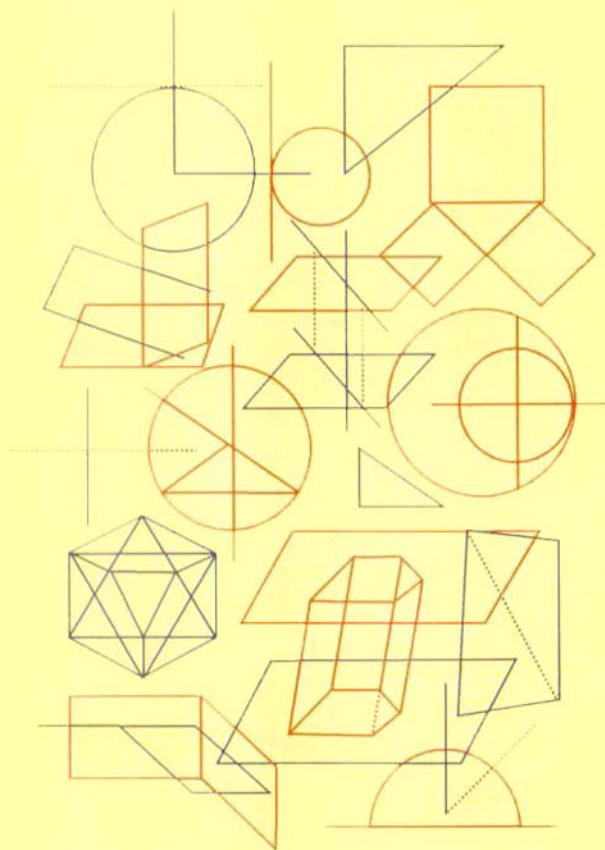


# Geometría elemental

A.V. Pogorélov



Editorial Mir Moscú





А. В. Погорелов

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

---

Издательство «Наука»  
Москва

# Geometría elemental

---

A. V. Pogorélov

Traducido del ruso por  
CARLOS VEGA,  
catedrático de Matemáticas Superiores

Editorial Mir  
Moscú

Impreso en la URSS 1974

Derechos reservados

#### A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe, alemán e italiano. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhski per., 2, GSP, Moscú I-110, 129820 URSS.

© Traducción al español. Mir. 1974.

# INDICE

Prefacio . . . . .	9
Parte primera	
Planimetría	
§ 1. Propiedades fundamentales de las figuras geométricas elementales . . . . .	17
Punto y recta (18). Propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano (18). Propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en la recta y en el plano (19). Propiedades fundamentales de la medición de segmentos y ángulos (21). Propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos (23). Primer criterio de la igualdad de los triángulos (24). Propiedad fundamental de las paralelas (25). Preguntas de repaso y ejercicios (25).	
§ 2. De cómo se estudian en la Geometría las propiedades de las figuras . . . . .	27
Axiomas, teoremas y demostraciones (27). Posición de los ángulos construidos en un mismo semiplano (28). Separación de los lados de un ángulo por una recta (29). Preguntas de repaso (30). Ejercicios (30).	
§ 3. Ángulos . . . . .	31
(Ángulos adyacentes (31). Ángulos verticales (31). Ángulo recto. Rectas perpendiculares (32). Preguntas de repaso (33). Ejercicios (33).	
§ 4. Igualdad de los triángulos . . . . .	33
Segundo criterio de la igualdad de los triángulos (33). Triángulo isósceles (34). Mediana, bisectriz y altura (35). Tercer criterio de la igualdad de los triángulos (36). Preguntas de repaso (37). Ejercicios (38).	
§ 5. Relaciones entre los ángulos y los lados del triángulo . . . . .	38
Relaciones entre los ángulos del triángulo (38). Relación entre los ángulos del triángulo y sus lados opuestos (39). Relaciones entre los lados del triángulo (40). Desigualdad triangular (40). Preguntas de repaso (42). Ejercicios (42).	
§ 6. Triángulos rectángulos . . . . .	43
Ángulos y lados del triángulo rectángulo (43). Igualdad de los triángulos rectángulos (43). Perpendicular y oblicua (45). Preguntas de repaso (46). Ejercicios (47).	
§ 7. Construcciones geométricas . . . . .	47
En qué consisten los problemas de construcción (47). Construcción del triángulo de	

	lados dados (48). Construcción del ángulo igual a uno dado (49). División del ángulo por la mitad (49). División del segmento por la mitad (49). Construcción de la perpendicular (50). Lugar geométrico de puntos (50). Método de lugares geométricos (52). Preguntas de repaso (53). Ejercicios (54).	
§ 8.	Rectas paralelas . . . . . Criterios de paralelismo de rectas (54). Suma de los ángulos del triángulo (56). Las paralelas como rectas equidistantes (57). Preguntas de repaso (59). Ejercicios (59).	54
§ 9.	Cuadriláteros . . . . . Cuadriláteros convexos (60). Paralelogramo (61). Rectángulo. Rombo. Cuadrado (63). Trapecio (64). Punto de intersección de las medianas del triángulo (65). Preguntas de repaso (67). Ejercicios (67).	60
§ 10.	Movimientos. Igualdad de figuras . . . . . Concepto del movimiento (68). Propiedades del movimiento (69). Simetría respecto a la recta (70). Simetría respecto al punto (71). Traslación paralela (72). Rotación (73). Preguntas de repaso (75). Ejercicios (75).	68
§ 11.	Circunferencia . . . . . Propiedades elementales de la circunferencia (76). Ángulos centrales (77). Ángulos inscritos (79). Circunferencias inscrita y circunscrita (81). Preguntas de repaso (83). Ejercicios (83).	76
§ 12.	Semejanza de los triángulos . . . . . Criterio principal de la semejanza de los triángulos (84). Otros criterios de la semejanza de los triángulos (87). Segmentos proporcionales en el triángulo (88). Proporcionalidad de los segmentos de cuerdas y secantes (89). Intersección de la recta con la circunferencia (90). Dos problemas de construcción (91). Semejanza de las figuras. Homotecia (92). Preguntas de repaso (93). Ejercicios (94).	84
§ 13.	Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones . . . . . Teorema de Pitágoras (95). Relaciones en el triángulo oblicuángulo (96). Relación entre las diagonales y los lados del paralelogramo (97). Existencia del triángulo de lados dados (98). Posición recíproca de dos circunferencias (99). Algunos problemas (102). Preguntas de repaso (103). Ejercicios (103).	95
§ 14.	Funciones trigonométricas del ángulo . . . . . Definición de las funciones trigonométricas (104). Fórmulas de reducción (105). Relaciones entre los lados y los ángulos en el triángulo rectángulo (106). Teorema del	104



	coseno (108). Teorema de los senos (109). Preguntas de repaso y ejercicios (110).	
§ 15.	Polígonos . . . . . Polígonos convexos (110). Suma de los ángulos del polígono convexo (111). Polígono complementado. Quebrada convexa (113). Polígonos regulares (115). Polígonos inscritos y circunscritos (116). Polígonos semejantes (117). Preguntas de repaso y ejercicios (119).	110
§ 16.	Áreas de figuras . . . . . Concepto del área (119). Área del rectángulo (120). Áreas de las figuras elementales (122). Independencia entre el área de una figura simple y el modo de dividirla en triángulos (123). Áreas de las figuras semejantes (127). Preguntas de repaso y ejercicios (128).	119
§ 17.	Longitud de la circunferencia. Área del círculo . . . . . Longitud de la circunferencia (128). Longitud del arco de circunferencia. Medida radial del ángulo (130). Área del círculo y de sus partes (133). Preguntas de repaso y ejercicios (135).	128
Parte segunda		
Estereometría		
§ 18.	Axiomas de la Estereometría y algunos corolarios . . . . . Algunos corolarios de los axiomas de la Estereometría (138). División del espacio en dos semiespacios por un plano (139). Observación al axioma $I_1$ (140). Ejercicios (141).	137
§ 19.	Paralelismo de rectas y planos . . . . . Rectas paralelas en el espacio (141). Paralelismo de la recta y del plano (143). Paralelismo de los planos (144). Segmentos de rectas paralelas entre planos paralelos (145). Rectas cruzadas (146). Ejercicios (147).	141
§ 20.	Perpendicularidad de rectas y planos . . . . . Perpendicularidad de las rectas (147). Perpendicularidad de la recta y del plano (148). Propiedades de la perpendicularidad de la recta y del plano (150). Construcción del plano y de la recta perpendiculares (152). Perpendicular y oblicua (153). Perpendicularidad de los planos (155). Ejercicios (157).	147
§ 21.	Ángulos entre rectas y planos . . . . . Ángulo entre rectas (158). Ángulo entre recta y plano (159). Ángulo entre planos (160). Ejercicios (162).	158

§ 22.	Ángulos diedros, triedros y poliedros . . . Definición de los ángulos diedros y triedros (163). Teorema de los cosenos para el ángulo triedro (164). Ángulo triedro polar a un ángulo triedro (165). Teorema de los senos para el ángulo triedro (166). Relación entre los ángulos planos del ángulo triedro (167). Ángulos poliedros (167). Ejercicios (169).	163
§ 23.	Movimiento y otras transformaciones en el espacio . . . . . El movimiento y sus propiedades (169). Simetrías respecto al plano y al punto (170). Traslación paralela y rotación en el espacio (171). Transformación de semejanza y homotecia en el espacio (172). Proyección de un plano sobre otro (173). Ejercicios (174).	169
§ 24.	Poliedros . . . . . El cuerpo geométrico (175). Prisma (175). Paralelepípedo (176). Pirámide (178). Poliedros regulares (180). Ejercicios (182).	175
§ 25.	Elementos de delineación proyectiva . . . Representación del punto en el diseño (182). Problemas de recta (183). Determinación de la longitud del segmento (184). Problemas de recta y plano (185). Ejercicios (187).	182
§ 26.	Volúmenes de cuerpos simples . . . . . Concepto del volumen (187). Volumen del paralelepípedo rectangular (188). Volumen del paralelepípedo oblicuo (189). Volumen del prisma (191). Volumen de la pirámide (192). Volúmenes de los cuerpos semejantes (194). Exactitud de la definición del volumen de los cuerpos simples (195). Ejercicios (199).	187
§ 27.	Cuerpos de revolución . . . . . Cilindro (199). Cono (201). Esfera (203). Ejercicios (206).	199
§ 28.	Volúmenes de cuerpos de revolución . . . Definición general del volumen (207). Volumen del cilindro (209). Volumen del cono (210). Volumen de la esfera (212).	207
§ 29.	Áreas de superficies de revolución . . . Concepto del área de la superficie convexa (216). Área de la superficie esférica (217). Área del segmento esférico (219). Área lateral del cilindro (219). Área lateral del cono (220).	216
§ 30.	Nociones de historia de la Geometría . . .	221

## PREFACIO

En las etapas iniciales, la enseñanza de la Geometría tiene por objeto, además de comunicar a los alumnos los resultados geométricos, darles a conocer el método con ayuda del cual se obtienen esos resultados. Sabido es que los resultados geométricos (teoremas) son obtenidos por medio de razonamientos lógicos (demostraciones) arrancando de algunos planteamientos de partida (axiomas). Los razonamientos lógicos son parte indispensable de todo saber. La Geometría se distingue por la claridad y la sencillez tanto en el enunciamiento del resultado como en los planteamientos de arranque a partir de los cuales debe obtenerse ese resultado. De ahí que la Geometría nos brinde las mejores oportunidades para desarrollar el pensamiento lógico en la escuela.

Al ofrecer el curso presente partimos de que la tarea esencial de la enseñanza de la Geometría en la escuela consiste en enseñar al alumno a razonar lógicamente, argumentar sus afirmaciones y demostrarlas. Muy pocos de los egresados de la escuela serán matemáticos y mucho menos geómetras. También habrá los que no utilicen ni una vez en su actividad práctica el teorema de Pitágoras. Sin embargo, difícilmente hallárase uno sólo que no deba razonar, analizar o demostrar.

La experiencia secular de la enseñanza de la Geometría elemental desde los tiempos de Euclides prueba la eficiencia del sistema tradicional. Su perfeccionamiento, relacionado con el desarrollo general de la ciencia, no debe afectar, creemos nosotros, sus bases racionales y profundamente meditadas. Por eso, el curso que ofrecemos, tradicional en esencia, se distingue sólo por una exposición más rigurosa de la materia y cierta revaloración del significado de sus partes componentes.

Este curso de Geometría se basa en un sistema muy poco numeroso de hechos geométricos bien conocidos del alumno y asimilados en los grados primarios. Este sistema de planteamientos de arranque, llamados más adelante axiomas, ha sido seleccionado del previo análisis minucioso del curso escolar de Geometría tomando en consideración los elementos de demostraciones tradicionales.

La exposición comienza con la repetición, típica en la enseñanza escolar, de lo estudiado anteriormente. Por lo

menos, así será considerado por el alumno. Empero, nuestra meta auténtica es distinta y más profunda: introducir los conceptos y planteamientos de arranque fundamentales, es decir, los axiomas. Los axiomas están enunciados en forma de las propiedades fundamentales de las figuras geométricas elementales compuestas de puntos y rectas. Estos axiomas son sencillos y naturales. Hay casos en que los axiomas son enunciados más ampliamente que exigiría la cuestión para evitar preguntas y confusiones. Por ejemplo, decimos que existen puntos que se hallan en una recta dada y puntos que no se hallan en dicha recta. En realidad, nos bastaría la exigencia de dos puntos en la recta y un punto fuera de la recta.

Una peculiaridad distintiva de nuestra axiomática son los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos. Estos axiomas nos brindan ventajas metódicas substanciales. En primer lugar, eludimos el escollo de introducir la medida para los segmentos y los ángulos. Sabido es que la solución de este problema, dada la construcción axiomática de la geometría, no es nada sencilla y requiere el empleo de medios inasequibles para el alumno por su profundidad. Segundo, a través de los axiomas de la medición incorporamos la Aritmética cursada ya para entonces con lo cual se ensancha notablemente el arsenal de medios utilizados en la demostración geométrica.

Naturalmente, los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos requieren la definición correspondiente de los conceptos de la igualdad de los segmentos y los ángulos. Llamamos iguales a los segmentos de longitud idéntica. Por extraño que parezca, la mayoría de las personas consideran los segmentos iguales precisamente en este caso, aunque la igualdad de los segmentos se define en la escuela a través de la superposición. Por ello, nuestra definición de la igualdad de los segmentos también es natural desde este punto de vista. En nuestra exposición, la superposición y el movimiento en general son conceptos derivados y sólo los introducimos a mediados del curso.

El segundo párrafo se inicia con una definición tan precisa de los conceptos axioma, teorema y demostración que nos permite dar siempre una respuesta neta al «por qué» en cada punto de las demostraciones. Por otra parte, tenemos el derecho moral de plantear ese «por qué» al alumno y de exigirle una respuesta. El concepto de la demostra-

ción es ilustrado con ejemplos sencillos de análisis circunstanciado.

Conservamos el orden tradicional de distribución del material. Por eso consagramos el § 3 a los ángulos. En este parágrafo las demostraciones de los teoremas son sencillas y naturales. Se basan en los axiomas de la medición y de la construcción de los ángulos.

El parágrafo siguiente se dedica a la igualdad de los triángulos. Su contenido es corriente y las demostraciones sencillas e irreprochables. En términos generales, las demostraciones empleadas no contienen, en cuanto a la idea, nada nuevo. Son bien conocidas. Sin embargo, gracias a la formulación precisa de los planteamientos de arranque, logramos con unas cuantas pinceladas hacer estas demostraciones absolutamente irreprochables. Estas «pinceladas» se refieren en la mayoría de los casos a las propiedades de la posición recíproca de los puntos en la recta y de los rayos en el haz. Dentro de las matemáticas en general, y de las matemáticas modernas en particular, la relación de orden desempeña tanto papel como la relación de equivalencia. Por eso, también desde este punto de vista es conveniente desarrollar este concepto en las figuras geométricas sencillas.

En el § 5 y el § 6 son tratadas las cuestiones tradicionales: propiedad del ángulo exterior del triángulo, relación entre los lados del triángulo y los ángulos opuestos, desigualdad triangular, la perpendicular y la oblicua. Termina cada parágrafo con numerosas preguntas de repaso y ejercicios. Las preguntas de repaso comprenden la definición de los conceptos y la demostración de los teoremas así como de los corolarios que de ellos se desprenden. También abarcan cuestiones no tan esenciales del curso. Las preguntas de repaso determinan exactamente el volumen de los conocimientos necesarios para el alumno y son medio de autocontrol.

El parágrafo siguiente está dedicado a las construcciones geométricas. Analiza los principales problemas de construcción utilizando el compás y la regla y explica el método de los lugares geométricos. Debe decirse que en el actual curso escolar de Geometría no se presta al tema de las construcciones geométricas tanta importancia como en el pasado. Se comprende: las construcciones geométricas ofrecen interés, principalmente, para el desarrollo de las búsquedas de solución y el entrenamiento en las demostraciones.

Pero las construcciones geométricas no son el único medio de lograr este propósito.

Los siete primeros párrafos de este libro podrían ser abarcados bajo el título de Geometría absoluta. En ellos no se utiliza el axioma de las paralelas. Quede sentado que el empleo del axioma de las paralelas no ofrece ventajas palpables en la exposición de esta parte. Si se toma en consideración que la Planimetría está calculada para tres años de enseñanza, esta parte del curso se puede recomendar para el primer año. En el segundo año de enseñanza incluimos la teoría de las paralelas y los temas colaterales inmediatos (§§ 8—12).

El párrafo octavo del libro está dedicado a la teoría de las paralelas. Comienza con la demostración de los criterios de paralelismo. Alterando la tradición, nos limitamos a dos pares de ángulos de dos paralelas con una secante: los correspondientes internos y los alternos internos. En efecto, estos dos pares de ángulos bastan plenamente para exponer la teoría de las paralelas y de sus aplicaciones. Otros pares de ángulos, como son los correspondientes externos, los alternos externos y demás, no se utilizan prácticamente. En cambio, los ángulos correspondientes internos y alternos son determinados por nosotros rigurosamente, y no sólo por medio de figuras como se hace a menudo, y su empleo en las demostraciones se argumenta a fondo. El § 9 contiene el material tradicional sobre los cuadriláteros.

En el § 10 introducimos el concepto del movimiento que, en nuestra exposición, es concepto derivado. Se define como una aplicación que conserva la distancia. Son demostradas las propiedades principales del movimiento y estudiados los casos particulares de los movimientos: simetría respecto a una recta, simetría respecto a un punto, traslación paralela y rotación. Conviene señalar que el concepto del movimiento geométrico se asocia naturalmente con un proceso. La manera de exponer la Geometría en la escuela, empleando el concepto del movimiento desde el comienzo, da lugar a embrollos y confusiones. Según nuestro método, las propiedades del movimiento netamente formuladas son primero demostradas y luego se aplican.

En el párrafo siguiente se estudia la circunferencia. El tema central de este párrafo es el problema de los ángulos en la circunferencia. Se define con precisión los conceptos del arco de circunferencia, del ángulo central que

le corresponde y de la medida del ángulo central. Se introduce el concepto del ángulo inscrito y se demuestran los teoremas correspondientes de los ángulos inscritos.

El § 12 contiene el tema final del segundo año de enseñanza. En él se expone, ante todo, la cuestión de la semejanza de los triángulos que, como se sabe, no se lleva nunca hasta el fin en la exposición escolar. En efecto, su solución completa exige el empleo del axioma de la continuidad. Por eso la demostración de la semejanza de los triángulos en el caso principal suele detenerse a mitad del camino. En nuestra exposición el axioma de la continuidad actúa a través del axioma de la medición. Concluimos la demostración del criterio principal de la semejanza con una sencilla observación que se desprende del axioma de la medición.

En el curso escolar de la Geometría suele quedar abierta la cuestión de la intersección de la recta con la circunferencia y de la intersección de dos circunferencias. Siempre por la misma causa: la cuestión tropieza con el axioma de la continuidad. Nosotros damos una solución sencilla y exhaustiva de este problema. Y esto se logra, en fin de cuentas, también gracias a los axiomas de la medición.

La tercera parte del curso arranca con el teorema de Pitágoras y sus corolarios: relaciones métricas en un triángulo oblicuángulo, relación entre las diagonales y los lados de un paralelogramo, etc. Además de estas cuestiones tradicionales, se da una demostración sencilla del importante teorema de la existencia del triángulo de lados dados previo cumplimiento de ciertas condiciones necesarias. Este teorema da solución exhaustiva al problema de la posición recíproca de dos circunferencias en dependencia de sus radios y de la distancia entre los centros.

En el § 14 se introducen las funciones trigonométricas de los ángulos. Nos limitamos a tres funciones: seno, coseno y tangente. Sabido es que las tres funciones restantes—secante, coscante y cotangente—no se utilizan prácticamente. El material de este párrafo es corriente: fórmulas de reducción, relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo rectángulo, teorema del coseno y teorema de los senos. El párrafo que le sigue está consagrado a los polígonos convexos con problemas tradicionales acerca de la suma de los ángulos internos y externos, de la relación entre la longitud de una quebrada convexa y de una quebrada abarcante y, en fin, a los polígonos regulares.

En el curso escolar ofrece ciertas dificultades la exposición del problema del área de las figuras. Nosotros resolvimos este problema de la siguiente manera. Al principio, el concepto del área se introduce, argumentando a fondo sus propiedades, al estudiar un problema práctico concreto. Luego se explica que estas propiedades determinan el área unívocamente. En fin, se demuestra que es correcta la definición del área con esas propiedades. Esta última cuestión puede considerarse facultativa en la enseñanza escolar.

Finalmente, el último tema de la Planimetría: longitud de la circunferencia y área del círculo. En cualquier variante esta cuestión ofrece grandes dificultades. Una es el problema de la existencia, aunque en los grados superiores se vence fácilmente. Hemos unificado las definiciones de los conceptos principales relacionados con la medición de los arcos y las áreas para la circunferencia y el círculo, lo que debe simplificar la exposición. A parte de las cuestiones de la existencia, que han quedado abiertas, otras cuestiones están resueltas con plenitud y precisión suficientes.

La segunda parte del libro, la Estereometría, arranca con el enunciado de los tres axiomas del espacio y la deducción de sus corolarios directos (§ 18). Los axiomas aceptados por nosotros suponen cierta modificación de los axiomas de enunciado tradicional y concuerdan bien con los axiomas del plano. El párrafo siguiente trata de las cuestiones del paralelismo de las rectas y los planos en el espacio con teoremas y demostraciones tradicionales.

El extenso § 20 está dedicado a diferentes cuestiones de la perpendicularidad de las rectas y los planos. Los párrafos 18, 19 y 20 constituyen la base de la segunda parte del curso. Hay un párrafo especial (el 21) para las cuestiones relacionadas con el concepto de ángulo entre rectas y planos. Estos conceptos son definidos con claridad. Quedan demostrados los correspondientes teoremas acerca de los ángulos.

El párrafo 22 acerca de los ángulos diedros, triedros y poliedros contiene, además de las cuestiones tradicionales del curso escolar, la demostración del teorema de los cosenos y del teorema de los senos para el ángulo triedro. Suponemos que estos teoremas, importantes y muy usuales, deben darse en el curso escolar. Sabido es que la solución de los problemas de la posición recíproca de las rectas y los planos en el espacio, y en particular la solución de los problemas de



prismas y pirámides, se reduce en su parte esencial a la demostración de estos teoremas generales en distintos casos particulares.

El párrafo siguiente (23) está dedicado a las transformaciones en el espacio (movimiento, simetría, semejanza y demás). En este párrafo, la exposición repite deliberadamente, y en ciertos casos textualmente, el párrafo acerca de las transformaciones en el plano. Para el alumno adelantado, este párrafo será un agradable repaso de hechos de Planimetría que ya conoce.

El tema de los poliedros (§ 24) comienza con la definición del concepto del cuerpo geométrico. Este concepto se introduce de manera rigurosa y, al mismo tiempo, muy asequible. La rigurosa introducción del concepto del cuerpo geométrico permite llevar más adelante ese rigor a la exposición del problema del volumen y del área del cuerpo geométrico. Los teoremas de prismas y pirámides dados en este párrafo son tradicionales. El tema de los poliedros regulares se expone de manera más circunstanciada que suele hacerse en el curso escolar.

El cuarto año de estudio de la Geometría termina aquí con el § 25 sobre los rudimentos de la delineación proyectiva. Este párrafo contiene todas las tareas principales de la posición recíproca de los puntos, las rectas y los planos al representarlos en el diseño.

En el § 26, partiendo de la tarea práctica de comparar la capacidad de dos recipientes, se introduce el concepto del volumen del cuerpo y se dilucidan sus propiedades esenciales. Por el método corriente, basándose en esas propiedades, se encuentran los volúmenes de los cuerpos elementales: prismas y pirámides. En fin, se demuestra la justeza de la definición formal del volumen de un poliedro como suma de los volúmenes de las pirámides que lo constituyen. Este último punto puede recomendarse para estudio facultativo. La cuestión del volumen de los cuerpos está expuesta de manera deliberadamente próxima a la cuestión del área de las figuras planas y, para el alumno adelantado, también será un repaso agradable.

Las cuestiones tradicionales relativas a los cuerpos de revolución —cilindro, cono y esfera— están expuestas en el § 27. La medición de los volúmenes y las áreas de estos cuerpos no está incluida aquí, sino que se le consagra párrafos especiales.

El § 28 ofrece la definición del volumen para cualquier cuerpo. Partiendo de los volúmenes de los cuerpos simples (divisibles en un número finito de pirámides triangulares), el volumen de cualquier cuerpo se define, en esencia, como la cota inferior máxima de los volúmenes de los cuerpos simples que lo contienen. Arrancando de esta definición general se encuentran los volúmenes de todos los cuerpos de revolución considerados en el curso escolar: cilindro, cono, esfera y sus partes. Se demuestra la aditividad del volumen para los cuerpos limitados por superficies simples (plana, cilíndrica, cónica y esférica).

El § 29 trata del área de una superficie. Partiendo de la tarea práctica de la cantidad de pintura necesaria para recubrir dos superficies, llegamos a la definición geométrica natural del concepto del área (según Minkowski). Arrancando de esta definición se encuentra, por un método standard, el área de las superficies de los cuerpos de revolución considerados en el curso escolar: cilindro, cono, esfera y sus partes.

*A. V. Pogorélov*

§ 1. PROPIEDADES FUNDAMENTALES  
DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS  
ELEMENTALES

*Geometría*, palabra griega que significa medición de la tierra, es la ciencia que trata de las propiedades de las figuras geométricas empleadas para la medición de extensiones.



Fig. 1

El triángulo, el cuadrado y la circunferencia (fig. 1) son ejemplos de figuras geométricas.

Las figuras geométricas son muy diversas. Una parte de una figura geométrica cualquiera es, a su vez, una figura

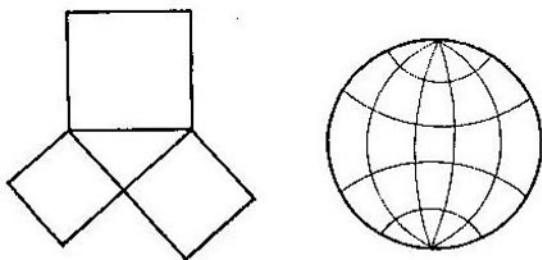


Fig. 2

geométrica. La unión de varias figuras geométricas es igualmente una figura geométrica. En la fig. 2 vemos que la figura de la izquierda consta de un triángulo y tres cuadrados, mientras que la figura de la derecha está formada por una circunferencia y partes de circunferencia. Se considera que toda figura geométrica está compuesta por puntos.

La parte de la Geometría que trata de las figuras en el plano se llama *Planimetría*. Por ella comenzaremos el estudio de la Geometría.

**Punto y recta.** Las figuras geométricas elementales en el plano son el *punto* y la *recta*. Los puntos y las rectas se marcan en el dibujo con un lápiz bien afilado. Para que resulte más neto, el punto se representa con un círculo pequeño. Para designar los puntos se emplean letras latinas mayúsculas:  $A, B, C, D, \dots$ . Las rectas se designan por letras latinas minúsculas:  $a, b, c, d, \dots$ . En la fig. 3 puede verse el punto  $A$  y la recta  $a$ .

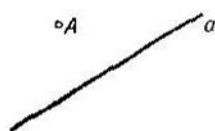


Fig. 3

**Propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano.** En la fig. 4 están representadas las rectas  $a$  y  $b$  y los puntos  $A, B$  y  $C$ . Los puntos  $A$  y  $C$  se hallan

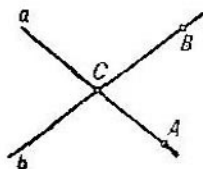


Fig. 4

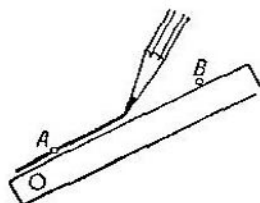


Fig. 5

en la recta  $a$ . Podemos también decir que los puntos  $A$  y  $C$  pertenecen a la recta  $a$  o que la recta  $a$  pasa por los puntos  $A$  y  $C$ .

El punto  $B$  se halla en la recta  $b$  pero no se halla en la recta  $a$ . El punto  $C$  se halla en la recta  $a$  y en la recta  $b$ . Las rectas  $a$  y  $b$  se cortan en el punto  $C$ . El punto  $C$  es el punto de intersección de las rectas  $a$  y  $b$ .

Para dibujar las rectas se emplea la regla. En la fig. 5 puede verse cómo se construye con la regla la recta que pasa por dos puntos  $A$  y  $B$ .

Las propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano son las dos propiedades siguientes:

**I<sub>1</sub>.** Cualquiera que sea la recta, existen puntos que pertenecen a la recta y puntos que no pertenecen a la recta.

**I<sub>2</sub>.** *Cualesquiera que sean dos puntos, existe una recta que pasa por estos puntos, y sólo una.*

Una recta puede ser designada con dos puntos que se hallan en ésta. Por ejemplo, la recta *a* de la fig. 4 se puede designar por *AC* y la recta *b* se puede designar por *BC*.

Ya que por dos puntos se puede trazar solamente una recta, dos rectas distintas no se cortan o se cortan en un punto único. Si hubiese dos puntos de intersección de estas rectas, resultaría que por estos puntos pasan dos rectas diferentes. Pero esto es imposible. Luego, se obtiene la propiedad siguiente:

**1.1.** *Dos rectas diferentes no se cortan o se cortan en un punto único.*

**Propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en la recta y en el plano.** En la fig. 6 puede verse la recta *a* y tres puntos *A*, *B* y *C* situados en la misma. El punto *B* se encuentra *entre* los puntos *A* y *C*. Refiriéndonos

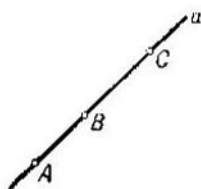


Fig. 6

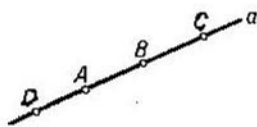


Fig. 7

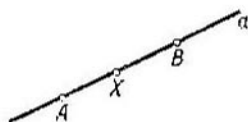


Fig. 8

a esta posición de los puntos *A*, *B* y *C*, diremos que los puntos *A* y *C* se hallan a *distintos lados* del punto *B*. También se puede decir que el punto *B* *separa* los puntos *A* y *C*. Los puntos *A* y *B* se hallan a *un mismo lado* del punto *C* y *no están separados* por el punto *C*. Los puntos *B* y *C* están a un mismo lado del punto *A*.

Fíjense en la fig. 7. El punto *A* *divide* la recta *a* en dos partes llamadas *semirrectas*. Los puntos *B* y *C* se hallan en una misma semirrecta. El punto *A* no los separa. Los puntos *B* y *D* se hallan en diferentes semirrectas. El punto *A* los separa. El punto *A* que divide la recta *a* en semirrectas se llama *punto de origen* de las semirrectas. En cuanto a las semirrectas, se las denomina *complementarias*. Una semirrecta también es llamada *rayo*.

Las semirrectas se designan con letras latinas minúsculas. Una semirrecta se puede designar también con dos puntos:

el punto de origen y otro punto suyo cualquiera. Con la particularidad de que el punto de origen siempre se coloca en primer lugar. Por ejemplo, el punto  $A$  divide la recta  $a$  (fig. 7) en dos semirrectas:  $AB$  y  $AD$ .

Supongamos que los puntos  $A$  y  $B$  se hallan en la recta  $a$  (fig. 8). Se llama *segmento*  $AB$  a la parte de la recta  $a$  cuyos puntos son todos los puntos  $X$  de la recta  $a$  situados entre  $A$  y  $B$ . Los puntos  $A$  y  $B$  se denominan *extremos* del segmento.

1.2. El segmento  $AB$  es una parte de la semirrecta  $AB$ , o sea, todo punto del segmento  $AB$  es un punto de la semirrecta  $AB$ .

Efectivamente, tomemos un punto  $X$  cualquiera en el segmento  $AB$  (fig. 8). Se encuentra entre los puntos  $A$  y  $B$ .

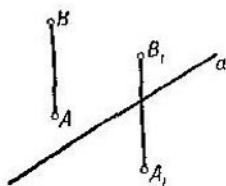


Fig. 9

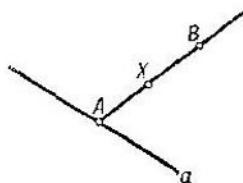


Fig. 10

Luego, el punto  $A$  no se encuentra entre los puntos  $X$  y  $B$  ya que sólo uno de los tres puntos  $A$ ,  $X$  y  $B$  se halla entre los otros dos. Por consiguiente, el punto  $A$  no separa los puntos  $X$  y  $B$ . Esto significa que el punto  $X$  pertenece a la semirrecta  $AB$  y no a su complemento.

En la fig. 9 la recta  $a$  divide el plano en dos *semiplanos*. Los puntos  $A$  y  $B$  se hallan en un mismo semiplano. El segmento  $AB$  no corta la recta  $a$ . Los puntos  $A_1$  y  $B_1$  se hallan en distintos semiplanos. El segmento  $A_1B_1$  corta la recta  $a$ . Designaremos los semiplanos con letras griegas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ...

Tracemos por el punto de origen  $A$  de la semirrecta  $AB$  una recta  $a$  que no pase por el punto  $B$  (fig. 10). La recta  $a$  y la recta  $AB$  se cortan en el punto  $A$ . No tienen otros puntos de intersección. Tomemos en la semirrecta  $AB$  un punto  $X$  cualquiera. El segmento  $BX$  no corta la recta  $a$ .

En efecto, el segmento  $BX$  podría cortar la recta  $a$  solamente en el punto  $A$ . Pero el punto  $A$  no pertenece al segmento  $BX$  ya que no separa los puntos  $B$  y  $X$ .

Puesto que el segmento  $BX$  no corta la recta  $a$ , resulta que el punto  $X$  se halla, respecto a la recta  $a$ , en el mismo semiplano que el punto  $B$ . Así, obtenemos la propiedad siguiente:

**1.3.** Si por el punto de origen  $A$  de una semirrecta  $AB$  se traza una recta  $a$  que no pase por el punto  $B$ , toda la semirrecta  $AB$  estará en un semiplano respecto a la recta  $a$ .

Ya que el segmento  $AB$  es una parte de la semirrecta  $AB$ , obtenemos la siguiente propiedad:

**1.4.** Si por el extremo  $A$  del segmento  $AB$  se traza una recta  $a$  que no pase por el punto  $B$ , todo el segmento  $AB$  quedará situado en un semiplano respecto a la recta  $a$ ; a saber: estará situado en el semiplano donde se encuentra el extremo  $B$ .

Las propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en una recta y en el plano son las tres propiedades siguientes:

**II<sub>1</sub>.** De tres puntos de una recta, uno de ellos, y sólo uno, se halla entre los otros dos.

**II<sub>2</sub>.** Un punto situado en una recta la divide en dos semirrectas. Los puntos de una semirrecta no están separados por el punto de división. Los puntos de diferentes semirrectas están separados por este punto.

**II<sub>3</sub>.** Toda recta divide el plano en dos semiplanos. Si los extremos de un segmento cualquiera pertenecen a un semiplano, el segmento no corta la recta. Si los extremos del segmento pertenecen a diferentes semiplanos, el segmento corta la recta.

**Propiedades fundamentales de la medición de segmentos y ángulos.** Para medir los segmentos se emplean diversos instrumentos de medición. El instrumento más sencillo es la regla graduada. En la fig. 11 el segmento  $AB$  es igual



Fig. 11

a 10 cm, el segmento  $AC$  es igual a 6 cm y el segmento  $BC$  es igual a 4 cm. La longitud del segmento  $AB$  es igual a la suma de las longitudes de los segmentos  $AC$  y  $BC$ .

Las propiedades fundamentales de la medición de segmentos son las siguientes:

III<sub>1</sub>. *Todo segmento tiene una longitud determinada mayor que cero.*

III<sub>2</sub>. *Si el punto C de la recta AB se halla entre los puntos A y B, la longitud del segmento AB es igual a la suma de las longitudes de los segmentos AC y BC.*

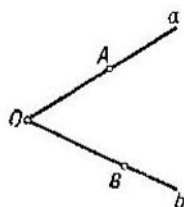


Fig. 12

Se llama *ángulo* a una figura formada por dos semirrectas distintas con un punto de origen común. Este punto se denomina *vértice del ángulo* y las semirrectas reciben el nombre de *lados del ángulo*. Si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias de una misma recta, el ángulo se llama *llano*.

En la fig. 12 puede verse un ángulo de vértice *O* y de lados *a* y *b*. Para designar un ángulo se señala su vértice, sus lados o tres puntos: el vértice y dos puntos en los lados del ángulo. La palabra «ángulo» suele sustituirse por el símbolo  $\angle$ . El ángulo de

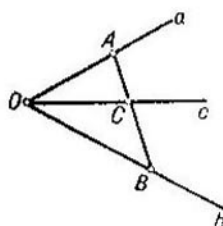


Fig. 13

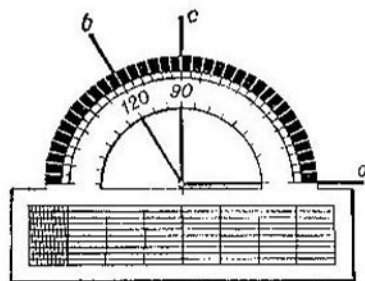


Fig. 14

la fig. 12 puede ser designado de tres formas:  $\angle O$ ,  $\angle (ab)$  y  $\angle AOB$ . En el tercer caso el vértice se coloca en el medio.

Fíjense en la fig. 13. Diremos que el rayo *c* que parte del vértice *O* del ángulo (*ab*) *pasa entre sus lados* si corta un segmento *AB* cualquiera cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo. En el caso del ángulo llano, aceptamos que *cualquier rayo* que arranca de su vértice y no coincide con sus lados *pasa entre los lados del ángulo*.



Los ángulos se miden en grados mediante el transportador. El ángulo ( $ab$ ) de la fig. 14 es igual a  $120^\circ$ . La semirrecta  $c$  pasa entre los lados del ángulo ( $ab$ ). El ángulo ( $ac$ ) es igual a  $90^\circ$  y el ángulo ( $bc$ ) es igual a  $30^\circ$ . El ángulo ( $ab$ ) es igual a la suma de los ángulos ( $ac$ ) y ( $bc$ ).

Las propiedades fundamentales de la medición de ángulos son las siguientes:

**III<sub>3</sub>.** *Todo ángulo tiene una medida en grados determinada mayor que cero. El ángulo llano es igual a  $180^\circ$ .*

**III<sub>4</sub>.** *Si un rayo  $c$  parte del vértice de un ángulo ( $ab$ ) y pasa entre sus lados, el ángulo ( $ab$ ) es igual a la suma de los ángulos ( $ac$ ) y ( $bc$ ).*

**Propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos.** Fíjense en la fig. 15. Muestra cómo se construye, valiéndose de una regla, en la semirrecta  $a$  de punto de origen  $A$  un segmento de 3 cm de longitud.

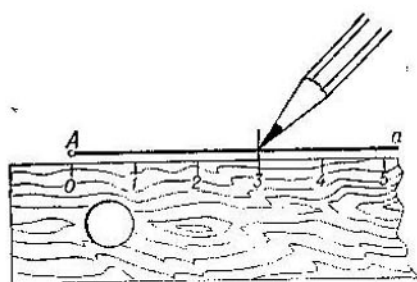


Fig. 15

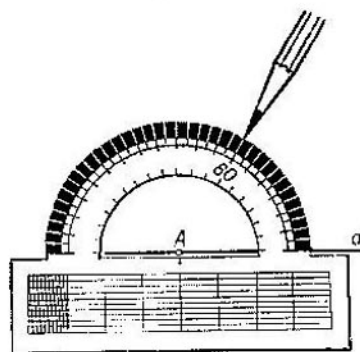


Fig. 16

Fíjense en la fig. 16. La semirrecta  $a$ , prolongada más allá de su punto de origen  $A$ , divide el plano en dos semiplanos.

La figura muestra cómo se construye, a partir de la semirrecta  $a$  y en el semiplano superior, un ángulo (de  $60^\circ$ ) mediante el transportador.

Las propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos son las propiedades siguientes:

**IV<sub>1</sub>.** *Cualquiera que sea el número positivo  $m$ , en una semirrecta se puede construir a partir de su punto de origen un segmento de longitud  $m$  (cm) y sólo uno.*

IV<sub>2</sub>. Cualquiera que sea el número positivo  $n$  menor que 180, se puede construir, a partir de una semirrecta dada y en el semiplano dado, un ángulo de  $n$  grados, y sólo uno.

Construyamos, a partir del punto de origen  $A$  de la semirrecta  $AB$ , un segmento  $AC$  menor que  $AB$ . ¿Cuál de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se halla entre los otros dos? El punto  $A$  no puede encontrarse entre  $B$  y  $C$  ya que  $B$  y  $C$  se hallan en la misma semirrecta cuyo punto de origen es  $A$ . Si el punto  $B$  estuviese entre los puntos  $A$  y  $C$ , tendríamos, según la propiedad de la medición de segmentos,  $AB + BC = AC$ , o sea,  $AB < AC$ . Pero, por hipótesis, es  $AC < AB$ . Luego, el punto  $B$  tampoco se encuentra entre  $A$  y  $C$ . Puesto que uno de los puntos se halla necesariamente entre los otros dos, este punto puede ser únicamente el punto  $C$ . Así se obtiene la propiedad siguiente:

1.5. Si en una semirrecta  $AB$  se construye, a partir de su punto de origen  $A$ , un segmento  $AC$  menor que  $AB$ , estará  $C$  entre  $A$  y  $B$ .

**Primer criterio de la igualdad de los triángulos.** Un triángulo es una figura de tres puntos no pertenecientes a una

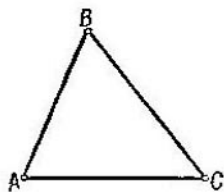


Fig. 17

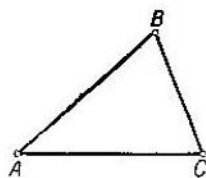


Fig. 18

misma recta y de tres segmentos que unen estos puntos de dos en dos. Los puntos se llaman *vértices* y los segmentos, *lados* del triángulo. En la fig. 17 puede observarse un triángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  y de lados  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$ . El triángulo se designa por sus vértices. A veces en lugar de la palabra «triángulo» se emplea el símbolo  $\Delta$ . Por ejemplo, el triángulo de la figura 17 se designa así:  $\Delta ABC$ .

Dos segmentos se denominan *iguales* si tienen la misma longitud. Dos ángulos se llaman *iguales* si tienen la misma medida angular expresada en grados. Dos triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  se llaman *iguales* si se tiene  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ ,  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  y  $AC =$

$= A_1C_1$ . En la fig. 18 puede verse dos triángulos iguales  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$ .

El primer criterio de la igualdad de los triángulos consiste en lo siguiente:

V. Si en dos triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  se tiene  $\angle A = \angle A_1$ ,  $AB = A_1B_1$  y  $AC = A_1C_1$ , los triángulos son iguales, es decir, también  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$  y  $BC = B_1C_1$ .

**Propiedad fundamental de las paralelas.** En el plano se llama *paralelas* a dos rectas que no se cortan, con la particularidad de que las rectas se consideran prolongadas indefinidamente en ambas direcciones.

La fig. 19 muestra cómo se puede, empleando la escuadra y la regla, trazar por el punto  $B$  la recta  $b$  paralela a la recta  $a$ .

La propiedad fundamental de las paralelas consiste en lo siguiente:

VI. Por todo punto  $B$  que no se halla en la recta  $a$  se puede trazar en el plano no más de una paralela a la recta  $a$ .

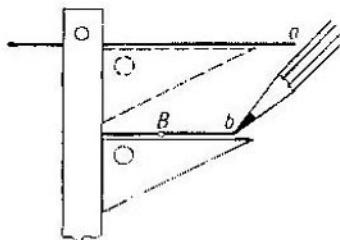


Fig. 19

### Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es Geometría?
  2. Dáense ejemplos de figuras geométricas.
  3. Señálense las figuras geométricas elementales en el plano.
  4. ¿Qué es Planimetría?
  5. ¿Cómo se representan los puntos y las rectas en el dibujo?
  6. ¿Qué instrumento de dibujo se emplea para trazar rectas?
  7. ¿Cómo se designan los puntos y las rectas?
  8. ¿Qué puntos de la fig. 4 se hallan en la recta  $a$  y qué puntos se hallan en la recta  $b$ ? ¿En qué punto se cortan las rectas  $a$  y  $b$ ?
  9. ¿Cómo se traza con la regla la recta que pasa por dos puntos?
- Tómense dos puntos en una hoja de papel y trázese por ellos la recta.
10. Enúnciense las propiedades fundamentales de la pertenencia de los puntos y las rectas en el plano.
  11. ¿Por qué dos rectas diferentes no pueden tener dos puntos de intersección?
  12. ¿Cuál de los tres puntos de la fig. 6 separa los otros dos? ¿En qué posición están los puntos  $B$  y  $C$  respecto al punto  $A$ ?
  13. Trácese una recta y tómanse en ella cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de modo que el punto  $C$  separe los puntos  $A$  y  $D$  y el punto  $D$  separe los puntos  $B$  y  $C$ .

14. ¿Qué propiedades se observan al dividir una recta en dos semirrectas? ¿Cómo se designan las semirrectas?

15. ¿Qué es segmento de extremos  $A$  y  $B$ ?

16. ¿Cuál de los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se halla entre los otros dos si  $B$  es un punto del segmento  $AC$ ?

17. ¿Por qué todo punto del segmento  $AB$  pertenece a la semirrecta  $AB$ ?

18. ¿Qué propiedades se observan al dividir el plano en dos semiplanos?

19. ¿Cuál es la posición de la semirrecta  $AB$  respecto a una recta  $a$  que pasa por el punto  $A$ ?

20. Enúnciense las propiedades fundamentales de la posición recíproca de los puntos en la recta y el plano.

21. ¿Qué instrumento se emplea para medir los segmentos?

22. Trácese una recta. Tómense en ella tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de modo que el punto  $B$  esté entre los puntos  $A$  y  $C$ . Mídanse los segmentos  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$ . Compárese la longitud del segmento  $AC$  con la suma de las longitudes de los segmentos  $AB$  y  $BC$ .

23. Enúnciense las propiedades fundamentales de la medición de los segmentos.

24. ¿Qué figura se denomina ángulo?

25. ¿Qué ángulo se denomina llano?

26. ¿Cómo se designa el ángulo?

27. Explíquese el sentido de la expresión: una semirrecta pasa entre los lados de un ángulo.

28. ¿Qué unidades y qué instrumento se emplean para medir los ángulos? ¿Cómo se realiza la medición?

29. Constrúyase un ángulo  $(ab)$  cualquiera y trácese en el interior de este ángulo un rayo  $c$  a partir de su vértice. Mídanse los ángulos  $(ab)$ ,  $(ac)$  y  $(bc)$ . Compárese el ángulo  $(ab)$  y la suma de los ángulos  $(ac)$  y  $(bc)$ .

30. Enúnciense las propiedades fundamentales de la medición de los ángulos.

31. Tómese un punto cualquiera. Trácese a partir de él una semirrecta. Constrúyase en la semirrecta desde su punto de origen un segmento igual a 5 cm.

32. Trácese una semirrecta y constrúyase a partir de ella un ángulo igual a  $45^\circ$ .

33. Enúnciense las propiedades fundamentales de la construcción de segmentos y ángulos.

34. En la semirrecta  $AB$  se ha construido desde su punto de origen un segmento  $AC$  menor que el segmento  $AB$ . ¿Cuál de los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se halla entre los otros dos? Arguméntese la respuesta.

35. ¿Qué es triángulo?

36. Denomínense los vértices y los lados del triángulo de la fig. 17.

37. ¿Qué segmentos son llamados iguales?

38. ¿Qué ángulos son llamados iguales?

39. ¿Qué significado tiene la expresión: el triángulo  $ABC$  es igual al triángulo  $A_1B_1C_1$ ?

40. Enúnciense el primer criterio de la igualdad de los triángulos.

41. ¿Qué rectas se denominan paralelas?

42. Trácese una recta cualquiera. Tómese un punto que no se halle en esta recta. Trácese por este punto la recta paralela.

43. Enúnciense la propiedad fundamental de las paralelas.

§ 2. DE CÓMO SE ESTUDIAN EN  
LA GEOMETRÍA LAS PROPIEDADES  
DE LAS FIGURAS

**Axiomas, teoremas y demostraciones.** La validez de una afirmación sobre la propiedad de una u otra figura geométrica se establece por medio de un razonamiento. Este razonamiento se llama *demostración*. La proposición que enuncia una propiedad de una figura geométrica se llama *teorema*. Veamos un ejemplo.

**TEOREMA 2.1.** *Si una recta  $a$ , que no pasa por ninguno de los vértices de un triángulo  $ABC$ , corta su lado  $AB$ , también corta uno, y sólo uno, de los otros lados,  $BC$  o  $AC$ .*

**DEMOSTRACIÓN** (fig. 20). La recta  $a$  divide el plano en dos semiplanos. Los puntos  $A$  y  $B$  se hallan en diferentes semiplanos ya que el segmento  $AB$  y la recta  $a$  se cortan. El

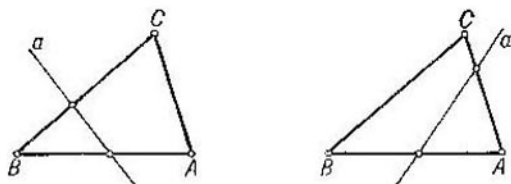


Fig. 20

punto  $C$  está en uno de estos semiplanos. Si el punto  $C$  está en el mismo semiplano que el punto  $A$ , el segmento  $AC$  y la recta  $a$  no se cortan mientras que el segmento  $BC$  corta esta recta (fig. 20, a la izquierda). Si el punto  $C$  está en el mismo semiplano que el punto  $B$ , el segmento  $AC$  corta la recta  $a$  y el segmento  $BC$  no la corta (fig. 20, a la derecha). En ambos casos la recta  $a$  corta uno de los segmentos  $AC$  o  $BC$  y sólo uno. Esta es toda la demostración.

Las propiedades fundamentales I—VI de las figuras elementales enunciadas en el párrafo anterior son propiedades de partida para la demostración de otras. Estas propiedades no se demuestran y se llaman *axiomas*.

Los axiomas definen implícitamente los conceptos geométricos *fundamentales*. Son los conceptos expresados con las palabras «punto», «recta», «pertenecer» (para puntos y rectas), «hallarse entre» (para puntos en una recta) y «medida» (longitud de segmentos y medida gradual de ángulos). Los

demás conceptos geométricos son derivados. Se definen explícitamente partiendo de los conceptos fundamentales. Tales son, por ejemplo, los conceptos de segmento, ángulo, triángulo, etc.

En la demostración de los teoremas se pueden emplear las propiedades fundamentales de las figuras elementales, o sea, los axiomas, así como las propiedades ya demostradas, es decir, los teoremas demostrados. No se puede emplear ninguna otra propiedad de las figuras aun cuando parezca evidente.

En la demostración de los teoremas se permite emplear el dibujo para la representación geométrica de todo cuanto expresamos con palabras. Las propiedades de las figuras que evidencia el dibujo no pueden ser utilizadas si no podemos argumentarlas basándonos en los axiomas y en los teoremas demostrados anteriormente. El enunciado de un teorema consta comúnmente de dos partes. La primera trata de lo que está dado. Esta parte se llama *hipótesis* del teorema. La otra trata de lo que debe ser demostrado. Esta parte se llama *tesis* del teorema.

En el § 1, además de las propiedades fundamentales indicadas con cifras romanas, se señalan otras propiedades: 1.1; 1.2; 1.3; 1.4 y 1.5. Estas propiedades han sido obtenidas mediante razonamientos a partir de las propiedades fundamentales, es decir, de los axiomas. Luego, estas propiedades son teoremas.

#### Posición de los ángulos contruidos en un mismo semiplano.

**TEOREMA 2.2.** *Si a partir de una semirrecta  $a$  se construyen en un mismo semiplano dos ángulos  $(ab)$  y  $(ac)$ , el rayo  $b$  pasará entre los lados del ángulo  $(ac)$  o el rayo  $c$  pasará entre los lados del ángulo  $(ab)$ .*

La hipótesis del teorema consiste en que los ángulos  $(ab)$  y  $(ac)$  están contruidos a partir de la semirrecta  $a$  en un mismo semiplano. La tesis del teorema consiste en que el rayo  $b$  pasa entre los lados del ángulo  $(ac)$  o que el rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo  $(ab)$ .

**DEMOSTRACION DEL TEOREMA.** Indiquemos por  $a_1$  la semirrecta complementaria de  $a$ . Los ángulos  $(a_1b)$  y  $(a_1c)$  son diferentes. Luego, uno es menor que otro. Sea, por ejemplo, el ángulo  $(a_1b)$  menor que el ángulo  $(a_1c)$ . Tomémos en las semirrectas  $a$ ,  $b$  y  $a_1$  los puntos  $A$ ,  $B$  y  $A_1$  (fig. 21).

La recta que contiene el rayo  $c$  corta el lado  $A_1A$  del triángulo  $A_1AB$ . Por ello, según el teorema 2.1, corta el

lado  $A_1B$  o el lado  $AB$ . El punto de intersección se halla en el rayo  $c$  ya que los segmentos  $A_1B$  y  $AB$  y el rayo  $c$  se encuentran en un mismo semiplano respecto a la recta  $AA_1$ . Es decir, el rayo  $c$  corta el segmento  $A_1B$  o el segmento  $AB$ .

Si el rayo  $c$  cortase el segmento  $A_1B$ , pasaría entre los lados del ángulo  $(a_1b)$ . Según el axioma III<sub>4</sub> de la medición de los ángulos, tendríamos  $(a_1c) + (cb) = (a_1b)$  de modo que el ángulo  $(a_1c)$  sería menor que el ángulo  $(a_1b)$ . Pero esto es imposible ya que el ángulo  $(a_1b)$  es menor que el ángulo  $(a_1c)$ . Por lo tanto, el rayo  $c$  no corta el segmento  $A_1B$  y, por consiguiente, corta el segmento  $AB$ . Pero esto significa al mismo tiempo que el rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo  $(ab)$ .

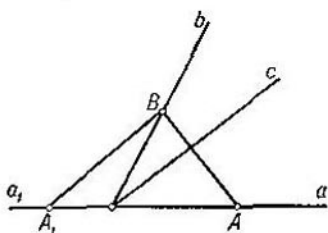


Fig. 21

Queda demostrado el teorema.

#### Separación de los lados de un ángulo por una recta.

**TEOREMA 2.3.** *Si el rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo  $(ab)$ , la recta que contiene el rayo  $c$  separa los lados del ángulo o sea, las semirrectas  $a$  y  $b$  se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo  $c$ .*

La hipótesis del teorema consiste en que el rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo  $(ab)$ . La tesis del teorema consiste en que los lados del ángulo  $(ab)$  se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo  $c$ .

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA.** Como quiera que el rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo  $(ab)$ , corta un segmento  $AB$  cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo (fig. 22). Puesto que el segmento  $AB$  corta la recta que contiene el rayo  $c$ , los puntos  $A$  y  $B$  están en diferentes semiplanos respecto a esta recta.

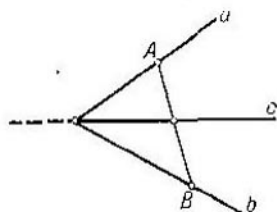


Fig. 22

Según el teorema 1.3, la semirrecta  $a$  se halla en un semiplano respecto a la recta que contiene el rayo  $c$ ; a saber, en el semiplano en el que se halla el punto  $A$ . Según el mismo teorema, la semirrecta  $b$  se halla en el semiplano al que pertenece el punto  $B$ . Puesto que los puntos  $A$  y  $B$

se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo  $c$ , resulta que las semirrectas  $a$  y  $b$  se hallan en distintos semiplanos. Queda demostrado el teorema.

### Preguntas de [repaso

1. ¿Qué es demostración geométrica?
2. ¿Qué es teorema?
3. Dese un ejemplo de teorema y de su demostración.
4. ¿Qué es axioma?
5. Enúnciense los axiomas de la pertenencia de los puntos y las rectas.
6. Enúnciense los axiomas de la medición de los segmentos y los ángulos.
7. Enúnciense los axiomas de la construcción de los segmentos y los ángulos.
8. Cítense los conceptos geométricos fundamentales.
9. Dese ejemplos de conceptos geométricos derivados y dese su definición partiendo de los conceptos fundamentales.
10. ¿Qué propiedades de las figuras geométricas se permite emplear para demostrar un teorema?
11. ¿Cómo se emplea el dibujo en la demostración de un teorema?
12. ¿Cuáles son las dos partes que componen el enunciado de un teorema? ¿Cómo se denominan?
13. Enúnciense y demuéstrese el teorema sobre la posición de los ángulos construidos en un mismo semiplano (teorema 2.2).
14. Enúnciense y demuéstrese el teorema sobre la separación de los lados de un ángulo por una recta (teorema 2.3).
15. Demuéstrese los teoremas 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; y 1.5 del § 1.

### Ejercicios

16. En el plano se tienen cuatro puntos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$  y una recta  $a$  que no pasa por ninguno de ellos. Los segmentos  $A_1A_2$  y  $A_3A_4$  cortan la recta  $a$  y el segmento  $A_2A_3$  no la corta. ¿Corta el segmento  $A_1A_4$  la recta  $a$ ? Arguéntese la respuesta.
17. En el plano se tienen cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Demuéstrese que si los segmentos  $AB$  y  $CD$  se cortan, los puntos  $B$  y  $D$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $AC$ .
18. Demuéstrese que si un rayo  $c$  pasa entre los lados de un ángulo  $(ab)$ , corta cualquier segmento cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo  $(ab)$ .
19. Tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se hallan en una misma recta. ¿Cuál de estos puntos se encuentra entre los otros dos, si  $AB = 10$  cm,  $AC = 7$  cm y  $BC = 3$  cm? Arguéntese la respuesta.
20. ¿Pueden hallarse tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  en una misma recta, si  $AB = 5$  cm,  $BC = 6$  cm y  $AC = 7$  cm? Arguéntese la respuesta.
21. Tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se hallan en una misma recta. El segmento  $AB$  es igual a 4 cm y el segmento  $BC$  es igual a 3 cm. ¿A qué es igual el segmento  $AC$  si el punto  $B$  se halla entre  $A$  y  $C$ ? ¿A qué es igual el segmento  $AC$ , si el punto  $A$  se halla entre  $B$  y  $C$ ? Arguéntense las respuestas.



22. Cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se hallan en una misma recta. El punto  $B$  se halla entre  $A$  y  $C$  y el punto  $C$  entre  $B$  y  $D$ . Demuéstrase que el punto  $C$  se halla entre  $A$  y  $D$ . (*Sugerencia.* Las semirrectas  $CA$  y  $CD$  son complementarias. El punto  $B$  se halla en la semirrecta  $CA$ .)

### § 3. ANGULOS

**Ángulos adyacentes.** Dos ángulos se llaman *adyacentes* si tienen un lado común y sus otros lados son semirrectas complementarias. Los ángulos  $(a_1b)$  y  $(a_2b)$  de la fig. 23 son adyacentes.

Sea  $C$  un punto en la recta  $AB$  situado entre los puntos  $A$  y  $B$  y sea  $D$  un punto que no se halla en la recta  $AB$  (fig. 24).

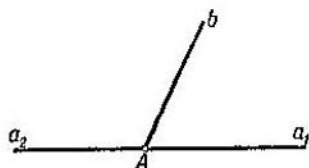


Fig. 23

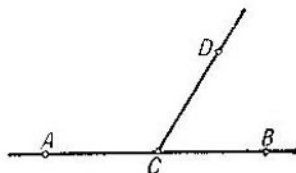


Fig. 24

Los ángulos  $BCD$  y  $ACD$  son entonces adyacentes. Tienen el lado  $CD$  común. Los lados  $CA$  y  $CB$  son semirrectas complementarias de la recta  $AB$  ya que los puntos  $A$  y  $B$  de estas semirrectas están separados por el punto de origen  $C$ .

**TEOREMA 3.1.** *La suma de ángulos adyacentes es igual a  $180^\circ$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $(a_1b)$  y  $(a_2b)$  los ángulos adyacentes dados (fig. 23). El rayo  $b$  pasa entre los lados  $a_1$  y  $a_2$  del ángulo llano. De aquí resulta, según el axioma  $\text{III}_4$ , que la suma de los ángulos  $(a_1b)$  y  $(a_2b)$  es igual al ángulo llano, es decir, a  $180^\circ$ . Queda demostrado el teorema.

Del teorema 3.1 se deduce que *si dos ángulos son iguales, también son iguales sus ángulos adyacentes.*

**Ángulos verticales.** Dos ángulos se llaman *verticales* si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias de los lados del otro. Los ángulos  $(a_1b_1)$  y  $(a_2b_2)$  de la fig. 25 son ángulos verticales.

**TEOREMA 3.2.** *Los ángulos verticales son iguales.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $(a_1b_1)$  y  $(a_2b_2)$  los ángulos verticales dados (fig. 25). El ángulo  $(a_1b_2)$  es adyacente del ángulo  $(a_1b_1)$  y del ángulo  $(a_2b_2)$ . De aquí deducimos, según el teorema 3.1, que cada uno de los ángulos  $(a_1b_1)$  y  $(a_2b_2)$

complementa el ángulo  $(a_1b_2)$  hasta  $180^\circ$ , es decir, que los ángulos  $(a_1b_1)$  y  $(a_2b_2)$  son iguales. Queda demostrado el teorema.

**Angulo recto. Rectas perpendiculares.** Un ángulo igual a  $90^\circ$  se llama *ángulo recto*. Del teorema 3.1 resulta que *el ángulo adyacente de un ángulo recto es un ángulo recto*.

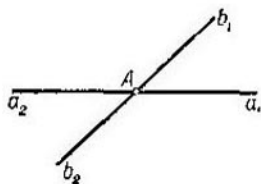


Fig. 25

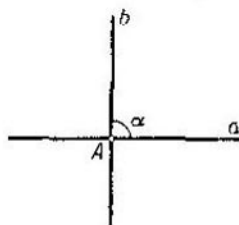


Fig. 26

Sean  $a$  y  $b$  dos rectas que se cortan (fig. 26). Las semirrectas de estas rectas forman cuatro ángulos. Sea  $\alpha$  uno de estos ángulos. Cualquiera de los tres ángulos restantes será entonces adyacente del ángulo  $\alpha$  o vertical del ángulo  $\alpha$ . De aquí se deduce que si uno de los ángulos es recto, también son rectos los demás ángulos. En este caso decimos que las rectas se cortan en ángulo recto y las denominamos *perpendiculares*.

**TEOREMA 3.3.** *Por todo punto de una recta se puede trazar una recta perpendicular a ella y sólo una.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $a$  la recta dada y sea  $A$  un punto en ella. Indiquemos por  $a_1$  una de las semirrectas de la recta  $a$  con el punto de origen  $A$  (fig. 27).

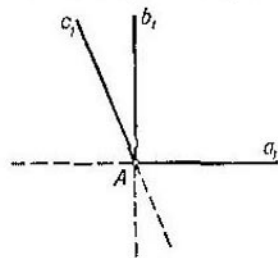


Fig. 27

Construyamos a partir de la semirrecta  $a_1$  el ángulo  $(a_1b_1)$  igual a  $90^\circ$ . La recta que contiene el rayo  $b_1$  será entonces perpendicular a la recta  $a$ .

Supongamos que, además de la recta construida, existe otra recta que también pasa por el punto  $A$  y es perpendicular a la recta  $a$ . Indiquemos por  $c_1$  la semirrecta de esta

recta que se halla en el mismo semiplano que el rayo  $b_1$ .

Los ángulos  $(a_1b_1)$  y  $(a_1c_1)$ , iguales cada uno a  $90^\circ$ , han sido construidos en un mismo semiplano a partir de la semi-

recta  $a_1$ . Pero según el axioma  $IV_2$ , a partir de la semirrecta  $a_1$  se puede construir en el semiplano dado sólo un ángulo igual a  $90^\circ$ . Por ello, no puede existir otra recta que pase por el punto  $A$  y sea perpendicular a la recta  $a$ . Queda demostrado el teorema.

### Preguntas de repaso

1. ¿Qué ángulos se llaman adyacentes?
2. ¿Por qué son adyacentes los ángulos  $DCA$  y  $DCB$  de la fig. 24?
3. Demuéstrese que la suma de ángulos adyacentes es igual a  $180^\circ$ .
4. Demuéstrese que si dos ángulos son iguales, sus ángulos adyacentes también son iguales.
5. ¿Qué ángulos se llaman verticales?
6. Demuéstrese que los ángulos verticales son iguales.
7. ¿Qué ángulo se llama recto?
8. Demuéstrese que también es recto el ángulo adyacente de un ángulo recto.
9. Demuéstrese que si en la intersección de dos rectas uno de los ángulos es recto, los tres restantes también lo son.
10. Demuéstrese que por todo punto de una recta se puede trazar una recta perpendicular a ésta.

### Ejercicios

11. El ángulo  $(ab)$  es igual a  $120^\circ$  y el ángulo  $(ac)$  es igual a  $150^\circ$ . ¿A qué es igual el ángulo  $(bc)$  si los rayos  $b$  y  $c$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta que contiene el rayo  $a$ ? ¿A qué es igual el ángulo  $(bc)$  si los rayos  $b$  y  $c$  se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta que contiene el rayo  $a$ ?
12. ¿A qué son iguales los ángulos adyacentes si uno de ellos es dos veces mayor que el otro?
13. ¿A qué son iguales los ángulos adyacentes si uno de ellos es  $30^\circ$  mayor que el otro?
14. Los segmentos  $AB$  y  $CD$  se cortan en el punto  $O$ . Demuéstrese que los ángulos  $AOC$  y  $BOD$  son verticales.
15. Uno de los ángulos formados por la intersección de dos rectas es igual a  $60^\circ$ . Hállense los demás ángulos.

## § 4. IGUALDAD DE LOS TRIÁNGULOS

**Segundo criterio de la igualdad de los triángulos.** El axioma V ofrece el primer criterio de la igualdad de los triángulos. El segundo criterio se enuncia en el teorema siguiente:

**TEOREMA 4.1.** Si los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A_1B_1C_1$  son tales que  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$  y  $\angle B = \angle B_1$ , los triángulos son iguales. O sea, también  $AC = A_1C_1$ ,  $BC = B_1C_1$  y  $\angle C = \angle C_1$  (fig. 28).

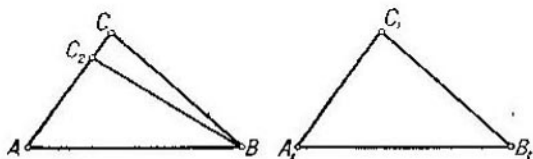


Fig. 28

**DEMOSTRACIÓN.** Si en estos triángulos  $AC = A_1C_1$ , son iguales en virtud del primer criterio de la igualdad (axioma V). Supongamos que  $AC \neq A_1C_1$ . Entonces nos encontramos con que  $AC > A_1C_1$  o que  $AC < A_1C_1$ . Supongamos, para concretar, que  $AC > A_1C_1$ .

Construyamos en la semirrecta  $AC$  el segmento  $AC_2$  igual a  $A_1C_1$ . Según el teorema 1.5, el punto  $C_2$  se halla entre  $A$  y  $C$ . Los triángulos  $\triangle A_1B_1C_1$  y  $\triangle ABC_2$  son iguales debido al primer criterio de la igualdad ya que  $AB = A_1B_1$  y  $\angle A = \angle A_1$  por hipótesis del teorema y  $AC_2 = A_1C_1$  por construcción. De la igualdad de estos triángulos resulta la igualdad de los ángulos  $\angle A_1B_1C_1$  y  $\angle ABC_2$ . Además el ángulo  $\angle A_1B_1C_1$  es igual al ángulo  $\angle ABC$  por hipótesis del teorema.

El rayo  $BC_2$  pasa entre los rayos  $BA$  y  $BC$  ya que corta el segmento  $AC$ . Por ello, el ángulo  $\angle ABC_2$  es menor que el ángulo  $\angle ABC$ . Hemos llegado a una contradicción, pues estos ángulos son iguales. Queda demostrado el teorema.

**Triángulo isósceles.** Un triángulo se llama *isósceles* si tiene dos lados iguales. Estos lados iguales se llaman *laterales* y el tercer lado se llama *base* del triángulo (fig. 29).

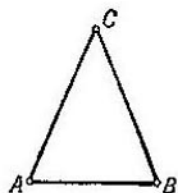


Fig. 29

**TEOREMA 4.2.** En un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales. O sea, si  $AC = BC$  en el triángulo  $\triangle ABC$ , se tiene  $\angle A = \angle B$ .

**DEMOSTRACIÓN** El triángulo  $\triangle CAB$  es igual al triángulo  $\triangle CBA$  según el primer criterio de la igualdad de los triángulos. Efectivamente, se tiene  $CA = CB$ ,  $CB = CA$  y  $\angle C = \angle C$ .

De la igualdad de los triángulos resulta que  $\angle A = \angle B$ . Queda demostrado el teorema.

**TEOREMA 4.3.** Si en un triángulo  $ABC$  se tiene  $\angle A = \angle B$ , el triángulo es isósceles. A saber:  $AC = BC$ .

**DEMOSTRACIÓN.** El triángulo  $ABC$  es igual al triángulo  $BAC$  por el segundo criterio de la igualdad de los triángulos. Efectivamente,  $AB = BA$ ,  $\angle B = \angle A$  y  $\angle A = \angle B$ . De la igualdad de los triángulos resulta que  $AC = BC$ . Queda demostrado el teorema.

El teorema 4.3 es el *recíproco* del teorema 4.2. La tesis del teorema 4.2 es la hipótesis del teorema 4.3 mientras que

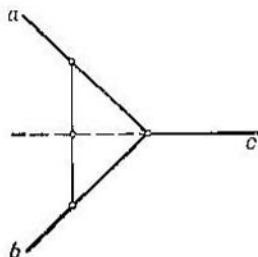


Fig. 30

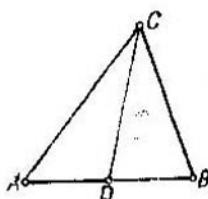


Fig. 31

la hipótesis del teorema 4.2 es la tesis del teorema 4.3. No todo teorema tiene recíproco, es decir, si el teorema es verídico, el teorema recíproco puede no serlo.

Aclaremos esto con el ejemplo del teorema 2.3. Su teorema recíproco sería el siguiente: si el rayo  $c$  parte del vértice de un ángulo ( $ab$ ) y la recta que lo contiene separa los lados del ángulo, el rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo. Esta afirmación no es válida. Fíjense en la fig. 30. La recta que contiene el rayo  $c$  separa los lados del ángulo ( $ab$ ) y, sin embargo, el rayo  $c$  no pasa entre los lados del ángulo ya que no corta ningún segmento cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo. El rayo complementario del rayo  $c$  pasa entre los lados del ángulo ( $ab$ ).

**Mediana, bisectriz y altura.** Sea  $ABC$  un triángulo y sea  $D$  un punto de la recta  $AB$  (fig. 31). El segmento  $CD$  se llama *mediana* del triángulo relativa al lado  $AB$  si el punto  $D$  es el punto medio del segmento  $AB$ , es decir, si  $AD = BD$ . El segmento  $CD$  se llama *bisectriz* del triángulo si la semirecta  $CD$  pasa entre los lados  $CA$  y  $CB$  del triángulo y divide

el ángulo  $C$  por la mitad, o sea, si  $\angle ACD = \angle BCD$ . El segmento  $CD$  se llama *altura* del triángulo si las rectas  $AB$  y  $CD$  son perpendiculares.

**TEOREMA 4.4.** *En el triángulo isósceles la mediana relativa a la base es bisectriz y altura.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $ABC$  el triángulo isósceles de base  $AB$  (fig. 32). Sea  $CD$  la mediana relativa a la base. Los triángulos  $CAD$  y  $CBD$  son iguales según el primer criterio de la igualdad de los triángulos. Sus lados  $AC$  y  $BC$  son iguales por ser el triángulo  $ABC$  isósceles. Los ángulos  $CAD$  y  $CBD$  son iguales por el teorema 4.2. Los lados  $AD$  y  $BD$  son iguales porque  $D$  es el punto medio del segmento  $AB$ . De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos:  $\angle ACD = \angle BCD$  y  $\angle ADC = \angle BDC$ . Por ser iguales los ángulos  $ACD$  y  $BCD$ , resulta que  $CD$  es bisectriz.

Como los ángulos  $ADC$  y  $BDC$  son adyacentes o iguales, resultan rectos y, por ello,  $CD$  es altura del triángulo. Queda demostrado el teorema.

**Tercer criterio de la igualdad de los triángulos.** El tercer criterio de la igualdad de los triángulos se enuncia en el teorema siguiente.

**TEOREMA 4.5.** *Si los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son tales que  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  y  $BC = B_1C_1$ , los triángulos son iguales. A saber, también  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$  y  $\angle C = \angle C_1$ .*

**DEMOSTRACIÓN** (fig. 33). Si es  $\angle A = \angle A_1$  o  $\angle B = \angle B_1$ , los triángulos son iguales según el primer criterio

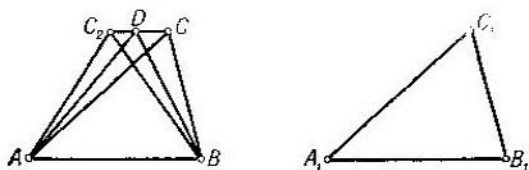


Fig. 33

de la igualdad de los triángulos. Supongamos que en los triángulos se tiene  $\angle A \neq \angle A_1$  y  $\angle B \neq \angle B_1$ . Construyamos a partir de la semirrecta  $AB$  en el semiplano en el que se

encuentra el punto  $C$  un ángulo igual al  $\angle A_1$  y construyamos en su lado el segmento  $AC_2$  igual a  $A_1C_1$ .

Los triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $ABC_2$  son iguales según el primer criterio. Tienen  $AB = A_1B_1$  por la hipótesis del teorema y  $A_1C_1 = AC_2$  y  $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC_2$  por construcción. De la igualdad de los triángulos resulta que  $BC_2 = B_1C_1$ .

Los triángulos  $CC_2A$  y  $CC_2B$  son isósceles y tienen  $CC_2$  como base común. En ellos  $AC = AC_2$  ya que  $AC = A_1C_1$  y que  $A_1C_1 = AC_2$ ; además,  $BC = BC_2$  ya que  $BC = B_1C_1$  y que  $B_1C_1 = BC_2$ .

Sea  $D$  el punto medio del segmento  $CC_2$ . El punto  $D$  no se halla en la recta  $AB$  porque el segmento  $CC_2$  no corta esta recta. De aquí se deduce que las rectas  $AD$  y  $BD$  son diferentes.

En virtud del teorema 4.4, las rectas  $AD$  y  $BD$  son perpendiculares a la recta  $CC_2$ . Sin embargo, según el teorema 3.3, por el punto  $D$  se puede trazar solamente una recta perpendicular a la recta  $CC_2$ . Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

### Preguntas de repaso

1. ¿Qué segmentos se llaman iguales?
2. ¿Qué ángulos se llaman iguales?
3. ¿Qué es triángulo?
4. ¿Qué significa la frase: el triángulo  $ABC$  es igual al triángulo  $PQR$ ?
5. Enúnciese el primer criterio de la igualdad de los triángulos.
6. Enúnciese y demuéstrase el segundo criterio de la igualdad de los triángulos.
7. ¿Qué triángulo se llama isósceles? ¿Qué lados del triángulo isósceles se llaman laterales? ¿Qué lado se llama base?
8. Demuéstrase que en el triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales.
9. Demuéstrase que un triángulo con dos ángulos iguales es isósceles.
10. ¿Qué es el teorema recíproco? Dese un ejemplo. ¿Existe el recíproco de cualquier teorema?
11. Demuéstrase que en el triángulo equilátero todos los ángulos son iguales.
12. Demuéstrase que un triángulo de ángulos iguales es equilátero.
13. ¿Qué son mediana, bisectriz y altura del triángulo?
14. Demuéstrase que en el triángulo isósceles la mediana relativa a la base es bisectriz y altura.
15. Demuéstrase el tercer criterio de la igualdad de los triángulos.

## Ejercicios

16. Demuéstrese que si el rayo  $c$ , que parte del vértice de un ángulo ( $ab$ ), pasa entre sus lados, el ángulo ( $ac$ ) es menor que el ángulo ( $ab$ ).

17. Muéstrase con un ejemplo que dos triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  tales que  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$  y  $\angle A = \angle A_1$  pueden no ser iguales.

18. Demuéstrese que en el triángulo isósceles la bisectriz relativa a la base es mediana y altura.

19. Demuéstrese que en el triángulo isósceles las medianas relativas a los laterales son iguales y las bisectrices relativas a los laterales son iguales.

20. Demuéstrese que los puntos medios de los lados del triángulo isósceles son vértices de otro triángulo isósceles.

21. Demuéstrese que si el triángulo  $ABC$  es igual al triángulo  $BCA$ , es equilátero.

## § 5. RELACIONES ENTRE LOS ANGULOS Y LOS LADOS DEL TRIANGULO

**Relaciones entre los ángulos del triángulo. TEOREMA 5.1.**  
*La suma de dos ángulos cualesquiera del triángulo es menor que  $180^\circ$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $ABC$  el triángulo dado (fig. 34). Demostremos que la suma de los ángulos de los vértices  $A$  y  $C$  es menor que  $180^\circ$ . Indiquemos por  $O$  el punto medio del lado  $AC$ . Construyamos en la prolongación del segmento  $BO$  el segmento  $OD$  igual a  $OB$ . Los triángulos  $AOD$  y  $COB$  son iguales. Tienen iguales los ángulos de vértice  $O$ , por ser éstos verticales, y  $AO = OC$  y  $OD = OB$  por construcción. De la igualdad de estos triángulos se deduce que  $\angle OCB = \angle OAD$ .

El ángulo  $BAD$  es igual a la suma de los ángulos  $BAO$  y  $DAO$  ya que el rayo  $AO$  corta el segmento  $BD$  cuyos extremos se hallan en los lados del ángulo  $BAD$ . Puesto que  $\angle OAD = \angle OCB$ , el ángulo  $BAD$  es igual a la suma de los ángulos de vértices  $A$  y  $C$  del triángulo  $ABC$ . El ángulo  $BAD$  no es llano porque el punto  $D$  no se halla en la recta  $AB$ . Por ello, el ángulo  $BAD$  es menor que  $180^\circ$ . Es decir, la suma de los ángulos  $A$  y  $C$  del triángulo  $ABC$  es igual al ángulo  $BAD$  menor que  $180^\circ$ . Queda demostrado el teorema.

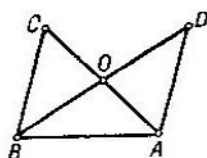


Fig. 34



Se llama *agudo* todo ángulo menor que el recto, o sea, menor que  $90^\circ$ . Todo ángulo mayor que  $90^\circ$  pero menor que  $180^\circ$  se llama *obtuso*.

Del teorema 5.1 se deduce que *en cualquier triángulo hay dos ángulos agudos*. En efecto, si fuera agudo sólo un ángulo, la suma de los otros dos ángulos sería no menor que  $180^\circ$  a despecho del teorema 5.1.

En un triángulo  $ABC$  se llama *ángulo exterior* de vértice  $A$  al que es adyacente del ángulo de este mismo vértice en el triángulo. Para no confundir el ángulo de vértice  $A$  del triángulo con el ángulo exterior de mismo vértice, el primero se denomina *interior*.

**TEOREMA 5.2.** *Todo ángulo exterior del triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente de éste.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $ABC$  el triángulo dado. Demostremos que el ángulo exterior de vértice  $A$  es mayor que el ángulo interior  $B$ . Según el teorema 5.1, la suma de los ángulos interiores  $A$  y  $B$  es menor que  $180^\circ$ , o sea,  $\angle A + \angle B$  es menor que  $180^\circ$ . De aquí resulta que el  $\angle B$  es menor que  $180^\circ - \angle A$ . Pero, según la propiedad de los ángulos adyacentes,  $180^\circ - \angle A$  es la medida gradual del ángulo exterior de vértice  $A$ . Queda demostrado el teorema.

#### **Relación entre los ángulos del triángulo y sus lados opuestos.**

**TEOREMA 5.3.** *Si  $AB > BC$  en un triángulo  $ABC$ , el  $\angle C$  es mayor que el  $\angle A$ . Recíprocamente, si el  $\angle C$  es mayor que el  $\angle A$ , se tiene  $AB > BC$ . En otras palabras, al lado mayor de un triángulo se opone el ángulo mayor y a mayor ángulo se opone mayor lado.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $AB > BC$  en el triángulo  $ABC$  (fig. 35). Consideremos en la semirrecta  $BA$  el segmento  $BC_1$  igual a  $BC$ . El punto  $C_1$  se halla entre  $A$  y  $B$ . La semirrecta  $CC_1$  pasa entre  $CA$  y  $CB$ , pues corta el segmento  $AB$ . Por ello, el ángulo  $BCC_1$  es menor que el ángulo  $BCA$ , o sea, menor que el ángulo  $C$  del triángulo  $ABC$ .

Los ángulos  $BCC_1$  y  $BC_1C$  son iguales por ser ángulos de la base del triángulo isósceles  $CBC_1$ . El  $\angle BC_1C$  es el ángulo exterior de vértice  $C_1$  del triángulo  $AC_1C$  y, por esto, es mayor que el ángulo  $A$ . Así, el  $\angle C$  del  $\triangle ABC$  es mayor que el  $\angle A$  de este triángulo. Queda demostrada la 1ª afirmación del teorema.

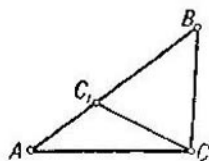


Fig. 35

Demostremos ahora que si  $\angle C$  es mayor que  $\angle A$ , se tiene  $AB > BC$ . Supongamos que la afirmación no es válida. Entonces,  $AB = BC$  o  $AB < BC$ . En el primer caso el triángulo  $ABC$  es isósceles y, por consiguiente, los ángulos  $A$  y  $C$  de su base son iguales. Pero esto contradice a la hipótesis de que el  $\angle C$  es mayor que el  $\angle A$ . Ahora bien, si es  $AB < BC$ , resulta según lo demostrado que el  $\angle A$  es mayor que el  $\angle C$ , lo que también contradice a la hipótesis. Por lo tanto, si el  $\angle C$  es mayor que el  $\angle A$ , se tiene  $AB > BC$ . Queda demostrado el teorema.

**Relaciones entre los lados del triángulo.** TEOREMA 5.4. *En todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercer lado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $ABC$  el triángulo dado (fig. 36). Demostremos que  $AB < AC + CB$ . Consideremos en la semirrecta  $AC$  el segmento  $AD$  igual a  $AC + CB$ . El punto  $C$  estará entonces entre  $A$  y  $D$  y  $CD = CB$ . Los ángulos  $B$  y  $D$  del triángulo  $BCD$  son iguales por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles.

El ángulo  $ABD$  es mayor que el ángulo  $CBD$  ya que la semirrecta  $BC$  pasa entre  $BA$  y  $BD$ . Por consiguiente, el ángulo  $ABD$  es mayor que el ángulo  $ADB$ . Empleando el teorema 5.3, deducimos que  $AD > AB$ , es decir, que  $AC + BC > AB$ . Queda demostrado el teorema.

**Desigualdad triangular.** Si los puntos  $A$  y  $B$  son diferentes, la longitud del segmento  $AB$  se llama *distancia* entre estos puntos. Si los puntos  $A$  y  $B$  coinciden, la distancia entre ellos se considera igual a cero.

La desigualdad triangular es la propiedad de las distancias entre tres puntos que enuncia el teorema siguiente.

TEOREMA 5.5. *Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres puntos, no necesariamente distintos, la distancia  $AB$  no es mayor que la suma de las distancias  $AC + CB$ .*

DEMOSTRACIÓN. Distingamos cuatro casos: 1) los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son diferentes y no se hallan en una misma recta; 2) todos los puntos son diferentes pero se hallan en una misma recta; 3) dos puntos coinciden y 4) todos los puntos coinciden.

En el primer caso la afirmación resulta del teorema 5.4.

Consideremos el segundo caso. Aceptemos, pues, que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son diferentes pero se hallan en una misma recta. Uno de estos puntos estará entre los otros dos. Si  $C$  se halla entre  $A$  y  $B$  tenemos  $AB = AC + CB$  por la propiedad de la medición de los segmentos. Si  $A$  se halla entre  $B$  y  $C$ , tenemos  $AB + AC = BC$ . Si  $B$  se halla entre  $A$  y  $C$ , tenemos  $AB + BC = AC$ . Vemos que cualquiera que sea la posición de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  la distancia  $AB$  no es mayor que  $AC + CB$ .

Consideremos el tercer caso: dos de los tres puntos coinciden. Si coinciden los puntos  $A$  y  $B$ , se tiene  $AB = 0$ . Si coinciden  $A$  y  $C$ , se tiene  $AB = CB$ . Si coinciden  $B$  y  $C$ , se tiene  $AB = AC$ . Vemos que en cualquier caso de coincidencia de dos puntos,  $AB$  no es mayor que  $AC + CB$ .

En el cuarto caso, en el que los tres puntos coinciden, todas las distancias  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$  son iguales a cero y, por consiguiente,  $AB$  no es mayor que  $AC + CB$ .

En resumen, para cualesquiera tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  la distancia  $AB$  no es mayor que la suma de las distancias  $AC + CB$ . Queda demostrado el teorema.

Del teorema 5.5. se deduce que cualesquiera que sean los  $n + 2$  puntos  $A$ ,  $C_1, C_2, \dots, C_n, B$ , nunca es  $AB$  mayor que  $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_nB$ . En efecto, según el teorema 5.5,  $AB$  no es mayor que  $AC_1 + C_1B$ . Según este mismo teorema,  $C_1B$  no es mayor que  $C_1C_2 + C_2B$ . Por ello,  $AB$  no es mayor que  $AC_1 + C_1C_2 + C_2B$ . Ahora bien,  $C_2B$  no es mayor que  $C_2C_3 + C_3B$ . Por consiguiente,  $AB$  no es mayor que  $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_3B$ . Y así sucesivamente. En definitiva se obtiene que  $AB$  no es mayor que  $AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_nB$ .

Se llama *quebrada* la figura que consta de los puntos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  con los segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$  uniendo los puntos consecutivos. Los puntos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  se llaman *vértices* de la quebrada y los segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots$  se llaman *lados* de la quebrada. Los puntos  $A_1$  y  $A_n$  se llaman *extremos* de la quebrada. Se llama *longitud* de la quebrada la suma de las longitudes de sus lados. En la fig. 37 se representa una quebrada de vértices  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

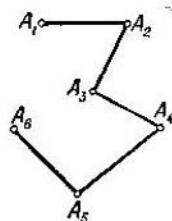


Fig. 37

La longitud de la quebrada no es menor que la longitud del segmento que une sus extremos.

Efectivamente, sea  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  la quebrada dada. Entonces, según hemos demostrado, la longitud del segmento  $A_1A_n$  no es mayor que la suma de las longitudes de los segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ , es decir, que la longitud de la quebrada.

### Preguntas de repaso

1. ¿Qué son los ángulos del triángulo  $ABC$ ?
2. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 5.1 (fig. 34):
  - 1) ¿Por qué son verticales los ángulos  $COB$  y  $AOD$ ?
  - 2) ¿Por qué es el ángulo  $BAD$  igual a la suma de los ángulos  $CAB$  y  $CAD$ ?
  - 3) ¿Por qué es el ángulo  $BAD$  menor que  $180^\circ$ ?
3. ¿Qué ángulo se llama agudo? ¿Qué ángulo se llama obtuso?
4. Demuéstrese que cualquier triángulo tiene dos ángulos agudos.
5. ¿Qué es el ángulo exterior de vértice  $A$  del triángulo  $ABC$ ?
6. Demuéstrese que el ángulo exterior de todo triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.
7. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 5.3 (fig. 35):
  - 1) ¿Por qué se halla entre  $A$  y  $B$  el punto  $C_1$ ?
  - 2) ¿Por qué es  $BC_1C$  ángulo exterior de vértice  $C_1$  del triángulo  $ACC_1$ ?
  - 3) ¿Por qué es el ángulo  $BCC_1$  menor que el ángulo  $BCA$ ?
8. Demuéstrese que en todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero.
9. ¿Qué es la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$ ?
10. ¿En qué consiste la desigualdad triangular? Demuéstrese la desigualdad triangular.
11. ¿Qué es quebrada? Demuéstrese que la longitud de la quebrada no es menor que la distancia entre sus extremos.

### Ejercicios

12. ¿Existe un triángulo de dos ángulos rectos?
13. Demuéstrese que en cualquier triángulo hay dos ángulos exteriores obtusos.
14. Demuéstrese que dos rectas perpendiculares a una tercera no se cortan.
15. En el lado  $AB$  del triángulo  $ABC$  se ha tomado un punto  $D$ . Demuéstrese que el segmento  $CD$  es menor, por lo menos, que uno de los lados  $AC$  o  $BC$ .
16. Demuéstrese que cualquier segmento cuyos extremos se hallan en los lados de un triángulo no es mayor que el lado mayor del triángulo.
17. ¿Puede tener el triángulo  $ABC$  los lados  $AB = 7$  cm,  $BC = 10$  cm y  $AC = 18$  cm? Arguéntese la respuesta.
18. Demuéstrese que siendo  $AB = BC + AC$ , los tres puntos  $A, B$  y  $C$  se hallan en una misma recta.

19. Considérese la fig. 34. En ella  $BO$  es la mediana del triángulo  $ABC$  relativa al lado  $AC$ . Demuéstrese que la mediana  $BO$  es menor que la semisuma de los lados  $BA$  y  $BC$ .

20. Demuéstrese que si los vértices de una quebrada no se hallan en una recta, la longitud de la quebrada es mayor que la longitud del segmento que une sus extremos.

21. Demuéstrese que la distancia entre dos vértices cualesquiera de una quebrada cerrada no es mayor que la mitad de su longitud.

## § 6. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

**Ángulos y lados del triángulo rectángulo.** Se llama triángulo *rectángulo* aquel que tiene un ángulo recto. Puesto que todo triángulo tiene dos ángulos agudos, *en un triángulo rectángulo sólo un ángulo es recto*. Los otros dos son agudos.

Los lados del triángulo rectángulo tienen denominaciones especiales. A saber, el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*. Los otros dos lados se llaman *catetos*. Los ángulos opuestos a los catetos son agudos.

Ya que en cualquier triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado (teorema 5.3), *en el triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos*. Puesto que en cualquier triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero, *en el triángulo rectángulo la suma de los catetos es mayor que la hipotenusa*.

**Igualdad de los triángulos rectángulos.** Para los triángulos rectángulos, además de los criterios de la igualdad que conocemos, existen otros. Estos criterios de la igualdad de los triángulos rectángulos están en el teorema siguiente:

**TEOREMA 6.1.** *Los triángulos rectángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  de ángulos rectos  $C$  y  $C_1$  son iguales si se cumple una de las condiciones siguientes:*

- 1)  $BC = B_1C_1$  y  $\angle A = \angle A_1$ ;
- 2)  $AB = A_1B_1$  y  $BC = B_1C_1$ ;
- 3)  $AB = A_1B_1$  y  $\angle A = \angle A_1$ .

**DEMOSTRACIÓN** (fig. 38). Consideremos primero el caso en que se cumpla la condición 1) o la condición 2). Si se tiene  $AC = A_1C_1$ , los triángulos son iguales debido al primer criterio de la igualdad de los triángulos en el caso en que se cumpla la condición 1) y debido al tercer criterio de la igualdad de los triángulos en el caso en que se cumpla la condición 2).

Supongamos que  $AC \neq A_1C_1$ . Sea, por ejemplo,  $A_1C_1 < AC$ . Consideremos en la semirrecta  $CA$  el segmento  $CA_2$

igual a  $C_1A_1$  (fig. 38, a la izquierda). El punto  $A_2$  estará entre  $A$  y  $C$ . Los triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $A_2BC$  son iguales en virtud del primer criterio de la igualdad. Tienen los ángulos  $C_1$  y  $C$  rectos,  $BC = B_1C_1$  por hipótesis y  $A_1C_1 = A_2C$  por construcción. De la igualdad de los triángulos se deduce que  $\angle BA_2C = \angle B_1A_1C_1$  y  $BA_2 = B_1A_1$ .

En caso de que se cumpla la condición 1), la igualdad de los ángulos  $BA_2C$  y  $B_1A_1C_1$  es imposible. En efecto, el ángulo  $B_1A_1C_1$  es igual al ángulo  $BAC$ . Por consiguiente, en el triángulo  $ABA_2$  resultan iguales el ángulo exterior de vértice  $A_2$  y el ángulo interior de vértice  $A$ . Pero esto contradice el teorema sobre el ángulo exterior del triángulo.

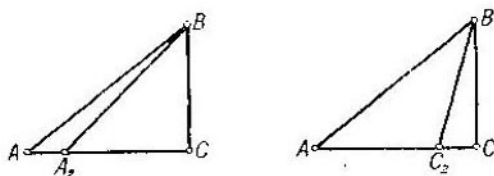


Fig. 38

En caso de que se cumpla la condición 2), la igualdad de los lados  $BA_2$  y  $B_1A_1$  es imposible. En efecto, tenemos  $B_1A_1 = BA$ . O sea, el triángulo  $ABA_2$  es isósceles. Su ángulo de vértice  $A_2$  es obtuso por ser el adyacente de un ángulo agudo del triángulo rectángulo  $BCA_2$ . Por lo tanto, el ángulo  $A$  es también obtuso. Pero esto es imposible.

Resumiendo, si se cumple cualquiera de las condiciones 1) o 2), debe tener lugar la igualdad  $AC = A_1C_1$ . En este caso, como hemos demostrado ya, los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son iguales.

Supongamos ahora que para los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  se cumple la condición 3). Demostremos que los triángulos son iguales.

Si se tiene  $AC = A_1C_1$ , los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son iguales debido al primer criterio ya que  $AB = A_1B_1$  y  $\angle A = \angle A_1$ .

Aceptemos que  $AC \neq A_1C_1$ . Sea, por ejemplo,  $AC > A_1C_1$ . Tomemos en la semirrecta  $AC$  el segmento  $AC_2$  igual a  $A_1C_1$  (fig. 38, a la derecha). Los triángulos  $ABC_2$  y  $A_1B_1C_1$  son iguales por el primer criterio de la igualdad de los triángulos. De la igualdad de los triángulos  $ABC_2$

y  $A_1B_1C_1$  se deduce que el ángulo  $AC_2B$  es recto. Por consiguiente, el ángulo  $CC_2B$  es recto, pues es el adyacente del ángulo  $AC_2B$ . O sea, el triángulo  $CBC_2$  tiene dos ángulos rectos. Pero esto es imposible.

Resumiendo, si se cumple la condición 3), tiene lugar la igualdad  $AC = A_1C_1$ . En este caso, como hemos demostrado ya, los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son iguales.

Queda demostrado el teorema.

**Perpendicular y oblicua.** Sean  $a$  una recta,  $B$  un punto que no le pertenece y  $A$  un punto de la recta  $a$ . El segmento  $BA$  se llama *perpendicular* trazada por el punto  $B$  a la recta  $a$ , si las rectas  $a$  y  $AB$  son perpendiculares (fig. 39). El punto  $A$  se llama *pie* de la perpendicular.

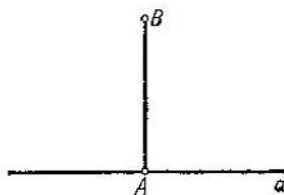


Fig. 39

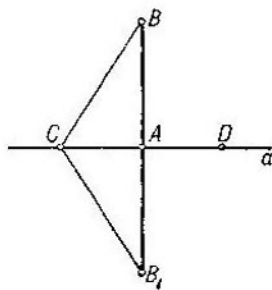


Fig. 40

**TEOREMA 6.2.** *Por todo punto exterior a la recta dada se puede trazar una perpendicular a esta recta y sólo una.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $a$  la recta dada y sea  $B$  un punto que no se halla en esta recta (fig. 40). Tomemos en la recta  $a$  dos puntos cualesquiera  $C$  y  $D$ . Si la recta  $BC$  es perpendicular a la recta  $a$ , el segmento  $BC$  es precisamente la perpendicular trazada por el punto  $B$  a la recta  $a$ .

Supongamos que  $BC$  no es perpendicular a la recta  $a$ . La recta  $a$  divide el plano en dos semiplanos. El punto  $B$  pertenece a uno de ellos. Construyamos en el otro semiplano, a partir de la semirrecta  $CD$ , un ángulo igual a  $BCD$  y consideremos en su lado el segmento  $CB_1$  igual al segmento  $CB$ .

Los puntos  $B$  y  $B_1$  se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta  $a$  y, por esto, el segmento  $BB_1$  corta esta recta en un punto  $A$ . Los triángulos  $CAB$  y  $CAB_1$  son iguales por el primer criterio de la igualdad de los triángulos.

Tienen el lado  $AC$  común y, además,  $\angle BCA = \angle B_1CA$  y  $CB = CB_1$ , por construcción. De aquí se deduce que son iguales los ángulos de vértice  $A$  de estos triángulos. Pero como estos ángulos son adyacentes, resultan rectos. O sea, la recta  $BA$  es perpendicular a la recta  $a$ , es decir, el segmento  $BA$  es la perpendicular trazada por el punto  $B$  a la recta  $a$ .

Aceptemos ahora que por el punto  $B$  se pueden trazar dos perpendiculares  $BA$  y  $BA_1$  a la recta  $a$ . Entonces el triángulo  $BAA_1$  tendrá dos ángulos rectos: el  $\angle A$  y el  $\angle A_1$ .

Pero esto es imposible. Luego, por el punto  $B$  se puede trazar una perpendicular a la recta  $a$  y sólo una. Queda demostrado el teorema.

Sea  $BA$  la perpendicular trazada por el punto  $B$  a la recta  $a$  y sea  $C$  un punto cualquiera de la recta  $a$  diferente de  $A$ . El segmento  $BC$  se llama *oblicua* trazada por el punto  $B$  a la recta  $a$  (fig. 41). El punto  $C$  se llama *pie* de la oblicua.

El segmento  $AC$  se llama *proyección*

de la oblicua. Observando el triángulo rectángulo  $BAC$  de ángulo recto  $A$ , vemos que *la oblicua es mayor que la perpendicular*. En este triángulo la oblicua es la hipotenusa y la perpendicular, un cateto.

Se llama *distancia* entre el punto  $B$  y la recta  $a$ , que no pasa por el punto  $B$ , la longitud de la perpendicular trazada a la recta  $a$  por el punto  $B$ . Puesto que la perpendicular es menor que cualquier oblicua trazada por el mismo punto, *la distancia entre el punto  $B$  y la recta  $a$  no es mayor que la distancia entre el punto  $B$  y cualquier punto de la recta  $a$ .*

#### Preguntas de repaso.

1. ¿Qué se llama triángulo rectángulo?
2. Demuéstrase que el triángulo rectángulo tiene un solo ángulo recto.
3. ¿Qué lado del triángulo rectángulo se llama hipotenusa? ¿Qué lados se llamen catetos?
4. Demuéstrase que en el triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.
5. Demuéstrase que en el triángulo rectángulo la suma de los catetos es mayor que la hipotenusa.



6. Enúnciense los criterios primero, segundo y tercero de la igualdad de los triángulos.
7. Enúnciense y demuéstranse los criterios especiales de la igualdad de los triángulos rectángulos.
8. ¿Qué es perpendicular?
9. Demuéstrase que por todo punto exterior a una recta se puede trazar una perpendicular a esta recta y sólo una.
10. ¿Qué es oblicua? ¿Qué es la proyección de una oblicua?
11. Demuéstrase que la perpendicular es menor que cualquier oblicua trazada por el mismo punto.
12. ¿Qué es distancia entre un punto  $B$  y una recta  $a$  que no pasa por el punto  $B$ ? Demuéstrase que la distancia entre un punto  $B$  y una recta  $a$  no es mayor que la distancia entre el punto  $B$  y cualquier punto de la recta  $a$ .

### Ejercicios

13. Demuéstrase que las oblicuas iguales, trazadas a una recta dada por un mismo punto, tienen proyecciones iguales. Y recíprocamente, que si son iguales las proyecciones de las oblicuas, también son iguales las oblicuas.
14. Demuéstrase que la altura del triángulo isósceles relativa a la base es mediana y bisectriz.
15. ¿Cómo trazar por el vértice  $A$  de un triángulo  $ABC$  una recta que corte el lado  $BC$  de manera que sean iguales las distancias entre esta recta y los vértices  $B$  y  $C$ ?
16. Demuéstrase que dos bisectrices del triángulo se cortan en un punto equidistante de todos los lados del triángulo.
17. Demuéstrase que las tres bisectrices del triángulo se cortan en un punto.
18. Por el punto  $B$  se ha trazado a la recta  $a$  la oblicua  $BC$ . Demuéstrase que por el punto  $B$  se puede trazar otra oblicua  $BD$  de la misma longitud que  $BC$ .
19. Demuéstrase que por un punto no se pueden trazar tres oblicuas de igual longitud a una misma recta.
20. Por el punto  $B$  se han trazado a la recta  $a$  la perpendicular  $BA$  y dos oblicuas  $BC$  y  $BD$ . El punto  $D$  se halla entre  $A$  y  $C$ . Demuéstrase que el ángulo  $BDC$  es obtuso.
21. Demuéstrase que de dos oblicuas trazadas por un mismo punto a una recta es mayor aquella que tiene mayor proyección. Y recíprocamente, que la oblicua mayor posee mayor proyección.

## § 7. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

**En qué consisten los problemas de construcción.** En los problemas de construcción se trata de construir una figura geométrica con instrumentos de dibujo dados. Estos instrumentos son en la mayoría de los casos la regla y el compás. La solución del problema consiste no tanto en la construcción de la figura como en explicar el modo de realizarla

y en efectuar la demostración correspondiente. El problema se considera resuelto si se ha señalado el método de construcción de la figura y se ha demostrado que realizando las construcciones indicadas se obtiene efectivamente la figura con las propiedades pedidas.

La regla como instrumento de construcciones geométricas permite trazar una recta cualquiera, una recta cualquiera que pasa por un punto y la recta que pasa por dos puntos. Con la regla no se puede realizar ninguna otra operación. En particular, no se puede construir segmentos aun cuando la regla esté graduada, no pueden usarse simultáneamente ambos bordes de la regla, etc.

El compás como instrumento de construcciones geométricas permite describir desde un centro la circunferencia de radio dado. En particular, el compás permite construir el segmento en una recta dada y a partir de un punto dado.

Consideremos los problemas elementales de construcción.

**Construcción del triángulo de lados dados. PROBLEMA 7.1.** *Constrúyase el triángulo de lados dados  $a$ ,  $b$  y  $c$  (fig. 42, a la izquierda).*

**SOLUCIÓN.** Tracemos con la regla una recta y marquemos en ella un punto  $B$  cualquiera (fig. 42, a la derecha). Tracemos con el compás una circunferencia de centro  $B$  y de

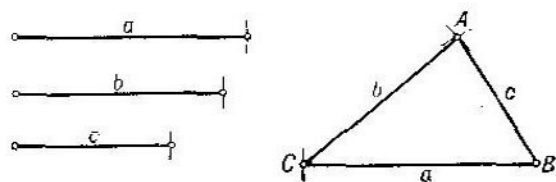


Fig. 42

radio  $a$ . Sea  $C$  su punto de intersección con la recta. Tracemos ahora una circunferencia de centro  $B$  y de radio  $c$  y otra de centro  $C$  y de radio  $b$ . Sea  $A$  el punto de intersección de estas circunferencias. Los lados del triángulo  $ABC$  son  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

El problema 7.1 no siempre tiene solución. Según el teorema 5.4, los segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$  deben satisfacer las condiciones  $a + b > c$ ,  $b + c > a$  y  $c + a > b$ .

**Construcción del ángulo igual a uno dado.** PROBLEMA 7.2. *Constrúyase a partir de una semirrecta y en el semiplano indicado el ángulo igual al ángulo dado.*

SOLUCIÓN. Tracemos una circunferencia cualquiera de centro en el vértice  $A$  del ángulo dado (fig. 43, a la izquierda). Sean  $B$  y  $C$  los puntos de intersección de la circunferencia y de los lados del ángulo. Tracemos una circunferencia de radio  $AB$  y de centro en el punto  $O$ , o sea, en el punto de origen de la semirrecta dada. Indiquemos por  $B_1$  (fig. 43,

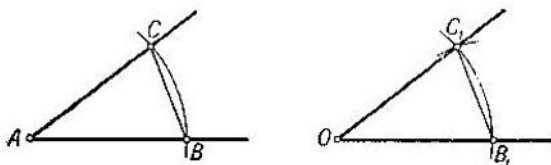


Fig. 43

a la derecha) el punto de intersección de esta circunferencia y de la semirrecta dada. Tracemos la circunferencia de centro  $B_1$  y de radio  $BC$ . El punto  $C_1$  de intersección de las circunferencias trazadas en el semiplano dado se halla en el lado del ángulo pedido. Para demostrarlo basta observar que los triángulos  $ABC$  y  $OB_1C_1$  son iguales por ser triángulos de lados respectivamente iguales. Los ángulos  $A$  y  $O$  son ángulos correspondientes de estos triángulos.

**División del ángulo por la mitad.** PROBLEMA 7.3. *Divídase por la mitad el ángulo dado.*

SOLUCIÓN. Considerando el vértice  $A$  del ángulo dado como centro, tracemos una circunferencia de radio cualquiera (fig. 44). Sean  $B$  y  $C$  los puntos de su intersección con los lados del ángulo. Tracemos circunferencias del mismo radio y de centro en los puntos  $B$  y  $C$ . Sea  $D$  el punto de intersección de las mismas diferente de  $A$ . La semirrecta  $AD$  divide el ángulo  $A$  por la mitad. Esto resulta de la igualdad de los triángulos  $ABD$  y  $ACD$  en los que los ángulos  $DAB$  y  $DAC$  son correspondientes.

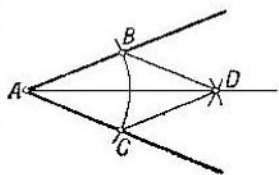


Fig. 44

**División del segmento por la mitad.** PROBLEMA 7.4. *Divídase por la mitad el segmento dado.*

SOLUCIÓN. Sea  $AB$  el segmento dado (fig. 45). Tracemos dos circunferencias de radio  $AB$  y de centro en los puntos  $A$  y  $B$ . Sean  $C$  y  $C_1$  los puntos de intersección de estas circunferencias. Se hallan en semiplanos diferentes respecto a la recta  $AB$ . El segmento  $CC_1$  corta la recta  $AB$  en un punto  $O$ . Este es precisamente el punto medio del segmento  $AB$ .

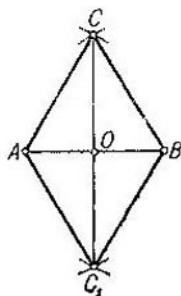


Fig. 45

Efectivamente, los triángulos  $CAC_1$  y  $CBC_1$  son iguales en virtud del tercer criterio de la igualdad de los triángulos. De aquí resulta la igualdad de los ángulos  $ACO$  y  $BCO$ . Entonces, los triángulos  $ACO$  y  $BCO$  son iguales por el primer criterio. Los lados  $AO$  y  $BO$  son lados correspondientes de estos triángulos y, por consiguiente,

son iguales. O sea,  $O$  es el punto medio del segmento  $AB$ .

**Construcción de la perpendicular.** PROBLEMA 7.5. *Trácese por el punto  $O$  la perpendicular a la recta  $a$ .*

SOLUCIÓN. Se pueden presentar dos casos:

- 1) el punto  $O$  se halla en la recta  $a$ ;
- 2) el punto  $O$  no se halla en la recta  $a$ .

Consideremos el primer caso (fig. 46, a la izquierda).

Tracemos una circunferencia de radio cualquiera y de centro  $O$ . Corta la recta en dos puntos  $A$  y  $B$ . Tracemos dos circunferencias de radio  $AB$  y con centros en los puntos  $A$  y  $B$ . Sea  $C$  el punto de intersección de las mismas. La recta pedida pasa por los puntos  $O$  y  $C$ . La perpendicularidad de las rectas  $OC$  y  $AB$  resulta de la igualdad de los ángulos de vértice  $O$  en los triángulos  $ACO$  y  $BCO$ . Estos triángulos son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos.

Consideremos el segundo caso (fig. 46, a la derecha). Tracemos una circunferencia de radio cualquiera que tiene su centro en  $O$  y que corta la recta  $a$ . Sean  $A$  y  $B$  sus puntos de intersección con la recta  $a$ . Tracemos dos circunferencias de centro en los puntos  $A$  y  $B$  y del mismo radio. Sea  $O_1$  el punto de intersección de las mismas distinto de  $O$ . La recta pedida pasa por los puntos  $O$  y  $O_1$ . Proponemos al lector argumentar esta construcción.

**Lugar geométrico de puntos.** Uno de los métodos de solución de problemas de construcción es el método de lugares geométricos. Se llama *lugar geométrico* de puntos una figura

formada por todos los puntos del plano que poseen una propiedad determinada. Por ejemplo, la *circunferencia* es,

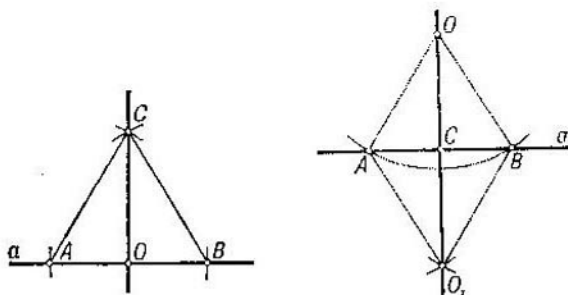


Fig. 46

por definición, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado. Este punto se llama *centro* de la circunferencia y la distancia entre los puntos de la circunferencia y el centro se llama *radio* de la circunferencia. Un importante lugar geométrico de puntos se enuncia en el teorema siguiente:

**TEOREMA 7.6.** *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos A y B es la recta perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio O (fig. 47).*

**DEMOSTRACION.** De la igualdad de los triángulos AOC y BOC resulta que todo punto C de dicha recta equidista de los puntos A y B. En estos triángulos los ángulos de vértice O son rectos, el lado OC es común y  $AO = OB$  ya que O es el punto medio del segmento AB. Probemos ahora que todo punto D del plano equidistante de los puntos A y B se halla en la recta OC.

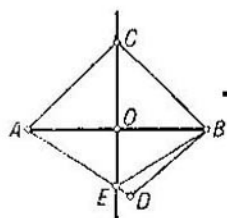


Fig. 47

Supongamos que el punto D no se halla en la recta OC. Los puntos A y B se hallan en distintos semiplanos respecto a la recta OC. Supongamos, para concretar, que el punto D se halla en el mismo semiplano que el punto B (como en la fig. 47). Entonces, el segmento AD corta la recta OC en un punto E. Según hemos demostrado,  $AE = BE$ . Por hipótesis,  $AD = BD$ . De aquí resulta que en el triángulo BDE se tiene  $DB = BE + ED$ . Pero esto

es imposible porque la suma de dos lados es mayor que el tercero.

**Método de lugares geométricos.** La esencia del método de lugares geométricos aplicado a la resolución de problemas de construcción consiste en lo siguiente. Supongamos que al resolver un problema de construcción tengamos que construir un punto  $X$  que cumpla dos condiciones: la condición 1) y la condición 2). El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición 1) es una figura  $F_1$  y el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición 2) es una figura  $F_2$ . El punto pedido  $X$  pertenece a  $F_1$  y a  $F_2$ , o sea, es el punto de intersección de estas figuras. Si nuestros lugares geométricos son simples, es decir, están formados por rectas y circunferencias, podemos construirlos y de este modo hallar el punto pedido  $X$ . Veamos un ejemplo.

Se llama circunferencia *circunscrita* a un triángulo a la que pasa por cada uno de sus vértices.

**PROBLEMA 7.7.** Constrúyase la circunferencia que circunscribe el triángulo dado  $ABC$ .

**SOLUCIÓN** (fig. 48). El centro  $O$  de la circunferencia pedida es equidista de los tres vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Podemos también decir que el centro  $O$  satisface dos condiciones: 1) el centro de la circunferencia equidista de los vértices  $A$  y  $C$ ; 2) el centro de la circunferencia equidista de los vértices  $B$  y  $C$ . El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la primera condición es la perpendicular al lado  $AC$  que pasa por su punto medio  $D$ . El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la segunda condición es la perpendicular al segmento  $BC$  trazada por su punto medio  $E$ . Por lo tanto, el centro  $O$  de la circunferencia circunscrita se halla en la intersección de estas perpendiculares.

De aquí se desprende un importante corolario. Puesto que el centro  $O$  de la circunferencia circunscrita se halla a igual distancia de los puntos  $A$  y  $B$ , resulta, según el teorema 7.6, que está en la perpendicular al segmento  $AB$  trazada por su punto medio. Esto implica que *las tres rectas, que pasan por los puntos medios de los lados del triángulo y que*

son perpendiculares a estos lados, se cortan en un punto que es el centro de la circunferencia circunscrita.

La aplicación del método de lugares geométricos no siempre resulta tan sencilla como en el problema 7.7. Consideremos un ejemplo más complejo.

**PROBLEMA 7.8.** Sean dados una recta  $a$ , un punto  $A$  de la misma y un punto  $B$  que no se halla en la recta  $a$  (fig. 49). Indíquese en la recta  $a$  un punto  $X$  tal que  $AX + XB$  sea igual a un segmento dado  $m$ .

**SOLUCIÓN.** Las dos condiciones que debe satisfacer el punto  $X$  pueden ser representadas así: 1) el punto  $X$  se halla en la recta  $a$ ; 2)  $AX + XB = m$ .

El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la primera condición es la propia recta  $a$ . Pero el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la segunda

condición es bastante complejo. No se reduce a rectas y circunferencias. Es decir, no basta con

determinar la posición del punto  $X$  mediante dos condiciones, sino que es preciso también que cada una de ellas defina un lugar geométrico simple formado por rectas y circunferencias. Saber formular estas condiciones es lo esencial en la solución del problema.

Veamos como determinar estas condiciones en nuestro problema. Supongamos que el problema ha sido resuelto. Tomemos en la semirrecta  $AX$  el segmento  $AC$  igual a  $m$ . Entonces  $XC = XB$ , o sea, el punto  $X$  equidista de los puntos  $B$  y  $C$ . Podemos enunciar ahora las dos condiciones que determinan la posición del punto  $X$  así: 1) el punto  $X$  se halla en el segmento  $AC$ ; 2) el punto  $X$  equidista de los puntos  $B$  y  $C$ . El primer lugar geométrico es el segmento  $AC$  y el segundo lugar geométrico es la recta perpendicular al segmento  $BC$  trazada por su punto medio  $E$ . El punto  $X$  está en la intersección de estos lugares geométricos.

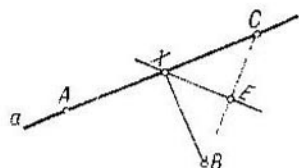


Fig. 49

### Preguntas de repaso

1. ¿Cómo construir el triángulo dados sus tres lados? ¿En qué caso es insoluble el problema, es decir, no existe el triángulo de los lados dados?

2. ¿Cómo construir a partir de una semirrecta y en el semiplano indicado un ángulo igual al ángulo dado?

3. ¿Cómo dividir por la mitad el ángulo?
4. ¿Cómo dividir por la mitad el segmento?
5. ¿Cómo trazar una perpendicular por un punto a una recta?
6. ¿Qué es lugar geométrico de puntos?
7. ¿Qué representa el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos?
8. ¿En qué consiste la solución de los problemas de construcción por el método de lugares geométricos? Densé ejemplos de problemas de construcción que se resuelven por el método de lugares geométricos.

## Ejercicios

9. Constrúyase el segmento igual a la suma (a la diferencia) de dos segmentos.
10. Constrúyase el ángulo igual a la diferencia de dos ángulos.
11. Constrúyase el segmento igual a  $\frac{1}{4}$  del segmento dado.
12. Constrúyase el ángulo igual a  $\frac{1}{4}$  del ángulo dado.
13. Constrúyase el triángulo  $ABC$  a tenor con las condiciones siguientes:
  - 1) dados el ángulo  $A$  y los lados  $AB$  y  $AC$ ;
  - 2) dados el ángulo  $A$  y los lados  $AB$  y  $BC$ ;
  - 3) dados los ángulos  $A$  y  $B$  y el lado  $AB$ .
14. Constrúyase el triángulo dados sus lados  $AB$  y  $BC$  y la mediana relativa a uno de los lados  $AB$  o  $AC$ .
15. Constrúyase el triángulo dados sus lados  $AB$  y  $BC$  y la altura trazada desde el vértice  $A$ .
16. Constrúyase el punto que se halla a igual distancia de los puntos  $A$  y  $B$  y a una distancia dada del punto  $C$ .
17. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas secantes consta de las bisectrices de los ángulos formados por estas rectas.
18. Sea  $ABC$  un triángulo. Constrúyanse todos los puntos equidistantes de las rectas  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$ .
19. Constrúyase el punto que se halla a igual distancia de dos rectas y a una distancia determinada de un punto.

## § 8. RECTAS PARALELAS

**Criterios de paralelismo de rectas.** TEOREMA 8.1. *Si la recta  $c$  es paralela a las rectas  $a$  y  $b$ , las rectas  $a$  y  $b$  son paralelas.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las rectas  $a$  y  $b$  no son paralelas. Entonces se cortan en un punto  $C$ . O sea, por el punto  $C$  pasan dos rectas paralelas a la recta  $c$ . Pero esto es imposible en virtud del axioma VI. Según este axioma, por un punto que no se halla en la recta dada se puede



trazar a lo sumo una recta paralela. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 8.1 se deduce que *si una recta corta una de las dos rectas paralelas, también corta la otra.*

Sean  $AB$  y  $CD$  dos rectas. Sea  $AC$  otra recta que corta las rectas  $AB$  y  $CD$  (fig. 50). La recta  $AC$  se llama *secante* de las rectas  $AB$  y  $CD$ . Los ángulos formados por las rectas  $AB$  y  $CD$  y la secante  $AC$  tienen nombres especiales. Si los puntos  $B$  y  $D$  se hallan en un mismo semiplano respecto

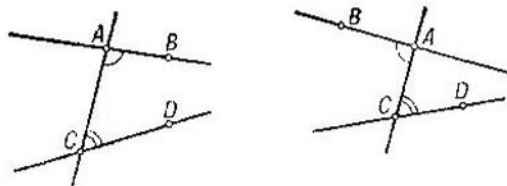


Fig. 50

a la recta  $AC$ , los ángulos  $BAC$  y  $DCA$  se denominan *correspondientes internos* (fig. 50, a la izquierda). Si los puntos  $B$  y  $D$  están en diferentes semiplanos respecto a la recta  $AC$ , los ángulos  $BAC$  y  $DCA$  se llaman *alternos internos* (fig. 50, a la derecha).

La secante  $AC$  forma con las rectas  $AB$  y  $CD$  dos pares de ángulos correspondientes internos y dos pares de ángulos alternos internos. De la propiedad de los ángulos adyacentes se deduce que al ser iguales los ángulos alternos internos de un par, los ángulos alternos internos del otro par también son iguales y la suma de los ángulos correspondientes internos de cada uno de los pares es igual a  $180^\circ$ . Recíprocamente, si la suma de un par de ángulos correspondientes internos es igual a  $180^\circ$ , la suma del otro par de ángulos correspondientes internos es también igual a  $180^\circ$  y los ángulos alternos internos de cada uno de los pares son iguales.

**TEOREMA 8.2.** *Sean  $a$  y  $b$  dos rectas y  $c$  una secante de las mismas. Si las rectas  $a$  y  $b$  son paralelas, los ángulos alternos internos son iguales y la suma de los ángulos correspondientes internos es igual a  $180^\circ$ . Recíprocamente, si los ángulos alternos internos son iguales o los ángulos correspondientes internos suman  $180^\circ$ , las rectas  $a$  y  $b$  son paralelas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Comencemos por la segunda afirmación del teorema. Supongamos que las rectas  $a$  y  $b$  no son paralelas

las, o sea, que se cortan en un punto  $C$  (fig. 51). Consideremos el triángulo  $ABC$ . Según el teorema 5.1, la suma de los ángulos  $A$  y  $B$  de este triángulo es menor que  $180^\circ$ . Pero estos ángulos son correspondientes internos y la suma de los mismos es igual a  $180^\circ$  por hipótesis. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la segunda afirmación del teorema.

Demostremos la primera afirmación del teorema. Sean, pues,  $a$  y  $b$  rectas paralelas. Tracemos por el punto  $A$  una recta  $a_1$  de modo que la suma de los ángulos correspondientes internos que forma la secante  $c$  con las rectas  $a_1$

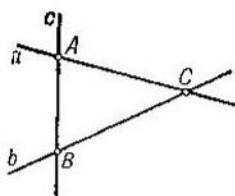


Fig. 51

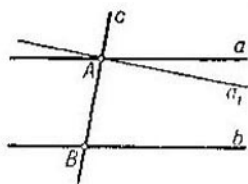


Fig. 52

y  $b$  sea igual a  $180^\circ$  (fig. 52). Entonces, según hemos demostrado, la recta  $a_1$  será paralela a  $b$ . Pero por el punto  $A$  pasa sólo una recta paralela a  $b$ . Luego, las rectas  $a$  y  $a_1$  coinciden. Es decir, la suma de los ángulos correspondientes internos formados por la secante  $c$  y las paralelas  $a$  y  $b$  es igual a  $180^\circ$  y, por consiguiente, los ángulos alternos son iguales. Queda demostrado completamente el teorema.

Del teorema 8.2 resulta que *dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas. Si una recta es perpendicular a una de las rectas paralelas, también es perpendicular a la otra.*

### Suma de los ángulos del triángulo. TEOREMA 8.3.

*La suma de los ángulos del triángulo es igual a  $180^\circ$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $ABC$  el triángulo dado (fig. 53). Marquemos el punto medio  $O$  del lado  $BC$  del triángulo. Construyamos en la semirrecta complementaria a la semirrecta  $OA$  el segmento  $OD$  igual al segmento  $OA$ . Los triángulos  $BOD$  y  $COA$  son iguales, ya que los ángulos de vértice  $O$  son iguales por ser verticales y, además,  $OB = OC$  y  $OA = OD$  por construcción. De la igualdad de los triángulos resulta que el ángulo  $DBO$  es igual al ángulo  $ACO$ .

Para las rectas  $AC$  y  $BD$  y la secante  $BC$  son alternos internos los ángulos  $DBO$  y  $ACO$ . En efecto, los puntos  $A$

y  $D$  se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta  $BC$  ya que el segmento  $AD$  corta la recta  $BC$  (en el punto  $O$ ). Según el teorema 8.2, la igualdad de los ángulos alternos internos  $DBO$  y  $ACO$  implica que las rectas  $AC$  y  $BD$  son paralelas.

Para las rectas  $AC$  y  $BD$  y la secante  $AB$  son correspondientes internos los ángulos  $DBA$  y  $CAB$ . Efectivamente, los puntos  $C$  y  $D$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $AB$ ; a saber, en el semiplano al que pertenece el punto  $O$ . Puesto que las rectas  $AC$  y  $BD$  son paralelas, los ángulos correspondientes internos  $CAB$  y  $DBA$  suman  $180^\circ$ .

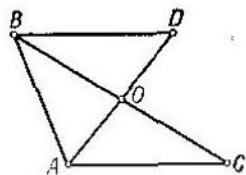


Fig. 53

El ángulo  $DBA$  es igual a la suma de los ángulos  $DBC$  y  $ABC$  ya que el rayo  $BC$  corta el segmento  $AD$  cuyos extremos están en los lados del ángulo  $ABD$ . Según hemos demostrado, el ángulo  $DBC$  es igual al ángulo  $ACB$ . Por consiguiente, la suma de los ángulos del triángulo  $ABC$ , o sea, la suma  $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$ , es igual a la suma de los ángulos correspondientes internos formados por las paralelas, es decir, es igual a  $180^\circ$ . Queda demostrado el teorema.

En el triángulo rectángulo un ángulo es recto y los otros dos son agudos. Del teorema 8.3 se deduce que *en el  $\Delta$  rectángulo los ángulos agudos se complementan hasta  $90^\circ$ .*

**TEOREMA 8.4.** *Todo ángulo exterior del triángulo es igual a la suma de dos ángulos interiores no adyacentes a él.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABC$  el triángulo dado. Según el teorema 8.3, se tiene  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ . De aquí resulta que  $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$ . En el segundo miembro de esta igualdad figura la medida gradual del ángulo exterior de vértice  $C$  del  $\Delta$ . Queda demostrado el teorema.

**Las paralelas como rectas equidistantes.** **TEOREMA 8.5.** *Las rectas paralelas equidistan, o sea, todos los puntos de una recta están a una misma distancia de la otra recta.*

**DEMOSTRACION.** Sean  $a$  y  $b$  dos rectas paralelas (fig. 54). Tomemos en la recta  $a$  dos puntos cualesquiera  $A$  y  $A_1$  y tracemos por ellos las perpendiculares  $AB$  y  $A_1B_1$  a la recta  $b$ . Las rectas  $AB$  y  $A_1B_1$  son perpendiculares a la recta  $b$  y, por consiguiente, también son perpendiculares a la recta paralela  $a$ .

Los ángulos  $BA_1A$  y  $A_1BB_1$  son correspondientes internos o alternos internos respecto a la secante  $A_1B$ . Puesto que ambos son agudos, la suma de los mismos es menor que  $180^\circ$ . Por ello, no pueden ser correspondientes internos de las paralelas. O sea, los ángulos  $BA_1A$  y  $A_1BB_1$  son alternos internos de las paralelas y por esto son iguales.

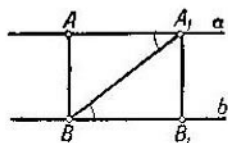


Fig. 54

Los triángulos rectángulos  $BAA_1$  y  $A_1B_1B$  son iguales. Tienen la hipotenusa  $A_1B$  común y los ángulos agudos  $AA_1B$  y  $A_1BB_1$  son iguales según lo demostrado.

De la igualdad de los triángulos deducimos que  $AB = A_1B_1$ , o sea, que son iguales las perpendiculares trazadas a la recta  $b$  por los puntos  $A$  y  $A_1$  de la recta  $a$ . Queda demostrado el teorema.

**PROBLEMA 8.6.** Hállese el lugar geométrico de los puntos que pertenecen a un mismo semiplano respecto a la recta  $a$  y que equidistan de esta recta.

**SOLUCIÓN.** Tomemos un punto cualquiera  $A$  del lugar geométrico y tracemos por él la recta  $a_1$  paralela a la recta  $a$  (fig. 55). Demostremos que esta recta abarca todos los puntos del lugar geométrico.

Sea  $B$  un punto cualquiera del lugar geométrico. Tracemos por el punto  $B$  la recta perpendicular a la recta  $a$ . Corta la recta  $a$  en un punto  $C$  y la recta  $a_1$  en un punto  $C_1$ . Como el punto  $C$  no separa los puntos  $C_1$  y  $B$ , de la igualdad  $C_1C = BC$  se deduce que los puntos  $B$  y  $C$  coinciden, o sea, que el punto  $B$  se halla en la recta  $a_1$ .

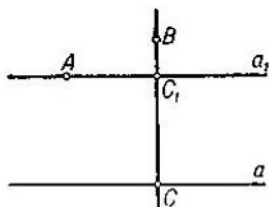


Fig. 55

Por consiguiente, el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran en un mismo semiplano respecto a la recta  $a$  y que equidistan de esta recta es una recta paralela a la recta  $a$ .

**PROBLEMA 8.7.** Trácese por un punto  $B$  la recta paralela a la recta  $a$ .

**SOLUCIÓN.** Trazamos por el punto  $B$  la recta  $b$  perpendicular a la recta  $a$  (problema 7.5). Trazamos por el punto  $B$  la recta  $c$  perpendicular a  $b$ . La recta  $c$  es paralela a la recta  $a$ .

## Preguntas de repaso

1. ¿Qué rectas se llaman paralelas?
2. Enúnciese el axioma de las paralelas.
3. Demuéstrase el teorema 8.1: si la recta  $a$  es paralela a las rectas  $b$  y  $c$ , las rectas  $b$  y  $c$  son paralelas.
4. Demuéstrase que si una recta corta una de las dos rectas paralelas, también corta la otra.
5. ¿Qué ángulos se denominan correspondientes internos? ¿Qué ángulos se denominan alternos internos?
6. Sean  $ABC$  un triángulo,  $B_1$  un punto en su lado  $AB$  y  $C_1$  un punto en el lado  $AC$ . Señálense los ángulos correspondientes internos y alternos internos de las rectas  $AB$  y  $AC$  y la secante  $B_1C_1$ .
7. Demuéstrase que si los ángulos alternos internos de un par son iguales, los ángulos alternos internos del otro par también son iguales y los ángulos correspondientes internos de cada uno de los pares suman  $180^\circ$ . Recíprocamente, si la suma de los ángulos correspondientes internos de uno de los pares es igual a  $180^\circ$ , los ángulos correspondientes internos del otro par también suman  $180^\circ$  y los ángulos alternos internos de cada uno de los pares son iguales.
8. Enúnciese y demuéstrase el teorema de los ángulos de dos paralelas y una secante.
9. Preguntas relacionadas con la demostración del teorema 8.3 sobre la suma de los ángulos del triángulo (fig. 53):
  - 1) ¿Por qué los ángulos  $CBD$  y  $BCA$  son internos alternos para las rectas  $AC$  y  $BD$  y la secante  $BC$ ?
  - 2) ¿Por qué los ángulos  $ABD$  y  $BAC$  son correspondientes internos para las rectas  $AC$  y  $BD$  y la secante  $AB$ ?
  - 3) ¿Por qué el ángulo  $ABD$  es igual a la suma de los ángulos  $ABC$  y  $DBC$ ?
10. Demuéstrase que el ángulo exterior del triángulo es igual a la suma de dos ángulos interiores no adyacentes a él.
11. ¿Cuánto suman los ángulos agudos del triángulo rectángulo?
12. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo equilátero?
13. Demuéstrase que las rectas paralelas equidistan.

## Ejercicios

14. Sean  $a$  y  $b$  dos rectas paralelas. Demuéstrase que la recta  $b$  se halla en un semiplano respecto a la recta  $a$ .
15. ¿Qué es mayor: la base o el lateral del triángulo isósceles si el ángulo de su vértice es igual a  $57^\circ$ ?
16. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo si están en proporción de  $1 : 2 : 3$ ?
17. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo rectángulo isósceles?
18. Demuéstrase que en el triángulo rectángulo de ángulo agudo de  $30^\circ$  el cateto opuesto a este ángulo es igual a la mitad de la hipotenusa.
19. Sea  $ABC$  un triángulo. ¿Cómo trazar por el vértice  $A$  una recta de modo que los vértices  $B$  y  $C$  equidisten de la recta y ésta no corte el lado  $BC$ ?
20. Sea  $ABC$  un triángulo isósceles de base  $AB$  y de laterales  $AC$  y  $BC$ . Demuéstrase que es constante la suma de las distancias entre las rectas  $AC$  y  $BC$  y un punto  $X$  cualquiera de la base  $AB$ .

## § 9. CUADRILÁTEROS

**Cuadriláteros convexos.** Recibe el nombre de *cuadrilátero* una figura  $ABCD$  formada por cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , que de tres en tres no se hallan en una misma recta, y por cuatro segmentos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $AD$  que unen estos puntos (fig. 56). Los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  se llaman *vértices* del cuadrilátero y los segmentos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  son sus *lados*.

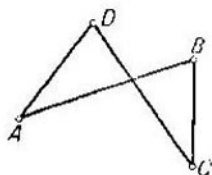


Fig. 56

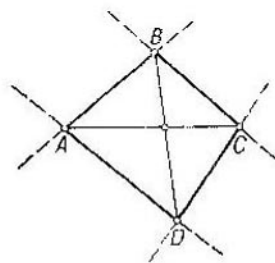


Fig. 57

Los vértices  $A$  y  $C$  y los vértices  $B$  y  $D$  se denominan *vértices opuestos*. Los lados  $AB$  y  $CD$  y los lados  $BC$  y  $AD$  se llaman *lados opuestos*.

Un cuadrilátero se llama *convexo* si se encuentra en un mismo semiplano respecto a la recta que contiene cualquiera de sus lados (fig. 57). Los segmentos que unen los vértices opuestos del cuadrilátero se denominan *diagonales*.

**TEOREMA 9.1.** *Las diagonales del cuadrilátero convexo se cortan.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $ABCD$  el cuadrilátero convexo dado (fig. 57). Los puntos  $B$  y  $C$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $AD$  puesto que el cuadrilátero es convexo. Las semirrectas  $AC$  y  $AB$  están en un mismo semiplano respecto a la recta  $AD$ .

Según el teorema 2.2, el rayo  $AC$  pasa entre los lados del ángulo  $BAD$  o el rayo  $AB$  pasa entre los lados del ángulo  $CAD$ . Pero el rayo  $AB$  no puede pasar entre los lados del ángulo  $CAD$  ya que los puntos  $C$  y  $D$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $AB$ . Por consiguiente, el rayo  $AC$  pasa entre los lados del ángulo  $BAD$ , o sea, el segmento  $BD$  corta la recta  $AC$  (según el teorema 2.3). Es decir, la diagonal  $BD$  corta la recta  $AC$ . Análogamente, con-

siderando los ángulos  $ABC$  y  $ABD$ , demostraremos que la diagonal  $AC$  corta la recta  $BD$ .

Puesto que la diagonal  $BD$  corta la recta  $AC$ , las rectas  $BD$  y  $AC$  se cortan. Pero las rectas  $AC$  y  $BD$  pueden tener sólo un punto de intersección. En la recta  $AC$  es un punto de la diagonal  $AC$  y en la recta  $BD$  es un punto de la diagonal  $BD$ ; o sea, las diagonales  $AC$  y  $BD$  se cortan. Queda demostrado el teorema.

**TEOREMA 9.2.** *La suma de los ángulos del cuadrilátero convexo es igual a  $360^\circ$ .*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABCD$  el cuadrilátero convexo dado (fig. 57). La semirrecta  $DB$  pasa entre las semirrectas  $DA$  y  $DC$  ya que corta el segmento  $AC$ . Por ello, el ángulo  $D$  del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos  $ADB$  y  $CDB$ . Idénticamente se demuestra que el ángulo  $B$  del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos  $ABD$  y  $CBD$ . De aquí resulta que la suma de los ángulos del cuadrilátero es igual a la suma de los ángulos de dos triángulos  $BAD$  y  $BCD$ , o sea, es igual a  $360^\circ$ . Queda demostrado el teorema.

**Paralelogramo.** El *paralelogramo* es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos, es decir, se hallan en rectas paralelas (fig. 58).

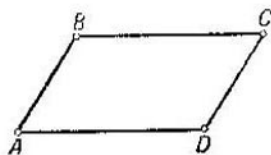


Fig. 58

*El paralelogramo es un cuadrilátero convexo.* En efecto, sea  $ABCD$  el paralelogramo dado. Tomemos un lado cualquiera del paralelogramo, digamos  $AD$ . Como la recta  $BC$  es paralela a la recta  $AD$ , el segmento  $BC$  no corta la recta  $AD$ . Esto significa que los puntos  $B$  y  $C$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $AD$ . En este mismo semiplano están los segmentos  $BC$ ,  $AB$  y  $DC$ . Es decir, el paralelogramo se halla en un semiplano respecto a la recta que contiene su lado  $AD$ . Tomando otro lado cualquiera del paralelogramo, llegamos a la misma conclusión. Esto significa que el paralelogramo es un cuadrilátero convexo.

**TEOREMA 9.3.** *Los lados opuestos y los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABCD$  el paralelogramo dado (fig. 59). Tracemos las diagonales  $AC$  y  $BD$  del paralelogramo. Se cortan en un punto  $O$ . Los ángulos  $BCA$  y  $DAC$  son alternos internos de las paralelas  $AD$  y  $BC$  y la secante  $AC$

ya que los puntos  $B$  y  $D$  se encuentran en diferentes semiplanos respecto a la recta  $AC$  (el segmento  $BD$  corta la recta  $AC$ ). Por consiguiente, los ángulos  $BCA$  y  $DAC$  son iguales. Análogamente deducimos que los ángulos  $BAC$  y  $DCA$  también son iguales.

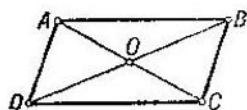


Fig. 59

Los triángulos  $ACB$  y  $CAD$  son iguales. Tienen el lado  $AC$  común y, según hemos demostrado,  $\angle BCA = \angle DAC$  y  $\angle BAC = \angle DCA$ . De la igualdad de los triángulos resulta que  $BC = AD$  y que  $\angle ABC = \angle CDA$ . Análogamente se demuestra que  $AB = CD$  y que  $\angle BAD = \angle DCB$ . Queda demostrado el teorema.

**TEOREMA 9.4.** *Las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABCD$  el paralelogramo dado y sea  $O$  el punto de intersección de sus diagonales (fig. 59). Los triángulos  $AOD$  y  $COB$  son iguales. Sus lados  $BC$  y  $AD$  son iguales por ser lados opuestos del paralelogramo. Los ángulos  $OBC$  y  $ODA$  son iguales por ser alternos internos de las paralelas  $BC$  y  $AD$  y la secante  $BD$ . Los ángulos  $OCB$  y  $OAD$  son iguales, pues son alternos internos de las paralelas  $BC$  y  $AD$  y la secante  $AC$ . De la igualdad de los triángulos resulta que  $OB = OD$  y que  $OA = OC$ . Queda demostrado el teorema.

**TEOREMA 9.5.** *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero convexo son paralelos e iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.*

*Si los lados opuestos de un cuadrilátero convexo son iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABCD$  el cuadrilátero convexo dado en el que los lados  $AD$  y  $BC$  son iguales (fig. 60). En ambos casos los triángulos  $ABD$  y  $CDB$  son iguales. En el caso de la primera parte del teorema son iguales por el primer criterio de la igualdad y en el caso de la segunda parte, por el tercer criterio.

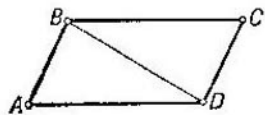


Fig. 60

De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos  $\angle CBD = \angle ADB$  y  $\angle ABD = \angle CDB$ . Pero estos ángulos son alternos internos para las rectas  $BC$  y  $AD$  y para las



rectas  $AB$  y  $CD$ . La igualdad de los ángulos alternos internos implica que la recta  $BC$  es paralela a la recta  $AD$  y que la recta  $CD$  es paralela a la recta  $AB$ ; o sea, el cuadrilátero  $ABCD$  es un paralelogramo. Queda demostrado el teorema.

**Rectángulo. Rombo. Cuadrado.** El *rectángulo* es un cuadrilátero en el que todos los ángulos son rectos (fig. 61).

**TEOREMA 9.6.** *Todo rectángulo es un paralelogramo. Las diagonales del rectángulo son iguales* (fig. 61).

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $ABCD$  el rectángulo dado. Las rectas  $AD$  y  $BC$  son paralelas, pues son perpendiculares a la recta  $AB$ . Las rectas  $AB$  y  $CD$  son perpendiculares a la recta  $AD$  y, por esto, son también paralelas. Por consiguiente, el rectángulo es un paralelogramo.

La segunda afirmación del teorema resulta de la igualdad de los triángulos rectángulos  $BAD$  y  $CDA$ . Tienen los ángulos  $BAD$  y  $CDA$  rectos, el cateto  $AD$  común y los catetos  $AB$  y  $DC$  iguales, pues son lados opuestos del paralelogramo. De la igualdad de los triángulos resulta que sus hipotenusas son iguales. Pero las hipotenusas son las diagonales del rectángulo. Queda demostrado el teorema.

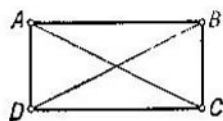


Fig. 61

El *rombo* es un paralelogramo con todos los lados iguales (fig. 62).

**TEOREMA 9.7.** *Las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto. Las diagonales del rombo son bisectrices de sus ángulos.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $ABCD$  el rombo dado (fig. 62) y sea  $O$  el punto de intersección de sus diagonales. Los triángulos  $AOB$  y  $COB$  son iguales. Tienen el lado  $OB$  común,  $AB = CB$  por definición de rombo y  $OA = OC$  por el teorema 9.4. De la igualdad de los triángulos resulta que  $\angle AOB = \angle COB$  y que  $\angle ABO = \angle CBO$ .

Ya que los ángulos  $AOB$  y  $COB$  son iguales y adyacentes, son rectos. Queda demostrada la primera afirmación.

Puesto que el rayo  $BD$  pasa entre los lados del ángulo  $ABC$  y que los ángulos  $ABO$  y  $CBO$  son iguales,  $BD$  es la bisectriz del ángulo  $ABC$ . Queda demostrada la segunda afirmación.

El *cuadrado* es un rectángulo con todos los lados iguales.

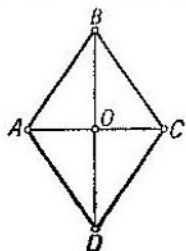


Fig. 62

El cuadrado es también un rombo y, por ello, posee las propiedades de rectángulo y de rombo.

**Trapezio.** TEOREMA 9.8. Supongamos que tres rectas paralelas  $a$ ,  $b$  y  $c$  cortan las rectas  $d$  y  $d_1$  en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y en los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$ , respectivamente (fig. 63).

Si el punto  $B$  se halla entre  $A$  y  $C$ , el punto  $B_1$  se encuentra entre  $A_1$  y  $C_1$ . Si  $AB = BC$ , también  $A_1B_1 = B_1C_1$ .

DEMOSTRACION Los puntos  $A$  y  $C$  se encuentran en diferentes semiplanos respecto a la recta  $b$  ya que el segmento  $AC$

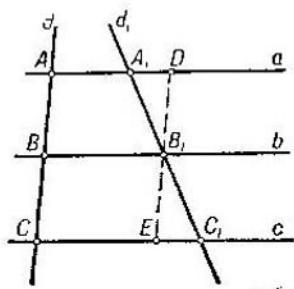


Fig. 63

corta la recta  $b$  (en el punto  $B$ ). Los puntos  $A$  y  $A_1$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $b$ , pues están en una recta paralela. Análogamente, los puntos  $C$  y  $C_1$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $b$ . Por consiguiente, los puntos  $A_1$  y  $C_1$  se encuentran en diferentes semiplanos respecto a esta recta de modo que el segmento  $A_1C_1$  corta la recta  $b$ . Pero el único punto común de las rectas  $A_1C_1$  y  $b$  es el punto  $B_1$ . Es decir, el punto  $B_1$  se halla

entre  $A_1$  y  $C_1$ . Queda demostrada la primera afirmación.

Demostremos la segunda afirmación. Tracemos por el punto  $B_1$  la recta paralela a la recta  $d$ . Corta las rectas  $a$  y  $c$  en los puntos  $D$  y  $E$ . Los triángulos  $B_1A_1D$  y  $B_1C_1E$  son iguales. En efecto, tienen  $B_1D = B_1E$  porque  $B_1D = AB$  y  $B_1E = BC$ . Los ángulos  $DA_1B_1$  y  $EC_1B_1$  son iguales y los ángulos  $A_1DB_1$  y  $C_1EB_1$  también son iguales, pues son alternos internos para las rectas paralelas  $a$  y  $c$ . De la igualdad de los triángulos se deduce que  $A_1B_1 = B_1C_1$ . Queda demostrado completamente el teorema.

PROBLEMA. Divídase el segmento  $AB$  en  $n$  partes iguales.

SOLUCION. Tracemos por el punto  $A$  una semirrecta  $a$  cualquiera diferente de  $AB$ . Construyamos en la semirrecta  $a$  los segmentos iguales  $AA_1$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ , . . . ,  $A_{n-1}A_n$ . Tracemos por los puntos  $A_n$  y  $B$  la recta  $b$ . Las rectas que son paralelas a  $b$  y que pasan por los puntos  $A_1$ ,  $A_2$ , . . . ,  $A_{n-1}$  cortan el segmento  $AB$  en los puntos  $B_1$ ,  $B_2$ , . . . ,  $B_{n-1}$  que dividen el segmento  $AB$  en  $n$  segmentos iguales (teorema 9.8).

El *trapezio* es un cuadrilátero convexo que tiene paralelos sólo dos lados opuestos. Estos lados paralelos se llaman *bases* del trapezio. Los otros dos lados se denominan *laterales*. Un trapezio de laterales iguales se llama *isósceles*. El segmento que une los puntos medios de los laterales se denomina *base media* del trapezio.

**TEOREMA 9.9.** *La base media del trapezio es paralela a las bases y es igual a la semisuma de las mismas.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABCD$  el trapezio dado de bases  $AD$  y  $BC$  (fig. 64). Sea  $PQ$  la base media del trapezio. Tracemos por el punto  $P$  la recta paralela a las bases. Según el teorema 9.8, cortará el segmento  $CD$  en el punto medio. O sea, es precisamente la base media del trapezio que, por consiguiente, es paralela a las bases. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

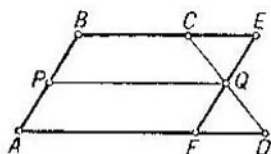


Fig. 64

Tracemos por el punto  $Q$  la recta  $EF$  paralela al lateral  $AB$ . Los puntos  $A$  y  $B$  se hallan a un mismo lado de la recta  $EF$ . Los puntos  $C$  y  $D$  están a diferentes lados de esta recta. Supongamos, para concretar, que el punto  $C$  se encuentra al mismo lado que los puntos  $A$  y  $B$ . Los puntos  $C$  y  $E$  están a un mismo lado de la recta  $AB$ . Por esto,  $B$  no se halla entre  $C$  y  $E$ . Es decir,  $C$  se halla entre  $B$  y  $E$ .

De la igualdad de los triángulos  $CEQ$  y  $DFQ$  se deduce que  $CE = DF$ . Por la propiedad del paralelogramo, se tiene  $PQ = BE = BC + CE$  y  $PQ = AF = AD - FD$ . Sumando miembro por miembro las igualdades obtenidas, encontramos que  $2PQ = AD + BC$ . Queda demostrado el teorema.

**Punto de intersección de las medianas del triángulo.** Se llama *línea media* del triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados.

**TEOREMA 9.10.** *La línea media del triángulo  $ABC$  que une los puntos medios de los lados  $AB$  y  $AC$  es paralela al lado  $BC$  y es igual a la mitad de este lado (fig. 65).*

**DEMOSTRACION.** Sea  $B_1C_1$  la línea media del triángulo. Tracemos por el punto  $B_1$  la recta paralela a  $BC$ . Según el teorema 9.8, cortará el segmento  $AC$  en el punto medio, o sea, contendrá la línea media  $B_1C_1$ . Queda demostrada la primera afirmación.

Tracemos por el punto  $C$  la recta paralela a  $AB$ . Cortará la recta  $B,C$ , en un punto  $E$ . Los triángulos  $AC_1B_1$  y  $CC_1E$  serán iguales. De la igualdad de estos triángulos

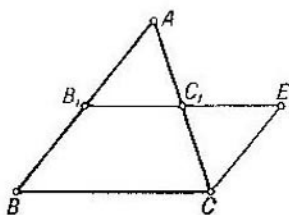


Fig. 65

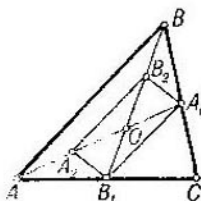


Fig. 66

resulta que  $B_1C_1 = C_1E$  y que  $BC = B_1E = B_1C_1 + C_1E = 2B_1C_1$ , o sea, que  $B_1C_1$  es igual a la mitad de  $BC$ . Queda demostrado el teorema.

**TEOREMA 9.11.** *Las tres medianas del triángulo se cortan en un punto. Este punto divide cada mediana en dos segmentos que están en razón 2 : 1 contando desde el vértice.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $ABC$  el triángulo dado (fig. 66). Tracemos sus medianas  $AA_1$  y  $BB_1$ . Demostremos primero que las dos medianas  $AA_1$  y  $BB_1$  se cortan. Los puntos  $C$  y  $B_1$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $AA_1$ . Los puntos  $C$  y  $B$  están en distintos semiplanos. Por consiguiente, los puntos  $B$  y  $B_1$  se encuentran en distintos semiplanos. O sea, la mediana  $BB_1$  corta la recta  $AA_1$ . Análogamente deducimos que la mediana  $AA_1$  corta la recta  $BB_1$ . Puesto que las rectas  $AA_1$  y  $BB_1$  se cortan en un punto único, éste pertenece a la mediana  $AA_1$  y a la mediana  $BB_1$ , es decir, las medianas se cortan.

Tracemos la línea media  $A_1B_1$  del triángulo  $ABC$  y la línea media  $A_2B_2$  del triángulo  $AOB$ . Ambas son paralelas al lado  $AB$  e iguales a la mitad de este lado. De aquí resulta que el cuadrilátero  $A_1B_1A_2B_2$  es un paralelogramo. Según la propiedad del paralelogramo, se tiene  $B_1O = OB_2$ ; además  $OB_2 = B_2B$  por construcción. Es decir, la mediana  $A_1A$  divide la mediana  $B_1B$  en dos segmentos que están en razón 2 : 1 contando desde el vértice  $B$ . La mediana trazada por el punto  $C$  divide la mediana  $BB_1$  en la misma proporción. Por consiguiente, también pasa por el punto  $O$ . Queda demostrado el teorema.

## Preguntas de repaso

1. ¿Qué cuadrilátero se llama convexo?
2. Demuéstrase que las diagonales del cuadrilátero convexo se cortan.
3. Demuéstrase que la suma de los ángulos del cuadrilátero convexo es igual a  $360^\circ$ .
4. ¿Qué es paralelogramo?
5. Demuéstrase que el paralelogramo es un cuadrilátero convexo.
6. Demuéstrase que los lados opuestos y los ángulos opuestos del paralelogramo son iguales.
7. Demuéstrase que la suma de dos ángulos no opuestos cualesquiera del paralelogramo es igual a  $180^\circ$ .
8. Demuéstrase que las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.
9. ¿Qué es rectángulo?
10. Demuéstrase que todo rectángulo es un paralelogramo y que las diagonales del rectángulo son iguales.
11. Demuéstrase que un paralelogramo con diagonales iguales es un rectángulo.
12. ¿Qué es rombo?
13. Demuéstrase que las diagonales del rombo se cortan en ángulo recto. Demuéstrase que las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos respectivos.
14. ¿Qué es cuadrado? Enúnciense las propiedades del cuadrado.
15. ¿Qué cuadrilátero se denomina trapecio?
16. Demuéstrase que la base media del trapecio es igual a la semisuma de sus bases.
17. Demuéstrase que la línea media del triángulo es igual a la mitad del lado correspondiente.
18. Demuéstrase que las tres medianas del triángulo se cortan en un punto.

## Ejercicios

19. Demuéstrase que el cuadrilátero es convexo si sus diagonales se cortan.
20. ¿Pueden ser obtusos todos los ángulos del cuadrilátero convexo?
21. Demuéstrase que el cuadrilátero convexo es un paralelogramo si sus diagonales se cortan en el punto medio de ambas.
22. Demuéstrase que el cuadrilátero convexo es un paralelogramo si sus ángulos opuestos son iguales.
23. Demuéstrase que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo cualquiera son vértices de un paralelogramo.
24. Hállese el punto que dé la suma menor de distancias entre él y los vértices de un cuadrilátero convexo.
25. Demuéstrase que el cuadrilátero convexo es un rectángulo si todos sus ángulos son iguales.
26. En el paralelogramo se ha trazado la bisectriz de uno de sus ángulos. ¿En qué segmentos divide el lado mayor del paralelogramo, si sus lados miden 5 cm y 6 cm?

27. Hállense los ángulos del rombo si una de sus diagonales es igual a su lado.

28. Demuéstrase que el paralelogramo es un rombo si sus diagonales se cortan en ángulo recto.

29. Demuéstrase que los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos del paralelogramo son vértices de un cuadrado.

30. Demuéstrase que los puntos medios de los lados del rectángulo son vértices de un rombo y que los puntos medios de los lados del rombo son vértices de un rectángulo.

31. Demuéstrase que la recta que une los puntos medios de las diagonales del trapecio es paralela a las bases.

32. Un triángulo está en un semiplano respecto a una recta. Demuéstrase que la distancia entre esta recta y el punto de intersección de las medianas del triángulo es media aritmética de las distancias entre los vértices y esta recta.

33. Constrúyase el trapecio dados sus lados.

34. Demuéstrase que las tres rectas que pasan por los vértices del triángulo y son perpendiculares a los lados opuestos se cortan en un punto. (*Sugerencia.* Considérese el triángulo cuyos lados pasan por los vértices del triángulo y son paralelos a los lados opuestos).

## § 10. MOVIMIENTOS.

### IGUALDAD DE FIGURAS

**Concepto del movimiento.** Sean  $F$  y  $F_1$  dos figuras. Diremos que entre los puntos de estas figuras se ha establecido una *correspondencia biunívoca* si los puntos de las figuras se han unido en pares  $(X, X_1)$  de modo que todo punto  $X$

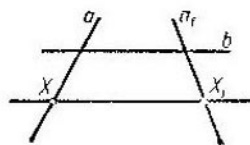


Fig. 67

de la figura  $F$  y todo punto  $X_1$  de la figura  $F_1$  pertenezca a un par y sólo a uno. Los puntos  $X$  y  $X_1$  de las figuras se denominan *puntos correspondientes*. Por lo tanto, para todo punto  $X$  de la figura  $F$  existe un punto correspondiente determinado  $X_1$  de la figura  $F_1$  y viceversa.

En lugar de correspondencia biunívoca entre los puntos de las figuras  $F$  y  $F_1$  podemos hablar de la *aplicación biunívoca* de la figura  $F$  sobre la figura  $F_1$ . Veamos un ejemplo.

Supongamos que la figura  $F$  es la recta  $a$  y que la figura  $F_1$  es la recta  $a_1$ . Supongamos, además, que  $b$  es una recta que corta las rectas  $a$  y  $a_1$  (fig. 67). Una recta cualquiera paralela a  $b$  corta la recta  $a$  en un punto  $X$  y la recta  $a_1$  en un punto  $X_1$ . Unamos cada dos puntos de este tipo en un par  $(X, X_1)$ . Esta unión de puntos en pares es una correspondencia biunívoca entre las rectas  $a$  y  $a_1$ .

Una aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo se llama *movimiento* si conserva las distancias. Esto significa que siendo  $X$  e  $Y$  dos puntos cualesquiera y  $X_1$  e  $Y_1$  sus puntos correspondientes, se tiene  $XY = X_1Y_1$ .

**Propiedades del movimiento.** TEOREMA 10.1 *Si, por efecto de un movimiento, tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  que se hallan en una recta se transforman en los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$ , éstos se hallarán en una recta. Si el punto  $B$  está entre  $A$  y  $C$ , el punto  $B_1$  estará entre  $A_1$  y  $C_1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  no se hallan en una recta, son vértices de un triángulo. Por ello, se tiene  $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$ . Por definición del movimiento, de aquí resulta que  $AC < AB + BC$ . Sin embargo, debido a la propiedad de la medición de los segmentos, se tiene  $AC = AB + BC$ . Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Probemos ahora que el punto  $B_1$  está entre  $A_1$  y  $C_1$ . Supongamos que  $A_1$  se halla entre  $B_1$  y  $C_1$ . Entonces será  $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$  y, por consiguiente, tendremos  $AB + AC = BC$ . Pero esto quedará en contradicción con la igualdad  $AB + BC = AC$ . O sea, el punto  $A_1$  no puede estar entre  $B_1$  y  $C_1$ . Análogamente se demuestra que el punto  $C_1$  no puede hallarse entre  $A_1$  y  $B_1$ . Puesto que uno de los tres puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  se encuentra entre los otros dos, este punto puede ser únicamente  $B_1$ . Queda demostrado completamente el teorema.

Consideremos un movimiento, es decir, una aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo que conserva las distancias. Sea  $F$  una figura cualquiera de este plano. Cuando el punto  $X$  recorre la figura  $F$ , el punto correspondiente  $X_1$  recorre una figura  $F_1$ . Diremos que la figura  $F_1$  se obtiene de la figura  $F$  mediante un movimiento. Diremos también que por efecto de este movimiento la figura  $F$  se transforma en  $F_1$ . Toda figura  $F_1$  que se obtiene de la figura  $F$  mediante un movimiento se llama *igual a  $F$* .

Del teorema 10.1 se deduce que *todo movimiento transforma las rectas en rectas, las semirrectas en semirrectas y los segmentos en segmentos*.

Sean  $AB$  y  $AC$  dos semirrectas que parten de un punto común  $A$  y que no se hallan en una misma recta. Por efecto del movimiento, estas semirrectas se transforman en unas semirrectas  $A_1B_1$  y  $A_1C_1$ . Puesto que todo movimiento conserva las distancias, los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son

iguales por el tercer criterio de la igualdad. La igualdad de los triángulos implica la igualdad de los ángulos  $BAC$  y  $B_1A_1C_1$ . Por consiguiente, los movimientos no alteran los ángulos entre las semirrectas.

**Simetría respecto a la recta.** Sean  $a$  una recta y  $X$  un punto cualquiera del plano (fig. 68). Tracemos por el punto  $X$  la recta  $b$  perpendicular a la recta  $a$ . Cortará la recta  $a$  en el punto  $A$ . Construyamos ahora el punto  $X_1$  ateniéndonos a la regla siguiente. Si el punto  $X$  se halla en la recta  $a$ , el punto  $X_1$  coincide con  $X$ . Si  $X$  no se halla en la recta  $a$ , el punto  $X_1$  se encuentra en el otro semiplano respecto a la recta  $a$ , pertenece a la recta  $b$  y la distancia  $AX_1$  es igual a la distancia  $AX$ . El punto  $X_1$  se llama *simétrico* del punto  $X$  respecto

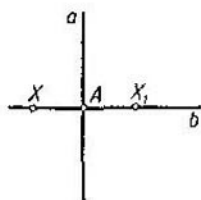


Fig. 68

a la recta  $a$ . El punto  $X$  es el simétrico del punto  $X_1$  respecto a la recta  $a$ . La aplicación del plano sobre sí mismo, que a todo punto  $X$  le pone en correspondencia el punto  $X_1$  simétrico respecto a la recta  $a$ , se llama *transformación de simetría o reflexión especular* respecto a la recta  $a$ .

**TEOREMA 10.2.** *La reflexión especular respecto a la recta es un movimiento.*

**DEMOSTRACION.** Sean  $X$  e  $Y$  dos puntos cualesquiera y sean  $X_1$  e  $Y_1$  los puntos correspondientes suyos, simétricos de éstos respecto a la recta  $a$ . La afirmación del teorema consiste en que  $X_1Y_1 = XY$ . Consideremos el caso en que los puntos  $X$  e  $Y$  no se hallan en la recta  $a$  ni en una perpendicular a la recta  $a$  (fig. 69).

Los triángulos rectángulos  $ABX$  y  $ABX_1$  son iguales pues tienen el cateto común  $AB$  y los catetos  $XA$  y  $X_1A$  son iguales por definición de la simetría. De aquí resulta que  $XB = X_1B$  y que  $\angle XBA = \angle X_1BA$ . Entonces, resultan iguales los triángulos  $XYB$  y  $X_1Y_1B$ . Tienen  $XB = X_1B$ ,  $YB = Y_1B$  y  $\angle YBX = \angle Y_1BX_1$ . La igualdad de estos triángulos implica que  $X_1Y_1 = XY$ .

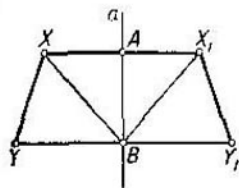


Fig. 69

La igualdad  $X_1Y_1 = XY$  se obtiene también en los casos en que uno o ambos puntos se hallan en la recta  $a$  o en una perpendicular a la recta  $a$ . Recomendamos al lector que de-



muestre esto a título de ejercicio. Queda demostrado el teorema.

Si la reflexión especular respecto a la recta  $a$  transforma la figura  $F$  en sí misma, esta figura se denomina *simétrica* y la recta  $a$  se llama *eje de simetría* de la figura. La bisectriz

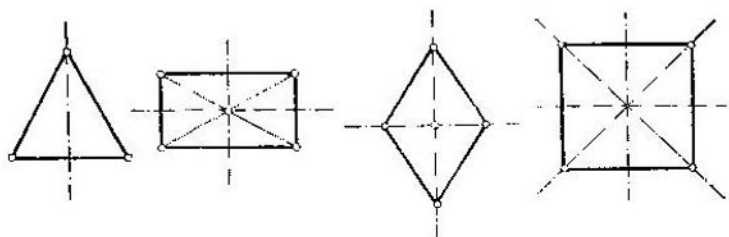


Fig. 70

del ángulo correspondiente al vértice del triángulo isósceles es su eje de simetría. Las diagonales del rombo son sus ejes de simetría. Las rectas que pasan por el punto de intersección de las diagonales del rectángulo paralelamente a sus lados, son ejes de simetría. Las diagonales del cuadrado y las rectas que pasan por el punto de intersección de las diagonales paralelamente a los lados, son ejes de simetría (fig. 70).

**Simetría respecto al punto.** Sea  $O$  un punto del plano y sea  $X$  un punto cualquiera (fig. 71). Construyamos el punto  $X_1$  ateniéndonos a la regla siguiente. Si el punto  $X$  coincide con  $O$ , el punto  $X_1$  es el punto  $O$ . Si el punto  $X$  no coincide con  $O$ , el punto  $X_1$  pertenece a la semirrecta complementaria de la semirrecta  $OX$  siendo la distancia  $OX_1$  igual a  $OX$ . El punto  $X_1$  obtenido de esta forma se llama *simétrico* respecto al punto  $O$ . La transformación del plano sobre sí mismo, que a todo punto  $X$  pone en correspondencia el punto  $X_1$  según la regla señalada, se denomina *transformación de simetría* respecto al punto  $O$ .

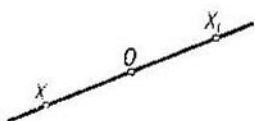


Fig. 71

**TEOREMA 10.3.** *Toda transformación de simetría respecto a un punto es un movimiento.*

**DEMOSTRACION.** Sean  $X$  e  $Y$  dos puntos cualesquiera y sean  $X_1$  e  $Y_1$  los puntos que les corresponden en virtud

de la simetría respecto al punto  $O$ . El teorema afirma que  $X_1Y_1 = XY$ . Consideremos el caso en que los puntos  $X$  e  $Y$  no coinciden con el punto  $O$  y no se hallan en una misma recta que pasa por el punto  $O$  (fig. 72).

Los triángulos  $XOY$  y  $X_1OY_1$  son iguales. Sus ángulos de vértice  $O$  son iguales, pues son verticales, y  $X_1O = XO$  e  $Y_1O = YO$  por definición de la simetría. De la igualdad de los triángulos resulta que  $X_1Y_1 = XY$ .

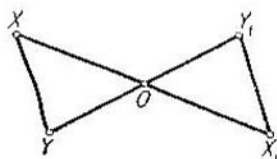


Fig. 72

El mismo resultado  $X_1Y_1 = XY$  se obtiene para las demás posiciones de los puntos  $X$  e  $Y$  respecto al punto  $O$ . Recomendamos al lector que demuestre, a título de ejercicio, esto último. Queda demostrado el teorema.

Si la simetría respecto al punto  $O$  transforma la figura  $F$  en sí misma, se dice que la figura es *simétrica central*. El punto  $O$  se denomina *centro de simetría*. El paralelogramo es una figura simétrica central. Su centro de simetría es el punto de intersección de las diagonales.

**Traslación paralela.** Recibe el nombre de *traslación paralela* el movimiento en el que los puntos se desplazan a una misma distancia según rectas paralelas.

**TEOREMA 10.4.** *Cualesquiera que sean los puntos  $A_1$  y  $A_2$ , existe una traslación paralela única que transforma el punto  $A_1$  en  $A_2$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** (fig. 73). Tomemos un punto  $A$  que no se halla en la recta  $A_1A_2$  e indiquemos por  $O_1$  y  $O_2$  los puntos medios de los segmentos  $A_1A$  y  $A_2A$ . Sea  $X$  un punto cualquiera del plano. Construyamos el punto  $X_1$  simétrico de éste respecto al punto  $O_1$  y después el punto  $X_2$  simétrico de  $X_1$  respecto al punto  $O_2$ . La transformación del plano que hace corresponder el punto  $X_2$  al punto  $X$  es un movimiento ya que la simetría respecto al punto  $O_1$  y la simetría respecto al punto  $O_2$  conservan las distancias.

Puesto que el segmento  $O_1O_2$  es la línea media del triángulo  $X_1X_2A$ , las rectas  $XX_2$  y  $O_1O_2$  son paralelas y el segmento  $XX_2$  es igual al duplo del segmento  $O_1O_2$ . Por consiguiente, en virtud de este movimiento los puntos se desplazan según paralelas a la recta  $O_1O_2$  a una distancia igual a  $2(O_1O_2)$ , es decir, ésta es una traslación paralela. Esta traslación paralela transforma el punto  $A_1$  en el punto  $A_2$ .

Demostremos la unicidad de la traslación paralela (fig. 74). Sea  $X$  un punto cualquiera del plano. Tracemos por el punto  $X$  la recta paralela a la recta  $A_1A_2$  y construyamos en ésta los segmentos  $XX_1$  y  $XX_2$  iguales al segmento  $A_1A_2$ . Los puntos  $X_1$  y  $X_2$  se diferencian en que están a distintos lados de la recta  $A_1X$ . Supongamos, para concretar, que el punto  $X_1$  y el punto  $A_2$  están a un mismo lado de la recta  $A_1X$ .

El punto  $X_2$  no puede corresponder al punto  $X$  en una traslación paralela que transforme el punto  $A_1$  en  $A_2$ . En efecto, la recta  $A_1X$  debe transformarse en la recta  $A_2X_2$ .

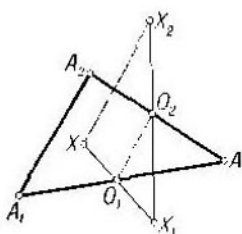


Fig. 73

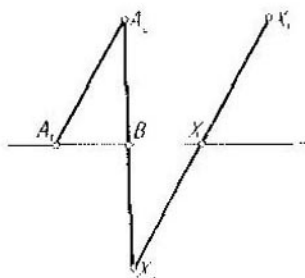


Fig. 74

El punto  $B$  en el que se cortan el segmento  $A_2X_2$  y la recta  $A_1X$  debe desplazarse por la recta paralela a  $A_1A_2$ . Por consiguiente, el punto  $B$  debe permanecer fijo. Pero esto es imposible ya que debe desplazarse a una distancia igual a  $A_1A_2$ . Es decir, en la traslación paralela considerada, al punto  $X$  puede corresponder sólo el punto  $X_1$ . Luego, el punto  $X_1$  correspondiente al punto  $X$  se determina unívocamente y ello prueba la unicidad de la traslación paralela. Queda demostrado el teorema.

**Rotación.** Se llama *rotación* de ángulo  $\varphi$  respecto al punto  $O$  el movimiento en el que el punto  $O$  permanece fijo y todo rayo que parte del punto  $O$  gira en ángulo  $\varphi$ , o sea, forma ángulo  $\varphi$  con el rayo que le corresponde.

**TEOREMA 10.5.** Si en el movimiento permanece fijo sólo un punto, este movimiento es una rotación.

**DEMOSTRACIÓN** (fig. 75). Sea  $O$  el punto fijo. Tracemos desde él dos rayos  $a_1$  y  $b_1$ . Se transformarán en el movimiento en los rayos  $a_2$  y  $b_2$ . Los ángulos  $(a_1b_1)$  y  $(a_2b_2)$  serán iguales pues corresponderán en el movimiento. Tracemos la bisectriz

$c_1$  del ángulo  $(a_1b_1)$ , la bisectriz  $c_2$  del ángulo  $(a_2b_2)$  y la bisectriz del ángulo  $(c_1c_2)$ . Complementemos la última hasta obtener una recta que llamaremos  $s$ .

Puesto que las bisectrices  $c_1$  y  $c_2$  son simétricas respecto a la recta  $s$  y que los ángulos  $(a_1b_1)$  y  $(a_2b_2)$  son iguales, éstos también son simétricos respecto a la recta  $s$ . Pueden darse dos casos de esta simetría: los rayos correspondientes son  $a_1$  y  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  o los rayos correspondientes son  $a_1$  y  $b_2$ ,  $b_1$  y  $a_2$ . Afirmando que el primer caso es imposible.

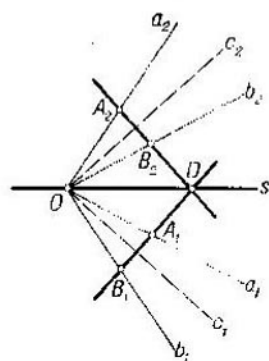


Fig. 75

Tracemos por un punto  $D$ , diferente de  $O$ , de la recta  $s$  una recta que corte los rayos  $a_1$  y  $b_1$ . Sean  $A_1$  y  $B_1$  los puntos de intersección. La recta simétrica de ésta respecto a  $s$  corta los rayos  $a_2$  y  $b_2$  en unos puntos  $A_2$  y  $B_2$ . En el primer caso de simetría respecto a la recta  $s$ , el punto  $A_1$  se transforma en  $A_2$ ; y el punto  $B_1$  en  $B_2$ . Puesto que el punto  $O$  se transforma en sí mismo, se tiene  $OA_1 = OA_2$  y  $OB_1 = OB_2$ . Por lo tanto, en el primer caso los puntos  $A_1$  y  $A_2$  y los puntos  $B_1$  y  $B_2$  son correspondientes en el movimiento de que trata el teorema.

Como quiera que todo movimiento conserva las distancias entre los puntos y el orden de posición de puntos en la recta, en el primer caso cualquier punto  $X$  de la recta  $A_1B_1$  se transformará en un mismo punto, tanto en el movimiento considerado como en la simetría respecto a la recta  $s$ . En particular, el punto  $D$  permanecerá fijo. Pero esto es imposible ya que en el movimiento considerado permaneció fijo sólo el punto  $O$ . Por consiguiente, el primer caso es imposible.

Queda el segundo caso. En éste, las rectas que corresponden en la simetría respecto a la recta  $s$  son las rectas  $a_1$  y  $b_2$  y las rectas  $b_1$  y  $a_2$ . Los ángulos  $(a_1a_2)$  y  $(b_1b_2)$  corresponden en la simetría y, por consiguiente, son iguales. Queda demostrado el teorema.

De este teorema resulta que *dos reflexiones especulares, realizadas sucesivamente respecto a dos rectas secantes, equivalen a una rotación.*

En efecto, el movimiento, que se obtiene como resultado de las reflexiones especulares respecto a las dos rectas secantes, deja fijo sólo un punto, el punto de intersección de las rectas. Pero según el teorema 10.5, este movimiento es una rotación.

### Preguntas de repaso

1. ¿Qué es movimiento? ¿Qué figuras se llaman iguales?
2. Demuéstrese el teorema 10.1: Si, por efecto de un movimiento, tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  que se hallan en una recta se transforman en los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$ , éstos se hallarán en una recta. Si el punto  $B$  está entre  $A$  y  $C$ , el punto  $B_1$  estará entre  $A_1$  y  $C_1$ .
3. Demuéstrese que todo movimiento transforma rectas en rectas, rectas secantes en rectas secantes y rectas paralelas en rectas paralelas.
4. ¿Qué es simetría respecto a la recta?
5. Demuéstrese que toda simetría respecto a la recta es un movimiento.
6. Demuéstrese que las líneas punteadas de la fig. 70 son ejes de simetría de las figuras representadas en ella.
7. ¿Qué es simetría respecto al punto?
8. Demuéstrese que toda simetría respecto al punto es un movimiento.
9. Demuéstrese que el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo es su centro de simetría.
10. ¿Qué es rotación?
11. ¿Qué es traslación paralela?

### Ejercicios

12. Demuéstrese que si dos puntos  $A$  y  $B$  permanecen fijos en el movimiento, todos los puntos de la recta  $AB$  permanecen fijos.
13. Demuéstrese que si tres puntos no pertenecientes a una recta permanecen fijos, todos los puntos permanecen fijos.
14. Demuéstrese que para hacer coincidir dos cualesquiera segmentos iguales basta a lo sumo dos reflexiones especulares.
15. Demuéstrese que para hacer coincidir dos cualesquiera triángulos iguales basta a lo sumo tres reflexiones especulares.
16. Demuéstrese que para obtener cualquier movimiento basta a lo sumo tres reflexiones especulares.
17. Demuéstrese que si  $a$  y  $b$  son ejes de simetría de una figura, la recta simétrica de  $a$  respecto a la recta  $b$  es también eje de simetría.
18. Demuéstrese que es isósceles todo triángulo que tenga un eje de simetría.
19. Demuéstrese que el triángulo no puede tener centro de simetría.
20. Demuéstrese que si  $A$  y  $B$  son centros de simetría de una figura, el punto  $A_1$  simétrico de  $A$  respecto a  $B$  es también centro de simetría. Por lo tanto, la figura tiene infinitos centros de simetría.
21. Demuéstrese que dos reflexiones especulares, realizadas sucesivamente respecto a dos rectas paralelas, equivalen a una traslación paralela.

22. Demuéstrase que dos simetrías, realizadas sucesivamente respecto a dos puntos  $A$  y  $B$ , equivalen a una traslación paralela.

23. Sea dada una recta y dos puntos  $A$  y  $B$  que no están en la misma. Hállese un punto  $C$  de la recta para el cual la suma de sus distancias hasta los puntos  $A$  y  $B$  sea mínima. Considérense dos casos: 1) los puntos  $A$  y  $B$  se encuentran en distintos semiplanos respecto a la recta y 2) los puntos  $A$  y  $B$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta.

## § 11. CIRCUNFERENCIA

**Propiedades elementales de la circunferencia.** La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto. Este último se llama *centro* de la circunferencia y la distancia entre el centro y los puntos de la circunferencia se denomina *radio* de la circunferencia. También se llama radio el segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos. El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama *cuerda*. Toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia se denomina *diámetro*.

**TEOREMA 11.1.** *Todo diámetro de la circunferencia es eje de simetría. El centro de la circunferencia es centro de simetría.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $a$  el diámetro de la circunferencia y sea  $X$  un punto cualquiera de la misma (fig. 76). Construyamos el punto  $X_1$  simétrico del punto  $X$  respecto al diámetro  $a$ . Los triángulos rectángulos  $OAX$  y  $OAX_1$  son iguales. Tienen el cateto  $OA$  común y los catetos  $AX$  y  $AX_1$  son iguales por definición de la simetría. De la igualdad de los triángulos resulta que  $OX_1 = OX$ . Pero esto significa que el punto  $X_1$  se halla en la circunferencia. O sea, la simetría respecto al diámetro transforma la circunferencia en sí misma, es decir, el diámetro es eje de simetría de la circunferencia.

Construyamos ahora el punto  $X_2$  simétrico del punto  $X$  respecto al centro  $O$  de la circunferencia (fig. 76). Según la definición de la simetría respecto al punto, se tiene  $OX_2 = OX$ , o sea, el punto  $X_2$  se halla en la circunferencia. Por consiguiente, el centro de la circunferencia es centro de la simetría.

Queda demostrado el teorema.

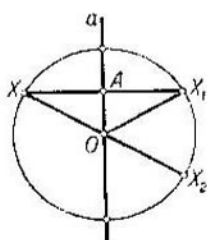


Fig. 76

**TEOREMA 11.2.** *El diámetro perpendicular a la cuerda la divide por la mitad.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $AB$  la cuerda dada y sea  $C$  su punto medio (fig. 77). Tracemos el diámetro que pasa por el punto  $C$ . Los triángulos  $OCA$  y  $OCB$  son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Tienen iguales los lados  $OA$  y  $OB$  que son radios, el lado  $OC$  es común y  $AC = CB$  porque  $C$  es el punto medio del segmento  $AB$ . La igualdad de estos triángulos implica que sus ángulos de vértice  $C$ , iguales y adyacentes, son rectos. Por lo tanto, el diámetro  $OC$  es perpendicular a la cuerda  $AB$  y la divide por la mitad. No existe otro diámetro perpendicular a la cuerda  $AB$  ya que desde el punto  $O$  se puede trazar sólo una recta perpendicular a la recta  $AB$ . Queda demostrado el teorema.

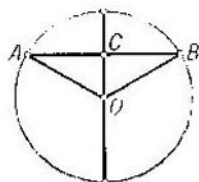


Fig. 77

**TEOREMA 11.3.** *Ninguna cuerda es mayor que el diámetro. Es igual al diámetro si ella misma es diámetro.*

**DEMOSTRACION.** Supongamos que la cuerda  $AB$  no es diámetro (fig. 77). Entonces, del triángulo  $AOB$  se tiene  $AB < AO + OB$ . Como  $AO$  y  $BO$  son radios,  $AB$  es menor que el diámetro. Queda demostrado el teorema.

La recta que pasa por un punto  $A$  de la circunferencia se llama *tangente* si es perpendicular al radio que va al punto  $A$  (fig. 78). El punto  $A$  se llama *punto de tangencia*.

**TEOREMA 11.4.** *Toda tangente tiene sólo un punto común con la circunferencia, el punto de tangencia.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $B$  otro punto cualquiera de la tangente diferente del punto de tangencia  $A$  (fig. 78). Por su propiedad respectiva de perpendicular y de oblicua  $OB > OA$ , o sea, la distancia entre el punto  $B$  y el centro es mayor que el radio. Por consiguiente, el punto  $B$  no pertenece a la circunferencia. Queda demostrado el teorema.

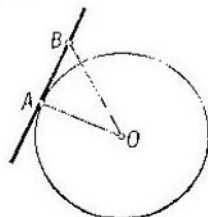


Fig. 78

**Ángulos centrales.** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de la circunferencia (fig. 79). Tracemos la recta que pasa por estos puntos. Divide el plano en dos semiplanos. Llamaremos *arcos* de circunferencia a las partes de la misma que se hallan en estos semiplanos. Si  $AB$

es un diámetro los arcos de circunferencia se denominan *semicircunferencias*.

Si la cuerda  $AB$  no es diámetro, diferenciaremos los arcos de circunferencia del modo siguiente. El centro de la circunferencia se encuentra en uno de los semiplanos en que la recta  $AB$  divide el plano. El arco que se halla en este mismo semiplano será llamado arco *mayor que la semicircunferencia*. El otro arco será llamado arco *menor que la semicircunferencia*. Los radios que van a los puntos del arco menor que la semicircunferencia cortan la cuerda  $AB$  y los radios que van a los puntos del arco mayor que la circunferencia no cortan la cuerda  $AB$ .

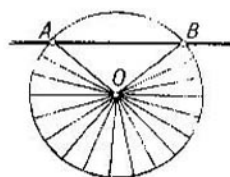


Fig. 70

Llamaremos *ángulo central* correspondiente al arco de circunferencia dado la figura formada por rayos que parten del centro de la circunferencia y que cortan este arco. En la fig. 79 puede verse los rayos de un ángulo central mayor que la semicircunferencia.

Definamos la *medida en grados* de los ángulos centrales.

Si el arco correspondiente  $\widehat{AB}$  es menor que la semicircunferencia, la medida del ángulo central es idéntica a la medida corriente del ángulo formado por las semirrectas  $OA$

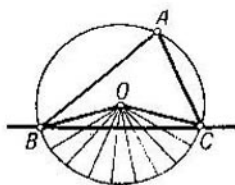


Fig. 80

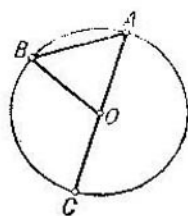


Fig. 81

y  $OB$ . Si el arco es igual a la semicircunferencia, o sea, si  $AB$  es diámetro, tomamos la medida angular igual a  $180^\circ$ . Finalmente, si el arco es mayor que la semicircunferencia, tomamos la medida angular igual a  $360^\circ - \alpha^\circ$ , donde  $\alpha^\circ$  es la medida en grados del otro ángulo, o sea, del que es menor que la semicircunferencia.



**Ángulos inscritos.** Un ángulo se denomina *inscrito* en la circunferencia, si su vértice  $A$  se halla en la circunferencia y sus lados cortan la circunferencia en unos puntos  $B$  y  $C$  distintos de  $A$  (fig. 80). La recta  $BC$  divide la circunferencia en dos arcos. El ángulo central, correspondiente a aquel arco que no contiene el punto  $A$ , se llama *ángulo central correspondiente* al ángulo inscrito dado. En la fig. 80 el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito está marcado por los rayos que parten del punto  $O$ .

**TEOREMA 11.5.** *Todo ángulo inscrito en la circunferencia es mitad del ángulo central correspondiente.*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos primero el caso en que uno de los lados del ángulo inscrito es un diámetro (fig. 81). En este caso el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito  $A$  es igual al ángulo  $BOC$ . El triángulo  $AOB$  es

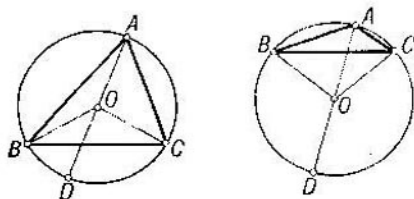


Fig. 82

isósceles de laterales  $OA$  y  $OB$ . Sus ángulos  $A$  y  $B$  son iguales. El ángulo exterior de vértice  $O$  de este triángulo es igual a la suma de los ángulos  $A$  y  $B$ . De aquí resulta que el ángulo  $BAC$  es mitad del ángulo central correspondiente.

Supongamos ahora que ninguno de los lados del ángulo inscrito es un diámetro. Tracemos el diámetro que pasa por el vértice  $A$  del ángulo inscrito. Diferenciaremos dos casos: 1) el diámetro  $OA$  separa los lados del ángulo  $A$  (fig. 82) y 2) el diámetro no separa los lados del ángulo  $A$ .

Consideremos el primer caso. Según hemos demostrado,  $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$  y  $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$ . Si el ángulo central correspondiente al ángulo  $A$  es menor que la semicircunferencia (fig. 82, a la izquierda), de aquí resulta que  $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ . Por consiguiente, el ángulo  $BAC$  es mitad del ángulo central correspondiente.

Si el ángulo central correspondiente al ángulo inscrito  $A$  es mayor que la semicircunferencia (fig. 82, a la derecha), se tiene  $\angle BOD = 180^\circ - \angle AOB$  y  $\angle COD = 180^\circ - \angle AOC$ . De aquí deducimos que  $\angle BAC = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BOC)$ , o sea, que el ángulo  $BAC$  es mitad del ángulo central correspondiente.

Análogamente se analiza el segundo caso en que el diámetro  $AO$  no separa los lados del ángulo  $A$ . Queda demostrado el teorema.

Del teorema 11.5 resulta que *son iguales los ángulos inscritos cuyos lados pasan por unos puntos  $A$  y  $B$  de la circun-*

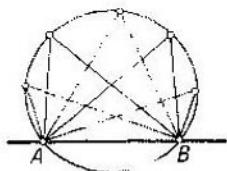


Fig. 83

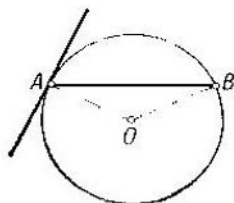


Fig. 84

*ferencia y cuyos vértices se hallan en uno de los arcos determinados por la recta  $AB$  (fig. 83). En particular, los ángulos que descansan en un diámetro son rectos.*

Sea  $AB$  una cuerda de circunferencia (fig. 84). Tracemos por el punto  $A$  la tangente a la circunferencia. El punto  $A$  divide la tangente en dos semirectas llamadas *semitangentes*. Se llaman *correspondientes* el ángulo entre la semitangente y la cuerda y el ángulo central que corresponde a aquel de los arcos  $\widehat{AB}$  que se encuentra en el mismo semiplano respecto a la recta  $AB$  que la semitangente tomada.

**TEOREMA 11.6.** *El ángulo entre la cuerda y la semitangente trazada por un punto extremo de la primera es mitad del ángulo central correspondiente.*

**DEMOSTRACIÓN.** Tomemos primero aquel ángulo entre la semitangente y la cuerda que corresponda al ángulo central menor (fig. 84). En este caso, el ángulo entre la semitangente y la cuerda es igual a  $90^\circ - \angle OAB$ . Pero como el ángulo  $OAB$  es igual a  $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB)$ , resulta que el ángulo que nos interesa es igual a  $\frac{1}{2}\angle AOB$ , o sea, es mitad del

ángulo central correspondiente. El ángulo entre la cuerda y la otra semitangente es el adyacente de éste y, por ello, es igual a  $180^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB$ , ó sea, precisamente a la mitad del ángulo central correspondiente. Queda demostrado el teorema.

**Circunferencias inscrita y circunscrita.** Diremos que el punto  $X$  se halla *dentro* del triángulo  $ABC$  (fig. 85) si está al mismo lado de la recta  $BC$  que el punto  $A$ , al mismo lado de la recta  $AC$  que el punto  $B$  y al mismo lado de la recta  $AB$  que el punto  $C$ . Se llama circunferencia *inscrita* en el triángulo la que tiene su centro dentro del triángulo y es tangente a sus lados.

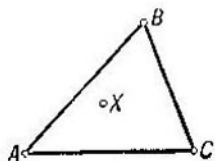


Fig. 85

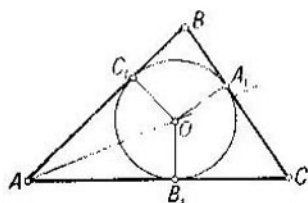


Fig. 86

Demostremos que *el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo se halla en el cruce de sus bisectrices* (fig. 86).

Sea  $O$  el centro de la circunferencia inscrita. Como quiera que el punto  $O$  está dentro del triángulo, la semirrecta  $AO$  se halla en el mismo semiplano respecto a la recta  $AC$  que la semirrecta  $AB$  y en el mismo semiplano respecto a la recta  $AB$  que la semirrecta  $AC$ . Por lo tanto, la semirrecta  $AO$  pasa entre las semirrectas  $AB$  y  $AC$ .

Sean  $C_1$  y  $B_1$  los puntos de tangencia de la circunferencia y de los lados  $AC$  y  $AB$  del triángulo. Los triángulos rectángulos  $AOC_1$  y  $AOB_1$  son iguales. Tienen la hipotenusa  $AO$  común y los catetos  $OC_1$  y  $OB_1$  iguales en tanto que radios. De aquí se deduce la igualdad de los ángulos  $OAC_1$  y  $OAB_1$ . Pero esto significa que el centro de la circunferencia se halla en la bisectriz del triángulo trazada desde el vértice  $A$ . Análogamente demostraremos que el centro de la circunferencia está en las otras dos bisectrices del triángulo.

Queda demostrada la afirmación.

Demostremos ahora que *en todo triángulo se puede inscribir una circunferencia*.

Tracemos dos bisectrices del triángulo (fig. 87). Se cortan en un punto  $O$ . (La demostración de que las bisectrices se cortan es idéntica a la demostración de que las medianas se cortan.) Tracemos por el punto  $O$  las perpendiculares  $OA_1$ ,  $OB_1$  y  $OC_1$  a las rectas  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$ . Los triángulos rectángulos  $AOB_1$  y  $AOC_1$  son iguales. Tienen la hipotenusa  $AO$  común y los ángulos  $OAB_1$  y  $OAC_1$  iguales pues  $AO$  es bisectriz. Por consiguiente,  $OB_1 = OC_1$ . Análogamente se demuestra que  $OC_1 = OA_1$ . La circunferencia de centro  $O$

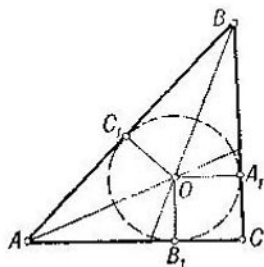


Fig. 87

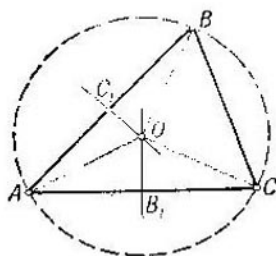


Fig. 88

y de radio  $OA_1$  es tangente a los lados del triángulo en los puntos  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$ , o sea, es circunferencia inscrita. Queda demostrada la afirmación.

Se llama circunferencia *circunscrita* al triángulo la que pasa por cada uno de los vértices del triángulo.

Demostremos que *en torno a cualquier triángulo se puede circunscribir una circunferencia*.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $ABC$  el triángulo dado (fig. 88). Tracemos por los puntos medios de los lados  $AB$  y  $AC$  del triángulo las rectas perpendiculares a éstos. Dichas rectas se cortarían en un punto  $O$ . Efectivamente, de lo contrario serían paralelas. Pero en este caso, las rectas  $AB$  y  $AC$ , en tanto que perpendiculares a dos paralelas, también resultarían paralelas, cosa imposible puesto que se cortan (en el punto  $A$ ).

De la igualdad de los triángulos rectángulos  $AOB_1$  y  $COB_1$  se tiene  $OA = OC$ . De la igualdad de los triángulos rectángulos  $AOC_1$  y  $BOC_1$  resulta  $OA = OB$ . Por ello, la circunferencia de centro  $O$  y de radio  $OA$  pasa por los tres vértices del triángulo  $ABC$ , o sea, es circunferencia circunscrita. Queda demostrada la afirmación.

**PROBLEMA.** Dada una circunferencia de centro  $O$ , constrúyanse las tangentes que pasan por un punto  $A$  exterior a la circunferencia.

**SOLUCIÓN** (fig. 89). Construyamos la circunferencia que tiene el segmento  $OA$  como diámetro. Sean  $B$  y  $C$  los puntos de intersección de esta circunferencia y de la dada. Las rectas  $AB$  y  $AC$  son tangentes a la circunferencia dada, pues los ángulos  $OBA$  y  $OCA$  son rectos (teorema 11.5).

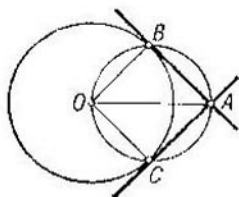


Fig. 89

### Preguntas de repaso

1. ¿Qué es circunferencia y qué son centro, radio, cuerda y diámetro de la circunferencia?

2. Demuéstrase que el diámetro es eje de simetría de la circunferencia y que el centro es centro de simetría.

3. Demuéstrase que el diámetro perpendicular a la cuerda la divide por la mitad.

4. Demuéstrase que ninguna cuerda es mayor que el diámetro y que la cuerda es igual al diámetro sólo en el caso en que ella misma sea diámetro.

5. ¿Qué es arco de circunferencia? ¿Qué arco se denomina arco menor que la semicircunferencia? ¿Qué arco se denomina arco mayor que la semicircunferencia?

6. ¿Qué es ángulo central correspondiente a un arco de circunferencia?

7. ¿Cómo se determina la medida en grados del ángulo central?

8. ¿Qué es ángulo inscrito en la circunferencia? ¿Qué ángulo central se llama correspondiente al ángulo inscrito?

9. Demuéstrase el teorema: el ángulo inscrito en la circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.

10. Demuéstrase que el ángulo entre la cuerda y la semitangente en un punto extremo de la primera se mide por la mitad del ángulo central correspondiente.

11. ¿Qué significa la expresión: el punto se halla dentro del triángulo? ¿Qué circunferencia se denomina inscrita en el triángulo?

12. Demuéstrase que en todo triángulo se puede inscribir una circunferencia y que el centro de la circunferencia inscrita se halla en el cruce de las bisectrices.

13. ¿Qué circunferencia se denomina circunscrita al triángulo? Demuéstrase que cualquiera que sea el triángulo se le puede circunscribir una circunferencia, y sólo una.

### Ejercicios

14. Demuéstrase que si la recta tiene un punto común con la circunferencia y no es tangente a la circunferencia en este punto, tiene un punto común más con la circunferencia.

15. Demuéstrase que la recta no puede cortar la circunferencia en tres puntos.

16. Trácese una circunferencia de radio dado tangente a los lados de un ángulo.

17. Hállese la circunferencia de radio dado tangente a dos circunferencias. ¿Cuál es el número máximo de soluciones de este problema?

18. Hállese el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto  $A$  a las rectas que pasan por el punto  $B$ .

19. Hállese el lugar geométrico de los vértices de los triángulos de base  $AB$  y de ángulo dado de vértice  $C$ .

20. Constrúyase el triángulo  $ABC$  a partir de su lado  $AB$ , su ángulo  $C$  y la altura relativa a la base  $AB$ .

21. Hállese el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que pasan por un mismo punto.

22. Sea  $ABC$  un triángulo. Constrúyanse las circunferencias tangentes a las tres rectas  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$ . ¿Cuántas son estas circunferencias?

23. Dos circunferencias se cortan en los puntos  $A$  y  $B$ . Por el punto  $B$  se traza una recta cortando las circunferencias en los puntos  $X$  e  $Y$ . Demuéstrase que el ángulo  $XAY$  no depende de la recta que se tome.

24. Se dice que el cuadrilátero convexo está inscrito en la circunferencia si sus vértices se hallan en la misma. Demuéstrase que la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito es igual a  $180^\circ$ .

25. Demuéstrase que son iguales los segmentos  $AB$  y  $AC$  de dos tangentes trazadas a la circunferencia por un mismo punto (fig. 89).

26. El cuadrilátero convexo se denomina circunscrito a la circunferencia si sus lados son tangentes a la misma. Demuéstrase que en el cuadrilátero circunscrito las sumas de sus lados opuestos son las mismas. (Sugerencia. Empléese la propiedad de los segmentos de las tangentes a la circunferencia trazadas por un mismo punto. Véase el ejercicio 25.)

27. Demuéstrase que la distancia entre dos cualesquiera puntos interiores del triángulo no es mayor que el lado mayor del triángulo.

## § 12. SEMEJANZA DE LOS TRIÁNGULOS

**Criterio principal de la semejanza de los triángulos.** Dos triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  se llaman *semejantes* si

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

En una palabra, los triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. La semejanza de los triángulos se indica por el símbolo  $\sim$ . En nuestro caso,  $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ .

TEOREMA 12.1. Si en dos triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  se tiene  $\angle A = \angle A_1$  y  $\angle B = \angle B_1$ , los triángulos son semejantes.

DEMOSTRACION. Puesto que la suma de los ángulos del triángulo es igual a dos rectos, la igualdad de los ángulos  $A$  y  $A_1$  y de los ángulos  $B$  y  $B_1$  implica la igualdad de los ángulos  $C$  y  $C_1$ . Demostremos que los lados de los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son proporcionales.

Supongamos, para puntualizar, que  $AB \leq A_1B_1$ . Tomemos en la semirrecta  $AB$  el segmento  $AB_2$  igual al  $A_1B_1$  (fig. 90, a la izquierda). Tracemos por el punto  $B_2$  la recta

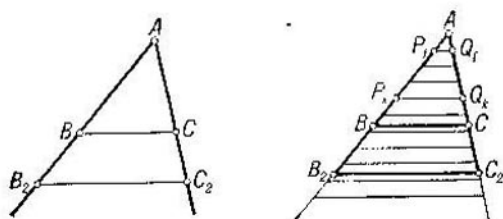


Fig. 90

paralela a  $BC$ . Corta la semirrecta  $AC$  en un punto  $C_2$ . Según la propiedad de los ángulos de las paralelas  $BC$  y  $B_2C_2$  con la secante  $BB_2$ , los ángulos  $ABC$  y  $AB_2C_2$  son iguales. El triángulo  $AB_2C_2$  es igual al triángulo  $A_1B_1C_1$  pues  $\angle B_2AC_2 = \angle B_1A_1C_1$  por hipótesis del teorema siendo, además,  $AB_2 = A_1B_1$  y  $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$  por construcción. De la igualdad de estos triángulos resulta que  $AC_2 = A_1C_1$ .

Tomemos un segmento pequeño  $AP_1$  en la semirrecta  $AB$  de modo que las dos razones  $\frac{AB}{AP_1}$  y  $\frac{AB_2}{AP_1}$  no sean números enteros (fig. 90, a la derecha). Consideremos en la semirrecta  $AB$  los puntos  $P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$  de manera que  $AP_n = n \cdot AP_1$ . Sea  $n$  el entero de la división de  $AB$  por  $AP_1$  y sea  $m$  el entero de la división de  $AB_2$  por  $AP_1$ . El punto  $B$  está entonces entre los puntos  $P_n$  y  $P_{n+1}$  y el punto  $B_2$  entre  $P_m$  y  $P_{m+1}$ . Por ello,

$$\begin{aligned} n \cdot AP_1 &< AB < (n + 1) \cdot AP_1, \\ m \cdot AP_1 &< AB_2 < (m + 1) \cdot AP_1. \end{aligned}$$

De aquí resulta que

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AB}{AB_2} < \frac{n+1}{m}. \quad (1)$$

Tracemos por los puntos  $P_1, P_2, P_3, \dots$  las rectas paralelas a  $BC$ . Estas rectas, según el teorema 9.8, cortan la semirrecta  $AC$  en unos puntos  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  siendo los segmentos  $AQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots$  iguales. El punto  $C$  se halla entre los puntos  $Q_n$  y  $Q_{n+1}$  y el punto  $C_2$  entre los puntos  $Q_m$  y  $Q_{m+1}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n \cdot AQ_1 &< AC < (n+1) \cdot AQ_1, \\ m \cdot AQ_1 &< AC_2 < (m+1) \cdot AQ_1. \end{aligned}$$

De aquí que

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AC}{AC_2} < \frac{n+1}{m}. \quad (2)$$

Las desigualdades (1) y (2) permiten ver que las razones  $\frac{AB}{AB_2}$  y  $\frac{AC}{AC_2}$  difieren no más que en  $\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1}$ . Puesto que  $AB \leq A_1B_1$ , resulta que  $n \leq m$ . Por eso,

$$\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{m+n+1}{m(m+1)} \leq \frac{2m+2}{m(m+1)} = \frac{2}{m},$$

o sea, las razones  $\frac{AB}{AB_2}$  y  $\frac{AC}{AC_2}$  difieren no más que en  $\frac{2}{m}$ .

Si tomamos el segmento  $AP_1$  suficientemente pequeño, el número  $m$  será tan grande como se quiera y  $\frac{2}{m}$  será tan pequeño como se quiera. Es decir, las razones  $\frac{AB}{AB_2}$  y  $\frac{AC}{AC_2}$  difieren *todo lo poco que se quiera*. Pero esto puede darse sólo si son iguales. O sea,

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}.$$

Puesto que  $AB_2 = A_1B_1$  y  $AC_2 = A_1C_1$ , se tiene

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Análogamente se demuestra que

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Queda demostrado el teorema,



Otros criterios de la semejanza de los triángulos.  
**TEOREMA 12.2.** Si en los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  se tiene  $\angle A = \angle A_1$  y

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \quad (3)$$

los triángulos son semejantes.

**DEMOSTRACION.** Consideremos el triángulo  $A_2B_2C_2$  que tenga  $A_2B_2 = A_1B_1$ ,  $\angle A_2 = \angle A$  y  $\angle B_2 = \angle B$ . Los triángulos  $ABC$  y  $A_2B_2C_2$  son semejantes, según el teorema 12.1. Por consiguiente,

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{AC}{A_2C_2}. \quad (4)$$

Puesto que  $A_2B_2 = A_1B_1$ , de las igualdades (3) y (4) resulta que  $A_2C_2 = A_1C_1$ .

Ahora podemos afirmar que los triángulos  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$  son iguales. Tienen  $A_1B_1 = A_2B_2$  por construcción,  $A_1C_1 = A_2C_2$  según hemos demostrado y  $\angle A_1 = \angle A_2$  debido a la igualdad de los ángulos  $A$  y  $A_1$  y a la semejanza de los triángulos  $ABC$  y  $A_2B_2C_2$ .

Ya que los triángulos  $ABC$  y  $A_2B_2C_2$  son semejantes y que los triángulos  $A_2B_2C_2$  y  $A_1B_1C_1$  son iguales, los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son semejantes. Queda demostrado el leorema.

**TEOREMA 12.3.** Si en los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  se tiene

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

los triángulos son semejantes.

**DEMOSTRACION.** Construyamos el triángulo  $A_2B_2C_2$  que tenga  $A_2B_2 = A_1B_1$ ,  $A_2C_2 = A_1C_1$  y  $\angle A_2 = \angle A$ . Según el teorema 12.2, los triángulos  $ABC$  y  $A_2B_2C_2$  son semejantes. Por consiguiente,

$$\frac{AC}{A_2C_2} = \frac{BC}{B_2C_2}. \quad (5)$$

Como quiera que  $A_2C_2 = A_1C_1$ , de las igualdades (5) y (6) resulta que  $B_2C_2 = B_1C_1$ . Ahora deducimos la igualdad de los triángulos  $A_2B_2C_2$  y  $A_1B_1C_1$  empleando el tercer criterio de la igualdad. Puesto que el triángulo  $ABC$  es semejante al triángulo  $A_2B_2C_2$  y que el triángulo  $A_2B_2C_2$  es igual al triángulo  $A_1B_1C_1$ , los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son semejantes. Queda demostrado el teorema,

**Segmentos proporcionales en el triángulo. TEOREMA 12.4.**

*En todo triángulo rectángulo la altura trazada desde el vértice del ángulo recto es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Cada uno de los catetos es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $ABC$  el triángulo rectángulo de ángulo recto  $C$  (fig. 91) y sea  $CD$  la altura trazada desde el vértice  $C$ . Los ángulos  $CAD$  y  $BCD$  son iguales porque cada

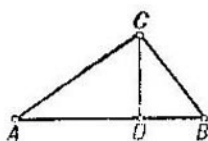


Fig. 91

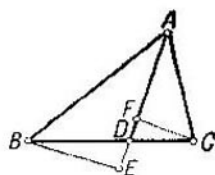


Fig. 92

uno de ellos complementa el ángulo  $ABC$  hasta  $90^\circ$ . Los triángulos rectángulos  $CAD$  y  $BCD$  son semejantes, según el teorema 12.1. De la semejanza de los triángulos se deduce que

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}.$$

De aquí  $(CD)^2 = AD \cdot BD$ , o sea,  $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$ . Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

De la semejanza de los triángulos  $BCD$  y  $BAC$  se deduce que

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD},$$

de donde  $(CB)^2 = AB \cdot BD$ , o sea,  $CB = \sqrt{AB \cdot BD}$ . Queda demostrada la segunda afirmación del teorema.

TEOREMA 12.5. *La bisectriz  $AD$  del triángulo  $ABC$  divide el lado  $BC$  en segmentos proporcionales a los lados  $AB$  y  $AC$ , o sea,*

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $ABC$  el triángulo dado (fig. 92) y sea  $AD$  la bisectriz relativa al lado  $BC$ . Tracemos las perpendiculares  $BE$  y  $CF$  a la recta  $AD$ . Los triángulos

$BED$  y  $CFD$  son semejantes. Sus ángulos  $E$  y  $F$  son rectos y sus ángulos de vértice  $D$  son iguales por ser verticales.

Los triángulos  $BAE$  y  $CAF$  también son semejantes. Sus ángulos  $E$  y  $F$  son rectos y sus ángulos de vértice  $A$  son iguales porque  $AD$  es bisectriz.

De la semejanza de los triángulos  $BED$  y  $CFD$  resulta la proporción

$$\frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD} .$$

De la semejanza de los triángulos  $BAE$  y  $CAF$  resulta la proporción

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} .$$

Comparando las proporciones obtenidas; encontramos

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} .$$

Queda demostrado el teorema.

**Proporcionalidad de los segmentos de cuerdas y secantes.**

**TEOREMA 12.6.** *Los productos de los segmentos de cuerdas secantes coinciden. A saber, si las cuerdas  $AB$  y  $CD$  se cortan en el punto  $S$ , se tiene*

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS .$$

**DEMOSTRACIÓN** (fig. 93). Tracemos la recta  $BD$ . Los puntos  $A$  y  $C$  se hallan en un mismo semiplano respecto a la recta  $BD$ ; a saber, en el semiplano donde está el punto  $S$ . Por ello, ambos puntos  $A$  y  $C$  pertenecen a uno de los dos arcos en los que la recta  $BD$  divide la circunferencia. Pero esto significa que los ángulos inscritos  $DCB$  y  $DAB$  son iguales. Análogamente deducimos la igualdad de los ángulos  $ABC$  y  $ADC$ . Los triángulos  $ASD$  y  $CSB$  son entonces semejantes por el teorema 12.1. De la semejanza de estos triángulos resulta la proporción

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS} ,$$

es decir,

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS .$$

Queda demostrado el teorema.

**TEOREMA 12.7.** *El producto de los segmentos de la secante es igual al cuadrado de la tangente. O sea, si por un punto  $S$*

se trazan una secante de la circunferencia y una tangente, siendo  $A$  y  $B$  los puntos de intersección de la circunferencia con la secante y  $C$  el punto de tangencia con la tangente, se tiene

$$AS \cdot BS = (CS)^2.$$

DEMOSTRACION (fig. 94). Puesto que la circunferencia se halla a un lado de la tangente, el punto  $S$  no separa los puntos  $A$  y  $B$ . Supongamos, para concretar, que el punto  $B$  está entre  $A$  y  $S$  como aparece en la figura.

Los triángulos  $SAC$  y  $SCB$  son semejantes. Tienen el ángulo  $S$  común y los ángulos  $CAB$  y  $BCS$  iguales, pues

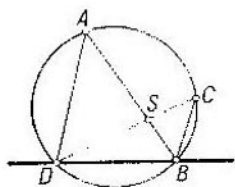


Fig. 93

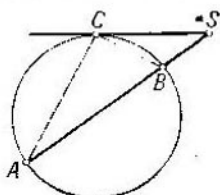


Fig. 94

se miden por la mitad de un mismo ángulo central. De la semejanza de los triángulos resulta la proporción

$$\frac{CS}{AS} = \frac{SB}{CS},$$

de donde  $AS \cdot BS = (CS)^2$ . Queda demostrado el teorema.

Del teorema 12.7 se deduce que son iguales los productos de los segmentos de las secantes trazadas por un mismo punto.

**Intersección de la recta con la circunferencia.** TEOREMA 12.7. Sean dadas una circunferencia de radio  $R$  y de centro  $O$  y una recta  $a$  que pasa a una distancia  $h$  del centro de la circunferencia. Entonces, la recta no corta la circunferencia si  $h > R$ , es tangente a la circunferencia si  $h = R$  y corta la circunferencia en dos puntos si  $h < R$ .

DEMOSTRACION. Si  $h > R$ , la distancia de todo punto de la recta hasta el centro de la circunferencia es superior a  $R$ . Por consiguiente, estos puntos no pueden pertenecer a la circunferencia, o sea, la recta y la circunferencia no se cortan.

Si  $h = R$ , el pie de la perpendicular trazada a la recta desde el centro de la circunferencia se halla en la circunferencia. En este punto la recta es tangente a la circunferencia por definición misma de la tangente.

Consideremos el caso  $h < R$  (fig. 95). Tracemos la recta  $OA$  perpendicular a la recta  $a$ . Construyamos en la recta  $a$ , a partir del punto  $A$ , los segmentos  $AD_1$  y  $AD_2$  iguales a  $\sqrt{R^2 - h^2}$ . En este caso,  $OD_1 = OD_2$ . Tracemos la circunferencia de centro  $O$  y de radio  $OD_1 = OD_2$ . Esta circunferencia corta la recta  $a$  en los puntos  $D_1$  y  $D_2$ .

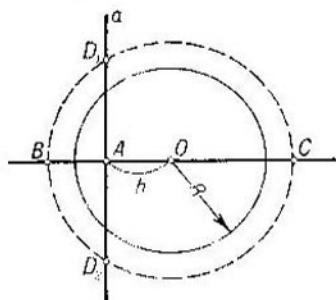


Fig. 95

Calculemos el radio de la circunferencia construida. Indiquémoslo por  $x$ . Según el teorema 12.6, tenemos  $AB \cdot AC = AD_1 \cdot AD_2 = R^2 - h^2$ . Puesto que  $OA = h$ , se tiene  $AB = x - h$  y  $AC = x + h$ . Por esto,

$$(x - h)(x + h) = x^2 - h^2 = R^2 - h^2,$$

o sea,

$$x = R.$$

Por consiguiente, la circunferencia construida coincide con la dada, es decir, la circunferencia dada corta la recta  $a$  en dos puntos  $D_1$  y  $D_2$ .

La recta  $a$  no puede tener otros puntos de intersección con la circunferencia que no sean  $D_1$  y  $D_2$ . En efecto, si existiese un punto tal, indiquémoslo por  $P_1$ , el punto  $P_2$  simétrico suyo respecto al diámetro  $BC$  también estaría en la circunferencia. Según el teorema 12.6, tendríamos  $AP_1 \cdot AP_2 = AD_1 \cdot AD_2$ . Puesto que  $AD_1 = AD_2$  y  $AP_1 = AP_2$ , resultaría  $AP_1 = AD_1$ . Pero esto significaría que el punto  $P_1$  coincide con  $D_1$  o con  $D_2$ . Queda demostrado el teorema.

**Dos problemas de construcción.** PROBLEMA. *Dados tres segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$  constrúyase el segmento*

$$x = \frac{bc}{a}.$$

SOLUCION. Tracemos por un punto cualquiera  $O$  dos semirrectas  $p$  y  $q$  no pertenecientes a una misma recta (fig. 96). Tomemos en la semirrecta  $p$  los segmentos  $OA = a$  y  $OB = b$  y en la semirrecta  $q$  el segmento  $OC = c$ . Unamos con una recta los puntos  $A$  y  $C$  y tracemos por el punto  $B$  la recta paralela a la recta  $AC$ . Corta la semirrecta  $q$  en

un punto  $D$ . De la semejanza de los triángulos  $OAC$  y  $OBD$  resulta que

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}.$$

De aquí

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{bc}{a}.$$

**PROBLEMA.** *Dados dos segmentos  $a$  y  $b$  constrúyase el segmento*

$$x = \sqrt{ab}.$$

**SOLUCIÓN.** Tomemos en una recta cualquiera  $p$  un punto  $C$  y, partiendo de él, construyamos los segmentos  $CA = a$  y  $CB = b$  en direcciones opuestas de la recta  $p$  (fig. 97).

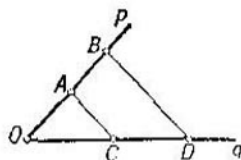


Fig. 96

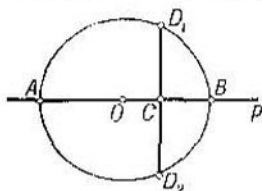


Fig. 97

Construyamos una circunferencia considerando el segmento  $AB$  como diámetro. La perpendicular al segmento  $AB$  que pasa por el punto  $C$  corta la circunferencia en dos puntos  $D_1$  y  $D_2$ . El segmento  $CD_1$  es igual a  $\sqrt{ab}$ , pues  $CD_1 = CD_2$  y  $CD_1 \cdot CD_2 = AC \cdot BC = ab$ .

**Semejanza de las figuras. Homotecia.** Se llama *transformación de semejanza* toda aplicación biunívoca del plano sobre sí mismo en la que, cualesquiera que sean los puntos  $X$  e  $Y$  y sus puntos correspondientes  $X_1$  e  $Y_1$ , la razón  $\frac{XY}{X_1Y_1}$  permanece constante, o sea, no depende de los puntos escogidos  $X$  y  $Y$ . Esta razón se denomina *coeficiente de semejanza*.

Sea  $F$  una figura cualquiera. Cuando el punto  $X$  describe la figura  $F$ , el punto correspondiente  $X_1$  describe una figura  $F_1$ . Las figuras  $F$  y  $F_1$  se llaman *semejantes*.

Sea  $O$  un punto cualquiera del plano. Pongamos en correspondencia a todo punto  $X$  del plano el punto  $X_1$  de acuerdo con la regla siguiente: si el punto  $X$  coincide con  $O$ ,

el punto  $X_1$  es el punto  $O$ ; si  $X$  es diferente de  $O$ , el punto  $X_1$  se halla en la semirrecta  $OX$  a una distancia  $k \cdot OX$  del punto  $O$ , es decir,  $OX_1 = k \cdot OX$ . La aplicación del plano sobre sí mismo que hace corresponder de esta forma el punto  $X_1$  al punto  $X$  se llama *homotecia*. El punto  $O$  se denomina *centro de homotecia* y el número  $k$ , *coeficiente de homotecia*.

**TEOREMA 12.9.** *La homotecia es una transformación de semejanza.*

**DEMOSTRACION.** Sean  $X$  y  $Y$  dos puntos cualesquiera del plano que no se hallan en una recta con el punto  $O$  (fig. 98). Los triángulos  $OXY$  y  $OX_1Y_1$  son semejantes ya que tienen el ángulo  $O$  común y

$$\frac{OX_1}{OX} = \frac{OY_1}{OY} = k.$$

La semejanza de los triángulos implica que la razón  $\frac{X_1Y_1}{XY}$  es igual a  $k$ , o sea, que no depende de los puntos escogidos  $X$  e  $Y$ . Al mismo resultado llegamos en el caso en que los puntos  $O$ ,  $X$  e  $Y$  se hallan sobre una recta. Proponemos al lector demostrar ésto. Queda demostrado el teorema.

Igual que en el § 10 para los movimientos, se obtienen las propiedades siguientes de las transformaciones de semejanza.

1. *Toda transformación de semejanza aplica rectas en rectas, semirrectas en semirrectas y segmentos en segmentos.*

2. *Toda transformación de semejanza conserva los ángulos entre semirrectas.*

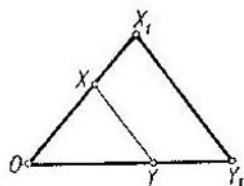


Fig. 98

### Preguntas de repaso

1. ¿Qué son triángulos semejantes?
2. ¿En qué consiste el criterio principal de la semejanza de los triángulos? Demuéstrese este criterio.
3. Demuéstrese que los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  son semejantes si  $\angle A = \angle A_1$  y

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

4. Demuéstrase que dos triángulos son semejantes si los lados de un triángulo son proporcionales a los lados del otro.

5. Enúnciese y demuéstrase el teorema sobre los segmentos proporcionales en el triángulo rectángulo.

6. Demuéstrase el teorema: el pie de la bisectriz divide el lado del triángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.

7. Enúnciese y demuéstrase el teorema sobre el producto de los segmentos de cuerdas secantes.

8. Demuéstrase que el producto de los segmentos de la secante es igual al cuadrado de la tangente.

9. Sea dada una circunferencia de radio  $R$  y de centro  $O$  y sea  $S$  un punto cuya distancia hasta el centro  $O$  es menor que  $R$ . Demuéstrase que toda recta que pasa por el punto  $S$  corta la circunferencia en dos puntos.

10. ¿Qué es transformación de semejanza? ¿Qué figuras se denominan semejantes? Demuéstrase que la figura semejante a una circunferencia es una circunferencia.

11. ¿Qué es homotecia? ¿Qué son centro y coeficiente de homotecia?

12. Demuéstrase que toda homotecia es una transformación de semejanza.

### Ejercicios

13. ¿Cuánto valen los ángulos del triángulo  $ABC$  que es semejante al triángulo  $BCA$ ?

14. Demuéstrase que son semejantes dos triángulos isósceles que tienen iguales los ángulos del vértice.

15. El ángulo del vértice del triángulo isósceles es igual a  $36^\circ$ . Demuéstrase que la bisectriz que pasa por uno de los vértices de la base forma un triángulo semejante al dado.

16. El pie de la bisectriz trazada desde el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo divide la hipotenusa en razón  $m : n$ . Demuéstrase que el pie de la altura trazada desde el mismo vértice divide la hipotenusa en razón  $m^2 : n^2$ .

17. La bisectriz del ángulo exterior de vértice  $C$  del triángulo  $ABC$  corta la recta  $AB$  en un punto  $D$ . Demuéstrase que

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} .$$

18. Demuéstrase que es una circunferencia el lugar geométrico de los puntos  $C$  para los cuales la razón de sus distancias a dos puntos fijos  $A$  y  $B$  es constante y diferente de la unidad. (*Sugerencia.* Las bisectrices de los ángulos interior y exterior de vértice  $C$  del triángulo  $ABC$  son perpendiculares. Cortan la recta  $AB$  siempre en los mismos puntos como quiera que se tome el punto  $C$ .)

19. Constrúyase el segmento

$$x = \frac{abc}{de} ,$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  son segmentos dados.



20. Constrúyase el segmento  $\sqrt{a^2 - b^2}$ , donde  $a$  y  $b$  son segmentos dados, siendo  $a > b$ .

21. Demuéstrese geoméricamente la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

22. El punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero convexo las divide en segmentos de productos iguales. Demuéstrese que el cuadrilátero puede ser inscrito en una circunferencia.

23. Hállese el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la razón de sus distancias a dos rectas secantes dadas.

24. Constrúyase el triángulo de perímetro determinado que sea semejante al triángulo dado.

25. Dados los segmentos

$$a = \frac{x+y}{2} \text{ y } b = \sqrt{xy}$$

y siendo  $a > b$ , constrúyanse los segmentos  $x$  e  $y$ .

26. Inscríbese un cuadrado en el triángulo  $ABC$  de modo que un lado del cuadrado se halle en el lado  $AB$  y los demás vértices del cuadrado estén en los lados  $AC$  y  $BC$ .

27. Constrúyase la circunferencia que pase por un punto y que sea tangente a dos rectas secantes.

### § 13. TEOREMA DE PITÁGORAS Y SUS APLICACIONES

**Teorema de Pitágoras.** TEOREMA 13.1. *En el triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

DEMOSTRACION. Sea  $ABC$  el triángulo rectángulo de vértice recto  $C$  (fig. 99). Tracemos desde el vértice  $C$  la altura  $CD$ . Demostremos, ante todo, que el pie  $D$  de la altura se halla entre los puntos  $A$  y  $B$ .

Efectivamente, supongamos que el punto  $B$  se halla entre  $A$  y  $D$ . Los ángulos  $ABC$  y  $DBC$  son entonces adyacentes y agudos. Pero esto es imposible. Análogamente deducimos que tampoco el punto  $A$  puede hallarse entre  $B$  y  $D$ . Por consiguiente, el punto  $D$  está entre  $A$  y  $B$ .

Según el teorema 12.4, tenemos ahora

$$AC^2 = AD \cdot AB \text{ y } BC^2 = BD \cdot AB.$$

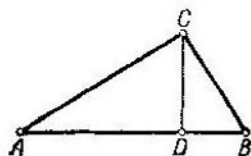


Fig. 99

Sumando estas igualdades miembro por miembro, encontramos

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB).$$

Puesto que el punto  $D$  se halla entre  $A$  y  $B$ , tenemos  $AD + DB = AB$ . Por esto,

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Queda demostrado el teorema.

El teorema 13.1 lleva el nombre del famoso matemático griego Pitágoras (VI siglo antes de nuestra era).

**Relaciones en el triángulo oblicuángulo.** Todo triángulo que no sea rectángulo se llama *oblicuángulo*.

**TEOREMA 13.2.** *En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el duplo del producto de uno de estos lados por la proyección del otro.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABC$  un triángulo de vértice obtuso  $C$  (fig. 100). Tracemos desde el vértice  $A$  la altura  $AD$ . Demostremos primero que el punto  $C$  se halla entre

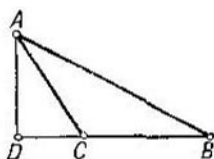


Fig. 100

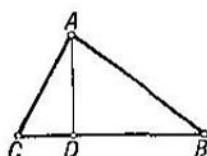


Fig. 101

$B$  y  $D$ . Efectivamente, si el punto  $C$  no separa los puntos  $B$  y  $D$ , el ángulo  $C$  del triángulo rectángulo  $ADC$  es obtuso. Pero esto es imposible. O sea, el punto  $C$  separa los puntos  $B$  y  $D$ , esto es, se halla entre ellos.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos  $ADB$  y  $ADC$ , obtenemos

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \text{y}$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Restando estas igualdades miembro por miembro, tendremos

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2.$$

Puesto que el punto  $C$  se halla entre  $B$  y  $D$ , se tiene  $BD = BC + DC$ . Tomando en la igualdad obtenida  $(BC +$

+  $DC)^2$  en lugar de  $BD^2$  y simplificando, encontramos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Queda demostrado el teorema.

**TEOREMA 13.3.** *En todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de estos lados por la proyección del otro.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABC$  un triángulo de ángulo agudo  $C$  (fig. 101). Tracemos desde el vértice  $A$  la altura  $AD$ . Notemos, ante todo, que el punto  $C$  no separa los puntos  $B$  y  $D$ . Efectivamente, en el caso contrario sería agudo el ángulo exterior de vértice  $C$  en el triángulo rectángulo  $ADC$  de ángulo recto  $D$ . Pero esto es imposible. Es decir, el punto  $D$  se halla entre  $C$  y  $B$  o el punto  $B$  se halla entre  $C$  y  $D$ . Supongamos, para concretar, que el punto  $D$  se halla entre  $C$  y  $B$  como aparece en la figura.

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos  $ADC$  y  $ADB$ , obtenemos

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 + AD^2 \quad \text{y} \\ AC^2 &= CD^2 + AD^2. \end{aligned}$$

Restando estas igualdades miembro por miembro, tendremos

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2.$$

Puesto que el punto  $D$  se halla entre  $B$  y  $C$ , se tiene  $BC = BD + CD$ , o sea,  $BD = BC - CD$ . Tomando en la igualdad obtenida  $(BC - CD)^2$  en lugar de  $BD^2$ , encontramos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Si el punto  $B$  se halla entre  $C$  y  $D$ , la demostración es análoga. Queda demostrado el teorema.

**Relación entre las diagonales y los lados del paralelogramo.**

**TEOREMA 13.4.** *En todo paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $ABCD$  un paralelogramo y sean  $AC$  y  $BD$  sus diagonales. Si el paralelogramo es un rectángulo (fig. 102, a la izquierda), tenemos por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 \quad \text{y} \\ BD^2 &= BC^2 + DC^2. \end{aligned}$$

Sumando estas igualdades miembro por miembro y observando que  $DC = AB$ , obtenemos

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Supongamos ahora que el paralelogramo no es un rectángulo (fig. 102, a la derecha). Tracemos desde los vértices

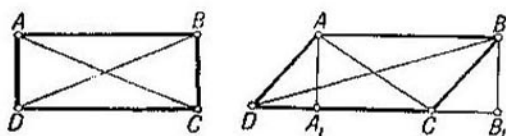


Fig. 102

$A$  y  $B$  las perpendiculares  $AA_1$  y  $BB_1$  a la recta  $CD$ . De la igualdad de los triángulos  $ADA_1$  y  $BCB_1$  resulta  $DA_1 = CB_1$ .

Los ángulos  $ADC$  y  $BCD$  se complementan hasta  $180^\circ$ , pues son correspondientes internos para las paralelas  $AD$  y  $BC$ . Por ello, si uno de estos ángulos es agudo, el otro es obtuso. Supongamos, para concretar, que el ángulo  $ADC$  es agudo y que el ángulo  $BCD$  es obtuso como representa la figura.

Aplicando el teorema 13.2 al triángulo  $BCD$  y el teorema 13.3 al triángulo  $ADC$ , obtenemos

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot DC \cdot CB_1 \quad \text{y}$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot DC \cdot DA_1.$$

Sumando miembro por miembro estas igualdades y observando que  $CB_1 = DA_1$  y que  $AB = CD$ , obtenemos

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Queda demostrado el teorema.

Del teorema 13.4 resulta que *la diagonal del cuadrado es igual a su lado multiplicado por  $\sqrt{2}$* . Efectivamente, si  $a$  es el lado del cuadrado y  $b$  su diagonal, según el teorema 13.4, tenemos  $2 \cdot b^2 = 4 \cdot a^2$ . De aquí resulta que  $b = a\sqrt{2}$ .

**Existencia del triángulo de lados dados.** Como sabemos la suma de dos lados del triángulo es mayor que su tercer lado. Surge la pregunta natural: ¿pueden ser lados de un triángulo tres números arbitrarios si la suma de dos cualesquiera

ra de estos números es mayor que el tercero? El teorema que sigue da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

**TEOREMA 13.5.** *Cualesquiera que sean tres números  $a$ ,  $b$  y  $c$ , siempre que la suma de dos de estos números sea mayor que el tercero, existe un triángulo de lados iguales a  $a$ ,  $b$ , y  $c$ .*

**DEMOSTRACION.** Consideremos los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  en orden de crecimiento. Supongamos, para puntualizar, que  $a \leq b \leq c$ . Pongamos

$$a_1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Se tiene  $a_1 > 0$  ya que  $c \geq b$ . El número  $a_1$  es menor que  $a$ . En efecto,

$$a - a_1 = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - (c-a)^2}{2c}.$$

Puesto que  $a + b > c$ , se tiene  $b > c - a > 0$ . Por ello,  $b^2 > (c - a)^2$ . Es decir,  $a > a_1$ .

Construyamos el triángulo  $ABC$  del modo siguiente. Tomemos un segmento  $AB$  igual a  $c$  (fig. 103). Construyamos en la semirrecta  $AB$  desde el punto  $B$  el segmento  $BD$  igual a  $a_1$ . Tracemos por el punto  $D$  la perpendicular  $DC$  igual a  $\sqrt{a^2 - a_1^2}$ . Se afirma que los lados del triángulo  $ABC$  son  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Efectivamente, el lado  $AB$  es igual a  $c$ . Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo  $ADC$ , obtenemos

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = a_1^2 + (\sqrt{a^2 - a_1^2})^2 = a^2,$$

o sea,  $BC = a$ . Aplicando el teorema 13.3 al triángulo  $ABC$ , obtenemos

$$AC^2 = a^2 + c^2 - 2ca_1 = b^2,$$

o sea,  $AC = b$ . Queda demostrado el teorema.

**Posición recíproca de dos circunferencias.** El teorema 13.5 permite explicar con plenitud el problema sobre la posición recíproca de dos circunferencias en dependencia de sus radios y la distancia entre los centros. En concreto, demostraremos el teorema siguiente.

**TEOREMA 13.6.** *Sean dadas dos circunferencias distintas de centros  $O_1$  y  $O_2$  y de radios  $R_1$  y  $R_2$ , siendo  $R_1 \leq R_2$ , y sea  $d$  la distancia entre los centros. Entonces:*

1. *Las circunferencias no se cortan, o sea, no tienen puntos comunes, si*

$$R_1 + R_2 < d \quad \text{o} \quad R_2 - R_1 > d.$$

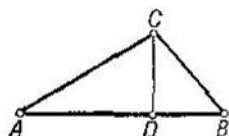


Fig. 103

2. Las circunferencias tienen un punto común en el que son tangentes, es decir, tienen una tangente común, si

$$R_1 + R_2 = d \quad \text{o} \quad R_2 - R_1 = d.$$

3. Las circunferencias se cortan en dos puntos si

$$R_1 + R_2 > d \quad \text{y} \quad R_2 - R_1 < d.$$

DEMOSTRACION. Comencemos por la primera afirmación del teorema. Supongamos que las circunferencias se cortan, es decir, que tienen un punto común  $A$ . Si los puntos

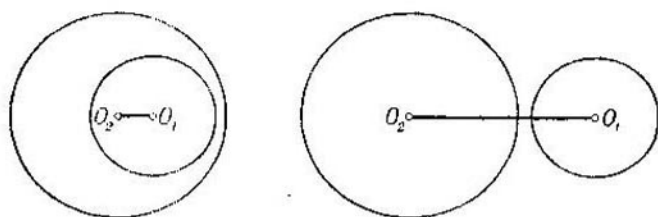


Fig. 104

$O_1$ ,  $O_2$  y  $A$  no se hallan en una recta, se tiene  $O_1A + O_2A > O_1O_2$ , o sea,  $R_1 + R_2 > d$ . Pero esto contradice la condición  $R_1 + R_2 < d$ .

Supongamos que los puntos  $O_1$ ,  $O_2$  y  $A$  se hallan en una recta. Entonces, si el punto  $A$  está entre  $O_1$  y  $O_2$ , se tiene  $O_1A + AO_2 = O_1O_2$ , o sea,  $R_1 + R_2 = d$ . Pero esto contradice la condición  $R_1 + R_2 < d$ . Si el punto  $O_1$  se encuentra entre  $A$  y  $O_2$ , se tiene  $O_1A + O_1O_2 = AO_2$ , es decir,  $R_1 + d = R_2$ , de donde  $R_2 - R_1 = d$ . Pero esto contradice la condición  $R_2 - R_1 > d$ . En fin, si el punto  $O_2$  aparece entre  $A$  y  $O_1$ , se tiene  $O_2A + O_2O_1 = AO_1$ , o sea,  $R_2 + d = R_1$ . Pero esto es imposible ya que  $R_1 \leq R_2$ . Por consiguiente, en el caso considerado las circunferencias no pueden tener punto común alguno, o sea, las circunferencias no se cortan (fig. 104).

Demostremos la segunda afirmación del teorema. En este caso, al igual que en el anterior, deducimos que las circunferencias no pueden tener un punto común  $A$  que no pertenezca a la recta  $O_1O_2$ . Pero tienen un punto común  $A$  situado en la recta  $O_1O_2$ , con la particularidad de que habrá dos variantes de posición de las circunferencias según sea  $R_2 - R_1 = d$  (fig. 105, a la izquierda) o  $R_1 + R_2 = d$

(fig. 105, a la derecha). En el punto común  $A$  las circunferencias tienen una tangente común perpendicular a la recta  $O_1O_2$ .

Demostremos, finalmente, la tercera afirmación del teorema. Observemos, ante todo, que se puede construir un

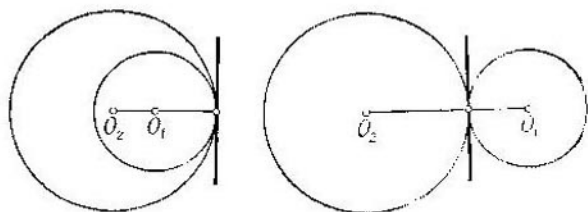


Fig. 105

triángulo de lados  $R_1$ ,  $R_2$  y  $d$ . En efecto, tenemos  $R_1 + R_2 > d$ ; además,  $R_1 + d > R_2$  porque  $R_2 - R_1 < d$  y, en fin,  $R_2 + d > R_1$  porque  $R_2 \geq R_1$ . Podemos construir este triángulo aplicando el método expuesto en la demostración del teorema 13.5. Tomemos el segmento  $O_1O_2$  como el lado  $d$  y construyamos el tercer vértice  $A_1$  de modo que sea  $O_1A_1 = R_1$  y  $O_2A_1 = R_2$ . Construido el punto  $A_1$ , tomemos su reflexión especular respecto a la recta  $O_1O_2$ . Obtendremos un punto  $A_2$ .

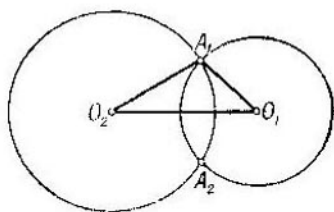


Fig. Fig. 106

Los puntos  $A_1$  y  $A_2$  se encuentran en las circunferencias dadas ya que  $O_1A_1 = R_1$  y  $O_2A_1 = R_2$  por construcción y  $O_1A_1 = O_1A_2$  y  $O_2A_1 = O_2A_2$  debido a la simetría. Por eso, los puntos  $A_1$  y  $A_2$  son puntos de intersección de las circunferencias dadas (fig. 106).

Demostremos que las circunferencias no tienen más puntos de intersección que  $A_1$  y  $A_2$ . Supongamos que existe un tercer punto de intersección  $A$ . Los triángulos  $O_1O_2A_1$  y  $O_1O_2A$  serán entonces iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Supongamos, para concretar, que el punto  $A$  se halla en el mismo semiplano respecto a la recta  $O_1O_2$  que el punto  $A_1$ . De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de los ángulos  $O_2O_1A$  y  $O_2O_1A_1$  y, por consiguiente, la coincidencia de las semirrectas  $O_1A$  y

$O_1A_1$ . Basándonos en la igualdad de los segmentos  $O_1A = O_1A_1 = R_1$ , deducimos la coincidencia de los puntos  $A$  y  $A_1$ . Queda demostrado el teorema.

**Algunos problemas.** PROBLEMA. Sea  $ABC$  un triángulo. Exprésense a través de sus lados la mediana, la bisectriz y la altura trazadas desde el vértice  $C$ .

SOLUCION. Comencemos por la mediana del triángulo (fig. 107). Sea  $O$  el pie de la mediana. Construyamos el punto  $D$  simétrico de  $C$  respecto al punto  $O$ , o sea,  $OD = OC$ .

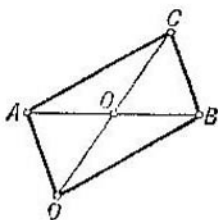


Fig. 107

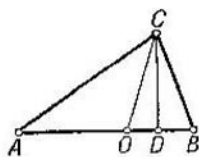


Fig. 108

Aplicando el teorema 13.4 al paralelogramo  $ABCD$ , obtenemos

$$AB^2 + (2 \cdot OC)^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot BC^2.$$

De aquí determinamos la mediana  $OC$ .

Hallemos la bisectriz  $CO$  (fig. 108). Según el teorema 12.5, el punto  $O$  —el pie de la bisectriz— divide el lado  $AB$  en segmentos proporcionales a los lados  $AC$  y  $BC$ . Esto permite determinar  $AO$  y  $OB$  siempre que se conozcan  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$ . Supongamos que  $AO$  y  $OB$  han sido determinados ya. Aplicando los teoremas 13.2 ó 13.3 a los triángulos  $ABC$  y  $AOC$ , obtenemos

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \pm 2 \cdot AB \cdot AD \quad \text{y}$$

$$OC^2 = AC^2 + AO^2 \pm 2 \cdot AO \cdot AD.$$

Multiplicando la primera igualdad por  $AO$  y la segunda por  $AB$  y restándolas miembro por miembro, obtenemos una ecuación con una sola incógnita, la bisectriz  $OC$ . Precisamente de esta ecuación se determina la bisectriz.

Hallemos la altura  $CD$  (fig. 108). Determinemos, ante todo, el segmento  $AD$  basándonos en los teoremas 13.2 ó 13.3. Después encontramos del triángulo rectángulo  $ADC$  la altura  $CD$ .



**PROBLEMA.** Sean  $a$  y  $b$  unos segmentos. Constrúyanse los segmentos  $\sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\sqrt{a^2 - b^2}$  siendo  $a > b$  en el segundo caso.

**SOLUCION.** Tracemos una recta cualquiera y tomemos en ella el segmento  $AC$  igual a  $b$  (fig. 109). Tracemos por el punto  $C$  la recta perpendicular a  $g$ . Tomemos en la recta  $g$  desde el punto  $C$  el segmento  $CB_1$  igual al segmento  $a$ . Según el teorema de Pitágoras, tenemos

$$AB_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Para construir el segmento  $\sqrt{a^2 - b^2}$ , tracemos la circunferencia de centro  $A$  y de radio  $a$ . Corta la recta  $g$  en un punto  $B$ . Según el teorema de Pitágoras, tenemos

$$CB = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

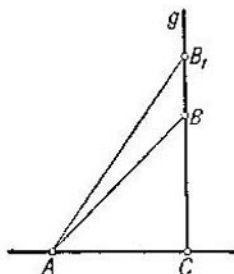


Fig. 109

### Preguntas de repaso

1. Enúnciense y demuéstrense el teorema de Pitágoras.
2. Enúnciense y demuéstrense los teoremas sobre el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso o a un ángulo agudo en el triángulo oblicuángulo.
3. Demuéstrense que la suma de los cuadrados de las diagonales del paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.
4. Demuéstrense que si tres segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$  satisfacen las desigualdades

$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{y} \quad b + c > a,$$

existe un triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

5. ¿Cuál es la posición recíproca de dos circunferencias que tengan los radios  $R_1$  y  $R_2$ , siendo  $R_1 \leq R_2$ , y la distancia entre los centros igual a  $d$ ? Enúnciense y demuéstrense el teorema correspondiente.

6. Sean  $a$  y  $b$  unos segmentos. Constrúyanse los segmentos  $\sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\sqrt{a^2 - b^2}$  siendo  $a > b$  en el segundo caso.

### Ejercicios

7. ¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos iguales a 1 cm?
8. ¿Cuánto mide la altura del triángulo equilátero de lados iguales a 1 cm?
9. Hállense los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita del triángulo equilátero de lados iguales a 1 cm.
10. Demuéstrense que si en el triángulo  $ABC$  tiene lugar la desigualdad  $AB^2 < AC^2 + CB^2$ , el ángulo  $C$  es agudo. En cambio, si  $AB^2 > AC^2 + CB^2$ , el ángulo  $C$  es obtuso.
11. Demuéstrense que el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la suma de los cuadrados de sus distancias hasta

dos puntos fijos  $A$  y  $B$ , es una circunferencia de centro en el punto medio del segmento  $AB$ .

12. Demuéstrase que el lugar geométrico de los puntos para los cuales es constante la diferencia de los cuadrados de sus distancias hasta dos puntos fijos  $A$  y  $B$ , es una recta perpendicular a la  $AB$ .

13. Demuéstrase que de dos cuerdas de la circunferencia, la mayor es la más próxima al centro.

14. Hállese la expresión para las medianas del triángulo conociéndose sus lados.

15. Sean  $ABC$  un triángulo y  $D$  el pie de la bisectriz trazada desde el vértice  $C$ . Demuéstrase que

$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD.$$

16. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  los lados del triángulo. Demuéstrase que la altura  $h_a$  relativa al lado  $a$  se determina mediante la fórmula

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

donde  $p$  es el semiperímetro del triángulo, o sea,

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

17. Determinése la base del triángulo isósceles de  $36^\circ$  de ángulo en el vértice y de laterales iguales a 1 cm. (*Sugerencia.* Véase el ejercicio 15 del § 12.)

#### § 14. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DEL ÁNGULO

**Definición de las funciones trigonométricas.** Tracemos una semicircunferencia de radio igual a la unidad (fig. 140).

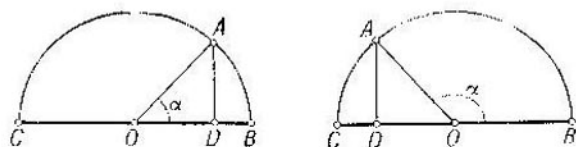


Fig. 140

Tomemos un punto cualquiera  $A$  de la semicircunferencia e indiquemos por  $\alpha$  el ángulo  $AOB$ . Tracemos desde el punto  $A$  la perpendicular  $AD$  al diámetro  $BC$ . Se llama *seno* del ángulo  $\alpha$  la longitud del segmento  $AD$ . El seno del ángulo  $\alpha$  se designa así:  $\text{sen } \alpha$ . Por definición, se acepta que  $\text{sen } 0^\circ = 0$  y que  $\text{sen } 180^\circ = 0$ .

Definamos ahora el concepto del *coseno* del ángulo. El coseno del ángulo  $\alpha$  se designa así:  $\cos \alpha$ . Si el ángulo  $\alpha$  es agudo, el  $\cos \alpha$  es igual a la longitud del segmento  $OD$  (fig. 110, a la izquierda). Si el ángulo  $\alpha$  es obtuso, el  $\cos \alpha$  es un número negativo cuyo valor absoluto es igual a la longitud del segmento  $OD$  (fig. 110, a la derecha). Por definición, aceptamos que  $\cos 0^\circ = 1$ , que  $\cos 90^\circ = 0$  y que  $\cos 180^\circ = -1$ .

Se llama *tangente* del ángulo  $\alpha$  la razón del  $\operatorname{sen} \alpha$  y del  $\cos \alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}.$$

La tangente del ángulo  $\alpha$  no está definida si  $\alpha = 90^\circ$ .

Las funciones  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\cos \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$  se llaman *funciones trigonométricas del ángulo  $\alpha$* .

TEOREMA 14.1. *Cualquiera que sea  $\alpha$  se tiene*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

DEMOSTRACION. Para  $\alpha = 0^\circ$ ,  $90^\circ$  ó  $180^\circ$  la afirmación del teorema se comprueba introduciendo los valores correspondientes del seno y del coseno.

Si el ángulo  $\alpha$  es agudo, la afirmación resulta del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo  $ODA$  (fig. 110, a la izquierda). Si el ángulo  $\alpha$  es obtuso, la afirmación también resulta del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo  $ODA$  (fig. 110, a la derecha).

**Fórmulas de reducción.** Se llaman *fórmulas de reducción* las que establecen la relación entre las funciones trigonométricas de los ángulos  $\alpha$ ,  $90^\circ - \alpha$  y  $180^\circ - \alpha$ .

TEOREMA 14.2. *Si el ángulo  $\alpha$  es agudo, se tiene*

$$\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\cos (90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha,$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

DEMOSTRACION (fig. 111). Sean el ángulo  $AOB$  igual a  $\alpha$  y el ángulo  $A_1OB$  igual a  $90^\circ - \alpha$ . Los triángulos rectángulos  $ODA$  y  $A_1D_1O$  son iguales, pues sus hipotenusas son iguales en tanto que radios y los ángulos  $AOD$  y  $OA_1D_1$  son iguales a  $\alpha$ . De la igualdad de estos triángulos resulta

que  $A_1D_1 = OD$  y que  $OD_1 = AD$ , o sea, que

$$\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha \quad \text{y} \quad \text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha.$$

La tercera fórmula se obtiene dividiendo miembro por miembro la primera fórmula por la segunda. Queda demostrado el teorema.

**TEOREMA 14.3.** *Cualquiera que sea  $\alpha$  se tiene*

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha \quad \text{y} \quad \text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha.$$

**DEMOSTRACION.** Para  $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$  ó  $180^\circ$  la afirmación del teorema se comprueba introduciendo en las fórmulas

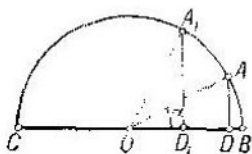


Fig. 111

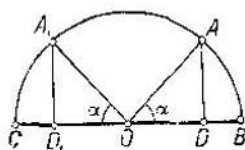


Fig. 112

los valores correspondientes del seno y del coseno. Consideremos el caso general.

Sean el ángulo  $AOB$  igual a  $\alpha$  y el ángulo  $A_1OB$  igual a  $180^\circ - \alpha$  (fig. 112). La igualdad de los triángulos  $OAD$  y  $OA_1D_1$  implica que  $AD = A_1D_1$ , o sea, que  $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$ .

Si  $\alpha$  es distinto de  $90^\circ$ , uno de los ángulos  $\alpha$  ó  $180^\circ - \alpha$  es agudo y el otro es obtuso. Por esto, el  $\text{cos } \alpha$  y el  $\text{cos}(180^\circ - \alpha)$  llevan signos opuestos. Como quiera que  $OD = OD_1$ , resulta que  $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha$ . Queda demostrado el teorema.

**Relaciones entre los lados y los ángulos en el triángulo rectángulo.** **TEOREMA 14.4.** *En el triángulo rectángulo*

*$ABC$  de ángulo recto  $C$  se tiene*

$$BC = AB \cdot \text{sen } A, \quad AC = AB \cdot \text{cos } A$$

$$\text{y} \quad \text{tg } A = \frac{BC}{AC}.$$

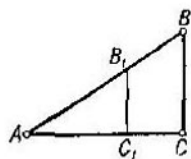


Fig. 113

**DEMOSTRACION** (fig. 113). Tomemos en la semirecta  $AB$  el segmento  $AB_1$  igual a la unidad y tracemos desde el punto  $B_1$  la perpendicular a la recta  $AC$ . Según la definición del seno y del coseno, tendremos  $\text{sen } A = B_1C_1$  y  $\text{cos } A = AC_1$ . Los triángulos  $AB_1C_1$  y  $ABC$  son semejantes, pues tienen el ángulo  $A$  común y los

ángulos  $C$  y  $C_1$  rectos. Esto implica que

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{1}; \quad \frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{1} \quad \text{y} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1}.$$

Introduciendo aquí  $B_1C_1 = \text{sen } A$  y  $AC_1 = \text{cos } A$ , obtenemos

$$BC = AB \cdot \text{sen } A, \quad AC = AB \cdot \text{cos } A \quad \text{y} \quad BC = AC \cdot \text{tg } A.$$

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 14.5.

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{tg } 45^\circ = 1,$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

DEMOSTRACION. Construyamos el triángulo rectángulo  $ABC$  de ángulo recto  $C$  y de ángulo  $A$  igual a  $45^\circ$  (fig. 114).

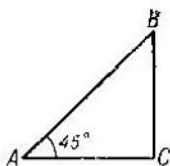


Fig. 114

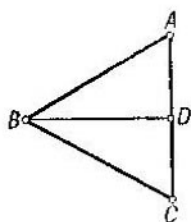


Fig. 115

El ángulo  $B$  de este triángulo también es igual a  $45^\circ$ . Por consiguiente, el triángulo resulta isósceles:  $AC = BC$ . Aplicándole el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2 \cdot BC^2 = 2 \cdot AC^2.$$

De aquí resulta que  $\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y que  $\text{cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Por consiguiente,  $\text{tg } 45^\circ = 1$ . Construyamos ahora el triángulo equilátero  $ABC$  (fig. 115). Todos sus ángulos son iguales. Por lo tanto, cada uno de ellos vale  $60^\circ$ . Tracemos la mediana  $BD$  del triángulo. Es bisectriz y altura. Por esto, en el triángulo  $ABD$  el ángulo  $ADB$  es recto y el ángulo  $ABD$  es igual a  $30^\circ$ . Puesto que  $AD = \frac{AC}{2}$ , tenemos  $\text{sen } 30^\circ =$

$= \frac{1}{2}$ . Aplicando el teorema 14.4, encontramos que  $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$ . Después obtenemos que  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Las fórmulas de reducción permiten determinar los valores del seno, del coseno y de la tangente para los ángulos de  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  y  $150^\circ$  expresándolos en términos del seno, del coseno y de la tangente de los ángulos de  $30^\circ$  y de  $45^\circ$ .

Para los senos, cosenos y tangentes de los ángulos agudos existen tablas especiales. Estas tablas permiten hallar, a partir del ángulo dado, el seno, el coseno y la tangente correspondientes y, recíprocamente, dados el seno, el coseno o la tangente hallar el ángulo correspondiente.

El teorema 14.4 permite hallar con esas tablas todos los elementos del triángulo rectángulo, es decir, sus lados y ángulos, en caso de conocerse dos catetos, la hipotenusa y un cateto, un ángulo agudo y un cateto o un ángulo agudo y la hipotenusa.

**Teorema del coseno.** TEOREMA 14.6. *Cualquiera que sea el triángulo ABC se tiene*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

DEMOSTRACION. Si el ángulo  $C$  es igual a  $90^\circ$ , la afirmación del teorema se desprende del teorema de Pitágoras ya que  $\cos 90^\circ = 0$ .

Sea  $C$  un ángulo agudo (fig. 101). Según el teorema 13.3, tenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Aplicando el teorema 14.4 al triángulo  $ACD$ , encontramos  $CD = AC \cdot \cos C$ . Por esto,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

Sea ahora  $C$  un ángulo obtuso (fig. 100). Según el teorema 13.2, tenemos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD.$$

Aplicando el teorema 14.4 al triángulo  $ADC$ , encontramos  $CD = AC \cdot \cos(\angle ACD)$ . Pero el ángulo  $ACD$  complementa hasta  $180^\circ$  el ángulo  $C$  del triángulo  $ABC$ . Por esto, en virtud del teorema 14.3, tenemos  $\cos(\angle ACD) = -\cos C$  y, por consiguiente,  $AC \cdot \cos C = -CD$ . Es decir, también en el

caso de ángulo obtuso resulta

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C.$$

Queda demostrado el teorema.

**Teorema de los senos.** TEOREMA 14.7. *Cualquiera que sea el triángulo  $ABC$  se tiene*

$$\frac{\text{sen } A}{BC} = \frac{\text{sen } B}{AC} = \frac{\text{sen } C}{AB}.$$

DEMOSTRACION. Consideremos la circunferencia que circunscribe el triángulo  $ABC$ . Sea  $B_1$  el punto de la circunferencia diametralmente opuesto al punto  $B$  de la circunferencia (fig. 116).

Si los puntos  $A$  y  $B_1$  están a un lado de la recta  $BC$  (fig. 116, a la izquierda), los ángulos  $BB_1C$  y  $BAC$  son

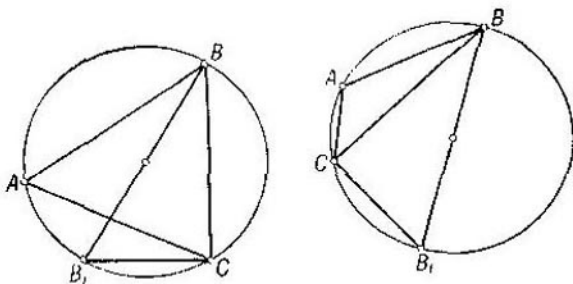


Fig. 116

iguales por ser ángulos inscritos correspondientes a un mismo arco. Si los puntos  $A$  y  $B_1$  se encuentran a distintos lados de la recta  $BC$  (fig. 116, a la derecha), estos ángulos se complementan hasta  $180^\circ$ , pues corresponden a arcos complementarios. En ambos casos se tiene  $\text{sen } B_1 = \text{sen } A$ . Por consiguiente,  $BC = 2R \text{sen } A$ .

Análogamente se demuestra que  $AB = 2R \text{sen } C$  y que  $AC = 2R \text{sen } B$ . Comparando las tres fórmulas obtenidas, deducimos que

$$\frac{\text{sen } A}{BC} = \frac{\text{sen } B}{AC} = \frac{\text{sen } C}{AB} = \frac{1}{2R}.$$

Queda demostrado el teorema.

El teorema del coseno y el teorema de los senos permiten determinar todos los elementos del triángulo —o sea, sus

ángulos y sus lados— si se conocen tres elementos que determinan unívocamente el triángulo. Estos elementos pueden ser: tres lados del triángulo; dos lados y el ángulo comprendido entre los mismos; un lado y dos ángulos.

#### Preguntas de repaso y ejercicios

1. Dese la definición de las funciones trigonométricas  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

2. Demuéstrese el teorema:  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ .

3. Demuéstrese las fórmulas de reducción:  $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cos} \alpha$ ,  $\operatorname{cos}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ ,  $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha$ .

4. Demuéstrese que en el triángulo rectángulo  $ABC$  de ángulo recto  $C$  se tiene

$$BC = AB \cdot \operatorname{sen} A, \quad AC = AB \cdot \operatorname{cos} A \quad \text{y} \quad BC = AC \cdot \operatorname{tg} A.$$

5. Demuéstrese que

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1,$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

6. Hállense las funciones trigonométricas para los ángulos de  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$  y  $150^\circ$ .

7. Enúnciese y demuéstrese el teorema del coseno.

8. Enúnciese y demuéstrese el teorema de los senos.

9. ¿Cuáles son los tres elementos del triángulo que lo determinan unívocamente?

10. Hállese el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, si uno de sus lados es igual a 1 cm y el ángulo opuesto a este lado es de  $30^\circ$ .

#### § 15. POLÍGONOS

**Polígonos convexos.** Un polígono  $A_1A_2\dots A_n$  es una figura formada por los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  y por los segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  que los unen (fig. 117). Los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se llaman *vértices* del polígono y los segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  se denominan *lados* del mismo. Dos vértices se llaman *contiguos* si quedan unidos por un lado del polígono. Para todo vértice existen dos vértices contiguos.



Cada una de las rectas  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ , . . . ,  $A_nA_1$  divide el plano en dos semiplanos. El polígono  $A_1A_2 \dots A_n$  se denomina *convexo* si está situado en un semiplano respecto

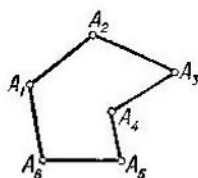


Fig. 117

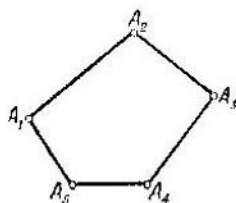


Fig. 118

a cada una de estas rectas con la particularidad de que toda recta  $A_pA_{p+1}$  no tiene más puntos comunes con el polígono que los puntos del segmento  $A_pA_{p+1}$  (fig. 118).

TEOREMA 15.1. Si los extremos de la quebrada  $B_1B_2 \dots B_n$  se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta  $b$ , la quebrada corta la recta  $b$ .

DEMOSTRACION. Desplazándonos a lo largo de la quebrada desde el vértice  $B_1$  hacia  $B_n$ , encontraremos dos vértices contiguos que se encuentran en distintos semiplanos respecto a la recta  $b$ . El lado de la quebrada que une estos vértices corta la recta  $b$ . Por consiguiente, la quebrada corta la recta  $b$ . Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 15.2. Si una recta tiene tres puntos comunes con un polígono convexo, contiene uno de sus lados.

DEMOSTRACION. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres puntos de una recta  $a$  que pertenecen a un polígono. Supongamos, para concretar, que el punto  $B$  se halla entre  $A$  y  $C$ . El punto  $B$  pertenece a uno de los lados del polígono. Afirmamos que este lado pertenece a la recta  $a$ . Efectivamente, en el caso contrario la recta que contiene este lado separaría los puntos  $A$  y  $C$ . Pero esto contradice la hipótesis de que el polígono es convexo. Queda demostrado el teorema.

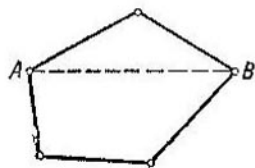


Fig. 119

**Suma de los ángulos del polígono convexo.** Se llama *diagonal* del polígono todo segmento que une dos vértices no contiguos. En la fig. 119 la línea punteada representa una diagonal.

TEOREMA 15.3. *La diagonal  $A_1A_p$  divide el polígono convexo  $A_1A_2 \dots A_n$  en dos polígonos convexos  $A_1A_2 \dots A_p$  y  $A_pA_{p+1} \dots A_nA_1$ . Estos polígonos están en diferentes semiplanos respecto a la recta  $A_1A_p$ . La semirrecta  $A_1A_p$  pasa entre las semirrectas  $A_1A_2$  y  $A_1A_n$ .*

DEMOSTRACION. Según el teorema 15.2, la recta  $A_1A_p$  no tiene más puntos comunes con el polígono que los puntos  $A_1$  y  $A_p$ . En virtud del teorema 15.1, la quebrada  $A_1A_2 \dots A_p$  está a un lado de la recta  $A_1A_p$ . Puesto que el polígono inicial se encuentra a un lado de cada una de las rectas  $A_1A_2, A_2A_3, \dots$ , el polígono  $A_1A_2 \dots A_p$  posee la misma propiedad. Por consiguiente, el polígono  $A_1A_2 \dots A_p$  es convexo. Análogamente se demuestra que es convexo el polígono  $A_pA_{p+1} \dots A_nA_1$ .

Demostremos las demás afirmaciones del teorema. La semirrecta  $A_1A_p$  se encuentra en el mismo semiplano respecto a la recta  $A_1A_n$  que la semirrecta  $A_1A_2$  y en el mismo semiplano respecto a la recta  $A_1A_2$  que la semirrecta  $A_1A_n$ . Esto significa que la semirrecta  $A_1A_p$  pasa entre las semirrectas  $A_1A_2$  y  $A_1A_n$ . Es decir, la semirrecta  $A_1A_p$  las separa.

Por consiguiente, los puntos  $A_2$  y  $A_n$  se hallan en diferentes semiplanos respecto a la recta  $A_1A_p$ . Pero esto significa que los polígonos  $A_1A_2 \dots A_p$  y  $A_pA_{p+1} \dots A_nA_1$  están en diferentes semiplanos respecto a la recta  $A_1A_p$ . Queda demostrado el teorema.

Sea  $A$  un vértice del polígono convexo y sean  $B$  y  $C$  sus vértices contiguos. Se llama *ángulo interno* de vértice  $A$  del polígono el ángulo comprendido entre las semirrectas  $AB$  y  $AC$ . El ángulo adyacente al ángulo interno se denomina *ángulo externo* del polígono.

TEOREMA 15.4. *La suma de los ángulos internos del polígono convexo es igual a  $(n - 2) 180^\circ$ , donde  $n$  es el número de lados o de vértices del polígono.*

*La suma de los ángulos externos del polígono convexo no depende de  $n$  y es igual a  $360^\circ$ .*

DEMOSTRACION. Todo triángulo es convexo y entra en el teorema ya que  $(3 - 2) 180^\circ = 180^\circ$ . Apliquemos para la demostración del teorema el método de inducción matemática. Supongamos que el teorema es válido para todos los polígonos con un número de lados menor que  $n$ . Demostremos que es cierto para todo polígono de  $n$  lados.

Sea  $Q$  un polígono de  $n$  lados. Unamos sus dos vértices no contiguos  $A$  y  $B$  mediante la diagonal  $AB$ . En virtud del teorema 15.3, obtendremos dos polígonos  $Q_1$  y  $Q_2$  de  $n_1$  y de  $n_2$  lados, respectivamente, siendo  $n_1 < n$ ,  $n_2 < n$  y  $n_1 + n_2 = n + 2$ . Puesto que la diagonal  $AB$  pasa entre los lados contiguos de vértice común  $A$ , el ángulo interno de vértice  $A$  en el polígono  $Q$  resulta igual a la suma de los ángulos internos de vértice  $A$  en los polígonos  $Q_1$  y  $Q_2$ . Análogamente, el ángulo de vértice  $B$  en el polígono  $Q$  es igual a la suma de los ángulos de vértice  $B$  en los polígonos  $Q_1$  y  $Q_2$ . De aquí resulta que la suma de los ángulos del polígono  $Q$  es igual a  $(n_1 - 2) 180^\circ + (n_2 - 2) 180^\circ = (n - 2) 180^\circ$ . Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Puesto que todo ángulo externo del polígono es adyacente al ángulo interno correspondiente y puesto que la suma de los ángulos adyacentes es igual a  $180^\circ$ , resulta que la suma de los ángulos externos del polígono es igual a  $180^\circ n - (n - 2) 180^\circ$ , es decir, es igual a  $360^\circ$ . Queda demostrado el teorema.

**Polígono complementado. Quebrada convexa.** Sea  $A_1A_2 \dots A_n$  un polígono convexo. Cada una de las rectas  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  divide el plano en dos semiplanos. Marquemos aquellos semiplanos que contienen el polígono. Diremos que el punto  $X$  se halla *en el interior* del polígono si pertenece a todos los semiplanos marcados y no pertenece al polígono.

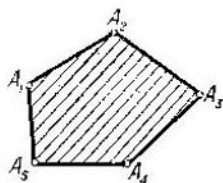


Fig. 120

Frecuentemente, se denomina polígono la figura formada, además de los lados y los vértices, también por los puntos del plano que se hallan en el interior del polígono. El polígono comprendido en este sentido será llamado *polígono complementado*. El propio polígono constituye la frontera del polígono complementado. En la fig. 120 se ha sombreado el polígono complementado.

Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos polígonos convexos y sean  $P'_1$  y  $P'_2$  los polígonos complementados correspondientes. Diremos que el polígono  $P_1$  se encuentra *en el interior* del polígono  $P_2$  si todo punto del polígono complementado  $P'_1$  pertenece al polígono complementado  $P'_2$ . Se llama *perímetro* del polígono la suma de las longitudes de sus lados.

**TEOREMA 15.5.** Si un polígono convexo  $P_1$  pertenece al interior de un polígono convexo  $P_2$ , el perímetro de  $P_1$  no es mayor que el perímetro de  $P_2$ . Si el polígono  $P_1$  no coincide con  $P_2$ , su perímetro es menor que el perímetro de  $P_2$ .

**DEMOSTRACION.** Tracemos una recta  $a$  que contenga uno de los lados del polígono  $P_1$  (fig. 121). El polígono  $P_1$  está a un lado de esta recta. El polígono  $P_2$  está a un lado de la recta  $a$  o existen puntos del polígono  $P_2$  que se hallan a distintos lados de la recta  $a$ . En el segundo caso la recta  $a$  corta el polígono  $P_2$  en dos puntos  $A$  y  $B$ . Efectivamente, sean  $C$  y  $D$  dos puntos del polígono  $P_2$  que se encuentran a distintos lados de la recta  $a$ . Los puntos  $C$  y  $D$  dividen el polígono  $P_2$  en dos quebradas. En virtud del teorema 15.1, cada una de éstas corta la recta  $a$ .

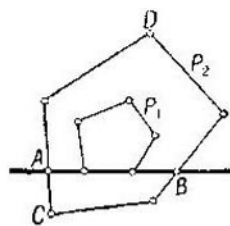


Fig. 121

La recta  $a$  divide el polígono  $P_2$  en dos polígonos. Sea  $Q_2$  aquel que está respecto a la recta  $a$  en el mismo semiplano que el polígono  $P_1$ . El polígono  $Q_2$  contiene en su interior el polígono  $P_1$  y su perímetro es menor que el perímetro del polígono  $P_2$ . Efectivamente, para pasar del polígono  $P_2$  al polígono  $Q_2$  debemos sustituir la quebrada por el segmento  $AB$  que une sus extremos.

Realizando semejante construcción con cada uno de los lados del polígono  $P_1$ , obtenemos finalmente del polígono  $P_2$  el polígono  $P_1$ . De aquí resulta que si el polígono  $P_1$  no coincide con  $P_2$ , su perímetro es menor que el perímetro de  $P_2$ .

Queda demostrado el teorema.

La quebrada  $\gamma: A_1A_2 \dots A_n$  se llama *convexa* si es convexo el polígono  $P: A_1A_2 \dots A_n$ . Una quebrada  $\gamma': A_1A'_2A'_3 \dots A_n$  se llama *abarcante* de la quebrada convexa  $\gamma$  si ambas quebradas están situadas en un mismo semiplano respecto a la recta  $A_1A_n$  y la quebrada  $\gamma'$  no contiene puntos interiores del polígono  $P$  (fig. 122).

**TEOREMA 15.6.** La longitud de toda quebrada  $\gamma'$  que abarca la quebrada convexa  $\gamma$  no es menor que la longitud de  $\gamma$ . Si las quebradas no coinciden,  $\gamma'$  es de mayor longitud.

**DEMOSTRACION** (fig. 123). Tracemos la recta  $a$  por uno de los lados de la quebrada  $\gamma$ . Desplazándonos a lo largo de la quebrada  $\gamma'$  de su punto inicial  $A$  a su punto final  $B$ ,

marquemos los puntos primero y último de la quebrada  $\gamma'$  pertenecientes a la recta  $a$ . Sean éstos los puntos  $C$  y  $D$ . Sustituymos la parte  $CD$  de la quebrada  $\gamma'$  por el segmento rectilíneo  $CD$ . La quebrada así obtenida también abarca la quebrada  $\gamma$  y su longitud no es mayor que la de  $\gamma'$ ; además, su longitud es desde luego menor si la quebrada  $\gamma'$  posee puntos situados a diferentes lados de la recta  $a$ . Realizando esta operación tantas veces como lados posee la quebrada  $\gamma$ , obtendremos finalmente la quebrada  $\gamma$ . De aquí resulta

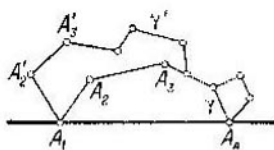


Fig. 122

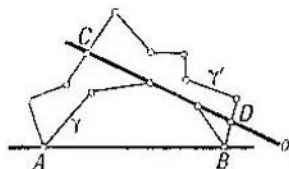


Fig. 123

que la longitud de la quebrada  $\gamma'$  no es menor que la de  $\gamma$ . Si la quebrada  $\gamma'$  no coincide con  $\gamma$ , su longitud será mayor.

Queda demostrado el teorema.

**Polígonos regulares.** El polígono convexo se denomina *regular* si sus lados son iguales y sus ángulos son iguales. Puesto que la suma de los ángulos externos de todo polígono convexo es igual a  $360^\circ$  y puesto que la suma de sus ángulos internos es igual a  $(n - 2) 180^\circ$ , resulta que los ángulos externos del polígono regular de  $n$  lados son iguales a  $\frac{360^\circ}{n}$  y sus ángulos internos son iguales a  $\frac{(n - 2) 180^\circ}{n}$ .

*Son iguales los polígonos regulares de  $n$  lados cuyos lados son iguales.* O sea, los polígonos coinciden por efecto de un movimiento.

Sean  $P_1: A_1A_2 \dots A_n$  y  $P_2: B_1B_2 \dots B_n$  dos polígonos regulares de  $n$  lados. Hagamos coincidir, por efecto de un movimiento, los segmentos  $B_1B_2$  y  $A_1A_2$  de modo que el polígono  $P_2$  quede al mismo lado de la recta  $A_1A_2$  que el polígono  $P_1$ . Este movimiento puede ser realizado, por ejemplo, de la manera siguiente.

Primero hacemos coincidir el punto  $B_1$  con el punto  $A_1$  mediante una reflexión especular respecto a la perpendicular trazada por el punto medio del segmento  $A_1B_1$ . El punto  $B_2$  se transforma entonces en un punto  $B'_2$ . Ahora hacemos coin-

cidir el punto  $B'_2$  con  $A_2$  valiéndonos de una reflexión especular respecto a la perpendicular trazada por el punto medio del segmento  $A_2B'_2$ . Si resulta que los polígonos  $P_2$  y  $P_1$  están en diferentes semiplanos respecto a la recta  $A_1A_2$ , aplicamos, además, una reflexión especular respecto a esta recta.

Afirmamos que después de hacer coincidir de esta forma los lados  $B_1B_2$  y  $A_1A_2$  los polígonos  $P_1$  y  $P_2$  quedan superpuestos. Efectivamente, como quiera que los ángulos  $A_1A_2A_3$  y  $B_1B_2B_3$  son iguales, las semirrectas  $A_2A_3$  y  $B_2B_3$  coinciden. Puesto que los segmentos  $A_2A_3$  y  $B_2B_3$  son iguales, coinciden los puntos  $B_3$  y  $A_3$ . Ambos polígonos están en un mismo semiplano respecto a la recta  $A_2A_3$ ; a saber, en el semiplano al que pertenece el vértice común  $A_1$  de ambos. A continuación, deducimos de la misma forma que coinciden los vértices  $B_4$  y  $A_4$ , los vértices  $B_5$  y  $A_5$ , etc., o sea, que los polígonos  $P_1$  y  $P_2$  quedan superpuestos.

**TEOREMA 15.7.** *Las perpendiculares trazadas por los puntos medios de los lados del polígono regular y las bisectrices de los ángulos internos del polígono regular son ejes de simetría del mismo (fig. 124).*

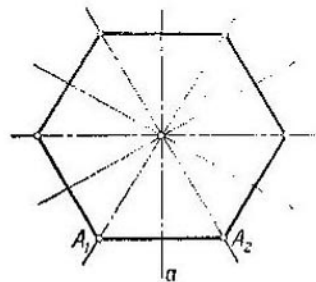


Fig. 124

**DEMOSTRACION.** Sea  $a$  la perpendicular trazada por el punto medio del lado  $A_1A_2$  del polígono regular  $P: A_1A_2 \dots A_n$ . La simetría respecto a la recta  $a$  transforma el polígono  $P$  en el polígono  $P': A_2A_1A'_3A'_4 \dots A'_n$ . Ambos polígonos  $P$  y  $P'$  se encuentran a un lado de la recta  $A_1A_2$ . Repitiendo el razonamiento anterior, veremos que  $A'_3$  coincide con  $A_3$ ,

que  $A'_4$  coincide con  $A_4$ , etc. Pero esto significa que la simetría respecto a la recta  $a$  transforma el polígono  $P$  en sí mismo, o sea, que la recta  $a$  es eje de simetría. En el caso de las bisectrices de los ángulos la demostración es análoga.

Queda demostrado el teorema.

**Polígonos inscritos y circunscritos.** El polígono convexo se llama *inscrito* en una circunferencia si sus vértices se hallan en ella. El polígono convexo se denomina *circunscrito* a una circunferencia si sus lados son tangentes a ella.

**TEOREMA 15.8.** *Todo polígono regular está inscrito en una circunferencia y circunscrito a una circunferencia.*

**DEMOSTRACION.** Sea  $A_1A_2 \dots A_n$  un polígono regular. Tracemos la circunferencia  $k$  que pasa por los puntos  $A_1, A_2$  y  $A_3$  (fig. 125). Su centro  $O$  está en la perpendicular  $a$  trazada por el punto medio del segmento  $A_2A_3$ . La recta  $a$  es eje de simetría del polígono y eje de simetría de la circunferencia  $k$ . Por consiguiente, el vértice  $A_4$ , simétrico del vértice  $A_1$  respecto a la recta  $a$ , pertenece a la circunferencia  $k$ . Tomando ahora los puntos  $A_2, A_3$  y  $A_4$ , demostraremos de la misma forma que  $A_5$  se encuentra en la circunferencia que pasa por estos puntos, o sea, en la circunferencia  $k$ . Y así sucesivamente. Como resultado obtenemos que todos los puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se hallan en la circunferencia  $k$ , es decir, que dicha circunferencia es la circunscrita al polígono.

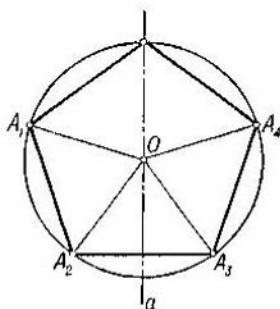


Fig. 125

Todos los triángulos isósceles  $A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, \dots$  son iguales, pues sus bases  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$  son iguales y sus laterales coinciden en tanto que radios. Por consiguiente, son iguales las alturas de estos triángulos trazadas desde el vértice  $O$ . La circunferencia de centro  $O$  y de radio igual a estas alturas es tangente a todos los lados del polígono, o sea, es la circunferencia inscrita. Queda demostrado el teorema.

**Polígonos semejantes.** De acuerdo con la definición general de la semejanza de las figuras, dos polígonos son *semejantes* si uno puede ser aplicado en el otro mediante una transformación de semejanza.

**TEOREMA 15.9.** *Son semejantes los polígonos regulares de un mismo número de lados.*

**DEMOSTRACION.** Sean  $P: A_1A_2 \dots A_n$  y  $Q: B_1B_2 \dots B_n$  dos polígonos regulares. Indiquemos la razón de sus lados por  $k = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$ . Sometamos el polígono  $Q$  a una transformación de homotecia respecto al centro de la circunferencia circunscrita siendo  $k$  el coeficiente de homotecia. Obtendremos entonces el polígono regular  $Q': B'_1B'_2 \dots B'_n$  con

los mismos lados que el polígono  $P$ . El polígono  $Q'$  es igual al polígono  $P$ , es decir, se superpone con este por efecto de un movimiento. Una homotecia y un movimiento realizados sucesivamente dan una transformación de semejanza. Por

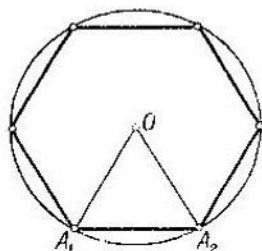


Fig. 126

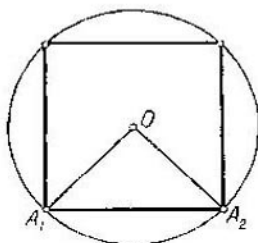


Fig. 127

consiguiente, el polígono  $Q$  se aplica en  $P$  mediante una transformación de semejanza. Esto significa que los polígonos  $P$  y  $Q$  son semejantes. Queda demostrado el teorema.

Determinemos los lados de algunos polígonos regulares en dependencia del radio  $R$  de la circunferencia circunscrita.

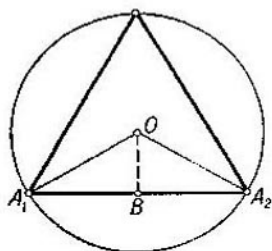


Fig. 128

Comencemos por el hexágono (fig. 126). Sus ángulos internos son de  $120^\circ$ . Por esto, en el triángulo  $A_1OA_2$  los ángulos de vértice  $A_1$  y  $A_2$  son iguales a  $60^\circ$ , o sea, el triángulo es equilátero. De aquí deducimos que el lado del hexágono regular es igual al radio  $R$  de la circunferencia circunscrita.

En el caso del cuadrilátero regular los ángulos internos son de  $90^\circ$ , o sea, el cuadrilátero es un cuadrado (fig. 127). En el triángulo

$A_1OA_2$  los ángulos  $A_1$  y  $A_2$  son de  $45^\circ$  y el ángulo  $O$  es recto. Por eso,

$$A_1A_2 = \frac{OA_1}{\cos 45^\circ} = R\sqrt{2}.$$

En el caso del triángulo regular, los ángulos  $A_1$  y  $A_2$  del triángulo  $A_1OA_2$  son de  $30^\circ$  (fig. 128). Tracemos desde  $O$  la perpendicular al lado  $A_1A_2$ . Tendremos

$$A_1A_2 = 2 \cdot A_1B = 2 \cdot OA_1 \cdot \cos 30^\circ = R\sqrt{3}.$$



## Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es polígono? ¿Qué polígono se llama convexo?
2. Demuéstrase que si los extremos de la quebrada  $B_1B_2 \dots B_n$  están en distintos semiplanos respecto a la recta  $b$ , la quebrada corta esta recta.
3. Demuéstrase que si una recta tiene tres puntos comunes con un polígono convexo, contiene uno de sus lados.
4. Demuéstrase que toda diagonal de un polígono convexo lo divide en dos polígonos convexos situados a distintos lados de esta diagonal.
5. Demuéstrase que la suma de los ángulos internos del polígono convexo de  $n$  lados es igual a  $(n - 2) 180^\circ$  y que la suma de sus ángulos externos es igual a  $360^\circ$ .
6. ¿Qué es polígono complementado?
7. Enúnciese y demuéstrase el teorema de la relación entre los perímetros de dos polígonos convexos si uno está contenido en el otro.
8. ¿Puede colocarse el triángulo regular de lado de 4 cm en el interior del cuadrado de lado de 3 cm?
9. Enúnciese y demuéstrase el teorema de la relación entre las longitudes de una quebrada convexa y de una quebrada que la abarca.
10. Demuéstrase que los polígonos regulares de  $n$  lados son iguales si sus lados son iguales.
11. ¿Cuáles son los ejes de simetría del polígono regular? Enúnciese y demuéstrase el teorema correspondiente.
12. Demuéstrase que todo polígono regular está inscrito en una circunferencia y circunscrito a una circunferencia.
13. Demuéstrase que los polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.
14. Demuéstrase que los perímetros de los polígonos regulares de igual número de lados son uno al otro como los radios de las circunferencias inscritas o como los radios de las circunferencias circunscritas.
15. ¿Cuánto miden los lados del hexágono, el cuadrilátero y el triángulo regulares si el radio de la circunferencia circunscrita es  $R$ ?
16. Establezcase la relación entre el radio de la circunferencia y los lados de los polígonos regulares de igual número de lados inscrito y circunscrito a la misma.
17. Exprésese el lado del octágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita.
18. Exprésese el lado del decágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita. (Sugerencia. Véase el ejercicio 17 del § 13.)
19. Exprésese el lado del pentágono regular a través del radio de la circunferencia circunscrita.

## § 16. AREAS DE FIGURAS

**Concepto del área.** El problema de la determinación del área de las figuras se remonta a la antigüedad. Surgió en relación con la actividad práctica del hombre.

Imaginemos dos parcelas de terreno: una cuadrada y otra de forma arbitraria (fig. 129). Supongamos que ambas han

sido sembradas de trigo empleándose para la primera  $m$  kg de grano y  $n$  kg para la segunda. Lo natural es considerar que la segunda parcela es  $\frac{n}{m}$  veces mayor que la primera. Llamaremos área de la segunda parcela el número que indica cuántas veces es mayor que la primera. La primera parcela es la unidad de medición. De esta definición del área se obtienen las siguientes propiedades de la misma.

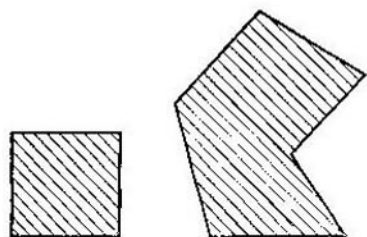


Fig. 129)

Primero, puesto que para sembrar toda parcela se necesita una cantidad determinada de grano, resulta que *toda parcela posee un área determinada.*

Segundo, para sembrar dos parcelas iguales se necesita la misma cantidad de grano y, por eso, *las parcelas iguales tienen igual área.*

Tercero, si dividimos la parcela en dos partes, la cantidad de grano necesaria para sembrar toda la parcela constará de las cantidades de grano necesarias para sembrar cada una de sus partes. Por ello, *el área de toda la parcela es igual a la suma de las áreas de sus partes.*

Ateniéndonos a esta definición, para hallar el área de una parcela es necesario realizar la siembra. Pero, en la práctica el problema debe ser resuelto precisamente en sentido inverso. Se exige conocer la cantidad de trigo necesaria para la siembra antes de realizar ésta. Si conociésemos el área de la parcela, podríamos determinar esta cantidad de trigo multiplicando el área por la cantidad de trigo necesaria para la siembra de una unidad de área. ¿Cómo determinar, pues, el área de la parcela?

Ahora demostraremos que *las tres propiedades señaladas del área la determinan completamente* y encontraremos las fórmulas que permiten calcular el área de las figuras simples.

Una figura se llama *simple* si puede ser dividida en triángulos. En particular, son figuras simples, por ejemplo, el paralelogramo, el trapecio y el polígono regular.

**Área del rectángulo.** Determinemos primero el área del rectángulo. En la fig. 130 representamos un cuadrado como

unidad de medición y un rectángulo cuya área debe ser medida.

Dividamos los lados del cuadrado en  $N$  partes iguales y tracemos por los puntos de división rectas paralelas a sus lados. El cuadrado quedará dividido en  $N^2$  cuadrados pequeños. En la figura, el lado del cuadrado ha sido dividido en 5 partes. El número de los cuadrados pequeños es de  $5 \times 5 = 25$ .

Determinemos el área del cuadrado pequeño. Por la propiedad del área, el cuadrado grande tiene un área igual a la

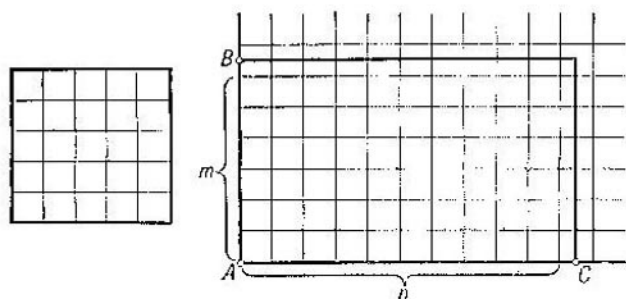


Fig. 130

suma de las áreas de los cuadrados pequeños. Puesto que el área del cuadrado grande es igual a la unidad y que el número de cuadrados pequeños es igual a  $N^2$ , el área del cuadrado pequeño es igual a  $\frac{1}{N^2}$ . Indiquemos por  $q$  el lado del cuadrado pequeño. Entonces,  $q = \frac{1}{N}$  y, por consiguiente, el área del cuadrado pequeño es  $\frac{1}{N^2} = q^2$ .

Construyamos en las semirrectas  $AB$  y  $AC$  segmentos iguales a  $q, 2q, 3q, \dots$  y tracemos por sus extremos rectas paralelas a los lados del rectángulo. Obtendremos una red de cuadrados de lado  $q$  que cubren el rectángulo. Determinemos el número de cuadrados contenidos en el rectángulo y el número de cuadrados que contienen el rectángulo.

Sean  $a$  y  $b$  los lados del rectángulo. Indiquemos mediante  $m$  el entero de la división de  $a$  por  $q$  y mediante  $n$  el entero de la división de  $b$  por  $q$ . Entonces, el número de cuadrados contenidos en el rectángulo será  $mn$ , mientras que el número

de cuadrados que contienen el rectángulo no será mayor que  $(m + 1)(n + 1)$ . De aquí resulta que el área  $S$  del rectángulo está comprendida entre  $mnq^2$  y  $(m + 1)(n + 1)q^2$ , o sea, que

$$mnq^2 \leq S < (m + 1)(n + 1)q^2.$$

Demostremos ahora que el producto  $ab$  está comprendido entre estos mismos números. Efectivamente, se tiene  $mq \leq a < (m + 1)q$  y  $nq \leq b < (n + 1)q$ . Por eso

$$mnq^2 \leq ab < (m + 1)(n + 1)q^2.$$

Puesto que ambos números,  $S$  y  $ab$ , están comprendidos entre los números  $mnq^2$  y  $(m + 1)(n + 1)q^2$ , difieren a lo sumo en  $(m + 1)(n + 1)q^2 - mnq^2$ , o sea, difieren a lo sumo en  $mq^2 + nq^2 + q^2$ . Como  $mq \leq a$  y  $nq \leq b$ , de aquí se deduce que  $S$  y  $ab$  difieren no más que en  $aq + bq + q^2$ . Tomando el número  $N$  suficientemente grande, el número  $aq + bq + q^2$ , igual a  $\frac{a}{N} + \frac{b}{N} + \frac{1}{N^2}$ , será tan pequeño como se quiera. Resulta que la diferencia entre los números  $S$  y  $ab$  es todo lo pequeña que se quiera. Pero esto puede darse sólo si son iguales.

Por consiguiente, el área del rectángulo de lados  $a$  y  $b$  es

$$S = ab.$$

Aquí  $a$  y  $b$  se miden con el lado del cuadrado que se ha tomado como unidad de medición del área.

**Áreas de las figuras elementales.** Determinemos el área del paralelogramo. Sea  $ABCD$  un paralelogramo (fig. 131).

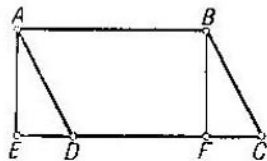


Fig. 131

Si no es un rectángulo, uno de sus ángulos  $A$  o  $B$  es agudo. Supongamos, para puntualizar, que es agudo el ángulo  $A$  como representa la figura. Tracemos desde el vértice  $A$  la perpendicular  $AE$  y la recta  $CD$ . El área del trapecio  $ABCE$  es igual a la suma de las áreas del paralelogramo  $ABCD$  y del triángulo  $ADE$ .

Tracemos desde el vértice  $B$  la perpendicular  $BF$  a la recta  $CD$ . El área del trapecio  $ABCE$  es entonces igual a la suma de las áreas del rectángulo  $ABFE$  y del triángulo  $BCF$ . Los triángulos rectángulos  $ADE$  y  $BCF$  son iguales y, por consiguiente, tienen áreas iguales. De aquí resulta

que el área del paralelogramo  $ABCD$  es igual a la del rectángulo  $ABFE$ , o sea, es igual a  $AB \cdot BF$ . El segmento  $BF$  se denomina *altura* del paralelogramo correspondiente a los lados  $AB$  y  $CD$ .

Por consiguiente, *el área del paralelogramo es igual al producto de su lado por la altura correspondiente.*

Determinemos el área del triángulo. Sea  $ABC$  un triángulo (fig. 132). Complementemos este triángulo hasta obtener el paralelogramo  $ABCD$  como se indica en la figura. El área del paralelogramo es igual a la suma de las áreas

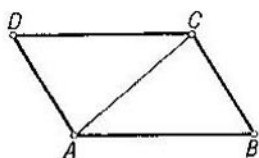


Fig. 132

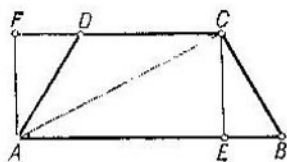


Fig. 133

de los triángulos  $ABC$  y  $CDA$ . Puesto que estos triángulos resultan iguales, el área del paralelogramo será igual al duplo del área del triángulo  $ABC$ . La altura del paralelogramo correspondiente a su lado  $AB$  es igual a la altura del triángulo  $ABC$  relativa al lado  $AB$ .

De aquí se desprende que *el área del triángulo es igual a la mitad del producto de su lado por la altura relativa.*

Determinemos el área del trapecio. Sea  $ABCD$  un trapecio (fig. 133). La diagonal  $AC$  del trapecio lo divide en dos triángulos  $ABC$  y  $CDA$ . Por lo tanto, el área del trapecio es igual a la suma de las áreas de estos triángulos. El área del triángulo  $ABC$  es igual a  $\frac{1}{2} AB \cdot CE$  y el área del triángulo  $ACD$  es igual a  $\frac{1}{2} DC \cdot AF$ . Las alturas  $CE$  y  $AF$  de estos triángulos son iguales a la distancia entre las rectas paralelas  $AB$  y  $CD$ . Esta distancia se denomina *altura* del trapecio.

Por consiguiente, *el área del trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura.*

**Independencia entre el área de una figura simple y el modo de dividirla en triángulos.** El área de una figura simple se determina sumando las áreas de los triángulos que la componen. Pero existen diversos modos de dividir una figura

simple en triángulos. Por ello, surge la siguiente pregunta: ¿depende el área de la figura del modo de dividirla en triángulos? Demostremos que *el área de toda figura simple no depende del modo de dividirla en triángulos*.

Demostremos, ante todo, que el área del triángulo no depende del lado ni de la altura correspondiente tomados para calcular el área. Sea  $ABC$  un triángulo (fig. 134). Tracemos sus alturas  $CC_1$  y  $BB_1$ . Los triángulos rectángulos  $AC_1C$  y  $AB_1B$  son semejantes, pues tienen el ángulo  $A$  común. De aquí se deduce que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} \text{ y } AC \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1.$$

Por consiguiente, al calcular el área del triángulo  $ABC$  se obtiene el mismo resultado tanto tomando el lado  $AC$  y la altura  $BB_1$  como tomando el lado  $AB$  y la altura  $CC_1$ .

Demostremos ahora que, al dividir un triángulo en triángulos menores, su área es igual a la suma de las áreas de los triángulos resultantes cualquiera que sea el modo de dividirlo. Consideremos primero el modo de división representado en la fig. 135. El triángulo  $ABC$  ha sido dividido en triángulos  $CAD_1$ ,  $CD_1D_2$ ,  $CD_2D_3$ , ... Todos estos

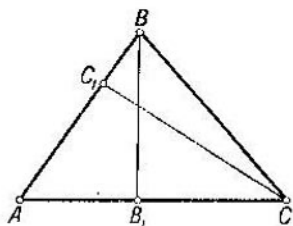


Fig. 134

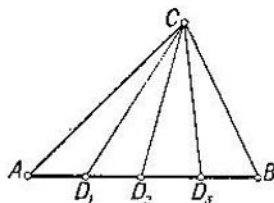


Fig. 135

triángulos tienen la misma altura  $h$  trazada desde el vértice común  $C$ . Es al mismo tiempo la altura del triángulo  $ABC$ .

La suma de las áreas de los triángulos, producto de la división, es

$$\frac{AD_1 \cdot h}{2} + \frac{D_1D_2 \cdot h}{2} + \frac{D_2D_3 \cdot h}{2} + \dots = \frac{(AD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \dots) \cdot h}{2}.$$

Puesto que  $AD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \dots = AB$ , la suma de las áreas de los triángulos de nuestra partición es igual a  $\frac{AB \cdot h}{2}$ , o sea, es igual al área del triángulo  $ABC$ .

Consideremos ahora una partición cualquiera del triángulo  $ABC$  en triángulos pequeños. Supongamos que dos cualesquiera triángulos de esta partición no tienen puntos comunes, tienen un vértice común o tienen un lado común. Semejante partición está representada en la fig. 136.

En la fig. 137 se muestra un triángulo  $PQR$  de esta partición. El área del triángulo  $PQR$  se puede representar como la suma algebraica de las áreas de tres triángulos  $APQ$ ,  $AQR$  y  $ARP$ . Estos triángulos se obtienen del triángulo  $PQR$  tomando el vértice  $A$  en lugar de uno de sus

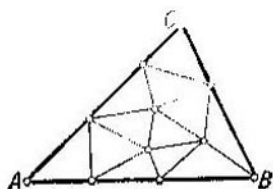


Fig. 136

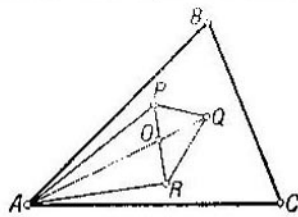


Fig. 137

vértices. El signo del área de los triángulos en esta suma se determina por la regla siguiente. Si el vértice sustituido por el vértice  $A$  está al mismo lado que el vértice  $A$  respecto a la recta que une los otros dos vértices, el área del triángulo lleva el signo «+»; en el caso contrario se toma el signo «-». Si al sustituir el vértice  $A$ , tres puntos aparecen en una recta, el sumando correspondiente se omite, es decir, su área se considera igual a cero.

Analicemos, por ejemplo, la posición del triángulo  $PQR$  representada en la fig. 137. Según lo demostrado,

$$S(PQR) = S(PQO) + S(QRO),$$

$$S(APQ) = S(APO) + S(PQO),$$

$$S(AQR) = S(ARO) + S(QRO),$$

$$S(APR) = S(APO) + S(ARO).$$

De donde vemos que

$$S(PQR) = S(APQ) + S(AQR) - S(APR).$$

Hemos comprobado la validez de nuestra afirmación —respecto a la posibilidad de representar el área del triángulo  $PQR$  como una suma algebraica de las áreas de los triángu-

los  $\triangle APQ$ ,  $\triangle AQR$  y  $\triangle ARP$ — para una posición concreta del triángulo  $PQR$ . Podríamos haber considerado los demás casos y comprobar la certeza de nuestra afirmación.

Representando el área de cada uno de los triángulos de la partición como la suma algebraica de las áreas de triángulos de vértice  $A$ , sumemos las áreas de todos los triángulos de la partición. Obtendremos así la suma de las áreas de triángulos  $AXY$ , donde  $XY$  es un lado de un triángulo de la partición. Si el segmento  $XY$  está en el interior del

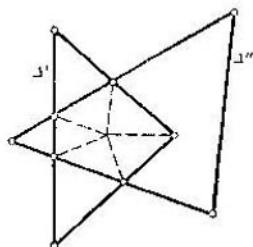


Fig. 138

triángulo  $ABC$ , el área del triángulo  $AXY$  aparecerá en nuestra suma dos veces, pues  $XY$  será un lado de dos triángulos de la partición. Como quiera que estos triángulos se encuentran a distintos lados de la recta  $XY$ , el área del triángulo  $AXY$  aparecerá una vez con el signo «+» y la segunda vez con el signo «-». Por consiguiente, estos sumandos se reducirán.

Si el segmento  $XY$  se halla en el lado  $BC$  del triángulo  $ABC$ , el área del triángulo  $AXY$  aparecerá en nuestra suma sólo una vez y, además, llevando el signo «+». Finalmente, si el lado  $XY$  se halla en  $AB$  o en  $AC$ , el área de  $AXY$  será simplemente igual a cero. En resumen, la suma de las áreas de los triángulos de nuestra partición será igual a la suma de las áreas de aquellos triángulos  $AXY$  cuyos lados  $XY$  se encuentran en el lado  $BC$  del triángulo  $ABC$ . Pero hemos demostrado con anterioridad que esta suma es igual al área del triángulo  $ABC$ . Por consiguiente, el área del triángulo  $ABC$  es igual a la suma de las áreas de los triángulos de cualquier partición.

Supongamos ahora que una figura simple  $F$  ha sido dividida primero en triángulos  $\triangle'_1, \triangle'_2, \triangle'_3, \dots$  y después en triángulos  $\triangle''_1, \triangle''_2, \triangle''_3, \dots$ . Demostremos que las sumas de las áreas de los triángulos de ambas particiones son iguales.

Los triángulos de ambas particiones, considerados conjuntamente, realizan una partición de la figura  $F$  en polígonos convexos; a saber: en triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos. Cada uno de estos polígonos es la parte común de un triángulo de la primera partición y de un triángulo de la segunda partición. En la figura 138 se muestra



un pentágono de este tipo. Dividamos estos polígonos en triángulos  $\Delta_1''', \Delta_2''', \Delta_3''', \dots$  haciendo que dos triángulos cualesquiera de esta partición no tengan puntos comunes, tengan un vértice común o tengan un lado común.

Según hemos demostrado, el área de todo triángulo  $\Delta_h'$  de la primera partición de la figura  $F$  es igual a la suma de las áreas de los triángulos  $\Delta_h''$  que lo componen. Igualmente, el área de todo triángulo  $\Delta_h''$  de la segunda partición es suma de áreas de triángulos  $\Delta_h'''$ . Por esto, la suma de las áreas de los triángulos tanto de la primera como de la segunda partición de la figura  $F$  será igual a la suma de las áreas de los triángulos  $\Delta_h'''$ . Es decir, en ambas particiones la suma de las áreas de los triángulos es la misma, o sea, el área de la figura  $F$  no depende del modo de dividirla en triángulos.

**Áreas de las figuras semejantes.** Sean  $F_1$  y  $F_2$  dos figuras simples semejantes. Veamos cuál es la razón entre las áreas de estas figuras. Puesto que las figuras son semejantes, existe una transformación de semejanza que aplica la figura  $F_1$  en  $F_2$ .

Dividamos la figura  $F_1$  en los triángulos  $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3', \dots$ . La transformación de semejanza que aplica  $F_1$  en  $F_2$  transforma estos triángulos en los triángulos  $\Delta_1'', \Delta_2'', \Delta_3'', \dots$  que constituyen una partición de la figura  $F_2$ . El área de la figura  $F_1$  es igual a la suma de las áreas de los triángulos  $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3', \dots$  y el área de la figura  $F_2$  es igual a la suma de las áreas de los triángulos  $\Delta_1'', \Delta_2'', \Delta_3'', \dots$ .

Si el coeficiente de semejanza es  $k$ , las dimensiones del triángulo  $\Delta_n''$  son  $k$  veces mayores que las dimensiones correspondientes del triángulo  $\Delta_n'$ . En particular, los lados y las alturas del triángulo  $\Delta_n''$  son  $k$  veces mayores que los lados y las alturas correspondientes del triángulo  $\Delta_n'$ . De aquí resulta que  $S(\Delta_n'') = k^2 S(\Delta_n')$ . Sumando estas igualdades miembro por miembro, obtenemos

$$S(F_2) = k^2 S(F_1).$$

El coeficiente de semejanza  $k$  es igual a la razón de las dimensiones lineales correspondientes de las figuras  $F_2$  y  $F_1$ , o sea,  $k = \frac{l_2}{l_1}$ . Por esto

$$S(F_2) = \frac{l_2^2}{l_1^2} S(F_1) \quad \text{o} \quad \frac{S(F_2)}{S(F_1)} = \frac{l_2^2}{l_1^2}.$$

es decir, la razón de las áreas de las figuras semejantes es igual a la razón de los cuadrados de sus dimensiones lineales correspondientes.

#### Preguntas de repaso y ejercicios

1. Enúnciense las propiedades del área.
2. Demuéstrase que el área del rectángulo es igual a  $ab$ , donde  $a$  y  $b$  son los lados del rectángulo.
3. Demuéstrase que el área del paralelogramo es igual al producto de su lado por la altura correspondiente.
4. Demuéstrase que el área del triángulo es igual a la mitad del producto de su lado por la altura trazada desde el vértice opuesto.
5. Demuéstrase que el área del triángulo  $ABC$  es

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \text{sen } A.$$

6. Demuéstrase que el área del trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura del trapecio.

7. Demuéstrase que el área del polígono convexo circunscrito es igual al producto del semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita.

8. Demuéstrase que para toda partición del triángulo en triángulos pequeños la suma de las áreas de los triángulos de esta partición es igual al área del triángulo.

9. Demuéstrase que el área de una figura simple no depende del modo de dividirla en triángulos al calcular el área.

10. ¿Cuál es la razón de las áreas de figuras semejantes?

#### § 17. LONGITUD

#### DE LA CIRCUNFERENCIA. AREA DEL CÍRCULO

**Longitud de la circunferencia.** Sea  $P$  un polígono convexo inscrito en una circunferencia y sean  $A$  y  $B$  dos vértices consecutivos del mismo (fig. 139). Tomemos un punto  $C$  en el arco  $\widehat{AB}$  de la circunferencia e indiquemos por  $P_1$  el polígono cuyos vértices son los vértices del polígono  $P$  más el punto  $C$ . El paso del polígono  $P$  al polígono  $P_1$  está relacionado con la sustitución del lado  $AB$  por los lados  $AC$  y  $CB$ . Puesto que  $AB < AC + CB$ , el perímetro del polígono  $P_1$  es mayor que el perímetro del polígono  $P$ .

Añadiendo al polígono vértices nuevos, aumentaremos su perímetro. Sin embargo, este aumento no es ilimitado. Es más, si tomamos un polígono circunscrito, los perímetros de todos los polígonos inscritos serán menores que el perímetro de este polígono circunscrito. En particular, el perí-

metro del cuadrado circunscrito a la circunferencia es igual a  $8R$ . Por esto, el perímetro de cualquier polígono inscrito no es mayor que  $8R$ .

Se llama *longitud de la circunferencia* el menor de los números mayores que el perímetro de cualquier polígono inscrito en ella.

Cualquiera que sea el número positivo  $a$ , se puede inscribir en la circunferencia un polígono convexo cuyo perímetro difiere de la longitud de la circunferencia en menos que  $a$ . Efectivamente, supongamos que esta afirmación no es válida. Entonces el perímetro de cualquier polígono inscrito en la circunferencia no es mayor que  $l - a$ . Por consiguiente, el número  $l$  no es el menor de los números mayores que el perímetro de cualquier polígono inscrito. El número  $l - \frac{a}{2}$  es menor que  $l$  y,

a la vez, mayor que el perímetro de cualquier polígono inscrito. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la afirmación.

**TEOREMA 17.1.** *La razón de las longitudes de dos circunferencias es igual a la razón de sus radios o sus diámetros.*

**DEMOSTRACION.** Sean  $R_1$  y  $R_2$  los radios de las circunferencias y sean  $l_1$  y  $l_2$  sus longitudes. El teorema afirma que  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}$ . Supongamos que la afirmación no es válida.

Entonces  $\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2}$  o  $\frac{R_2}{R_1} < \frac{l_2}{l_1}$ . Supongamos, para puntualizar, que  $\frac{R_1}{R_2} < \frac{l_1}{l_2}$ . Indiquemos por  $k$  la razón  $\frac{R_1}{R_2}$ . Entonces  $\frac{l_1}{l_2} > k$  y, por consiguiente,  $l_1 > kl_2$ .

Inscribamos en la primera circunferencia un polígono  $Q_1$  de manera que su perímetro  $p_1$  difiera de la longitud de la circunferencia en menos que  $l_1 - l_2k$ , o sea, que se tenga  $l_1 - p_1 < l_1 - l_2k$ . Entonces  $p_1 > l_2k$ .

Inscribamos en la segunda circunferencia el polígono  $Q_2$  semejante a  $Q_1$ .

Sea  $p_2$  su perímetro. La razón de los perímetros de los polígonos  $Q_1$  y  $Q_2$  es igual a la razón de los radios de las circunferencias, esto es,  $p_1 = kp_2$ . Puesto que  $p_1 > kl_2$

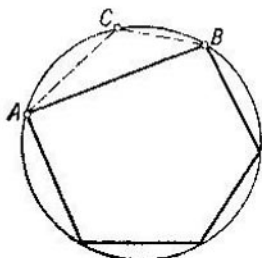


Fig. 139

y que  $p_1 = kp_2$ , resulta que  $p_2 > l_2$ . Pero esto contradice la definición del número  $l_2$  que debe ser mayor que el perímetro de cualquier polígono inscrito en la segunda circunferencia. Por lo tanto, la razón de las longitudes de las circunferencias es igual a la razón de sus radios o diámetros:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Queda demostrado el teorema.

Del teorema 17.4. se deduce que

$$\frac{l_1}{d_1} = \frac{l_2}{d_2},$$

o sea, que la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro no depende de qué circunferencia se ha tomado.



Fig. 140

Esta razón se designa por la letra griega  $\pi$  (se lee «pi»). El número  $\pi$  es irracional. Su valor aproximado es

$$\pi \approx 3,1416.$$

Por consiguiente, la longitud de la circunferencia se determina según la fórmula

$$l = 2\pi R.$$

**Longitud del arco de circunferencia. Medida radial del ángulo.** Llamaremos *longitud del arco* de circunferencia el menor de los números mayores que la longitud de cualquier quebrada convexa inscrita en este arco. En la fig. 140 se puede ver el arco  $\widehat{AB}$  de circunferencia y una quebrada convexa inscrita en éste. Para abreviar, en lugar de arco de circunferencia a menudo se dice simplemente arco.

Idénticamente al caso de la circunferencia, se demuestra que cualquiera que sea el número positivo  $a$  se puede inscribir en el arco de circunferencia una quebrada convexa cuya longitud difiera de la longitud del arco en menos que  $a$ .

TEOREMA 17.2. La longitud  $l$  del arco de circunferencia se determina según la fórmula

$$l = \frac{\pi R}{180} \alpha,$$

donde  $\alpha$  es la medida en grados del ángulo central correspondiente.

DEMOSTRACION. Demostremos, ante todo, que si el punto  $C$  divide el arco  $\widehat{AB}$  en los arcos  $\widehat{AC}$  y  $\widehat{CB}$ , la longitud del arco  $\widehat{AB}$  es igual a la suma de las longitudes de los arcos  $\widehat{AC}$  y  $\widehat{CB}$ .

Tomemos un número pequeño positivo  $a$ . Inscribamos en los arcos  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{AC}$  y  $\widehat{CB}$  las quebradas  $\gamma$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  de modo que sus longitudes difieran de las longitudes de los arcos en menos que  $a$ . Complementemos los vértices de la quebrada  $\gamma$  con los vértices de las quebradas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  y los vértices de las quebradas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  con los vértices de la quebrada  $\gamma$ . Obtendremos así unas quebradas  $\gamma'$ ,  $\gamma'_1$  y  $\gamma'_2$  inscritas en los arcos  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{AC}$  y  $\widehat{CB}$ . Puesto que al agregar vértices nuevos a la quebrada su longitud aumenta, las longitudes de las quebradas  $\gamma'$ ,  $\gamma'_1$  y  $\gamma'_2$  difieren de las longitudes de los arcos correspondientes también en menos que  $a$ .

Indiquemos por  $l$ ,  $l_1$  y  $l_2$  las longitudes de los arcos y por  $s$ ,  $s_1$  y  $s_2$  las longitudes de las quebradas. Las quebradas  $\gamma'_1$  y  $\gamma'_2$  son las partes en que el punto  $C$  divide la quebrada  $\gamma'$ . Por esto, la longitud de la quebrada  $\gamma'$  es igual a la suma de las longitudes de las quebradas  $\gamma'_1$  y  $\gamma'_2$ , o sea,  $s = s_1 + s_2$ . Puesto que  $l - s < a$ ,  $l_1 - s_1 < a$ ,  $l_2 - s_2 < a$  y  $s = s_1 + s_2$ , resulta que  $l$  difiere de  $l_1 + l_2$  en  $2a$  como máximo. Como quiera que los números  $l$  y  $l_1 + l_2$  están perfectamente determinados y el número  $a$  se puede tomar tan pequeño como se quiera, esto es posible sólo si  $l = l_1 + l_2$ . Queda demostrada la afirmación.

Probemos ahora que la longitud del arco  $\widehat{AB}$  (fig. 141) se determina según la fórmula

$$l = \frac{\pi R}{180} \alpha,$$

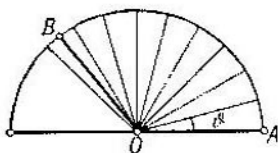


Fig. 141

donde  $\alpha$  es la medida en grados del ángulo central correspondiente.

Sea  $N$  un número entero grande y sea  $\vartheta$  el ángulo de  $\frac{180^\circ}{N}$ . Construyamos a partir de la semirrecta  $OA$  los ángulos iguales a  $\vartheta$ ,  $2\vartheta$ ,  $3\vartheta$ , ... Sea  $n$  el entero de la división de  $\alpha$  por  $\vartheta$ , es decir,

$$n\vartheta \leq \alpha < (n+1)\vartheta$$

o

$$\frac{n \cdot 180}{N} \leq \alpha < \frac{(n+1) 180}{N}.$$

De aquí resulta que

$$\frac{n}{N} \pi R \leq \frac{\pi R}{180} \alpha < \frac{n+1}{N} \pi R.$$

Puesto que la longitud del arco de circunferencia es igual a la suma de las longitudes de sus partes, la longitud del arco correspondiente al ángulo  $\vartheta$  es igual a  $\frac{\pi R}{N}$ . El arco  $\widehat{AB}$  no es menor que la suma de  $n$  arcos iguales a  $\frac{\pi R}{N}$  pero es menor que la suma de  $n+1$  arcos idénticos, o sea,

$$\frac{n}{N} \pi R \leq \widehat{AB} < \frac{n+1}{N} \pi R.$$

Vemos que ambos números —el número  $\frac{\pi R \alpha}{180}$  y la longitud del arco  $\widehat{AB}$ — están comprendidos entre los números  $\frac{\pi R n}{N}$  y  $\frac{\pi R (n+1)}{N}$ . De aquí se deduce que la longitud del arco  $\widehat{AB}$  difiere del número  $\frac{\pi R \alpha}{180}$  a lo sumo en

$$\frac{\pi R}{N} (n+1) - \frac{\pi R}{N} n,$$

o sea, en  $\frac{\pi R}{N}$  todo lo más. Puesto que  $N$  se puede tomar tan grande como se quiera, de aquí se desprende que la longitud del arco  $\widehat{AB}$  es igual a  $\frac{\pi R \alpha}{180}$ . Queda demostrado el teorema.

Se denomina *medida radial* del ángulo la razón entre la longitud del arco correspondiente y el radio de la circunferencia. De la fórmula obtenida para la longitud del arco

de circunferencia resulta que

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \alpha,$$

o sea, que la medida radial del ángulo se obtiene multiplicando su medida en grados por  $\frac{\pi}{180}$ . En particular, la medida radial del ángulo de  $180^\circ$  es igual a  $\pi$  y la medida radial del ángulo recto es  $\frac{\pi}{2}$ .

La unidad de la medida radial de los ángulos es el *radián*. El ángulo de un radián es el ángulo cuyo arco es igual al radio. La medida en grados del ángulo de un radián es igual a  $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$ .

**Área del círculo y de sus partes.** Se denomina *círculo* de centro  $O$  y de radio  $R$  la figura formada por todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia no mayor que  $R$  del punto  $O$  (fig. 142). La circunferencia de radio  $R$  y de centro  $O$  se denomina *circunferencia del círculo*.

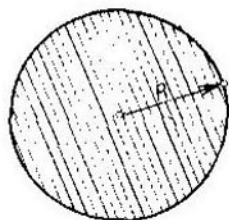


Fig. 142

El *área del círculo* es el menor de los números mayores que el área de cualquier polígono convexo inscrito en la circunferencia del círculo.

**TEOREMA 17.3.** *El área del círculo es igual a la mitad del producto de la longitud de la circunferencia del círculo por el radio, o sea,*

$$S = \pi R^2.$$

**DEMOSTRACION.** Tomemos un número positivo pequeño  $a$ . Inscribamos en la circunferencia del círculo un polígono convexo  $P$  tal que sus lados sean menores que  $a$  (cm), que su perímetro difiera de la longitud de la circunferencia en menos que  $a$  (cm) y que el área del círculo difiera del área del polígono en menos que  $aR$  (cm<sup>2</sup>). Con este fin, construamos tres polígonos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  de modo que  $P_1$  cumpla la primera condición,  $P_2$  la segunda y  $P_3$  la tercera. Ahora, agregando al polígono  $P_1$  los vértices de los polígonos  $P_2$  y  $P_3$ , obtendremos el polígono  $P$  que cumple las tres condiciones.

El área del polígono  $P$  se obtiene sumando las áreas de todos los triángulos que tienen un vértice común en el centro

del círculo y cuyos lados opuestos a este vértice son los lados del polígono  $P$  (fig. 143). Consideremos el área de uno de estos triángulos  $OAB$ . Tenemos

$$S(OAB) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC.$$

Puesto que  $OA > OC > OA - AC$ , se tiene

$$\frac{1}{2} AB(R-a) < S(OAB) < \frac{1}{2} AB \cdot R.$$

Sumando las áreas de todos los triángulos, encontramos

$$\frac{1}{2} p(R-a) < S(P) < \frac{1}{2} pR,$$

donde  $p$  es el perímetro del polígono  $P$  y  $S(P)$  es su área.

Introduciendo en el último miembro de esta desigualdad la longitud  $l$  de la circunferencia en lugar del perímetro

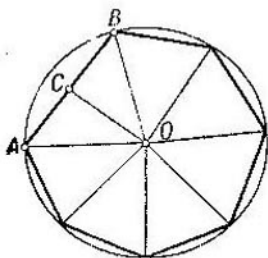


Fig. 143

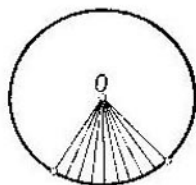


Fig. 144

$p$  y en el primer miembro la magnitud  $l - a$  en lugar del perímetro, con mayor razón podremos escribir que

$$\frac{1}{2} (l-a)(R-a) < S(P) < \frac{1}{2} lR,$$

o sea,

$$\frac{1}{2} lR - \frac{1}{2} (aR + al - a^2) < S(P) < \frac{1}{2} lR.$$

De esta desigualdad resulta que el área  $S(P)$  del polígono difiere de  $\frac{lR}{2}$  en menos que  $\frac{aR + al - a^2}{2}$ . Ya que, por la construcción, esta área difiere del área del círculo en menos que  $aR$ , se deduce que el área del círculo difiere de  $\frac{lR}{2}$  en menos que  $aR + \frac{aR + al - a^2}{2}$ , o sea, difiere tan



poco como se quiera si  $a$  es suficientemente pequeño. Pero esto puede suceder sólo si el área del círculo es igual a  $\frac{lR}{2}$ .

Queda demostrado el teorema.

Se llama *sector de círculo* la parte del círculo perteneciente al interior del ángulo central correspondiente (fig. 144).

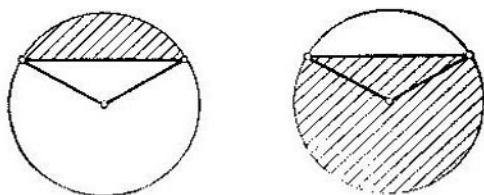


Fig. 145

El área del sector de círculo se determina según la fórmula

$$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{360},$$

donde  $R$  es el radio del círculo y  $\alpha$  es la medida en grados del ángulo central correspondiente. Esta fórmula se demuestra igual que la fórmula de la longitud del arco de circunferencia.

Se denomina *segmento de círculo* la parte común del círculo y de un semiplano (fig. 145). El área del segmento, que no sea un semicírculo, se determina mediante la fórmula

$$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{360} \pm S_{\Delta},$$

donde  $S_{\Delta}$  es el área del triángulo de vértices en el centro del círculo y en los extremos de los radios que limitan el sector correspondiente. El signo «-» ha de tomarse si  $\alpha < 180^\circ$  y el signo «+» si  $\alpha > 180^\circ$ .

#### Preguntas de repaso y ejercicios

1. ¿Qué es longitud de la circunferencia?
2. Demuéstrese que cualquiera que sea el número positivo  $a$ , existe un polígono inscrito cuyo perímetro difiere de la longitud de la circunferencia en menos que  $a$ .
3. ¿Qué es longitud del arco de circunferencia?
4. Demuéstrese la fórmula de la longitud de la circunferencia:  
 $l = 2\pi R$ .

5. Demuéstrese que si el punto  $C$  divide el arco  $\widehat{AB}$  de la circunferencia en los arcos  $\widehat{AC}$  y  $\widehat{CB}$ , la longitud del arco  $\widehat{AB}$  es igual a la suma de las longitudes de los arcos  $\widehat{AC}$  y  $\widehat{CB}$ .

6. Dedúzcase la fórmula de la longitud del arco de circunferencia.

7. ¿Qué es medida radial del ángulo? ¿Cuál es la medida radial de los ángulos de  $30^\circ$  y de  $45^\circ$ ?

8. Dese la definición del área del círculo.

9. Demuéstrese que cualquiera que sea el número positivo  $a$ , existe un polígono convexo inscrito cuya área difiere del área del círculo en menos que  $a$ .

10. Demuéstrese que el área  $S$  del círculo se determina mediante la fórmula  $S = \pi R^2$ , donde  $R$  es el radio del círculo.

11. ¿Qué es sector de círculo? ¿Cuál es la fórmula del área del sector de círculo?

12. ¿Qué es segmento de círculo? ¿Cuál es la fórmula del área del sector de círculo?