.$$

De esta relación se obtienen importantes corolarios:

1. *La curvatura gaussiana de la superficie se expresa sólo en términos de los coeficientes de la primera forma cuadrática y de sus derivadas (teorema de Gauss).*

2. Puesto que las superficies isométricas, adecuadamente parametrizadas, tienen iguales las primeras formas cuadráticas, resulta que *en los puntos correspondientes de las superficies isométricas son iguales las curvaturas gaussianas.*

3. Puesto que las superficies desarrollables son localmente isométricas al plano, *la curvatura gaussiana de las superficies desarrollables es igual a cero.*

Resulta que entre las nueve relaciones $A_1 = 0, \ldots, C_3 = 0$ hay sólo tres distintas. Una de ellas, la que hemos encontrado, fue obtenida por Gauss. Las otras dos fueron obtenidas primero por Petersón y más tarde por Mainardi y Codazzi.

Estas tres relaciones se pueden escribir en la forma siguiente:

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{4(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v-\left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\}$$

(*fórmula de Gauss*);

$$(EG-2FF+GE)(L_v-M_u)-$$

$$-(EN-2FM+GL)(E_v-F_u)+\begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix}=0,$$

$$(EG-2FF+GE)(M_v-N_u)-$$

$$-(EN-2FM+GL)(F_v-G_u)+\begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix}=0$$

(*fórmulas de Petersón—Codazzi*).

§ 3. Existencia y unicidad de la superficie con la primera y la segunda formas cuadráticas dadas

Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema de Bonnet. Sean

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

dos formas cuadráticas cualesquiera siendo definida positiva la primera. Supongamos que los coeficientes de estas formas satisfacen las condiciones de Gauss-Petersón-Codazzi. Entonces, existe y es única, salvo su posición en el espacio, la superficie para la cual estas formas son su primera y segunda, respectivamente, formas cuadráticas.

Demostración. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales respecto a las funciones vectoriales ξ, η y ζ:

$$\begin{aligned}
\xi_u &= \Gamma_{11}^1\xi + \Gamma_{11}^2\eta + L\zeta,\\
\xi_v &= \Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta,\\
\eta_u &= \Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta,\\
\eta_v &= \Gamma_{22}^1\xi + \Gamma_{22}^2\eta + N\zeta,\\
\zeta_u &= \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta,\\
\zeta_v &= \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta,
\end{aligned}$$

donde los coeficientes Γ_{ij}^h y α_{ij} se expresan de un modo determinado a través de los coeficientes de las formas cuadráticas dadas.

Como se sabe de la teoría de ecuaciones diferenciales, este sistema tiene solución única para los valores iniciales dados (los valores de ξ, η y ζ en un punto (u_0, v_0)) si se cumplen las condiciones de integrabilidad, o sea, si las igualdades

$$(\Gamma_{11}^1\xi + \Gamma_{11}^2\eta + L\zeta)_v - (\Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta)_u = 0,$$
$$(\Gamma_{12}^1\xi + \Gamma_{12}^2\eta + M\zeta)_v - (\Gamma_{22}^1\xi + \Gamma_{22}^2\eta + N\zeta)_u = 0,$$
$$(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta)_v - (\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta)_u = 0$$

se cumplen idénticamente en virtud de las ecuaciones del sistema. De este modo, las condiciones de integrabilidad se reducen a las condicones de Gauss-Petersón—Codazzi.

Como las condiciones de Gauss—Petersón—Codazzi. se cumplen para las formas cuadráticas dadas, resulta que para el sistema considerado de ecuaciones diferenciales se cumplen las condiciones de integrabilidad.

Sean ξ_0, η_0, y ζ_0 tres vectores que satisfacen las condiciones

$$\xi_0^2 = E(u_0, v_0), \quad \xi_0\eta_0 = F(u_0, v_0), \quad \eta_0^2 = G(u_0, v_0),$$
$$\xi_0\zeta_0 = 0, \quad \eta_0\zeta_0 = 0, \quad \zeta_0^2 = 1.$$

Sean ξ, η y ζ la solución de nuestro sistema que satisface las condiciones iniciales $\xi(u_0, v_0) = \xi_0$, $\eta(u_0, v_0) = \eta_0$ y $\xi(u_0, v_0) = \zeta_0$.

Puesto que $\xi_v = \eta_u$, existe una función vectorial $\boldsymbol{r}(u, v)$ para la cual $\boldsymbol{r}_u = \xi$ y $\boldsymbol{r}_v = \eta$. Mostremos que en un entorno del punto (u_0, v_0) la superficie definida por la ecuación vectorial $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ tiene como primera forma cuadrática

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

y como segunda forma cuadrática

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Expresemos las derivadas de las seis magnitudes ξ^2, η^2, ζ^2, $\xi\eta$, $\eta\zeta$ y $\zeta\xi$ respecto a u y v mediante estas mismas magnitudes empleando las ecuaciones de nuestro sistema. Obtendremos así doce igualdades

$$\left.\begin{array}{r} (\xi^2)_u = R_1(\xi^2, \eta^2, \ldots), \\ (\xi^2)_v = R_2(\xi^2, \eta^2, \ldots), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\zeta\xi)_v = R_{12}(\xi^2, \eta^2, \ldots), \end{array}\right\} \qquad (*)$$

donde $R_1, R_2, \ldots, R_{12}$ son unas expresiones lineales y homogéneas respecto a $\xi^2, \eta^2, \ldots, \zeta\xi$.

Podemos considerar las doce igualdades (*) como un sistema de ecuaciones diferenciales para $\xi^2, \eta^2, \ldots, \zeta\xi$. Este sistema se satisface si en lugar de $\xi^2, \eta^2, \ldots, \zeta\xi$ se toma $E, G, \ldots, 0$, respectivamente, como puede comprobarse directamente. Ambas soluciones tienen los mismos valores iniciales (los valores en el punto (u_0, v_0)). En virtud de la unicidad de la solución, de ello se deduce que

$$\xi^2 = E,\ \eta^2 = G,\ \xi\eta = F,\ \xi\zeta = 0,\ \xi\eta = 0,\ \zeta^2 = 1.$$

Puesto que $\boldsymbol{r}_u = \xi$ y $\boldsymbol{r}_v = \eta$, se tiene

$$\boldsymbol{r}_u^2 = \xi^2 = E, \quad \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = \xi\eta = F \quad \text{y} \quad \boldsymbol{r}_v^2 = \eta^2 = G.$$

Es decir, la superficie que hemos construido tiene como primera forma cuadrática

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Adémas, puesto que $\xi\zeta = \eta\zeta = 0$ y $\zeta^2 = 1$, resulta que ζ es el vector unitario de la normal a la superficie construida y, por consiguiente, los coeficientes de la segunda forma cuadrática de la superficie $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ son iguales a

$$\xi_u\zeta,\ \xi_v\zeta \text{ y } \eta_v\zeta.$$

Teniendo en cuenta las expresiones de las derivadas ξ_u, ξ_v y η_v en términos de ξ, η y ζ, así como las relaciones $\zeta\xi = 0$, $\eta\zeta = 0$ y $\zeta^2 = 1$, encontramos

$$\xi_u\zeta = L,\ \xi_v\zeta = M \text{ y } \eta_v\zeta = N.$$

Es decir, la superficie construida tiene

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

como segunda forma cuadrática.

Hemos demostrado que existe una superficie con la primera y la segunda formas cuadráticas dadas.

Desmostremos ahora que esta superficie es única salvo su posición en el espacio.

Sean Φ_1 y Φ_2 dos superficies cuyas primera y segunda formas cuadráticas coinciden. Sobrepongamos las superficies Φ_1 y Φ_2 de modo que coincidan dos puntos respectivos de las mismas (o sea, los puntos correspondientes a valores iguales de los parámetros, digamos, (u_0, v_0)) y las respectivas direcciones y normales en estos puntos. Tal superposición es factible debido a la coincidencia de las primeras formas cuadráticas. Sean $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(u, v)$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(u, v)$ las ecuaciones de las superficies realizada esta superposición.

El sistema de ecuaciones diferenciales para ξ, η y ζ se cumple obviamente si tomamos

$$\xi = \boldsymbol{r}_{1u}, \quad \eta = \boldsymbol{r}_{1v}, \quad \text{y} \quad \zeta = \boldsymbol{n}_1$$

o

$$\xi = \boldsymbol{r}_{2u}, \quad \eta = \boldsymbol{r}_{2v} \quad \text{y} \quad \zeta = \boldsymbol{n}_2.$$

Pero como ambas soluciones coinciden en el punto (u_0, v_0), han de coincidir idénticamente. O sea,

$$\boldsymbol{r}_{1u}(u, v) = \boldsymbol{r}_{2u}(u, v) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{r}_{1v}(u, v) = \boldsymbol{r}_{2v}(u, v)$$

o

$$d\boldsymbol{r}_1(u, v) = d\boldsymbol{r}_2(u, v)$$

de donde

$$\boldsymbol{r}_1(u, v) = \boldsymbol{r}_2(u, v) + \boldsymbol{c}.$$

Puesto que $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$ para $u = u_0$ y $v = v_0$, resulta que $\boldsymbol{c} = 0$ y, por consiguiente, $\boldsymbol{r}_1(u, v) = \boldsymbol{r}_2(u, v)$.

Es decir, las superficies Φ_1 y Φ_2 son iguales a menos de un movimiento y una reflexión especular.

Hemos demostrado completamente el teorema.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO VIII

1. Demostrar que si el elemento lineal de la superficie es

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2),$$

entonces la curvatura gaussiana de la superficie es

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\,\Delta \ln \lambda,$$

donde Δ es el operador de Laplace:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$$

2. Probar que la superficie de elemento lineal

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2 + c)^2}.$$

tiene curvatura gaussiana constante.

3. Demostrar que si el elemento lineal de la superficie es de la forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2,$$

entonces la curvatura gaussiana de la superficie es

$$K = -\frac{\omega_{uv}}{\operatorname{sen}\omega}.$$

4. Demostrar que toda red de Chébyshev en el plano se determina por la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = \varphi(u) + \psi(v).$$

La red queda formada por las curvas $u =$ const y $v =$ const.

5. Hallar los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^{h} para el caso en que el elemento lineal de la superficie es de la forma

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2).$$

6. Probar que siendo asintótica la red de coordenadas sobre la superficie, tienen lugar las igualdades:

$$\frac{1}{2}(EG-F^2)(\ln|K|)_u - FE_v + EG_u = 0,$$

$$\frac{1}{2}(EG-F^2)(\ln|K|)_v - FG_u + GE_v = 0,$$

donde K es la curvatura gaussiana de la superficie.

7. Demostrar que las líneas asintóticas sobre una superficie de curvatura gaussiana negativa constante forman una red de Chébyshev. Y que, recíprocamente, si la red asintótica sobre la superficie es una red de Chébyshev, entonces la curvatura gaussiana de la superficie es constante.

8. Mostrar que si la red de coordenadas sobre la superficie está formada por líneas de curvatura, entonces las fórmulas de Petersón—Codazzi toman la forma

$$L_v = HE_v,$$

$$N_u = HG_u,$$

donde H es la curvatura media de la superficie.

9. Demostrar que tomando sobre una superficie de área mínima como líneas coordenadas las líneas de curvatura y escogiendo adecuadamente los parámetros u y v, la primera y la segunda formas cuadráticas quedan así:

$$I = \lambda\,(du^2 + dv^2),$$

$$II = du^2 - dv^2.$$

10. Supongamos que sobre una superficie de área mínima se han escogido las coordenadas u y v, igual que en el problema 9. Demostrar sucesivamente las proposiciones siguientes:

1) si $\boldsymbol{r}(u, v)$ es el vector del punto de la superficie, entonces

$$\Delta\boldsymbol{r} = 0,$$

donde Δ es el operador de Laplace; es decir, las coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ del vector $\boldsymbol{r}(u, v)$ son funciones armónicas;

2) si $f_1(w)$, $f_2(w)$ y $f_3(w)$ (donde $w = u + iv$) son funciones analíticas de parte real $x(u, v)$, $y(u, v)$ y z *$u, v)$, respectivamente, entonces

$$f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0.$$

11. Siendo $f_1(w)$, $f_2(w)$ y $f_3(w)$ tres funciones analíticas cualesquiera de la variable $w = u + iv$ que cumplen la condición

$$f_1'^2 + f_2'^2 + f_3'^2 = 0$$

y siendo $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$ y $\varphi_3(u, v)$ las partes reales de estas funciones, demostrar que es de área mínima la superficie determinada por las ecuaciones

$$x = \varphi_1(u, v),\ y = \varphi_2(u, v),\ z = \varphi_3(u, v).$$

12. Demostrar que cualquier superficie de área mínima puede ser definida mediante las ecuaciones

$$x = \mathrm{Re} \int (\varphi^2(w) + \psi^2(w))\, dw,$$

$$y = \mathrm{Re}\, i \int (\varphi^2(w) - \psi^2(w))\, dw,$$

$$z = \mathrm{Re} \int 2i\varphi(w)\,\psi(w)\, dw,$$

donde φ y ψ son funciones analíticas de $w = u + iv$ y Re significa la parte real.

CAPITULO IX

GEOMETRIA INTERIOR DE SUPERFICIES

Por geometría interior de la superficie se comprende el capítulo de la geometría que se ocupa de aquellas propiedades de superficies y figuras sobre las mismas que dependen solamente de las longitudes de las curvas sobre la superficie.

Tratándose de superficies regulares, podemos decir que la geometría interior de éstas estudia las propiedades de superficies y figuras sobre las mismas determinadas por la primera forma cuadrática.

Los objetos que estudia la geometría interior son las longitudes de curvas sobre la superficie, los ángulos entre curvas, las áreas de regiones, la curvatura gaussiana de la superficie, etc.

En este capítulo estudiaremos nuevos conceptos relacionados exclusivamente con la primera forma cuadrática de la superficie y, por ende, pertenecientes a la geometría interior de la superficie.

§ 1. Curvatura geodésica de una curva sobre una superficie

Sean Φ una superficie regular y $\tilde{\gamma}$ una curva sobre la misma. Tracemos por un punto arbitrario P de la curva $\tilde{\gamma}$ el plano tangente α a la superficie y proyectemos sobre este plano un pequeño entorno del punto P de la curva $\tilde{\gamma}$. Obtendremos así una curva $\bar{\gamma}$ en el plano α. Su curvatura en el punto P se denomina *curvatura geodésica* de la curva $\tilde{\gamma}$ en el punto P. La curvatura geodésica en el punto P se considera positiva o negativa según que la tangente a la curva $\bar{\gamma}$, al pasar por el punto P, gire alrededor de la normal a la superficie formando tornillo usual o inverso. Hallemos la expresión para la curvatura geodésica de la curva.

Tracemos por la curva $\tilde{\gamma}$ una superficie cilíndrica de generatrices perpendiculares al plano α (fig. 41). Según el teorema de Meusnier, la curvatura k de la curva $\tilde{\gamma}$ en el punto P y la curvatura $\varkappa$ de la curva $\bar{\gamma}$ en el mismo punto están ligadas por la relación

$$k \cos\vartheta = \varkappa,$$

donde ϑ es el ángulo formado por las normales principales a estas curvas.

Sea $\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ la parametrización intrínseca de la curva $\tilde{\gamma}$, sean $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ y $\tilde{\boldsymbol{v}}$ los vectores unitarios de la tangente y de la normal principal a la curva $\tilde{\gamma}$ y sea $\boldsymbol{n}$ el vector unitario de la normal a la superficie. Entonces, $\tilde{\boldsymbol{r}}'' = k\tilde{\boldsymbol{v}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \times \boldsymbol{n}$ tiene la dirección de la normal a la curva $\bar{\gamma}$ en el punto P; por consiguiente, salvo el signo,

$$\varkappa = k\cos\vartheta = (\tilde{\boldsymbol{r}}'', \tilde{\boldsymbol{r}}', \boldsymbol{n}).$$

Pasemos al caso de una parametrización arbitraria de la curva $\tilde{\gamma}$. Tenemos

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'_s = \tilde{\boldsymbol{r}}'_t t'_s = \tilde{\boldsymbol{r}}'_t \cdot \frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'_t|}.$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}''_{ss} = \tilde{\boldsymbol{r}}''_{tt} \frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'_t|^2} + \tilde{\boldsymbol{r}}'_t \left(\frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'_t|}\right)',$$

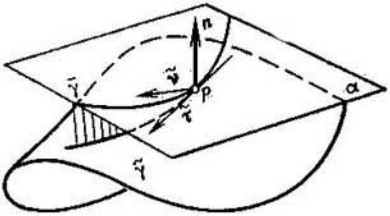

Fig. 41

Introduciendo en la fórmula para $\varkappa$ las expresiones halladas para $\tilde{\boldsymbol{r}}'_s$ y $\tilde{\boldsymbol{r}}''_{ss}$, obtenemos

$$\varkappa = \frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{r}}'|^3}(\boldsymbol{r}'', \tilde{\boldsymbol{r}}', \boldsymbol{n}),$$

donde la derivación corresponde al parámetro t.

Sea $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ alguna parametrización regular de la superficie en un entorno del punto P y sean $u = u(t)$, $v = v(t)$ las ecuaciones de la curva $\tilde{\gamma}$ en un entorno de este punto. Entonces, se tiene

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(u(t), v(t)),$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{r}_u u' + \boldsymbol{r}_v v',$$

$$\tilde{\boldsymbol{r}}'' = \boldsymbol{r}_{uu}u'^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u'v' + \boldsymbol{r}_{vv}v'^2 + \boldsymbol{r}_u u'' + \boldsymbol{r}_v v'' =$$
$$= (u'' + A)\boldsymbol{r}_u + (v'' + B)\boldsymbol{r}_v + C\boldsymbol{n},$$

donde

$$A = \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2,$$
$$B = \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2,$$
$$C = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2.$$

Introduciendo las expresiones de $\tilde{\boldsymbol{r}}'$ y $\tilde{\boldsymbol{r}}''$ en la fórmula para $\varkappa$, después de unos cálculos sencillos encontramos

$$\varkappa = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}}(u''v' - v''u' + Av' - Bu').$$

Puesto que las magnitudes Γ^h_{ij} dependen sólo de los coeficientes de la primera forma cuadrática de la superficie, resulta que *la curvatura geodésica de una curva sobre la superficie se determina exclusivamente por la métrica de la superficie y, por consiguiente, no varía por efecto de doblamiento de la superficie.*

Hallemos la fórmula para la curvatura geodésica de una curva en el caso en que la primera forma cuadrática es

$$I = du^2 + G dv^2.$$

En este caso, como hemos visto en el § 1 del capítulo VIII, se tiene

$$\Gamma^1_{11} = 0, \qquad \Gamma^2_{11} = 0,$$
$$\Gamma^1_{12} = 0, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G},$$
$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2} G_u, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G},$$

de donde

$$A = -\frac{1}{2} G_u v'^2 \quad \text{y} \quad B = \frac{G_u}{G} u'v' + \frac{1}{2}\frac{G_v}{G} v'^2.$$

Por consiguiente,

$$\varkappa = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)^{\frac{3}{2}}} \left(u''v' - v''u' - \frac{1}{2} G_u v'^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{G_v}{G} u'v'^2 - \frac{G_u}{G} u'^2 v' \right).$$

§ 2. Líneas geodésicas sobre una superficie

Una curva sobre una superficie se denomina *línea geodésica* si su curvatura geodésica es igual a cero en todo punto.

Teorema. Para que la curva γ sea una línea geodésica es necesario y suficiente que su normal principal coincida con la normal a la superficie en todo punto en que su curvatura sea distinta de cero.

Demostración. Según hemos demostrado en el parágrafo anterior, la curvatura geodésica es

$$\varkappa = \frac{1}{|\tilde{r}'|^3} (\tilde{r}'', \tilde{r}', n),$$

donde $\tilde{r}$ es el vector del punto de la curva y la diferenciación se realiza respecto al arco. Puesto que $\tilde{r}'' = k\tilde{v}$, resulta que $\varkappa = 0$ si, y sólo si, $\tilde{v} \parallel n$ cuando $k \neq 0$.

Hemos demostrado el teorema.

Corolario. Si dos superficies son tangentes a lo largo de una curva que es línea geodésica de una de ellas, también será línea geodésica de la otra.

Para obtener la ecuación diferencial de las líneas geodésicas basta igualar a cero la curvatura geodésica. Es decir, la ecuación diferencial de las líneas geodésicas es

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0.$$

La indeterminación que encierra esta ecuación (hay una ecuación y dos funciones incógnitas $u(t)$ y $v(t)$ se debe a que pueden tomarse distintas parametrizaciones para la curva.

Teorema. En una superficie regular, por todo punto y en cualquier dirección puede trazarse una línea geodésica única.

Demostración. Sea $P(u_0, v_0)$ un punto arbitrario de la superficie y sea $(u_0' : v_0')$ una dirección arbitraria en este punto.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$u'' + A = 0 \quad \text{y} \quad v'' + B = 0.$$

Sea $u = u(t)$ y $v = v(t)$ la solución de este sistema que satisface las condiciones iniciales

$$u(t_0) = u_0, \ v(t_0) = v_0, \ u'(t_0) = u_0' \ \text{y} \ v'(t_0) = v_0'.$$

Entonces la curva de la superficie definida por las ecuaciones

$$u = u(t), \qquad v = v(t)$$

es una línea geodésica ya que

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0.$$

Esta línea geodésica pasa por el punto (u_0, v_0) y tiene en el punto (u_0, v_0) la dirección $(u_0' : v_0')$. Demostremos que es única.

Supongamos que por el punto (u_0, v_0) sobre la superficie pasan dos líneas geodésicas γ_1 y γ_2 que tienen en este punto la misma dirección $(u_0' : v_0')$. Supongamos, para concretar, que $u_0' \neq 0$. Entonces, en un entorno del punto (u_0, v_0) estas curvas pueden ser definidas por las ecuaciones respectivas

$$v = v_1(u) \text{ y } v = v_2(u).$$

La condición de igualdad a cero de las curvaturas geodésicas de las curvas γ_1 y γ_2 da

$$-v_1'' + Av_1' - B = 0,$$
$$-v_1'' + Av_1' - B = 0.$$

Es decir, las funciones $v_1(u)$ y $v_2(u)$ satisfacen una misma ecuación diferencial con idénticas condiciones iniciales

$$v_1(u_0) = v_0, \quad v_1'(u_0) = \frac{v_0'}{u_0'},$$

$$v_2(u_0) = v_0, \quad v_2'(u_0) = \frac{v_0'}{u_0'}.$$

De ello se deduce que $v_1(u) \equiv v_2(u)$, o sea, las curvas γ_1 y γ_2 coinciden en un entorno del punto (u_0, v_0) y, por consiguiente, coinciden en general.

Hemos demostrado el teorema.

Ejemplo. Las líneas geodésicas sobre la esfera son las circunferencias máximas, y sólo ellas. Efectivamente, en virtud del primer teorema, cualquier circunferencia máxima es una línea geodésica. Por todo punto y en cualquier dirección se puede trazar una circunferencia máxima y, por consiguiente, de acuerdo con el segundo teorema no hay otras líneas geodésicas que las circunferencias máximas.

§ 3. Parametrización semigeodésica de una superficie

Una parametrización de la superficie se denomina *semigeodésica* si es ortogonal y una familia de las líneas coordenadas está formada por líneas geodésicas.

Teorema. Sean γ una curva sobre la superficie y P un punto de la misma. Entonces, en un entorno del punto P puede introducirse una parametrización semigeodésica de

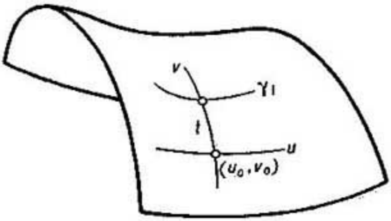

Fig. 42

modo que una familia de líneas coordenadas esté formada por líneas geodésicas perpendiculares a γ, y la otra, por trayectorias ortogonales de éstas.

Demostración. Sea (u, v) alguna parametrización de la superficie. En un entorno del punto P la curva γ puede representarse por la ecuación $v = f(u)$ o por la ecuación $u = f(v)$. Supongamos, para concretar, que γ viene dada por la ecuación $v = f(u)$.

Consideremos en un entorno del punto P la familia de curvas definidas por la ecuación

$$v - f(u) = \text{const.}$$

Según el teorema del § 2 del capítulo VI la superficie admite una parametrización ortogonal tal que una familia de líneas coordenadas consta de las curvas $v - f(u) = \text{const.}$

De ello se deduce que, sin perder generalidad, podemos considerar la curva γ como línea coordenada $u = u_0$ (u_0 y v_0 son las coordenadas del punto P).

Tracemos por un punto arbitrario (u_0, t) de la curva la geodésica γ_t perpendicular a γ (fig. 42). Siendo t próximo a v_0, esta geodésica puede ser dada por una ecuación

$$v = v(u, t),$$

donde $v(u, t)$ es una función que respecto a u satisface la ecuación de las líneas geodésicas

$$-v'' + Av' - B = 0.$$

Del teorema sobre la diferenciabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales respecto a las condiciones iniciales se deduce que la función $v(u, t)$ es regular en t.

Puesto que $v(u_0, t) = t$, para $|u - u_0|$ pequeño se tiene

$$\frac{\partial v(u, t)}{\partial t} \neq 0.$$

Esto permite resolver respecto a t la ecuación $v = v(u, t)$ en un entorno de P. Tendremos

$$t = \varphi(u, v).$$

Derivando respecto a v la igualdad $v = v(u, t)$, obtenemos

$$1 = v_t(u, t)\, t_v,$$

de donde

$$\varphi_v \neq 0.$$

Las ecuaciones $\varphi(u, v) = t = \text{const}$ determinan las geodésicas γ_t. Puesto que $\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0$, existe por el teorema del § 2 del capítulo VI una parametrización ortogonal de la superficie en un entorno del punto P tal que una familia de líneas coordenadas consta de las curvas $\varphi(u, v) = \text{const}$, o sea, de las líneas geodésicas γ_t.

Hemos demostrado el teorema.

Veamos cuál es la primera forma cuadrática de la superficie si la parametrización es semigeodésica.

Como la parametrización es ortogonal, se tiene $F = 0$ y, por consiguiente,

$$I = E\, du^2 + G\, dv^2.$$

Una familia de líneas coordenadas, por ejemplo, la familia $v = \text{const}$, se compone de líneas geodésicas. Introduciendo $v = \text{const}$ en la ecuación de las líneas geodésicas

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0,$$

obtenemos

$$B = 0,$$

de donde

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{G} = 0,$$

o sea, E no depende de v.

Por ser E independiente de v se hace posible simplificar la primera forma cuadrática introduciendo en lugar de u un parámetro nuevo $\bar{u}$ ligado a u por la relación

$$d\bar{u} = \sqrt{E(u)}\, du.$$

La primera forma cuadrática queda entonces así

$$I = d\bar{u}^2 + G\, dv^2.$$

Para revelar el significado geométrico del parámetro $\bar{u}$, basta señalar que la longitud del segmento de cualquier línea geodésica v = const. comprendida entre las líneas $\bar{u} = c_1$ y $\bar{u} = c_2$ no depende de v y es igual a $|c_1 - c_2|$.

Introduciendo un nuevo parámetro $\bar{v}$ ligado a v por la relación $d\bar{v} = \sqrt{G(v, \bar{u}_0)}\, dv$, puede lograrse que la primera forma cuadrática de la superficie quede así

$$I = d\bar{u}^2 + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}^2,$$

con la particularidad de que $\bar{G} = 1$ a lo largo de la línea $\bar{u} = u_0$.

Si la línea $\bar{u} = u_0$ también es geodésica, de la ecuación de las líneas geodésicas se deduce que $\bar{G}_u = 0$ a lo largo de esta línea.

§ 4. Líneas de longitud mínima sobre una superficie

Una curva γ que pertenece a la superficie y une los puntos P y Q se denomina *línea de longitud mínima* si ninguna otra línea que pertenece a la superficie y une los puntos P y Q tiene longitud menor que la curva γ.

Teorema. Todo segmento suficientemente pequeño de una línea geodésica es línea de longitud mínima. Más exactamente, si γ es una línea geodésica, P es un punto de la misma y R y S son puntos de la línea geodésica suficientemente próximos a P, entonces el segmento RS de la línea geodésica es línea de longitud mínima.

Demostración. Tracemos por el punto P la línea geodésica $\bar{\gamma}$ perpendicular a γ y consideremos la red de coordenadas semigeodésica tomando como familia de líneas u las líneas geodésicas perpendiculares a $\bar{\gamma}$. Escojamos los

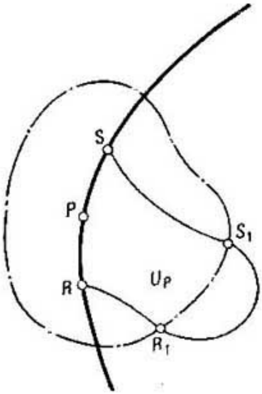

Fig. 43

parámetros u y v de modo que al punto P le correspondan los valores $u = v = 0$ y que el elemento lineal de la superficie sea

$$I = du^2 + G\ dv^2.$$

Supongamos que el segmento RS de la línea geodésica γ no es línea de longitud mínima y que $\tilde{\gamma}$ es una curva que pertenece a la superficie, une los puntos R y S y tiene longitud menor que el segmento RS de la línea geodésica γ.

Si los puntos R y S son suficientemente próximos a P, la curva $\tilde{\gamma}$ debe encontrarse dentro del entorno U_P del punto P en el cual se ha definido la parametrización semigeodésica u y v. Demostremos esto.

Supongamos que la distancia del punto P a la frontera del entorno U_P es mayor que $\varepsilon > 0$. Tomemos los puntos R y S a una distancia de P menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ (la distancia se toma a lo largo de la curva γ). Sean R_1 y S_1 el primero y el último punto de intersección de $\tilde{\gamma}$ con la frontera de U_P (fig. 43).

Tenemos

$$\widehat{PR} + \widehat{RR_1} > \varepsilon \text{ y } \widehat{PS} + \widehat{SS_1} > \varepsilon,$$

de donde

$$\widehat{PR} + \widehat{PS} + \widehat{RR_1} + \widehat{SS_1} > 2\varepsilon.$$

Pero

$$\widehat{RR_1} + \widehat{SS_1} < \widehat{PR} + \widehat{PS} < \varepsilon$$

y llegamos a una contradicción. De modo que la curva $\widetilde{\gamma}$ se encuentra dentro del entorno U_P.

Sean

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

las ecuaciones de la curva $\widetilde{\gamma}$. Su longitud es

$$s(\widetilde{\gamma}) = \int_{(R)}^{(S)} \sqrt{u'^2 + Gv'^2}\, dt \geqslant \int_{(R)}^{(S)} |u'|\, dt \geqslant |u_S - u_R|.$$

Pero $|u_R - u_S|$ es la longitud del segmento RS de la línea geodésica γ. Llegamos a una contradicción.

Hemos demostrado el teorema.

Ahora, una vez establecido que los trozos suficientemente pequeños de las líneas geodésicas representan líneas de longitud mínima, podemos obtener la ecuación de las líneas geodésicas como ecuación de Euler para la funcional

$$I = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt,$$

o sea,

$$\Phi_u - \frac{d}{dt}\Phi'_u = 0, \quad \Phi_v - \frac{d}{dt}\Phi'_v = 0,$$

donde

$$\Phi = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}.$$

§ 5. Teorema de Gauss — Bonnet

En la superficie regular Φ, sea G una región homeomorfa al círculo y limitada por una curva γ regular a trozos. Determinemos la dirección sobre la curva γ de modo que la región G quede a la derecha cuando la curva se recorre en la dirección escogida sobre la cara de la superficie que corresponde a la normal n.

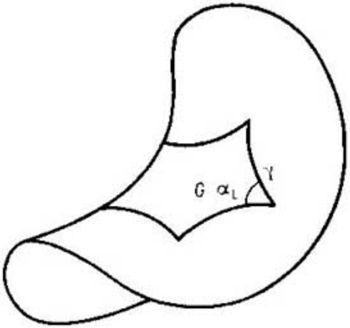

Fig. 44

Designemos por $\varkappa$ la curvatura geodésica de la curva γ en un punto arbitrario y por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los ángulos que forman los lados $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de la curva γ en la región G (fig. 44). Tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema de Gauss—Bonnet.

$$\sum_k \int_{\gamma_k} \varkappa\, ds + \sum_k (\pi - \alpha_k) = 2\pi - \iint_G K\, d\sigma,$$

donde K es la curvatura gaussiana de la superficie y la integración en el segundo miembro de la igualdad corresponde al área de la región G.

En particular, si γ es una curva regular, se tiene

$$\int_\gamma \varkappa\, ds = 2\pi - \iint_G K\, d\sigma.$$

Demostración. Para simplificar la exposición, supongamos que la curva γ es regular y que en toda la región G puede introducirse una parametrización semigeodésica de la superficie.

Teniendo en cuenta la fórmula para la curvatura geodésica en coordenadas semigeodésicas obtenida en el § 1,

tenemos

$$\varkappa\, ds = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)} \left(u''v' - v''u' - \frac{1}{2} G_u v'^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{G_v}{G} u'v'^2 - \frac{G_u}{G} (u'^2 v')\right) dt =$$

$$= -d \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{G} v'}{u'} - v' (\sqrt{G})_u \, dt.$$

Puesto que la función Arctg w es multiforme y sus valores correspondientes a un mismo valor del argumento w difieren en un múltiplo de π, se tiene

$$\int_\gamma -d \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{G} v'}{u'} = k\pi,$$

donde k es un número entero.

Ahora, según la fórmula de Green — Ostrogradski,

$$\int_\gamma -(\sqrt{G})_u \, dv = \iint_G (\sqrt{G})_{uu} \, du \, dv =$$

$$= \iint_G \frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} \sqrt{G} \, du \, dv = \iint_G -K \, d\sigma.$$

Es decir,

$$\int_\gamma \varkappa\, ds = k\pi + \iint_G -K \, d\sigma.$$

Resta encontrar cuánto vale el número entero k.

Tenemos

$$k\pi = \int_\gamma -d \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{G} v'}{u'}.$$

Si fuese $G = 1$, la magnitud $k\pi$ representaría el ángulo de giro de la tangente a la curva $\bar{\gamma}$ en el plano uv correspondiente a la curva γ de la superficie, al recorrerse esta curva. Como se sabe, este ángulo es igual a 2π.

Puesto que el valor de la integral

$$\int_\gamma -d \operatorname{Arctg} \frac{\lambda(u, v)\, v'}{u'} \quad (\lambda(u, v) > 0)$$

depende continuamente de $\lambda(u, v)$ y es igual a 2π cuando $\lambda(u, v) = 1$, será igual a 2π para cualquier función $\lambda(u, v) > 0$ y, en particular, para $\lambda(u, v) = \sqrt{G}$.

Hemos demostrado completamente el teorema.

Toda región de una superficie limitada por tres líneas geodésicas y homeomorfa al círculo se denomina *triángulo geodésico*.

Aplicado a un triángulo geodésico, el teorema de Gauss—Bonnet da

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint_{\Delta} K\,d\delta,$$

de donde se deduce que *la suma de los ángulos de un triángulo geodésico es mayor que π para toda superficie de curvatura positiva, es menor que π para superficies de curvatura negativa y es igual a π para superficies de curvatura nula.*

§ 6. Superficies de curvatura gaussiana constante

Sea Φ una superficie de curvatura gaussiana constante K y sea P un punto arbitrario de esta superficie. Tomemos sobre la superficie Φ en un entorno del punto P una parametrización semigeodésica partiendo de cualquier línea geodésica que pase por el punto P. La primera forma cuadrática de la superficie será

$$I = du^2 + G\,dv^2$$

pudiéndose aceptar que $G(0, v) = 1$ y $G_u(0, v) = 0$.

Puesto que la curvatura gaussiana de la superficie es constante e igual a K, el coeficiente G debe satisfacer la ecuación diferencial

$$(\sqrt{G})_{uu}+K\sqrt{G}=0. \qquad (*)$$

(En el caso de la parametrización semigeodésica de la superficie la curvatura gaussiana es $K = -(\sqrt{G})_{uu}(\sqrt{G})^{-1}$.)

Distinguiremos tres casos:

1. $K > 0$.
2. $K < 0$.
3. $K = 0$.

En el primer caso la forma general de la expresión $\sqrt{G}$ que satisface la ecuación (*) es

$$\sqrt{G} = A(v) \cos\sqrt{K}u + B(v) \operatorname{sen}\sqrt{K}u.$$

Puesto que $G(0, v) = 1$ y $G_u(0, v) = 0$, se tiene $A(v) = 1$ y $B(v) = 0$. Es decir, en el caso de $K > 0$ existe una parametrización de la superficie para la cual la primera forma cuadrática es

$$I = du^2 + \cos^2\sqrt{K}\, u\, dv^2.$$

Análogamente, en el segundo caso la primera forma cuadrática es

$$I = du^2 + \operatorname{ch}^2\sqrt{-K}\, u\, dv^2.$$

Finalmente, en el tercer caso

$$I = du^2 + dv^2.$$

Teorema. Todas las superficies de curvatura gaussiana constante e igual a K son localmente isométricas. Es más, si Φ_1 y Φ_2 son superficies de curvatura gaussiana constante K, P_1 y P_2 puntos arbitrarios de estas superficies y l_1 y l_2 unas direcciones arbitrarias en estos puntos, entonces existe una aplicación isométrica de un entorno del punto P_1 de la superficie Φ_1 sobre un entorno del punto P_2 de la superficie Φ_2 que pone en correspondencia a la dirección l_1 sobre la superficie Φ_1 en el punto P_1 la dirección l_2 sobre la superficie Φ_2 en el punto P_2.

Para demostrar este teorema basta tomar en los entornos de los puntos P_1 y P_2 sobre las superficies Φ_1 y Φ_2 unas parametrizaciones semigeodésicas partiendo de las direcciones geodésicas l_1 y l_2. Entonces, las primeras formas cuadráticas de las superficies coincidirán y la aplicación isométrica requerida se obtendrá poniendo en correspondencia los puntos de coordenadas iguales.

PROBLEMAS Y TEOREMAS PARA EL CAPITULO IX

1. Mostrar que la línea geodésica es una recta si es a la vez una línea asintótica.

Mostrar que la línea geodésica es plana si es a la vez una línea de curvatura.

2. Sean γ una línea geodésica y P un punto de la misma. Demostrar que si un punto Q de la línea geodésica es suficientemente próximo a P, entonces el segmento PQ de la línea geodésica será línea de longitud mínima entre todas las curvas rectificables (y no tan sólo suaves a trozos) que pertenecen a la superficie y pasan por los puntos P y Q.

Demostrar que el segmento PQ de la línea geodésica γ es la única línea de longitud mínima que pertenece a la superficie y une los puntos P y Q siempre que el punto Q sea suficientemente próximo a P.

3. Demostrar que para todo punto P de una superficie regular existe un entorno en el cual se puede introducir una parametrización semigeodésica partiendo de cualquier línea geodésica que pase por el punto P.

4. Basándose en los dos teoremas anteriores demostrar que toda línea de longitud mínima sobre una superficie regular es una línea geodésica.

5. Demostrar que cualquiera que sea el entorno Ω de un punto P de una superficie regular siempre puede indicarse en él un entorno ω tal que dos puntos cualesquiera del entorno ω se puedan unir por una línea de longitud mínima que pertenezca a Ω.

6. Demostrar que dos puntos cualesquiera de una superficie completa se pueden unir por una línea de longitud mínima.

7. Probar que la ecuación de las líneas geodésicas en el caso de la parametrización semigeodésica ($ds^2 = du^2 + G\,dv^2$) puede ser representada en la forma

$$\frac{d\alpha}{dv} = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

donde α es el ángulo que la línea geodésica forma con las líneas $v = \text{const}$.

8. Demostrar que si sobre una superficie se tiene una curva γ definida por las ecuaciones $u = u(\alpha)$, $v = v(\alpha)$ que experimenta una deformación transformándose en el momento t en la curva $u = u(\alpha) + \lambda(\alpha)\,t$, $v = v(\alpha) + \mu(\alpha)\,t$, entonces la variación de la longitud de arco de la curva γ determinada por esta deformación es

$$\Delta s = t\int_{\gamma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\lambda + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\mu + \frac{\partial\Phi}{\partial u'}\lambda' + \frac{\partial\Phi}{\partial v'}\mu'\right)d\alpha + O(t^2),$$

donde $\Phi = \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$ y $O(t)^2$ representa la parte de Δs de orden t^2 como mínimo.

Aplicando la integración por partes y suponiendo que los extremos de la curva γ permanecen inmóviles durante la deformación, demostrar que

$$\Delta s = t\int_{\gamma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\right)\right)\lambda\,d\alpha + t\int_{\gamma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v'}\right)\right)\mu\,d\alpha + O(t^2).$$

9. Partiendo de que los trozos suficientemente pequeños de líneas geodésicas son líneas de longitud mínima, probar que las ecuaciones de las líneas geodésicas pueden ser representadas en la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}-\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}\right)=0 \text{ y } \frac{\partial \Phi}{\partial v}-\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v'}\right)=0,$$

donde $\Phi=\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}$. En particular, si

$$\Phi=\sqrt{1+Gv'^2},$$

la ecuación de las líneas geodésicas será

$$\frac{\frac{1}{2}G_v v'^2}{\sqrt{1+Gv'^2}}-\frac{d}{du}\left(\frac{Gv'}{\sqrt{1+Gv'^2}}\right)=0.$$

10. Probar que las líneas geodésicas sobre una superficie de revolución pueden hallarse en cuadraturas.

11. Probar que la ecuación de las líneas geodésicas para superficies de elemento lineal $ds^2=(U(u)+V(v))\cdot(du^2+dv^2)$ (estas superficies se denominan *superficies de Liouville*) se reduce a la forma

$$d\left(\frac{U\,dv^2-V\,du^2}{du^2+dv^2}\right)=0.$$

De ello se deduce que las líneas geodésicas de estas superficies pueden hallarse en cuadraturas; a saber,

$$\int\frac{du}{\sqrt{U-c}}=\pm\int\frac{dv}{\sqrt{V+c}}+c_1.$$

12. Demostrar que las superficies de segundo grado son superficies de Liouville. La red de coordenadas respecto a la cual el elemento lineal tiene la forma $ds^2=(U+V)(du^2+dv^2)$ consta de líneas de curvatura (véase el problema 11 del capítulo VII).

13. Probar que en un entorno de cualquier punto P de una superficie regular puede introducirse una parametrización semigeodésica (u, v) con las propiedades siguientes: las líneas u son las líneas geodésicas que pasan por el punto P y las líneas v son las circunferencias geodésicas con centro en P. Si los parámetros se escogen de modo que u sea la distancia geodésica hasta P y v sea el ángulo que forma la línea geodésica con una dirección fija en el punto P, entonces el elemento lineal de la superficie toma la forma

$$ds^2=du^2+G\,dv^2.$$

Si $u\to 0$, se tiene $G\to 0$, $(\sqrt{G})_u\to 1$ y $-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}\to K(P)$, donde $K(P)$ es la curvatura gaussiana en P.

14. Sea $l(r)$ la longitud de la circunferencia geodésica que tiene radio r y centro en el punto P. Demostrar que

$$\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r-l(r)}{r^3}=\frac{\pi}{3}K(P),$$

donde $K(P)$ es la curvatura gaussiana en el punto P.

15. Probar que las líneas geodésicas de la superficie de elemento lineal

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2+(u\,dv-v\,du)^2}{(c+u^2+v^2)^2}$$

son $\alpha u+\beta v+\gamma=0$ (α, β y γ son unas constantes).

16. Probar que $v=c_1\varphi+c_2$ (c_1 y c_2 son constantes) satisface la ecuación

$$-v''+\frac{\varphi_{vv}}{\varphi_u}v'^3+\frac{2\varphi_{uv}}{\varphi_u}v'^2+\frac{\varphi_{uu}}{\varphi_u}v'=0.$$

17. Probar que si la ecuación de líneas geodésicas en coordenadas semigeodésicas

$$v''+\frac{1}{2}G_u v'^3-\frac{1}{2}\frac{G_v}{G}v'^2+\frac{G_u}{G}v'=0$$

tiene integral de tipo $v=c_1\varphi(u,v)+c_2$, donde c_1 y c_2 son unas constantes arbitrarias, entonces $G=U(u)V(v)$ y, por consiguiente, la curvatura gaussiana de la superficie es constante a lo largo de las líneas v.

18. Una aplicación de una superficie sobre otra se denomina geodésica si por efecto de ella las líneas geodésicas de una superficie corresponden a las líneas geodésicas de la otra. Del problema 15 se deduce que las superficies de curvatura gaussiana constante admiten una aplicación geodésica sobre el plano.

Demostrar que sólo las superficies de curvatura gaussiana constante poseen esta propiedad (*teorema de Beltrami*).

19. Sean A y B dos puntos cercanos tomados en la línea geodésica γ que pasa en una proximidad del punto O de la superficie. Sea ϑ el ángulo del triángulo geodésico AOB correspondiente al vértice O y sea α el ángulo respectivo del triángulo plano de estos mismos lados. Demostrar que $\dfrac{\vartheta-\alpha}{\sigma}=\dfrac{1}{3}K^*$, donde σ es el área del triángulo geodésico y K^* difiere poco de la curvatura gaussiana de la superficie en el punto O siempre que el triángulo sea suficientemente pequeño.

20. Sea Δ un triángulo geodésico que comprende el punto P de la superficie. Sean ϑ_1, ϑ_2 y ϑ_3 los ángulos de este triángulo y α_1, α_2 y α_3 los ángulos del triángulo plano correspondiente (véase el problema anterior). Demostrar que los tres cocientes

$$\frac{\vartheta_1-\alpha_1}{\sigma},\quad \frac{\vartheta_2-\alpha^2}{\sigma},\quad \text{y}\quad \frac{\vartheta_3-\alpha_3}{\sigma}$$

tienden al límite común $\frac{1}{3} K(P)$ cuando el triángulo Δ tiende al punto P (*teorema de Gauss*).

21. Las superficies F_1 y F_2 se denominan *superficies de centros de la superficie* F si están formadas por los extremos de los segmentos de longitud $\frac{1}{k_1}$ y $\frac{1}{k_2}$ (k_1 y k_2 son las curvaturas principales de F) construidos en las normales a la superficie F. De un modo natural se establece una correspondencia entre los puntos de las superficies F_1, F_2 y F; a saber, son correspondientes los puntos de las superficies que se encuentran sobre una misma normal a la superficie F. Demostrar que a las líneas de curvatura de la superficie F les corresponden las líneas geodésicas de las superficies de centros.

A NUESTROS LECTORES:

«MIR» PUBLICA:

Strelkov S.

MECANICA

Trátase de la introducción fundamental a la mecánica y prepara al estudiante para asimilar capítulos más complejos y especiales de la física teórica y la mecánica moderna. El material didáctico del curso se divide en cuatro partes: 1. Mecánica del movimiento del punto material y el cuerpo sólido; 2. Mecánica de los cuerpos deformables; 3. Oscilaciones, ondas y elementos de acústica; 4. Fundamentos de la teoría especial de la relatividad. Se presta atención especial a los fenómenos de actualidad en los últimos tiempos, tales como la imponderabilidad, el movimiento de los satélites artificiales y proyectiles-cohetes cósmicos, el movimiento de los cuerpos con velocidades supersónicas, etc. El libro está destinado para los estudiantes de las facultades de física de las universidades y centros docentes superiores de pedagogía y también para los alumnos de los centros de enseñanza superior con orientación a las ciencias físicas. No obstante, la clara interpretación física de las leyes y fenómenos principales de la mecánica y la atención especial que brinda el autor a la descripción, explicación y análisis cualitativo de gran número de procesos y fenómenos mecánicos hacen que la obra sea asequible y útil para aquellos que deseen conocer los fundamentos de la mecánica científica.

«MIR» PUBLICA:

Godunov S.

ECUACIONES DE FISICA MATEMATICA

Este libro escrito por Serguei Godunov, Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, contiene el curso completo de conferencias. La original selección del material se debe a que el autor durante muchos años estuvo dedicado al estudio de la aplicación de las ecuaciones diferenciales a la mecánica del medio continuo. Ha elaborado diferentes métodos numéricos destinados a resolver estas ecuaciones. El autor recopiló un material que ha llegado a ser clásico para los especialistas, aunque no se encuentra con frecuencia en los libros de texto ni en las monografías accesibles a un amplio círculo de lectores. Este texto presenta interés tanto para los que estudian el curso de ecuaciones de la física matemática, como para los que se especializan en la rama de la aplicación de los métodos numéricos en la resolución de estas ecuaciones.

«MIR» PUBLICA:

Taréev B.

FISICA DE MATERIALES DIELECTRICOS

Borís Taréev, autor de más de 300 trabajos, es uno de los especialistas más destacados de la URSS en la rama de los materiales dieléctricos, Doctor en Ciencias técnicas, Profesor, Laureado con el premio Estatal de la URSS, personalidad emérita de las ciencias y la técnica de RSFSR. En este libro se examinan: los fenómenos físicos que tienen lugar en los materiales electroaislantes y otros dieléctricos bajo la influencia del campo eléctrico (electroconductibilidad, polarización, pérdidas dieléctricas, perforación, etc.); parámetros que determinan cuantitativamente las propiedades eléctricas de los materiales dieléctricos; la dependencia de dichos parámetros de diferentes factores (temperatura, humedad, radiación, valor y frecuencia de la tensión aplicada y tiempo de permanencia bajo la tensión, etc.); las propiedades físicas comunes más importantes (térmicas, radiales, de humedad). El libro puede servir como material didáctico para los estudiantes de facultades e institutos electrotécnicos, energéticos y radiotécnicos, para posgraduados y colaboradores científicos, así como material de información para ingenieros y peritos técnicos que se dedican al estudio, cálculos, pruebas y explotación de los dieléctricos y los aislamientos eléctricos de diferentes máquinas y aparatos eléctricos, aisladores, condensadores, cables, aparatos de radioelectrónica y sistemas automáticos, etc.