GEOMETRIA
PRIMERA PARTE

GEOMETRIA

PROF. OMER CANO

I n d i c e

PRIMERA PARTE
Correspondiente al 4º Año de Humanidades

PROLOGO

A petición de varios colegas, y para utilidad de profesores y alumnos, sale a luz la 3.ª edición del texto de Geometría 2.º Ciclo.

Las materias de los tres últimos cursos se han reunido en un solo tomo: 1.º para facilitar consultas y repasos, dada la conexión que existe entre ellas; 2.º para mayor economía del tiempo y del dinero del lector.

Substancialmente es la misma materia total que en la edición anterior, pero se presenta más didáctica, más clara y metódica, mejor dispuesta y ordenada.

Se comienza por el capítulo de la circunferencia por ser más sencillo y de mayor interés para los alumnos.

Se hace especial hincapié en el enunciado y desarrollo de los lugares geométricos, por ser materia fundamental y clave en la resolución de numerosos problemas.

Para varios teoremas se dan diversas demostraciones. Los señores profesores y alumnos sabrán elegir las que sean de su agrado.

Cada capítulo va seguido de numerosos ejercicios y problemas de aplicación cuidadosamente seleccionados. No es necesario resolverlos todos... Su elección queda al criterio del profesor y a la estudiosidad del alumno.

El presente texto, además de asegurar el acierto en sus exámenes finales a los alumnos estudiosos y aplicados que se sirvan de él, será también un precioso auxiliar para los que se preparan a dar el bachillerato en Matemáticas.

A tal efecto, además de los numerosos ejercicios diseminados en el texto, se insertan al final de cada curso unos 150 problemas entresacados de los propuestos en los exámenes de bachillerato en diversas ciudades y distintos años.

Al final del texto, se ponen a manera de ejemplos numerosas pruebas referentes a cada cédula del Bachillerato, todas ellas propuestas en los exámenes oficiales.

La experiencia indica que el alumno que piensa rendir el Bachillerato en Matemáticas, debe pensar en prepararse ya desde el cuarto Año.

Pues bien, los estudiantes de 4.º, 5.º y 6.º años, encontrarán al final de su respectiva materia numerosos problemas de bachillerato, basados en la misma, para ejercitarse provechosamente.

Agradecimiento muy especial a cuantos colaboraron en una u otra forma, muy particularmente a mi querido amigo R. H. Ruperto Vargas B., que con gran arte y abnegación ejecutó los dibujos de los clisés.

Ruego a los señores profesores del ramo, se sirvan enviarme sus observaciones y sugerencias encaminadas a subsanar las deficiencias que se hayan deslizado en el presente texto, con el fin de irlo mejorando en una próxima edición.

Omer Cano

ADVERTENCIA A LA 4.a EDICION

Con relación a la anterior, la presente edición no ha variado mucho.

La materia referente al 4.o Año, salvo algunos pocos problemas de aplicación que fueron reemplazados por otros que ofrecían mayor interés, no ha sido modificada.

En la parte correspondiente al 5.o Año, se introdujeron algunas nociones sobre los vectores y se dio mayor extensión a la "Homotecia", por exigirlo así los nuevos programas.

En la parte del 6.o Año, se estimó que el "Principio de Cavalieri", iría mejor antes del Capítulo que trata del Volumen de los sólidos, en vez de figurar al final de dicho Capítulo. Además, se agregaron varios nuevos problemas de aplicación. Como apéndice de la Geometría del Espacio, se añadió un corto capítulo expresamente indicado en el nuevo programa: "Traslación; simetría, homotecia", que no figuraba en las ediciones anteriores.

Al final del texto se insertan las pruebas de bachillerato de la "Universidad de Chile", de la "Universidad Católica de Valparaíso, de los últimos años hasta 1965, inclusive y algunas pruebas del examen de admisión a la Universidad Técnica "Federico Santa María".

Una vez más vayan nuestros agradecimientos a los señores profesores y alumnos por el favor siempre creciente dispensado a nuestro texto y también a los que, en una u otra forma, nos han hecho llegar su palabra de aliento.

Aceptamos con mucho agrado cualquiera observación o crítica constructiva, que contribuya a mejorar la obra.

Valparaíso, 15 de Noviembre de 1965.

SIGNOS USADOS EN GEOMETRIA

Signos de operaciones:

$a+b$	se enuncia **a más b.**
$c-d$	se enuncia **c menos d.**
$e \times f$, o, $e \cdot f$	se enuncia **e multiplicado por f.**
$g : h$, o $\frac{g}{h}$	se enuncia **g dividido por h o g partido por h.**

Signos de relaciones:

$\gamma \equiv \gamma$	se enuncia **γ idéntico a γ**
$a=b$	se enuncia **a igual b.**

$c<d$	se enuncia	**c menor que d.**
$e>f$	se enuncia	**e mayor que f.**
$h \neq g$	se enuncia	**h desigual o diferente a g.**
$ABC \sim QHG$	se enuncia	**ABC semejante a QHG.**
$ABC \cong DEF$	se enuncia	**ABC congruente con DEF.**
$AB \perp CD$	se enuncia	**AB perpendicular a CD.**
$MN \parallel OP$	se enuncia	**MN paralela a OP.**
∞	léase	**infinito.**

Otros símbolos que se usarán en el texto:

$\therefore$	léase	**por consiguiente, luego.**
$\measuredangle$	significa	**ángulo.**
$\triangle$	significa	**triángulo.**
$\#$	léase	**igual y paralela o paralelógramo.**
$\odot$	léase	**circunferencia o círculo.**
$\odot\ (A, c)$	léase	**circunferencia de centro A y radio c.**
$\square$	significa	**cuadrado.**
$\rectangle$	significa	**rectángulo.**
$A(\leftrightarrow)B$	léase	**se une A con B.**
$AE \rightarrow$ de D	léase	**AE se prolonga más allá de D.**
arc. AB	léase	**arco AB.**
$A=f(r)$	léase	**A es función de r o A depende de r.**

ALFABETO GRIEGO

Mayuscola	Minúscula	Nombre
Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gama
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	dseta
Η	η	eta
Θ	ϑ, θ	theta
Ι	ι	iota
Κ	ϰ	kapa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mi
Ν	ν	ni
Ξ	ξ	ksi
Ο	ο	ómicron
Π	π	pi
Ρ	ϱ	ro
Σ	σ, ς	sigma
Τ	τ	táu
Υ	υ	ipsilon
Φ	φ	fi
Χ	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

CAPITULO I

LA CIRCUNFERENCIA — EL CIRCULO

§ 1.—REPASO DE ALGUNAS NOCIONES ESTUDIADAS EN CURSOS ANTERIORES.

Circunferencia es una línea curva, plana y cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro. Fig. 1.

Círculo es la superficie o parte del plano encerrada por la circunferencia. Fig. 1

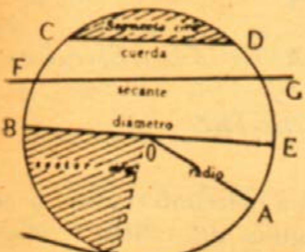


Fig. 1

Radio **es el trazo que une** el centro de la ⊙ con un punto cualquiera de ella. Se designa por **r**. Ej.: **OA**, en Fig. 1.

Arco de una ⊙ es cualquiera parte de ella. **Ej.:** arco **BT,** en Fig. 1.

Cuerda es el trazo que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia. Ej.: **CD**, en Fig. 1.

Secante es una cuerda prolongada. **Ej.: FG,** en Fig. 1.

Sagita o flecha de un arco es la ⊥ media de una cuerda que divide en dos partes iguales al arco comprendido entre los extremos de dicha cuerda. Ej.: DE en Fig. 3.

El trazo que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro, es el *diámetro.*

El diámetro es la cuerda máxima de una circunferencia y equivale a *dos radios* **(d=2r).**

El ángulo formado por dos radios y cuyo vértice está en el centro de la circunferencia, se llama *ángulo del centro o central.* ∢**AOT**, Fig. 1.

La parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco que une los extremos de estos radios, se designa *sector circular.* (Fig. 1).

La parte del círculo comprendida entre una cuerda y el arco correspondiente, se designa *segmento circular.* (Fig. 1).

§ 2.—PROPIEDADES DE LOS ANGULOS DEL CENTRO, DE LAS CUERDAS, DE LOS ARCOS Y DE LAS TANGENTES

TEOREMA I.—**En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, a ángulos del centro iguales, corresponden arcos, cuerdas, sectores y segmentos iguales.**

Hip.) $\alpha=\beta$ **(Fig. 2)**

Tes.)
- arc. **AB**=arc. **CD.**
- cuerda **AB**=cuerda **CD.**
- sect. **AOB**=sect. **COD.**
- segm. **ASB**=segm. **CRD.**

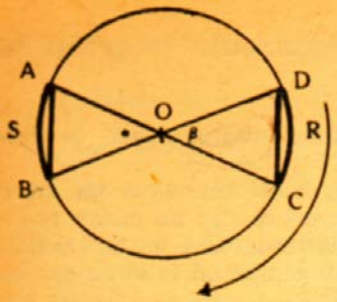


Fig. 2

Dem.) Se hace girar el ángulo β en torno del centro O (en el sentido de la flecha) hasta que el lado **OC** coincida con **OA**. Entonces β coincidirá con su igual α.

Como el punto **C** coincide con **A** y **D** con **B**, y entre dos puntos no se puede trazar más que una recta, la cuerda **DC** coincide con **AB**. También coinciden los arcos, sectores y segmentos. Luego: la tesis.

El teorema I admite cuatro proposiciones o teoremas recíprocos.

Por ej., al referirlo a una cuerda dirá:

En una misma ⊙ o en ⊙s congruentes, a cuerdas iguales, corresponden ángulos del centro, arcos, sectores y segmentos iguales.

Demostración por giro, como en problema I.
Formular los demás teoremas recíprocos.

Siempre que se hable de ángulos del centro menores que un ángulo extendido, resulta exacto el corolario siguiente y sus recíprocos.

COROLARIO.—*En una misma ⊙ o en ⊙s congruentes a mayor ángulo del centro corresponde mayor arco, mayor cuerda, mayor sector y mayor segmento.*

Este resultado o deducción se suele expresar en Matemáticas diciendo que, el arco, la cuerda, el sector y el segmento, son *funciones* del ángulo del centro.

Formúlense las demás proposiciones recíprocas del corolario anterior.

OBSERVACIONES.—De lo expuesto anteriormente, se desprende que:

a) Para comparar dos ángulos, basta comparar sus arcos correspondientes descritos desde el vértice, con un mismo radio.

b) Para dividir un ángulo en partes iguales, bastará dividir en partes iguales el arco de circunf. comprendido entre sus lados, descrito desde el vértice y unir los puntos de división con el mismo vértice.

TEOREMA II.—**La ⊥ bajada desde el centro de una ⨀ a una cuerda:**

1º. es simetral de la cuerda;

2º. es bisectriz del ∢ del centro que tiene por arco correspondiente el arco subtendido por la cuerda.

3º. Dimidia los dos arcos subtendidos por la cuerda.

Hip.) $OD \perp AB$

Tes.)
1.º $DA = DB$
2.º $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$
3º arc. **AE** = arc. **EB** y arc. **AC** = arc. **CB**

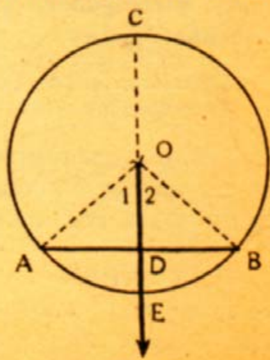


Fig. 3

Dem.) Sea la cuerda AB. Fig. 3

A(↔)O (↔)B.

Como △**ABO** es isósceles, las tesis 1.ª y 2.ª, se demuestran directamente aplicando los teoremas sobre el △ isósceles estudiados en 3.er año. (Ver Omer Cano, Tomo II. Teor. 23, 24, 25 y 26).

Siendo $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, arc. **AE**=arc. **EB** (Teor. 1).

Demostrar que el arc. AC=arc. BC (Fig. 3).

COROLARIO.—*En una ⊙ la simetral de cualquier cuerda pasa por centro.*

Del corolario del teorema II se deduce la solución para determinar el centro de una ⊙ o de un arco de circunferencia, y el método para construir la ⊙ que pasa por tres puntos dados.

PROBLEMA FUNDAMENTAL.—1.—Construir la ⊙ que pasa por tres puntos dados, **A, B** *y* **C**, *que no están en línea recta.*

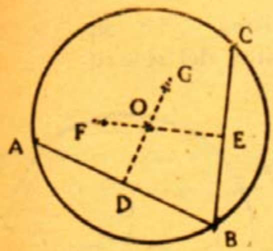


Fig. 4

Solución.— 1.° Se traza la simetral **DG** de **A** y **B** (Fig. 4).

2.° Se traza la simetral **EF** de **B** y **C**.

Estas simetrales concurren en **O**. (Ejerc. 12 de Omer Cano, Tomo II).

O es el único centro de la ⊙ pedida.

Discutir el problema y definir la ⊙ para los casos en que:

1.° Los puntos están en línea recta;

2.° Dos de los puntos coinciden;

3.° Los tres puntos coinciden.

COROLARIOS: *a) Por tres puntos no situados en línea recta puede pasar una circunferencia y sólo una;*

b) Dos circunferencias no pueden cortarse en más de dos puntos.

c) Una recta y una circunferencia no pueden tener más de dos puntos comunes, salvo el caso en que coincidan, es decir, si $r = \infty$.

§ 3.—RELACION ENTRE LAS CUERDAS Y SUS DISTANCIAS AL CENTRO.

a) Las cuerdas son iguales

TEOREMA III.—**En una misma $\odot$ o en $\odot$s. congruentes, cuerdas iguales equidistan del centro.**

Hip.) $AB = CD$.
Tes.) $OM = ON$.

Dem.) **$B (\leftrightarrow) O (\leftrightarrow) C$.**

Resulta $\triangle$**OMB**$\cong\triangle$**ONC.**

por tener:

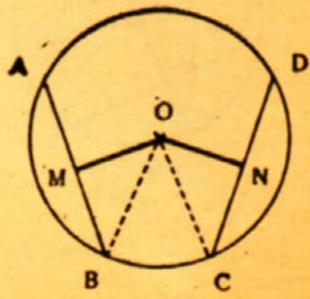


Fig. 5

$OB = OC$ (=radio)
$MB = NC$ (M y N puntos medios de AB y CD).
$\sphericalangle OMB = \sphericalangle ONC = 90°$
$\therefore$ **OM = ON**

2ª Demostración del Teorema III

Si es necesario se traslada una de las cuerdas hasta que ambas tengan el extremo común **B**.

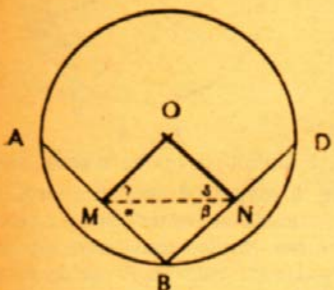


Fig. 6

M(→)N Fig. 6

$MB = NB$ (mitades de cuerdas iguales)

$\therefore$ $\triangle MBN$ isósceles

$\therefore$ $\alpha = \beta$ (ángulos basales $\triangle$ isósc.)

y $\gamma = \delta$ (Por tener complementos iguales)

$\therefore$ $\triangle$**MNO** isósc.

Luego: **OM = ON** (Q. E. D.)

b) Las cuerdas son desiguales

TEOREMA IV.— **En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, de dos cuerdas desiguales, la mayor dista menos del centro.**

Hip.) $CD > AB$

Tes.) $OF < OI$

Dem.) Se traza $CE = AB$

Resulta $OG = OI$ (Teor. III)

En $\triangle$ rect. HFO:

$OF < OH$ (En un $\triangle$ a mayor $\sphericalangle$ se opone mayor lado).

A fortiori: $OF < OG$

Luego: **OF < OI** (Q. E. D.)

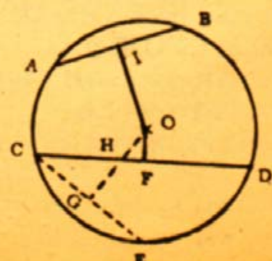


Fig. 7

2ª Demostración del Teorema IV.—

Hip.) $\overline{AB} > \overline{BC}$ (Fig. 8).
Tes.) $OE < OD$

Dem.) $E(\leftrightarrow)D$ (puntos medios)
Resulta: $EB > BD$ (mitades de cuerdas desiguales)
$\therefore$ $\beta > \alpha$ (En 1 $\triangle$ a mayor lado se opone mayor ángulo).
$\delta < \gamma$ (Complementos desiguales).

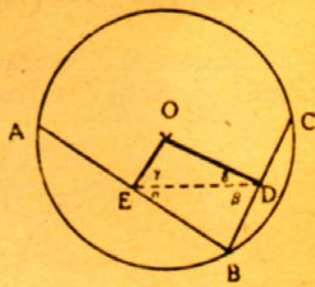


Fig. 8

Luego: $\mathbf{OE < OD}$ (En 1 $\triangle$ a menor ángulo se opone menor lado)

NOTA.—Se puede observar que la magnitud de una cuerda de una circunferencia depende de su distancia al centro. Si ésta crece, pasando por todos los valores entre sus límites extremos, de cero a r, la cuerda decrece pasando por todos los valores, desde su máximo valor, 2r (1 diámetro), a su valor mínimo, cero, el cual es un simple punto.

TEOREMA V.—**En una misma circunferencia, los arcos comprendidos entre paralelas son iguales.**

Hip.) $AB \parallel DE$
Tes.) arc. **AD** = arc. **BE**

Dem.) Se hace: $OH \perp AB$
Resulta: $OC \perp DE$ y
arc. **AH** = arc. **BH** (Teor. II)
arc. **AH** = arc. **EH**
Restando miembro a miembro:
arc. **AH** — arc. **DH** = arc. **BH** — arc. **EH**
Luego: arc. **AD** = arc. **BE**

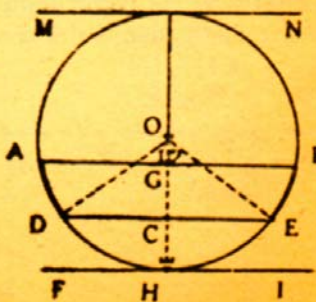


Fig. 9

OBSERVACION.—Demostrar el Teorema V en el caso en que **AB** || **FI** (una secante y otra tangente) y en el caso en que **MN** || **FI** (las dos ||s. son tangentes). **Fig. 9.**

TEOREMA VI. (Recíproco del V).—**Dos cuerdas de una circunferencia que unen los extremos homólogos de dos arcos iguales, son paralelas.**

Hip.) arc. AD=arc. BE (Fig. 9)
Tes.) AB||DE

1º **Dem.)** Se traza OH⊥AB.
D (↔) O (↔) E
Resulta: arc. **AH**=arc. **BH**. (Teor. II 3º)
y arc. **DH**=arc. **EH**.
∢1=∢2. (Teor. I Recíproco)
También OH⊥DE (OC=bisect. de △ isósc. DEO)
Luego: AB||DE (Dos o más ⊥s a una misma recta. . .)

2.ª Demostración del teorema VI

OH⊥DE (Fig.9)
∴ **arc DH=arc HE**
arc AD+arc DH=arc BE+arc EH

OH dimidia arc AB ∴ dimidia $\overline{AB}$ ∴ OH⊥AB
∴ DE || AB (q. e. d.)

§ 4.—PROPIEDADES DE LA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

Tangente es la recta que tiene un solo punto común con la circunferencia.

El punto en que la tangente toca a la circunferencia es el *punto de tangencia o de contacto.*

Una tangente se puede considerar como el *límite de las posiciones de una secante* **AB** que se desplaza paralelamente a sí misma y cuya distancia al centro tiende a igualar al radio. (Fig. 11).

También se la puede considerar como la posición *límite* de una secante **TE**, que gira alrededor de **T**, de modo que el punto de intersección **E** se aproxime al punto **T**, hasta confundirse con él. (Fig. 10).

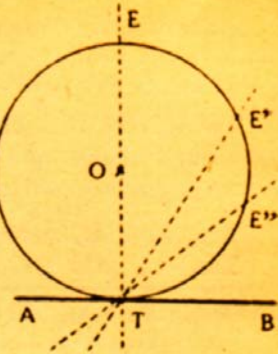


Fig 10

TEOREMA VII.—**Toda tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.**

Hip.): **MN** es tangente en **T**.
Tes.) **Mn⊥OT.**

1.ª Dem.): Fig. 11. Si se traslada la secante **AB** paralelamente a sí misma, de modo que aumente su distancia al centro, la cuerda **AB**, interceptada, se va haciendo cada vez menor. Su punto medio **D** y sus extremos **A** y **B**, se aproximan más y más a medida que se aleja del centro.

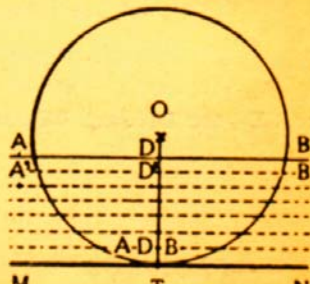


Fig. 11

Llegará un momento en que la **secante** ocupará la posición límite de la **tangente MN**. Entonces esos tres puntos, **D**, **A** y **B** coincidirán en **T**.

Como la recta que une el centro de una circunferencia con el punto medio de una cuerda es perpendicular a ella, **MN⊥OT**. (Teorema 23ª, 3.er A., O. Cano)

2ª Demostración del Teorema VII.—

Hip.) **AB** es tangente en **T**.
Tes.) **OT⊥AB** (Fig. 12).

Dem.) Por ser **AB** tangente a la ⊙, tiene un solo punto común con ella, es **T**.

De esto resulta que **OT** será la menor distancia que hay entre **O y AB**. Cualquier otro trazo será mayor que **OT**, por ej.: **OD**, por estar **D** situado fuera de la ⊙.

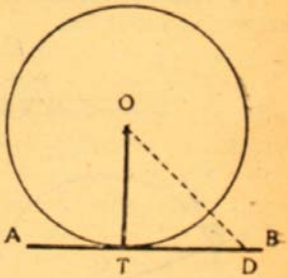


Fig. 12

Siendo **OT** la menor distancia, se tendrá que **OT⊥AB.**

TEOREMA VIII. (Recíproco del VII).—**La ⊥ en el extremo de un radio es tangente a la circunferencia.**

Hip.) **OT⊥AB** (Fig. 12).
Tes.) **AB** es tangente en **T**.

Dem.) Trazando la tangente a la circunferencia en él punto **T,** esta tangente será perpendicular al radio **OT,** según se demostró en el teorema anterior. Pero la perpendicular a **OT,** en el punto **T,** es única. Por consiguiente, se confundirá con **AB.**

Luego: **AB** es tangente.

COROLARIOS: 1.°) *Por cada punto de una circunferencia se puede trazar una sola tangente.*

2.°) *Todos los puntos de una tangente son exteriores a la circunferencia, menos el punto de contacto.*

3.°) *Las tangentes trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas.*

§ 5.—NORMAL DE UNA CURVA.

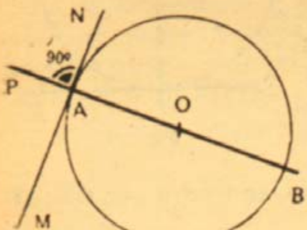


Fig. 13

Se llama **normal a una curva** en un punto dado **A** de ella, la perpendicular a la tangente en ese punto.

El punto **A** es el pie de la normal.

Si la curva es la circunferencia, la normal es el radio. En Fig. 13, **MN** es la tangente y **BOA** la normal.

§ 9.—LUGARES GEOMETRICOS REFERENTES A LA CIRCUNFERENCIA

Recuérdese que: "*Lugar Geométrico* (L. G.) *es toda figura, línea recta o curva, o toda porción del espacio, cuyos puntos, exclusivamente gozan de una misma propiedad o satisfacen una misma condición*".

Tomando en cuenta la materia expuesta anteriormente y los Ls. Gs. estudiados en 3.er Año (1), se desprenden los siguientes lugares geométricos referentes a la circunferencia.

1er GRUPO DE Ls. Gs. (2)

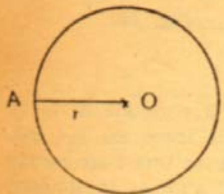


Fig. 14

L. G. 1.—*El L. G. de todos los puntos del plano que equidistan de un punto dado* **O** *en una magnitud dada* **r**, *es la ⊙ que tiene por centro el punto* **O** *y por radio* **r**. (Fig. 14).

Razón.— Por definición de circunferencia.

L. G. 2.—*El L. G. de los centros de las ⊙s de radio dado* **r**, *que pasan por un punto dado* **P**, *es la ⊙ descrita con el radio dado y con centro en el punto dado* **P**. (Fig. 15).

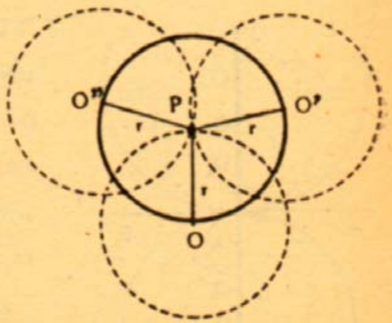


Fig. 15

Razón.—La distancia desde P a cada uno de los centro de las ⊙s es **r**.

---

(1) Es útil que se recuerden previamente los Ls. Gs. vistos en 3.er Año.

(2) Los otros grupos de Ls. Gs. se encuentran en las págs. 45 54 y 71).

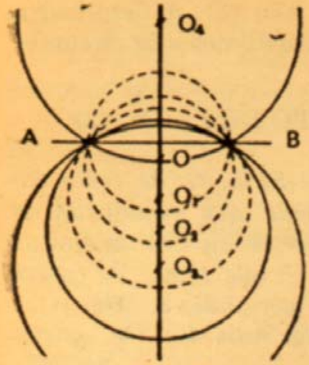
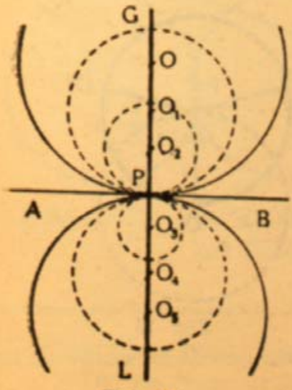


Fig. 16

L. G. 3.—*El L. G. de los centros de todas las ⊙s que pasan por dos puntos dados* **A** *y* **B**, *es la simetral de estos puntos.* (Fig. 16).

El L. G. 3 equivale al L. G. del vértice de todos los △s isósceles que tienen una base común dada AB, el cual es la simetral de dicha base.



Fgi. 17

L. G. 4.—*El L. G. de los centros de todas las ⊙s tangentes a una recta dada* **AB**, *en un punto dado* **P**, *es la perpendicular trazada en este punto.*

En Fig. 17, **GL** es el lugar geométrico.

Dem.) Teorema VII.

L. G. 5.—*El L. G. de los centros de todas las ⊙s de radio dado* **r** *tangentes a una recta dada* **L**, *se compone de* *dos* $\|$*s trazadas a ambos lados de la recta a la distancia del radio dado.*

M y **N** forman el L. G. (Fig. 18).

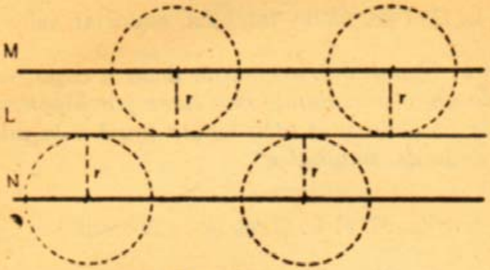


Fig. 18

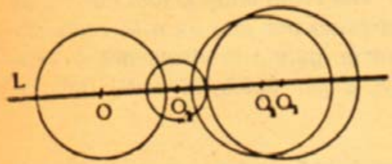


Fig. 19

L. G. 6.—*El L. G. de los centros de todas las* ⊙s (de cualquier radio) *que interceptan sobre una recta dada* **L** *su diámetro respectivo, es la misma recta dada.* (Fig. 19).

L. G. 7.—*E L. G. de los puntos medios de todas las cuerdas de longitud dada* **c** *que se pueden construir en una circunferencia* **O**, *es una* ⊙ *concéntrica con la dada y cuyo radio es la distancia del centro a una de las cuerdas de longitud* **c**. (Fig. 20).

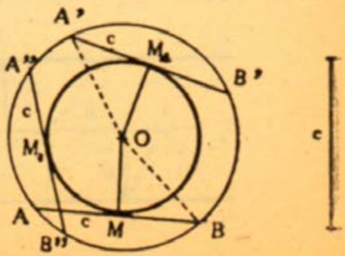


Fig. 20

Demostración: Teoremas II y III.

El L. G. 7 se puede, también, enunciar así:

"Es la ⨀ concéntrica con la dada y cuyo radio es un cateto de un △ rectángulo que tiene por hipotenusa el radio de la ⨀ dada y el otro cateto igual a la mitad de la cuerda dada de longitud **c**".

En la Fig. 20, el L. G. es la ⨀ de radio = OM.

L. G. 8.—*El L. G. de los centros de las ⨀s de radio dado que interceptan sobre una recta dada* **L** *una cuerda de longitud dada* **c**, *está constituido por dos* ||*s a la recta dada* **L**, *trazadas a una distancia igual a la altura del △ isósceles que tiene por base* **c**, *y por lados, el radio dado* **r**. (Fig. 21).

Razón.—La distancia desde dichas cuerdas (o sea, desde la recta dada) a los centros de las ⨀s es constante.

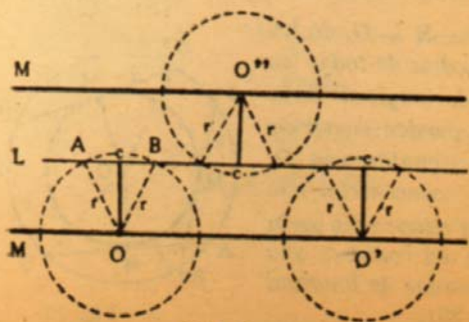


Fig. 21

CAPITULO II

ANGULOS EXCENTRICOS

§ 1.—GENERALIDADES

Por oposición a ángulo del centro (pág. 12), *ángulo excéntrico es aquel cuyo vértice está situado fuera del centro de la circunferencia.*

El vértice puede encontrarse en un *punto interior* de la circunferencia, en un *punto exterior* a ella o situado *sobre la misma* circunferencia.

En este último caso el *ángulo excéntrico* puede recibir los nombres de *inscrito, semi inscrito* y *ex inscrito.*

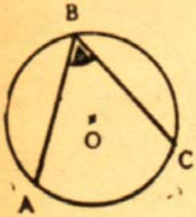


Fig. 22

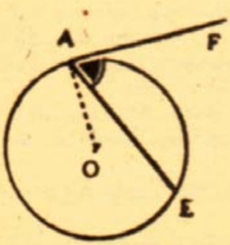


Fig. 23

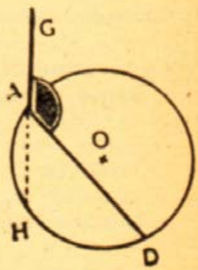


Fig. 24

Angulo inscrito es aquel cuyo vértice se encuentra sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas. Fig. 22.

Angulo semi inscrito es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia y está formado por una cuerda y una tangente. Fig. 23.

El ángulo semi inscrito se puede considerar como el límite de un ángulo inscrito cuando uno de sus lados se considera girando alrededor del vértice hasta quedar tangente a la circunferencia,.

Angulo ex inscrito es el que está formado por una cuerda y la prolongación de otra y cuyo vértice está sobre la circunferencia. Fig. 24.

§ 2.—PROPIEDAD DEL ANGULO INSCRITO

TEOREMA XI.— **Todo ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo del centro (1) cuyos lados interceptan o comprenden el mismo arco.**

Para la demostración de esta propiedad distinguiremos tres casos, según la posición del centro con relación al ángulo inscrito.

---

(1) Como todo $\measuredangle$ del centro se mide por el arco descrito entre sus lados, desde el vértice como centro, la medida de un $\measuredangle$ del centro y dei arco interceptado por sus lados, se expresan por el mismo número, aun cuando dichas cantidades sean de naturaleza distinta (ángulo y arco).

Ejemplo: Sea el $\measuredangle$ AOB$=60°$ (Fig. 25). Si se divide en 60 $\measuredangle$s iguales, cada uno de ellos es un $\measuredangle$ de 1°.

Cada uno, también, intercepta un arco de 1°.

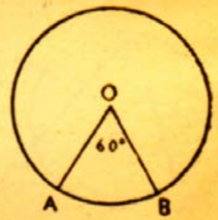


Fig. 25

El número que expresa la medida del arco **AB** es igual también a 60°.

Luego medida $\measuredangle$AOB= medida arco AB.

Por tal motivo, frecuentemente el teorema que se refiere a la propiedad del ángulo inscrito, se enuncia refiriéndolo al arco, de esta manera:

"Un ángulo inscrito es igual (o tiene por medida) a la mitad del arco comprendido entre sus lados".

1er. CASO.— El centro del círculo está situado sobre uno de los lados del ángulo. Fig. 26.

Hip.) α es un $\measuredangle$ inscrito.

Tes.) $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

Dem.) $\triangle AOC$ isósceles.

Entonces $\measuredangle \mathbf{A} = \measuredangle \mathbf{C}$.

Por tanto $2\alpha=\beta$ (Un $\measuredangle$ exterior de un $\triangle$...)

Luego $\alpha=\frac{1}{2}\beta$

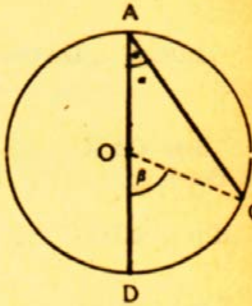


Fig. 26

2.o CASO.— El centro está situado dentro del ángulo. Fig. 27.

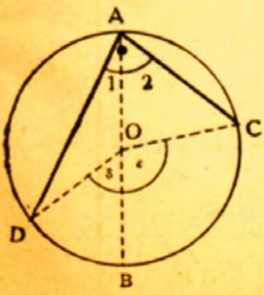


Fig. 27

Hip.) $\measuredangle \mathbf{DAC}$ inscrito.

Tes.) $\measuredangle \mathbf{DAC} = \frac{1}{2} \measuredangle \mathbf{DOC}$

Dem.) Trácese el diámetro **AB**. Se tiene:

$\measuredangle \mathbf{DAC} = \measuredangle 1 + \measuredangle 2$

Pero $\measuredangle 1 = \frac{1}{2}\delta$ (1.er Caso)

$\measuredangle 2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ (1.er Caso)

Sumando m. a m. las 2 últimas iguald.

$$\sphericalangle 1+\sphericalangle 2=\frac{\delta+\epsilon}{2}$$

Luego $\sphericalangle \mathbf{DAC}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{DOC}$.

3.er CASO.—El centro de la circunferencia está fuera del ángulo. (Fig. 28).

Hip.) $\sphericalangle \mathbf{DAC}$ inscrito

Tes.) $\sphericalangle \mathbf{DAC}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{DOC}$

Dem.) $\sphericalangle \mathbf{DAC}=\sphericalangle \mathbf{BAC}-\sphericalangle \mathbf{BAD}$

Pero $\sphericalangle \mathbf{BAC}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{BOC}$ (1.er caso)

y $\sphericalangle \mathbf{BAD}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{BOD}$ (1.er Caso)

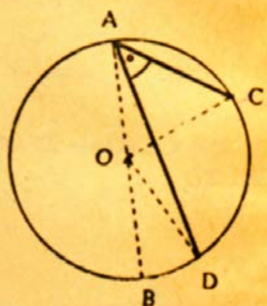


Fig. 28

Restando m. a m. las 2 últimas igualdades

Se tiene: $\sphericalangle \mathbf{BAC}-\sphericalangle \mathbf{BAD}=\frac{\sphericalangle \mathbf{BOC}-\sphericalangle \mathbf{BOD}}{2}$

o sea: $\sphericalangle \mathbf{DAC}=\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{DOC}$. (Q. E. D.)

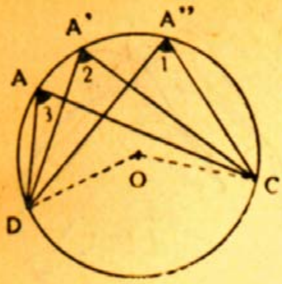


Fig. 29

COROLARIOS 1.—*Todos los ángulos inscritos cuyos lados interceptan en una ⊙ un mismo arco, son iguales.*

Dem.) En Fig. 29 $\measuredangle$ 1 $= \measuredangle 2 = \measuredangle 3$ porque cada uno es igual a

$\frac{1}{2} \measuredangle$ **DOC** (Teor. IX).

2.—*Dos o más ángulos inscritos cuyos lados interceptan arcos iguales en una misma ⊙ o en circunferencias congruentes, son iguales.*

Dem.) En la Fig. 30 arc. **AB** = arc **A' B'** = arc **A" B"**.
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \measuredangle 3$, por ser iguales a la mitad de ángulos del centro iguales.

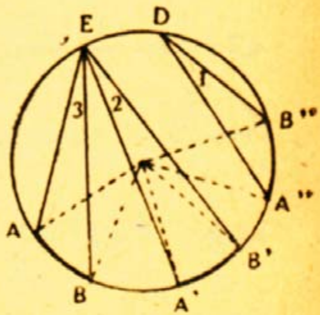


Fig. 30

¿Por qué son iguales dichos ángulos del centro?

T III

3.—*Los ángulos inscritos que comprenden entre sus lados arcos cuya suma completan la circunferencia entera, son suplementarios.* (1) Fig. 31.

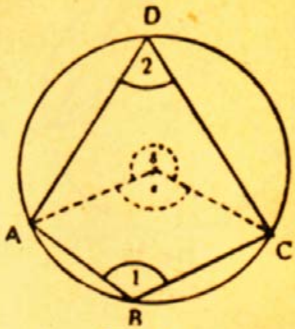


Fig. 31

Tes.) $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = 180^\circ$

Dem.) $\measuredangle 1 = \frac{1}{2}\delta$ (áng. convexo).

$\measuredangle 2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ (áng. cóncavo).

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon)$$

Pero $\qquad \delta + \varepsilon = 360^\circ.$

Luego: $\qquad \measuredangle 1 + \measuredangle 2 = \frac{\delta + \varepsilon}{2} = 180^\circ$

Los arcos cuya suma es igual a la circunferencia entera suelen designarse con el nombre de **arcos supletorios.** En la Fig. 31 los arcos **ABC** y **ADC** son supletorios. También lo son los arcos **BAD** y **BCD.**

---

(1) Este corolario (el 3) equivale a decir que los $\measuredangle$s opuestos de un cuadrilátero inscrito en una $\odot$ son suplementarios.

4.—*Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.* (Esta propiedad del ángulo inscrito se conoce con el nombre de **Teor. de Thales** (1). Figura 32).

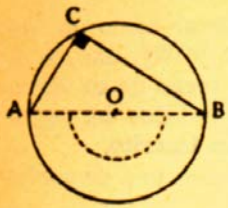


Fig. 32

Tes.) ∢ inscr. **ACB**=90°

Dem.) Como arc. ACB = una semi circunferencia,
el ∢ del centro **AOB**=un ∢ extendido=180°.
Luego el ∢ inscrito

$$\mathbf{ACB}=\frac{1}{2}\sphericalangle\mathbf{AOB}=90^\circ$$

5.— *La bisectriz de un ∢ inscrito pasa por el punto medio del arco interceptado por los lados.* Fig. 33.

Dem.) Si ∢**1**=∢**2**, se tendrá: arc. BD =arc. DC.

6.—Recíprocamente de corol. 5, *La recta que une el vértice de un ∢ inscrito con el punto medio del arco comprendido entre sus lados, es bisectriz de este ángulo.*

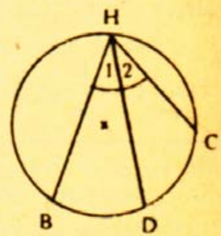


Fig. 33

---

(1) Thales de Mileto (VI Siglo A. C.). Nació en Fenicia; después fue a instruirse a Egipto. En este país logró medir la altura de las pirámides por medio de su sombra. Más tarde llevó la Geometría a Grecia. En Mileto funda la Escuela Jónica y enriquece la ciencia con diversos teoremas sobre el △ isósceles, el ángulo inscrito, los triángulos semejantes.

En Fig. 33, si arc. **BD**=arc. **DC**, se tendrá que: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

§ 3.—PROPIEDAD DEL ANGULO SEMI-INSCRITO

Como este ángulo se puede considerar como un caso particular del ángulo inscrito (pág. 31 y 32), uno de cuyos lados o cuerdas ha ido girando en torno de su vértice hasta convertirse en tangente, las propiedades del ángulo semi-inscrito son las mismas **del ángulo inscrito.**

Con todo, vamos a dar a continuación una demostración directa.

TEOREMA X.—**Un ángulo semi-inscrito** (formado por una cuerda y una tangente) **es igual a la mitad del ángulo del centro, cuyos lados comprenden el mismo arco.** (1).

Hip.) $\alpha = \sphericalangle$ semi-inscrito (Fig. 34).

Tes.) $\alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle \mathbf{AOC}$.

Dem.) **A** (↔) **O** (↔) **C.**
Se traza: **OB**=bisec. de $\sphericalangle$**AOC**
Resulta: **OB**⊥**AC** (Teorema II).
y $\alpha + \sphericalangle 1 = 90°$
$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 1 = 90°$.

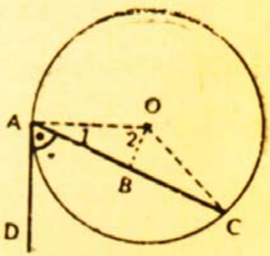


Fig. 34

---

(1) El teorema del $\sphericalangle$ semi-inscrito se suele enunciar así: **"Un ángulo semi-inscrito es igual (o tiene por medida) a la mitad del arco comprendido entre sus lados".** (Léase la nota al pie de la pág. 32).

$\therefore\ \alpha + \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 1$ ¿Por qué?

$\therefore\ \alpha = \sphericalangle 2$ ¿Por qué?

$$\text{Pero } \sphericalangle 2 = \frac{1}{2} \sphericalangle \mathbf{AOC}.$$

$$\text{Luego: } \alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle \mathbf{AOC}.$$

2.ª Demostración del Teorema X

(Del $\sphericalangle$ semi-inscrito).

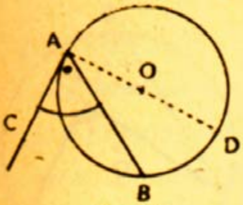


Fig. 35

$$\sphericalangle \mathbf{CAB} = \sphericalangle \mathbf{CAD} - \sphericalangle \mathbf{BAD}. \text{ Fig. 35.}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc. } \mathbf{ABD} - \frac{1}{2} \text{ arc.} \mathbf{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ arc. } \mathbf{AB}.$$

3.ª Demostración del Teorema X

Un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados (1)

Hip.) $\alpha = \sphericalangle$ semi-inscrito

Tes.) $\alpha = \frac{1}{2}$ arc. AG

Dem.) $OM \perp AG$

$\therefore\ \sphericalangle 2 = \frac{1}{2}$ arc. $AG = 90° - \sphericalangle 1$

Pero $\sphericalangle \alpha = 90° - \sphericalangle 1$

$\therefore\ \sphericalangle \alpha = \frac{1}{2}$ arc. AG

Demostrar que

$\sphericalangle IAG = \frac{1}{2}$ arc. ANG

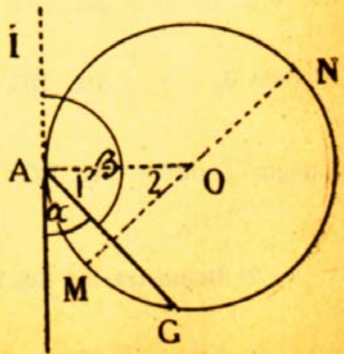


Fig. 36

(1) Léase la nota al pie de la pág. 38.

TEOREMA XI.—**El ∢ interior, o sea, el que tiene su vértice en el interior de una ⨀, tiene por medida la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de ellos más allá del vértice.**

Hip.) α áng interior.

Tes.) $\alpha = \frac{1}{2}$arc. **BC**+ $\frac{1}{2}$ arc. **DE**

Dem.) **D** ↔ **B** (Fig. 36).

$\alpha = \delta + \varepsilon$ (¿Por qué)

Medida de $\delta = \frac{1}{2}$ arc. **BC**
(Nota del pie de la pág. 32).

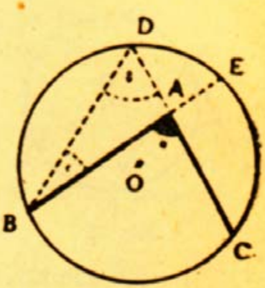


Fig. 36

Medida de $\varepsilon = \frac{1}{2}$ arc. DE

Luego: $\alpha = \frac{1}{2}$ arc. BC+ $\frac{1}{2}$ arc. DE

2ª Demostración del Teorema XI.— (Fig. 37).

Sea **∢BAC** interior y **AE** y **AD** las prolongaciones de sus lados.

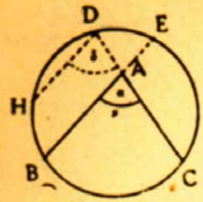


Fig. 37

DH || AB

$$\alpha=\delta=\frac{1}{2}\text{arc. BC}+\frac{1}{2}\text{arc. HB}$$

Pero arc. DE=arc. HB (Teor. V).

Luego $\alpha=\delta=\frac{1}{2}$ arc. BC+ $\frac{1}{2}$ arc. DE.

TEOREMA XII.—**El ∢ exterior, o sea, el formado por dos secantes que parten de un mismo punto situado fuera del círculo, tiene por medida la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.**

Hip.) $\alpha=\sphericalangle$ exterior. (Fig. 38).

Tes.) $\alpha=\dfrac{\text{arc. CB}-\text{arc. DE}}{2}$

Dem.) B (↔) D

$\sphericalangle 1=\alpha+\sphericalangle 2$ (∢ exterior de 1 △)

$\therefore\ \alpha=\sphericalangle 1-\sphericalangle 2$

Pero $\sphericalangle 1=\dfrac{\text{arc. CB}}{2}$

$\sphericalangle 2=\dfrac{\text{arc. DE}}{2}$

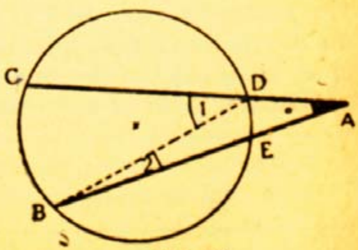


Fig. 38

Luego $\alpha = \dfrac{\text{arc. CB} - \text{arc. DE}}{2}$

(Q. E. D.)

Demuéstrese el teorema XII por medio de la Fig. 39.

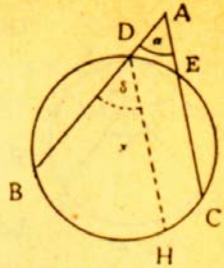


Fig. 39

§ 4.—*ARCO CAPAZ DE UN ANGULO*

En la Fig. 40 la cuerda **AB** divide al círculo en dos segmentos: segm. **ABF** y **ABCC'C"A**.

Si en uno de estos segmentos, en el último, por ejemplo, unimos algunos puntos **C,C' C"** . . . de su arco con los extremos **A** y **B**, se forman los ∢ **ACB** $=$**AC'B**$=$**AC"B**$=\gamma$; según se dejó establecido en Corol. 1.º página 37.

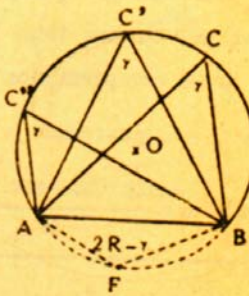


Fig. 40

Pero como al unir cualquier otro punto del arco **BCC'C"A** con **A** y **B** siempre se formará un ∢ igual a γ, se dice que el arco **BCC'C"A** es el arco capaz del ∢γ.

Arco capaz de un ángulo es el arco del segmento en el cual se puede inscribir dicho ángulo.

Angulo inscrito en un arco es el ángulo que tiene su vértice en dicho arco y cuyos lados pasan por los extremos del mismo arco.

PROBLEMA FUNDAMENTAL 2º.—*Dado un* $\sphericalangle\ \gamma$ *y un trazo* **c**, *construir el arco capaz de* γ *sobre* **c** *como cuerda.*

1.ª Solución.—Se aprovecha la propiedad del $\sphericalangle$ semi-inscrito. **(Pág. 38).**

Hágase: AB = c
(Fig. 41a).

$\sphericalangle ABE = \gamma$
BO ⊥ BE
DA = DB
DO ⊥ AB (simetral de AB)

Descríbase arc. (O, OB = r).
arc. ACB = arco capaz de γ.

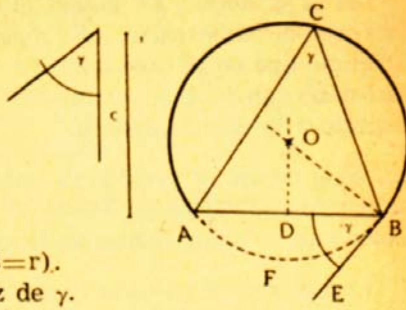


Fig. 41a

2.ª Solución del problema fundamental 2º

Se aplica el teorema IX, pág. 32. El centro del arco capaz debe ser el vértice de un △ isósceles de base AB = c y cuyo $\sphericalangle$AOB del vértice $= 2\gamma$.

Constr.—Se hace **AB = c**
DA = DB
DE ⊥ AB (simetral AB)

En un punto arbitrario E de la simetral de AB se hace:

$\sphericalangle$**DEF** $= \gamma$
y **BO ∥ EF** (por B)
Descríbase arc. (O, OB);
OC = OB = OA
arc. **ACB** = arco capaz de γ.

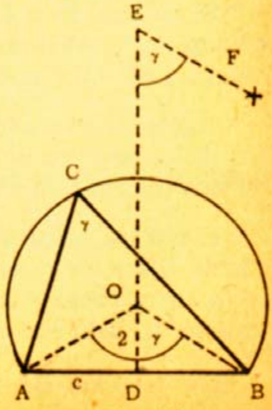


Fig. 41b

Se puede observar que cuando el *ángulo dado* γ *es agudo*, el *arco capaz* es *mayor* que una *semi-circunferencia* (Figs. 40 y 41) y tanto mayor cuanto menor es el ángulo, siempre que la cuerda **c** no varíe.

Si *el* $\sphericalangle$ *dado* γ *es obtuso*, el *arco capaz* es *menor* que *una semi-circunferencia*. El método para construirlo es el mismo que en el caso anterior (Probl. 2, pág. 43), pero su centro no quedará en el mismo lado que el arco capaz, respecto a la cuerda dada **c**.

Si γ *es un* $\sphericalangle$ *recto*, el *arco capaz es una semi-circunferencia*. Teorema de Thales, pág. 37) y su centro estará situado en el punto medio de la cuerda **AB**=**c**.

Con el arco supletorio capaz de γ, sucede todo lo contrario: si γ es **agudo**, el arco supletorio es menor que una semi-circunferencia, y mayor si γ es **obtuso**.

Si en Fig. 40 o 41 se une un punto cualquiera del arco supletorio **AFB** con los puntos **A** y **B**, el $\sphericalangle$**AFB** será igual a $180°—\gamma$ (Corolario 3°, pág. 36).

Tanto el arco capaz como su arco supletorio son Ls. Gs. de los vértices de los ángulos que, respectivamente, se pueden inscribir en ellos.

Como los lados de dichos ángulos forman $\triangle$s con la cuerda fija **c**, se puede afirmar, también, que los mismos arcos (arco capaz y supletorio) son Ls. Gs. de los vértices opuestos al lado fijo común.

Los tres Ls. Gs. siguientes, resumen lo expuesto sobre el arco capaz.

§ 5.—2.º GRUPO DE Ls. Gs. (1)

L. G. 9. (2)—*El L. G. de los terceros vértices de todos los △s. que tienen el lado* **BC=a** *común y el ángulo opuesto igual a un ángulo dado α, es el arco capaz de α construido sobre* **a** *como cuerda.* (Fig. 42 a)

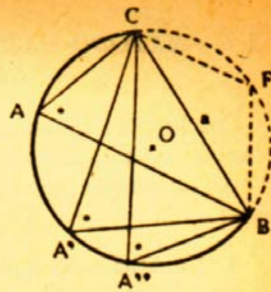


Fig. 42a

L. G. 10.— (Consecuencia del L. G. 9) *El arco supletorio* **BFC** *(del arco capaz de α), Fig.* 42 a, *es el L. G. de los terceros vértices de todos los △s que tienen el lado* **BC=a** *común y el ángulo opuesto igual a* 180°—α.

L. G. 11.—*El L. G. de los vértices correspondientes al ángulo recto de todos los △s rectángulos que tienen una misma hipotenusa* **c**, *es la circunferencia que tiene por diámetro la hipotenusa* **c** Fig. 43.

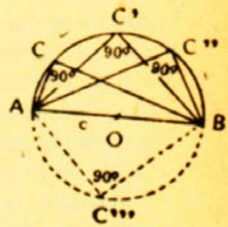


Fig. 43

(1) Los otros grupos de Ls. Gs. se encuentran en las páginas 23, 54 y 71.

(2) Más exactamente el L. G. 9 está formado por dos arcos de ⊙ que tienen por extremos B y C y que son simétricos con respecto al trazo o segmento BC. Fig. 42 b.

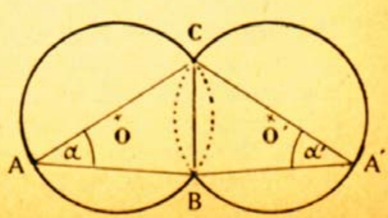


Fig. 42b

§ 6.—METODO PARA DETERMINAR UN LUGAR GEOMETRICO

Los lugares geométricos que estudiamos se reducen a *rectas* o *segmentos rectilíneos* o a *circunferencias* o *arcos.*

Al investigar un lugar geométrico, pueden ocurrir 3 casos:

1.er CASO.—*El lugar geométrico pedido se reduce fácilmente a un L. G. conocido o "clásico".*

a) *Se observan* los *puntos* de la figura del problema que permanecen *fijos* al desplazarse el punto móvil cuyo L. G. se busca, así como las *longitudes* y los *ángulos* que permanecen *constantes.*
   Entonces surge la idea del L. G. que, de entre los conocidos, conviene al caso actual.
   Así, por ejemplo:
   —Si el punto móvil debe equidistar de 2 *puntos fijos* **A** y **B**, estará sobre la simetral o ⊥ *media* de **AB**.
   —Si el punto móvil es vértice de un ángulo recto *cuyos lados pasan por 2 puntos fijos* **A** *y* **B**, estará sobre la ⊙ de diám. **AB**.
   —Si el punto móvil es el punto medio M de *una cuerda de longitud constante* que se desplaza en una ⊙ de centro **O**, estará sobre la ⊙ de radio **OM**, etc.

b) Después *se comprueba* recíprocamente que *todos los puntos del L. G.* vislumbrado *cumplen* con todas las *condiciones* particulares del problema.

c) Finalmente, cuando lo requiera el problema, *se limita el L. G. obtenido* a la *parte de él* que *contiene los puntos* que *satisfacen las condiciones* particulares del problema.

EJEMPLO: Problema.— *Por un punto A exterior a una ⊙ O se traza una secante variable que corta la circunferencia en* **B** *y* **C**, B_1 *y* C_1, B_2 *y* C_2, *etc.*

¿Cuál es el L. G. del punto medio de la cuerda **BC**? Fig. 44.

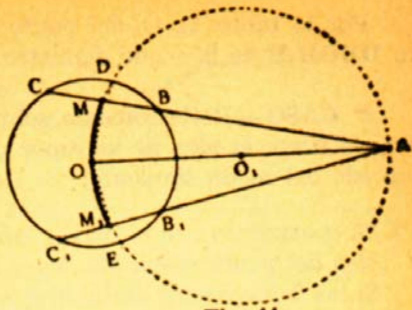


Fig. 44

Solución.—Construyo la ⊙ de diámetro **OA**.

Trazo la secante **AC**.

Sea **M el** punto medio de la cuerda **BC**.

—Los puntos **O** y **A** son fijos.

El punto **M** es móvil. Trazo **MO** y **MA**.

El ∢**OMA** es siempre recto, porque **OM** une el centro **O** con el punto medio de la cuerda **BC**.

Los lados de este ∢ recto **OMA** pasan por 2 puntos fijos **O** y **A**.

—Luego: el punto **M**, medio de todas las cuerdas **BC**, se halla siempre sobre la ⊙ de diámetro **OA**. Esta circunferencia es el L. G. del punto **M**.

Recíprocamente: *Cualquier punto de la ⊙ de diám.* **OA** *es vértice de un ∢* **OMA** *que siempre es recto, por ser inscrito en una semi-circunferencia.*

Queda comprobado que la ⊙ de diám. **OA** es el L. G. del punto **M**.

Finalmente, para que **M** sea el punto medio de una cuerda de la ⊙ **O**, debe hallarse en el interior de esta circunferencia **O**.

Por lo tanto, L. G. del punto **M** debe limitarse al arco **DMOM$_1$E** de la ⊙ de diámetro **OA**.

2° **CASO.**—Reflexionando sobre los datos del problema, *no surge la idea de un lugar geométrico conocido.* Se procede del modo siguiente:

1°. *Se construyen* con el mayor cuidado 3 *posiciones notables del punto móvil* **M$_1$, M$_2$** *y* **M$_3$**.
Si las 3 *posiciones están en línea recta, el* L. G. pedido *es una recta.*
Si las 3 *posiciones no están en línea recta,* el L. G. pedido *es una* ⊙ *o un arco.*

2°. Se establece el L. G. comprobando recíprocamente si los demás puntos de la recta o de la ⊙ cumplen con las condiciones del problema.

3°. Cuando el problema lo requiera, *se limita el L. G. a un segmento rectilíneo o a un arco.*

EJEMPLO: Problema.—*Hallar el L. G. de los puntos extremos de todas las secantes a una* ⊙ *trazadas en un punto* **A** *de ella, y tales que la parte interna o cuerda de cada secante tenga igual longitud que la parte externa.*

Solución.—1.°: Construyo 3 puntos notables del L. G. pedido: **A, C,** y uno cualquiera **E,** trazando en cada caso una secante **ABC, ADE** y limitándola de modo que la parte exterior **BC, DE,** sea igual a la parte interior **AB, AD.** Se tiene **AB=BC, AD=DE.** (Fig. 45).

2°: Los 3 puntos **A, C, E,** no están en línea recta. Luego, el L. G. es una ⊙.

Hay que averiguar su centro y su radio.

Trazo **DB** y **EC**. **DB** es mediana del △ **AEC.** Luego **EC** ∥ **DB.**

pero el ∢ **D** es recto. Luego, también, el ∢ **AEC** es recto. Por tanto, se halla inscrito en la ⊙ de centro **B** y radio **BE=BA=BC.**

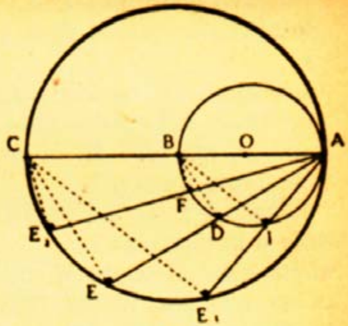


Fig. 45

Luego, el L. G. pedido es la ⊙ de diám. **AC y centro** en **B**, que es **L. G. conocido o "clásico".**

3° Compruebo que un punto cualquiera $\mathbf{E_1}$ de esta ⊙ cumple las condiciones requeridas: En efecto: el ∢ $\mathbf{E_1}$ es recto. Luego $\mathbf{E_1C} \parallel \mathbf{IB}$. Luego **IB** es mediana del △ $\mathbf{AE_1C}$. Luego $\mathbf{AI=IE_1}$.

3.er CASO: *No se pueden construir fácilmente puntos notables del lugar.*

Entonces, se transforma la propiedad del punto móvil **M** en otra más sencilla que sea consecuencia de la primera, y así sucesivamente, hasta que se llegue a un lugar conocido o "clásico".

Se demuestra la existencia de este lugar.

Luego, se limita este lugar a las condiciones del problema.

EJEMPLO: Problema.—*Dado un ángulo* **XOY**, *y un punto* **M** *en su interior, se trazan desde* **M** *las perpendiculares* **MA** *y* **MB** *a los lados. ¿Cuál es el L. G. de los pun-*

tos **M** *para los cuales se verifica* **MA+MB=k**, *siendo* **k** *una longitud constante dada?*

Solución.— No es fácil aquí construir los puntos del lugar.

Prolongo **AM** en una longitud **MD=MB.** (Fig. 46).

Se tiene **AM+MD=AM+MB=k.**

Así, al moverse **M**, la recta **AMD** guarda una longitud constante igual a **k.**

Luego, el **L. G.** del punto **D** es una paralela **DE** a **OX** trazada a la distancia **k.**

Ahora bien: el punto **M** equidista de las dos rectas fijas, **OY** y **DE**, pues **MB=MD.**

Luego se halla siempre sobre la bisectriz del ∢ **OED.** Trazo esta bisectriz **EF.**

Resulta que: 1º Todo punto **M** tal que **MA+MB=k** se halla sobre la bisectriz **EF**, como acaba de demostrarse.

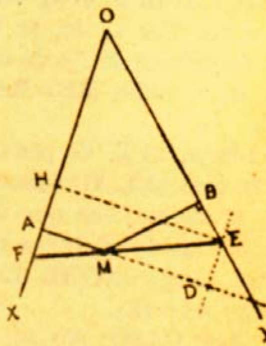


Fig. 46

y 2.º: Recíprocamente, todo punto de la bisectriz posee las propiedades requeridas para el punto **M** del problema, ya que se tiene:

$$\mathbf{MB=MD}$$
$$\mathbf{AM+MB=AM+MD}$$
$$\mathbf{AM+MB=AD=k}$$

Por lo tanto, *el L. G. pedido es el segmento* **EF** *de la bisectriz del* ∢ **DEB** o también: *es la base de un △ isósceles cuyo* ∢ *del vértice es* **O,** y la altura relativa a cualquiera de los dos lados iguales es **EH=AD=k.**

RESUMEN

Para determinar un L. G., se debe:

1.º *Formarse una idea aproximada de la forma y posición del lugar*
ya por simple ***intuición*,**
ya por *análisis* de los datos (1.er caso).
ya por la construcción de algunos puntos (2.º caso).
ya *transformando la propiedad* dada en otra más sencilla (3.er caso).

2.º *Demostrar la existencia del lugar* (los puntos que cumplan los requisitos del problema están en el lugar —y recíprocamente, todos los puntos del lugar cumplen con todos los requisitos del problema).

3.º En ciertos casos, i. e., cuando el caso lo requiere, **limitar el lugar a los solos puntos que** *satisfacen el enunciado del problema.*

4.º Es ventajoso muchas veces, como conclusión o comprobación, *hacer la construcción gráfica del lugar.*

§ 7.—*PROPIEDADES DE LAS TANGENTES TRAZADAS A UNA CIRCUNFERENCIA DESDE UN PUNTO SITUADO FUERA DEL CIRCULO*

PROBLEMA FUNDAMENTAL 3.º—*Desde un punto dado* **A** *situado al exterior de una circunferencia* **O**, *trazar las tangentes a ella.* Fig. 47.

Análisis.—

Como **AB⊥OB** y **AC⊥OC** (Teor. VII) y además **OA** es fija, los puntos de tangencia **B** y **C**, deben hallarse en los dos Ls. Gs. siguientes:

1.º La ⊙ de diámetro **OA** (L. G. 11, pág. 45).

2.º La ⊙ dada en la cual necesariamente deben hallarse los puntos de tangencia.

Construcción.—

1.º A(↔)O

2.º Hágase **MO=MA**

3.º Se describe la ⊙ auxiliar de diámetro **OA**, que corta a la ⊙ dada **O**, en **B** y en **C**, que son los pun- de tangencia.

4.º B(↔)A(↔)C

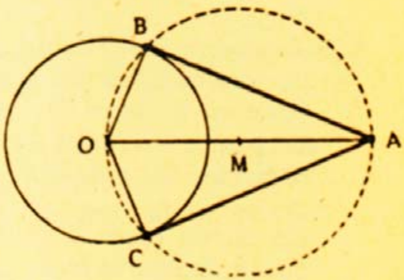


Fig. 47

AB y **AC** = tangentes pedidas.

Demostración.—B(↔)O(↔)C

Los ∢s **OBA** y **OCA** son ∢s. inscritos en una semi-circunf. (semi-circunf. **OBA** y **OCA** respect.)

Por lo tanto $\sphericalangle$ **OBA**$=\sphericalangle$**OCA**$=90°$**.** (Teor. de Thales, pág. 37).
Entonces **AB**$\perp$**OB** (en **B**)
y **AC**$\perp$**OC** (en **C**)
Luego: **AB** y **AC** son tangentes de la $\odot$ **O.**

TEOREMA XIII.—**Las tangentes trazadas a una $\odot$ desde un punto situado fuera de ella, son iguales.** (Fig. 48).

Hip.) **AB** y **AC** son tangentes.
Tes.) **AB**$=$**AC**

Dem.) $\triangle$**ABO**$\cong\triangle$**ACO** porque tienen:
BO$=$**CO**
AO$=$**AO** (común)
$\sphericalangle$**ABO**$=\sphericalangle$**ACO**$=90°$

Luego **AB**$=$**AC.**

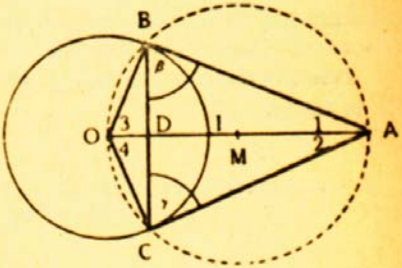


Fig. 48

2.ª Demostración del Teorema XIII

$\beta=\gamma$ (Por ser $\sphericalangle$s semi inscritos cuyos lados interceptan un mismo arco **BIC**).
$\triangle$**BCA isósceles.**
$\therefore$**AB**$=$**AC.**

COROLARIOS.— Si desde un punto fuera de una $\odot$ *se trazan las tangentes a ella:*

1º La recta que une el punto con el centro de la $\odot$*, es bisectriz del ángulo formado por las tangentes y del ángulo del centro respectivo.*

2º La misma recta es $\perp$ *media* (simetral) *del trazo que une los puntos de tangencia.*

3º *El ∢ formado por las tangentes es suplemento del ∢ del centro determinado por los radios trazados por los puntos de tangencia.*

Demostración. — Los △s **BCA** y **BCO** son isósceles. Fig. 48.

Se aplican las propiedades de la recta que une los vértices de dos △s isósc. que tienen una base común: "bisecta los ángulos de los vértices, dimidia la base y es ⊥ a ella". (Geometría Omer Cano, 3.er Año de Hdes., Teor. 27).

OBSERVACION.—En la Fig. 48, **OA** es eje de simetría de toda la figura.

§ 8.—3.er GRUPO DE Ls. Gs. (1) *REFERENTES A LA CIRCUNFERENCIA*

L. G. 12.—*El L. G. de todos los puntos de los cuales parten tangentes de igual longitud dada* **l**, *a una circunferencia* **O**, *es otra* ⊙ *concéntrica con la dada, cuyo radio es la hipotenusa de un* △ *rectángulo que tiene por catetos el radio de la* ⊙ *dada, y la longitud* **l** *que deben tener las tangentes.*

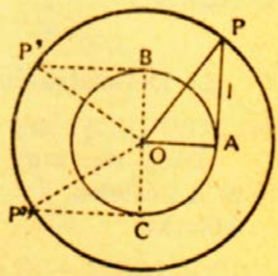


Fig. 49

La ⊙ de radio **OP** es el L. G. Fig. 49.

(1) Los otros grupos de Ls. Gs. se encuentran en las páginas 23, 45 y 71.

Demostración.—$\triangle OAP \cong \triangle OBP' \cong \triangle OCP''$ por tener dos lados y el ∢ comprendido iguales.

Luego **AP=BP'=CP''=l.**

L. G. 13.—*El L. G. de todos los puntos* **P** *de los cuales parten dos tangentes a una circunferencia dada* **O** *y que forman en* **P** *un ∢ dado* α *es una ⊙ concéntrica, cuyo radio es la hipotenusa de un △ rectángulo que tiene por cateto el radio de la ⊙ dada y el ∢ opuesto a este cateto igual a* $\frac{\alpha}{2}$ (Fig. 50).

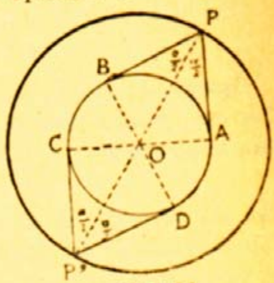


Fig. 50

Dem.) $\triangle OAP \cong \triangle ODP'$

$$\therefore \sphericalangle OPA = \sphericalangle OP'D = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \sphericalangle BPA = \sphericalangle CP'D = \alpha$$

L. G. 14.—*El L. G. de los centros de las ⊙s tangentes a dos paralelas dadas, es la paralela equidistante trazada entre ellas.* (Fig. 51).

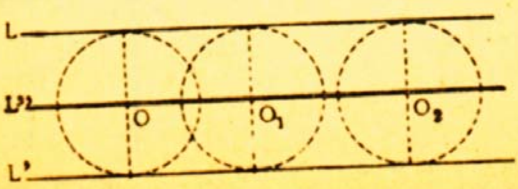


Fig. 51

L. G. 15.—*El L. G. de los centros de las ⊙s tangentes a los lados de un ángulo es la bisectriz de dicho ángulo* Fig. 52.

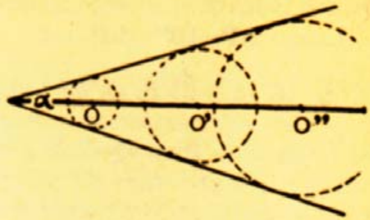


Fig. 52

Razón.—El centro de cada una de las ⊙s tangentes a los lados del ∢ equidista de ellos, por tal motivo debe encontrarse sobre la bisectriz.

L. G. 16.—*El L. G. de los centros de las ⊙s tangentes a 2 rectas que se cortan está formado por las bisectrices de los ángulos que las rectas forman al cortarse.*

En la Fig. 53, las rectas **CD** y **EF** constituyen el L. G.

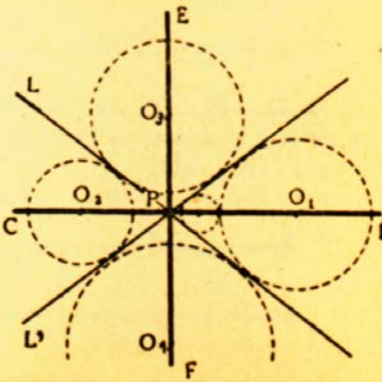


Fig. 53

Obsérvese que el L. G. está formado por dos rectas ⊥s. ¿Por qué

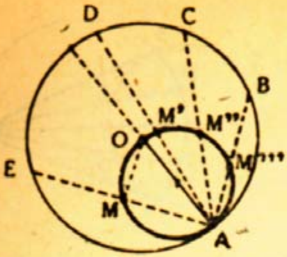


Fig. 54

L. G. 17.—*El L. G. de los puntos medios de todas las cuerdas que parten de un mismo punto* **A** *situado sobre una* ⊙ **O** *es la* ⊙ *que tiene por diámetro el trazo que une el punto* **A** *con el centro de la circunferencia dada* **O**. Fig. 54.

Demostración.—∢ inscrito OMA$=90°$. (Inscrito en una semi-circ.).

Por tanto: **OM⊥AE.**

Luego **M** es punto medio de **AE.**

GENERALIZACION DEL L. G. 17.—Se pueden considerar cuatro casos según sea la situación del punto A en el plano.

1.er CASO.—El punto **A** está situado sobre la circunferencia. Es el caso que se contempló en el L. G. 17. Fig. 54.

2º CASO.— El punto A está situado dentro de la circunferencia. El *L. G. es también la* ⊙ *que tiene por diámetro el trazo que une el punto* **A** *con el centro* **O** *de circunferencia dada.* Fig. 55.

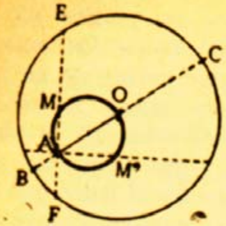


Fig. 55

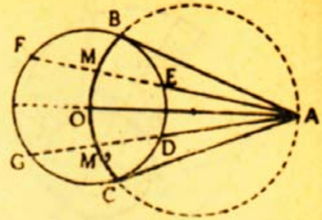


Fig. 56

3.er **CASO.**—El punto **A** está fuera del círculo. *El L. G. es la ⊙ descrita sobre* **OA** *como diámetro.* Pero los únicos puntos útiles son los que pertenecen al arco **BOC** comprendido entre las tangentes **AB** y **AC** trazadas desde **A** a la circunferencia dada **O**. (Fig. 56).

4.º **CASO.**—El punto A se aleja al infinito, en la dirección **OA**; *El L. G. es el diámetro perpendicular a* **OA** *en el punto* **O**; en efecto, las secantes son en este caso paralelas a **OA**. (Dibujar la figura).

Estos diversos casos se pueden resumir así:

El L. G. de los puntos medios de todas las cuerdas de una ⊙ dada **O** *y que pasan por un mismo punto dado* **A**, *es la ⊙ descrita sobre* **OA** *como diámetro.*

CAPITULO III

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN UN PLANO

§1.—GENERALIDADES

Se dejó establecido en el Corol. 1º pág. 16, que por tres puntos puede pasar una sola circunferencia.

Dos ⊙s distintas **a lo más pueden tener** *dos puntos comunes.* Si tuvieran tres puntos comunes se confundirían en una sola.

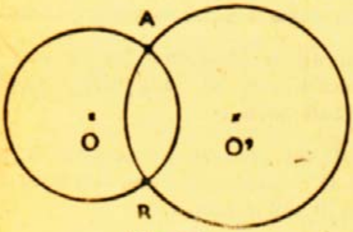


Fig. 57

Dos ⊙s *distintas* pueden tener pues:

1º Dos puntos comunes. En este caso las circunferencias reciben el nombre de *circunferencias secantes.* Fig. 57.

2º Un solo punto común. Las ⊙s reciben el nombre de *circunferencias tangentes*. El punto común P es el punto de contacto o de tangencia.

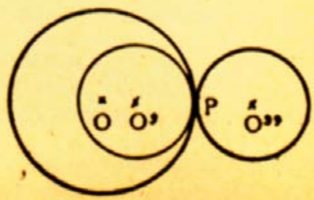


Fig. 58

Existen dos casos:

a) De las dos ⊙s tangentes una está dentro de la otra:

Las ⊙s *son tangentes interiormente.* Fig. 58. Circunferencias O y O'.

b) De las dos circunferencias tangentes una está fuera de la otra: las circunferencias *son tangentes exteriormente.* Fig. 58. Circunferencias O y O''.

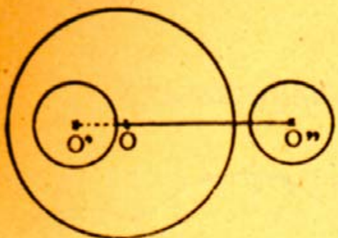


Fig. 59

3.º Las ⊙s no tienen ningún punto común.

Hay dos modos diferentes:

a) Una de las ⊙s está dentro de la otra. En este caso se dice que las ⊙s son *interiores.* En Fig. 59 las ⊙s **O** y **O'** son interiores.

b) Una de las ⊙s está totalmente fuera de la otra. Se dice que las circunferencias son *exteriores.* Fig. 59, ⊙s **O** y **O''**.

En todos los casos precedentes las dos circunferencias relacionadas tienen distintos centros: son *excéntricas.*

Circunferencias excéntricas son las que tienen distintos centros.

La recta que une los centros de dos circunferencias excéntricas se llama *línea de los centros* o *línea central.* En Fig. 59, **O O''** es la línea central.

CASO ESPECIAL: ***Las circunferencias son concéntricas.***

Circunferencias concéntricas, son las que tienen un mismo centro. Fig. 60.

Fig. 60

Los teoremas que siguen se refieren a la línea central y precisan la posición de los puntos comunes.

§ 2.—*CIRCUNFERENCIAS SECANTES*

TEOREMA XIV.— **La línea de los centros de dos ⊙s que se cortan, es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.** Fig. 61.

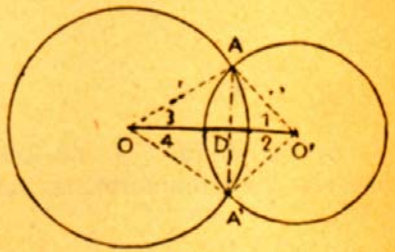


Fig. 61

Hip) **O** y **O'** son ⊙s que se cortan.

Tes.) $\mathbf{OO' < r+r'}$; $\mathbf{OO' > r-r'}$

Dem.) **O** (↔) **A** (↔) **O'**.

En el △ **OO'A** un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. (Teor. 16° y 17° Geom. Omer Cano, de 3. er Año)

Luego: $\boxed{\mathbf{r-r' < OO' < r+r'} \text{ (Q. E. D.}}$

TEOREMA XV.—**La línea de los centros de dos $\odot$s secantes es simetral de la cuerda común y bisecta los $\sphericalangle$s del centro correspondientes a dicha cuerda. Por eso se dice que la línea de los centros es eje de simetría de dos $\odot$s excéntricas.** Fig. 61.

Dem.) $\odot$s O y O' pasan por A y A'

$\therefore$ O y O' están en la simetral de AA'. (L. G. 3, pág. 24)

Pero $\triangle$s A'AO y A'AO' son isósceles.

Luego $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$.

§ 3.—*CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES*

En general, el $\sphericalangle$ **BAC**, formado por las tangentes a cada una de dos $\odot$s secantes en uno de los puntos de intersección de las $\odot$s, sea cual fuere su naturaleza, por definición, *es el ángulo de las $\odot$s secantes*. Fig. 62.

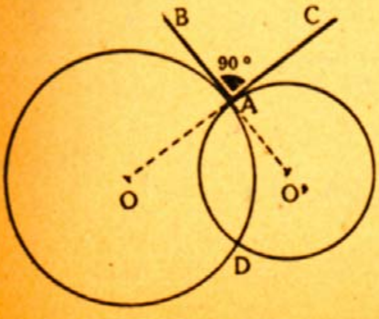


Fig. 62

Se dice que dos $\odot$s se cortan *ortogonalmente* cuando las tangentes trazadas a ambas $\odot$s en uno de los puntos comunes, forman un ángulo recto. Fig. 62. Los radios **OA** y **O'A** son perpendiculares entre sí, en **A**. ¿Por qué?

§ 4.—*CIRCUNFERENCIAS TANGENTES*

TEOREMA XV'.— **La línea de los centros de dos ⊙s tangentes exteriormente, es igual a la suma de los radios.** Fig. 63.

Tes.) $OO' = r + r'$

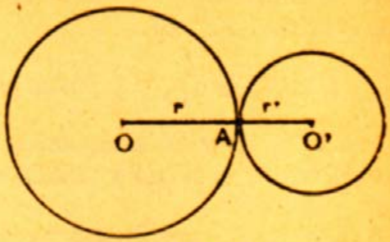


Fig. 63

Dem.) El todo = a la suma de las partes:

$$\therefore \quad \boxed{OO' = OA + O'A = r + r'}$$

TEOREMA XVI.— **La línea de los centros de dos ⊙s tangentes interiormente es igual a la diferencia de los radios.** Fig. 64.

Tes.) $OO' = r - r'$

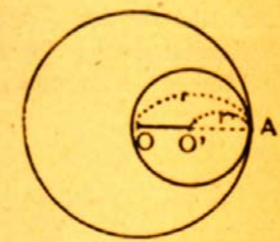


Fig. 64

Dem.) De la misma Fig. 64 se tiene directamente:

$$\boxed{OO' = OA - O'A = r - r'}$$

§ 5.—*CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES*

TEOREMA XVII.—**La línea de los centros de dos ⊙s exteriores es mayor que la suma de los radios.**

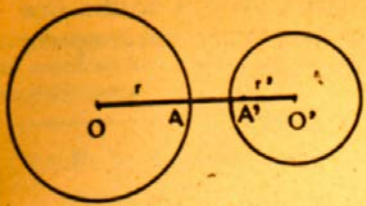


Fig. 65

Tes.) **OO'>r+r'** Fig. 65

Dem.) **OO'=OA+AA'+A'O'**

Luego: $\boxed{OO' > OA + A'O'}$

$\boxed{OO' > r + r'}$

§ 6.—*CIRCUNFERENCIAS INTERIORES*

TEOREMA XVIII.—**La línea de los centros de dos circunferencias interiores es menor que la diferencia de los radios.**

Tes.) **OO'<r—r'**

Dem.) En la Fig. 66 se tiene:

OO'=OA—O'A'—A'A

Sumando al 2º miembro:

+A'A,

resulta mayor que el 1º.

o sea: $\boxed{OO' > r - r'}$

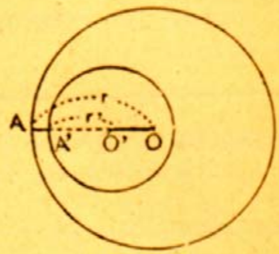


Fig. 66

CASO PARTICULAR: Si los centros **O** y **O'** *se confunden*, **OO'** = cero. Las ⊙s son *concéntricas*.

RESUMEN DE LOS DIVERSOS CASOS: Dos circunferencias distintas pueden tener una respecto de otra seis posiciones diferentes:

1.º Pueden ser *exteriores* y entonces: $\mathbf{OO' > r + r'}$

2.º Pueden ser *tangentes exteriormente* y entonces: $\mathbf{OO' = r + r'}$

3.º Pueden ser *secantes* y entonces: $\mathbf{r - r' < OO' < r + r'}$

4.º Pueden ser *tangentes interiormente* y entonces: $\mathbf{OO' = r - r'}$

5.º Pueden ser *interiores* y entonces: $\mathbf{OO' < r - r'}$

6.º Pueden ser *concéntricas* y entonces: $\mathbf{OO' = o}$

OBSERVACIONES: Cada una de las seis proposiciones de que se habló anteriormente, da lugar a una proposición recíproca.

Por ejemplo:

Si se tiene: $r - r' < OO' < r + r'$, las circunferencias son secantes. Fig. 61.

Demostración. — Observando el resumen que está más arriba, se puede ver que estas dos ⊙s no pueden ni excluirse, ni ser tangentes, ni ser concéntricas. Luego son secantes.

Nota: Damos a continuación el enunciado de dos proposiciones que tienen frecuente aplicación en la discusión de los problemas de construcción geométrica y que son consecuencias de lo tratado anteriormente.

1.º *Para que dos* $\odot$*s* (o dos arcos) *se corten*, es necesario y basta que la distancia de sus centros esté comprendida entre la suma y la diferencia de sus radios.

2.º *Para que dos* $\odot$*s sean tangentes*, es necesario y basta que la distancia de sus centros sea igual a la suma o a la diferencia de sus radios.

§ 7.—*CUARTO GRUPO DE Ls. Gs.* (1) *REFERENTES A LA CIRCUNFERENCIA*

L. G. 18. — *El L. G. de los centros de todas las* $\odot$*s tangentes a una* $\odot$ *dada* **O** *en un punto* **P** *de ella, es la recta determinada por el centro* **O** *y el punto* **P.**

Fig. 67.

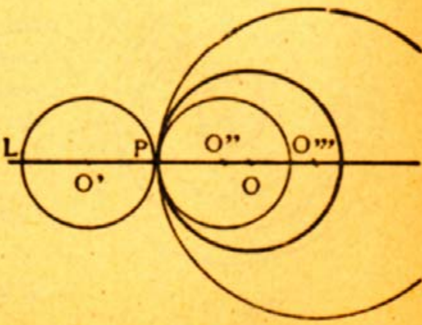


Fig. 67

(1) Los otros grupos de Ls. Gs. se encuentran en las páginas 23, 45 y 54.

L. G. 19.— *El L. G. de los centros de todas las ⊙s de radio dado* **r**, *tangentes a una ⊙ dada de radio* **R**, *está compuesto de dos ⊙s concéntricas con la dada y cuyos radios son iguales a* **R+r** *y* **R—r**, *respectivamente.*

OA=OE=R; AC=EB=r.

Las ⊙s de radios **OB** y **OC** son los Ls. Gs. Fig. 68.

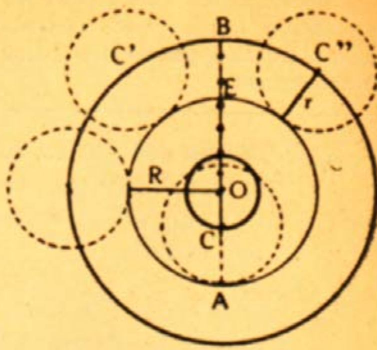


Fig. 68

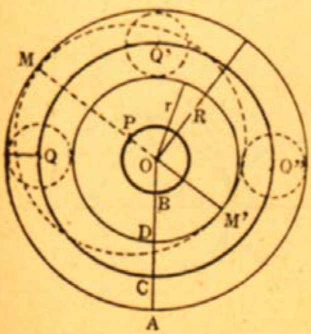


Fig. 69

L. G. 20.— *El L. G. de los centros de todas las ⊙s tangentes a dos ⊙s concéntricas dadas de radios* **R** *y* **r**, *respectivamente, se compone de otras dos ⊙s concéntricas con las dadas, y cuyos radios son la semi-suma* $\frac{R+r}{2}$ *y la semi-diferencia* $\frac{R-r}{2}$ *de los radios de las ⊙s dadas.*

Las ⊙s. de radios **OC** y **OB** son los Ls Gs. Fig. 69.

Dem.) Sea **OA=R; OD=r.**

$$\therefore\ OC=OD+DC=r+\frac{R-r}{2}=\frac{2r+R-r}{2}=\frac{R+r}{2}$$

$$OB=\frac{R-r}{2}\ \text{(Verifíquese)}$$

¿Cuánto vale el radio de la $\odot$ de centro **Q**?

OBSERVACION: Las $\odot$s. cuyos centros se hallan sobre la $\odot$ de radio **OB** $=\dfrac{R-r}{2}$, Fig. 69, son tangentes interiormente a la circunferencia de radio **R**, y tangentes envolventes de la $\odot$ de radio **r**. Ejemplo: $\odot$ (P, PM=PM').

El radio $PM=PM'=\dfrac{R+r}{2}$. (Verifíquese).

L. G. 21.—*El L. G. de los centros de las $\odot$s de radio dado* **r** *que interceptan en una $\odot$ dada, una cuerda de longitud dada* **c**, *está formada por dos $\odot$s concéntricas con la dada y cuyos radios se determinan por la simetral de la cuerda y el radio dado* **r.**

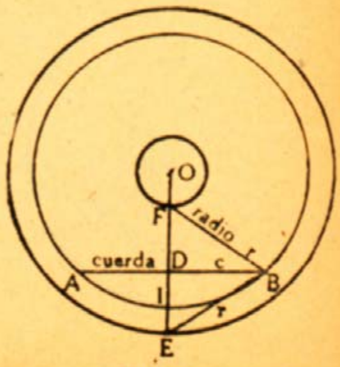


Fig. 70

Circunferencia dada = la de radio OI.

Las $\odot$s. de radios OE y OF son los Ls. Gs. Fig. 70.

L. G. 22.— *El L. G. de los centros de las ⊙s de radio dado* **r** *que cortan una ⊙ dada bajo un diámetro, es una ⊙ concéntrica con la dada, cuyo radio es la altura de un △ isósceles que tiene por base el diámetro de la ⊙ dada, y por lado el radio dado* **r.**

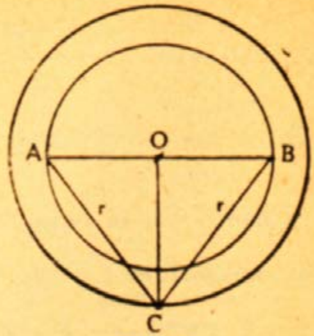


Fig. 71

El L. G. es la ⊙ de radio OC. Fig. 71.

L. G. 23.—*El L. G. de los centros de todas las ⊙s de radio dado* **r** *que cortan a una circunferencia dada* **O** *ortogonalmente, es una ⊙ concéntrica con la dada cuyo radio es la hipotenusa de un △ rectángulo que tiene por catetos el radio* **R** *de la ⊙ dada y el radio dado* **r.**

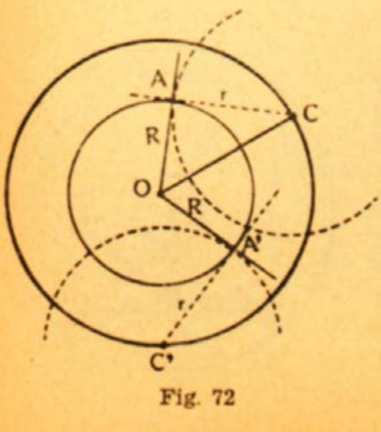


Fig. 72

El L. G. es la ⊙ de radio **OC**. Fig. 72.

OBSERVACION: Compárese el L. G. 23 con L. G. 12, pág. 54.

§ 8.—*TANGENTES COMUNES A DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS*

Las tangentes comunes pueden ocupar dos posiciones con respecto a las circunferencias: pueden ser *exteriores* o *interiores*.

1.º La tangente común es exterior a las dos ⊙s, si ambas ⊙s quedan al mismo lado de ella.

2.º La tangente común es interior a las dos ⊙s dadas si pasa entre las dos ⊙s.

1er. CASO.—Tangentes exteriores.

PROBLEMA FUNDAMENTAL 4.º— *Construir las tangentes comunes exteriores a dos ⊙s dadas de radio* **R** *y* **r** *respectivamente.*

Análisis.—Supóngase el problema resuelto y sea CC' tang. común exterior a las ⊙s O y O'. Fig. 73.

∴ $OC \perp CC'$ y $O'C' \perp CC'$. (Teor. VII).
∴ $O'C' \parallel OC$. (Teor. 9º 3.er A. Omer Cano).
Trazar: $O'A \parallel C'C$
Resulta: CAO'C' # rectángulo.
∴ $\sphericalangle OAO' = 90°$
y $AC = r$
∴ $OA = OC - AC = R - r$
∴ **La recta O'A es tang. a la ⊙ aux. (O,OA=R — r).**

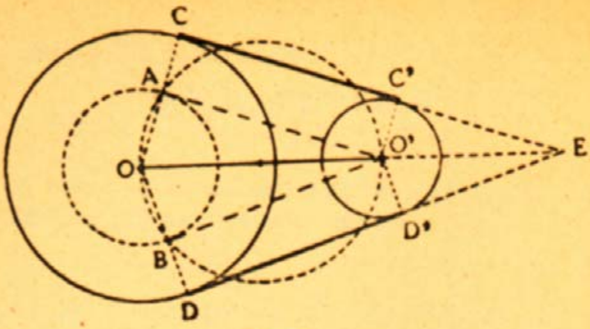


Fig. 73

Construcción.—Sean las ⊙s de radios **OC=R** y **O'C'=r,** dadas. (Fig. 73).

2.º Desde O' se trazan las tangentes O'A y O'B a ⊙ auxiliar. (Según problema 3.º, pág. 52).

3.º Se traza **OAC** y **OBD**. (Radios de contacto).

C y **D** son los puntos de tangencia de las tangentes comunes en la ⊙ de radio **R**.

4.º Con AO'=BO' se hace centro en **C** y en **D** y se corta la ⊙ **O'** en **C'** y **D'**, respectivamente.

C' y **D'** son los puntos de tangencia de las tangentes comunes en la ⊙ de radio **r**.

5.º **C**(↔)**C'** y **D**(↔)**D'**.

CC' y **DD'** son las tangentes pedidas.

Demostración.—Quedará probado que las rectas **CC' y DD'** son tangentes de las ⊙s **O** y **O'** si se logra de mostrar que son $\perp$s a los radios de contacto, esto es, en los puntos **C** y **C'**, **D** y **D'**. Fig. 73.

Se une **O'** con **C'**.

El cuadrilátero **CAO'C'** es un # (por tener sus lados opuestos iguales. (Omer Cano, Tomo II. Teor. 37°).

Pero $\measuredangle A = 90°$. (O'A es tangente).

∴ el # **CAO'C'** es rectángulo.

∴ **CC'**$\perp$**OC** y **CC'**$\perp$**O'C** en **C** y **C'** respect.

Luego: **CC'** es tangente de las ⊙s **O** y **O'**.

Igualmente cuadril. **BDD'O'** es un #.

$$\measuredangle B = \measuredangle D = \measuredangle D' = \measuredangle O' = 90°$$

∴ **DD'**$\perp$**OD** y **DD'**$\perp$**O'D'** en **D** y **D'**.

Luego: **DD'** tangente común de las ⊙s **O** y **O'**.

Discusión del problema 4.º—El problema será posible siempre que del punto **O'** se puedan trazar una o dos tangentes a la ⊙ auxiliar.

Es decir, si: $\mathbf{d \geqq R - r}$ (d=OO'). Fig. 73.

1.° Si $\mathbf{d > R - r}$, las ⊙s dadas son exteriores, o son tangentes exteriormente, o son secantes, el problema admite 2 soluciones.

2.° Si $\mathbf{d = R - r}$, las ⊙s dadas son tangentes interiormente: el problema admite 1 solución.

3.° Si $\mathbf{d < R - r}$, las ⊙s dadas son interiores. Del punto **O'** no se puede trazar ninguna tangente a la ⊙ auxiliar: el problema es imposible.

2.º CASO.—Tangentes interiores.

PROBLEMA FUNDAMENTAL 5º.— *Contruir las tangentes comunes interiores a dos ⨀s dadas* **O** *y* **O'**.

Análisis.—Supóngase el probl. resuelto y sea

CC' tang. común interior a las ⨀s O y O'. Fig 74.
Se tendrá: radios OC || O'C'. (Teor. 9.º 3.er Año, O. Cano)

Trazar: O'A || CC' y prolónguese OC→C hasta A.

Resulta: CC'O'A # rectángulo.
∢OAO'=90°
OC=R y CA=C'O'=r
∴ OA=OC+CA=R+r
∴ La recta O'A es tang. a la ⨀ aux. (O,OA=R+r).

Construcción.—Sean las ⨀s dadas de radios **OC=R** y **O' C' = r**. Fig. 74.

1.º ⨀ auxiliar (**O**, radio=**R**+**r**).

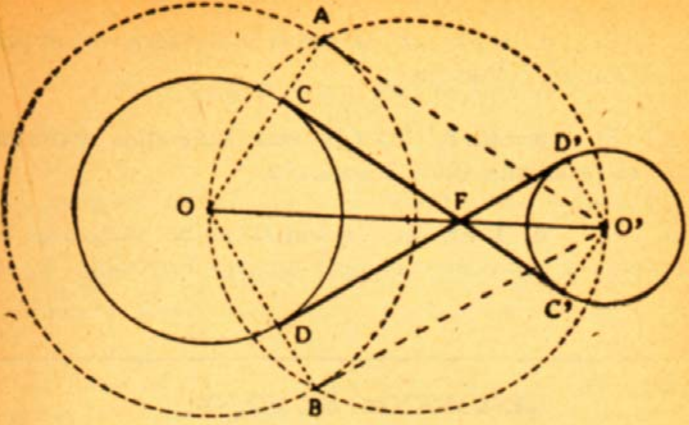
2º. Desde **O'** se trazan las tangentes **O'A** y **O'B** a la ⨀ auxiliar. (Problema 3º, pág. 52).

3.º O(↔)A (corta en C).
O(↔)B (corta en D).

C y **D** son dos puntos de tangencia de las tangentes pedidas.

4.º Con AO'=BO' se hace centro en **C** y se marca el punto **C'**; en seguida se hace centro en **D** y se marca el punto **D'**.

C' y **D'** son los otros puntos de tangencia.



5.º C(↔)C' y D(↔)D'.
CC' y **DD'** son las tangentes pedidas.

Demostración.—Se une O' con C'. El cuadrilátero **CC'O'A** es un #.

El ∢A=90° (O'A es tangente).
∴ el # **CC'O'A** es rectángulo.
∴ **CC'⊥OC** y **CC'⊥O'C'**
∴ Luego: **CC'** es tangente común de las ⊙s O y O'.

OBSERVACION: De la misma manera se demuestra que **DD'** es tangente común de O y O' considerando el paralelógramo rectángulo **DBO'D'**.

Discusión del Problema 5.º.— La condición de posibilidad es como en el problema 4.º:

$$\mathbf{d \geqq R + r.} \quad (d = OO').$$

1.° Si **$d > R + r$**, las $\odot$s dadas son exteriores: el problema admite 2 soluciones.

2.° Si **$d = R + r$**, las $\odot$s son tangentes exteriormente: el problema tiene 1 solución.

3.° Si **$d < R + r$**, las $\odot$s son secantes, tangentes interiormente o interiores: el problema es imposible. (0 solución.

RESUMIENDO SE TIENE:

a) Si las $\odot$s dadas son *exteriores*, se les podrá trazar 4 tangentes comunes: 2 *exteriores* y 2 *interiores;*

b) Si las $\odot$s dadas *son tangentes exteriormente*, se les podrá trazar 3 tangentes comunes: 2 exteriores y 1 interior. (Hágase el dibujo).

c) Si las $\odot$s dadas *son secantes*, se podrán trazar 2 tangentes comunes exteriores y ninguna interior. (Construirlas).

d) Si las $\odot$s dadas *son tangentes interiormente*, hay una sola tangente exterior;

e) Si las $\odot$s dadas son *interiores, no hay* ninguna tangente común.

CAPITULO IV

PUNTOS SINGULARES DEL TRIANGULO

En general, tres rectas se cortan en tres puntos. En el triángulo llama la atención de que, en diversos casos, tres rectas a él referentes (elementos secundarios del $\triangle$), se cortan en un mismo punto.

Este punto será, pues, un punto *notable o singular* del triángulo.

Puntos singulares del $\triangle$ son los puntos de concurrencia de las simetrales de sus lados, de sus bisectrices, de sus alturas y de sus transversales de gravedad.

§ 1.—SIMETRALES DE LOS LADOS DE UN TRIANGULO

Simetral de un lado de un triángulo es la perpendicular en el punto medio de un lado.

En todo triángulo hay tres simetrales que se designan por s_a, s_b, s_c, según el lado a que correspondan.

TEOREMA XIX.—**Las tres simetrales de un triángulo concurren en un mismo punto que equidista de los vértices del triángulo.**

Hip.) DO, EO, FG, son simetrales. (Fig. 75).

Tes.) 1.° DO, EO, FG, concurren en O.
2.° OB=OC=OA.

Dem.) Las simetrales de dos lados, por ejemplo de AB y BC, necesariamente se cortan en un punto **O**. (Las ⊥s a rectas concurrentes son concurrentes. Geom. Omer Cano, 3.er Año, Ejerc. 12).

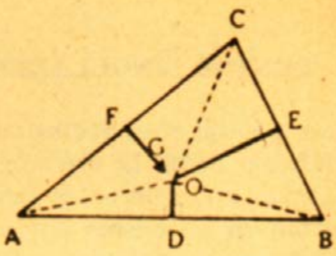


Fig. 75

Por ser **O** un punto de la simetral de **AB**

resulta: **OA = OB** (Omer cano 3.er Año, Teor. 28)
del mismo modo: **OC = OB** (O es un punto de sim. de BC)
∴ **OA = OC = OB** (Axioma: Dos cantid.)
siendo **OA = OC**

O es un punto de la simetral de **AC**. (Un punto que equidista de los extremos de un trazo pertenece a la sim.).

Luego **FG** pasa también por **O.**

Luego las tres sim. son concurrentes en **O** y este punto equidista de **A, B, y C.**

Circunferencia circunscrita a un △

El punto de concurrencia de las tres simetrales, es el centro de la ⊙ que pasa por los tres vértices del △ y que recibe el nombre de ⊙ circunscrita. Inversamente, el △ es inscrito en la ⊙.

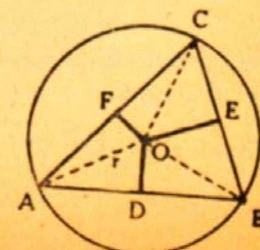


Fig. 76

El radio de la ⊙ circunscrita se designa por r. (Fig. 76).

OBSERVACIONES.—a) En el △ acutángulo el punto de concurrencia de las simetrales, o centro de la ⊙ circunscrita, cae dentro del triángulo. (Fig. 77)

b) En el △ rectángulo cae en el punto medio de la hipotenusa. (Fig. 78).

c) En el △ obtusángulo cae fuera del △. (Fig. 79).

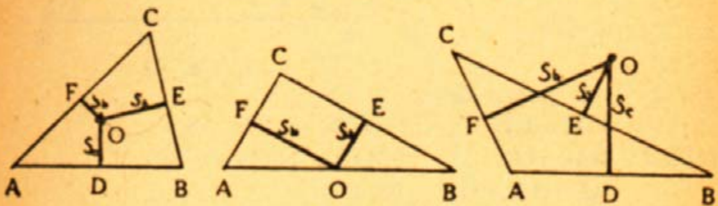


Fig. 77 Fig. 78 Fig. 79

d) Bastan 2 simetrales para determinar el centro de la ⊙ circunscrita.

§ 2.—*BISECTRICES*

Bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales.

En el △ se designan por b_α, b_β, b_γ según el ángulo que bisectan.

TEOREMA XX.—**Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo concurren en un mismo punto que equidista de los lados del triángulo.** Fig. 80.

Hip.) **AO, BO, CO** son bisectrices.

Tes.) 1) **AO, BO, CO** concurren en **O**.
2) **OM=ON=OQ.**

Dem.) Las bisectrices de α y β necesariamente se cortan en un punto **O,** puesto que:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}<2R.$$

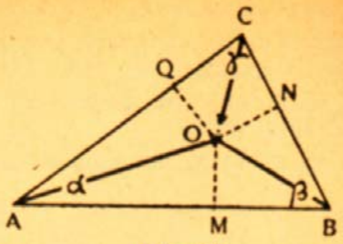


Fig. 80

Por ser O un punto de $b\alpha$

se tiene: **OM=OQ** (Teor. 30 de 3.er Año)

también: **OM=ON** (O es un punto de $b\beta$)

$\therefore$ **OQ=ON=OM** (Axioma)

Siendo **O** un punto equidistante de los lados **CA** y **CB**, según se acaba de demostrar, pertenece a la bisectriz del ángulo γ. Luego, las tres bisectrices concurren en **O.** (Teor. 31 del texto de 3.er Año de Omer Cano).

y **OM=ON=OQ**

Circunferencia inscrita a un △.— *El punto de concurrencia* **O**, *de las tres bisectrices de los ∢s interiores del △, es el centro de la ⊙ inscrita del △.*

Esta ⊙ es tangente a los tres lados del △ y su radio se designa por la letra griega ρ, (ro) minúscula. Bastan dos bisectrices para determinar el centro **O.** (Hágase el dibujo).

En este caso el △ es circunscrito a la ⊙ de radio ρ.

TEOREMA REFERENTE A LAS BISECTRICES DE ANGULOS EXTERIONES

Angulo exterior de un △ es el que está formado por un lado y la prolongación de otro lado.

TEAREMA XXI.—**Las bisectrices de dos ángulos exteriores de un △ y la del ángulo interior no adyacente a ellos, concurren en un mismo punto que equidista de un lado y de la prolongación de los otros dos.** (Fig 81).

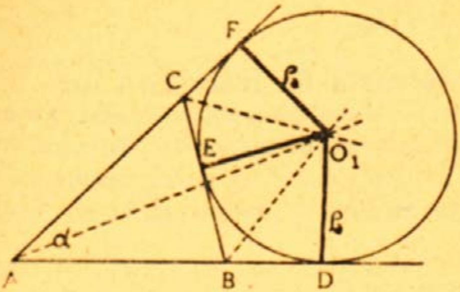


Fig. 81

Hip.) $\mathbf{BO_1}$, $\mathbf{CO_1}$ **bisec.** ∢s. exteriores
$\mathbf{AO_1}$, bisectriz ∢ int. no adyacente.

Tes.) 1) $\mathbf{BO_1}$, $\mathbf{CO_1}$, $\mathbf{AO_1}$ son concurrentes.
2) $\mathbf{O_1D = O_1E = O_1F}$.

Dem.) Las bisectrices de los ∢s exteriores en **B** y en **C** se cortan necesariamente en $\mathbf{O_1}$, puesto que:

$$\frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{BCF} + \frac{1}{2}\sphericalangle \mathbf{DBC} < 180°.$$

Por pertenecer $\mathbf{C_1}$ a la bisectriz $\mathbf{BO_1}$ se tiene: $\mathbf{O_1D = O_1E}$.
Por pertenecer $\mathbf{O_1}$ a la bisectriz $\mathbf{CO_1}$ se tiene: $\mathbf{O_1F = O_1E}$.

$\therefore \qquad \mathbf{O_1D = O_1F = O_1E}$.

Resulta entonces que **O_1 es equidistante** de los lados **AF** y **AD** de α.

Luego **O_1**, pertenece a la bisectriz de α y esta bisectriz pasa también por **O_1**.

Luego la tesis.

Circunferencia Ex inscrita a un △.— *El punto de concurrencia de las bisectrices de dos* ∢s exteriores de un △ y la del interior no *adyacente, es el centro de una ⊙ tangente a un lado del △ y a las prolongaciones de los otros dos, que reciben el nombre de ⊙ ex inscrita.*

OBSERVACIONES.—a) En todo △ se pueden construir tres ⊙s ex-inscritas:

1.° La tangente al lado **BC=a**, cuyo radio se designa por ρ_a
2.° " " " **AC=b**, " " " " ρ_b
3.° " " " **AB=c**, " " " " ρ_c

Dos bisectrices bastan para determinar el centro de la ⊙ ex-inscrita.

b) Los centros de las tres ⊙s ex-inscritas Q_1, Q_2, Q_3 determinan un nuevo △ cuyas alturas, son las bisectrices de los ∢s interiores del primer △ ABC, prolongadas hasta los vértices respectivos,

Por ejemplo, en Fig. 82.

Q_1A es una altura del △ $Q_1\,Q_2\,Q_3$.

En efecto $Q_1A \perp Q_2Q_3$ por ser bisectrices de ángulos adyacentes suplementarios.

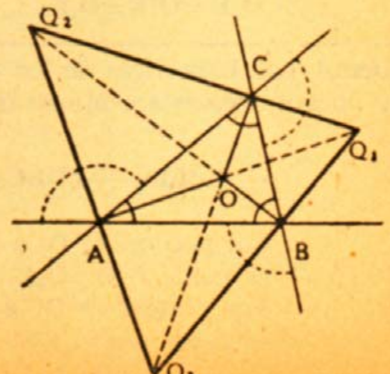


Fig. 82

§ 3.—ALTURAS DE UN TRIANGULO

Altura de un △ es la ⊥ bajada de un vértice al lado opuesto. Se designan por h_a, h_b, h_c.

TEOREMA XXII.—**Las tres alturas de un triángulo concurren en un mismo punto.** (Fig. 83).

Hip.) **AE, BF, CD** son alturas.
Tes.) **AE, BF, CD** son concurrentes.

Dem.) Por los vértices A, B y C se traza:

HI||**CB**. Resulta **HI⊥EA**
IG||**AC**. Resulta IG⊥FB
HG||**AB**. Resulta **HG⊥CD**

También se tiene:
AI=CB. (AIBC es un#).
AH=CB (HABC es un#).

AI=AH

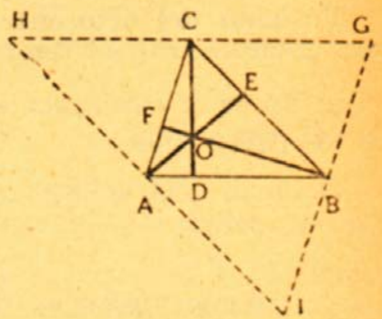


Fig. 83

Luego **A** es el punto medio de **HI**.

y **AE** es una de las simetrales del △ **IGH**.

Del mismo modo se prueba que **BF** y **CD** son las otras simetrales.

Por consiguiente, las alturas del △ **ABC**, se confunden con las simetrales del △ **IGH**.

Luego las tres alturas concurren en un mismo punto.

puesto que ya se ha demostrado que las simetrales son concurrentes.

Demuéstrese el teorema XXII, por medio de la Fig. 82. Ver observación b de la pág. 90.

El punto de concurrencia de las tres alturas de un △ se llama *ortocentro del* △.

Triángulo ortocéntrico es el que se forma uniendo los pies de las tres alturas. (Hágase el dibujo).

Posición del ortocentro.— a) En un △ acutángulo, el ortocentro está dentro del triángulo.

b) En un △ rectángulo, el ortocentro está en el vértice del ángulo recto.

c) En un △ obtusángulo, el ortocentro está fuera del triángulo, porque dos alturas caen fuera del triángulo.

§ 4.—TRANSVERSALES DE GRAVEDAD DE UN TRIANGULO

Transversal de gravedad de un △ es el trazo que une un vértice del △ con el punto medio del lado opuesto.

Se designan por t_a, t_b, t_c según sea **a, b** o **c** el lado a que correspondan.

TEOREMA XXIII.—**Las transversales de gravedad de un triángulo concurren en un mismo punto, que está situado a los 2/3 de cada una, desde los vértices respectivos y de tal modo que el segmento adyacente al lado es la mitad del segmento adyacente al vértice.** (Fig. 84).

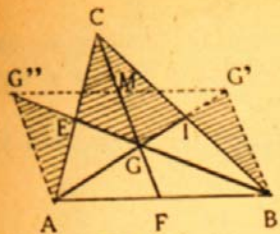


Fig. 84

Hip.) **AI, BE, CF** son transversales de gravedad.

Tes.) **AI, BE, CF** son concurrentes.

$$\mathbf{AG} = \frac{2}{3}\mathbf{AI}; \quad \mathbf{BG} = \frac{2}{3}\mathbf{BE};$$

$$\mathbf{CG} = \frac{2}{3}\mathbf{CF}.$$

Dem.) 1) Las transversales **AI** y **BE** se cortan necesariamente en G.

2) $\mathbf{G(\leftrightarrow)C}$.

3) Se hace girar el $\triangle$**CGI** en torno de **I** en 180°: toma la posición $\triangle$**BG'I**$\cong\triangle$**CGI** (son simétricos).

Por consiguiente se tiene:

4) **BG'#GC** (¿Por qué?)

5) Del mismo modo se hace girar el $\triangle$**GCE** en torno de E en 180°: toma la posición $\triangle$**EG''A**$\cong\triangle$**GCE** (son simétricos).

Resulta también:

6) **AG''#GC.**

De 4 y 6 resulta:

7) **AG''#BG'** (Iguales, por el axioma 2 cantidades...; ||s, por el teorema: "Dos ||s a una tercera son ||s entre sí".

Entonces:

8) El cuadrilátero **ABG'G''** es un # (Por tener un par de lados iguales y paralelos).

En **G** se cortan y se dimidian sus diagonales.

Para probar que la 3ª transversal de gravedad, la correspondiente al lado **AB**, pasa por **G**,

9) Se prolonga **CG** hasta cortar **AB** en **F**.

Resulta: **AF=FB** (Por el teor. "Si por el punto medio de un lado de un △ se traza la ‖ a un lado, ésta ‖ dimidia al 3.er lado"). (1).

10) Luego **CF** es la 3ª transversal de gravedad y concurre con las otras dos en **G**.

Además se tiene:

11) $IG'=IG=\frac{1}{2}GG'=\frac{1}{2}AG$, o sea que: $AG=\frac{2}{3}AI$

$EG''=EG=\frac{1}{2}GG''=\frac{1}{2}BG$, o sea que: $BG=\frac{2}{3}BE$

$GF=\frac{1}{2}BG'$ (GF=mediana △ ABG') $=\frac{1}{2}GC$

o sea que: $CG=\frac{2}{3}CF$.

Luego, la tesis es verdadera.

El punto de concurrencia de las transversales de gravedad de un △ se designa *centro de gravedad del triángulo.*

2.ª Demostración del teorema XXIII

Las transversales de gravedad de los lados BC y AC se cortan necesariamente en un punto **G**. (Fig. 85).

---

(1) En este caso el △ que se debe considerar es ABG'. Por G punto medio de AG', se "traza" CGF ‖ BG'.

C(↔)**G**

Hay que probar que **CG** prolongado dimidia **AB,** o sea que **CI** es la 3ª transversal de grav. del △ABC.

Hágase **GF**=**CG**

A(↔)**F**(↔)**B**

En el △ **CFB**

EG ∥ **BF** (EG es mediana).

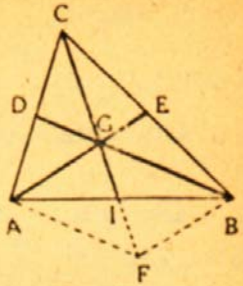


Fig. 85

También: **DG** ∥ **AF** (DG es mediana del △ CAF).

El cuadrilátero **AFBG** es un #.

Luego sus diagonales se dimidian en **I.**

Entonces **IA**=**IB.**

Luego **CI** es la 3ª transversal de grav. y pasa por **G.**

Además se tiene:

$$\mathbf{IG}=\frac{1}{2}\mathbf{GF}=\frac{1}{2}\mathbf{CG} \text{ o sea } \mathbf{CG}=\frac{2}{3}\mathbf{CI}.$$

Del mismo modo se demuestra que:

$$\mathbf{AG}=\frac{2}{3}\mathbf{AE}$$

$$\text{y } \mathbf{BG}=\frac{2}{3}\mathbf{BD}$$

3.ª Demostración del teorema XXIII

Las transversales de gr. **AE** y **BD,** se cortan necesariamente en **G.**

Hágase: **FA=FG**
y **HB=HG**
D(↔)E
F(↔)H

DE ∥ **AB**; **DE**$=\frac{1}{2}$**AB**

FH ∥ **AB**; **FH**$=\frac{1}{2}$**AB**

∴ **DE#FH**

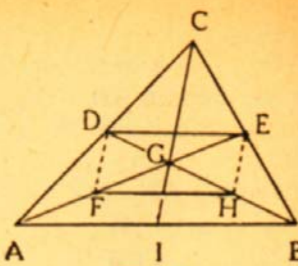


Fig. 86

Cuadrilátero **FHED** es un # por tener un par de lados iguales y ∥s (Teor. 39º, 3er. A. de Omer Cano).

Luego sus diagonales se dimidian (Teor. 42º de 3er. A).

Luego: **AF=FG=GE**$=\frac{1}{3}$**AE**

BH=HG=GD$=\frac{1}{3}$**BD**

Del mismo modo se demostraría que la transversal de gr. que parte del vértice **C** corta a **AE** en un punto G,

tal que: **GI**$=\frac{1}{3}$**CI.**

Como el punto **G** es único, las 3 transversales de gravedad concurren en **G**.

Luego, la tesis es verdadera.

* **198.** Hallar sobre una recta, un punto equidistante de dos puntos dados.

199. Hallar un punto que sea el vértice común de dos triángulos isósceles cuyas bases sean dos segmento dados.

200. Hallar un punto que unido con los extremos de dos segmentos iguales dados, resulten dos triángulos congruentes.

CAPITULO V

§1.—FIGURAS RECTILINEAS INSCRITAS

Llamase *figura inscrita,* en una $\odot$, aquella cuyos lados son cuerdas y sus vértices están sobre la $\odot$.

La $\odot$ se dice que es, en este caso, circunscrita a la figura. Su radio se designa por **r**.

Para que se pueda *circunscribir* una $\odot$ *a una figura rectilínea,* ha de existir un punto que equidiste de todos sus vértices.

En virtud del teorema XIX, pág. 85, el punto de concurrencia de las simetrales de un triángulo, es equidistante de los tres vértices. *Siempre,* pues, *será posible circunscribir* una $\odot$ *a un triángulo.*

§ 2.—PROPIEDADES DEL CUADRILATERO INSCRITO

TEOREMA XXIV.—**En todo cuadrilátero inscrito, los ángulos opuestos suman 2 R.**

Hip.) Cuadrilátero **ABCD** es inscrito. (Fig. 87).

Tes.) $\sphericalangle \mathbf{DAB} + \sphericalangle \mathbf{DCB} = 2\ \mathbf{R}.$

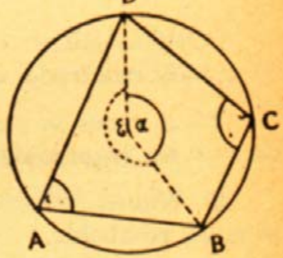


Fig. 87

Dem.) $\alpha + \varepsilon = 4\ \mathbf{R}.$

$\sphericalangle \mathbf{DAB} = \frac{1}{2}\alpha$ ($\sphericalangle$ cóncavo. Teor. IX)

$\sphericalangle \mathbf{DCB} = \frac{1}{2}\varepsilon$ (áng. convexo).

$\therefore \sphericalangle \mathbf{DAB} + \sphericalangle \mathbf{DCB} = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon = 2\ \mathbf{R}$ Se sumó m. a m.)

TEOREMA XXV. (Recíproco del XXIV.—**Todo cuadrilátero cuyos ángulos opuestos suman 2 R, es inscriptible en una circunferencia.**

Hip.) $\alpha + \gamma = 2\ \mathbf{R}.$ (Fig. 88).

Tes.) Circunf. **O** pasa por los 4 vértices.

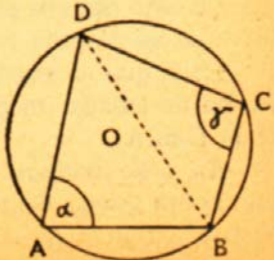


Fig. 88

Dem.) Por los vértices **B, A** y **D** pasa necesariamente una circunferencia.

(Corol. a, pág. 16).

El arco **BAD** es el L. G. del vértice **A.** (L. G. 9, pág. 45)

El vértice **C** debe hallarse forzosamete en el arco BCD, supletorio del arco capaz de α, porque el L. G. de los terceros vértices de los △s que tienen **BD** común y el ∢ opuesto igual a **2 R**—α es dicho arco supletorio. (L. G. 10)

Luego la ⊙ que pasa por **B, A** y **D,** pasa también por **C.** Luego pasa por los 4 vértices del cuadrilátero.

COROLARIOS: **1º. Siempre** *se puede circunscribir una* ⊙ *a todo* **cuadrado, rectángulo** *y* **trapecio isósceles.**

2º. *A* **veces** *se puede circunscribir una* ⊙ *a un* **trapecio** *y a un* **trapezoide.**

3º. Nunca *se puede circunscribir una* ⊙ *a un* **rombo** *ni a un* **romboide**.

El cuadrilátero al cual se le puede circunscribir una ⊙ se dice que es inscriptible en dicha ⊙.

§ 3.—FIGURAS RECTILINEAS CIRCUNSCRITAS

Figura circunscrita a una ⊙ es aquella cuyos lados son tangentes de la circunferencia.

En este caso se dice que la ⊙ es *inscrita* en la figura. Su radio se designa por ρ.

Para que se pueda inscribir una ⊙ en una figura dada, ha de existir un punto equidistante de todos los lados de la figura.

En todo triángulo se puede inscribir una ⊙, puesto que, como quedó demostrado en el teorema XX, el punto de concurrencia de las tres bisectrices de sus ángulos interiores, equidista de los tres lados del triángulo.

También se dejó dicho, pág. 90, que *a todo triángulo se le pueden ex inscribir tres circunferencias.*

Tanto los puntos de contacto de la ⊙ inscrita, como los de las ⊙s ex inscritas, determinan en el △ segmentos que, se pueden calcular en función del semiperímetro (s) y de sus lados.

§ 4.—*VALOR DE LAS TANGENTES Y SEGMENTOS DETERMINADOS POR LOS PUNTOS DE CONTACTO DE LAS ⊙s INSCRITA Y EX INSCRITAS A UN △* **ABC**, *EN FUNCION DE SUS LADOS*

PROBLEMA 6º.— *Dado un △ circunscrito* **ABC**, *calcular en función de sus lados, la longitud de las tangentes que parten de un vértice del △, a la ⊙ inscrita.*

Solución.— Sea el △ ABC dado, Fig 89.

En él se conoce:

BC=a
AC=b
AB=c.

Se sabe que las tang. que parten de un punto a una ⊙ son iguales. (Teor. XIII, pág. 53).

Por consiguiente:

AI=AJ=x
BI=BH=y
CH=CJ=z.

Resulta entonces que:

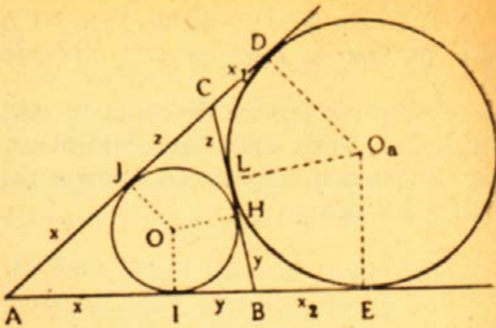


Fig. 89

$$2x+2y+2z=2\ (x+y+x)=a+b+c=2s \text{ (=perímetro)}$$

Se despeja cada incógnita en función del semi-perímetro s.

$$x=s - (y+z)=s - a=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$$
$$y=s - (x+z)=s - b=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-b=\frac{1}{2}(a+c-b)$$
$$z=s - (x+y)=s - c=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-c=\frac{1}{2}(a+b-c)$$

Estos resultados se pueden enunciar así:

La longitud de la tangente que parte de un vértice de un triángulo a la circunferencia inscrita, es igual al semi-perímetro del △, menos el lado opuesto al vértice respectivo.

OBSERVACION.—No olvidar que s es una cantidad conocida. En efecto, si los lados del △ dado ABC, midieran, por ejemplo, $a=30$ cm; $b=20$ cm; $c=40$ cm.

Se tendría:

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{30+20+40}{2}=\frac{90}{2}=45 \text{ cm.}$$

En este caso, ¿cuánto valen las tangentes que parten de cada uno de los vértices del △ ABC a la ⊙ inscrita? Fig. 89.

PROBLEMA 7º.—*Dado un* △ **ABC**, *calcular la longitud de las tangentes que parten de un vértice del △ a la ⊙ ex inscrita tangente al lado opuesto a dicho vértice, en función de los lados del △.*

Solución.—Sea ABC el △ dado. (Fig. 90)

En él se conoce:

$BC=a$
$AC=b$
$AB=c$

Se trata de calcular la longitud de la tangente AF_1 o AD_1.

En virtud del teor. XIII, se tiene:

$CF_1=CE_1=x_1$ y
$BD_1=BE_1=x_2$

Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=a \\ AF_1&=b+x_1 \\ AD_1&=c+x_2 \\ \hline AF_1+AD_1&=b+c+\underbrace{x_1+x_2}_{a}=a+b+c \end{aligned}$$

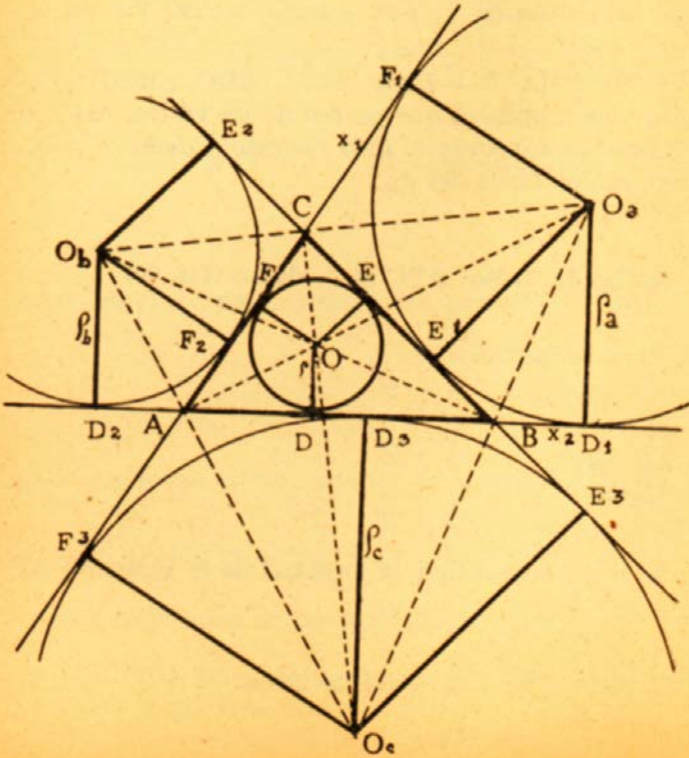


Fig. 90

Pero como $AF_1 = AD_1$ (Teor. XIII)

$$2\ AF_1 = 2\ AD_1 = a+b+c = 2\ s$$

$$AF_1 = AD_1 = \frac{a+b+c}{2} = s$$

Del mismo modo se puede obtener que:

$\mathbf{BE_2 = BD_2 = s}$ **y** $\mathbf{CF_3 = CE_3 = s}$

Resultado que se puede expresar así:

La longitud de cada una de las tangentes que parten desde un vértice de un △ ABC, a la ⊙ ex inscrita tangente al lado opuesto a ese vértice, es igual al semiperímetro del △.

§ 5.—DETERMINACION DE LOS PUNTOS DE TANGENCIA DE LAS ⊙s EX INSCRITAS A UN △ **ABC**, *CONOCIDOS EN SUS LADOS LOS PUNTOS DE CONTACTO DE LA ⊙ INSCRITA*

En la Fig. 91 se tiene sobre el lado AC:

$AF = AD = s - a = x$ (Problema 6°).

y $CF_2 = CE_2 = BE_2 - BC = s - a = x$ (Problema 7°).

Luego: $AF = CF_2 = CE_2 = s - a$

También:

$CF = CE = s - c = z$ (Problema 6°).

y $AF_2 = AD_2 = BD_2 - AB = s - c = z$

Luego $CF = AF_2 = AD_2 = s - c$

Del mismo modo resulta sobre los lados CB y AB que:

$\mathbf{BE = CE_1 = CF_1 = s - b}$ $\mathbf{AD = BD_3 = BE_3 = s - a}$

Estos resultados se pueden expresar del siguiente modo:

Si sobre un lado de un △ ABC, se aplican en orden inverso los segmentos determinados sobre este lado por el punto de contacto de la ⊙ inscrita, se obtiene el punto de contacto de la respectiva ⊙ ex inscrita.

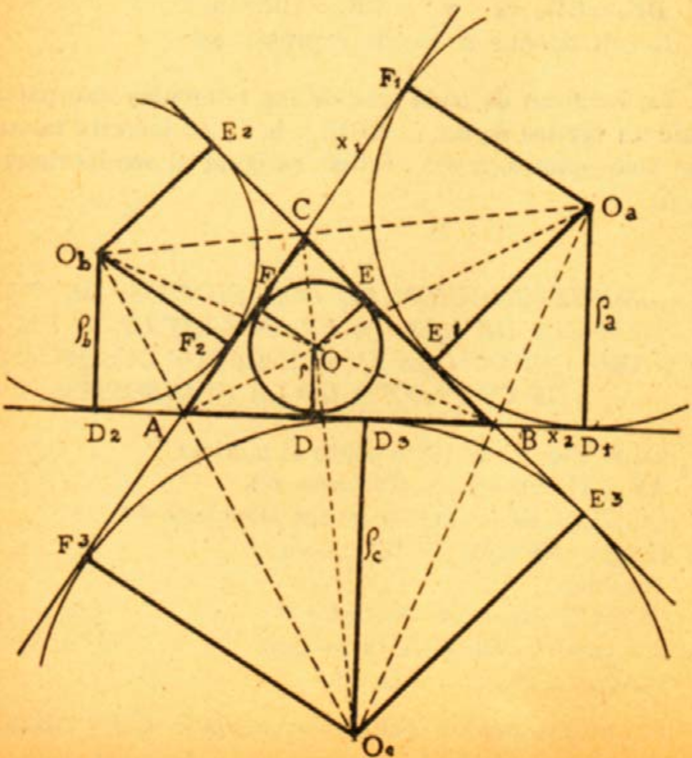


Fig. 91

OBSERVACION.—Si **F** es el punto de contacto de la ⊙ inscrita sobre el lado **AC** (Fig. 91), para tener F_2, punto de contacto de la ⊙ ex inscrita sobre **AC**, basta hacer $CF_2=AF$; los puntos de contacto E_2 y D_2 sobre las prolongaciones de los otros dos lados, se obtienen haciendo: $CE_2=CF_2$ y $AD_2=AF_2$ (Teor. XIII)

Por análogo procedimiento se obtienen los tres puntos de contacto de cada una de las otras ⊙s ex inscritas.

§ 6.—*VALOR EN FUNCION DE LOS LADOS DE LAS DISTANCIAS ENTRE LOS PUNTOS DE CONTACTO DE LA ⊙ INSCRITA EN UN △* ABC *Y UNA EX INSCRITA, O ENTRE LOS DE DOS EX INSCRITAS*

Sobre el lado **BC=a** se tiene: (Fig. 91)

a) Distancias del punto de contacto de la ⊙ inscrita al de una ex inscrita:

1.° $\mathbf{EE_2=BE_2-BE=s-(s-b)=s-s+b=b}$ (Problemas 7° y 6°).

Otro camino:

$\mathbf{EE_2=CE_2+CE=s-a+s-c=2s-a-c}$
$\mathbf{=a+b+c-a-c=b}$. o simplemente:

$\mathbf{EE_2=CE_2+CE=x+z=b}$ (Problema 6°)

2.° $\mathbf{EE_3=CE_3-CE=s-(s-c)=s-s+c=c}$ (Probl. 7° y 6°).

Qué otro camino se podía haber seguido?

3°. $\mathbf{EE_1=BE-BE_1=s-b-(s-c)=s-b-s+c=c-b}$

Otro camino:

$\mathbf{EE_1=BC-BE_1-CE=a-2(s-c)=a-2s+2c=}$
$\mathbf{a-a-b-c+2c=c-b}$

b) Distancias entre los puntos de contacto de dos $\odot$s ex inscritas:

1.º $E_2E_1 = BE_2 - BE_1 = s - (s - c) = s - s + c = c$

Qué otro camino se pudo haber seguido para obtener el mismo resultado?

2.º $E_1E_3 = CE_3 - CE_1 = s - (s - b) = s - s + b = b$ (Problema 7.º y 6.º).

3.º $E_2E_3 = CE_3 + CE_2 = s + s - a = 2s - a = a + b + c - a = b + c$

Por análogos procedimientos se puede obtener sobre el lado $AC = b$ que:

$$\left.\begin{array}{l} FF_1 = a \\ FF_3 = c \\ FF_2 = c - a \end{array}\right\}$$

Distancias de un punto de contacto de la $\odot$ insc. al de una ex insc.

$$\left.\begin{array}{l} F_2F_3 = a \\ F_2F_1 = c \\ F_1F_3 = a + c \end{array}\right\}$$

Dist. entre los puntos de contacto de dos $\odot$s ex inscritas.

Sobre el lado $AB = c$:

$$\left.\begin{array}{l} DD_1 = a \\ DD_2 = b \\ DD_3 = a - b \end{array}\right\}$$

Dist. de puntos de contacto de $\odot$ inscr, a una ex inscrita.

$$\left.\begin{array}{l} D_3D_2 = a \\ D_3D_1 = b \\ D_1D_2 = a + b \end{array}\right\}$$

Dist. entre puntos de contacto de dos $\odot$s ex inscr.

Los resultados anteriores se pueden expresar del modo siguiente:

1.º La distancia entre los puntos de tangencia de una ⊙ inscrita y otra ex inscrita, situadas en un mismo lado de un △, es igual al lado del △ que corta dicha distancia, o, a la diferencia de los dos lados que cortan ambas prolongaciones de dicha distancia.

2.º La distancia entre dos puntos de tangencia de dos ⊙s ex inscritas, situadas en un mismo lado de un △, es igual al lado que corta la "prolongación" de dicha distancia, o a la suma de los dos lados que cortan dicha distancia.

§ 7.—PROPIEDADES DEL CUADRILATERO CIRCUNSCRITO

TEOREMA XXVI. (Teorema de Pitot)—**En todo cuadrilátero circunscrito, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.** (Fig 92.).

Hip.) **ABCD** es un cuadr. circunscr.

Tesis) $AB+DC=AD+BC$

Dem.) Se designan por **p, q, m, n**
las tangentes que parten de los vértices del cuadrilátero.

Estas tang. son iguales de dos en dos, siendo **M, F, N y E** los puntos de tangencia. (Teor. XIII, Pág. 53).

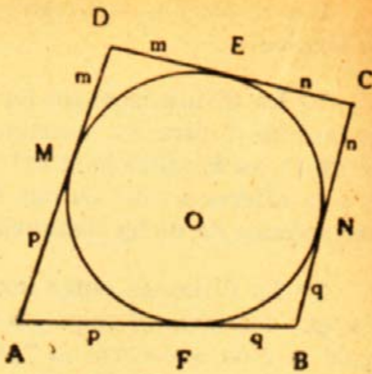


Fig. 92

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{AB}=p+q\\ \mathbf{DC}=m+n\end{array}\right\}\text{ Sumando m. a m. resulta:}$$

$$\mathbf{AB}+\mathbf{DC}=p+q+m+n$$

También:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{AD}=p+m\\ \mathbf{BC}=q+n\end{array}\right\}\text{Sumando resulta:}$$

$$\mathbf{AD}+\mathbf{BC}=p+q+m+n.$$

Luego: $\mathbf{AB}+\mathbf{DC}=\mathbf{AD}+\mathbf{BC}$ (Axioma . . .)

TEOREMA XXVII. (Recíproco del XXVI).— **A un cuadrilátero cuya suma de dos lados opuestos, es igual a la suma de los otros dos, se le puede inscribir una circunferencia.**

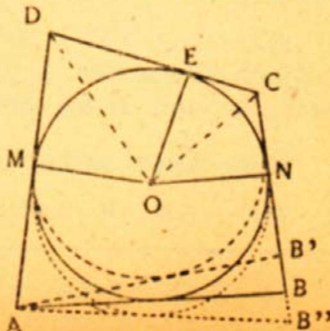


Fig. 93

Sea la Fig. 93.

Hip.) **AB+DC=AD+BC.**

Tes.) **ABCD** es cuadr. circunscr.

1ª Dem.) (Indirecta). Siempre será posible construir una ⊙ **O** tangente a los lados AD, DC y CB.

No se sabe todavía si $\odot$ **O** es o no tangente al cuarto lado **AB**.

Se pueden presentar 3 casos:

1.º El lado **AB** queda al exterior de la $\odot$ **O**.
2.º El lado AB corta (secante) a la $\odot$ **O.**
3.º El lado **AB** es tang. a la $\odot$ **O**.

1.º Si el lado **AB** queda al exterior de la $\odot$ **O**, tracémosle desde A una tang. AB' que cortará el lado CB en B'.

Resultará así que:

AB'+DC=AD+B'C (Teorema XXVI) (1).
Pero **AB+DC=AD+BC** (Por Hip.) (2).
Restando m. a m. ig. 1 a ig. 2, se tiene:
AB—AB' = BC—B'C
o **AB—AB' = BB'**.
Este resultado es un absurdo porque nunca, en un $\triangle$, la diferencia de dos lados es igual al tercero.

2.º Si **AB** es secante de la $\odot$ **O**, se le traza desde **A**, la tang. **AB"** que corta la prolongación de CB en B".

Se tendrá así:
AB"+DC=AD+B"C (Teor. XXVI).
y **AB+DC=AD+BC** (Hip.).
Restando m. a m. las dos igualdades, se tiene:
AB"—AB=B"B.
También este resultado es un absurdo.

3.º No cabe otra posibilidad que el tercer caso: el lado **AB** es tang. a la $\odot$ **O**.
Luego cuadr. **ABCD** es circunscrito.

2.ª Demostración del Teorema XXVII (Directa).

Sea la Fig. 94.

Se tiene por Hipótesis que:

AD+BC=AB+DC (1).

Si **AD>AB** y cambiando AB y BC de miembro, se tiene:

AD—AB=DC—BC. (2).

Para obtener las diferencias de ambos miembros de igualdad 2, hágase: AE=AB

y CF=BC

E(↔)B

E(↔)F

F(↔)B

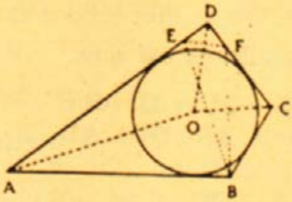


Fig. 94

Resultan los △s isósceles: **ABE, DEF y CFB.**

En estos △s las bisectrices de los ∢s de los vértices **A, D** y **C** son las ⊥s medias o simetrales de las bases: **BE, EF** y **FB** (Teor. 24. Tomo 3.er Año, Omer Cano).

Estas tres simetrales como pertenecientes al △ **EBF**, concurren en un mismo punto **O** (Teor. XIX), el cual equidista de los cuatro lados del cuadrilátero por pertenecer a las bisectrices de los ∢s en **A, D** y **C.**

Luego se puede construir una ⊙ tangente a los cuatro lados del cuadrilátero, y **ABCD** es circunscrito.

COROLARIOS: 1.º) **Siempre** *se puede inscribir una circunferencia en un cuadrado y en un rombo. El centro de la ⊙ inscrita es la intersección de las diagonales.*

Ls. Gs. para **C** $\begin{cases} 1.^{\circ} \odot \text{ (O, r)} \\ 2.^{\circ} \odot \text{ (D=punto medio de AB, } t_c) \end{cases}$

Construcción.—

$\sphericalangle$ **AOB=2**γ
AO=OB=**r**
A(↔)B
Se hace: DA=DB
$\odot$ (O, r)
$\odot$ (D, t_c)
A(↔)C(↔)B.
ABC △ pedido.

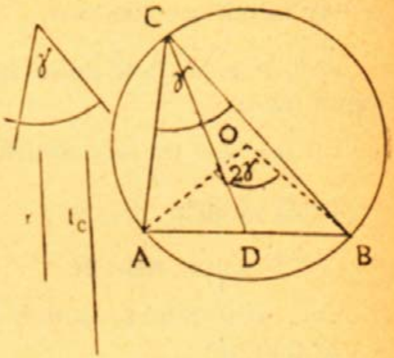


Fig. 96

Demostración.—(Véase Fig. 96).

$\sphericalangle$AOB=2 γ (Por construcción).

$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \gamma$ (Teor. IX)

OA=OB=**r** (Por constr.).
DC=$\mathbf{t_c}$ (Por constr.).

Luego el △ **ABC** cumple con los datos o condiciones impuestas.

Discusión.— (Fig. 96)

1.° Si γ=90°.
El $\sphericalangle$**AOB**=un $\sphericalangle$ extendido.
Los 3 vértices del △ AOB quedan situados en línea recta.

AB=c=2 r

Cuanto $t_c = r$, la $\odot$ con radio t_c corta la $\odot$ de radio **r** en infinitos puntos, puesto que ambas $\odot$s coinciden Luego, hay infinitas soluciones.

Si $t_c \gtrless r$, la $\odot$ de radio t_c no corta la $\odot$ de radio **r** en ningún punto.

En tal caso no hay solución.

2.º Si $\gamma \neq 90°$.

Resulta: $AB < 2r$.

La $\odot$ con radio t_c corta a la $\odot$ de radio **r** en 2, 1 o en ningún punto.

Luego puede haber 2, 1 ó 0 soluciones.

ALGUNAS INDICACIONES

En la construcción de figuras inscritas, téngase en cuenta que:

a) En un $\triangle$ inscrito en una $\odot$, son elementos dependientes uno de los otros: *un lado, el $\measuredangle$ opuesto a este lado, y el radio* **r** *de la* $\odot$ circunscrita. Estos tres elementos forman lo que se llama **"un datum"**. Con dos de ellos se puede conocer el tercero. Así:

1.º Conociendo **r** y α, se puede determinar el lado **a**.

2.º Conociendo **r** y **a**, se puede determinar el áng. α.

3.° Conociendo α y **a**, se puede determinar el radio **r** de la ⊙ circunscrita. (En este último caso bastaría construir el arco capaz de α sobre a según problema fundamental 2° Pág. 43).

¿Qué elemento nuevo se puede obtener conociendo **c** y **r**? ¿Con **r** y γ? ¿Con **r** y β? (Fig. 97).

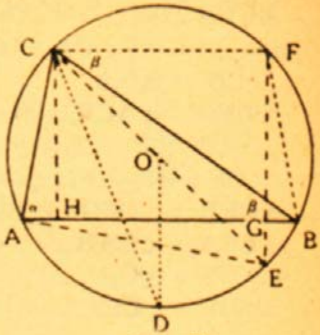


Fig. 97

b) Trazando la altura **CH** y el diámetro **CE**, (Fig. 97), y uniendo **A** con **E**, resulta:

$\sphericalangle$**CAE=90°**. (Teor. IX, Corol. 4).
$\sphericalangle$**ECB**$=\sphericalangle$**EAB**$=\sphericalangle$**ACH**$=90°-\alpha$ (Teor. IX, Corol. 1 y 4).
$\sphericalangle$**HCE**$=\sphericalangle(r,\ h_c) = \gamma-$ ($\sphericalangle$**ACH**$+\sphericalangle$**ECB**) $=\gamma-(90°-\alpha+90°-\alpha)=\gamma-(180°-2\alpha)=\gamma-(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha)=\alpha-\beta$

c) La bisectriz **CD**$=$**b**$_\gamma$, del ángulo γ lo es también del $\sphericalangle$**HCE**, puesto que $\sphericalangle$**ACH**$=\sphericalangle$**BCE**.

$$\therefore \qquad \sphericalangle \mathbf{HCD} = \sphericalangle (\mathbf{h_c},\ \mathbf{b_\gamma}) = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

También la bisectriz **CD**, dimidia el arco **ADB**. **(Corol. 5.°, pág. 37).**

Uniendo **O** con **D**, resulta: $\sphericalangle$**DOE**$=2\sphericalangle$**DCE**$=\sphericalangle$**HCE** $=\alpha-\beta$.

Construcción.—(Fig. 99).

$\sphericalangle$ **ODB**$=90°$.

DO$=\rho$

$\sphericalangle$ **DOB**$=90°-\dfrac{\beta}{2}$

$\odot$ (**O**, ρ)

Se prolonga **BD**$\rightarrow$**D**.

Se traza tangente **AEC**;

Se traza tangente **BFC**;

ABC $\triangle$ pedido.

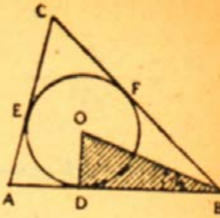


Fig. 99

OBSERVACION.—Hágase la demostración y discusión.

ALGUNAS INDICACIONES PARA LA CONSTRUCCION DE FIGURAS CIRCUNSCRITAS (Fig. 100)

En el $\triangle$ circunscrito **ABC**, únase O con los tres vértices y los puntos de tangencia.

Las rectas **OA**, **OB** y **OC** son las bisectrices b_α, b_β y b_γ respectivamente y **OD**$=$**OE**$=$**OF**$=\rho$

En el $\triangle$**AOB** se tiene:

$$\sphericalangle \mathbf{OAB}=\frac{1}{2}\alpha$$

$$\sphericalangle \mathbf{OBA}=\frac{1}{2}\beta$$

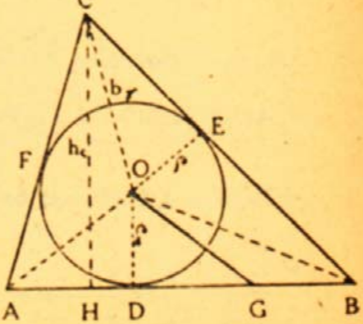


Fig. 100

$$\sphericalangle \mathbf{AOB}=180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\alpha+\beta+\gamma-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=$$

$$\underbrace{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}_{90^\circ}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$$

$$\mathbf{AD}=\mathbf{AF}=\mathbf{s}-\mathbf{a}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})$$ (Probl. fund. 6°, pág. 103)

$$\mathbf{BD}=\mathbf{BE}=\mathbf{s}-\mathbf{b}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b})$$ (Probl. fund. 6°)

Haciendo **OG = OA**

Resulta: **DG = DA.**

$$\mathbf{BG}=\mathbf{BD}-\mathbf{DA}=\mathbf{s}-\mathbf{b}-(\mathbf{s}-\mathbf{a})=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b})-\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{a}-\mathbf{b}$$

En el $\triangle$ isósceles **AOG** se tiene:

$$\measuredangle\mathbf{AOG}=180^\circ-(\measuredangle\mathbf{OAG}+\measuredangle\mathbf{OGA})=180^\circ-\alpha=\beta+\gamma$$

$$\measuredangle\mathbf{BOG}=\measuredangle\mathbf{AOB}-\measuredangle\mathbf{AOG}=90^\circ+\frac{\gamma}{2}-(\beta+\gamma)=$$

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}-\beta-\gamma=\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\therefore\ \measuredangle\mathbf{BOG}=\measuredangle\mathbf{HCO}=\measuredangle(\mathbf{h}_c,\ \mathbf{b}_\gamma)$ (Pág. 119, letra c.)

Si se conoce $\mathbf{CH}=h_c$, el lado **AB** es tangente a la $\odot$ $(\mathbf{C},\ \mathbf{h}_c)$.

INDICACIONES PARA LA CONSTRUCCION DE TRAPECIOS

En el trapecio **ABCD trácese CE** $\parallel$ **DA,** fig. 101.
Resulta $\triangle$ **CEB,** en el cual se tiene:

CE=DA=d
BC=b
EB=a—c
$\sphericalangle$**CEB**$=\alpha$
$\sphericalangle$**EBC**$=\beta$
$\sphericalangle$**ECB**$=\gamma-\alpha$
CH=h (común al $\triangle$ y al trapecio).
BH = proyección del lado **b**
EH = proyección del lado **d**

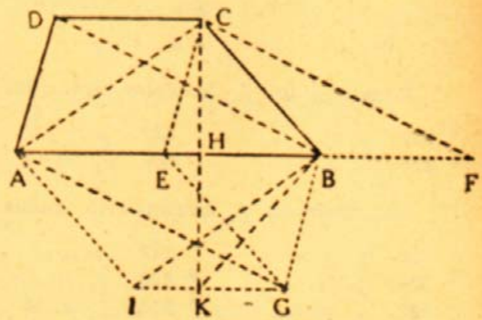


Fig. 101

Trazando por **C, CF** $\parallel$ **DB** y prolongando **AB** hasta su intersección con **CF**, se tiene en el $\triangle$ **ACF:**

AF=a+c
AC=e
CF=f
$\sphericalangle$**ACF**$=\varepsilon$
CH=h

Trazando **BG** $\parallel$ **DA**
BI $\parallel$ **CA**
AG $\parallel$ **DB**
AI $\parallel$ **CB** y finalmente **IG**, se obtiene el trapecio **BAIG** $\cong$ trap. **ABCD.**

Luego: **HK=HC**
$\sphericalangle$**HBK**$=\sphericalangle$**HBC**$=\beta$
$\sphericalangle$**KBG**$=\alpha-\beta$

CAPITULO VI

EQUIVALENCIA, TRANSFORMACION, DIVISION Y MULTIPLICACION DE AREAS DE LAS FIGURAS PLANAS

I.—EQUIVALENCIA DE AREAS

§ 1.—*NOCIONES GENERALES*

En el lenguaje corriente se confunden, ordinariamente, los términos *superficie* y *área*. Sin embargo, tienen diferente significado.

Superficie de una figura es la porción del plano encerrada por el perímetro de esta figura, sin medir.

Area es la medida de la superficie. Con más precisión, área es el número que expresa la relación de la superficie de una figura con la unidad de superficie.

Si dos figuras sobrepuestas coinciden en toda su extensión se dice que son *congruentes*.

Dos figuras congruentes tienen igual *área* y la misma *forma*. El signo de congruencia es: $\cong$. Se debe leer **congruente con.**

Figuras equivalentes son las que tienen igual área, pero sin tener necesariamente la misma forma.

Dos figuras congruentes son siempre *equivalentes*, pero, no siempre dos figuras equivalentes serán congruentes.

Así un cuadrado que mide 6 m por lado, es equivalente a un rectángulo que mide 9 m de largo por 4 m de ancho, porque ambas figuras tienen 36 m^2 de área. Sin embargo, dichas figuras no son congruentes.

Si dos figuras se componen de partes congruentes, aunque dispuestas de distinto modo, es evidente que resulten equivalentes.

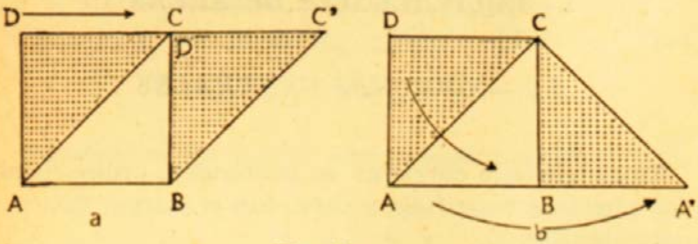


Fig. 103

Esta propiedad se puede comprobar, dividiendo el cuadrado **ABCD**, (Fig. 103a), en dos △s rectángulos por la diagonal **AC**.

Si se traslada el △ **ACD** en la dirección de la recta **DC**, permaneciendo fijo **ABC**, hasta que **DA** coincida con **CB**, el cuadrado **ABCD** se ha transformado en el romboide equivalente **CABC'**.

Haciendo girar el △ **ACD** en torno del punto **C** (fig. 103b) hasta que **CD** coincida con **CB**, resulta el △ isósceles **AA'C**, equivalente, también, con el cuadrado **ABCD**.

En ambos casos las figuras equivalentes están conpuestas de partes congruentes.

§ 2.—*TEOREMAS REFERENTES A EQUIVALENCIA DE PARALELOGRAMOS, TRIANGULOS Y TRAPECIOS.*

TEOREMA XXVIII.—**Dos paralelógramos de igual base e igual altura, son equivalentes.**

Hip.) #s **ABCD** y **ABEF** tienen igual base **AB** e igual altura **h** (dist. ||s). Fig. 104

Tes.) #**ABCD** = #**ABEF**

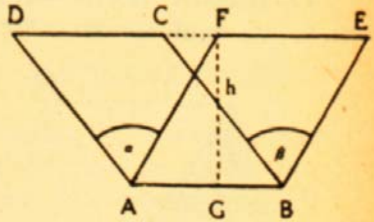


Fig. 104

Dem.) Si se sobreponen los dos #s de modo que coincidan sus bases iguales **AB**, resulta el trapecio **ABED**.

$\triangle$**CBE** $\cong$ $\triangle$**DAF** (2.º Caso).

En efecto, tienen:

BC = **AD** (lados op. de un #).

BE = AF id.

$\beta = \alpha$ (lados resp. ||s.)

Entonces se tiene:

Trap. **ABED** = Trap. **ABED**

$\triangle$ **CBE** = $\triangle$ **DAF**

Trap. ABED — $\triangle$CBE = Trap. ABED — $\triangle$DAF (Restando m. a m.)

Luego: #**ABCD** = #**ABEF** (Q. E. D.)

COROLARIO.—*Un $\triangle$ es equivalente a la mitad de un # que tenga igual base e igual altura.*

Demostración.—Se traza una diagonal del #.

El # queda así dividido en dos △s que tienen la misma base y altura que el #.

Los dos △s son congruentes (Teor. 36.º, Tomo II, de Omer Cano) y por lo tanto equivalentes entre sí.

Luego cada uno de los △s es equivalente a la mitad del #.

TEOREMA XXIX.—**Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.** (Fig. 105).

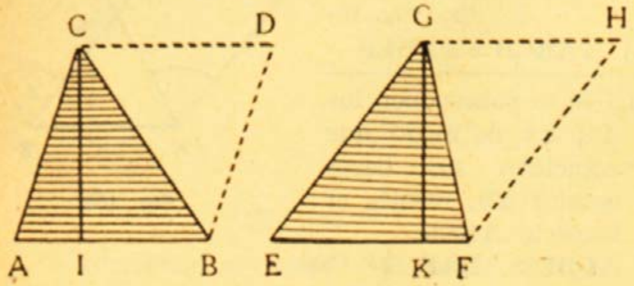


Fig. 105

Hip.) $\begin{cases} AB = EF & \text{(bases)} \\ CI = GK & \text{(alturas)} \end{cases}$

Tes.) $\triangle \mathbf{ABC} = \triangle \mathbf{EFG}$

Dem.) En los △s ABC y EFG complétense los #s.

Resulta: $\# \mathbf{ABDC} = \# \mathbf{EFHG}$ (Teor. XXVIII)

$$\triangle \mathbf{ABC} = \frac{1}{2} \# \mathbf{ABCD} \quad \text{(Corolario Teor. XXVIII).}$$

$$\triangle \mathbf{EFG} = \frac{1}{2} \# \mathbf{EFHG} \quad \text{(Corolario Teor. XXVIII).}$$

Luego $\triangle \mathbf{ABC} = \triangle \mathbf{EFG}$ (Por ser mitades de #s. equivalentes).

Del teorema XXIX se desprende el L. G. siguiente:

L. G. 24.—*El L. G. de los terceros vértices de todos los* $\triangle$*s equivalentes que tienen la base* **AB** *común, está formado por dos* $\|$*s trazadas a ambos lados de* **AB** *a una distancia* **h** *(altura de los* $\triangle$*s).*

§ 3.—*PARALELOGRAMOS COMPLEMENTARIOS*

Paralelógramos complementarios son los que resultan al trazar por un punto de una diagonal de un #, las $\|$*s a los lados y que no están atravesados por la diagonal.*

Los #s **P** y **Q** son complementarios. (Fig. 106).

TEOREMA XXX.—**Dos paralelógramos complementarios son equivalentes.** (Teorema del gnomon).

Hip.) **P** y **Q** #s complementarios.

Tes.) $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$

Dem.)

$\triangle \mathbf{ABC} \cong \triangle \mathbf{CDA}$ (1)

$\triangle \mathbf{GFC} \cong \triangle \mathbf{CHG}$ (2)

$\triangle \mathbf{AIG} \cong \triangle \mathbf{GEA}$ (3)

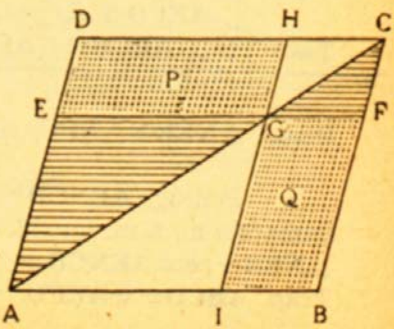


Fig. 106

Si a la 1.ª igualdad se resta m. a m. la suma de los $\triangle$s de las dos últimas igualdades se tiene que:

$\#\mathbf{P} = \#\mathbf{Q}$

OBSERVACION.—El teorema anterior es un caso especial de paralelógramos equivalentes, que no tienen iguales ni la base, ni la altura.

TEOREMA XXXI.—**Un trapecio es equivalente a un paralelógramo que tiene la misma altura y por base la mediana del trapecio.** (Fig.107).

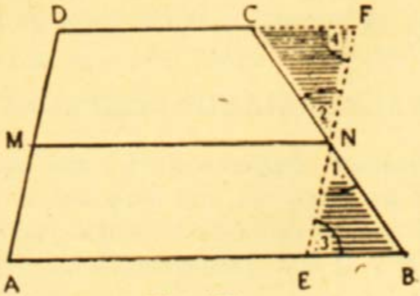


Fig. 107

Hip.) $\begin{cases} \textbf{ABCD} = \text{trapecio} \\ \textbf{MN} = \text{mediana} \\ \textbf{AEFD} \# \text{ de base } \textbf{MN}. \end{cases}$

Tes.) Trap. **ABCD** = # **AEFD**

Dem.) $\triangle$**NEB** $\cong$ $\triangle$**NFC**, tienen: $\begin{cases} \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \\ \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 \\ NB = NC \end{cases}$

Pentág. **AENCD** = pent. **AENCD.**

Sumando m. a m. iguald. anteriores resulta:

$\triangle$**NEB** + pent.**AENCD** = $\triangle$**NFC** + pent.**AENCD**

Trap. **ABCD** = # **AEFD.** (Q. E. D.)

TEOREMA XXXII.—**Un trapecio es equivalente a un $\triangle$ que tiene la misma altura y cuya base es la suma de las bases del trapecio.** (Fig. 108).

Hip.) $\mathbf{AF = AB + DC}$
Tes.) Trap. $\mathbf{ABCD} = \triangle \mathbf{AFD}$

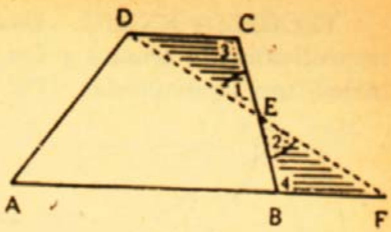


Fig. 108

Dem.) $\mathbf{ABED = ABED}$ (común a las dos Fig.)
$\triangle \mathbf{ECD} \cong \triangle \mathbf{EBF}$
(tienen: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$; $\mathbf{DC = BF}$

Sumando m. a m. las 2 iguald. anteriores se tiene:
$\mathbf{ABED} + \triangle \mathbf{ECD} = \mathbf{ABED} + \triangle \mathbf{EBF}$.
Trap. $\mathbf{ABCD} = \triangle \mathbf{AFD}$.

2.ª Demostración del Teorema XXXII

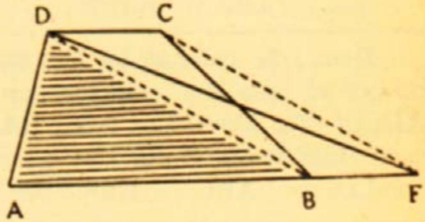


Fig. 109

Se traza la diagonal **DB.**

Se traza: $CF \parallel DB$

Se prolonga AB hasta F
$F(\leftrightarrow)D$

Resulta: $BF = DC$ ¿Por qué?
$\therefore \ AF = AB + DC$

Entonces se tiene:
$\triangle \mathbf{ABD} = \triangle \mathbf{ABD}$ (Parte común del trap. y del $\triangle$).
$\triangle \mathbf{DBC} = \triangle \mathbf{DBF}$ (Igual base y misma alt.: dist. entre las $\parallel$s)
$\therefore \ \triangle \mathbf{ABD} + \triangle \mathbf{DBC} = \triangle \mathbf{ABD} + \triangle \mathbf{DBF}$ (Sumando m. a m.)
Luego Trap. $\mathbf{ABCD} = \triangle \mathbf{AFD}$.

TEOREMA XXXIII.—**Dos △s. que tienen dos lados respectivamente iguales y los ∢s comprendidos suplementarios, son equivalentes.** (Fig. 110).

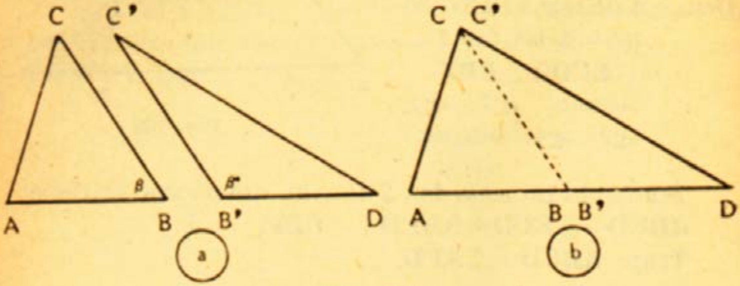


Fig. 110

Hip.) **AB = B'D; BC = B'C'**
$\beta + \beta' = 180°$
Tes.) △**ABC** = △**B'DC'**

Dem.) Se colocan los △s uno al lado de otro, de modo que el lado **B'C'** coincida con **BC**. Tendrán la posición: **ADCC'** (Fig. 110b). Los lados **BA** y **B'D** quedarán en línea recta, puesto que β y β' son ∢s adyacentes suplementarios.
Luego △**ABC** = △**B'DC'** por tener igual base y altura.

§ 4.—*PROYECCIONES DE UN TRAZO SOBRE UNA RECTA*

La proyección de un trazo sobre una recta, es la parte *de esta recta comprendida entre los pies de las ⊥ bajadas desde los extremos del trazo a la recta.* (Fig. 111).

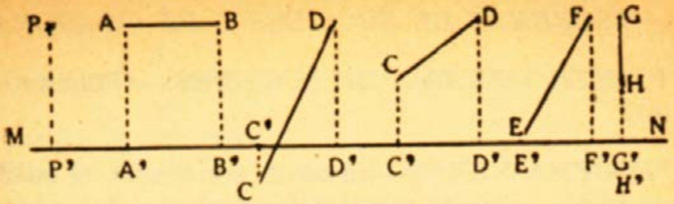


Fig. 111

La recta sobre la cual se proyecta el trazo, es el *eje de proyección*. En la Fig. 111, **MN** es el eje de proyección.

Las ⊥s trazadas a él desde los extremos del trazo, son las *rectas de proyección* o *rectas proyectantes*.

La *proyección de un punto sobre una recta*, es otro punto, o sea, el pie de la ⊥ bajada del punto a la recta. **P'** es la proyección de P. (Fig. 111).

Si el trazo proyectado es paralelo al eje, la proyección, es igual al trazo: **A'B'**=**AB**.

Si el trazo es convergente con el eje, la proyección es menor que el trazo: **C'D'**>**CD**.

Si un extremo del trazo coincide con el eje, este punto extremo coincide con su proyección: trazo **EF**.

Si el trazo es ⊥ al eje, su proyección se reduce a un punto: trazo **HG**.

En un △ rectángulo, un cateto es la proyección de la hipotenusa sobre la recta cuya dirección es determinada por este mismo cateto.

§ 5.—TEOREMAS DE EUCLIDES Y DE PITAGORAS

PRIMER TEOREMA DE EUCLIDES.—(Referente al cateto).

TEOREMA XXXIV.—**En un △ rectángulo, el cuadrado construido sobre un cateto es equivalente al rectángulo formado por la hipotenusa entera y la proyección del mismo cateto sobre ella.** (Fig. 112).

Hip.) △ **ABC** rectángulo en C $\begin{cases} \mathbf{ABC=c;\ DB=p;\ DA=q} \\ \mathbf{BC=a} \\ \mathbf{AC=b} \end{cases}$

Tes.) □ **BEFC** = ▭ **BIHD** o sea, $\mathbf{a^2=cp}$.

Dem.) **A(↔)E** y **C(↔)I**

En los △s **BEA** y **BCI** se tiene:

BE=BC

BA=BI

∢ABE=∢CBI (lados resp. ⊥s)

△BEA≅△BCI (2º caso)

$\triangle\mathbf{BEA}=\dfrac{1}{2}\#\mathbf{BEFC}$ (Misma base BE e igual alt. **AG**=**FE**=dist. ∥s).

C(↔)I

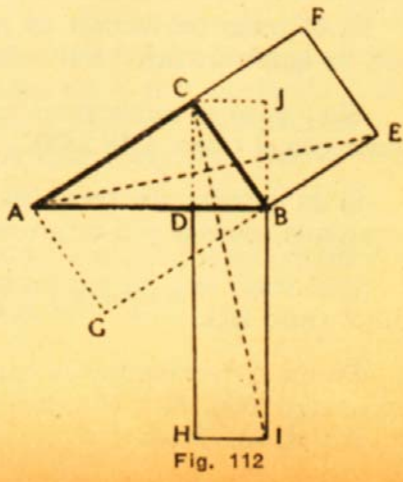


Fig. 112

$\triangle BCI = \frac{1}{2} \# BIHD$ (Misma base BI e igual altura $CJ = HI$)

$\therefore \frac{1}{2} \# BEFC = \frac{1}{2} \# BIHD$

Luego, #s enteros:

BEFC = BIHD, o lo que es lo mismo: $\mathbf{a^2 = cp.}$

Del mismo modo se demuestra que: $\mathbf{b^2 = cq.}$

2.º TEOREMA DE EUCLIDES (Referente a la altura).

TEOREMA XXXV.—**En un △ rectángulo, el cuadrado construido sobre la altura es equivalente al rectángulo que tiene por lados las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.** (Fig. 113).

Hip.) △ **ABC** rectángulo en C; $\mathbf{CD = h_c}$ (alt.)

$\mathbf{AD = q;\ DB = p.}$

Tes.) $\mathbf{h_c^2 = q.\ p.}$

Dem.) Se construye el □ **EDCF** sobre $\mathbf{CD = h_c}$.

Se prolongan EF y BC hasta su intersección **H.**

Se traza: $BI \perp BE$ y se completa el ▭ **EBIH.**

Se prolongan **FC** hasta **N** y **DC** hasta **M.**

□EDCF = ▭CNIM

(son #s, complem.)

△CAD ≅ △HCM.

En efecto, tienen:

CD = HM

∢1 = ∢2

(lados respectiv. ⊥s)

∢D = ∢M = 90°

Luego: AD = CM = **q**

Además: **DB = CN = p.**

(lados opuestos de un #)

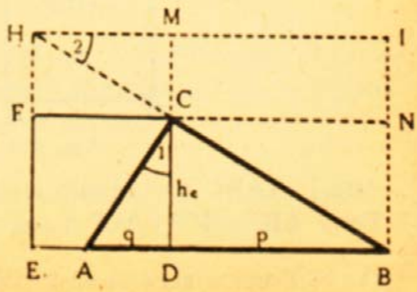


Fig. 113

En consecuencia, los lados del rectángulo **CNIM** son las proyecciones **p** y **q** de los catetos del △ rect. **ABC.**

Luego: **□EDCF = ▭CNIM,**

o sea: $h_c^2 = q\ p.$ (Q. E. D.).

TEOREMA DE PITAGORAS (El particular) (1)

TEOREMA XXXVI.—**En un △ rectángulo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.** (Fig. 114).

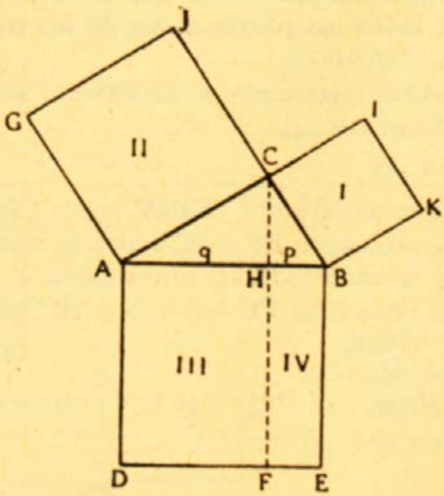


Fig. 114

Hip.) △**ABC** rectángulo en **C.**

Tes.) $AB^2 = BC^2 + AC^2$ o sea: $c^2 = a^2 + b^2$

---

(1) El teorema general de Pitágoras pertenece al programa de 5.º Año.

Dem.) Se traza: **CH⊥AB** y se prolonga hasta **F.**

Resulta: ▭**IV**=□**I** (1.er Teor. de Euclides)

▭III=□II (1.er Teor. de Euclides)

∴ ▭s **IV+III**=□s **I+II** (Sumando m. a m.)

Luego: $AB^2=BC^2+AC^2$,

o sea: $c^2 = a^2 + b^2$.

DEMOSTRACION ALGEBRAICA DEL TEOREMA XXXVI

Se hace CH⊥AB y se prolonga hasta F. (Fig. 114).

Los lados y proyecciones del △ se designan según se acostumbra.

Aplicando el 1.er teorema de Euclides (referente al cateto) resulta:

$$a^2=cp$$
$$b^2=cq$$

∴ $a^2+b^2=c\ (p+q)$ Sumando y sacando factor común

$$a^2+b^2=c \cdot c$$

Luego: $a^2+b^2=c^2$ (Q.E.D.)

COROLARIOS: 1.º *En un △ rectángulo, el cuadrado de un cateto, es equivalente al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

1) $a^2=c^2-b^2$

1) $b^2=c^2-a^2$

2.º *En un △ rectángulo, el cuadrado construído sobre un cateto, es equivalente al rectángulo que tiene por la-*

dos, respectivamente, la suma y la diferencia de la hipotenusa y el otro cateto.

1) $\mathbf{a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)\ (c-b)}$
2) $\mathbf{b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)\ (c-a)}$

3.º *En un △ rectángulo, la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos, y un cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.*

1) $\mathbf{c = \sqrt{a^2+b^2}}$

2) $\mathbf{a = \sqrt{c^2-b^2}}$

3) $\mathbf{b = \sqrt{c^2-a^2}}$

TEOREMA XXXVII.— (Recíproco del de Pitágoras).— **Si en un △ el cuadrado construido sobre un lado es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos, el △ es rectángulo.** (Fig. 115).

Hip.) $\mathbf{AB^2 = AC^2 + BC^2}$
Tes.) **ABC** es △ rectángulo en C.

Dem.) Se traza: $\mathbf{CD \perp BC}$ en **C**.

se hace: $\mathbf{CD = AC}$.

Resulta entonces: $\mathbf{BD^2 = DC^2 + BC^2}$

Por Hipótesis: $\mathbf{AB^2 = AC^2 + BC^2}$

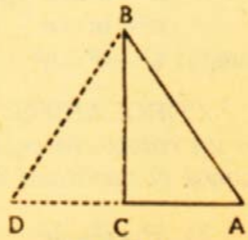


Fig. 115

Como los 2.ºs miembros de las 2 últimas igualdades son iguales, se tiene:

$$\mathbf{BD^2 = AB^2}$$

$\therefore$ **BD = AB** (extrayendo raíz cuadrada)

$\triangle$**BDC** $\cong$ $\triangle$**ABC** (3 lados iguales).

Pero $\triangle$**BDC** es $\triangle$ rectángulo en **C**.

Luego $\triangle$**ABC** es $\triangle$ rectángulo también. (Q.E.D.)

II.—TRANSFORMACION DE FIGURAS PLANAS (Problemas)

Transformar una figura es darle otra forma, sin cambiar su área.

Para transformar una figura en otra, hay que hacer uso de los teoremas sobre equivalencia de figuras.

PROBLEMA 1.—*Transformar un # en otro equivalente, que tenga un ángulo dado* α. (Fig. 116).

Solución.— Sean **ABCD** el paralelógramo y α el $\measuredangle$ dado.

En **A** se copia $\measuredangle$**BAD'** $= \alpha$
Se hace: **D'C' = DC.**

ABC'D' = paralelógramo pedido.

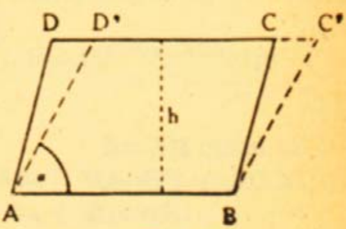


Fig. 116

Demostración: #**ABCD** = #**ABC'D'** porque tienen igual base **AB** y altura h.

PROBLEMA 2.—*Transformar un paralelógramo oblicuo en un rectángulo equivalente.* (Fig. 117).

Solución.—Igual al problema 1.

$\sphericalangle$**BAD'**$=\alpha=$**90°** (Fig. 117).

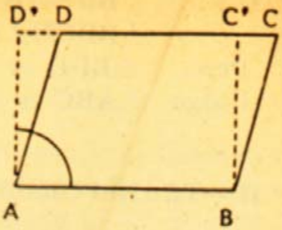


Fig. 117

PROBLEMA 3.—*Transformar un paralelógramo en otro en que uno de sus lados sea igual a un trazo dado* **d**. (Fig. 118).

Solución.—Se aplica el teorema de los #s complementarios.

Construcción.—Sea **ABCD** el paralelógramo dado.

Se prolongan: **AB→B** y **DC→C**.

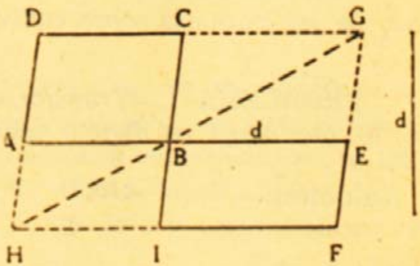


Fig. 118

Se hace: **BE=d**

Se traza: **FG||AD** (Por E).

B(↔)G y se prolonga la diagonal **GB** hasta su intersección **H** con **DA** prolongado.

Se traza: **HF||AE** y se prolonga **CB** hasta **I**.

Resulta: #IFEB = #ABCD.

Dem.) Teorema XXX.

PROBLEMA 4.—*Transformar un paralelógramo dado en otro equivalente de altura dada* **h**.

Solución.—Se aplica el teorema de los paralelógramos complementarios.

Sea **ABCD** el # dado. Se traza: **EF**||**AB** (a la distancia **h**) se prolongan **DA** y **CB** hasta **E** y **F** respect.

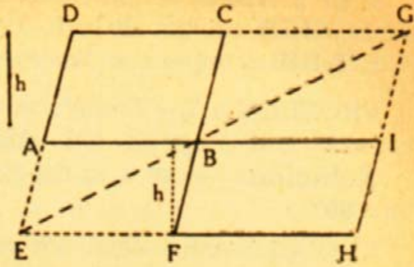


Fig. 119

Se traza la diagonal **EB** y se completa la Fig. del mismo modo que en el Problema 3.

Resulta: # **FHIB** (de altura h) = #**ABCD.**

Demostr.: Teorema XXX.

PROBLEMA 5.—*Transformar un # dado* **ABCD** *en otro que tenga un lado dado* **b'** *y cuyos ángulos sean iguales a los del paralelógramo dado.*

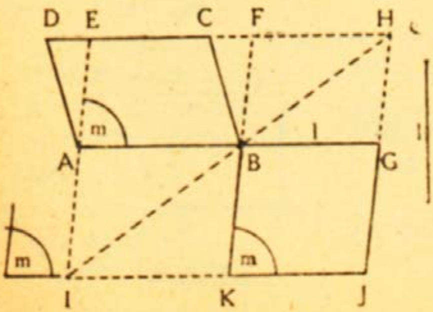


Fig. 120

Solución.—Véase problema 3.

PROBLEMA 6.—*Transformar un #* **ABCD**, *en otro que tenga un lado dado* *l y un ángulo dado* **m.** (Fig. 120).

Solución.—1° Se transforma el # **ABCD** en otro **ABFE** de ∢ **m.** (Probl. 1)

2° El # **ABFE**, así obtenido, se transforma en el equivalente **KJGB**, de lado **BG=l.** (Probl. 3).

KJGB cumple con las condiciones del Problema.

PROBLEMA 7.—*Transformar un #* **ABCD**, *en un rectángulo que tenga un lado dado* **b'**.

Solución.—Igual a la del Problema 6.

$\sphericalangle$**m=90°**.

PROBLEMA 8.—*Dado un cuadrado* **ABCD** *de lado l transformarlo en un rectángulo que tenga un lado dado* **a.**

Dos casos: 1° **a>l; 2° a<l.**

1.ª Solución.—Se aplica el teorema de los paralelógramos complementarios como en problema 5.

Este procedimiento soluciona los dos casos: 1° y 2° (Fig. 121). rema XXXIV).

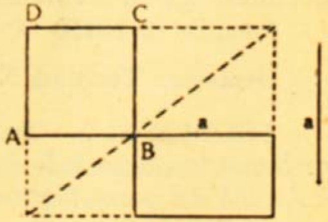


Fig. 121

2.ª Solución.—Se aplica el 1.er teorema de Euclides. (Teo-

1° Si **a>l**

Se construye el △ rect. **BGC** de hipotenusa **a** y un cat. **l.** (Fig. 122).

Para esto se prolonga **DC→C**

$\sphericalangle$**BCG**=90°.

CB=l=cateto

BG=a=hipotenusa

CI⊥BG.

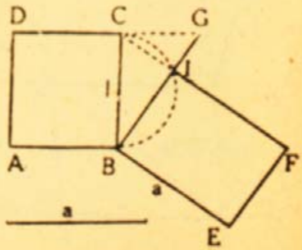


Fig. 122

El ▭ **BEFI** construído con **a** y la proyección **BI** es el rectángulo pedido.

2º Si **a**$<$**l.**

En este caso el trazo a en vez de ser la hipotenusa **BG** del △ rectángulo **BGC**, debe ser la proyección **BI** del mismo △.

Construcción.—**ABCD**=□ de lado **l** (Fig. 122)
⊙ de diámetro **CB=l** (1.er L. G. de I).
⊙ (**B, a**) corta en **I** (2º L. G. de I).
Se prolongan **DC** y **BI** hasta **G.**

El ▭ **BEFI** que se construye con los lados **BI=a** y **BE=BG** es el ▭ pedido.

3.ª Solución.—Se aplica 2º teorema de Euclides (Teorema XXXV).

El problema se reduce a construir un △ rectángulo en que la altura que parte del vértice del ∢ recto=**l** y una proyección sobre la hipotenusa = **a.**

Construído el △ rectángulo, se construye el rectángulo con las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

4.ª Solución.—(Fig. 123). Si **a**$>$**l.**

Sea **ABCD** el cuadrado de lado **l** dado.

1.º Se transforma el cuadrado en el paralelógramo **CDEF.**

Para ello:

⊙ (**D**, **a**) corta prolongación de **AB** en **E.**

Se hace: **EF=DC.**

2.º El #**CDEF** se transforma en el rectángulo **EHGD.**

Basta trazar: **EH** ⊥ **ED** y **DG** ⊥ **DE.**

Fig. 123

PROBLEMA 9.—*Dado un trapecio, transformarlo: a) en un paralelógramo oblicuo; b) en un rectángulo; c) en un triángulo.*

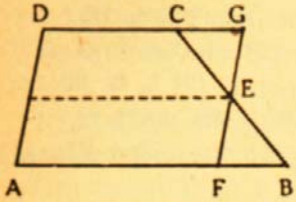


Fig. 124

Solución.— (Fig. 124) a) Se aplica el teorema XXXI
Se prolonga **DC→C**
Se traza **FG**||**AD.** (Por **E** punto medio de **CB**).
AFGD # pedido

b) Por los puntos medios **E** y (Fig. 125) de los lados no paralelos del trapecio, se trazan:
HG⊥**AB** y **DC.**
JI⊥**AB** y **DC.**
GIJH es el ▭ pedido.
Demostr.: Teorema XXXI

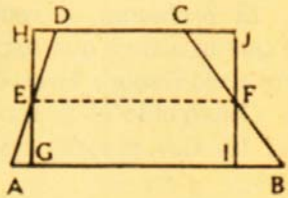


Fig. 125

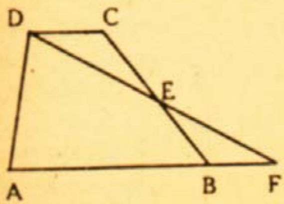


Fig. 126

c) Se aplica el teorema XXXII (Fig. 126).

Se prolonga **AB→B**
Se hace: **BF=DC.**

D(↔)F
△**AFD** = trap. **ABCD.**

PROBLEMA 10.—*Transformar un △ en otro que tenga con el primero una base común* **AB=c** (Fig. 127).

Solución.—Sea **ABC** △ dado.
Por C vértice opuesto al lado fijo **AB**, se traza: **CL** || **AB**.
Se une cualquier punto **C'** de la || **CL** con los vértices **A** y **B**.

Demostr. Teorema XXIX y L. G. 24, pág. 131.

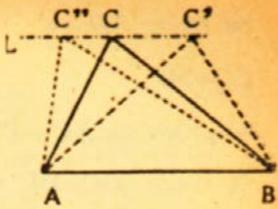


Fig. 127

OBSERVACION: El problema 10 tiene infinidad de soluciones, es indeterminado.

PROBLEMA 11.— *Transformar un △* **ABC** *en otro equivalente que tenga una base* **c'** *dada.*

Solución.—Existen dos casos:

1.er Casos c'>c

Se prolonga **AB=c→B**

Se hace: **AD=c'**

C(↔)D

BE || CD (por **B**)

E(↔)D

Resulta: △**ADE**=△**ABC.**

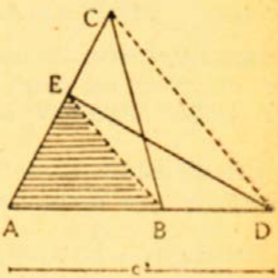


Fig. 128

Dem.) En los △s **ADE** y **ABC** se tiene (Fig. 128):

△**EBD** = △**EBC** (Tienen misma base **EB** e igual alt. desde **D** y **C** resp. o sea distancias entre ||s **EB** y **CD**).

△**ABE**=△**ABE** (Parte común).

∴△**EBD**+△**ABE**=△**EBC**+△**ABE**

o sea: △**ADE**=△**ABC.**

2.o Caso: $c' < c$

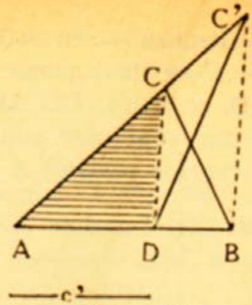


Fig. 129

Se hace: $AD = c'$

$C(\leftrightarrow)D$

Se prolonga $AC \rightarrow C$

Se traza: $BC' \parallel DC$ (Por **B**)

$C'\ (\rightarrow)\ D$

Resulta $\triangle ADC' = \triangle ABC$

Dem.) En los $\triangle$s **ADC'** y **ABC** se tiene: (Fig. 129).
$\triangle ADC = \triangle ADC$ (Parte común).
$\triangle CDC' = \triangle CDB$ (tienen misma base **CD** e igual alt. la distancia entre $\parallel$s **CD** y **BC'**).
$\therefore \triangle ADC + \triangle CDC' = \triangle ADC + \triangle CDB$.
Luego $\triangle ADC' = \triangle ABC$.

OBSERVACION.—Repítase el problema 11 dándose los otros lados: **a'** y **b'** en vez de **c'**. Obsérvese como aumentando la base del $\triangle$ pedido, disminuye su altura y viceversa.

PROBLEMA 12.— *Transformar un* $\triangle$ **ABC** *en otro equivalente que tenga una altura dada* $HI = h_c'$. (Fig. 130)

Solución.—Existen dos casos:

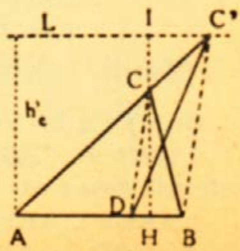


Fig. 130

1.° $h'_c > h_c$; 2.° $h'_c < h_c$

1.er Caso: $h'_c > HC = h_c$
Se traza: $L \parallel AB$ (a la dist. h'_c)
Se prolonga **AC** hasta que corte **L** en **C'**.
$C'\ (\leftrightarrow)\ B$
Se traza: $CD \parallel C'B$ (por **C**)

C'(↔)D

Resulta: △**ADC'**=△**ABC**

Dem.: Los △s **ADC'** y **ABC** tienen:
la parte común: △**ADC.**

Pero △**CDC'**=△**CDB** (Misma base **CD** e igual alt. dist. entre ||s **CD y C'B)**

Si a la parte común se agrega el △**CDC'**
se obtiene △**ADC'.**

Si a la parte común se agrega el △**CDB**
se obtiene △**ABC.**

Luego: △**ADC'**=△**ABC.**

2.º CASO: $h'_c < h_c$

Se traza **C'F**||**AB** (a la dist. h'_c)

C'(↔)B

Se traza: CD||C'B (Por **C**).

C'(↔)D

Resulta: △**ADC'**=△**ABC.**

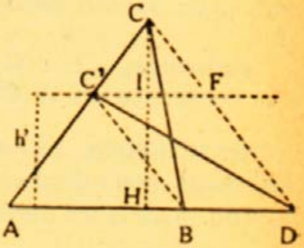


Fig. 131

Dem.: Los △s **ADC'** y **ABC** tienen la parte común **ABC'.**

Pero, △**C'BD**=△**C'BC** (Misma base **C'B** e igual altura distancias ||s).

Si a la parte común se le agrega el △**C'BD**
resulta el △**ADC'.**

Si a la parte común se le agrega el **C'BC**
resulta el △**ABC.**

Luego: △**ADC'**=△**ABC.**

PROBLEMA 13.— *Transformar un* △ **ABC** *en otro equivalente que tenga con el primero la base* **AB= c** *común y el lado* **b'** *sea igual a un trazo dado.*

Solución.— (Fig. 132). Se traza **L**||**AB.** (Por el vértice C).

Con radio **b'** y con centro **A,** se corta la recta **L** en **C'**.

$\triangle$**ABC'**$=\triangle$**ABC** (Misma base y altura).

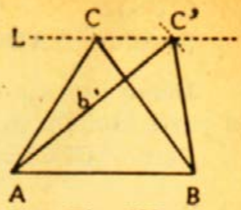


Fig. 132

PROBLEMA 14.—*Transformar un $\triangle$* **ABC** *en otro equivalente que tenga la base* **AB=c** *común con el primero, y que uno de los* $\measuredangle$**s** *adyacentes a la base común sea igual a un ángulo dado* α'.

Solución.— Por **C** se traza una || a la base **AB**. En **A** se construye un $\measuredangle$ **C'AB**$=\alpha'$.

PROBLEMA 15.—*Transformar un $\triangle$* **ABC** *en otro que tenga con el primero la base* **c** *común y el ángulo opuesto igual a un ángulo dado* γ'.

Solución.— Se construye el arco capaz de γ' sobre **AB=c** como cuerda.

Se traza: **LC** || **AB** (Por C) (Fig. 133).

El punto de intersección de los dos Ls. Gs., **C'** o **C''**, es el tercer vértice del $\triangle$ pedido.

$\triangle$**ABC'**$=\triangle$**ABC** (Misma base e igual altura).

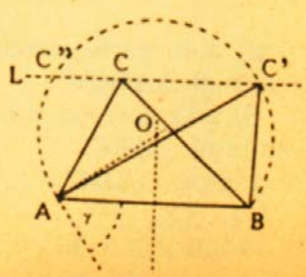


Fig. 133

Discusión.— Puede haber dos, una o cero soluciones.

PROBLEMA 16.— *Transformar un △ escaleno* **ABC** *en otro △ a) isósceles; b) rectángulo.* (Fig. 134).

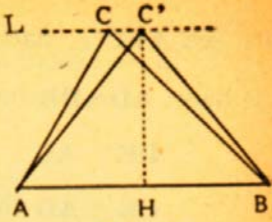


Fig. 134

Solución.— a) Se traza:
L ‖ **AB** (Por C)
HC' simetral de **AB.**
Resulta: △**ABC'** isósc.=△**ABC**

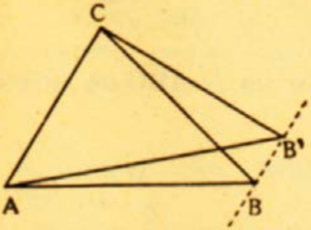


Fig. 135

b) Sea **ABC** el △ dado (Fig. 135).

Se hace: **BB'** ‖ **AC** (Por **B**).

∢**ACB'**=90°

△**AB'C** rectáng. = △**ABC.**

PROBLEMA 17.—*Transformar un △* **ABC** *en un paralelógramo de modo que tenga con él, a) una misma base; b) una misma altura.* (Fig. 136).

Solución.— a) Como un △ es equivalente a la mitad de un paralelógramo de igual base y altura, **el # pedido debe tener la mitad de la altura del △,** ya que las bases deben quedar iguales:

$$\mathbf{DI} = \frac{1}{2}\mathbf{DC}$$

EF ‖ **AB** (Por **I**).
BF ‖ **AE** (Por **B**).
#**ABFE**=△**ABC.**

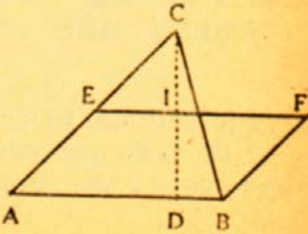


Fig. 136

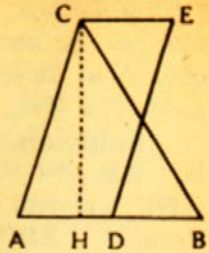


Fig. 137

b) Sea **ABC** △ dado (Fig. 137).

Se hace: **AD = DB** (mit. de la base **AB**)

DE ‖ **AC**

CE ‖ **AD** (misma altura)

#**ADEC** = △**ABC.**

PROBLEMA 18.—*Transformar un* △ **ABC** *en un rectángulo.*

Solución.—Igual a la del pro blema 17.

El rectángulo debe tener la mitad de la altura del △ y misma base, (Fig. 138) o la mitad de la base y misma altura.

Constr.: $\mathbf{HI = IC = \frac{1}{2}HC}$

AF y **BE** ⊥ **AB.**

▭**ABEF** = △**ABC.**

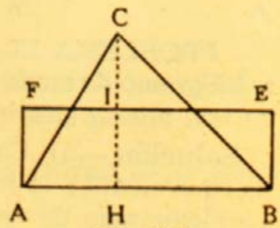


Fig. 138

PROBLEMA 19.— *Transformar un paralelógramo en un* △ *de modo que tenga a) una base común con el paralelógramo; b) una misma altura que el* #.

Solución.—a) La altura del △ ha de ser doble de la altura del #. b) La base del △ ha de ser el duplo de la base del paralelógramo.

PROBLEMA 20.—*Transformar un* △ **ABC** *en otro tal que, conservando el* ∢ β, uno de los lados que lo forman, *sea igual a un trazo dado* **a'**.

Solución.— Igual a la del Probl. 11.

PROBLEMA 21.—*Transformar un* △ *dado en otro, de manera que dos de sus lados sean iguales a los trazos dados* **a'** *y* **b'**.

Solución.—Sea **ABC** △ dado. (Fig. 139).

Pimero se transforma el △**ABC** en otro **ABC'**, de manera que **BC'=a'**. (Probl. 13).

En seguida se transforma el △ **ABC'** en el △**BC'A'** de modo que conservando fijo el lado **BC'=a'**, sea **C'A'=b'**. Para ello se traza AA'||BC' (Por A).

Con **b'** y con centro en **C'** se corta **AA'** en **A'**.

△**BC'A'**=△**ABC.**

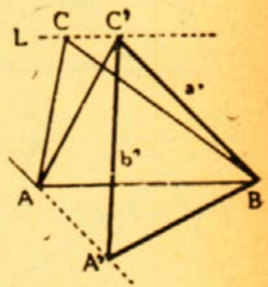


Fig. 139

Dem.: Los △s **ABC** y **BC'A'** son equivalentes al △**ABC'**.

PROBLEMA 22.—*Transformar un trapecio* **ABCD** *en un* △ *isósceles.* (Fig. 140).

Solución.—Primero se transforma el trapecio **ABCD** en el △ **EDA** (Probl. 9 c).

Después se transforma el △**EDA** en otro △ isósceles **AED'**. (Problema 16 a).

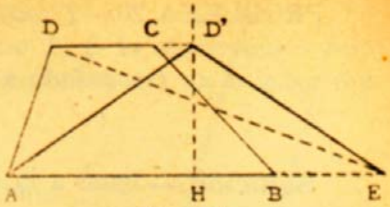


Fig. 140

PROBLEMA 23.—*Transformar un △ **ABC** en otro tal que, conservando el mismo ∢β, la altura correspondiente a uno de los lados que lo forman, sea igual a un trazo dado* $\mathbf{h'}_a$.

Solución.—Igual a la del problema 12.

PROBLEMA 24.— *Transformar un △ **ABC** en otro equivalente **DBC'** que tenga un lado situado sobre el lado **AB** del primero y el vértice opuesto a este lado en un punto dado **C'** del plano.* (Fig. 141).

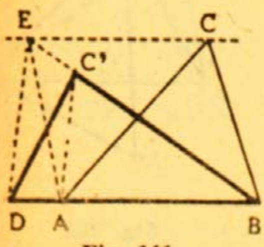


Fig. 141

Solución.—Primero, el △**ABC** se transforma en otro equivalente **ABE** de misma base **AB** y cuyo lado **BE** pasa por el punto **C'**. (Problema 10).

Después se transforma el △**ABE** en otro de base **BC'**.

Para ello: **C'(↔)A**
Se prolonga **BA→A**
Se traza: **ED**||**C'A** (Por **E**) hasta obtener D.
C'(↔)D.

Dem.) $\triangle$**DBC'**$=\triangle$**ABE**
(Tienen $\triangle$**AC'D**$=\triangle$**AC'E**)

Pero $\triangle$**ABC**$=\triangle$**ABE**.
Luego $\triangle$**DBC'**$=\triangle$**ABC**. (Dos cantidades $=$s).

PROBLEMA 25.—*Transformar un polígono cualquiera en otro equivalente que tenga un lado menos.*

Solución.—Sea el hexágono **ABCDEF** el polígono dado. (Fig. 142).

Se separa del polígono el $\triangle$**DBC** por la diagonal **DB**.

Se prolonga **AB**$\rightarrow$**B**.

Se traza **CG** $\parallel$ **DB** (Por **C**) hasta cortar la prolongación en **G**.

D$(\leftrightarrow)$**G**.

AGDEF es el polígono (pentágono) de un lado menos, equivalente al hexágono dado.

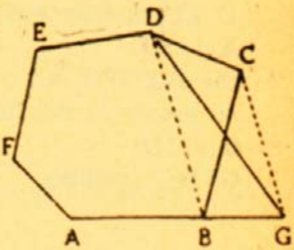


Fig. 142

Dem.) El pentágono **AGDEF** y el hexágono **ABCDEF** tienen:

$\triangle$**DBG**$=\triangle$**DBC** por tener misma base e igual alt. (dist. entre $\parallel$s. **DB** y **CG**).

ABDEF$=$**ABDEF** (Parte común en las 2 Figs.).

$\therefore\triangle$**DBG**$+$**ABDEF**$=\triangle$**DBC**$+$**ABDEF**.

Luego pent. **AGDEF**$=$hex. **ABCDEF**.

PROBLEMA 26.—*Transformar un pentágono en un triángulo.* (Fig. 143).

Solución.—Sea el pentágono **ABCDE.** Repitiendo el problema 25 se transforman sucesivamente:

1º El pentágono **ABCDE** en el cuadrilátero **AFDE**

CF || **DB**

Se prolonga **AB**→**B** hasta **F.**

D(↔)**F.**

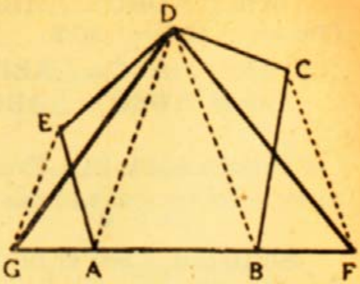


Fig. 143

2º El cuadrilátero **AFDE** se transforma en el △ **GFD.**

A(↔)**D**

EG||**DA** (Por **E**).

Se prolonga **BA** hasta **G.**

G(↔)**D.**

GFD △ pedido.

PROBLEMA 27.—*Transformar un polígono cualquiera en un rectángulo equivalente.*

Solución.—Se transforma el polígono en un △. (**Problemas 25 y 26**).

El triángulo se transforma en un rectángulo (**Probl. 18**)

PROBLEMA 28.—*Transformar un rectángulo* **ABCD** *en un cuadrado equivalente.* (**Fig. 144**).

Solución.—Se prolonga **DC**→**C**

Se hace: **DE**=**DA**

Semi ⊙ de diámetro **DE.**
Se prolonga **BC→C,** hasta **I.**
DIHF construído sobre **DI** es el cuadrado pedido.

Demostr.: I(↔)E
DEI △ rectángulo en **I.**
Se aplica 1.er teorema de Euclides (del cateto): Teorema XXXIV.

2ª Solución del probl. 28. Aplíquese 2º teorema de Euclides (de la altura: Teorema XXXV).

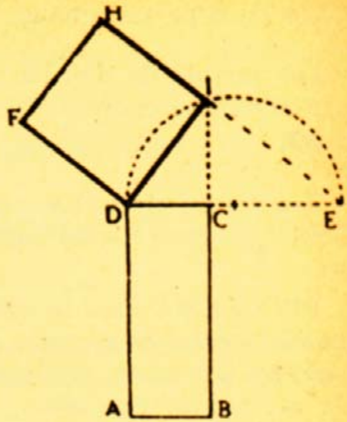


Fig. 144

PROBLEMA 29.—*Transformar un polígono cualquiera en un cuadrado equivalente.*

Solución.—Se transforma el polígono en un rectángulo (Problema 27).
El rectángulo se transforma en un cuadrado (Probl. 28)

III.—DIVISION DE FIGURAS PLANAS

PROBLEMA 30.—*Dividir un* △ *en* **n** *partes equivalentes por medio de transversales que parten de un mismo vértice.* (Fig. 145).

Solución.—Se divide uno de los lados en **n** partes iguales.

Los puntos de división se unen con el vértice opuesto. Figura 145. **n=5**.

Los $\triangle$s así obtenidos son equivalentes, por tener igual base y altura.

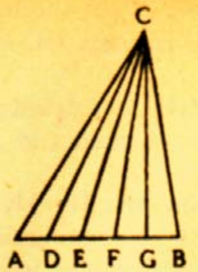


Fig. 145

PROBLEMA 31.—*Dividir un paralelógramo en* **n** *partes equivalentes por medio de* $\parallel$*s a uno de sus lados.* (Fig. 146).

Solución.—Basta dividir uno de los lados en partes iguales y trazar por los puntos de división, paralelas a los lados contiguos.

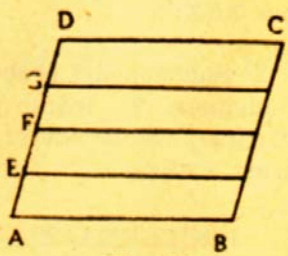


Fig. 146

PROBLEMA 32.—*Dividir un paralelógramo en un número par de partes equivalentes, por medio de transversales que partan de uno de sus vértices.*

Solución.—Sea el número par de partes equivalentes **n=6**, por ejemplo. (Fig. 147).

Se divide cada uno de los lados no concurrentes al vértice de origen de las transversales en $\frac{1}{2}$ n partes iguales (En este ej. en 3).

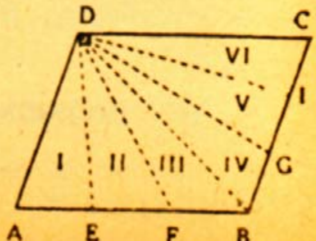


Fig. 147

Se unen los puntos de división con el vértice del cual parten las transversales.

En la Fig. 147, el paralelógramo quedó dividido en 6 $\triangle$s equivalentes.

Dem.: $\triangle$s**I**=**II**=**III**=$\frac{1}{3}$$\triangle$**ABD** (mitad del #)=$\frac{1}{6}$**ABCD**

$\triangle$s**IV**=**V**=**VI**=$\frac{1}{3}$$\triangle$**CBD** (mitad del #)=$\frac{1}{6}$**ABCD**

Luego los 6 $\triangle$s son equivalentes.

PROBLEMA 33.—*Dividir un paralelógramo en un número impar* **n** *de partes equivalentes, por medio de transversales que parten de un mismo vértice.*

Solución.— Se divide cada uno de los lados no concurrentes al vértice de origen de las transversales en **n** partes iguales.

Después se unen los puntos de división, uno por medio, con el vértice de origen de la transversal. En Fig. 148, **n**=**3**.

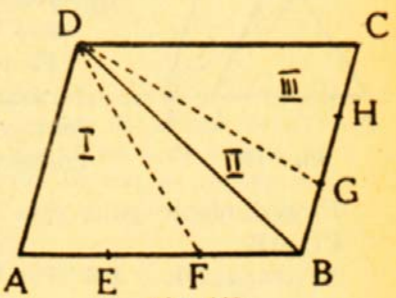


Fig. 148

Parte I= $\frac{2}{3}$ del semi-paralelógramo = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$ del # **ABCD**

Parte II= $\frac{2}{3}$ del semi-paralelógramo = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$ del # **ABCD**

Parte III= $\frac{2}{3}$ del semi-paralelógramo = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$ del # **ABCD**

Luego: I=II=III= $\frac{1}{3}$ del # **ABCD**

PROBLEMA 33.—*Por un punto* **P** *situado sobre uno de los lados de un △* **ABC**, *trazar una transversal que lo divida en dos partes equivalentes.*

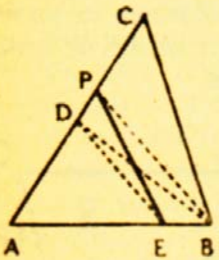


Fig. 149

Solución.—Se hace **DA=DC** (Fig. 149).

D(↔)B

Resulta △**DBA**=△**DBC** (igual base y altura).

El problema se reduce a transformar el △**DBA** en otro equivalente de base **AP** y en el cual se conserve el ∢**A.** (Problema 20).

Procedimiento para esta transformación:

P(↔)B.

Se traza: **DE** ‖ **PB** (Por **D**).

P(↔)E

△**PEA**=△**DBA**= $\frac{1}{2}$ △**ABC** = cuadril. **PEBC**

Demostración.—Los △s **PEA** y **DBA** tienen:

△**EDA** común.

△**DEP**=△**DEB** (Igual base **DE** e igual alt., dist. ‖s).

Luego: △**PEA**=△**DBA** etc.

2.ª Solución del problema 33.— (Fig. 150).

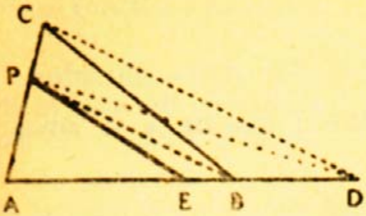


Fig. 150

Primero se transforma $\triangle$**ABC** en otro equivalente **ADP** de base **AP**.

P(↔)B

Se prolonga **AB→B**

Se traza: **CD**||**PB**

P(↔)D.

En seguida se divide $\triangle$**ADP** en dos partes equivalentes por una recta que parta de **P.** (Problema 30).

Se hace: **EA=ED.**

P(↔)E.

Resulta $\triangle$**AEP**=cuadril. **PEBC.**

Demuéstrese.

NOTA.—En la construcción precedente y en muchos otros casos, puede suceder que una parte de la transversal divisoria **PE** caiga fuera de la figura que se trata de dividir. Para colocarla enteramente en el interior de ella, se emplea el siguiente procedimiento.

1.er Ejemplo: (Fig. 151).

Sea **ABCDE** una figura y **PF** una transversal divisoria con una parte fuera de la figura.

Supóngase que la parte **APFE** es igual a la mitad **de ABCDE.**

Se trata de trazar desde **P** otra transversal dentro de la figura, de modo que la mitad del polígo-

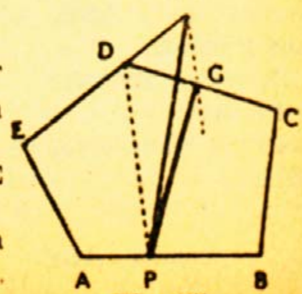


Fig. 151

no **ABCDE** quede totalmente en el interior de él.

Se une **P** con **D** (Vértice más próximo a **F**).

Se traza **FG** $\parallel$ **DP**. (Por **F**).

P($\leftrightarrow$)**G**.

PG=transversal pedida

Dem.) $\triangle$**DPG**=$\triangle$ **DPF** (Misma base **DP**, e = altura: dist. $\parallel$s. **DP** y **FG**).

APDE=**APDE** (Parte común).

$\triangle$**DPG**+**APDE**=$\triangle$**DPF**+**APDE**.

Luego: **APGDE**=**APFE**=½ polígono.

2ª Ejemplo.—Problema 33. (2ª Solución).— En que una parte de la transversal divisoria queda fuera del $\triangle$ **ABC**. (Fig. 152).

$$\triangle \mathbf{EPA} = \frac{1}{2} \triangle \mathbf{ADP} = \frac{1}{2} \triangle \mathrm{ABC}$$ (Léase 2ª Sol. del probl. 33).

Para introducir **PE** dentro de $\triangle$**ABC**, se une **P** con **B**.

Se traza: **EF** $\parallel$ **PB**.

P($\leftrightarrow$)**F**.

PF = transversal pedida.

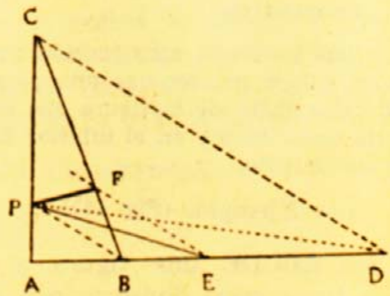


Fig. 152

$$\text{cuadril. } \mathbf{ABFP} = \triangle \mathbf{AEP} = \frac{1}{2} \triangle \mathbf{ABC}.$$

Demuéstrese.

PROBLEMA 34.—*Dividir un △ en* **n** *partes iguales equivalentes por medio de transversales que parten de un punto* **P** *situado sobre uno de los lados.*

Solución.—(Fig. 153) Se divide la base **AB** en n partes iguales, por ej.: 5 partes iguales.

Los puntos de división **D, E, F, G,** se unen con el vértice C.

Se obtienen 5 △s equivalentes. (Problema 30).

C/u de estos 5 △s se transforma en otro equivalente que tenga el vértice en **P.** (Problema 11).

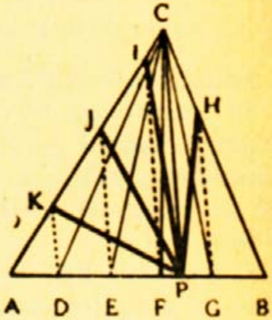


Fig. 153

P(↔)C.

Por los puntos de división de la base **D, E, F, G,** se trazan ||s a **CP.**

Resultan los puntos **K, J, I, H,** que unidos con **P** dan las transversales divisorias.

Demostración.—Los △s **APK** y **ADC** son equivalentes; en efecto, tienen parte común: △**DKA.**

y △**KDP**=△**KDC** (Misma base **KD** e igual alt.: vért. **C** y **P** están sobre la misma || a la base **KD**).

Sumando la parte común al △**KDP,** resulta el △ **APK**
Sumando la parte común al △**KDC,** resulta el △**ADC**

Luego: $\triangle \mathbf{APK} = \triangle \mathbf{ADC} = \dfrac{1}{5}\ \mathbf{ABC}$

Demostración.— Igual para las otras partes. Demuéstrese.

PROBLEMA 35.—*Dividir un cuadrilátero dado en* **n** *partes equivalentes por medio de transversales que parten de un punto dado* **P** *situado sobre uno de sus lados.*

Solución.—Sea **ABCD** el cuadrilátero dado. (**Fig. 154**).

Se transforma el cuadrilátero **ABCD** en el △ equivalente **PEF**, que tiene un vértice en **P**. (**Problemas 25 y 24**).

El triángulo **PEF** se divide en **n** partes equivalentes (4 por ejemplo). (**Problema 30**).

Para colocar enteramente dentro del cuadrilátero la transversal divisoria **PI'**, se traza **II'** ‖ **BP** y se une **P** con **I'**.

Las transversales divisorias son **PG, PH, PI'**.

Demuéstrese.

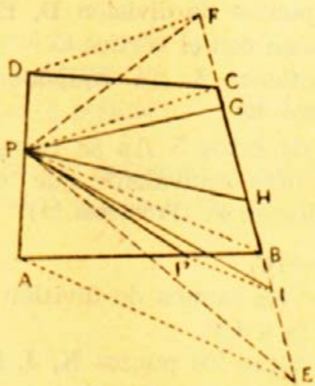


Fig. 154

NOTA.—Para dividir cualquier polígono en forma análoga a la del problema anterior, por transformaciones sucesivas, se transforma dicho polígono en un △ de modo que uno de sus vértices esté situado sobre el punto P. Enseguida se procede como en el problema 35.

PROBLEMA 36.—*Desde un vértice de un △, trazar una línea quebrada (Zig Zag) que divida al △ en cierto número de partes equivalentes.* (**Fig. 155**).

Solución.—Sea ABC el $\triangle$ dado y 6 el número de las partes equivalentes en que se va a dividir.

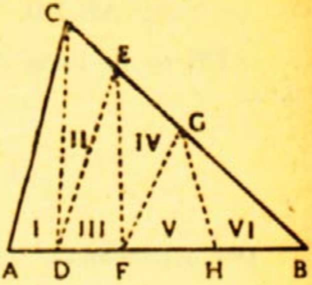


Fig. 155

Se hace: $\mathbf{AD} = \frac{1}{6}$ de **AB.**

Resulta: $\triangle\ \mathbf{ADC} = \frac{1}{6}$ de $\triangle$ **ABC.** y

$\triangle\mathbf{CDB} = \frac{5}{6}$ de $\triangle$**ABC.**

Después se hace: $\mathbf{CE} = \frac{1}{5}$ de **CB.**

Resulta: $\triangle\mathbf{DEC} = \frac{1}{6}$ de $\triangle$**ABC** $(\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{6}$ $\triangle$**ABC**$)$

Se sigue en la misma forma: $\mathbf{DF} = \frac{1}{4}\mathbf{DB}$; $\mathbf{EG} = \frac{1}{3}\mathbf{EB}$; $\mathbf{FH} = \frac{1}{2}\mathbf{FB}$.

Resulta: $\mathbf{I} = \mathbf{II} = \mathbf{III} = \mathbf{IV} = \mathbf{V} = \mathbf{VI} = \frac{1}{6}\triangle\mathbf{ABC}$.

PROBLEMA 37.—*Dividir un* $\triangle$ **ABC** *en dos partes equivalentes por medio de una línea quebrada que, partiendo de un vértice, pasa por un punto* **P** *situado dentro del* $\triangle$. (Fig. 156).

Solución.—A(↔)P.

DC=DB (lado opuesto al vértice **A**).

D(↔)P.

Se traza: **AE**$\|$**PD.**

APE es la línea divisoria pedida.

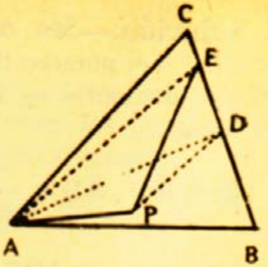


Fig. 156

Demostración.— $\triangle$**ADC**$=\frac{1}{2}\triangle$**ABC** (**D**=punto medio de **BC**).

$\triangle$**AED**$=\triangle$**AEP** (Misma base **AE** e igual alt.).

$\triangle$**AED**$+\triangle$**AEC**$=\triangle$**AEP**$+\triangle$**AEC.**

$\triangle$**ADC**$=$ cuadril. **APEC**$=\frac{1}{2}$**ABC.**

PROBLEMA 38.—*Dado un* $\triangle$ **ABC** *determinar un punto* **P** *tal que, uniéndolo con los tres vértices, quede la figura dividida en tres partes equivalentes.*

Solución.— Se hace:

AD$=$**DE**$=$**EB** (Fig. 57).

Se trazan: **DP**$\|$**AC.**

EP$\|$**BC.**

P, intersección de las dos $\|$s, es el punto pedido.

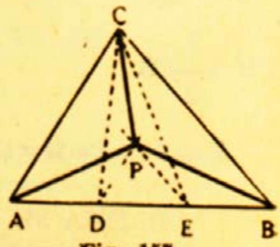


Fig. 157

Demostración.— Se trazan: **CD** y **CE.**

$\triangle$**ADC**$=\triangle$**DEC**$=\triangle$**EBC**$=\frac{1}{3}$**ABC.**

$\triangle$**ADC**$=\triangle$**CAP** (Misma base CA e igual alt.) $= \frac{1}{3} \triangle$ABC).

$\triangle$**EBC**$=\triangle$**CBP**$=$ (Misma base CB e igual alt.) $= \frac{1}{3}$ $\triangle$ABC.

También será $\triangle$**ABP**$= \frac{1}{3} \triangle$**ABC**.

IV—MULTIPLICACION DE AREAS

PROBLEMA 39.—*Se da un paralelógramo* **ABCD**, *construir otro # **n** veces mayor.*

Solución.— Basta hacer n veces mayor la base o la altura del # dado.

PROBLEMA 40.—*Dados un $\triangle$**ABC**, constrúyase otro **n** veces mayor.*

Solución.—Igual a la del probl. 39.

PROBLEMA 41.— *Construir un cuadrado equivalente a la suma de dos cuadrados dados **A** y **B**.*

Solución.— El lado del cuadrado pedido es la hipotenusa de un $\triangle$ rectángulo que tiene por catetos los lados de los cuadrados dados. (Fig. 158).

(Teorema particular de Pitágoras).

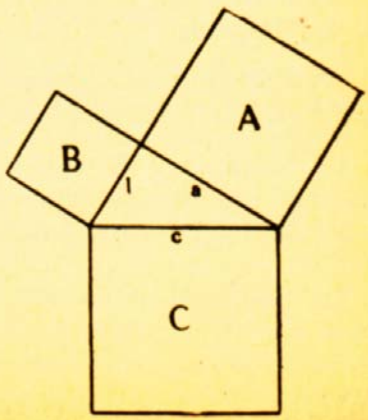


Fig. 158

PROBLEMA 42.—*Construir un cuadrado equivalente a la diferencia de dos cuadrados dados* **C** *y* **A**.

Solución.—Se aplica corolario 1º del Teorema XXXVI. (Fig. 158).

Se construye un △ rect. de hip. **c** y cateto **a**.

PROBLEMA 43.— *Construir un cuadrado que sea el duplo de un cuadrado dado.*

Solución—El cuadrado pedido tiene por lado la diagonal del cuadrado dado. (Fig. 159).

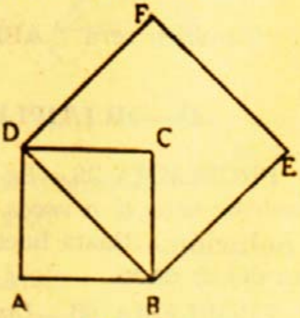


Fig. 159

Demostración.—En el △ rect. **DBC** se aplica el teorema de Pitágoras.

PROBLEMA 44.—*Construir un cuadrado que sea equivalente a la mitad de un cuadrado dado.*

1.a Solución.—El lado del cuadrado pedido es la mitad de la diagonal del cuadrado dado.

2.a Solución.—También se puede dividir el □ dado en dos ▭s equivalentes y uno de ellos se transforma en □ según problema 28.

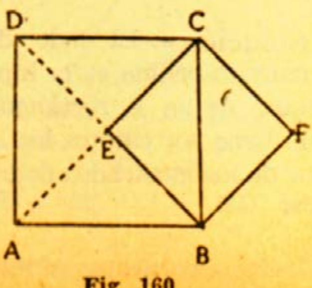


Fig. 160

PROBLEMA 45.—*Construir un cuadrado equivalente al triple de un cuadrado dado.*

Solución.— Se construye un △ rectángulo que tenga por catetos la diagonal y el lado del cuadrado dado.

La hipotenusa de este △ es el lado del cuadrado pedido.

PROBLEMA 46.—*Construir un cuadrado equivalente al quíntuplo de un cuadrado dado.*

Solución.— El lado del cuadrado pedido es la hipotenusa de un △ rectángulo que tiene por catetos respectivamente el lado y el duplo del lado del cuadrado dado.

NOTA.—Para construir un cuadrado que sea, 4, 9, 16, 25... veces mayor que otro, se toma por lado el duplo, el triple, el cuadruplo, el quíntuplo del lado del cuadrado dado.

Si el número no es cuadrado exacto, se descompone en suma ó diferencia de cuadrados exactos. Por ej. $5=4+1$; $3=4-1$; $13=9+4$..., etc.

Para obtener un cuadrado equivalente a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ . . . $\frac{1}{n}$ de un cuadrado dado, se divide este cuadrado en n partes equivalentes, por medio de $\parallel$s a uno de sus lados y uno de los rectángulos así obtenidos se transforma en cuadrado (Problema 28).

PROBLEMA 47.—*Construir un cuadrado equivalente a los $\frac{2}{3}$ de un cuadrado dado.*

Solución.—Se toman los $\frac{2}{3}$ del cuadrado (un rectángulo) y se transforma en cuadrado según problema 28.

PROBLEMA 48.—*Construir un cuadrado equivalente a los $\frac{3}{4}$ de un $\triangle$ dado ABC.*

Solución.—El $\triangle$ se divide en 4 partes equivalentes.

El $\triangle$ equivalente a los $\frac{3}{4}$ de **ABC** se transforma en rectángulo. **(Problema 18).**

Este rectángulo se transforma en cuadrado. **(Probl. 28).**

CAPITULO VII

CALCULO DE LAS AREAS DE LAS FIGURAS RECTILINEAS

§ *1.—MEDICION DE TRAZOS*

Medición de segmentos rectilíneos o trazos.— Si un trazo **"a"** está contenido un número **n** exacto de veces en otro "**b**", se dice que **n a** es *la medida* de **b**, y **"a"** *parte alícuota, divisor, o unidad de medida,* del segundo.

El *trazo que contiene a otro,* cierto número exacto de veces, es *múltiplo* de éste.

Máxima común medida de dos o más trazos es el mayor trazo que está contenido cierto número exacto de veces, en todos ellos.

Para hallar la máxima común medida de dos trazos, se aplica, con el compás de puntas secas o con una tira de papel, el menor sobre el mayor, una, dos, tres... **n** veces el residuo, si lo hay, se aplica sobre el trazo menor; el segundo residuo, sobre el primero, y así en adelante, hasta hallar una longitud que sea medida de la resta anterior. La última longitud empleada es la máxima común medida.

Los trazos que admiten común medida se dicen *conmensurables.*

Dos o más trazos que tienen común medida tienen innúmeras medidas comunes, puesto que cada parte alícuota de la medida común lo es también de cada uno de los trazos.

Dos trazos que no tienen medida común se dicen *inconmensurables.*

Ejemplo de trazos inconmensurables son la diagonal y el lado de un cuadrado.

En este caso se puede llegar a una aproximación tal que el residuo sea cantidad despreciable.

Razón entre dos trazos es el *cociente* indicado o efectuado *de los números* que *expresan la medida de estos trazos,* medidos con la misma unidad de longitud.

Si un trazo contiene la unidad de medida 5 veces y el otro 4 veces, la razón entre los dos trazos es: $\frac{5}{4}$

En lenguaje corriente se suelen enunciar las fórmulas para calcular las áreas de las figuras rectilíneas, simplemente como producto de dos trazos. Así se dirá, por ejemplo, "el área de un paralelógramo es igual al producto de la base por la altura". Entiéndase que sólo se trata del producto de los números que expresan las medidas de esos trazos.

§ *2.—AREA DEL RECTANGULO*

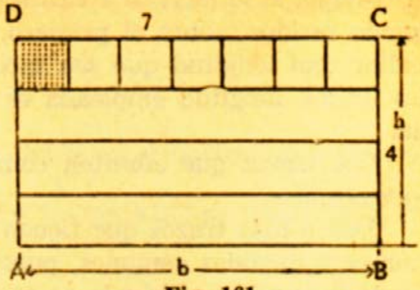


Fig. 161

Aplicando una común medida a los lados **AB** y **BC** de un rectángulo, si se halla, por ejemplo. que cabe 7 veces en **AB** y 4 veces en **BC**, la figura se puede dividir en 4 rectángulos congruentes por medio de paralelas a la base **AB.** Cada uno de estos rectángulos se puede dividir en 7 cuadrados que tienen por lado la unidad de medida.

Tomando por unidad de superficie uno de estos cuadrados, el área del rectángulo se expresará por $7 \times 4 = 28$ unidades de superficie.

El área del rectángulo es igual al producto de dos lados contiguos (base y altura). Abreviando:

$$\boxed{S = b\,h}$$

Al producto se le da la denominación de la unidad de superficie correspondiente a la unidad de longitud empleada para medir los lados: cm^2, dm^2, m^2, etc.

§ *3.—AREA DEL CUADRADO*

a) *En función del lado.*

Siendo el cuadrado un rectángulo de lados iguales, **el área de un cuadrado es igual al producto del lado por sí mismo**. (2ª potencia o cuadrado del lado).

$$\boxed{S = a \times a = a^2}$$

b) *En función de la diagonal.*

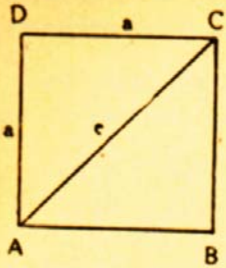


Fig. 162

En el cuadrado **ABCD**, **(Fig. 162)**, se traza la diagonal **AC=e.**

Resulta el $\triangle$**ACD** rectángulo en D. Se aplica teorema particular de Pitágoras.

$$\mathbf{a^2+a^2=e^2}$$
$$\mathbf{2a^2=e^2}$$
$$\mathbf{a^2=\frac{e^2}{2}}$$

De aquí se desprenderá que el **área de un cuadrado, en función de la diagonal, es igual a la mitad del cuadrado de la diagonal.**

§ *4.—AREA DE UN PARALELOGRAMO OBLICUO*

Se ha visto que un paralelógramo oblicuo es equivalente a un rectángulo de misma base y altura. **(Probl. 2.** Transformación de figuras).

Luego: **El área de un paralelógramo oblicuo es igual al producto de la base por la altura.**

$$\boxed{\mathbf{S=b.\ h.}}$$

§ *5.—AREA DEL TRIANGULO*

a) En Función de la base y la altura respectiva.

Por ser un triángulo equivalente a la mitad de un paralelógramo de misma base y altura, **el área de un trián-**

gulo es igual al semiproducto de la base por la altura correspondiente:

$$\boxed{S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}}$$

En general: $$\boxed{S = \frac{bh}{2}}$$

COROLARIO: *El área de un △ rectángulo es igual al semiproducto de los catetos.*

$$\boxed{S = \frac{ab}{2}}$$

b) En función del radio ρ *de la* ⊙ *inscrita.—* (Fig. 163).

△ABC = △COB + △COA + △OAB

$$= \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} + \frac{c\rho}{2}$$

$$\triangle ABC = \rho \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

Pero: $$\frac{a+b+c}{2} = s$$

$$\therefore \triangle ABC = \boxed{\rho \cdot s}$$

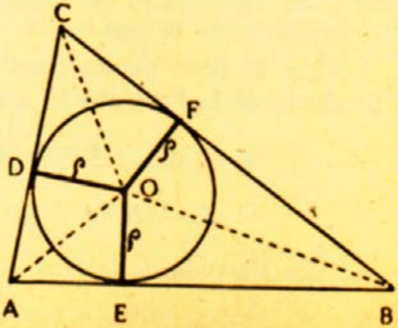


Fig. 163

Resultado que se puede enunciar así:

El área de un $\triangle$ en función del radio de la circunferencia inscrita es igual al producto del radio ρ por el semiperímetro del $\triangle$.

c) Area del $\triangle$ en función del radio de la circunferencia ex-inscrita.

Sea el $\triangle$**ABC y la** $\odot$ **ex inscrita de radio** ρ_c (Fig. 164)

$$\triangle ABC = \triangle BCO + \triangle ACO - \triangle ABO$$

$$\triangle \mathbf{ABC} = \frac{BC \cdot \rho_c}{2} + \frac{AC \cdot \rho_c}{2} - \frac{AB \cdot \rho_c}{2}$$

$$\triangle ABC = \boxed{\rho_c \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

Pero: $$\frac{a+b-c}{2} = \mathbf{s-c}$$

En efecto:

$$\frac{\mathbf{a+b+c}}{2} = \mathbf{s}$$

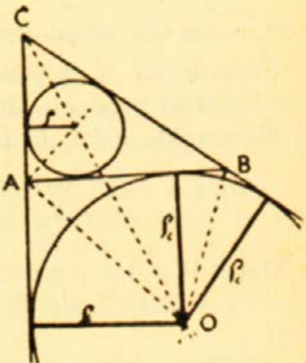


Fig. 164

Restando **c** a los dos miembros de la última igualdad se tiene:

$$\frac{a+b+c}{2} - c = s - c$$

$$\frac{a+b+c-2c}{2} = s - c$$

$$\frac{a+b-c}{2} = s - c$$

Luego: $\triangle ABC = \boxed{\rho_c\ (s - c)}$

Por un procedimiento análogo se pueden obtener las fórmulas:

$$\triangle ABC = \rho_b \cdot \frac{a+c-b}{2} = \rho_b\ (s - b)$$

$$\triangle ABC = \rho_a \cdot \frac{b+c-a}{2} = \rho_a\ (s - a)$$

Resultados que se pueden enunciar:

El área de un △ en función del radio de la ⊙ ex-inscrita es igual al producto del radio por el semi-perímetro del △ disminuído del lado tangente a la ⊙ ex-inscrita.

§ 6.—*AREA DEL ROMBO EN FUNCION DE LAS DIAGONALES* (1)

Sea **ABCD** (Fig. 165) un rombo y **AC=e** y **BD=f**, sus diagonales.

Area **ABCD** = △**ACD** + △**ACB**=2 △ **ACD.**

$$\triangle ACD = \frac{ef}{4}$$

$$2\triangle ACD = \frac{ef}{4} \cdot 2 = \frac{ef}{2}$$

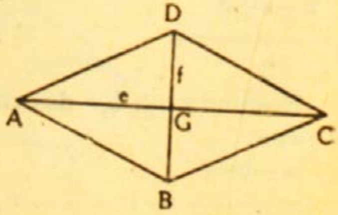


Fig. 165

(1) Ver área de un # oblicuo, pág. 175.

Luego área rombo **ABCD** = $\boxed{\dfrac{ef}{2}}$

El área de un rombo es igual al semiproducto de las diagonales.

§ 7.—*AREA DEL TRAPECIO*

Por ser el trapecio equivalente a un $\triangle$ que tiene la misma altura que él y cuya base es igual a la suma de las bases del trapecio (Teorema XXXII), se puede enunciar:

El área de un trapecio es igual al producto de la semi-suma de las bases por la altura.

$$\boxed{S_{\text{trap.}} = \frac{1}{2}(a+c)\ h}$$

Como la mediana del trapecio es igual a la semi-suma de las bases resulta el siguiente corolario:

COROLARIO.— *El área de un trapecio es igual al producto de su mediana por la altura.*

$$\boxed{S_{\text{trap.}} = m \cdot h}$$

§ 8.—*AREA DE UN POLIGONO REGULAR DE* n *LADOS*

Polígono regular es el que tiene sus lados y ángulos iguales. (Fig. 166).

Radio de un polígono regular es la recta que une el centro con uno de sus vértices. **OA**=**r.** (Fig. 166).

Apotema de un polígono regular es la $\perp$ trazada desde el centro a uno de sus lados. Se designa por ρ.

OF es un apotema.

Cálculo del Area.—Sea el polígono regular **ABCDE.**

Se trazan los radios.

El polígono queda dividido en **n** △s congruentes isósceles.

Area de uno de los △s:

$$\cancel{\triangle \mathbf{ABO} = \frac{2}{a}\rho}.$$

$$\triangle ABO = \frac{a}{2} \cdot \rho$$

$$\text{Pol} \cdot \mathbf{ABCDE} = \frac{an}{2} \cdot \rho$$

$$\text{Area } \mathbf{ABCDE} = s \cdot \rho$$

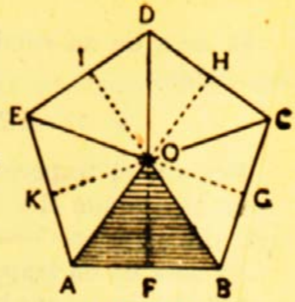


Fig. 166

Luego: **El área de un polígono regular de n lados es igual al producto del semiperímetro por su apotema.**

§ 9.—*AREA DE UN POLIGONO IRREGULAR (Polígono de cualquier forma y de cualquier número de lados).*

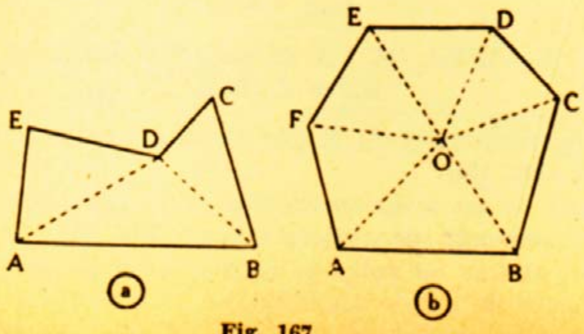


Fig. 167

Para calcular su área:

1.o Se puede descomponer el polígono en △s por medio de diagonales que parten de un mismo vértice.

O bien por medio de rectas que unen los vértices con un punto del interior del polígono (Fig. 167 a y b).

Se calculan las áreas de dichos △s según las reglas establecidas en la pág. 173 y enseguida se suman.

2.o En el polígono se puede trazar una diagonal o cualquier transversal y, desde los vértices se trazan ⊥s a esta línea divisoria.

El polígono queda así descompuesto en △s y trapecios. (Fig. 168).

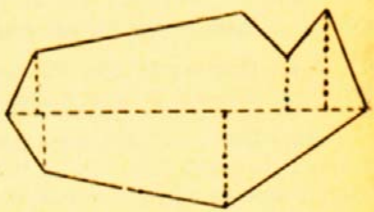


Fig. 168

En seguida se calculan las áreas de las distintas figuras y se suman.

3.o Se pueden trazar, por los vértices del polígono, ||s a uno de los lados hasta que corten otra vez el perímetro.

El polígono queda también descompuesto en △s y trapecios cuyas alturas están situadas sobre la misma recta.

Si el polígono es inaccesible se encierra en una figura conocida; se calcula el área de esta figura, y de ella se resta el área de las partes que se han tomado de más.

Métodos análogos sirven también para determinar aproximadamente las áreas de figuras curvilíneas. El perímetro curvilíneo se divide en partes tan pequeñas que cada arco se puede considerar como rectilíneo.