Parte segunda

ESTEREOMETRIA

§ 18. AXIOMAS DE LA ESTEREOMETRÍA Y ALGUNOS COROLARIOS

La *Estereometría* es la parte de la Geometría en la que se estudian las figuras en el espacio. En la Estereometría, igual que en la Planimetría, las propiedades de las figuras geométricas se establecen mediante la demostración de teoremas correspondientes partiendo de las propiedades de las figuras geométricas elementales expresadas por los axiomas.

En el espacio las figuras elementales son el *punto*, la *recta* y el *plano*. La introducción de una nueva ente geométrica, el plano, hace ampliar el sistema de axiomas. A saber, introducimos el grupo de axiomas E que expresa las propiedades fundamentales de los planos en el espacio. Este grupo consta de los tres axiomas siguientes.

E$_1$. *Cualquiera que sea el plano existen puntos que pertenecen a este plano y puntos que no le pertenecen.*

E$_2$. *Si dos planos diferentes tienen un punto común, se cortan según una recta.*

Este axioma afirma que si dos planos distintos α y β tienen un punto común C, existe una recta c que pertenece a cada uno de estos planos. Además, todo punto C que pertenezca a ambos planos ha de pertenecer a la recta c.

E$_3$. *Si dos rectas distintas tienen un punto común, se puede trazar por éstas un plano y sólo uno.*

Esto significa que si dos rectas distintas a y b tienen un punto común C, existe un plano γ que contiene las rectas a y b. El plano con esta propiedad es único.

Por consiguiente, el sistema de axiomas de la Estereometría consta de los axiomas de la Planimetría más el grupo de axiomas E. Para facilitar la exposición, recordemos los dos primeros grupos de axiomas de la Planimetría.

I$_1$. *Cualquiera que sea la recta, existen puntos que pertenecen a esta recta y puntos que no le pertenecen.*

I$_2$. *Cualesquiera que sean dos puntos, existe una recta que pasa por estos puntos siendo dicha recta única.*

II$_1$. *De tres puntos de una recta uno, y sólo uno, se halla entre los otros dos.*

II_2. *Un punto perteneciente a una recta la divide en dos semirrectas. Los puntos de una misma semirrecta no están separados por el punto de división. Los puntos de diferentes semirrectas están separados por este punto.*

II_3. *Toda recta perteneciente a un plano lo divide en dos semiplanos. Si los extremos de un segmento pertenecen a un mismo semiplano, el segmento no corta la recta. Si los extremos del segmento pertenecen a diferentes semiplanos, el segmento corta la recta.*

Algunos corolarios de los axiomas de la Estereometría. TEOREMA 18.1. *Por una recta y un punto que no le pertenece se puede trazar un plano, y sólo uno.*

DEMOSTRACION. Sea a una recta y B un punto que no le pertenece (fig. 146). Tomemos en la recta a un punto cualquiera A. Este punto existe por el axioma I_1. Tracemos

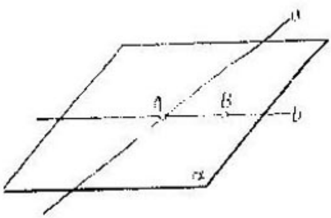

Fig. 146

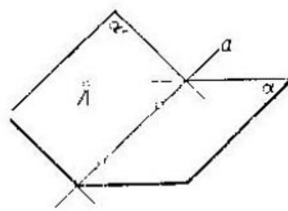

Fig. 147

por los puntos A y B la recta b (axioma I_2). Las rectas a y b son distintas, pues el punto B de la recta b no pertenece a la recta a. El punto A es común para las rectas a y b. Tracemos por las rectas a y b el plano α (axioma E_3). Este plano pasa por la recta a y por el punto B.

Demostremos ahora que el plano α que pasa por la recta a y por el punto B es único. Supongamos que existe otro plano α' distinto de α que pasa por la recta a y por el punto B. Por el axioma E_2, los planos α y α' se cortan según una recta, pues son distintos. Por consiguiente, cualesquiera tres puntos comunes de los planos α y α' se hallan en esta recta. Pero el punto B y dos puntos cualesquiera de la recta a no se encuentran indiscutiblemente en una recta. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado completamente el teorema.

TEOREMA 18.2. *Si dos puntos de la recta pertenecen a un mismo plano, toda la recta pertenece a este plano.*

DEMOSTRACION (fig. 147). Sean a la recta y α el plano. Según el axioma I_1, existe un punto A que no está en la recta a. Tracemos el plano α' que pasa por la recta a y por el punto A. Si el plano α' coincide con α, el plano α contiene la recta a que es lo que afirma el teorema. Si el plano α' es distinto de α, estos planos se cortan según la recta a' que contiene los dos puntos de la recta a. En virtud del axioma I_2, las rectas a' y a coinciden y, por consiguiente, la recta a se encuentra en el plano α. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 18.2 se deduce que *el plano y la recta que no está en él no se cortan o se cortan en un punto.*

TEOREMA 18.3. *Por tres puntos que no se hallan en una recta se puede trazar un plano, y sólo uno.*

DEMOSTRACION (fig. 148). Sean A, B y C tres puntos que no se hallan en una recta. Tracemos las rectas AB y AC. Estas rectas son distintas ya que los puntos A, B y C no están en una recta. Según el axioma E_3, por las rectas AB y AC se puede trazar un plano. Este plano contiene los puntos A, B y C.

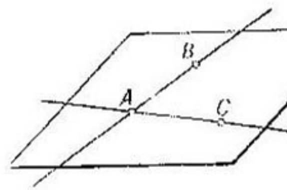

Fig. 148

Demostremos que el plano α que pasa por los puntos A, B y C es único. Efectivamente, en virtud del teorema 18.2, el plano que pasa por los puntos A, B y C contiene las rectas AB y AC. Pero, según el axioma E_3, este plano es único. Queda demostrado el teorema.

División del espacio en dos semiespacios por un plano. TEOREMA 18.4. *Todo plano divide el espacio en dos semiespacios. Si los puntos X e Y pertenecen a un mismo semiespacio, el segmento XY no corta el plano. En cambio, si los puntos X e Y pertenecen a distintos semiespacios, el segmento XY corta el plano.*

DEMOSTRACION. Sea α un plano. Tomemos un punto A que no se halla en el plano α. Este punto existe por el axioma E_1. Dividamos todos los puntos del espacio que no pertenecen al plano α en dos clases a tenor con el criterio siguiente. Incluiremos el punto X en la primera clase si el segmento AX no corta el plano α. Incluiremos el punto X en la segunda clase si el segmento AX corta el plano α. Así, todo punto

X del espacio que no pertenezca al plano α será incluido en una clase. Mostremos que esta división del espacio posee las propiedades indicadas en el teorema.

Supongamos que los puntos X e Y pertenecen a la primera clase. Tracemos por los puntos A, X e Y el plano α'. Si el plano α' no corta el plano α, el segmento XY —que está en el plano α'— tampoco lo corta. Supongamos que el plano α' corta el plano α (fig. 149). Puesto que los planos son distintos, la intersección de los mismos es una recta a. La recta a divide el plano α' en dos semiplanos. Los puntos X e Y pertenecen a un mismo semiplano; concretamente, al que contiene el punto A. Por esto, el segmento XY no corta la recta a ni, por consiguiente, el plano α.

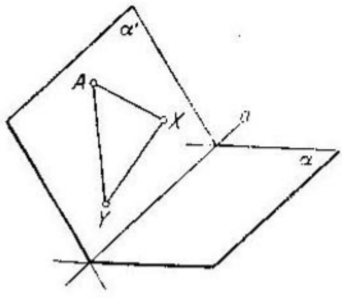

Fig. 149

Si los puntos X e Y pertenecen a la segunda clase, el plano α' corta indudablemente el plano α ya que el segmento AX corta α. Los puntos X e Y pertenecen a uno de los semiplanos en que la recta a divide el plano α. Es decir, el segmento XY no corta la recta a ni, por consiguiente, el plano α.

Finalmente, si el punto X pertenece a una clase y el punto Y a otra, el plano α' corta α y los puntos X e Y se encuentran en distintos semiplanos del plano α' respecto a la recta a. Por eso, el segmento XY corta la recta a y, por ende, el plano α. Queda demostrado el teorema.

Observación al axioma I_1. Concluyendo este parágrafo, haremos una observación relacionada con el axioma I_1. En tanto que axioma de la Estereometría, este axioma adquiera un sentido distinto del que tiene en la Planimetría. En la Planimetría afirma la existencia de puntos fuera de la recta *en el plano* al que esta recta pertenece. Precisamente en este sentido hemos empleado dicho axioma al construir la Geometría del plano. Ahora el axioma I_1 afirma la existencia general de puntos que no se hallan en la recta. No implica directamente la existencia de puntos fuera de la recta en el plano al que ésta pertenece. Esto exige una demostración especial. Demos esta demostración.

Sea α un plano y sea a una recta en este plano. Demostremos la existencia en el plano α de puntos que no se hallan en la recta a. Tomemos un punto A de la recta a y un punto A' fuera del plano α. Tracemos el plano α' por la recta a y por el punto A' (fig. 150). Tomemos un punto B fuera del plano α' y tracemos el plano β que pasa por la recta AA'

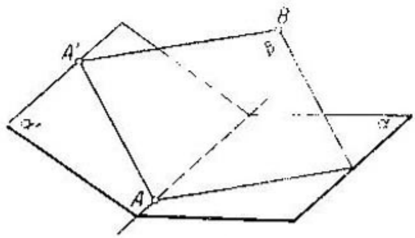

Fig. 150

y por el punto B. Los planos α y β se cortan según una recta que pasa por el punto A. Los puntos de esta recta distintos de A están en el plano α y fuera de la recta a que es lo que se quería demostrar.

Ejercicios

1. Sean a una recta y A un punto fuera de ella. Demuéstrese que todas las rectas que pasan por el punto A y que cortan la recta a están en un mismo plano.

2. Sean a y b dos rectas que no se hallan en un mismo plano y C un punto que no está en ninguna de estas rectas. Demuéstrese que por el punto C se puede trazar una recta, y sólo una, que corta las rectas a y b.

3. Sean a_1, a_2, a_3, . . . unas rectas. Demuéstrese que si dos cualesquiera de estas rectas se cortan, todas ellas pasan por un mismo punto o pertenecen a un mismo plano.

4. Demuéstrese que si cuatro puntos cualesquiera de una figura están en un mismo plano, la figura es plana, o sea, se encuentra en un plano.

5. Sean dados $2n$ puntos A_1, A_2, . . ., A_{2n} y sea α un plano que no pasa por ninguno de estos puntos. Demuéstrese que el plano α corta como máximo n^2 de los segmentos A_pA_q que unen estos puntos de dos en dos.

§ 19. PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS

Rectas paralelas en el espacio. En el espacio dos rectas se llaman *paralelas* si están en un mismo plano y no se cortan.

TEOREMA 19.1. *Por el punto que está fuera de la recta se puede trazar una recta paralela a ésta y sólo una.*

DEMOSTRACION. Sea a una recta y sea A un punto que no se halla en esta recta (fig. 151). Tracemos el plano α que pasa por la recta a y por el punto A. Tracemos en el plano α la recta a_1 que pasa por el punto A y que es paralela a la recta a. Demostremos que la recta a_1, paralela a la a, es única.

Supongamos que existe otra recta a_2 que pasa por el punto A y que es paralela a la recta a. Por las rectas a y a_2 se puede trazar el plano α_2. El plano α_2 pasa por la recta a

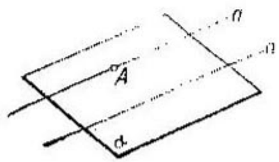

Fig. 151

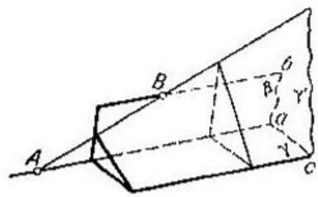

Fig. 152

y por el punto A, o sea, según el teorema 18.1, coincide con α. Ahora, basándonos en el axioma de las paralelas, deducimos que las rectas a_1 y a_2 coinciden. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 19.2. *Si la recta a es paralela a las rectas b y c, las rectas b y c son paralelas.*

DEMOSTRACION. El caso en que las rectas a, b y c están en un plano ha sido considerado en la Planimetría. Supongamos, por eso, que las rectas no se hallan en un plano. Sea β el plano en el que están las rectas a y b y sea γ el plano en el que se encuentran las rectas a y c. Los planos β y γ son distintos (fig. 152).

Tomemos en la recta b un punto B y tracemos el plano γ_1 que pasa por la recta c y el punto B. El plano γ_1 corta el plano β según la recta b_1. Afirmamos que la recta b_1 es paralela a la a.

Supongamos que la recta b_1 corta la recta a en un punto A. El punto A pertenece al plano γ y al plano γ_1, o sea, está en la recta c según la que se cortan estos planos. Hemos llegado a una contradicción ya que las rectas a y c en tanto que paralelas no pueden tener el punto A común. Por esto, la recta b_1 es paralela a la recta a.

Según el axioma de las paralelas, la recta b_1, paralela a la recta a, debe coincidir con la recta b. Puesto que la recta b coincide con b_1, las rectas b y c están en un mismo plano, en el plano γ_1. No pueden cortarse ya que esto estaría en contradicción con el teorema 19.1, pues ambas son paralelas a la recta a. Es decir, las rectas b y c se hallan en un plano y no se cortan, o sea, son paralelas. Queda demostrado el teorema.

Paralelismo de la recta y del plano. La recta y el plano se denominan *paralelos* si no se cortan.

TEOREMA 19.3. *El plano α y la recta a que no le pertenece son paralelos si en el plano α existe una recta a_1 paralela a la recta a.*

DEMOSTRACION (fig. 153). Consideremos el plano α_1 que pasa por las rectas a y a_1. Es distinto del plano α ya que la recta a no se halla en el plano α. Los planos α y α_1

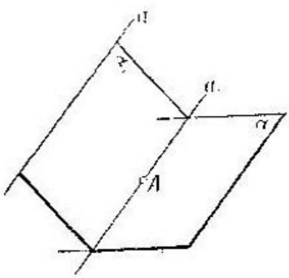

Fig. 153

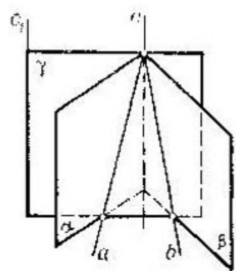

Fig. 154

se cortan según la recta a_1. Si la recta a cortase el plano α, el punto de intersección pertenecería a la recta a_1. Pero esto es imposible, pues las rectas a y a_1 son paralelas. Por lo tanto, la recta a no corta el plano α, o sea, es paralela al plano α. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 19.4. *Si la recta es paralela a cada uno de dos planos secantes, también es paralela a la recta de intersección de los mismos.*

DEMOSTRACION. Sean α y β dos planos secantes, c la recta según la que se cortan estos planos y c_1 una recta paralela a cada uno de los planos α y β (fig. 154.) Debemos demostrar que las rectas c y c_1 son paralelas.

Tracemos el plano γ que pasa por la recta c_1 y por un punto cualquiera de la recta c. El plano γ se corta con los planos α y β según las rectas a y b paralelas a c_1. Efectivamente, las rectas a y b —pertenecientes a los planos α y β paralelos a la recta c_1— no pueden cortar esta recta.

Por el axioma de las paralelas, las rectas a y b coinciden. Como quiera que la recta a se halla en el plano α y la recta b está en el plano β, las rectas a y b han de coincidir con la recta c que es la intersección de los planos α y β. Es decir, la recta c es paralela a la recta c_1. Queda demostrado el teorema.

Paralelismo de los planos. Dos planos se denominan *paralelos* si no se cortan.

TEOREMA 19.5. *Si el plano α es paralelo a dos rectas secantes pertenecientes al plano β, los planos α y β son paralelos.*

DEMOSTRACION (fig. 155). Sean b_1 y b_2 dos rectas secantes en el plano β paralelas al plano α. Los planos α y β son distintos. Supongamos que se cortan según la recta c. Las rectas b_1 y b_2 no cortan el plano α ni, por consiguiente, la

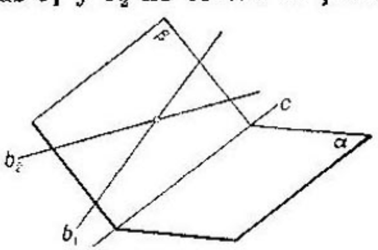

Fig. 155

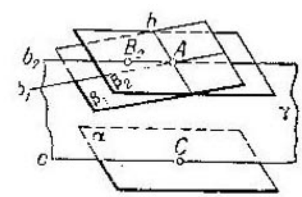

Fig. 156

recta c de este plano. Pero esto es imposible en virtud del axioma de las paralelas ya que las rectas b_1, b_2 y c se hallan en un mismo plano, en el plano β. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 19.6. *Por todo punto A exterior al plano α pasa un plano paralelo al α, y sólo uno.*

DEMOSTRACION. Tomemos en el plano α dos rectas secantes cualesquiera a' y a''. Tracemos por el punto A las rectas b' y b'' paralelas a éstas. El plano que pasa por las rectas b' y b'' es paralelo al plano α debido al teorema 19.5.

Supongamos que por el punto A pasan dos planos distintos β_1 y β_2 paralelos al plano α (fig. 156). Sea b la recta de intersección de estos planos. Tomemos en el plano β_2 un punto B_2 que no se halla en la recta b y tomemos un punto C en el plano α. Tracemos el plano γ que pasa por los puntos A, B_2 y C. Corta los planos β_1 y β_2 según las rectas b_1 y b_2 y el plano α según la recta c. Las rectas b_1 y b_2 no cortan la recta c porque no cortan el plano α en el que están dichas rectas. Según el axioma de las paralelas, las rectas b_1 y b_2 coinciden. Es decir, los planos β_1 y β_2 pasan por dos rectas secantes b y b_1 distintas. Por lo tanto, coinciden debido al axioma E_3. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

Segmentos de rectas paralelas entre planos paralelos. TEOREMA 19.7. *Si la recta corta el plano, corta también cualquier plano paralelo a éste.*

Si el plano corta la recta, corta también cualquier recta paralela a ésta.

DEMOSTRACION. Comencemos por la primera afirmación del teorema. Sea a una recta que corta el plano β y sea β_1

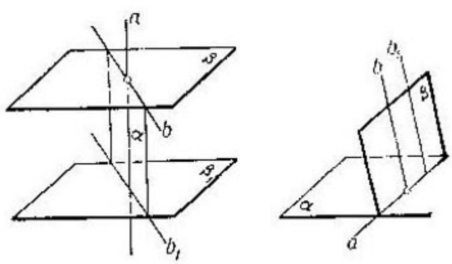

Fig. 157

un plano paralelo a β. Demostremos que la recta a corta el plano β_1 (fig. 157, a la izquierda).

Consideremos un plano α que pasa por la recta a y que corta el plano β_1. Corta el plano β según la recta b y el plano β_1 según la recta b_1. Si la recta a no cortase β_1, las rectas a y b serían paralelas a la recta b_1. Pero esto es imposible por el axioma de las paralelas. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Demostremos la segunda afirmación del teorema. Supongamos que el plano α corta la recta b. Demostremos que corta toda recta b_1 parelela a b. Tracemos por las rectas b y b_1 el plano β. Corta el plano α según la recta a (fig. 157, a la derecha). Si el plano α no cortase la recta b_1, las rectas a y b serían paralelas a la recta b_1. Pero esto es imposible por el axioma de las paralelas. Queda demostrado completamente el teorema.

TEOREMA 19.8. *Los segmentos de rectas paralelas comprendidos entre planos paralelos son iguales.*

DEMOSTRACION (fig. 158). Sean α y β dos planos paralelos y sean c_1 y c_2 dos rectas paralelas que los cortan. La recta c_1 corta los planos en los puntos A_1 y B_1 y la recta c_2 en los puntos A_2 y B_2. Demostremos la igualdad de los segmentos A_1B_1 y A_2B_2.

El cuadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ está en el mismo plano que las paralelas c_1 y c_2. Sus lados opuestos A_1B_1 y A_2B_2 son paralelos por hipótesis del teorema. Los lados A_1A_2 y B_1B_2

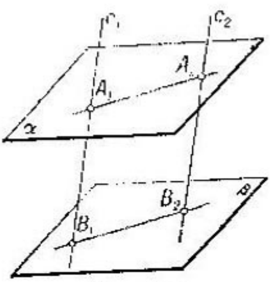

Fig. 158

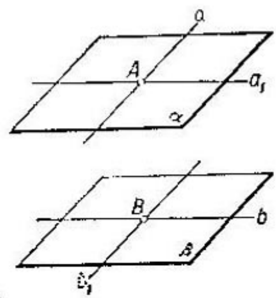

Fig. 159

son paralelos porque los planos α y β lo son. Por consiguiente, este cuadrilátero es un paralelogramo. Los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 son iguales en tanto que lados opuestos del paralelogramo. Queda demostrado el teorema.

Rectas cruzadas. Dos rectas se denominan *cruzadas* si no están en un mismo plano. Por consiguiente, las rectas que se cruzan no son paralelas ni se cortan.

Dos rectas cruzadas cualesquiera se hallan en planos paralelos.

DEMOSTRACION. Sean a y b dos rectas que se cruzan. Tracemos por un punto cualquiera de la recta a la recta a_1 paralela a la recta b y por un punto cualquiera de la recta b la recta b_1 paralela a la a (fig. 159). Tracemos por las rectas a y a_1 el plano α y por las rectas b y b_1 el plano β. Los planos α y β son distintos, pues de lo contrario las rectas a y b estarían en un mismo plano. Los planos α y β son paralelos porque las rectas a y a_1 son paralelas al plano β. Queda demostrada la afirmación.

Ejercicios

1. Demuéstrese que tres planos distintos se cortan en un punto, pasan por una misma recta o son paralelos a una recta.

2. Demuéstrese que todas las rectas que pasan por un mismo punto y son paralelas a un mismo plano se encuentran en un plano.

3. Sean α_1, α_2 y α_3 tres planos paralelos y sean a y b dos rectas que los cortan. Demuéstrese que son proporcionales los segmentos correspondientes de las rectas a y b comprendidos entre los planos α_1, α_2 y α_3, o sea, que si A_1, A_2 y A_3 son los puntos de intersección de la recta a con los planos α_1, α_2 y α_3 y si B_1, B_2 y B_3 son los puntos de intersección de la recta b con estos planos, se tiene

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\frac{A_3A_1}{B_3B_1}.$$

4. Sean A_1, A_2, A_3 y A_4 cuatro puntos que no se hallan en un mismo plano. Demuéstrese que el plano paralelo a las rectas cruzadas A_1A_2 y A_3A_4 corta las cuatro rectas restantes que unen estos puntos de dos en dos en los vértices de un paralelogramo.

5. Demuéstrese que es un plano el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos cuyos extremos están en dos rectas que se cruzan.

6. Sean A, B, C y D cuatro puntos que no están en un plano. Demuéstrese que se cortan en un punto las tres rectas que unen los puntos medios de los segmentos cruzados AB y CD, AC y BD, AD y BC.

§ 20. PERPENDICULARIDAD DE RECTAS Y PLANOS

Perpendicularidad de las rectas. El concepto de perpendicularidad para el caso de rectas secantes y, por consiguiente, pertenecientes a un mismo plano ha sido introducido en la Planimetría y es bien conocido. Definamos ahora el concepto de perpendicularidad en el caso de rectas que se cruzan. Para ello señalemos, ante todo, una propiedad de las rectas secantes perpendiculares.

TEOREMA 20.1. *Si dos rectas secantes a y b son perpendiculares, las rectas secantes a_1 y b_1 paralelas a éstas también son perpendiculares.*

DEMOSTRACION. Si las rectas a, b, a_1 y b_1 están en un mismo plano, la propiedad señalada es conocida a través de la Planimetría. Supongamos, por eso, que las rectas no pertenecen a un mismo plano. En este caso las rectas a y b están en un plano α y las rectas a_1 y b_1 están en un plano α_1 (fig. 160). Según el teorema 19.3, las rectas a y b son paralelas al plano α_1. En virtud del teorema 19.5, los planos α y α_1 son paralelos.

Sea C el punto de intersección de las rectas a y b y sea C_1 el punto de intersección de las rectas a_1 y b_1. Tracemos en el plano que contiene las rectas paralelas a y a_1 la paralela a la recta CC_1. Corta las rectas a y a_1 en los puntos A y A_1. Tracemos análogamente en el plano que contiene las rectas b y b_1 la paralela a la recta CC_1 e indiquemos por B y B_1 sus puntos de intersección con las rectas b y b_1.

Los cuadriláteros CAA_1C_1 y CBB_1C_1 son paralelogramos ya que sus lados opuestos son paralelos. El cuadrilátero ABB_1A_1 también es un paralelogramo. Sus lados AA_1 y BB_1 son paralelos porque cada uno de ellos es paralelo a la recta CC_1. Los lados AB y A_1B_1 se hallan en planos paralelos y, por ello, también son paralelos.

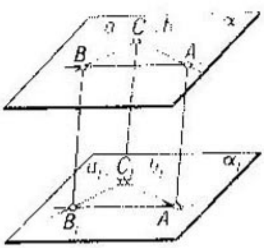

Fig. 160

Puesto que los lados opuestos del paralelogramo son iguales, se tiene $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ y $BC = B_1C_1$. Los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Esto significa que el ángulo $A_1C_1B_1$, igual al ángulo ACB, es recto, o sea, que las rectas a_1 y b_1 son perpendiculares. Queda demostrado el teorema.

Dos rectas que se cruzan se llaman *perpendiculares* si son perpendiculares las rectas secantes paralelas a éstas. De esta definición y del teorema 20.1 se desprende que cualesquiera que sean las rectas perpendiculares (secantes o cruzadas) las rectas secantes paralelas a ellas son perpendiculares.

TEOREMA 20.2. *Si la recta a es perpendicular a la recta b, también es perpendicular a cualquier recta b_1 paralela a b.*

DEMOSTRACION. Tracemos las rectas secantes a_2 y b_2 paralelas, respectivamente, a las rectas a y b. Las rectas a_2 y b_2 son perpendiculares por ser perpendiculares las rectas a y b. Debido a la propiedad de las paralelas, la recta b_2 es paralela a b_1. Por consiguiente, las rectas a y b_1 son paralelas a las rectas secantes perpendiculares a_2 y b_2 y, por eso, son ellas mismas perpendiculares. Queda demostrado el teorema.

Perpendicularidad de la recta y del plano. La recta se denomina *perpendicular* al plano si es perpendicular a toda recta que se encuentra en dicho plano. El teorema que sigue es el criterio principal de perpendicularidad de la recta y del plano.

TEOREMA 20.3. *Si la recta a es perpendicular a dos rectas secantes pertenecientes al plano α, la recta a es perpendicular al plano α.*

DEMOSTRACION (fig. 161). Sean b y c dos rectas secantes pertenecientes al plano α y perpendiculares a la recta a. Sea A el punto de intersección de las rectas [b y] c. Consideremos primero el caso en que la recta a pasa por el punto A.

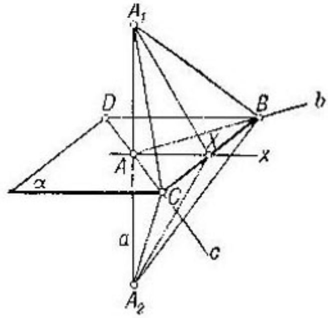

Fig. 161

Tracemos en el plano α una recta cualquiera x por el punto A y demostremos que es perpendicular a la recta a. Podemos aceptar que la recta x es distinta de las rectas b y c. Tomemos en la recta c dos puntos C y D a distintos lados del punto A y tomemos en la recta b un punto B distinto de A. La recta x corta el lado CD del triángulo CDB y, por consiguiente, en virtud del teorema demostrado en la Planimetría, corta en un punto X uno de los otros dos lados. Supongamos, para puntualizar, que se trata del lado BC.

Tomemos en la recta a, partiendo del punto A, dos segmentos iguales AA_1 y AA_2 a distintos lados de ese punto. El triángulo A_1CA_2 es isósceles, pues el segmento AC es altura por hipótesis del teorema y mediana por construcción ($AA_1 = AA_2$). Por la misma razón, es también isósceles el triángulo A_1BA_2. Entonces, son iguales los triángulos A_1BC y A_2BC en virtud del tercer criterio de la igualdad de los triángulos.

De la igualdad de los triángulos A_1BC y A_2BC se desprende la igualdad de los ángulos A_1BX y A_2BX y, por consiguiente, la igualdad de los triángulos A_1BX y A_2BX por el primer criterio de la igualdad. De la igualdad de los lados A_1X y A_2X de estos triángulos deducimos que el triángulo A_1XA_2 es isósceles. Por eso, su mediana XA es también altura. Esto significa precisamente que la recta x es perpendicular a la recta a.

Como quiera que la recta a es perpendicular a toda recta que pasa por el punto A, es perpendicular a cualquier recta x_1 que se halla en el plano α. Efectivamente, para esa recta x_1 se puede indicar la recta paralela x que pasa por el punto A. La perpendicularidad de las rectas a y x implica la perpendicularidad de las rectas a y x_1 debido al teorema 20.2. O sea, queda demostrado el teorema para el caso en que la recta a pasa por el punto A de intersección de las rectas b y c.

Consideremos el caso general. Supongamos que la recta a no pasa por el punto A. Tracemos por el punto A la recta a_1 paralela a la recta a. La recta a_1 es perpendicular a las rectas b y c según el teorema 20.2. Por lo tanto, la recta a_1 es perpendicular, como hemos demostrado, al plano. Esto significa que la recta a_1 es perpendicular a cualquier recta x del plano α. Según el teorema 20.2, la recta a, paralela a la recta a_1, también es perpendicular a cada una de estas rectas x. Es decir, la recta a es perpendicular al plano α. Queda demostrado el teorema.

El teorema 20.3 tiene un importante corolario que lleva el nombre de TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES. A saber, *si tres puntos A, B y C no están en una recta y dos de las tres rectas AB, BC y AC son perpendiculares a la recta a, la tercera recta es también perpendicular a la recta a.*

Efectivamente, por los tres puntos A, B y C se puede trazar un plano. Este plano es perpendicular a la recta a porque la recta a es perpendicular a dos rectas secantes que se encuentran en este plano. Por consiguiente, la recta a es perpendicular a cualquier recta de este plano y, en particular, es perpendicular a la tercera de las rectas.

Propiedades de la perpendicularidad de la recta y del plano. TEOREMA 20.4. *Si la recta a y el plano α son perpendiculares, toda recta a_1 paralela a la recta a es perpendicular al plano α. Todo plano α_1 paralelo al plano α es perpendicular a la recta a.*

DEMOSTRACION. La recta a es perpendicular a toda recta x del plano α. Según el teorema 20.2, la recta a_1 paralela a la recta a es también perpendicular a cada una de esas rectas x. Por consiguiente, la recta a_1 es perpendicular al plano α. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Demostremos la segunda afirmación del teorema. Tomemos una recta cualquiera x_1 en el plano α_1. Tracemos por ella un plano que corte el plano α según la recta x. Puesto que las rectas x y x_1 son paralelas y que la recta a es perpendicular a la recta x, resulta por el teorema 20.2 que la recta a es perpendicular a la recta x_1. Esto significa que la recta a es perpendicular al plano α_1. Queda demostrado completamente el teorema.

TEOREMA 20.5. *Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas. Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos.*

DEMOSTRACION. Sean a y a_1 rectas perpendiculares al plano α. Supongamos que las rectas a y a_1 no son paralelas. Tracemos por el punto de intersección de la recta a_1 y del

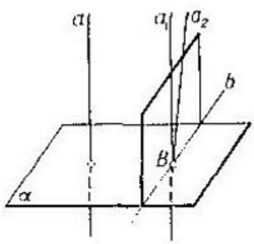

Fig. 162

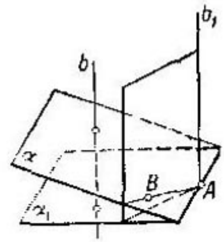

Fig. 163

plano α la recta a_2 paralela a la recta a (fig. 162). Según el teorema 20.4, la recta a_2 es perpendicular al plano α. Tracemos el plano que pasa por las rectas a_1 y a_2. Corta el plano α según la recta b. Puesto que las rectas a_1 y a_2 son perpendiculares al plano α, también son perpendiculares a la recta b. Pero esto es imposible. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrada la primera afirmación del teorema.

Demostremos la segunda afirmación del teorema. Sean α y α_1 dos planos perpendiculares a la recta b. Supongamos que los planos α y α_1 no son paralelos y, por consiguiente, tienen un punto común A. Tracemos por el punto A la recta b_1 paralela a la recta b (fig. 163). Según el teorema 20.4, la recta b_1 es perpendicular a los planos α y α_1. Tomemos en el plano α un punto B exterior al plano α_1 y consideremos el plano que pasa por la recta b_1 y por el punto B. Este plano corta los planos α y α_1 según dos rectas distintas, perpendiculares a la recta b_1, que pasan por el punto A. Pero esto es imposible. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado completamente el teorema.

Construcción del plano y de la recta perpendiculares. TEOREMA 20.6. *Por un punto se puede trazar un plano único perpendicular a la recta dada.*

DEMOSTRACION (fig. 164). Sean A un punto y a una recta. Tracemos por la recta a dos planos distintos β_1 y β_2. Tomando un punto cualquiera B de la recta a, tracemos por él en los planos β_1 y β_2 las rectas b_1 y b_2 perpendiculares a la recta a. Tracemos el plano α por las rectas b_1 y b_2. La recta a es perpendicular al plano α porque es perpendicular a dos rectas b_1 y b_2 de este plano (teorema 20.3). Tracemos el plano α_1 que pase por el punto A y sea paralelo al plano α. El plano α_1 es perpendicular a la recta a según el teorema 20.4.

Demostremos la unicidad del plano α_1 que pasa por el punto A y que es perpendicular a la recta a. Supongamos que por el punto A pasa un plano α_2 distinto de α_1 también perpendicular a la recta a. En virtud del teorema 20.5, los planos α_1 y α_2 son paralelos. Pero esto es imposible, pues tienen un punto común A. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 20.7. *Por un punto se puede trazar una recta única perpendicular al plano dado.*

DEMOSTRACION (fig. 165). Sean A un punto y α un plano. Tomemos en el plano α dos rectas secantes distintas. Tracemos por el punto de intersección de las mismas los planos

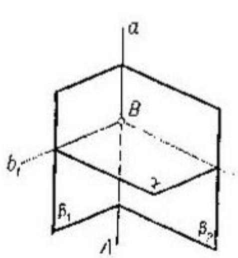

Fig. 164

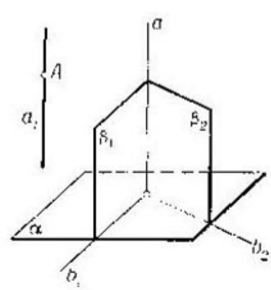

Fig. 165

β_1 y β_2 perpendiculares a estas rectas (teorema 20.6). Los planos β_1 y β_2 cortan el plano α según las rectas b_1 y b_2 y se cortan según la recta a. La recta a es perpendicular a las rectas b_1 y b_2, o sea, es perpendicular al plano α. Tracemos por el punto A la recta a_1 paralela a la recta a. Según el teorema 20.4, la recta a_1 es perpendicular al plano α.

Demostremos la unicidad de la recta a_1 que pasa por el punto A perpendicularmente al plano α. Supongamos que por el punto A pasa una recta a_2, distinta de a_1, también perpendicular al plano α. Según el teorema 20.5, las rectas a_1 y a_2 son parelelas. Pero esto es imposible porque tienen el punto común A. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

Perpendicular y oblicua. Sean α un plano, A un punto exterior al plano α y B un punto del plano α (fig. 166). El segmento AB se denomina *perpendicular* trazada desde el punto A al plano α si la recta AB es perpendicular al plano α. Sea C un punto del plano α distinto de B. El segmento AC se llama *oblicua* trazada desde el punto A al plano α. El segmento BC se denomina *proyección* de la oblicua.

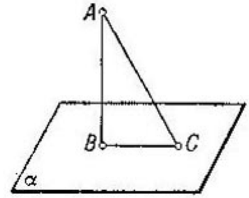

Fig. 166

La perpendicular y la oblicua trazadas al plano poseen propiedades análogas a las que tienen la perpendicular y la oblicua trazadas a la recta en el plano. Es decir, *la perpendicular trazada desde el punto A al plano α es más corta que cualquier oblicua trazada desde el mismo punto. La oblicua mayor tiene mayor proyección.*

DEMOSTRACION (fig. 166). El triángulo ABC es rectángulo de ángulo recto B. Según el teorema de Pitágoras,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

De aquí resulta, primero, que $AC > AB$, o sea, que la oblicua AC es mayor que la perpendicular AB, y segundo, que cuanto mayor sea AC mayor será BC, es decir, que cuanto mayor es la oblicua tanto mayor es su proyección. Queda demostrada la afirmación.

Se llama *distancia* entre el punto A y el plano α la longitud de la perpendicular trazada desde el punto A al plano α. *La distancia entre el punto A y el plano α es la menor de todas las distancias entre el punto A y los puntos del plano α.*

Al igual que las rectas paralelas en el plano, los planos paralelos en el espacio son equidistantes. Esto significa que *siendo α y β planos paralelos, dos puntos cualesquiera del plano α están a una misma distancia del plano β.*

DEMOSTRACION (fig. 167). Sean A_1 y A_2 dos puntos distintos del plano α. Tracemos desde ellos las perpendiculares A_1B_1 y A_2B_2 al plano β. Según el teorema 20.5, las rectas A_1B_1 y A_2B_2 son paralelas y, por ello, están en un plano. Las rectas A_1A_2 y B_1B_2 también son paralelas. Luego, el cuadrilátero $A_1A_2B_2B_1$ es un paralelogramo. Por consiguiente, los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 son iguales en tanto que lados opuestos del paralelogramo. Queda demostrada la afirmación.

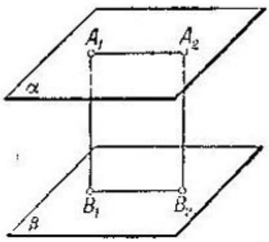

Fig. 167

Una propiedad análoga tiene lugar para la recta y el plano paralelo a ésta. O sea, *si a es una recta y α es un plano paralelo a ésta, todos los puntos de la recta a equidistan del plano α*. La demostración de esta afirmación es semejante a la que hemos dado para el caso de planos paralelos.

Sean a y b dos rectas que se cruzan y sean A y B puntos de estas rectas. El segmento AB se llama *perpendicular común* de las rectas cruzadas a y b si la recta AB es perpendicular a la recta a y a la recta b.

Las rectas cruzadas tienen una y sólo una perpendicular común.

DEMOSTRACION (fig. 168). Sean a y b rectas que se cruzan. Según hemos demostrado al final del § 19, existen dos planos paralelos α y β que pasan por las rectas a y b. Tracemos desde un punto arbitrario C de la recta a la perpendicular CD al plano β. Tracemos por el punto D la recta paralela a la a. Corta la recta b en el punto B. Tracemos por el punto B la recta paralela a CD. Corta la recta a en el punto A. La recta AB es perpendicular a los planos α y β y, por ello, es perpendicular a las rectas a y b. Es decir, el segmento AB representa la perpendicular común de las rectas a y b.

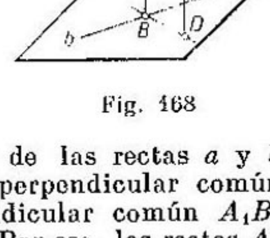

Fig. 168

Demostremos la unicidad de la perpendicular común. Supongamos que existe otra perpendicular común A_1B_1. La recta BD es paralela a la recta a. Por eso, las rectas AB

y A_1B_1, perpendiculares a las rectas a y b, son perpendiculares al plano β y, en consecuencia, son paralelas. Pero, entonces las rectas AA_1 y BB_1, o sea, las rectas a y b, se hallan en un mismo plano. Mas, esto es imposible puesto que las rectas a y b se cruzan. Queda demostrada completamente la afirmación.

Perpendicularidad de los planos. Sean α y β dos planos que se cortan según la recta c. Tracemos un plano γ perpendicular a la recta c (fig. 169). Cortará los planos α y β según las rectas a y b. Diremos que los planos α y β son *perpendiculares* si lo son las rectas a y b.

El concepto de perpendicularidad de los planos α y β definido de esta forma *no depende de qué* plano γ *se eliga.*

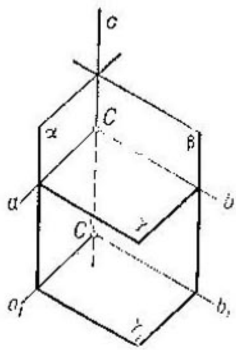

Fig. 169

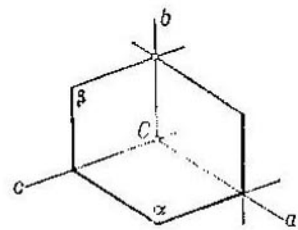

Fig. 170

Efectivamente, tracemos otro plano γ_1, distinto de γ, perpendicular a la recta c. Corta los planos α y β según las rectas a_1 y b_1. Los planos γ y γ_1 son paralelos pues son perpendiculares a la recta c. De aquí resulta que las rectas a y a_1 y las rectas b y b_1 son paralelas. Pero, según el teorema 19.1, la perpendicularidad de las rectas a y b implica la perpendicularidad de las rectas a_1 y b_1. Queda demostrada la afirmación.

TEOREMA 20.8. *El plano α es perpendicular al plano β si es perpendicular a una recta del plano β.*

DEMOSTRACION (fig. 170). Sea c la recta por donde se cortan los planos α y β y sea b una recta que está en el plano β y que es perpendicular al plano α. Tracemos en el plano α la recta a que pasa por el punto de intersección de las rectas b y c y que es perpendicular a la recta c.

La recta b es perpendicular a las rectas a y c, pues éstas pertenecen al plano α perpendicular a la recta b. La recta a es perpendicular a la recta c por construcción. Luego, el plano en el que se encuentran las rectas a y b es perpendicular a la recta c. Puesto que las rectas a y b son perpendiculares, los planos α y β lo son también por definición. Queda demostrado el teorema.

Del teorema 20.8 se deduce que *el plano β que pasa por la recta b perpendicular al plano α es también perpendicular al plano α.*

TEOREMA 20.9. *Si la recta a y el plano α son perpendiculares al plano β, la recta a está en el plano α o es paralela al plano α.*

DEMOSTRACION. Sea c la recta de intersección de los planos α y β (fig. 171). Tracemos un plano γ_1 perpendicular a la recta c. Cortará los planos α y β según las rectas perpendiculares a_1 y b_1. La recta a_1, perpendicular a las rectas c y b_1, es perpendicular al plano β. Por consiguiente, la recta a_1 es paralela a la recta a en virtud del teorema 20.5. Si la recta a no se encuentra en el plano α, es paralela al plano α según el teorema 19.2, pues es paralela a la recta a_1 que se halla en este plano. Queda demostrado el teorema.

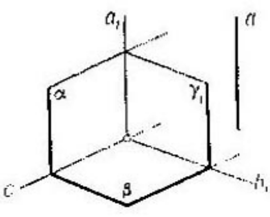

Fig. 171

Del teorema 20.9 se deduce que *la perpendicular trazada desde un punto cualquiera del plano α al plano perpendicular β, se encuentra en el plano α.*

TEOREMA 20.10. *Sean α y β dos planos distintos secantes y sea γ un plano perpendicular a cada uno de los planos α y β. El plano γ es, entonces, perpendicular a la recta c de intersección de los planos α y β.*

DEMOSTRACION (fig. 172). Tracemos la recta c_1 que es perpendicular al plano γ y que pasa por un punto exterior al plano α y al plano β. Según el teorema 20.9, la recta c_1 es paralela a los planos α y β. Por consiguiente, en virtud del teorema 19.4, la recta c_1 es paralela a la recta c. El teorema 20.4 implica ahora que la recta c es perpendicular al plano γ. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 20.11. *Sean β un plano y b una recta no perpendicular a él. Entonces, por la recta b se puede trazar un plano perpendicular al plano β y sólo uno.*

DEMOSTRACIÓN (fig. 173). Tracemos por un punto arbitrario de la recta b la recta b_1 perpendicular al plano β.

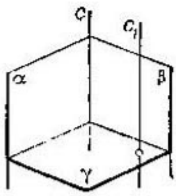

Fig. 172

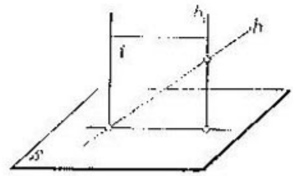

Fig. 173

El plano γ que pasa por las rectas b y b_1 es perpendicular al plano β en virtud del teorema 20.8.

Supongamos que por la recta b pasa otro plano γ_1 también perpendicular al plano β. Según el teorema 20.9, la recta b_1 está en el plano γ_1. Por el axioma E_3 los planos γ y γ_1 coinciden. Hemos llegado a una contradicción. Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Demuéstrese que las rectas que pasan por un mismo punto y que son perpendiculares a una misma recta pertenecen a un mismo plano.

2. Demuéstrese que por un punto se puede trazar una recta única que sea perpendicular a dos rectas no paralelas.

3. Demuéstrese que no existen cuatro rectas perpendiculares dos a dos.

4. Sean A, B, C y D cuatro puntos que no están en un mismo plano. Demuéstrese que se cortan en un punto los seis planos perpendiculares en los puntos medios a los segmentos que unen de dos en dos estos puntos. Dicho punto equidista de los cuatro puntos dados.

5. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos A y B es el plano que pasa por el punto medio del segmento AB y que es perpendicular a él.

6. Sea ABC un triángulo situado a un lado del plano α y sean a, b y c las distancias entre el plano α y los vértices del triángulo. Demuéstrese que la distancia entre el centro de gravedad del triángulo (punto de intersección de sus medianas) y el plano α es igual a $\frac{a+b+c}{3}$. ¿Cómo varía esta distancia si los vértices A y B están a un lado del plano α y el vértice C está al otro lado?

7. Demuéstrese que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos secantes consta de dos planos.

8. Demuéstrese que es una circunferencia el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde un mismo punto a los planos que pasan por una misma recta.

9. Demuéstrese que es una circunferencia el lugar geométrico de los pies de las oblicuas iguales trazadas desde un mismo punto a un plano determinado.

§ 21. ANGULOS ENTRE RECTAS Y PLANOS

Angulo entre rectas. Dos rectas secantes forman ángulos adyacentes y verticales. Los ángulos verticales son iguales y los adyacentes se complementan sumando dos rectos. La medida angular del menor de estos ángulos se denomina *valor principal* del ángulo entre rectas. Por consiguiente, el valor principal del ángulo entre rectas no es mayor que $90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En lo sucesivo, siempre entenderemos por ángulo entre rectas el valor principal.

Llamaremos ángulo entre rectas cruzadas el ángulo entre rectas secantes paralelas a aquéllas. Mostremos que *este ángulo no depende de qué rectas secantes se toman*. La demostración se fundamenta en las mismas ideas que la demostración del teorema 20.1 (§ 20).

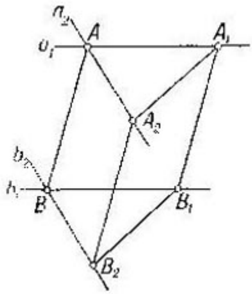

Fig. 174

Sean a_1 y a_2 dos rectas que se cortan en el punto A y que son paralelas a las rectas cruzadas consideradas. Sean b_1 y b_2 otro par de rectas análogas pero cortándose en el punto B. Supongamos que las rectas a_1, a_2, b_1 y b_2 no pertenecen a un mismo plano (fig. 174). En este caso, los planos α y β, que contienen las rectas a_1 y a_2 y las rectas b_1 y b_2 respectivamente, son paralelos. Tomemos en las rectas a_1 y a_2 unos puntos A_1 y A_2 distintos de A y tracemos las rectas A_1B_1 y A_2B_2 paralelas a la recta AB. Los cuadriláteros AA_1B_1B, AA_2B_2B y $A_1A_2B_2B_1$ son paralelogramos. Por consiguiente, $AA_1 = BB_1$, $AA_2 = BB_2$ y $A_1B_1 = A_2B_2$. En virtud del tercer criterio de la igualdad, los triángulos AA_1A_2 y BB_1B_2 son iguales. De la igualdad de los triángulos resulta la igualdad de sus ángulos A y B y, por consiguiente, la igualdad de los ángulos entre las rectas a_1 y a_2 y las rectas b_1 y b_2 en el sentido del valor principal.

Si las rectas a_1, a_2, b_1 y b_2 están en un mismo plano, tomemos las rectas secantes c_1 y c_2 que son paralelas a éstas y que no pertenecen al plano mencionado. Según lo demostrado, los ángulos entre las rectas a_1 y a_2 y las rectas b_1 y b_2 son iguales al ángulo entre las rectas c_1 y c_2 y, consecuentemente, son iguales entre sí. Queda demostrada la afirmación.

Hemos definido el concepto del ángulo entre rectas secantes y rectas cruzadas. Ahora completaremos esta definición aceptando que *el ángulo entre rectas paralelas o coincidentes es igual a cero*. Esta acepción sobre el ángulo entre rectas paralelas o coincidentes nos libera de la necesidad de considerar especialmente los casos peculiares de posición de rectas al enunciar los teoremas correspondientes a los ángulos.

TEOREMA 21.1. *Sean a_1 y a_2 dos rectas y sean b_1 y b_2 rectas paralelas a éstas. El ángulo entre las rectas a_1 y a_2 es entonces igual al ángulo entre las rectas b_1 y b_2.*

DEMOSTRACION. Si las rectas a_1 y a_2 son paralelas o coinciden, las rectas b_1 y b_2 también son paralelas o coinciden. En ambos casos los ángulos entre las rectas a_1 y a_2 y entre las rectas b_1 y b_2 son iguales a cero y, por consiguiente, son iguales entre sí. La igualdad de los ángulos para el caso de rectas secantes ha sido demostrada anteriormente. En el caso de rectas cruzadas, la igualdad de los ángulos se desprende de la definición del concepto de ángulo entre tales rectas. Queda demostrado el teorema.

Angulo entre recta y plano. Sea α un plano y sea a una recta. *El ángulo entre la recta a y el plano* α se define como sigue. Si la recta a es paralela al plano α o se halla en este plano, el ángulo entre los mismos se considera igual a cero. Si la recta a es perpendicular al plano α, el ángulo se considera igual a $90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

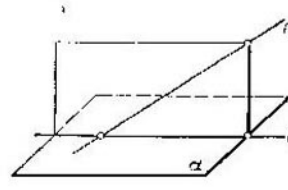

Fig. 175

Supongamos ahora que la recta a corta el plano α pero no es perpendicular a él. Tracemos por la recta a el plano perpendicular al plano α (fig. 175). Corta el plano α según la recta $\bar{a}$ llamada *proyección* de la recta a sobre el plano α. Llamaremos ángulo entre la recta a y el plano α el ángulo entre las rectas a y $\bar{a}$, o sea, el ángulo entre la recta a y su proyección sobre el plano α.

TEOREMA 21.2. *El ángulo entre la recta a y el plano α complementa hasta hacerlo recto el ángulo entre la recta a y toda perpendicular al plano α.*

DEMOSTRACION. Si la recta a se encuentra en el plano α o es paralela a éste, el ángulo entre a y α es igual a cero. Y como el ángulo entre la recta a y toda perpendicular al plano α es igual a 90°, la afirmación del teorema es evidente. Si la recta a es perpendicular al plano α, toda perpendicular al plano α coincide con a o es paralela a esta recta. El ángulo entre la recta a y el plano α es de 90° y el ángulo entre la recta a y toda perpendicular al plano α es igual a cero. La afirmación del teorema también es evidente.

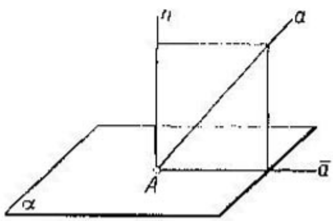

Fig. 176

Consideremos el caso general. Supongamos que la recta a corta el plano α en el punto A (fig. 176). Tracemos por el punto A la perpendicular n al plano α. Las tres rectas a, $\bar{a}$ y n están en un mismo plano, en el plano que proyecta la recta a sobre el plano α. Como quiera que el ángulo entre n y $\bar{a}$ es recto, los valores principales de los ángulos entre las rectas a y n y entre las rectas $\bar{a}$ y a se complementan hasta 90°. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 21.3. *Sean a y b dos rectas paralelas y sean α y β dos planos paralelos. El ángulo entre la recta a y el plano α es igual entonces al ángulo entre la recta b y el plano β.*

DEMOSTRACION. Sean a' y b' dos rectas perpendiculares a los planos α y β respectivamente. Las rectas a' y b' son paralelas o coincidentes. Según el teorema 21.1, los ángulos entre las rectas a y a' y entre las rectas b y b' son iguales. Por eso, los ángulos que complementan éstos hasta 90° también son iguales. Según el teorema 21.2, de aquí se desprende la igualdad de los ángulos entre la recta a y el plano α y entre la recta b y el plano β. Queda demostrado el teorema.

Angulo entre planos. Definamos el concepto de *ángulo entre dos planos*. Si los planos α y β son paralelos o coinciden, consideramos el ángulo entre ellos igual a cero. Supongamos que los planos α y β no son paralelos ni coinciden. Entonces se cortan según la recta c (fig. 177). Tracemos un plano γ perpendicular a la recta c. Corta los planos α y β según las rectas a y b. El ángulo entre los planos α y β se considera igual al ángulo entre las rectas a y b. Esta definición del *ángulo entre planos no depende de qué plano secante γ se eliga.* Efectivamente, sea γ' otro plano perpendicular a la recta c. Corta los planos α y β según las rectas a' y b' paralelas a las rectas a y b. Por consiguiente, las rectas a' y b' forman el mismo ángulo que las rectas a y b. Queda demostrada la afirmación.

TEOREMA 21.4. *El ángulo entre los planos α y β es igual al ángulo entre las perpendiculares a y b a estos planos.*

DEMOSTRACION. Hagamos, ante todo, una observación. Sean a y b dos rectas perpendiculares pertenecientes a un

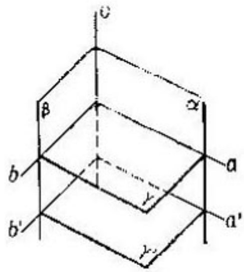

Fig. 177

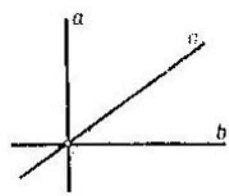

Fig. 178

mismo plano. Sea c cualquier recta de este plano que pasa por el punto de intersección de las rectas a y b. En este caso, los ángulos que la recta c forma con las rectas a y b se complementan hasta 90° (fig. 178). Pasemos ahora a la demostración del teorema.

Si los planos α y β son paralelos o coinciden, las rectas a y b, perpendiculares a éstos, también son paralelas o coinciden. En este caso, el ángulo entre los planos y el ángulo entre las rectas son iguales a cero. Por consiguiente, el ángulo entre los planos es igual al ángulo entre las perpendiculares a los mismos.

Supongamos ahora que los planos α y β no coinciden ni son paralelos, o sea, que se cortan según la recta c. Tracemos un plano γ perpendicular a la recta c (fig. 179). Corta los planos α y β según las rectas a_1 y b_1 y corta la recta c en el punto C. Tracemos por el punto C las rectas a y b perpendiculares a los planos α y β. Pertenecen al plano γ.

Como hemos explicado, el ángulo entre las rectas a_1 y b complementa hasta 90° el ángulo entre las rectas a_1 y b_1. El ángulo entre las rectas a y b complementa hasta 90° el ángulo entre las rectas a_1 y b. En resumen, el ángulo entre las rectas a_1 y b_1 es igual al ángulo entre las rectas a y b. Queda demostrado el teorema.

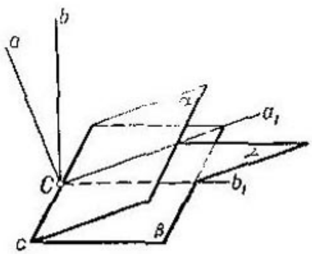

Fig. 179

TEOREMA 21.5. *Si el plano α es paralelo al plano α' y el plano β es paralelo al plano β', el ángulo entre los planos α y β es igual al ángulo entre los planos α' y β'.*

DEMOSTRACION. Tracemos una recta a perpendicular al plano α. Esta recta es perpendicular al plano α'. Análogamente, toda recta b perpendicular al plano β es perpendicular al plano β'. Según el teorema 21.4, el ángulo entre dos planos es igual al ángulo entre las perpendiculares a estos planos. Por consiguiente, el ángulo entre los planos α y β y el ángulo entre los planos α' y β' tienen ambos el mismo valor, el del ángulo entre las rectas a y b. Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Sean A, B y C tres puntos que no se hallan en una recta. ¿Cuánto vale el ángulo entre las rectas CA y CB si estas rectas forman ángulos α y β con la recta AB, siendo $\alpha + \beta < 90°$?

2. Sean α un plano, a una recta que lo corta y x una recta cualquiera del plano α. Demuéstrese que el ángulo entre las rectas a y x no es menor que el ángulo entre la recta a y el plano α.

3. Sea a una recta y sean α_1, α_2 y α_3 los ángulos que forma con tres rectas recíprocamente perpendiculares. Demuéstrese que

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1.$$

4. Sean α_1, α_2 y α_3 los ángulos que forma una recta con tres planos recíprocamente perpendiculares. Demuéstrese que

$$\operatorname{sen}^2\alpha_1 + \operatorname{sen}^2\alpha_2 + \operatorname{sen}^2\alpha_3 = 1.$$

5. Sean α_1, α_2 y α_3 y, respectivamente, β_1, β_2 y β_3 los ángulos que las rectas a y b forman con tres rectas recíprocamente perpendicu-

lares. Demuéstrese que siendo φ el ángulo entre las rectas a y b se tiene

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3.$$

§ 22. ANGULOS DIEDROS, TRIEDROS Y POLIEDROS

Definición de los ángulos diedros y triedros. Sean α y β dos planos que se cortan según la recta c. La recta c divide cada uno de los planos α y β en dos semiplanos. Tomemos en cada uno de estos planos un semiplano, llamándolos

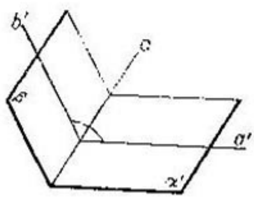

Fig. 180

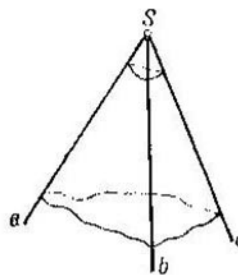

Fig. 181

α' y β' (fig. 180). La figura formada por los semiplanos α' y β' se llama *ángulo diedro* y los propios semiplanos α' y β' se denominan *caras* del ángulo diedro. La recta c recibe el nombre de *arista* del ángulo diedro. Tracemos un plano cualquiera γ perpendicular a la recta c. Cortará los semiplanos α' y β' según las semirrectas a' y b'. El ángulo que forman las semirrectas a' y b' se denomina *ángulo rectilíneo* del ángulo diedro. La medida del ángulo diedro se considera igual a la medida del rectilíneo correspondiente. Todos los rectilíneos del ángulo diedro son iguales y, por ello, la medida del ángulo diedro no depende de qué rectilíneo se eliga.

Es importante subrayar la diferencia entre el ángulo formado por los planos α y β y el ángulo entre los semiplanos α' y β' de estos planos. El ángulo entre los planos no es nunca mayor que el recto. El ángulo diedro puede tener cualquier valor comprendido entre cero y 180°. Si el ángulo diedro es menor o igual a 90°, el ángulo entre los planos a los que pertenecen sus caras es igual al ángulo diedro. En el caso contrario, complementa hasta 180° el ángulo diedro.

Sean a, b y c tres semirrectas que parten del mismo punto S y que no pertenecen a un mismo plano (fig. 181). Las semirrectas a, b y c forman tres ángulos (ab), (bc) y (ac). La figura constituida por estos tres ángulos se denomina *ángulo triedro*. El punto S recibe el nombre de *vértice* del ángulo triedro, las semirrectas a, b y c se denominan *aristas* y los propios ángulos planos se llaman *caras*. Los planos de los ángulos (ab) y (ac) se cortan según la recta que contiene la semirrecta a. Los semiplanos de estos planos que contienen las semirrectas b y c forman un ángulo diedro. Este ángulo se denomina *ángulo diedro relativo a la arista a del ángulo triedro*. También se dice que es el ángulo diedro opuesto al ángulo plano (bc).

Teorema de los cosenos para el ángulo triedro. TEOREMA. 22.1. *Sean* α, β *y* γ *los ángulos planos del ángulo triedro y sea* C *el ángulo diedro opuesto al ángulo plano* γ. *Entonces, se tiene*

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos C.$$

DEMOSTRACION. Sea S el vértice del ángulo triedro, sean a, b y c sus aristas, sean α, β y γ los ángulos planos formados

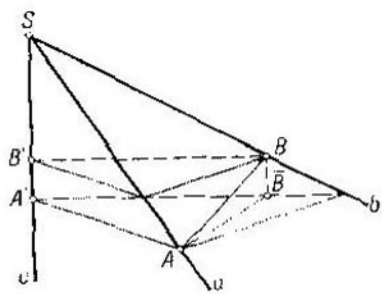

Fig. 182

por las aristas b y c, c y a, a y b respectivamente y sea C el ángulo diedro relativo a la arista c, es decir, el ángulo diedro opuesto al ángulo plano γ (fig. 182). Tomemos en las aristas a y b los segmentos SA y SB de longitud unidad. Aplicando el teorema del coseno al triángulo ASB, tendremos

$$AB^2 = 1 + 1 - 2\cos\gamma.$$

Calculemos ahora la longitud del segmento AB por otro método. Tracemos, para ello, los planos que pasan por los puntos A y B y que son perpendiculares a la arista c. Cortarán esta arista o su prolongación en los puntos A' y B'. Sea $\bar{B}$ el pie de la perpendicular trazada desde el punto B al plano que pasa por el punto A. Aplicando el teorema del coseno al triángulo $AA'\bar{B}$, tendremos

$$A\bar{B}^2 = AA'^2 + A'\bar{B}^2 - 2\,AA' \cdot A'\bar{B} \cos C.$$

Pero $AA' = \operatorname{sen} \beta$ y $A'\bar{B} = BB' = \operatorname{sen} \alpha$. Por lo tanto,

$$A\bar{B}^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos C.$$

Del triángulo rectángulo $AB\bar{B}$ obtenemos por el teorema de Pitágoras

$$AB^2 = A\bar{B}^2 + B\bar{B}^2.$$

Pero $B\bar{B} = |\cos \beta - \cos \alpha|$. Por eso,

$$AB^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + (\cos \beta - \cos \alpha)^2 -$$
$$- 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos C =$$
$$= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos C.$$

Comparando las dos expresiones obtenidas para AB^2, encontramos

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos C.$$

Queda demostrado el teorema.

Angulo triedro polar a un ángulo triedro. Sean a, b y c las aristas del ángulo triedro de vértice S. El plano del ángulo (bc) divide el espacio en dos semiespacios. La semirrecta a está en uno de ellos. Tracemos por el punto S la semirrecta a' perpendicular al plano del ángulo (bc) dirigiéndola al semiespacio suplementario al que pertenece la semirrecta a. Construyamos de la misma forma las semirrectas b' y c' perpendiculares a los planos de los ángulos (ac) y (ab) respectivamente. El ángulo triedro cuyas aristas son las semirrectas a', b' y c' se llama *polar* al ángulo (abc) inicial (fig. 183). Es fácil ver que *las caras del ángulo polar*

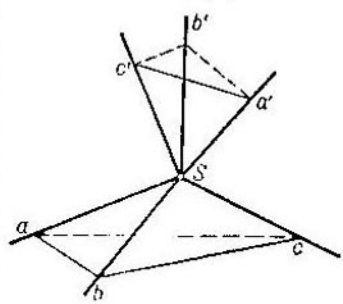

Fig. 183

son perpendiculares a las aristas del inicial. La propiedad de polaridad de los ángulos triedros es recíproca, o sea, si el ángulo triedro $(a'b'c')$ es polar al ángulo triedro (abc), el ángulo triedro (abc) es polar al ángulo triedro $(a'b'c')$. Basándonos en la propiedad de los ángulos de lados perpendiculares, deducimos que los ángulos planos del ángulo polar complementan hasta 180° los diedros respectivos del ángulo triedro inicial. Por ejemplo, el ángulo plano $(b'c')$ complementa hasta 180° el ángulo diedro relativo a la arista a, etc. Análogamente, los diedros del ángulo triedro polar complementan hasta 180° los ángulos planos correspondientes del inicial. En particular, el ángulo diedro relativo a la arista a' complementa hasta 180° el ángulo plano (bc).

TEOREMA 22.2. *Sean A, B y C los ángulos diedros del ángulo triedro. Sea γ el ángulo plano opuesto al ángulo diedro C. Entonces, se tiene*

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos \gamma.$$

Este teorema es corolario directo del teorema 22.1 aplicado al ángulo triedro polar al ángulo inicial.

Teorema de los senos para el ángulo triedro. TEOREMA 22.3. *Sean α, β y γ los ángulos planos del ángulo triedro y sean A, B y C los ángulos diedros opuestos a éstos. Entonces se tiene*

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen} C}.$$

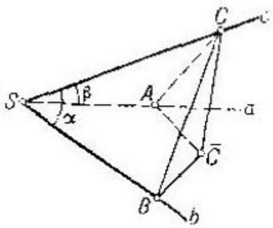

Fig. 184

DEMOSTRACION. Tomemos en la arista c del ángulo triedro el segmento SC de longitud unidad (fig. 184). Tracemos desde el punto C la perpendicular al plano del ángulo (ab). Sea $\bar{C}$ el pie de esta perpendicular. Tracemos por el punto C los planos perpendiculares a las aristas a y b y llamemos A y B los puntos de intersección de estos planos con las aristas a y b o con sus prolongaciones.

Calculemos la longitud de la perpendicular $C\bar{C}$. El triángulo rectángulo SCB de ángulo recto B da

$$CB = 1 \cdot \operatorname{sen} \alpha.$$

Ahora, partiendo del triángulo rectángulo $CB\bar{C}$ de ángulo recto $\bar{C}$, encontramos la longitud de la perpendicular $C\bar{C}$:

$$C\bar{C} = CB \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} B$$

La longitud de la perpendicular $C\bar{C}$ se puede determinar de otro modo, empleando los triángulos rectángulos ACS y $CA\bar{C}$. Esto da

$$C\bar{C} = \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,A.$$

Comparando las expresiones obtenidas para el segmento $C\bar{C}$, encontramos

$$\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,B = \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,A.$$

De aquí resulta

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,A} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,B}.$$

Análogamente se obtiene la proporción

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,B} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,C}.$$

Queda demostrado el teorema.

Relación entre los ángulos planos del ángulo triedro. TEOREMA 22.4. *En el ángulo triedro todo ángulo plano es menor que la suma de los otros dos ángulos planos.*

DEMOSTRACION. Sean α, β y γ los ángulos planos del ángulo triedro. Mostremos que $\gamma < \alpha + \beta$. Aplicando al ángulo triedro el teorema 22.1, obtenemos

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta\cos C.$$

Puesto que $\cos C > -1$ y que $\text{sen}\,\alpha$ y $\text{sen}\,\beta$ son positivos, tenemos la desigualdad

$$\cos\gamma > \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta.$$

El segundo miembro de esta desigualdad no es otra cosa sino $\cos(\alpha + \beta)$. Por consiguiente, $\cos\gamma > \cos(\alpha + \beta)$. Como se sabe, el coseno del ángulo disminuye cuando el ángulo aumenta de 0° hasta 180°. De aquí resulta que $\gamma < < \alpha + \beta$. Queda demostrado el teorema.

Angulos poliedros. Supongamos que las semirrectas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ parten de un mismo punto S de modo que tres semirrectas consecutivas cualesquiera a_1, a_2, a_3; a_2, a_3, a_4; ...; a_n, a_1, a_2 no se hallen en un mismo plano. La figura formada por los ángulos planos (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_n, a_1) se llama ángulo *poliedro* (fig. 185). El punto S se denomina *vértice* del ángulo poliedro y las semirrectas

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ son sus *aristas*. El ángulo poliedro se dice *convexo* si está a un lado de cualquiera de sus ángulos planos.

TEOREMA 22.5. *La suma de los ángulos planos del ángulo poliedro convexo es menor que* 360°.

DEMOSTRACION. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las aristas del ángulo poliedro convexo de vértice S. Tomemos en las aristas a_1 y a_2 unos puntos A_1 y A_2. Tomemos ahora en la arista a_3 un punto A_3 suficientemente próximo al vértice S y consideremos el plano α que pasa por los puntos A_1, A_2 y A_3 (fig. 185). Si el punto A_3 está suficientemente próximo al

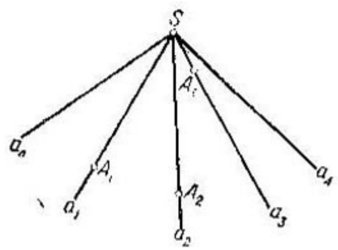

Fig. 185

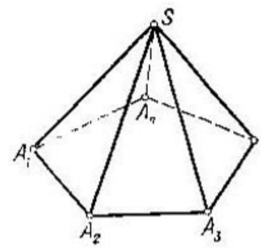

Fig. 186

vértice S, el plano α corta todas las aristas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ los puntos de intersección del plano α y de las aristas del ángulo S. Como el ángulo poliedro S es convexo, resulta que es convexo el polígono P de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (fig. 186).

Consideremos el ángulo poliedro S y los ángulos triedros de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$. La suma de todos los ángulos planos de estos últimos se compone de la suma de los ángulos del polígono P (o sea, de $180°n - 360°$) y de la suma de los ángulos de los triángulos A_1A_2S, $A_2A_3S, \ldots$ $\ldots, A_nA_1S$ (o sea, de $180°n$). Por lo tanto, la suma de todos los ángulos planos es igual a $2 \cdot 180°n - 360°$.

En cualquiera de los ángulos triedros A_k el ángulo perteneciente al polígono P es menor que la suma de los otros dos ángulos. Por eso, la suma que hemos encontrado de todos los ángulos planos es mayor que $(180°n - 360°)\,2 + \vartheta$, donde ϑ es la suma de los ángulos planos en el vértice S, o sea, $(180°n - 360°)\,2 + \vartheta < 2 \cdot 180°n - 360°$. De aquí resulta $\vartheta < 360°$. Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Tres rectas a, b y c no pertenecientes a un mismo plano se cortan en el punto O. El punto O divide cada una de estas rectas en dos semirrectas. Tomando una semirrecta de cada recta, se puede construir ocho ángulos triedros. Exprésense sus ángulos planos y diedros a través de los ángulos planos y diedros de uno de ellos.

2. Sean, en un ángulo triedro, α, β y γ los ángulos planos y A, B y C los ángulos diedros opuestos a ellos. Sea φ el ángulo entre la arista del ángulo diedro C y el plano del ángulo γ. Demuéstrese que

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} B.$$

3. Dos ángulos planos del ángulo triedro son iguales a α y el ángulo diedro comprendido entre ellos es igual a φ. Hállense los ángulos restantes.

4. Un ángulo diedro del ángulo triedro es recto y los ángulos planos contiguos son iguales a α y β. Hállense los ángulos restantes.

5. En el ángulo triedro son conocidos un ángulo plano y dos ángulos diedros contiguos a éste con la particularidad de que uno de estos ángulos diedros es recto. Hállense los ángulos restantes.

§ 23. MOVIMIENTO Y OTRAS TRANSFORMACIONES EN EL ESPACIO

El movimiento y sus propiedades. El concepto del movimiento se introduce en el espacio igual que en el plano. Es decir, entendemos por *movimiento* toda aplicación biunívoca del espacio en sí mismo que conserva las distancias entre los puntos. O sea, si X e Y son dos puntos cualesquiera del espacio y X' e Y' son los puntos que les corresponden, se tiene $XY = X'Y'$. El movimiento en el espacio posee propiedades análogas a las que tiene el movimiento en el plano. En particular, *por efecto de un movimiento las rectas se transforman en rectas conservándose el orden de los puntos en la recta*. Esto significa que si tres puntos A, B y C están en una recta y el punto B se halla entre A y C, los puntos correspondientes A', B' y C' también se encuentran en una recta estando el punto B' entre A' y C'. La demostración de esta propiedad del movimiento en el espacio en nada difiere de la demostración respectiva para el movimiento en el plano. Por esta razón no la damos.

Por efecto de un movimiento en el espacio, los planos se transforman en planos. Demostremos esta propiedad. Sea α un plano y sean A, B y C tres puntos del mismo no pertenecientes a una recta. El movimiento transforma estos puntos en los puntos A', B' y C' que tampoco se hallan en una recta. Sea α' el plano que pasa por los puntos A', B' y C'. Mostremos que el movimiento considerado transforma el plano α en el plano α'.

Sea X un punto cualquiera del plano α. Tracemos en el plano α la recta que pasa por el punto X y que corta el triángulo ABC en dos puntos P y Q. Los puntos P' y Q', correspondientes a P y Q, pertenecen al triángulo $A'B'C'$ y, por ende, al plano α' también. Como quiera que la recta PQ se transforma en la recta $P'Q'$ y puesto que el punto X está en la recta PQ, resulta que el punto X' que le corresponde se halla en la recta $P'Q'$ y, por consiguiente, en el plano α'. O sea, el movimiento transforma todo punto X del plano α en un punto X' del plano α'.

Mostremos ahora que todo punto X' del plano α' es imagen de un punto determinado X del plano α. Con este fin, tracemos la recta que pasa por el punto X' y que corta el triángulo $A'B'C'$ en dos puntos P' y Q'. Sean P y Q los puntos cuyas imágenes son los puntos P' y Q'. La recta PQ se transforma, por efecto del movimiento, en la recta $P'Q'$. Por consiguiente, el punto X' es imagen de uno de los puntos que pertenece a la recta PQ y, por ende, al plano α también. Queda demostrada la afirmación.

Igual que en la Planimetría, a través del movimiento, se define la igualdad de las figuras espaciales. Es decir, dos figuras F y F' se llaman *iguales* si coinciden por efecto de un movimiento, o sea, si existe un movimiento que transforma la figura F en la figura F'.

Simetrías respecto al plano y al punto. Igual que en el plano se introduce el concepto de simetría respecto a la recta, en el espacio se introduce el concepto de simetría respecto al plano. A saber, sea α un plano y sea X un punto cualquiera del espacio. Tracemos por el punto X la recta a perpendicular al plano α. Cortará el plano α en un punto A. Construyamos ahora el punto X' ateniéndonos a la regla siguiente. Si el punto X se halla en el plano α, el punto X' coincide con X. Si el punto X no se halla en el plano α, el punto X' se encuentra en el otro semiespacio respecto al plano α, pertenece a la recta a y las distancias AX y AX' son iguales (fig. 187). El punto X' se llama *simétrico* del punto X respecto al plano α. La aplicación del espacio en sí mismo que a todo punto X le pone en correspondencia el punto X' simétrico respecto al plano α, se llama *transformación de simetría* o *reflexión especular respecto al plano* α.

Igual que la reflexión especular respecto a la recta en el plano, *la reflexión especular respecto al plano en el espacio es un movimiento*. Para demostrar esta afirmación basta observar que en el espacio la reflexión especular respecto al plano α se reduce para todo plano β, perpendicular al α, a la reflexión especular respecto a la recta según la que se cortan los planos α y β. Aclaremos esto.

Sean P y Q dos puntos arbitrarios del espacio. Tracemos el plano β que pasa por la recta PQ y que es perpendicular al plano α. Cortará el plano α según la recta b. Los puntos P' y Q', simétricos de los P y Q respecto al plano α, también serán simétricos de los puntos P y Q respecto a la recta b. Efectivamente, las rectas, que son perpendiculares al plano α y que pasan por los puntos P y Q, se encuentran en el plano β y son perpendiculares a la recta b. Puesto que en el plano la simetría respecto a la recta conserva las distancias ($PQ = P'Q'$), la simetría respecto al plano en el espacio también posee esta propiedad. Por consiguiente, la simetría respecto al plano es un movimiento. Queda demostrada la afirmación.

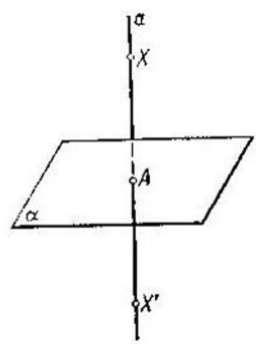

Fig. 187

La transformación de simetría respecto al punto en el espacio se define igual que en el caso del plano. Al igual que en el plano, *la transformación de simetría respecto al punto en el espacio es un movimiento*. Para demostrarlo es suficiente observar que en el espacio la transformación de simetría respecto al punto O se reduce para todo plano α que pasa por el punto O a la transformación de simetría respecto al mismo punto O en este plano.

Empleando los conceptos de simetrías respecto al plano y respecto al punto, se introducen los conceptos de *plano de simetría* y de *centro de simetría* para las figuras espaciales de la misma forma que para las figuras planas se definen los conceptos de eje de simetría y de centro de simetría.

Traslación paralela y rotación en el espacio. La traslación paralela en el espacio se define igual que la traslación paralela en el plano. Es decir, recibe el nombre de *traslación paralela* el movimiento en el que los puntos se desplazan a una misma distancia según rectas paralelas.

Igual que en el plano, *dos simetrías en el espacio realizadas sucesivamente respecto a los puntos* O_1 *y* O_2 *equivalen a la traslación paralela* en la que los puntos del espacio se desplazan a una distancia igual al duplo de la longitud del segmento O_1O_2 según las rectas paralelas a la recta O_1O_2.

Igual que en el plano, *la traslación paralela en el espacio queda perfectamente determinada al indicarse dos puntos correspondientes.*

Las demostraciones de estas propiedades de la traslación paralela en el espacio repiten al pie de la letra las demostraciones de las propiedades correspondientes de la traslación paralela en el plano. Por esta razón no las damos.

Se llama *rotación* de ángulo α alrededor de la recta a el movimiento en el que los puntos de la recta a permanecen fijos y los semiplanos limitados por la recta a giran en ángulo α, o sea, cada uno de estos semiplanos forma ángulo diedro, de arista a, igual a α con el semiplano que le corresponde. La recta a se denomina *eje de rotación* y el ángulo α, *ángulo de rotación.*

Dos reflexiones especulares, realizadas sucesivamente respecto a los planos secantes α *y* β, *equivalen a una rotación alrededor de la recta c según la que se cortan los planos.*

Para demostrar esta propiedad basta observar que dicha transformación se reduce en todo plano γ perpendicular a la recta c, a dos reflexiones especulares respecto a las rectas según las que el plano γ corta los planos α y β. Pero, como es sabido, dos reflexiones espaculares de esta índole equivalen a una rotación respecto al punto de intersección del plano γ y de la recta c. Queda demostrada la afirmación.

Transformación de semejanza y homotecia en el espacio. Exactamente igual que en el caso del plano, se definen en el espacio la *transformación de semejanza* y la *homotecia*, la transformación de semejanza más simple. En el espacio, la transformación de semejanza aplica rectas en rectas y planos en planos y conserva los ángulos entre rectas y planos.

La figura F' en que la transformación de semejanza aplica la figura F se denomina *semejante a* F. La figura semejante al triángulo es el triángulo semejante a éste. La razón de las distancias entre los puntos correspondientes de las figuras semejantes es la misma y coincide con el coeficiente de semejanza. La razón de las áreas de las figuras semejantes es igual al cuadrado del coeficiente de semejanza. La última afirmación, evidente para el triángulo, es, por consiguiento, válida para cualquier figura que admita la partición en triángulos.

Proyección de un plano sobre otro. Hasta aquí hemos tratado de diferentes transformaciones del espacio en sí mismo. Consideremos ahora la importante transformación de un plano en otro, llamada *proyección*. Sean α y β dos planos cualesquiera y sea h una recta que corta cada uno de estos planos (fig. 188). Sea X un punto arbitrario del plano α. Tracemos la recta que pasa por el punto X y que es paralela a la recta h. Cortará el plano β en el punto X'. La aplicación del plano α sobre el plano β que a todo punto X hace corresponder de la forma explicada el punto X' se llama *proyección paralela* del plano α sobre el plano β. Es evidente que la proyección paralela es una aplicación biunívoca. Si las rectas que realizan la proyección son perpendiculares al plano β, la proyección se denomina *ortogonal*.

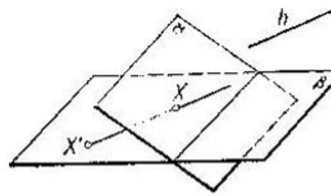

Fig. 188

La proyección paralela del plano α sobre el plano β transforma rectas en rectas y conserva el orden de los puntos en la recta. Las rectas paralelas se transforman en paralelas y las rectas secantes en rectas secantes. Se conserva la proporción entre los segmentos de una misma recta o de rectas paralelas. La demostración de estas propiedades es suficientemente sencilla y queda a cargo del lector.

Sea F una figura en el plano α. Si el punto X describe la figura F, el punto correspondiente X' de la proyección paralela describe una figura F' en el plano β. La figura F' se denomina *proyección* de la figura F.

TEOREMA 23.1. *El area de la figura F y el área de su proyección ortogonal F' verifican la relación*

$$S' = S \cos \varphi,$$

donde φ es el ángulo entre los planos a los que pertenecen la figura F y su proyección F'.

DEMOSTRACION. Nos limitaremos al caso en que la figura F puede ser dividida en triángulos. En este caso basta demostrar, obviamente, la validez del teorema para el triángulo. Sea, pues, F un triángulo. Sea α el plano al que pertenece F y sea β el plano sobre el cual se proyecta F.

Si el plano α es paralelo a β, la afirmación del teorema es evidente porque la figura F' es igual a la figura F y se obtiene de F por efecto de una traslación paralela en la dirección perpendicular a los planos.

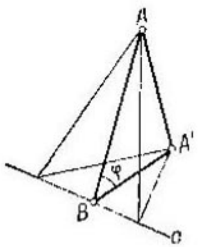

Fig. 189

Supongamos que el plano α no es paralelo al plano β y lo corta según la recta c. Sin perder generalidad, se puede aceptar que uno de los lados del triángulo F es paralelo a la recta c. Esto siempre puede ser alcanzado dividiendo el triángulo F en dos triángulos. Es más, puede aceptarse que un lado del triángulo descansa sobre la recta c. Esto se puede alcanzar pasando del plano β a un plano β' paralelo a β.

Por consiguiente, basta demostrar el teorema para el caso en que la figura es un triángulo cuya base descansa en la recta c según la que se cortan los planos α y β (fig. 189). En este caso los triángulos F y F' tienen base común que está en la recta c y sus alturas AB y $A'B$ están ligadas por la relación $A'B = AB \cos \varphi$. Para sus áreas obtenemos entonces $S' = S \cos \varphi$.

Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Sea A un punto, sea a una recta que pasa por él y sea α un plano que pasa por la recta a. El punto A divide la recta a en dos semirrectas; sea a' una de ellas. La recta a divide el plano α en dos semiplanos; sea α' uno de ellos. El plano α divide el espacio en dos semiespacios; sea E'_α uno de ellos. Construyamos del mismo modo el punto B, la semirrecta b', el semiplano β' y el semiespacio E'_β.

Demuéstrese que existe un movimiento que transforma el punto A en el B, la semirrecta a' en la b', el semiplano α' en el β' y el semiespacio E'_α en el E'_β.

2. Demuéstrese que dos transformaciones de simetría, realizadas sucesivamente respecto a los puntos O_1 y O_2, equivalen a la traslación paralela según la recta O_1O_2 a la distancia del segmento $2 \cdot O_1O_2$.

3. Demuéstrese que dos reflexiones especulares realizadas sucesivamente respecto a planos paralelos equivalen a la traslación paralela en la dirección perpendicular a estos planos y a la distancia igual al duplo de la distancia entre los planos.

4. Demuéstrese la igualdad de dos ángulos triedros si los ángulos planos de uno son iguales a los ángulos planos del otro o si los ángulos diedros de uno son iguales a los ángulos diedros del otro.

5. Demuéstrese que todo triángulo es proyección ortogonal de un triángulo regular.

El cuerpo geométrico. Sea G una figura plana. El punto X de la figura G se llama punto *interior* si todos los puntos del plano suficientemente próximos al punto X pertenecen a la figura G. Esto significa que existe un número positivo ε tal que todos los puntos del plano que están a una distancia menor que ε del punto X pertenecen a la figura G. La figura G se denomina *recinto* si todos sus puntos son interiores y cualesquiera dos de sus puntos se pueden unir mediante una quebrada que pertenece íntegramente a la figura G. Por ejemplo, el círculo sin su circunferencia es un recinto.

Sea G un recinto plano. El punto X del plano se denomina *punto frontera* del recinto G si tan cerca a X como se quiera existen puntos que pertenecen a la figura G y puntos que no le pertenecen. Esto significa que cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$, existen a una distancia de X menor que ε puntos que pertenecen a la figura G y puntos que no le pertenecen. Los puntos frontera forman la *frontera* del recinto G. En el ejemplo antes citado, la circunferencia del círculo consta de puntos frontera. Agregando al recinto G sus puntos frontera obtenemos una figura nueva $\bar{G}$. Se la llama *recinto cerrado*.

Los puntos interiores del polígono convexo definidos en la Planimetría constituyen un recinto. Agregándole el propio polígono obtenemos un recinto cerrado. Este recinto fue llamado polígono complementado. En el parágrafo presente y en el que sigue la palabra «polígono» se emplea en el sentido de polígono complementado.

Literalmente igual que para las figuras planas, se definen los conceptos de *punto interior* de una figura espacial, de *recinto espacial* y de su *frontera*. Huelga repetir estas definiciones. Todo recinto espacial cerrado se denomina *cuerpo*. El cuerpo cuya frontera consta de un número finito de polígonos se llama *poliedro*. Los polígonos que limitan el poliedro se denominan *caras* del mismo. El poliedro se llama *convexo* si se encuentra a un lado del plano de cada una de sus caras. Consideraremos en este parágrafo los poliedros elementales, el prisma y la pirámide.

Prisma. Sean α y α' dos planos paralelos y sea h una recta que los corta. Sea P un polígono convexo en el plano α y sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sus vértices. Tracemos por todo punto X del polígono P la recta paralela a la recta h; sea X'

el punto de su intersección con el plano α' (fig. 190). Los segmentos XX' forman un poliedro. Este poliedro se denomina *prisma*. Su frontera consta del polígono P, del polígono igual P' en el plano α' y de los paralelogramos $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, . . . Los polígonos P y P' se llaman *bases* del prisma y los paralelogramos, *caras laterales*. Los segmentos $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, . . . son las *aristas laterales* del prisma. El prisma se denomina *recto* si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases. En el caso contrario, se dice que el prisma es *oblicuo*.

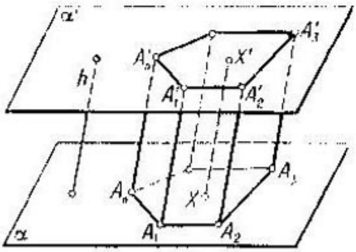

Fig. 190

Se llama *superficie lateral* del prisma (más exactamente, área de la superficie lateral) la suma de las áreas de las caras laterales. La *superficie total* del prisma consta de su superficie lateral más las áreas de sus bases.

TEOREMA 24.1. *La superficie lateral del prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura del prisma, o sea, por la longitud de sus aristas laterales.*

DEMOSTRACION. Las caras laterales del prisma recto son rectángulos. Las bases de estos rectángulos son los lados del polígono que constituye la base del prisma y sus alturas son iguales a la longitud de las aristas laterales. De aquí se deduce que la superficie lateral del prisma es igual a

$$S = a_1l + a_2l + \dots + a_nl = pl,$$

donde p es el perímetro de la base del prisma y l es la longitud de las aristas laterales. Queda demostrado el teorema.

Paralelepípedo. El prisma se denomina *paralelepípedo* si tiene como base un paralelogramo (fig. 191). Todas las caras del paralelepípedo son paralelogramos. Se llama *diagonal* del paralelepípedo todo segmento que une dos vértices no pertenecientes a una misma cara. El paralelepípedo tiene cuatro diagonales $A_1A'_3$, $A_2A'_4$, $A_3A'_1$ y $A_4A'_2$.

TEOREMA 24.2. *Las diagonales del paralelepípedo se cortan en un punto que las divide por la mitad.*

DEMOSTRACION. Consideremos dos diagonales cualesquiera del paralelepípedo, digamos $A_1A'_3$ y $A_4A'_2$ (fig. 192). Puesto que los cuadriláteros $A_1A_2A_3A_4$ y $A_2A'_2A'_3A_3$ son paralelogramos, el cuadrilátero $A_4A_1A'_2A'_3$ es también un paralelogramo. Las diagonales $A_1A'_3$ y $A_4A'_2$ del paralelepípedo son las diagonales de este paralelogramo. Por eso, se cortan y el punto de intersección O las divide por la mitad. Análogamente se demuestra que las diagonales $A_1A'_3$ y $A_2A'_4$, así como las diagonales $A_1A'_3$ y $A_3A'_1$, se cortan y el punto de intersección las divide por la mitad. De aquí

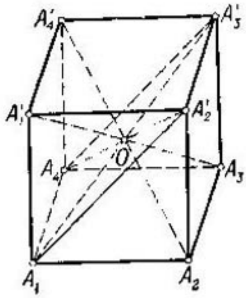

Fig. 191

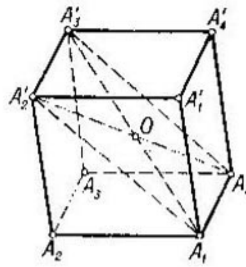

Fig. 192

resulta que las cuatro diagonales del paralelepípedo se cortan y que el punto de intersección las divide por la mitad. Queda demostrado el teorema.

Las caras del paralelepípedo sin vértices comunes se llaman opuestas.

TEOREMA 24.3. *Las caras opuestas del paralelepípedo son paralelas e iguales.*

DEMOSTRACION. Consideremos dos caras opuestas cualesquiera del paralelepípedo; por ejemplo, $A_1A_2A'_2A'_1$ y $A_3A_4A'_4A'_3$ (fig. 191). Como quiera que todas las caras del paralelepípedo son paralelogramos, la recta A_1A_2 es paralela a la recta A_3A_4 y la recta $A_1A'_1$ es paralela a la recta $A_4A'_4$. De aquí se deduce que son paralelos los planos donde están las caras consideradas del paralelepípedo (teoremas 19.1 y 19.4). Puesto que las caras del paralelepípedo son paralelogramos, resulta que todos los segmentos A_1A_4, $A'_1A'_4$, $A'_2A'_3$ y A_2A_3 son paralelos e iguales. De aquí deducimos que la cara $A_1A_2A'_2A'_1$ se superpone a la cara $A_4A_3A'_3A'_4$ por efecto de la traslación paralela según la arista A_1A_4. Por lo tanto, estas caras son iguales. Análogamente se demuestra que son paralelos e iguales los otros pares de caras opuestas del paralelepípedo. Queda demostrado el teorema.

El paralelepípedo recto cuya base es un rectángulo se denomina *paralelepípedo rectangular*. Todas sus caras son rectángulos.

Las longitudes de las aristas no paralelas del paralelepípedo rectangular se llaman *dimensiones lineales* del mismo. Todo paralelepípedo rectangular tiene tres dimensiones lineales.

TEOREMA 24.4. *En el paralelepípedo rectangular el cuadrado de cualquier diagonal es igual a la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones lineales.*

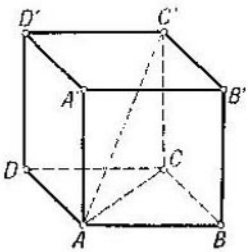

Fig. 193

DEMOSTRACION (fig. 193). Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $AC'C$, obtenemos

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ACB, obtenemos $AC^2 = AB^2 + BC^2$. De aquí resulta $AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2$. Las aristas AB, BC y CC' no son paralelas y, por consiguiente, sus longitudes son las dimensiones lineales del paralelepípedo. Queda demostrado el teorema.

Pirámide. Sea P un polígono convexo perteneciente al plano α y sea S un punto que no pertenece al plano α.

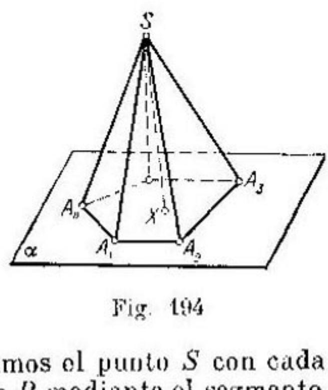

Fig. 194

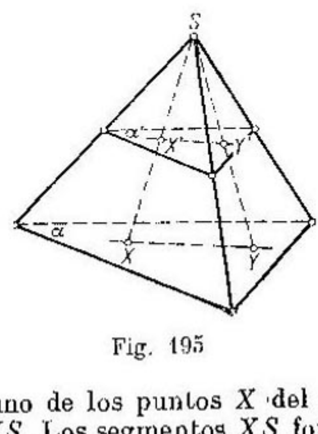

Fig. 195

Unamos el punto S con cada uno de los puntos X del polígono P mediante el segmento XS. Los segmentos XS forman un poliedro. Este poliedro se denomina *pirámide* (fig. 194). Si P es un polígono de n lados, se dice que la pirámide es *n-angular*. La pirámide triángular se llama también *tetraedro*. El polígono P es la *base* de la pirámide y el punto S es el *vértice* de la misma. Se denomina *altura* de la pirámide la perpendicular bajada desde su vértice S al plano α al que pertenece su base. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ los vértices del polígono P, base de la pirámide. Los triángulos A_1SA_2, $A_2SA_3, \ldots$ reciben, entonces, el nombre de *caras laterales* de la pirámide y los segmentos $A_1S, A_2S, \ldots$ reciben el nombre de *aristas laterales*.

TEOREMA 24.5. *Todo plano que corta la pirámide y es paralelo a su base trunca una pirámide semejante.*

DEMOSTRACION. Sea S el vértice de la pirámide, sea α el plano donde está su base y sea α' el plano secante (fig. 195). Tomemos dos puntos cualesquiera X e Y en la base de la pirámide. El plano α' corta los segmentos XS e YS en los puntos X' e Y'. Las rectas XY y $X'Y'$ son paralelas porque se hallan en un mismo plano (el plano del triángulo XYS) y no se cortan. Por el teorema demostrado en la Planimetría, son iguales las razones $\frac{X'S}{XS}$ e $\frac{Y'S}{YS}$, o sea, la razón $\frac{X'S}{XS} = k$ no depende del punto X elegido. De aquí se deduce que la pirámide que trunca el plano secante α' se obtiene de la pirámide inicial mediante una homotecia respecto al punto S siendo k el coeficiente de homotecia; pero las figuras homotéticas son semejantes. Queda demostrado el teorema.

La pirámide se llama *regular* si su base es un polígono regular y si el pie de la altura coincide con el centro de este polígono. Es evidente que las aristas laterales de la pirámide regular son iguales y que, por ende, sus caras laterales son triángulos isósceles iguales. La altura de la cara lateral de la pirámide regular trazada desde su vértice recibe el nombre de *apotema*.

Se denomina *superficie lateral* de la pirámide la suma de las áreas de sus caras laterales.

TEOREMA 24.6. *La superficie lateral de la pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base por el apotema.*

DEMOSTRACION. Si el lado de la base es a y el número de los lados es n, la superficie lateral de la pirámide es $\frac{al}{2}n = \frac{an}{2}l = \frac{p}{2}l$, donde l es el apotema y p es el perímetro de la base. Queda demostrado el teorema.

Según el teorema 24.5, el plano α', que es paralelo al plano α de la base de la pirámide y que corta la pirámide, trunca una pirámide semejante. La otra parte, que también representa un poliedro, se denomina *pirámide truncada* fig. 196). Las caras de la pirámide truncada pertenecientes a los planos paralelos α y α' son las *bases de ésta*; las demás caras se denominan *caras laterales*. Las bases de la pirámide truncada representan polígonos semejantes (incluso homotéticos) y las caras laterales son trapecios. Si la pirámide truncada ha sido obtenida de una pirámide regular, también se la llama *regular*. Las caras laterales de la pirámide truncada regular son trapecios isósceles; las alturas de éstos se denominan *apotemas*.

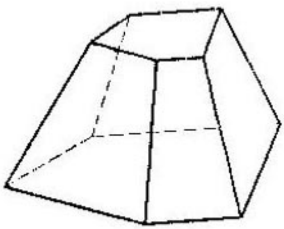

Fig. 196

TEOREMA 24.7. *La superficie lateral de la pirámide truncada regular es igual al producto de la semisuma de los perímetros de sus bases por el apotema.*

La demostración de este teorema (basada en el teorema 24.6) queda a cargo del lector.

Poliedros regulares. El poliedro convexo se llama *regular* si sus caras son polígonos regulares de un mismo número de lados y si en todo vértice del poliedro converge un mismo número de aristas.

Las caras del poliedro regular son triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares. Efectivamente, a partir del hexágono regular, los ángulos internos no son menores que $120°$ y, como quiera que en todo vértice del poliedro convergen como mínimo tres aristas, resulta que la suma de los ángulos planos del ángulo poliedro correspondiente a cualquier vértice del poliedro regular no sería menor que $3 \cdot 120° = 360°$; pero esto es imposible, pues la suma de los ángulos planos de cualquier ángulo poliedro convexo es menor que $360°$.

Si las caras del poliedro regular son triángulos regulares, en todo vértice del poliedro no pueden converger más de cinco aristas. Efectivamente, si son más, la suma de los ángulos planos relativos al vértice del poliedro no será menor que $360°$, cosa imposible. Por consiguiente, en un poliedro regular de caras triangulares el número de aristas convergentes en un mismo vértice puede ser sólo tres, cuatro o cinco. Estas tres posibilidades efectivemente tienen lugar. Los poliedros correspondientes son el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro* regulares (fig. 197). En todo vértice del tetraedro concurren tres aristas, del octaedro cuatro y del icosaedro cinco.

Si las caras del poliedro regular son cuadrados, el número de aristas convergentes en todo vértice del poliedro no

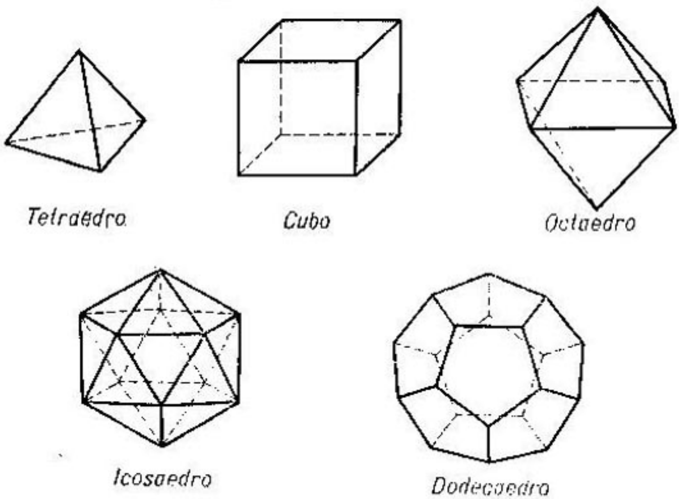

Fig. 197

es mayor que tres y, por consiguiente, es igual a tres. El poliedro correspondiente es el *cubo* (fig. 197).

Si las caras del poliedro son pentágonos regulares, en todo vértice también convergen tres aristas solamente. El poliedro correspondiente es el *dodecaedro regular* (fig. 197).

En todo poliedro regular son iguales todos los ángulos diedros. Si en el vértice del poliedro concurren tres aristas, la demostración es sencilla. Efectivamente, los ángulos diedros del ángulo triedro se determinan unívocamente por los ángulos planos. Si en el vértice del poliedro concurren cuatro o cinco aristas, como ocurre en el octaedro y en el icosaedro, es mucho más difícil demostrar la igualdad de los ángulos diedros del poliedro. No daremos esta demostración.

Ejercicios

1. Demuéstrese que los centros de las caras del cubo son vértices de un octaedro regular y que los centros de las caras del dodecaedro regular son vértices de un icosaedro regular.

2. Demuéstrese que las diagonales cruzadas de dos caras paralelas del cubo son aristas de un tetraedro regular.

3. Hállense los ángulos diedros del dodecaedro regular.

4. Demuéstrese que la superficie lateral de la pirámide, cuya base es de área S y cuyos ángulos diedros relativos a la base son α, es igual a $\frac{S}{\cos\alpha}$.

5. Demuéstrese la igualdad de dos tetraedros $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ si sus aristas correspondientes son iguales, o sea, si $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, etc.

6. Las aristas cruzadas del tetraedro son iguales. Demuéstrese que son iguales todas las caras del tetraedro.

§ 25. ELEMENTOS DE DELINEACIÓN PROYECTIVA

Representación del punto en el diseño. Toda figura espacial se representa en el plano proyectándola mediante rectas paralelas. La proyección de la figura sobre el plano no da, generalmente, la idea completa de la figura. Por ello se emplean dos o incluso tres proyecciones sobre dos o tres, respectivamente, planos. Veamos cómo se representa la figura mediante la proyección ortogonal sobre dos planos.

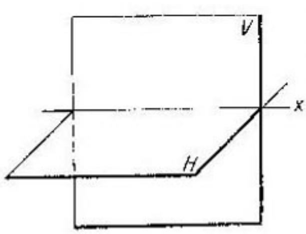

Fig. 198

Sean H y V dos planos que se cortan en ángulo recto según la recta x (fig. 198). Por razones de comodidad, aceptaremos que el plano H es *horizontal* y que el plano V es *vertical*. La figura se proyecta ortogonalmente sobre los planos H y V. La proyección de la figura sobre el plano horizontal se denomina *proyección horizontal* y la proyección sobre el plano vertical es la *proyección vertical*. Los propios planos H y V se llaman *planos de proyección* y la recta x, según la que éstos se cortan, lleva el nombre de *eje de proyección*. Realizada la proyección de la figura sobre los planos H y V, imprimamos al plano horizontal H una rotación de 90° sobre el eje x hasta sobreponerlo al plano vertical V. Ambas proyecciones aparecerán, entonces, en un mismo plano. El dibujo así obtenido con ambas proyecciones de la figura se denomina *diseño*. Veamos la posición que tienen en el diseño las proyecciones horizontal y vertical de un punto cualquiera. Tiene lugar la propiedad siguiente.

25.1 *Las proyecciones horizontal y vertical del punto se representan en el diseño por puntos pertenecientes a una recta perpendicular al eje de proyección.*

DEMOSTRACION. Tracemos el plano α que pasa por el punto considerado A y que es perpendicular al eje de proyección x. Cortará los planos H y V según las rectas a_1 y a_2 (fig. 199). La proyección horizontal A_1 del punto A se halla en la recta a_1 porque la perpendicular trazada desde el punto A al plano H está en el plano α. Análogamente, la proyección vertical A_2 del punto se encuentra en la recta a_2. Las rectas a_1 y a_2 son perpendiculares a la recta x. Como quiera que la rotación, igual que todo movimiento en general, conserva los ángulos, las rectas a_1 y a_2 coinciden al coincidir, por efecto de rotación, los planos H y V. Por consiguiente, las proyecciones del punto A se representan en el diseño por puntos de la recta a_2.

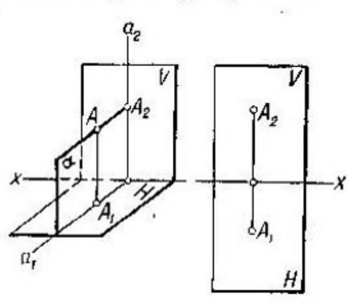

Fig. 199

Problemas de recta. PROBLEMA 25.2. *Conociéndose en el diseño las proyecciones de la recta a y la proyección horizontal del punto A perteneciente a la recta a, hállese la proyección vertical del punto A.*

SOLUCION. Sean a_1 y a_2 las proyecciones horizontal y vertical de la recta a y sea A_1 la proyección horizontal del punto A (fig. 200). La proyección vertical del punto A se halla en la recta que es perpendicular al eje de proyección y que pasa por el punto A_1 y en la proyección vertical a_2 de la recta a, o sea, es el punto de intersección de estas rectas.

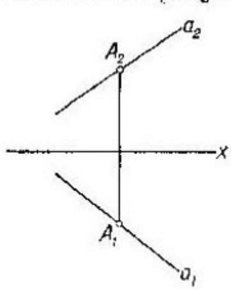

Fig. 200

PROBLEMA 25.3. *Conociéndose en el diseño las proyecciones de la recta a y del punto A que no le pertenece, constrúyanse las proyecciones de la recta que pasa por el punto A y que es paralela a la recta a.*

SOLUCION. Puesto que las proyecciones de rectas paralelas son paralelas, las proyecciones pedidas se obtienen trazando por las proyecciones del punto A las rectas paralelas a las proyecciones correspondientes de la recta a (fig. 201).

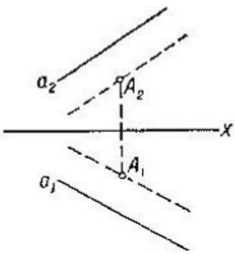

Fig. 201

Determinación de la longitud del segmento. PROBLEMA 25.4. *Hállese la longitud del segmento AB a partir de sus proyecciones en el diseño.*

SOLUCION. Si el segmento AB es paralelo a uno de los planos de proyección, por ejemplo, al plano vertical, su longitud es igual a la longitud de su proyección sobre dicho plano. El paralelismo entre el segmento AB y el plano vertical se determina en el diseño por su proyección horizontal que ha de ser paralela al eje de proyección.

Supongamos que el segmento AB no es paralelo a ninguno de los planos de proyección. Hagamos girar el segmento AB sobre la recta que proyecta su extremo A en el plano horizontal. Las proyecciones del extremo B del segmento se desplazarán: la proyección horizontal del punto B se desplazará según la semicircunferencia de centro en el punto A_1, mientras que la proyección vertical se desplazará según la recta b_2 que es paralela al eje de proyección y que pasa por el punto B_2 (fig. 202).

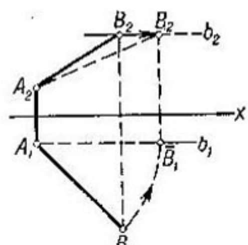

Fig. 202

Cuando el segmento ocupe la posición paralela al plano vertical, la proyección B_1 llegará a la recta que pasa por el punto A_1 y que es paralela al eje de proyección. Sea $\overline{B}_1$ el punto B_1 en esta posición. El segmento $A_1\overline{B}_1$ es la proyección horizontal de un segmento igual a AB y paralelo al plano vertical. No ofrece dificultad hallar su proyección vertical $A_2\overline{B}_2$. La proyección vertical del extremo B del segmento girado es la intersección de la recta b_2 y de la recta que pasa por el punto $\overline{B}_1$ y que es perpendicular al eje de proyección. Como hemos explicado anteriormente, el segmento AB es igual al segmento $A_2\overline{B}_2$.

Problemas de recta y plano. Sean H y V los planos de proyección y sea α un plano que corta los planos H y V según las rectas h y v respectivamente (fig. 203). Las rectas h y v se llaman *trazas del plano* α en los planos de proyección. Más exactamente, se dice que h es la *traza horizontal* y que v es la *vertical*.

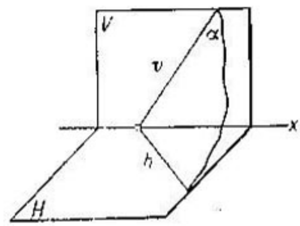

Fig. 203

Las trazas del plano se cortan en el eje de proyección o son paralelas al eje si el propio plano es paralelo a este eje. Si el plano es paralelo a uno de los planos de proyección, tiene una sola traza: la vertical si el plano es paralelo al plano horizontal o la horizontal si es paralelo al plano vertical. En el diseño el plano se representa por sus trazas.

PROBLEMA 25.5. *Conociéndose las trazas de dos planos, hállese la recta de intersección de los mismos, o sea, determínense las proyecciones de esta recta.*

SOLUCIÓN. Sean α y β los planos considerados, sean a_1 y a_2 las trazas del plano α y sean b_1 y b_2 las trazas del plano β (fig. 204). La recta c según la que se cortan los planos α y β corta el plano vertical en el punto P. Su proyección vertical P_2 es el punto de intersección de las trazas verticales de los planos, o sea, de las rectas a_2 y b_2, mientras que su proyección horizontal P_1 está en el eje de proyección.

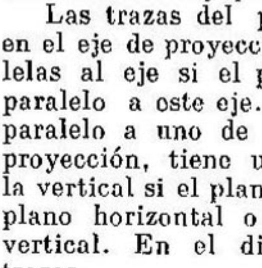

Fig. 204

Análogamente, la recta c corta el plano horizontal en el punto Q. Su proyección horizontal Q_1 es el punto de intersección de las trazas horizontales a_1 y b_1 y su proyección vertical Q_2 está en el eje de proyección. Las proyecciones de la recta c se obtienen uniendo los puntos Q_2 y P_2 (proyección vertical) y los puntos P_1 y Q_1 (proyección horizontal).

PROBLEMA 25.6. *Conociéndose en el diseño las proyecciones de la recta, hállense las trazas del plano que pasa por esta recta y que es perpendicular a un plano de proyección determinado; por ejemplo, H.*

SOLUCIÓN. Puesto que el plano es perpendicular al plano H, su traza horizontal coincide con la proyección horizontal de la recta considerada y su traza vertical es perpendicular al eje de proyección. Para obtener la traza vertical hay que construir la recta que es perpendicular al eje de proyección y que pasa por el punto de intersección del eje y de la proyección horizontal de la recta (fig. 205).

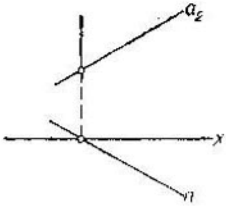

Fig. 205

PROBLEMA 25.7. *Conociéndose las proyecciones de la recta y las trazas del plano, hállese el punto de intersección de la recta y del plano, o sea, hállense las proyecciones de este punto.*

SOLUCION. Consideremos el plano que pasa por la recta y que es perpendicular a H (problema 25.6). Hallemos la recta h según la que se cortan éste y el plano dado (problema 25.5). Construyamos análogamente la recta v de intersección del plano dado y del plano que pasa por la recta dada y que es perpendicular al plano vertical. Las proyecciones del punto buscado son los puntos de intersección de las proyecciones correspondientes de las rectas h y v.

PROBLEMA 25.8. *Conociéndose las proyecciones de dos rectas secantes y la proyección horizontal de un punto que se encuentra en el plano determinado por esas rectas, hállese la proyección vertical de este punto.*

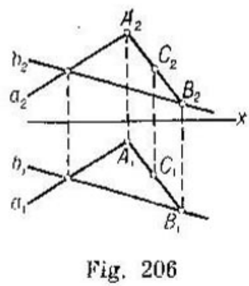

Fig. 206

SOLUCION. Tracemos una recta que pasa por la proyección horizontal C_1 del punto y que corta las proyecciones horizontales a_1 y b_1 de las rectas secantes (fig. 206). Sean A_1 y B_1 los puntos de intersección. Tracemos por los puntos A_1 y B_1 las rectas perpendiculares al eje de proyección. Sean A_2 y B_2 los puntos de intersección de estas rectas con las proyecciones verticales respectivas de las rectas secantes. Los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 son las proyecciones horizontal y vertical de un segmento cuyos extremos se encuentran en las rectas secantes. De aquí resulta que la proyección vertical C_2 del punto buscado se obtiene en la intersección del segmento A_2B_2 y de la recta que pasa por el punto C_1 y que es perpendicular al eje de proyección.

Ejercicios

1. Conociéndose en el diseño las proyecciones de dos rectas, determínese si se cortan o no.

2. Conociéndose en el diseño las trazas del plano y las proyecciones del punto, determínese si éste se halla o no en el plano.

3. Conociéndose en el diseño las proyecciones de dos rectas secantes, constrúyanse las trazas del plano que éstas determinan.

4. Constrúyase el triángulo a partir de sus proyecciones en el diseño.

5. Conociéndose la proyección vertical del cuadrilátero y las proyecciones horizontales de tres vértices del mismo, constrúyase la proyección horizontal del cuarto vértice.

§ 26. VOLÚMENES DE CUERPOS SIMPLES

Concepto del volumen. El problema de la determinación del volumen de los cuerpos se remonta a la antigüedad. Surgió en relación con la actividad práctica del hombre.

Imaginemos dos recipientes: uno cúbico y otro de forma arbitraria (fig. 207). Supongamos que ambos han sido llenados de líquido empleándose para el primero m kg de líquido y n kg para el segundo. Lo natural es considerar que el segundo recipiente es $\frac{n}{m}$ veces mayor que el primero. Llamaremos *volumen* del segundo *recipiente* el número que indica cuántas veces es mayor que el primero. El primer recipiente es la *unidad de medición*. De esta definición del volumen se obtienen las siguientes propiedades del mismo. Primero, puesto que para llenar todo recipiente se necesita una cantidad determinada de líquido, resulta que *todo recipiente posee un volumen (positivo) determinado*. Segundo, para llenar recipientes iguales se necesita la misma cantidad de líquido y, por eso, *los recipientes iguales tienen volumen igual*. Tercero, si dividimos el recipiente en dos partes, la cantidad de líquido necesaria para llenar todo el recipiente constará de las cantidades de líquido necesarias para llenar sus partes. Por ello, *el volumen de todo el recipiente es igual a la suma de los volúmenes de sus partes*.

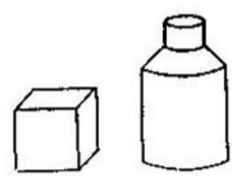

Fig. 207

Ateniéndonos a esta definición, para hallar el volumen de un recipiente es preciso llenarlo de líquido. Pero, en la práctica el problema debe ser resuelto precisamente en el sentido inverso. Se exige conocerla cantidad de líquido necesaria para llenar el recipiente sin proceder a llenarlo. Si conociésemos el volumen del recipiente, podríamos determinar esta cantidad de líquido multiplicando el volumen por la cantidad de líquido necesaria para llenar una unidad de volumen. ¿Cómo determinar, pues, el volumen del recipiente?

Ahora demostraremos que las tres propiedades señaladas del volumen lo determinan completamente y encontraremos las fórmulas que permiten calcular el volumen de los cuerpos simples.

Un cuerpo se llama *simple* si puede ser dividido en un número finito de tetraedros, o sea, de pirámides triangulares. En particular, son cuerpos simples, por ejemplo, el prisma, la pirámide y, en general, el poliedro convexo.

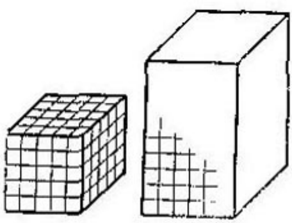

Fig. 208

Volumen del paralelepípedo rectangular. Determinemos primero el volumen del paralelepípedo rectangular. En la fig. 208 se representa un cubo como unidad de medición y un paralelepípedo rectangular cuyo volumen debe ser medido.

Dividamos las aristas del cubo que arrancan de un mismo vértice en N partes iguales y tracemos por los puntos de división planos perpendiculares a estas aristas. El cubo quedará dividido en N^3 cubos pequeños. En la figura, las aristas del cubo han sido divididas en cinco partes cada una. El número de los cubos pequeños es de $25 \times 5 = 5^3$.

Determinemos el volumen del cubo pequeño. Por la propiedad del volumen, el volumen del cubo grande es igual a la suma de los volúmenes de los cubos pequeños. Puesto que el volumen del cubo grande es igual a la unidad y que el número de cubos pequeños es igual a N^3, el volumen del cubo pequeño es igual a $\frac{1}{N^3}$. Sea q la arista del cubo pequeño. Entonces, $q = \frac{1}{N}$ y, por consiguiente, el volumen del cubo pequeño es $\frac{1}{N^3} = q^3$.

Construyamos en las aristas del paralelepípedo, que arrancan de un mismo vértice, segmentos iguales a q, $2q$, $3q$, ... y tracemos por sus extremos planos perpendiculares a las aristas del paralelepípedo. Obtendremos un conjunto de cubos de aristas iguales a q que llenan el paralelepípedo. Determinemos el número de cubos que contiene el paralelepípedo y el número de cubos en que está contenido el paralelepípedo.

Sean a, b y c las aristas del paralelepípedo. Indiquemos mediante l el entero de la división de a por q, mediante m el entero de la división de b por q y mediante n el entero de la división de c por q. Entonces, el número de cubos que contiene el paralelepípedo será lmn, mientras que el número de cubos en que está contenido el paralelepípedo no será mayor que $(l+1)(m+1)(n+1)$. De aquí resulta que el volumen V del paralelepípedo está comprendido entre los números $lmnq^3$ y $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, o sea,

$$lmnq^3 \leqslant V < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Demostremos ahora que el producto abc está comprendido entre estos mismos números. Efectivamente, se tiene $lq \leqslant a < (l+1)q$, $mq \leqslant b < (m+1)q$ y $nq \leqslant c < (n+1)q$. Por eso,

$$lmnq^3 \leqslant abc < (l+1)(m+1)(n+1)q^3.$$

Puesto que ambos números, V y abc, están comprendidos entre los números $lmnq^3$ y $(l+1)(m+1)(n+1)q^3$, difieren a lo sumo en $(l+1)(m+1)(n+1)q^3 - lmnq^3$, o sea, en $lmq^3 + mnq^3 + lnq^3 + lq^3 + mq^3 + nq^3 + q^3$ todo lo más. Como quiera que $lq \leqslant a$, $mq \leqslant b$ y $nq \leqslant c$, de aquí se deduce que V y abc difieren no más que en $abq + bcq + acq + aq^2 + bq^2 + cq^2 + q^3$. Este número es todo lo pequeño que se quiera si es suficientemente pequeño el número $q = \frac{1}{N}$. Resulta que la diferencia entre los números V y abc es tan pequeña como se quiera. Pero esto puede darse sólo si son iguales.

Por consiguiente, *el volumen del paralelepípedo rectangular de dimensiones lineales a, b y c es $V = abc$*. Aquí a, b y c se miden con la arista del cubo que se ha tomado como unidad de medición del volumen.

Volumen del paralelepípedo oblicuo. Determinemos el volumen del paralelepípedo oblicuo (fig. 209, a la izquierda).

Tracemos el plano que pasa por la arista BC y que es perpendicular a la base $ABCD$ y agreguemos al paralelepípedo el prisma triangular $BB_1B_2CC_1C_2$. Separemos ahora del cuerpo obtenido un prisma triangular trazando el plano que pasa por la arista AD y que es perpendicular a la base $ABCD$. Obtendremos de nuevo un paralelepípedo. Su volumen es igual al volumen del paralelepípedo inicial. Efectivamente, el prisma agregado y el prisma separado se superponen por efecto de la traslación paralela determinada por el

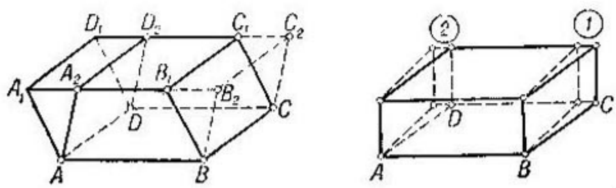

Fig. 209

segmento AB y, por consiguiente, tienen volúmenes iguales. Al realizar con el paralelepípedo las transformaciones señaladas, el área de su base y su altura se conservan. También se conservan los planos de dos caras laterales, mientras que las otras dos se hacen perpendiculares a la base. Aplicando una vez más esta transformación, obtendremos un paralelepípedo de caras laterales perpendiculares a la base, o sea, un paralelepípedo recto. Transformémoslo análogamente en un paralelepípedo rectangular agregándole el prisma 1 y quitándole el prisma 2 (fig. 209, a la derecha). Esta transformación conserva también el volumen, el área de la base y la altura del paralelepípedo.

El volumen del paralelepípedo rectangular es igual al producto de sus dimensiones lineales. El producto de dos dimensiones lineales es el área de su base y la tercera dimensión es su altura. Por consiguiente, el volumen del paralelepípedo rectangular es igual al producto del área de su base por la altura. Puesto que en la transformación descrita del paralelepípedo inicial en paralelepípedo rectangular se conservan en cada una de las fases el volumen, el área de la base y la altura, resulta que el volumen del paralelepípedo inicial es igual al producto del área de su base por la altura.

Por lo tanto, *el volumen de todo paralelepípedo es igual al producto del área de su base por la altura.*

Volumen del prisma. Determinemos el volumen del prisma. Consideremos primero el prisma triangular (fig. 210). Complementémoslo hasta obtener un paralelepípedo como se indica en la figura. El punto O es el centro de simetría del paralelepípedo. Por eso, el prisma agregado es simétrico del inicial respecto al punto O y, por consiguiente, su volumen es igual al volumen del prisma inicial. O sea, el volumen del paralelepípedo construido es el doble del volumen del prisma.

El volumen del paralelepípedo es igual al producto del área de su base por la altura. El área de la base es igual al área duplicado del triángulo ABC y la altura es igual a la

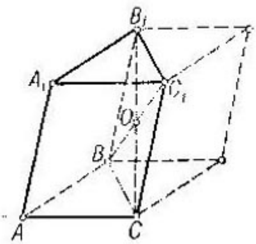

Fig. 210

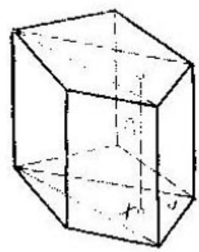
Fig. 211

altura del prisma inicial. De aquí deducimos que el volumen del prisma inicial es igual al producto del área de su base por la altura.

Consideremos ahora un prisma cualquiera (fig. 211). Dividamos su base en triángulos. Sea $\triangle$ uno de ellos. Tracemos la recta que pasa por un punto cualquiera X del triángulo $\triangle$ y que es paralela a las aristas laterales. Sea a_X el segmento de esta recta perteneciente al prisma. Si el punto X describe el triángulo $\triangle$, los segmentos a_X forman un prisma triangular. Construyendo tal prisma para todo triángulo $\triangle$, lograremos dividir el prisma inicial en triangulares. Todos estos prismas tienen una misma altura igual a la altura del prisma inicial.

El volumen del prisma inicial es igual a la suma de los volúmenes de los prismas triangulares que lo componen. Según lo demostrado, el volumen del prisma triangular es igual al producto del área de su base por la altura. De aquí se deduce que el volumen del prisma inicial es $V = S_1H + S_2H + \ldots + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) H$, donde

S_1, S_2, . . ., S_n son las áreas de los triángulos $\triangle$ en que ha sido dividida la base del prisma. Pero la suma de las áreas de los triángulos $\triangle$ es igual al área S de la base del prisma inicial. Por eso,

$$V = SH.$$

Por consiguiente, *el volumen de todo prisma es igual al producto del área de su base por la altura.*

Volumen de la pirámide. Lo natural para determinar el volumen de la pirámide sería tratar de complementarla con pirámides iguales hasta obtener un paralelepípedo y de esta forma, conociendo el volumen del paralelepípedo, hallar el volumen de la pirámide. Pero esto no puede hacerse en el caso general. Por eso, emplearemos otro procedimiento.

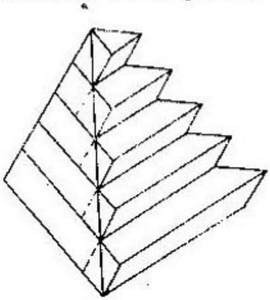

Fig. 212

Dividamos la altura de la pirámide en n partes iguales y tracemos por los puntos de división planos paralelos a la base de la pirámide (fig. 212). La pirámide quedará dividida entonces en capas. Construyamos para cada una de estas capas dos prismas: uno conteniendo la capa y otro contenido en la capa, como representa la figura.

El poliedro P_1, formado por la pila de prismas que contienen las capas respectivas, contiene también la propia pirámide y, por lo tanto, su volumen es mayor que el de la pirámide. El poliedro P_2, formado por la pila de prismas contenidas en las capas respectivas, está contenido en la propia pirámide y, por eso, su volumen es menor que el de la pirámide. Sea V el volumen de la pirámide y sean V_1 y V_2 los volúmenes de los poliedros construidos P_1 y P_2. Entonces,

$$V_2 < V < V_1.$$

Determinemos los volúmenes de los poliedros P_1 y P_2. Las secciones de la pirámide correspondientes a los planos paralelos a la base son semejantes a ésta. Por eso, el área de la base del prisma m-ésimo en el poliedro P_1 será $S\left(\frac{m}{n}\right)^2$, donde S es el área de la base de la pirámide y $\frac{m}{n}$ es el coeficiente de semejanza. El volumen del prisma respectivo será $S\left(\frac{m}{n}\right)^2\frac{H}{n}$ y el volumen del poliedro P_1, igual a la suma de los volúmenes de los prismas que lo componen, será

$$V_1=S\frac{H}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right\}=$$
$$=\frac{SH}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2).$$

Análogamente determinamos el volumen V_2 del poliedro P_2

$$V_2=S\frac{H}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}=$$
$$=\frac{SH}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2).$$

Como se sabe, $1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$ y, por eso, $1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+$ $+\frac{n}{6}$. Por consiguiente,

$$V_1=\frac{SH}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)=SH\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) \text{ y}$$
$$V_2=\frac{SH}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)=SH\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

Luego,

$$SH\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)<V<SH\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

De aquí

$$SH\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)<V-\frac{SH}{3}<SH\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

De esta desigualdad se ve que los números V y $\frac{SH}{3}$ difieren en $\frac{SH}{n}$ todo lo más. Puesto que n es arbitrario y, por lo tanto, puede ser tomado tan grande como se quiera, los números V y $\frac{SH}{3}$ difieren todo lo poco que se quiera. Pero esto puede darse sólo si $V=\frac{SH}{3}$. O sea, *el volumen de toda pirámide triangular es igual a un tercio del producto del área* *de su base por la altura*:

$$V = \frac{1}{3} SH$$

Consideremos ahora una pirámide no triangular cualquiera. Dividamos su base en triángulos $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$. La pirámide considerada se compone de aquellas pirámides que tienen como bases estos triángulos y como vértice el vértice de la pirámide considerada. El volumen de ésta es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides que la componen. Puesto que todas ellas tienen la misma altura H que la pirámide considerada, el volumen de la última es $V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} HS$.

Por consiguiente, *el volumen de toda pirámide es igual a un tercio del producto del área de su base por la altura.*

Volúmenes de los cuerpos semejantes. Sean T y T' dos cuerpos simples semejantes. Esto significa que existe una transformación de semejanza que aplica el cuerpo T en el cuerpo T'. Sea k el coeficiente de semejanza.

Dividamos el cuerpo simple T en las pirámides triangulares $P_1, P_2, \ldots, P_n$. El volumen del cuerpo T es igual a la suma de los volúmenes de estas pirámides. La transformación de semejanza que aplica el cuerpo T en el cuerpo T' transforma las pirámides $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en las pirámides $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$. Estas últimas componen el cuerpo T' y, por eso, el volumen del cuerpo T' es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$.

Como quiera que las pirámides P'_i y P_i son semejantes y que el coeficiente de semejanza es k, resulta que la razón de sus alturas es k y la razón de las áreas de sus bases es k^2. Por consiguiente, la razón de los volúmenes de estas pirámides es k^3. Puesto que el cuerpo T está formado por las pirámides P_i y el cuerpo T' por las pirámides P'_i, la razón de los volúmenes de los cuerpos T' y T es también k^3.

El número k, coeficiente de semejanza, es igual a la razón de las distancias entre dos pares de puntos correspondientes en la transformación de semejanza. Este número es igual, pues, a la razón de dos cualesquiera dimensiones lineales correspondientes de los cuerpos T' y T. Llegamos a la conclusión siguiente.

Los volúmenes de dos cuerpos simples semejantes son uno al otro como los cubos de sus dimensiones lineales correspondientes.

Empleemos este resultado para determinar el volumen de la pirámide truncada. Demostremos que para el volumen de la pirámide truncada es válida la fórmula siguiente:

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right),$$

donde S_1 y S_2 son las áreas de las bases de la pirámide y H es su altura.

Complementemos la pirámide truncada hasta obtener una pirámide completa de altura H_1. Sea S_1 el área de su base. Indiquemos la altura de la pirámide complementaria por H_2 y el área de su base por S_2. Como quiera que las dos pirámides son semejantes, las áreas de sus bases son una a la otra como los cuadrados de las alturas y los volúmenes como los cubos de las alturas, o sea, $\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2$ y $\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3$. Tenemos

$$\begin{aligned}V=V_1-V_2=V_1\left(1-\frac{V_2}{V_1}\right)&=V_1\left[1-\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3\right]=\\&=V_1\left(1-\frac{H_2}{H_1}\right)\left[1+\frac{H_2}{H_1}+\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\right]=\\&=V_1\left(1-\frac{H_2}{H_1}\right)\left(1+\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}+\frac{S_2}{S_1}\right)=\\&=\frac{V_1}{H_1S_1}(H_1-H_2)\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right).\end{aligned}$$

Puesto que $H_1-H_2=H$ y $V_1=\frac{1}{3}H_1S_1$, resulta que

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right).$$

Queda demostrada la fórmula del volumen de la pirámide truncada.

Exactitud de la definición del volumen de los cuerpos simples. El volumen del cuerpo simple se determina sumando los volúmenes de las pirámides triangulares que lo componen. Pero existen diversos modos de dividir el cuerpo simple en pirámides triangulares y diversos modos de elegir la base de la pirámide al calcular su volumen. Por ello, surgen las preguntas.

1. ¿Depende el volumen de la pirámide triangular del modo de elegir su base?

2. ¿Depende el volumen del cuerpo simple del modo de dividirlo en pirámides triangulares?

Si la respuesta a ambas preguntas es negativa, nuestra definición del volumen es, como suele decirse, *exacta* o *correcta*.

Demostremos primero que el volumen de la pirámide triangular no depende de qué cara se tome por base. Sea $DABC$ una pirámide triangular (fig. 213). Sean α, β y γ los ángulos planos del ángulo triedro en el vértice D de la pirámide. Más concretamente, sea α el ángulo BDC, sea β el ángulo ADC y sea γ el ángulo ADB. Sean a, b y c los ángulos diedros relativos a las aristas del ángulo triedro de vértice D. Más concretamente, sea a el ángulo relativo a la arista DA, sea b el ángulo relativo a la arista DB y sea c el ángulo relativo a la arista DC.

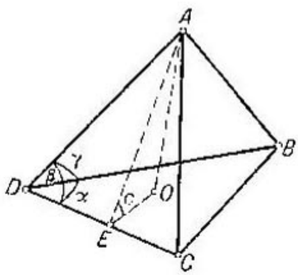

Fig. 213

Tracemos desde el vértice A la perpendicular AE a la recta DC y la perpendicular AO al plano de la cara BDC. Aceptemos que la cara BCD es la base de la pirámide. Entonces, el área de la base es

$$S = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \operatorname{sen} \alpha.$$

La altura de la pirámide es $H = AO = AE \operatorname{sen} c = DA \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} c$. Por consiguiente, el volumen de la pirámide es

$$V = \frac{1}{6} DA \cdot DB \cdot DC \cdot \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} c.$$

Tomando como base de la pirámide la cara ADB, de la misma forma obtenemos para el volumen de la pirámide la expresión

$$V = \frac{1}{6} DA \cdot DB \cdot DC \cdot \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} b.$$

Las dos expresiones obtenidas para el volumen de la pirámide difieren en los factores $\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} c$ y $\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} b$. Estos factores son iguales. Efectivamente, aplicando el teorema de los senos al ángulo triedro de vértice D, tenemos $\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} c}$, de donde $\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} b$.

Por consiguiente, *el volumen de la pirámide triangular no depende de qué cara de la pirámide se toma por base de la misma.*

Pasemos a la segunda pregunta. Tomemos una pirámide triangular y dividámosla en pirámides triangulares pequeñas. Demostremos que el volumen de la pirámide, determinado según la fórmula $V = \frac{1}{3} SH$, es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides que la componen calculados según la misma fórmula. Consideremos primero el caso de la partición especial de la pirámide en que las pirámides que la componen tienen el mismo vértice que ésta y sus bases dividen la base de la pirámide considerada. Si las áreas de las bases de las pirámides son $S_1, S_2, \ldots, S_n$, la suma de sus volúmenes

$$V=\frac{S_1 H}{3}+\frac{S_2 H}{3}+\ldots+\frac{S_n H}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}(S_1+S_2+\ldots+S_n) H=\frac{1}{3} SH$$

es efectivamente igual al volumen de la pirámide considerada.

Consideremos ahora una partición cualquiera de la pirámide triangular $ABCD$ en pirámides triangulares pequeñas $PQRS$. Aceptemos que dos pirámidas cualesquiera de esta partición no tienen puntos comunes, tienen un vértice común, tienen una arista común o tienen una cara común.

El volumen de la pirámide $PQRS$ se puede representar como la suma algebraica de los volúmenes de cuatro pirámides $AQRS$, $PARS$, $PQAS$ y $PQRA$. Estas pirámides se obtienen de la pirámide $PQRS$ tomando en lugar de uno de sus vértices el vértice A de la pirámide considerada. El signo de los sumandos en la suma algebraica mencionada se determina a tenor con la regla siguiente. Si el vértice sustituido por el vértice A está al mismo lado que el punto A respecto al plano de la cara opuesta, el sumando lleva el signo «+»; en el caso contrario, se toma el signo «—». Si al sustituir un vértice por el vértice A los cuatro puntos aparecen en un mismo plano, el sumando se omite, o sea, su volumen se considera igual a cero.

Representando el volumen de cada una de las pirámides de nuestra partición como suma algebraica de los volúmenes de pirámides de vértice A, sumemos los volúmenes de todas las pirámides de la partición. Obtendremos así la suma algebraica de pirámides $AXYZ$, donde XYZ es una cara de una pirámide de nuestra partición. Si la cara XYZ está en el interior de la pirámide inicial, el volumen de la pirámide $AXYZ$ aparecerá en la suma dos veces, pues la cara XYZ pertenece en este caso exactamente a dos pirámides de la partición. Como quiera que estas pirámides se encuentran a distintos lados de la cara común XYZ, el volumen de la pirámide $AXYZ$ aparecerá una vez con el signo «+» y la segunda vez con el signo «—». Por consiguiente, estos sumandos se reducirán.

Si la cara XYZ pertenece a la cara BCD de la pirámide inicial, el volumen de la pirámide $AXYZ$ aparecerá en la suma sólo una vez y, además, llevando el signo «+». Finalmente, si la cara XYZ pertenece a cualquiera de las tres caras restantes de la pirámide inicial, el volumen de la pirámide $AXYZ$ será simplemente igual a cero. En resumen, la suma de los volúmenes de las pirámides de nuestra partición será igual a la suma de los volúmenes de aquellas pirámides $AXYZ$ cuyas caras XYZ se encuentran en la cara BCD de la pirámide inicial. Pero hemos demostrado ya que esta suma es igual al volumen de la pirámide inicial.

Supongamos ahora que un cuerpo simple ha sido dividido primero en pirámides P_1', P_2', P_3', . . . y después en pirámides P_1'', P_2'', P_3'', . . . Demostremos que son iguales las sumas de los volúmenes de las pirámides de ambas particiones.

Las pirámides de ambas particiones, consideradas conjuntamente, realizan una partición de nuestro cuerpo en poliedros convexos. Cada uno de estos poliedros es la parte común de una pirámide de la primera partición y de una pirámide de la segunda partición. Dividamos estos poliedros convexos en pirámides menores P_1''', P_2''', P_3''', . . . haciendo que dos pirámides cualesquiera no tengan puntos comunes, tengan un vértice común, tengan una arista común o tengan una cara común. Semejante partición es siempre posible.

Según hemos demostrado, el volumen de toda pirámide de la primera partición es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides P_k''' que la componen. Igualmente, el volumen de toda pirámide de la segunda partición es igual a una suma de los volúmenes de pirámides P_k'''. Por esto, la suma de los volúmenes de las pirámides tanto de la primera como de la segunda partición será igual a la suma de los volúmenes de todas las pirámides P_k'''. Es decir, en ambas particiones la suma de los volúmenes de las pirámides es la misma, o sea, el volumen del cuerpo simple no depende del modo de dividirlo en pirámides triangulares.

Ejercicios

1. Demuéstrese que el plano que pasa por una arista del tetraedro y que divide la arista opuesta en razón $m : n$, divide el volumen del tetraedro en la misma razón.

2. Sea α un plano que corta las aristas del tetraedro convergentes en un mismo vértice y que las divide en razones respectivas $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ contando desde el vértice común. Demuéstrese que el volumen del tetraedro que el plano α trunca del tetraedro inicial es igual a

$$\left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{p}{p+q}\right)\left(\frac{r}{r+s}\right)V,$$

donde V es el volumen del tetraedro inicial.

3. Demuéstrese que el volumen del tetraedro no varía si sus aristas opuestas se deslizan según dos rectas cruzadas.

4. El plano α es perpendicular a las aristas laterales del prisma y no corta sus bases. Demuéstrese que el volumen del prisma es igual al producto de la longitud de las aristas laterales por el área de la sección del prisma correspondiente al plano α.

5. Hállese el volumen del paralelepípedo si se conocen sus aristas a, b y c, convergentes en un mismo vértice, y los ángulos α, β y γ que estas aristas forman.

§ 27. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Cilindro. Sean α y α' dos planos paralelos y sea a una recta que los corta. Tomemos un círculo cualquiera k en el plano α (fig. 214). Tracemos la recta que pasa por un punto X cualquiera del círculo k y que es paralela a la a; sea a_X el segmento de esta recta comprendido entre los planos α y α'. Si el punto X describe el círculo k, los segmentos a_X forman un cuerpo. Este cuerpo recibe el nombre de *cilindro circular*.

La frontera del cilindro circular consta del círculo k, del círculo igual k' en el plano α' y de la *superficie lateral*. La superficie lateral del cilindro es la descrita por el segmento a_X cuando el punto X recorre la circunferencia del círculo k. En este caso los segmentos a_X se denominan *generatrices del cilindro*. Los círculos k y k' son las *bases del cilindro*.

El cilindro circular se llama *recto* si sus generatrices son perpendiculares a las bases. Consideraremos solamente cilindros circulares rectos. Por eso, omitiremos en lo sucesivo las palabras «recto» y «circular».

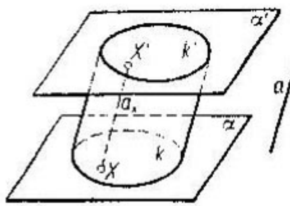

Fig. 214

La recta que pasa por el centro de la base del cilindro y que es paralela a sus generatrices se denomina *eje del cilindro*. La sección del cilindro correspondiente a todo plano que contiene el eje del cilindro se llama *sección principal*. Todo plano que pasa por una generatriz del cilindro y que es perpendicular a la sección principal correspondiente a esta generatriz se llama *plano tangente* al cilindro.

TEOREMA 27.1. *Todo plano paralelo al eje del cilindro no corta la superficie lateral del cilindro, la corta según dos generatrices o es tangente al cilindro.*

Todo plano perpendicular al eje del cilindro corta su superficie lateral según una circunferencia igual a la circunferencia de la base.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos por la primera afirmación. Sea α un plano paralelo al eje del cilindro (fig. 215). La proyección ortogonal de la superficie lateral sobre el plano de la base del cilindro es la circunferencia $\varkappa$ de la base. La proyección del plano α es la recta a por donde se cortan el plano α y el plano de la base. Si la recta a no corta la circunferencia $\varkappa$, el plano α tampoco corta la superficie lateral del cilindro. Si la recta a corta la circunferencia $\varkappa$ en dos puntos P y Q, la intersección del plano α y de la superficie lateral consta de dos generatrices con extremos en los puntos P y Q. Finalmente, si la recta a es tangente a la circunferencia $\varkappa$, el plano α es tangente al cilindro según la generatriz que arranca del punto de tangencia de la recta a y de la circunferencia $\varkappa$.

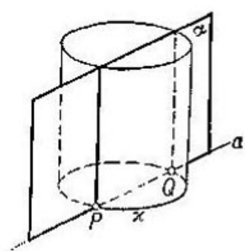

Fig. 215

Sea ahora β un plano perpendicular al eje del cilindro. Este plano es paralelo a las bases. La traslación paralela según el eje del cilindro que superpone el plano β al plano de la base del cilindro, superpone también la sección de la superficie lateral correspondiente al plano β y la circunferencia de la base del cilindro. Queda demostrado el teorema.

Si los planos de las bases del prisma coinciden con los planos de la base del cilindro y las aristas laterales del primero son generatrices del segundo, se dice que el prisma

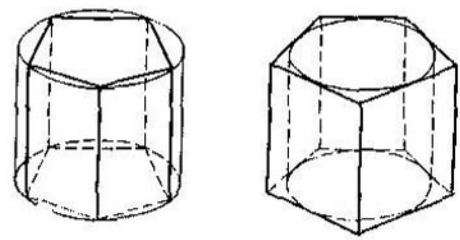

Fig. 216

está *inscrito* en el cilindro (fig. 216, a la izquierda). Si los planos de las bases del prisma son planos de las bases del cilindro y las caras del primero son planos tangentes a la superficie lateral del segundo, se dice que el prisma está *circunscrito* al cilindro (fig. 216, a la derecha).

Cono. Sean α un plano y S un punto que no le pertenece. Tomemos en el plano α un círculo cualquiera k (fig. 217). Unamos un punto cualquiera X del círculo con el punto S mediante el segmento XS. Si el punto X describe el círculo k, los segmentos XS forman un cuerpo. Este cuerpo recibe el nombre de *cono circular*. La frontera del cono consta del círculo k, *base del cono*, y de la *superficie lateral*. La superficie lateral del cono es la descrita por el segmento XS cuando el punto X se desplaza según la circunferencia del círculo k. El punto S se llama *vértice del cono*. Los segmentos XS que unen el vértice del cono con los puntos de la circunferencia de la base se denominan *generatrices del cono*.

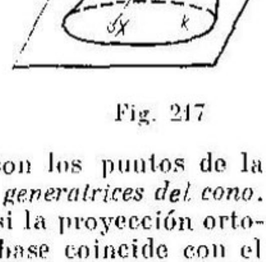

Fig. 217

Se dice que el cono circular es *recto* si la proyección ortogonal de su vértice en el plano de la base coincide con el centro de ésta. En este caso, la recta que pasa por el vértice del cono y que es perpendicular a la base se denomina *eje del cono.* Consideraremos solamente conos circulares rectos. Por eso, omitiremos para abreviar las palabras «recto» y «circular».

La sección del cono correspondiente a todo plano que pasa por su eje se llama *sección principal.* Todo plano que pasa por una generatriz del cono y que es perpendicular a la sección principal correspondiente a esta generatriz se denomina *plano tangente.*

TEOREMA 27.2. *Todo plano que pasa por el vértice del cono no tiene otros puntos comunes con el cono, corta su superficie lateral según dos generatrices o es tangente al cono.*

Todo plano perpendicular al eje del cono lo corta según un círculo y corta la superficie lateral según una circunferencia de centro en el eje del cono.

DEMOSTRACION. Sea α un plano que pasa por el vértice del cono y que corta el plano de la base según la recta a (fig. 218). Si la recta a corta la circunferencia de la base en dos puntos P y Q, el plano α corta la superficie lateral según las generatrices PS y QS. Si la recta a es tangente a la circunferencia de la base, el plano α es tangente al cono. Si el plano α no corta la circunferencia, no tiene más puntos comunes con el cono que el vértice.

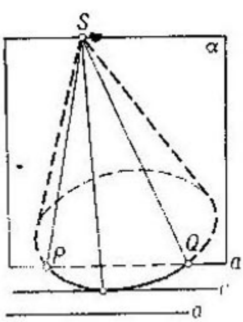

Fig. 218

Sea ahora β un plano que es perpindicular al eje del cono y que lo corta. La transformación de homotecia respecto al vértice del cono que aplica el plano β en el plano de la base, aplica la sección del cono correspondiente al plano β en la base del cono. Es decir, la sección del cono correspondiente al plano β es un círculo y la sección correspondiente de la superficie lateral es una circunferencia de centro en el eje del cono. Queda demostrado el teorema.

Si la base de la pirámide es un polígono inscrito en la circunferencia de la base del cono y el vértice de la primera coincide con el vértice del segundo, se dice que la pirámide está *inscrita* en el cono (fig. 219, a la izquierda). Las aristas laterales de la pirámide inscrita en el cono son generatrices de éste. Si la base de la pirámide es un polígono circunscrito a la circunferencia de la base del cono y el vértice de la primera coincide con el vértice del segundo, se dice que la pirámide está *circunscrita* al cono (fig. 219, a la derecha). Las caras laterales de la pirámide circunscrita son planos tangentes al cono.

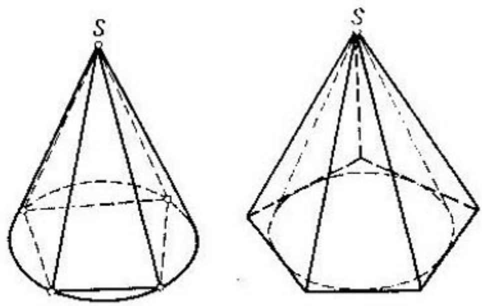

Fig. 219

Esfera. Sea O un punto cualquiera y sea R un número positivo arbitrario. Se llama *esfera* al cuerpo formado por todos aquellos puntos del espacio que no distan más de R del punto O. El punto O es el *centro de la esfera* y el número R es el *radio de la esfera*. La frontera de la esfera se denomina *superficie esférica*. Por lo tanto, los puntos de la superficie esférica son aquellos puntos de la esfera que están respecto al centro a una distancia igual al radio. El segmento que une el centro de la esfera con cualquier punto de la superficie esférica también se denomina *radio*. El segmento que une dos puntos de la superficie esférica y que pasa por el centro de la esfera se llama *diámetro*. Los extremos de todo diámetro se denominan puntos *diametralmente opuestos* de la esfera.

TEOREMA 27.3. *Toda sección de la esfera correspondiente a un plano es un círculo. El centro de este círculo es el pie de la perpendicular trazada desde el centro de la esfera al plano secante.*

DEMOSTRACION. Sea α el plano secante y sea O el centro de la esfera (fig. 220). Tracemos desde el centro de la esfera la perpendicular al plano α y sea O' el pie de esta perpendicular. Sea X un punto cualquiera de la esfera perteneciente al plano α. Por el teorema de Pitágoras tenemos $(OX)^2 = (OO')^2 + (O'X)^2$. Puesto que OX no es mayor que el radio R de la esfera, resulta $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - (OO')^2}$, o sea, todo punto de la sección de la esfera correspondiente al plano α está a una distancia no mayor que $\sqrt{R^2 - (OO')^2}$ del punto O' y, por ende, pertenece al círculo de centro O' y de radio $\sqrt{R^2 - (OO')^2}$. Recíprocamente, cualquier punto X de este círculo pertenece a la esfera. Esto significa precisamente que la sección de la esfera correspondiente al plano α es un círculo de centro en el punto O'. Queda demostrado el teorema.

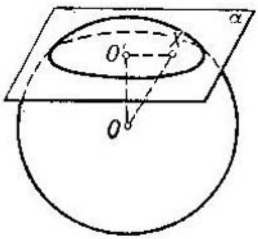

Fig. 220

De esta demostración se deduce que el radio del círculo que se obtiene en la sección de la esfera correspondiente al plano α es

$$R' = \sqrt{R^2 - (OO')^2}.$$

De aquí se ve que el círculo de la sección correspondiente al plano α será tanto mayor cuanto más próximo esté el plano α al centro de la esfera, o sea, cuanto menor sea OO'. El mayor círculo se obtiene en la sección correspondiente al plano que pasa por el centro de la esfera. El radio de este círculo es igual al radio de la esfera. *Los planos equidistantes del centro de la esfera la cortan según círculos iguales.*

Todo plano que pasa por el centro de la esfera se denomina *plano diametral.*

TEOREMA 27.4. *Todo plano diametral de la esfera es plano de simetría de la misma. El centro de la esfera es centro de simetría.*

DEMOSTRACION. Sea α un plano diametral y sea X un punto cualquiera de la esfera (fig. 221). Construyamos el punto X' simétrico de X respecto al plano α. El segmento XX' es perpendicular al plano α y lo corta en su punto medio (punto A). De la igualdad de los triángulos rectángulos OAX y OAX' se deduce que $OX' = OX$. Puesto que $OX \leqslant R$, también $OX' \leqslant R$, o sea, el punto simétrico del punto X pertenece a la esfera. Queda demostrada la primera afirmación.

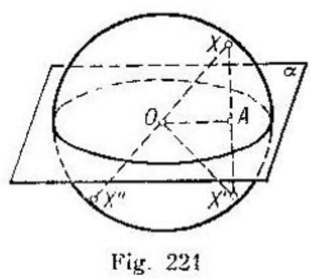

Fig. 221

Sea ahora X'' el punto simétrico del punto X respecto al centro de la esfera. Entonces, se tiene $OX'' = OX \leqslant R$, o sea, el punto X'' pertenece a la esfera. Queda demostrado completamente el teorema.

Toda sección de la esfera correspondiente al plano que pasa por su centro recibe el nombre de *círculo máximo*.

TEOREMA 27.5. *Por dos puntos no diametralmente opuestos de la superficie esférica se puede trazar una circunferencia correspondiente a un círculo máximo, y sólo una.*

DEMOSTRACION. Sea O el centro de la esfera y sean A y B dos puntos no diametralmente opuestos de su superficie (fig. 222). Tracemos por los puntos A, O y B el plano α. El plano α corta la esfera según un círculo máximo. La circunferencia de este círculo pasa por los puntos A y B.

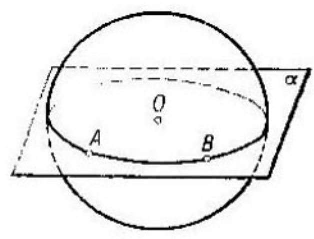

Fig. 222

No puede existir otra circunferencia que pase por los puntos A y B y que sea circunferencia correspondiente a un círculo máximo. Efectivamente, el plano α' de este circulo máximo tendría que pasar por los puntos A, B y O. Pero como los puntos A, B y O no están sobre una recta, existe sólo un plano que pasa por ellos, el plano α. Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 27.6. *Las circunferencias de dos círculos máximos cualesquiera se cortan en dos puntos diametralmente opuestos.*

Efectivamente, los planos correspondientes a estos círculos máximos tienen un punto común (centro de la esfera) y, por consiguiente, se cortan según una recta que pasa por el centro de la esfera. Los puntos en los que esta recta corta la superficie esférica, son los puntos de intersección de las circunferencias de dichos círculos máximos. Queda demostrado el teorema.

El plano que pasa por el punto A de la superficie esférica y que es perpendicular al radio que va al punto A se denomina *plano tangente*. El punto A se llama entonces *punto de tangencia*.

TEOREMA 27.7. *Todo plano tangente a la esfera tiene sólo un punto común con la esfera, el punto de tangencia.*

DEMOSTRACION Sea α el plano tangente a la esfera y sea A el punto de tangencia (fig. 223). Tomemos en el plano α un punto cualquiera X distinto de A. Como quiera que OA es perpendicular y OX es oblicua, se tiene $OX > OA = R$. Por consiguiente el punto X no pertenece a la esfera. Queda demostrado el teorema.

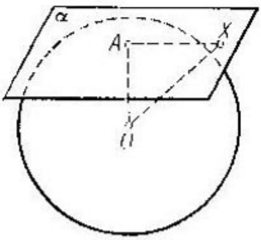

Fig. 223

Toda recta que pasa por el punto A de la superficie esférica y que es perpendicular al radio trazado a este punto se denomina *tangente*.

TEOREMA 27.8. *Por todo punto A de la superficie esférica pasan infinitas tangentes; todas ellas están en el plano tangente a la esfera.*

Efectivamente, sea α el plano tangente a la esfera en el punto A (fig. 223). Toda recta del plano α que pasa por el punto A es perpendicular al radio OA y, por ende, es una tangente. Cualquier tangente que pasa por el punto A es perpendicular al radio OA y, por consiguiente, ha de pertenecer al plano α. Queda demostrado el teorema.

Ejercicios

1. Demuéstrese que los planos que pasan por el eje del cilindro son planos de simetría del mismo.
2. Demuéstrese que el cilindro es un cuerpo de revolución, o sea, que cualquier rotación alrededor del eje del cilindro lo hace coincidir consigo mismo.
3. Demuéstrese que están en dos planos perpendiculares las intersecciones de dos cilindros iguales de ejes secantes.
4. Demuéstrese que los puntos medios de los segmentos paralelos, cuyos extremos pertenecen a la superficie lateral del cilindro, están en un plano que pasa por el eje del cilindro.
5. Demuéstrese que el cono es un cuerpo de revolución, o sea, que toda rotación alrededor del eje del cono lo hace coincidir consigo mismo.
6. Demuéstrese que el área lateral del cono es igual a $\frac{S}{\cos\alpha}$, donde S es el área de la base del cono y α es el ángulo entre la base y las generatrices.
7. Demuéstrese que los puntos medios de los segmentos paralelos, cuyos extremos pertenecen a la superficie lateral del cono, están en un plano que pasa por el vértice del cono.
8. Demuéstrese que es una superficie esférica el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el punto A a los planos que pasan por el punto B.

9. Demuéstrese que es un círculo máximo el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos paralelos cuyos extremos están en la superficie esférica.

10. Demuéstrese que la intersección de dos superficies esféricas es una circunferencia.

11. Demuéstrese que el cuerpo es una esfera si todo plano que pasa por un punto O del cuerpo es plano de simetría del mismo.

§ 28. VOLÚMENES DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Definición general del volumen. En el § 26 hemos considerado el volumen del cuerpo simple, o sea, del cuerpo que admite la partición en un número finito de pirámides triangulares. El volumen de este cuerpo es la suma de los volúmenes de las pirámides triangulares que lo componen. El volumen de la pirámide triangular se determina según la fórmula $V = \frac{1}{3} SH$. Ahora, partiendo de los volúmenes de los cuerpos simples, definiremos el concepto del volumen de un cuerpo cualquiera.

Se da el nombre de *volumen* del cuerpo T al número V que posee las propiedades siguientes:

1) *el número V no es mayor que el volumen de cualquier cuerpo simple en que está contenido el cuerpo T*;

2) *no existe ningún número mayor que V que posee la propiedad* 1).

Por consiguiente el número V es el mayor de los números con la propiedad 1). En el caso de cuerpo simple, esta definición conduce al mismo resultado que antes, pues el cuerpo considerado se encuentra entre los cuerpos simples que lo contienen.

Indiquemos algunas propiedades del volumen que se desprenden directamente de su definición.

Si el cuerpo T_1 está contenido en el cuerpo T_2, el volumen del cuerpo T_1 no es mayor que el volumen del cuerpo T_2. Efectivamente, todo cuerpo simple en que está contenido el cuerpo T_2 también contiene el cuerpo T_1. Por eso, su volumen no es menor que el volumen V_1 del cuerpo T_1. Pero el volumen V_2 del cuerpo T_2 es el mayor de los números con esta propiedad. Por consiguiente, $V_1 \leqslant V_2$.

Si los cuerpos T_1 y T_2 son iguales, sus volúmenes también lo son. Efectivamente, si el cuerpo T_1 encuentra cabida en un cuerpo simple T_1', el cuerpo T_2 encuentra cabida en el cuerpo simple T_2' igual a T_1'. Por esto, V_2 no es mayor que el volumen de cualquier cuerpo simple en el que está contenido el cuerpo T_1. Pero V_1 es el mayor de los números con esta propiedad. Por consiguiente, $V_2 \leqslant V_1$. Cambiando los papeles de los cuerpos T_1 y T_2, obtenemos la desigualdad opuesta $V_1 \leqslant V_2$. Por lo tanto, $V_1 = V_2$.

Si los cuerpos T_1 y T_2 son semejantes, sus volúmenes son uno al otro como los cubos de las dimensiones lineales correspondientes.

Efectivamente, si el cuerpo T_1 encuentra cabida en un cuerpo simple de volumen x, el cuerpo T_2 encuentra cabida en el cuerpo semejante de volumen k^3x, donde k es el coeficiente de semejanza. Entonces, $V_2 \leqslant k^3x$. Por consiguiente, $\frac{V_2}{k^3} \leqslant x$. Es decir, el número $\frac{V_2}{k^3}$ es menor que el volumen de cualquier cuerpo simple en el que está contenido el cuerpo T_1. El número V_1 es el mayor de los números con esta propiedad. Por lo tanto, $V_1 \geqslant \frac{V_2}{k^3}$. Cambiando los papeles de los cuerpos T_1 y T_2, obtenemos la desigualdad opuesta $V_1k^3 \leqslant V_2$. De aquí deducimos que $V_2 = k^3V_1$, o sea, que $\frac{V_2}{V_1} = k^3$.

Si el cuerpo es dividido por un plano o por una superficie cilíndrica, cónica o esférica, el volumen del cuerpo es igual a la suma de los volúmenes de los cuerpos en los que está dividido.

La demostración de este teorema se basa en que toda porción finita de plano o de superficie cilíndrica, cónica o esférica puede ser encerrada en un cuerpo simple de volumen tan pequeño como se quiera. Para el plano esto es obvio. Basta tomar un cuadrado que contenga la porción considerada del plano y construir un paralelepípedo cuya base sea este cuadrado y cuya altura sea suficientemente pequeña. Para el caso de las otras superficies demostraremos esta afirmación en los puntos que siguen.

Supongamos, para puntualizar, que una superficie cilíndrica divide el cuerpo T en dos cuerpos T_1 y T_2. Sean V_1 y V_2 sus volúmenes y sea V el volumen del cuerpo T.

Sea ε un número positivo pequeño. Construyamos un cuerpo simple T_1' de volumen no mayor que $V_1 + \varepsilon$ en el que esté contenido el cuerpo T_1. Tal cuerpo existe; de lo contrario, los volúmenes de todos los cuerpos simples que contienen T_1 no serían menores que $V_1 + \varepsilon$ y, por consiguiente, el volumen del cuerpo T_1 tampoco sería menor que $V_1 + \varepsilon$, cosa imposible. Construyamos un cuerpo simple T_2' de volumen no mayor que $V_2 + \varepsilon$ en el que esté contenido el cuerpo T_2. El volumen del cuerpo simple T', compuesto de los cuerpos T_1' y T_2', no será mayor que $V_1 + V_2 + 2\varepsilon$. El cuerpo T' contiene el cuerpo T. Por eso, el volumen del cuerpo T no será mayor que el volumen del cuerpo T'. Es decir, $V \leqslant V_1 + V_2 + 2\varepsilon$. Puesto que ε es un número positivo cualquiera de esta desigualdad resulta que $V \leqslant \leqslant V_1 + V_2$.

Construyamos ahora un cuerpo simple T' de volumen no mayor que $V + \varepsilon$ en el que esté contenido el cuerpo T. La superficie cilíndrica divide el cuerpo T' en dos cuerpos T_1' y T_2'. Construyamos el cuerpo simple S' de volumen ε como máximo que contenga la frontera común de los cuerpos T_1' y T_2'. Agregando el cuerpo S' a los cuerpos T_1' y T_2', obtenemos los cuerpos simples T_1'' y T_2'' a los que pertenecen los cuerpos T_1 y T_2. La suma de los volúmenes de los cuerpos T_1'' y T_2'' es $V + 2\varepsilon$ todo lo más. Por consiguiente, $V_1 + + V_2 \leqslant V + 2\varepsilon$. Puesto que ε es tan pequeño como se quiera, resulta que $V_1 + V_2 \leqslant V$. Comparando las desigualdades obtenidas, deducimos que $V_1 + V_2 = V$ que es lo que se quería demostrar.

Volumen del cilindro. TEOREMA 28.1. *El volumen del cilindro es igual al producto del área de su base por la altura.*

DEMOSTRACION. Construyamos un prisma n-angular regular inscrito en el cilindro y un prisma n-angular regular circunscrito al cilindro. El prisma inscrito está contenido en el cilindro y, por consiguiente, su volumen no es mayor que el volumen del cilindro. El prisma circunscrito contiene el cilindro y, por ende, su volumen no es menor que el volumen del cilindro.

Fig. 244

Consideremos la circunferencia inscrita en la base del prisma inscrito (fig. 224). El radio de esta circunferencia es $R_1 = = R\cos\frac{\pi}{n}$. El área de la base del prisma inscrito no es menor que el área del círculo de radio R_1 contenido en aquélla. Por eso, el volumen del prisma inscrito en el cilindro no es menor que $\pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}$, donde H es la altura del cilindro. O sea, para el volumen del cilindro tenemos

$$V \geqslant \pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n} .$$

Consideremos ahora la circunferencia circunscrita a la base del prisma circunscrito. El radio de esta circunferencia es $R_2 = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{n}}$. La base del prisma circunscrito está contenida en el círculo de radio R_2. Por eso, el área de la base del prisma no es mayor que $\frac{\pi R^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$. Para el volumen del cilindro tenemos entonces

$$V \leqslant \frac{\pi R^2 H}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} .$$

Las dos desigualdades obtenidas son válidas para cualquier valor de n. Para $n \to \infty$, se tiene $\cos \frac{\pi}{n} \to 1$. Por eso, de la primera desigualdad se deduce que $V \geqslant \pi R^2 H$ y de la segunda que $V \leqslant \pi R^2 H$. Es decir,

$$V = \pi R^2 H$$

que es lo que se quería demostrar.

Observemos que omitiendo del prisma circunscrito el inscrito, obtenemos un cuerpo simple que contiene la superficie lateral del cilindro. El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de los prismas, o sea, es igual a

$$\pi R^2 H \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - \cos^2 \frac{\pi}{n} \right) .$$

Si $n \to \infty$, este volumen tiende a cero. De aquí deducimos que toda porción finita de la superficie cilíndrica puede ser encerrada en un cuerpo simple de volumen tan pequeño como se quiera.

Volumen del cono. TEOREMA 28.2. *El volumen del cono es igual a un tercio del producto del área de su base por la altura.*

DEMOSTRACION. Construyamos una pirámide n-angular regular inscrita en el cono y una pirámide n-angular regular circunscrita al cono. La pirámide inscrita está contenida en el cono y, por consiguiente, su volumen no es mayor que el volumen del cono. La pirámide circunscrita contiene el cono y, por ende, su volumen no es menor que el volumen del cono.

Consideremos la circunferencia inscrita en la base de la pirámide inscrita (fig. 224). El radio de esta circunferencia es $R_1 = R \cos \frac{\pi}{n}$. El área de la base de la pirámide inscrita no es menor que el área del círculo de radio R_1 contenido en aquélla. Por eso, el volumen de la pirámide inscrita en el cono no es menor que $\frac{1}{3}\pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}$, donde H es la altura del cono. O sea, para el volumen del cono se tiene

$$V \geqslant \frac{1}{3}\pi R^2 H \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

Consideremos ahora la circunferencia circunscrita a la base de la pirámide circunscrita. El radio de esta circunferencia es $R_2 = \frac{R}{\cos \frac{\pi}{n}}$. La base de la pirámide circunscrita está contenida en el círculo de radio R_2. Por eso, el área de la base de la pirámide no es mayor que $\frac{\pi R^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}$. Para el volumen del cono tenemos entonces

$$V \leqslant \frac{1}{3} \frac{\pi R^2 H}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}.$$

Las dos desigualdades obtenidas son válidas para cualquier valor de n. Si $n \to \infty$, se tiene $\cos \frac{\pi}{n} \to 1$. Por eso, de la primera desigualdad se deduce que $V \geqslant \frac{1}{3} \pi R^2 H$ y de la segunda que $V \leqslant \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Por consiguiente,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

que es lo que se quería demostrar.

Observemos que omitiendo de la pirámide circunscrita la inscrita, obtenemos un cuerpo simple que contiene la superficie lateral del cono. El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de las pirámides, o sea, es igual a

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}-\cos^2\frac{\pi}{n}\right).$$

Si $n\to\infty$, este volumen tiende a cero. De aquí deducimos que toda porción finita de la superficie cónica puede ser encerrada en un cuerpo simple de volumen tan pequeño como se quiera.

TEOREMA 28.3. *El volumen del cono truncado con bases de radios R_1 y R_2 y de altura H se determina según la fórmula*

$$V=\frac{1}{3}\pi H\,(R_1^2+R_1R_2)+R_2^2).$$

La demostración de esta fórmula se basa en las mismas consideraciones que en el caso de la pirámide truncada. No la daremos.

Volumen de la esfera. TEOREMA 28.4. *El volumen de la esfera de radio R es*

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

DEMOSTRACION. El plano que pasa por el centro de la esfera la divide en dos partes iguales, dos semiesferas. Por eso, basta determinar el volumen de la semiesfera. Para

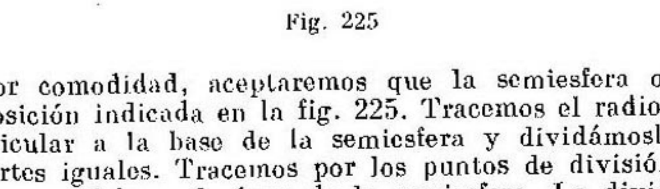

Fig. 225

mayor comodidad, aceptaremos que la semiesfera ocupa la posición indicada en la fig. 225. Tracemos el radio perpendicular a la base de la semiesfera y dividámoslo en n partes iguales. Tracemos por los puntos de división los planos paralelos a la base de la semiesfera. La dividirán en n capas (fig. 225, a la izquierda). Construyamos para toda capa el cilindro que la contiene de radio igual al radio de la base inferior de la capa y de altura igual a la altura de la capa. Sea V_m el volumen del m-ésimo cilindro contando desde la base de la semiesfera.

El cuerpo formado por los cilindros construidos contiene la semiesfera y, por ello, su volumen no es menor que el volumen de ésta. Si hacemos descender todos los cilindros a la distancia $\frac{R}{n}$, todos quedarán dentro de la semiesfera a excepción del primero. Por eso, el volumen del cuerpo formado por todos estos cilindros menos el primero no es mayor que el volumen de la semiesfera. Indicando por V el volumen de la semiesfera, obtenemos de esta forma la desigualdad

$$\begin{aligned} V_2 + V_3 + \ldots + V_n \leqslant V \leqslant \\ \leqslant V_1 + V_2 + \ldots + V_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Tomemos ahora el cono de radio R en la base y de altura también R. Dividámoslo en capas de la misma forma que la semiesfera y construyamos para cada capa el cilindro que la contiene (fig. 225, a la derecha). Sea V'_m el volumen del m-ésimo cilindro contando desde el vértice del cono. El cuerpo formado por estos cilindros contiene el cono. Por eso, el volumen de este cuerpo no es menor que el volumen del cono. Si elevamos los cilindros a la distancia $\frac{R}{n}$, todos ellos menos el último quedarán dentro del cono. Por eso, el volumen del cuerpo formado de estos cilindros no es mayor que el volumen del cono. Si V' es el volumen del cono, obtenemos de esta forma la desigualdad

$$V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_{n-1} \leqslant V' \leqslant V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_n. \qquad (2)$$

Hallemos la suma de los volúmenes $V'_m + V_{m+1}$. Según el teorema de Pitágoras, el radio de la base del $(m+1)$-ésimo cilindro en el caso de la semiesfera es igual a $\sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{n} R\right)^2}$. Por eso, se tiene

$$V_{m+1} = \pi \left[R^2 - \left(\frac{m}{n} R\right)^2\right] \frac{R}{n}.$$

En el caso del cono, el radio del m-ésimo cilindro es igual a $\frac{m}{n} R$. Por eso, se tiene

$$V'_m = \pi \left(\frac{m}{n} R\right)^2 \frac{R}{n}.$$

Vemos, pues, que

$$V_{m+1}+V'_m=\frac{\pi R^3}{n}.$$

Observemos que $V_1=\frac{\pi R^3}{n}$ y $V'_n=\frac{\pi R^3}{n}$.

Sumando miembro por miembro las desigualdades (1) y (2), encontramos

$$\frac{n-1}{n}\pi R^3 \leqslant V+V' \leqslant \frac{n-1}{n}\pi R^3+V_1+V'_n=\frac{n+1}{n}\pi R^3.$$

Puesto que estas desigualdades son válidas para cualquier valor de n y como $\frac{n-1}{n}\to 1$ y $\frac{n+1}{n}\to 1$ si $n\to\infty$, obtenemos $\pi R^3 \leqslant V+V' \leqslant \pi R^3$. Por consiguiente, $V+V'=\pi R^3$.

Ya que el volumen del cono es $V'=\frac{1}{3}\pi R^3$, el volumen de la semiesfera es igual a $\frac{2}{3}\pi R^3$ y el volumen de la esfera es igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$. Queda demostrado el teorema.

Se llama *segmento esférico* el cuerpo que un plano trunca de la esfera (fig. 226). *El volumen del segmento esférico se determina según la fórmula*

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

donde R es el radio de la esfera de la que se ha truncado el segmento y H es la altura del segmento (se llama *altura del segmento esférico* el segmento AB del diámetro perpendicular al plano secante). Esta fórmula se demuestra igual que la fórmula para el volumen de la semiesfera.

Se llama *sector esférico* el cuerpo que se obtiene a partir del segmento esférico y del cono de la forma siguiente. Si el segmento esférico es menor que la semiesfera, se le complementa con el cono cuyo vértice es el centro de la esfera y cuya base coincide con la base del segmento. Si el segmento es mayor que la semiesfera, el cono señalado se extrae del segmento (fig. 227). El volumen del sector esférico se obtiene sumando y restando los volúmenes correspondientes del segmento y del cono. *Para el volumen del sector esférico se obtiene la fórmula siguiente*

$$V=\frac{2\pi R^2 H}{3},$$

donde R es el radio de la esfera y H es la altura del segmento esférico correspondiente.

Demostremos ahora que la superficie esférica puede ser encerrada en un cuerpo simple de volumen tan pequeño como se quiera. Sea R el radio de la esfera. Construyamos dos esferas T_1 y T_2 del mismo centro que ésta y de radios $R - \varepsilon$ y $R + \varepsilon$, donde ε es un número positivo pequeño. Dividamos el espacio en cubos pequeños de diagonal menor que ε.

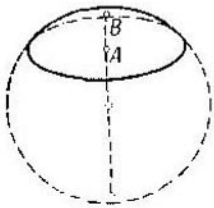

Fig. 226

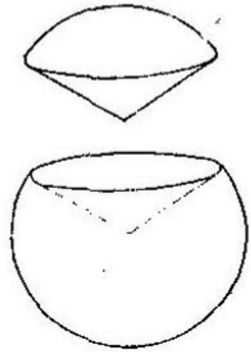

Fig. 227

Construyamos ahora dos cuerpos simples T_1' y T_2' de la forma siguiente. El cuerpo T_1' consta de la esfera T_1 y de todos los cubos que tienen por lo menos un punto común con ella. El cuerpo T_2' se obtiene de la esfera T_2 extrayendo todos los cubos que contienen puntos pertenecientes a la esfera y puntos que no le pertenecen.

El volumen del cuerpo T_1' no es menor que el volumen de la esfera T_1, o sea, no es menor que $\frac{4}{3}\pi(R - \varepsilon)^3$. El volumen del cuerpo T_2' no es mayor que el volumen de la esfera T_2, o sea, no es mayor que $\frac{4}{3}\pi(R + \varepsilon)^3$. El cuerpo simple que se obtiene extrayendo del cuerpo T_2' el cuerpo T_1' contiene nuestra superficie esférica y su volumen no es mayor que

$$\frac{4}{3}\pi\{(R+\varepsilon)^3-(R-\varepsilon)^3\}=\frac{8}{3}\pi(3R^2+\varepsilon^2)\varepsilon.$$

Si ε es suficientemente pequeño, el volumen de este cuerpo es tan pequeño como se quiera que es lo que se quería demostrar.

§ 29. AREAS DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Concepto del área de la superficie convexa. Se llama *superficie convexa completa* la frontera del cuerpo convexo y se denomina *cuerpo convexo* todo cuerpo que con cada par de sus puntos incluye el segmento que los une. El poliedro convexo, el cilindro, el cono y la esfera son ejemplos de cuerpos convexos.

Para las figuras situadas en la superficie convexa completa se pueden introducir los conceptos de punto interior y de punto frontera igual que para las figuras planas (§ 24). A saber, el punto X de la figura G situada en la superficie convexa completa F se llama *interior* si todos los puntos de la superficie F suficientemente próximos a este punto pertenecen a la figura G. El punto Y se denomina punto *frontera* de la figura G si tan cerca a él como se quiera hay puntos de la figura G y puntos que no pertenecen a la figura G.

Por ejemplo, cortemos con un plano una superficie convexa completa y consideremos la figura formada por todos los puntos de la superficie que están a un mismo lado del plano; todos los puntos de esta figura menos los que están en el plano secante son interiores. Los puntos de la figura que se hallan en el plano secante son puntos frontera de la misma.

La figura situada en la superficie convexa completa se denomina *recinto* si todos sus puntos son interiores y si ella no se descompone en dos figuras con esta propiedad. Si agregamos al recinto su frontera, obtenemos el recinto cerrado que se denomina simplemente *superficie convexa*. Por ejemplo, las superficies laterales del cilindro y del cono y el segmento esférico representan superficies convexas.

Para que sea natural la definición del área de la superficie convexa que damos a continuación consideremos un problema práctico. Imaginemos la cúpula de un edificio y una chapa metálica en forma de un cuadrado de lado igual a 1 m. Supongamos que la cúpula y la chapa se pintan. Si para pintar la cúpula se ha empleado v_1 litros de pintura y para pintar la chapa se ha empleado v_2 litros de pintura, lo natural es considerar que el área de la cúpula del edificio es $\frac{v_1}{v_2}$ veces mayor que el área de la chapa. La magnitud $\frac{v_1}{v_2}$ caracteriza el área de la superficie de la cúpula en comparación con la unidad de área de 1 m^2. La cantidad de pintura necesaria para cubrir la chapa es igual aproximadamente al volumen del paralelepípedo cuya base es el cuadrado 1 m $\times$ 1 m y cuya altura h es igual al grueso de la capa de pintura. Por eso, para estimar el área de la superficie de la cúpula obtenemos la magnitud $\frac{v_1}{h}$.

Pasemos ahora a la definición geométrica del área de la superficie. Sea F una superficie. Construyamos el cuerpo F_h formado por todos los puntos del espacio para los cuales existe a una distancia no mayor que h al menos un punto de la superficie F. Podemos imaginarnos claramente el cuerpo F_h como el cuerpo que se obtiene al cubrir ambos lados de la superficie F con una capa de pintura de grueso h.

Sea V_h el volumen del cuerpo F_h. Se llama *área de la superficie* F el límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h \to 0$, o sea,

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h} .$$

Se puede demostrar que para las superficies convexas simples ya consideradas (superficies laterales del prisma y de la pirámide) esta definición conduce al mismo resultado que antes, a la suma de las áreas de las caras laterales.

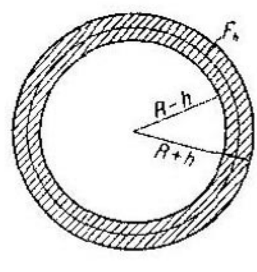

Fig. 228

Area de la superficie esférica. TEOREMA 29.1. *El área de la superficie esférica de radio R es igual a $4\pi R^2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea F una superficie esférica. El cuerpo F_h, del que trata la definición del área de la superficie, representa la capa comprendida entre dos esferas concénticas de radios $R + h$ y $R - h$ (fig. 228). El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de las esferas de radios $R + h$ y $R - h$, o sea, $V_h = \frac{4}{3}\pi [(R+h)^3 - (R-h)^3]$. Tenemos, pues,

$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3 \cdot 2h} (6hR^2 + 2h^3) = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right) ;$$

si $h \to 0$, la razón $\frac{V_h}{2h}$ tiende al límite $4\pi R^2$ que es lo que se quería demostrar.

En el caso de la superficie esférica es fácil determinar el volumen V_h del cuerpo F_h. En otros casos esto puede ser un problema complejo. Pero como lo que nos interesa es el área de la superficie, o sea, el $\lim\limits_{h\to 0} \frac{V_h}{2h}$, se puede tomar en lugar de F_h otro cuerpo cualquiera que dé el mismo límite para la razón $\frac{V_h}{2h}$. Ahora mostraremos cómo se puede deformar el cuerpo F_h sin que varíe el límite de $\frac{V_h}{2h}$ que nos interesa.

Supongamos que la frontera de la superficie considerada está formada por segmentos de rectas y por arcos de circunferencias. Fijemos un número cualquiera $a > 1$ y sea F'_{ah} el cuerpo constituido por los puntos del espacio que distan en ah todo lo más de la frontera de la superficie.

TEOREMA 29.2. *El límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h \to 0$ no cambia si el cuerpo F_h se deforma como se quiera cerca de la frontera de la superficie considerada, o sea, en el interior del cuerpo F'_{ah}.*

DEMOSTRACION. Es obvio que la variación del volumen del cuerpo F_h no es mayor que el volumen V'_{ah} del cuerpo F'_{ah}. Por eso, basta demostrar que $\frac{V'_{ah}}{2h} \to 0$ si $h \to 0$.

Por hipótesis, la frontera de la superficie considerada consta de segmentos rectilíneos y de arcos de circunferencias. Construyamos los cuerpos F'_{ah} para cada pedazo de la frontera; encierran en conjunto el cuerpo F'_{ah} correspondiente a toda la frontera. Es decir, basta demostrar que $\frac{V'_{ah}}{2h} \to 0$ en los casos en que el cuerpo F'_{ah} se construya para un segmento rectilíneo o para un arco de circunferencia.

En el caso de un segmento rectilíneo de longitud l, el cuerpo F'_{ah} se puede encerrar dentro de un cilindro de radio ah y de longitud $l + 2ah$. El volumen de este cilindro es igual a $\pi a^2h^2 (l + 2ah)$. Si $h \to 0$, tenemos $\frac{\pi a^2h^2 (l + 2ah)}{2h} \to 0$. Por consiguiente, $\frac{V'_{ah}}{2h} \to 0$.

En el caso de un arco de circunferencia de radio R, el cuerpo F'_{ah} se puede encerrar dentro del cuerpo que se obtiene extrayendo del cilindro de radio $R + ah$ y de altura $2ah$ el cilindro de radio $R - ah$ y de altura $2ah$.

El volumen de este cuerpo es igual a la diferencia entre los volúmenes de los cilindros: $\pi[(R+ah)^2-(R-ah)^2]\,2ah = 8\pi a^2h^2R$. Puesto que $\frac{8\pi a^2h^2R}{2h}\to 0$ si $h\to 0$, también en el caso de un arco de circunferencia obtenemos $\frac{V'_{ah}}{2h}\to 0$. Queda demostrado el teorema.

Area del segmento esférico. TEOREMA 29.3 *El área del segmento esférico de radio R y de altura H es igual a*

$$S = 2\pi RH.$$

DEMOSTRACION. Sea F el segmento que se trunca de la esfera de radio R. Construyamos el cuerpo F_h del que trata la definición del área de la superficie (fig. 229). Entonces, el área del segmento será igual al límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h\to 0$. Según el teorema 29.2, este límite seguirá siendo el mismo si deformamos el cuerpo F_h cerca de la frontera del segmento. Realizaremos esta deformación a una distancia de la frontera no mayor que $\frac{h}{\cos\alpha}$, donde α es el ángulo que forma con el plano de la base del segmento el plano tangente construido en los puntos de la frontera del segmento. La deformación del cuerpo consistirá en que lo sustituiremos por el cuerpo comprendido entre dos esferas concéntricas de radios $R+h$ y $R-h$ y el plano de la base del segmento. Sea F'_h este cuerpo nuevo y sea V'_h su volumen.

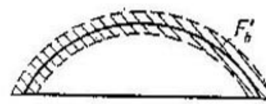

Fig. 229

El volumen del cuerpo F'_h es igual a la diferencia entre los volúmenes de dos segmentos, el segmento de radio $R+h$ y de altura $H+h$ y el segmento de radio $R-h$ y de altura $H-h$. Por consiguiente,

$$V'_h = \pi(H+h)^2\left[(R+h)-\frac{H+h}{3}\right]-$$

$$-\pi(H-h)^2\left[(R-h)-\frac{H-h}{3}\right] = 4\pi RHh+\frac{4}{3}\pi h^3.$$

Si $h\to 0$, se tiene $\frac{V'_h}{2h}\to 2\pi RH$. Queda demostrado el teorema.

Area lateral del cilindro. TEOREMA 29.4. *El área lateral del cilindro de radio R y de altura H es igual a $2\pi RH$.*

DEMOSTRACION. Sea F la superficie lateral del cilindro. Construyamos el cuerpo F_h del que trata la definición del área de la superficie. Entonces, el área lateral del cilindro será igual al límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h \to 0$. Según el teorema 29.2, este límite no se altera si el cuerpo F_h se deforma cerca de la frontera de la superficie F, o sea, a una distancia no mayor que h de ésta.

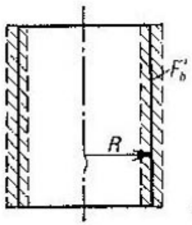

Fig. 230

Nuestra deformación del cuerpo F_h consistirá en que lo sustituiremos por el cuerpo que se obtiene extrayendo del cilindro de radio $R + h$ y de altura H el cilindro de radio $R - h$ y de la misma altura H (fig. 230). Sea F_h' este cuerpo y sea V_h' su volumen. El volumen del cuerpo F_h' es igual a la diferencia entre los volúmenes de estos cilindros: $V_h' = \pi (R + h)^2 H - \pi (R - h)^2 H = 4RHh$. Si $h \to 0$, tenemos $\frac{V_h'}{2h} \to 2\pi RH$ que es lo que se quería demostrar.

Area lateral del cono. TEOREMA 29.5. *El área lateral del cono truncado con bases de radio R_1 y R_2 y con generatrices de longitud l se determina según la fórmula*

$$S = \pi (R_1 + R_2) l.$$

DEMOSTRACION. Sea F la superficie cónica considerada. Construyamos el cuerpo F_h. Entonces, el área de la superficie cónica será igual al límite de la razón $\frac{V_h}{2h}$ para $h \to 0$. Según el teorema 29.2, este límite no se altera si el cuerpo F_h se deforma cerca de la frontera de la superficie F a una distancia de ésta no mayor que $\frac{h}{\operatorname{sen} \alpha}$, donde α es el ángulo entre las generatrices y los planos de las bases.

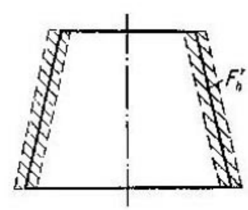

Fig. 231

Construyamos dos superficies cónicas F_1 y F_2 de modo que tengan el mismo eje que F y que sus generatrices en el plano principal sean paralelas a las generatrices de F y disten de éstas en h (fig. 231). Nuestra deformación del cuerpo F_h consistirá en que lo sustituiremos por el cuerpo F_h'

comprendido entre las superficies cónicas F_1 y F_2 y los planos de las bases de la superficie inicial F.

El volumen V'_h del cuerpo F'_h es la diferencia entre los volúmenes de dos conos de la misma altura que el cono inicial. Los radios de las bases de uno de los conos son $R_1 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $R_2 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$ y del otro $R_1 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $R_2 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$. Por consiguiente,

$$V'_h = \frac{1}{3}\pi H \left\{\left(R_1 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2 + \left(R_1 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\left(R_2 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(R_2 + \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2\right\} - \frac{1}{3}\pi H \left\{\left(R_1 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(R_1 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\left(R_2 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right) + \left(R_2 - \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha}\right)^2\right\} = \frac{2\pi H h}{\operatorname{sen}\alpha}(R_1 + R_2).$$

Si $h \to 0$, se tiene $\frac{V'_h}{2h} \to \pi (R_1 + R_2) \frac{H}{\operatorname{sen}\alpha}$ siendo $\frac{H}{\operatorname{sen}\alpha}$ la longitud de la generatriz de la superficie F. O sea, el área de la superficie lateral F del cono truncado es igual a $S = \pi (R_1 + R_2)\, l$.

El área lateral del cono no truncado se obtiene tomando en esta fórmula $R_2 = 0$.

§ 30. NOCIONES DE HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

Los primeros resultados geométricos se remontan a la antigüedad y son de origen experimental. Fueron observados por el hombre en su actividad práctica. Como ciencia empírica, la Geometría alcanzó en su período inicial un nivel singularmente elevado en Egipto en relación con los trabajos de agrimensión y de riego.

Durante el primer milenio anterior a nuestra era las nociones de la Geometría pasaron de los egipcios a los griegos, y en la Grecia Antigua se inició una etapa nueva del desarrollo de esta ciencia. En el período comprendido entre los siglos VII y III antes de nuestra era, los geómetras griegos, además de enriquecer la Geometría con numerosos resultados nuevos, hicieron grandes progresos en su argumentación. Euclides (330-275 antes de nuestra era) resumió y sistematizó esta labor de los geómetras griegos en su famosa obra, «Elementos», que ha hecho llegar hasta nosotros la primera exposición fundamentada de la Geometría. En ella, los razonamientos son tan irreprochables para su tiempo que los «Elementos» fue a lo largo de dos mil años desde su aparición el único tratado para los que estudiaban la Geometría.

Los «Elementos» de Euclides constan de trece libros de los cuales ocho dedicados a la Geometría propiamente dicha y los otros a la Aritmética. Cada libro de los «Elementos» empieza con la definición de las nociones. En el primer libro siguen a las definiciones postulados y axiomas. Por ejemplo:

POSTULADO I. Es posible trazar la recta de un punto a otro.

POSTULADO V. Si dos rectas cortadas por una tercera forman, del mismo lado de ésta, dos ángulos correspondientes internos cuya suma es menor que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas suficientemente se cortan por este lado de la secante.

AXIOMA I. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

AXIOMA II. Si a dos cosas iguales se les añaden otras dos también iguales, se obtienen sumas iguales.

Tanto los postulados como los axiomas constituyen afirmaciones admitidas sin demostración. No se sabe en virtud de que principio unas afirmaciones pertenecen a los postulados y otras a los axiomas. En la exposición contemporánea llamamos axiomas a todas esas afirmaciones. A los axiomas siguen los teoremas y los problemas de construcción bajo el nombre genérico de «Proposiciones». Van lógicamente ordenados de manera que la demostración (solución) de cada proposición se basa en las precedentes.

Esta construcción de la Geometría sugirió a los geómetras el deseo natural de reducir al mínimo el número de postulados y axiomas, es decir, de afirmaciones admitidas sin demostración. Por eso, el propio Euclides y muchos geómetras después de él intentaron deducir algunos postulados y axiomas de los otros postulados y axiomas. En particular, muchos geómetras intentaron, comenzando por Euclides, demostrar el quinto postulado. Fueron propuestas muchas demostraciones del quinto postulado. Pero, en todas estas demostraciones, los autores utilizaron alguna afirmación equivalente al quinto postulado y no deducible de otros postulados y axiomas. Algunas de estas afirmaciones son:

1. Todas las perpendiculares a un lado del ángulo agudo cortan su otro lado.

2. Existen triángulos semejantes y no iguales.

3. Existen triángulos de área tan grande como se quiera.

4. Existen triángulos con la suma de ángulos igual a dos rectos.

5. Las rectas paralelas son equidistantes.

Las tentativas fallidas de demostrar el quinto postulado hizo dudar a ciertos geómetras, a partir de fines del siglo XVIII, de la posibilidad misma de demostrar el quinto postulado. La solución total de esta cuestión es obra del gran geómetra ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski (1793-1856).

Uno de los equivalentes del quinto postulado es la afirmación de que por un punto exterior a una recta pasa no más de una recta paralela. Lobachevski sustituyó el quinto postulado por el siguiente: por un punto exterior a la recta perteneciente a un plano pasan dos rectas que no la cortan. Igual que sus predecesores, Lobachevski tenía la esperanza de descubrir una contradicción en el sistema de afirmaciones que se desprenden de este nuevo postulado. Sin embargo, después de desarrollar este sistema hasta el volumen de «Elementos», no descubrió en él contradicción alguna y sobre esta base llegó a la conclusión correcta de que existe una Geometría distinta de la euclidiana donde no tiene lugar el quinto postulado de Euclides. Esta se llama ahora Geometría de Lobachevski.

Los geómetras que siguieron a Lobachevski demostraron rotundamente que si no hay contradicciones en la Geometría de Euclides tampoco puede haberlas en la Geometría de Lobachevski. Así pues, en tanto a la falta lógica de contradicciones, ambas Geometrías se encuentran en situación de igualdad. Sólo la experiencia puede dirimir la cuestión de cuál de estas Geometrías describe mejor el mundo que nos circunda. Actualmente se ha establecido que la Geometría del mundo circundante a escala grande, cósmica, tiene una estructura más compleja que las Geometrías de Euclides y de Lobachevski. A escala relativamente pequeña, aquélla es próxima a la euclidiana. Por eso, en la vida cotidiana utilizamos la Geometría de Euclides.

Citaremos algunos teoremas de la Geometría de Lobachevski. Ante todo, en ella son válidos todos los teoremas de la Geometría euclidiana que hemos demostrado hasta el parágrafo de las paralelas. De esa suerte, en la Geometría de

Lobachevski son válidos los teoremas que formulan los criterios de la igualdad de los triángulos, los teoremas que establecen las relaciones entre los lados y los ángulos del triángulo, el teorema de la existencia y la unicidad de la perpendicular bajada desde un punto a la recta y muchos otros teoremas de la Geometría euclidiana.

Sin embargo, los teoremas para cuya demostración se utiliza el axioma de las paralelas de Lobachevski tienen un enunciado muy distinto. Por ejemplo, utilizando el axioma VI hemos demostrado que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. El teorema correspondiente de la Geometría de Lobachevski dice: la suma de los ángulos del triángulo es menor que dos rectos. Resulta que depende del triángulo. En particular, si un triángulo está dentro del otro, éste tiene la suma de ángulos menor.

En la Geometría de Euclides, como sabemos, existe para el triángulo un número infinito de triángulos semejantes no iguales a él. En la Geometría de Lobachevski, cuando los triángulos tienen iguales los ángulos correspondientes, son iguales; es decir, no existen triángulos semejantes no iguales.

En la Geometría de Euclides las rectas no secantes son equidistantes. En la Geometría de Lobachevski, las rectas no secantes divergen ilimitadamente, cuanto menos en una dirección.

En la Geometría de Euclides, se pueden trazar a dos rectas no secantes tantas perpendiculares como se quiera. En la Geometría de Lobachevski, la perpendicular común es sólo una o no existe.

Todos estos teoremas de la Geometría de Lobachevski pueden ser demostrados tomando el axioma de Lobachevski en lugar de nuestro axioma VI de las paralelas y conservando los demás. Empero, las demostraciones resultan bastante complejas. Esta es la explicación de que hicieran falta más de dos mil años para dirimir la imposibilidad de demostrar el quinto postulado.