GEOMETRIA
SEGUNDA PARTE

GEOMETRIA

PROF. OMER CANO

SEGUNDA PARTE
Corresponde al quinto año de Humanidades

SEGUNDA PARTE

Correspondiente al

QUINTO AÑO DE HUMANIDADES

PROGRAMA

Razón entre dos trazos — Igualdad de esta razón con la razón de los números que los miden con la misma unidad — Razón de dos vectores sobre un eje — Igualdad de esta razón y la de sus medidas algebraicas — Razón de dos vectores paralelos — Segmentos o trazos proporcionales — Teorema de Thales relativo a la proporcionalidad de trazos en un sistema de paralelas y transversales — Recíproco — División interior y exterior de un trazo en una razón dada — División armónica — Problemas de aplicación — Semejanza de triángulos — Tres casos — Relaciones métricas en el triángulo rectángulo y en el círculo — Teorema de Euclides y Pitágoras — Potencia de un punto respecto de una circunferencia — Homotecia — Razón de homotecia — Figuras homotéticas: Recta, segmento, vector, semirrecta, ángulos homotéticos — Divisiones homotéticas — Recíprocos — Triángulos homotéticos — Problemas de aplicación — Polígonos semejantes — Perímetros y áreas — Comparación de ellos — Polígonos regulares — Perímetros — Areas de los más elementales — Problemas de aplicación — Perímetro y área del círculo.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.—

Vectores: Definición — Vectores equipolentes — Vectores opuestos — Suma y diferencia de vectores — Razón de dos vectores paralelos — Proyección ortogonal.

CAPITULO VIII

SEGMENTOS PROPORCIONALES

§ 1.—*NOCIONES GENERALES SOBRE VECTORES*

Segmento rectilíneo.— *Segmento rectilíneo* es la parte de recta comprendida entre dos puntos, o bien, la distancia que hay entre dos puntos de una misma recta. Ej.: Segmento **AB,** (Fig. 169).

Eje orientado.— Si nos dan las posiciones de dos puntos A y B, la recta que los une, determina la dirección y la distancia o longitud que media entre ellos. No así su sentido. En efecto, no se sabe si hay que recorrer dicha distancia de A hacia B o bien de B hacia A. En la práctica se distinguen estos dos *sentidos* o *modos opuestos* de recorrer la recta por los signos + y — cuando convenimos en fijar como *positivo* el recorrido de izquierda a derecha y como *negativo* el de derecha a izquierda. Tal recta recibe el nombre de *eje orientado.*

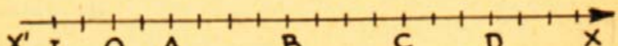


Fig. 169

Eje orientado *es toda recta indefinida X'X en la cual se ha elegido un punto O, que se toma como origen, y se ha fijado un sentido positivo y otro negativo* (Fig. 169).

El sentido positivo se indica generalmente por medio de una flecha.

Magnitudes escalares y vectoriales.— Las magnitudes que se presentan al estudiar el mundo físico son de dos clases. Las unas quedan completamente definidas cuando se conoce *la unidad* que se emplea y el *número que expresa su medida.* Tales magnitudes se llaman *escalares.* Ej.: La masa de un cuerpo, su volumen, su densidad, su temperatura, etc.

Hay otras magnitudes llamadas *vectoriales* que, para quedar perfectamente definidas es preciso conocer, además del número que expresa *su medida, su dirección* y *sentido.* Ej.: la velocidad de un cuerpo: no basta decir que ella es de 60 [Km/h]; habrá que expresar su dirección, v. gr.: vertical, y su sentido v. gr.: de arriba hacia abajo; lo mismo se podría decir de una fuerza, de una aceleración, etc...

Las *magnitudes vectoriales* se representan, gráficamente, por *vectores* (flechas), es decir, *segmentos rectilíneos* en los cuales están determinados su *longitud, dirección* y *sentido.*

Vectores.—Si en la fig. 170 el segmento rectilíneo **AB** se supone recorrido por un móvil que va de **A** hacia B, dicho segmento tiene el nombre de vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$; el punto de partida **A** del móvil es el origen del vector, el punto de llegada **B,** es el extremo.

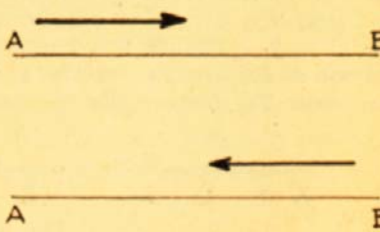


Fig. 170

Si al contrario, el móvil se moviera de **B** hacia **A,** tendríamos el vector $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$; B sería *el origen* y A *el extremo.*

Un vector es, pues, esencialmente una *magnitud geométrica* y no un número.

Vector, *es un segmento rectilíneo en el cual están determinados su longitud o magnitud, su dirección y su sentido.*

Más brevemente podríamos decir: **Vector** *es un segmento de recta dirigido.*

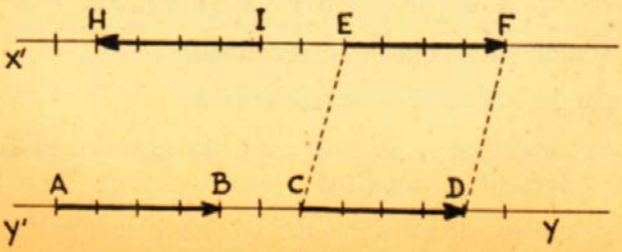
El vector que se elige para comparar las longitudes de los diversos vectores considerados, se llama **vector unidad o vector unitario.**

Un vector se representa por dos letras que designan sus extremos y por una pequeña flecha sobrepuesta a ellos.

La flecha se refiere a la propiedad *característica del vector* de representar, además de una magnitud determinada, una *dirección* y *sentido* bien definidos.

Por convenio la primera letra indica el origen del vector. Así, por ejemplo, el vector cuyo origen es el punto **A** y cuyo extremo es el punto **B**, se representa por el símbolo $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, y se lee vector **AB.**

La recta indefinida a la cual el vector pertenece, se llama *soporte* del vector.



171a

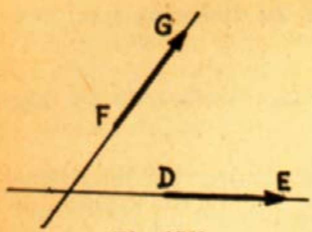


Fig 171b

Dos o más vectores pueden pertenecer: a) *a un mismo soporte*. Ej.: AB y CD. (Fig. 171 a).

b) *a dos soportes* ||s. $\overrightarrow{IH}$ y $\overrightarrow{AB}$. (Fig. 171a)

c) *a dos soportes no* ||*s*.: Ej.: $\overrightarrow{FG}$ y $\overrightarrow{DE}$. (Fig. 171b).

Dos vectores de soportes ||s, se dice que *son paralelos*. Ej.: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ (Fig. 172).

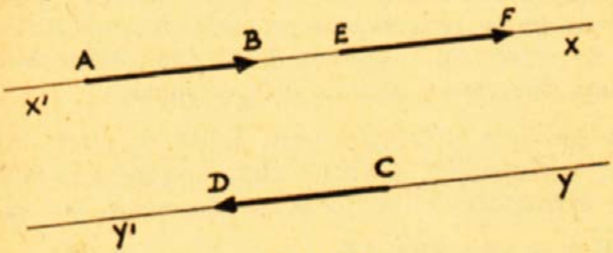


Fig. 172

Dos vectores que pertenecen a un mismo soporte se dice que son *colineales*. Ej.: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ (Fig.). (Fig. 172).

Un vector puede quedar determinado:

a) *por su origen A y su extremo B;*

b) *por su origen A, su dirección,* (su soporte), *su sentido en el soporte y su magnitud.*

Los vectores situados en un *mismo plano* se llaman ***coplanarios.***

Vector libre, Vector deslizante, Vector fijo.— Un **vector libre** es un vector que está definido por *su dirección, su sentido* y *su magnitud. Su origen es arbitrario.* Puede ser reemplazado por un vector *equipolente* cualquiera.

Un **vector deslizante** es el que está definido por su *soporte,* su *sentido* y su *magnitud.* Puede ser reemplazado por un vector equipolente colineal.

Un **vector libre** o **deslizante** pueden designarse por una sola letra $\vec{v}$ o $\vec{V}$.

Un **vector fijo** es un vector cuyo *origen, dirección, sentido* y *magnitud* están perfectamente definidos. No puede ser reemplazado por ningún otro vector.

Valor absoluto y valor algebraico de un vector.— Magnitud o longitud, o valor absoluto, o módulo de un vector, *es el número que expresa o mide su longitud en función de la unidad de medida.*

La magnitud o valor absoluto de un vector es una cantidad *escalar* porque el vector está privado de dirección y sentido.

El valor absoluto de un vector $\overrightarrow{AB}$ se representa por el símbolo $|AB|$ o simplemente por AB. Así, en Fig. 169, se puede escribir: $|AB|=|BA|=AB=4$.

Equivalente numérico o valor algebraico de un Vector *es el número que expresa o mide su longitud,* pero que está *afectado* por el signo + o —, según que el sentido del vector sea el sentido positivo o el sentido negativo del eje al cual pertenece.

---

(1) Ver más adelante, pág. 215, Vectores equipolentes.

El equivalente numérico del vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ (Fig. 169) es $+4$ y del vector $\overrightarrow{DC}$ es -3. Para indicar el equivalente numérico o medida algebraica de un vector, se emplea el símbolo **AB**, o sea, dos letras mayúsculas con un pequeño trazo

lo $\overline{\mathbf{AB}}$, o sea, dos letras mayúsculas con un pequeño trozo encima.

En resumen: un vector $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, soportado por un eje orientado X'X, se caracteriza o está definido por cuatro elementos:

a) **su origen A:** punto de arranque o de partida del vector; b) **su dirección:** es la del eje al cual pertenece el vector o la del que le es $\|$; c) **su sentido:** el de su origen A hacia su extremo B; d) **su magnitud:** la longitud AB o la distancia entre los puntos A y B.

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ es el vector mismo (magnitud geométrica no numérica); $|\mathbf{AB}| = \mathbf{AB}$ es su valor absoluto o módulo (número aritmético, sin signo); **AB** es su equivalente numérico o su medida algebraica (número algebraico positivo o negativo).

En la Fig. 169 la medida Algebraica $\overline{OB}$ del vector $\overrightarrow{OB}$ que separa el origen O del punto B, se llama *abscisa* del punto B del eje orientado X X'.

La abscisa del punto B es $\overline{OB} = +6$

" " " " C es $\overline{OC} = +10$

" " " " I es $OI = -2$

A todo punto B de un eje orientado corresponde un número $+6$ bien determinado, que es su abscisa.

Recíprocamente, a todo número algebraico dado (—2), por ejemplo, corresponde un punto I bien determinado.

Por tal motivo se dice que hay entre cada punto del eje orientado y su valor algebraico correspondiente, una relación *biunívoca*.

Vectores equipolentes.— Se llaman *vectores equipolentes dos vectores de igual magnitud, de misma dirección y cuyos soportes son* ||*s o se confunden.*

En la Fig. 171a, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes.

En el # CDFE son equipolentes los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$; también $\overrightarrow{CE}$ y $\overrightarrow{DF}$ (Fig. 171a).

Dos vectores equipolentes pueden tener un mismo soporte ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$) o soportes paralelos ($\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$) (Fig. 171a).

La equipolencia de dos vectores se indica por la igualdad vectorial: $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=\overrightarrow{\mathbf{CD}}=\overrightarrow{\mathbf{EF}}$.

Vectores opuestos.–*Son los vectores de igual longitud soportados por un mismo eje pero de sentidos contrarios.*

Ejemplo: Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ son opuestos (Fig. 171 a). Del mismo modo son opuestas sus medidas algebraicas: $\overline{AB}=-\overline{CB}$.

Vectores consecutivos.—Dos vectores se dicen *consecutivos* cuando el origen del segundo coincide con el extremo del primero, el origen del tercero con el extremo del segundo, y así sucesivamente. Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, (Fig. 169). son consecutivos.

Suma geométrica de vectores consecutivos.— Se llama *suma geométrica* o *resultante* de varios vectores consecutivos soportados por un mismo eje, el vector que tiene por origen, el origen del primero, y por extremo el extremo del último.

Segun la definición precedente, en fig. 173, resultan las igualdades geométricas siguientes:

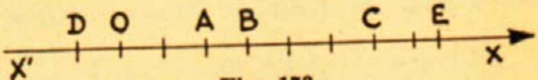


Fig. 173

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}:\ \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}.$$

Esta definición se extiende a un número cualquiera de vectores:

$$AB+BC+CA=AA=0;$$

$$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DD}=0$$

En los dos últimos casos la resultante se reduce a un punto: es nula.

Los vectores $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EA}$,... etc.... se llaman *vectores componentes*.

Valor algebraico de la resultante de Vectores consecutivos.— *El valor algebraico o algébrico o equivalente numérico de la resultante de dos vectores consecuti-*

vos de igual dirección, es igual a la suma de los valores algebraicos de los vectores componentes. (Teorema de Chasles).

Fig. 174

Sean los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ su resultante será el vector $\overrightarrow{AC}$.

Siempre se tendrá entre sus valores algebraicos la relación: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Se supone en 1.er lugar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen mismo sentido, y luego que tienen sentido contrario. Resultan los cuatro casos posibles indicados por la fig. 174:

En (1) se tiene: $\overline{AB} + \overline{BC} = (+7) + (+3) = +10 \therefore \overline{AC} = +10$

En (2) se tiene: $\overline{AB} + \overline{BC} = (-7) + (-3) = -10 \therefore \overline{AC} = -10$

En (3) se tiene: $\overline{AB} + BC = (+7) + (-3) = +\ 4 \therefore \overline{AC} = +\ 4$

En (4) se tiene: $AB + BC = (-7) + (+3) = -\ 4 \therefore AC = -\ 4$

Relación de Chasles.— La igualdad anterior $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$ se llama relación de Chasles. Agregando $\overline{CA}$ a los dos miembros resulta: $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AC}+\overline{CA}=\overline{AA}$ (Resulta nula) o sea que: $AB+BC+CA=0$.

Es una segunda forma de la misma relación.

La relación de Chasles se puede extender a un número cualquiera de vectores. Así, si colocamos en un eje X'X (Fig. 169) 5 puntos A, I, C, B, D, *en un orden cualquiera* se puede escribir: $\overline{AI}+\overline{IB}+\overline{BD}+\overline{DC}=\overline{AC}$ y si se vuelve al punto de partida: $\overline{AI}+\overline{IB}+\overline{BD}+\overline{DC}=0$.

Aplicaciones de la relación de Chasles.— a) *La medida algebraica de un vector cualquiera $\overrightarrow{AB}$ es igual a la abcisa del extremo B disminuida de la abscisa del origen A.*

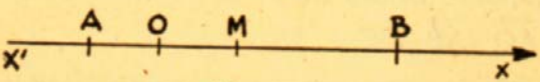


Fig. 175

Sea el vector $\overrightarrow{AB}$ (Fig. 175). La abscisa de A es $\overline{OA}$. La abscisa de B es $\overline{OB}$.

Se tendrá que: $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$.

En efecto: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$.

$\therefore \qquad \overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}$. Se reemplaza AO por su igual $-\overline{OA}$.

Luego: $\qquad \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$.

b) *La abscisa del punto medio M de un vector AB es igual a la semi suma de las abscisas del origen A y del extremo B de dicho vector.*

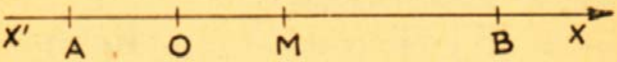


Fig. 176

Sea el vector $\overrightarrow{AB}$ y M su punto medio.

Resulta: $\qquad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \therefore \overline{AM} = \overline{MB}$

Aplicando demostración anterior a cada uno de los miembros de la última ig. se tiene: $\overline{OM}-\overline{OA}=\overline{OB}-\overline{OM}$

$$\text{u} \quad \overline{OM}+\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{OB}$$

$$\therefore 2OM \qquad =\overline{OA}+\overline{OB}$$

$$\therefore \quad \overline{OM} = \frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}$$

Suma geométrica o composición de vectores.— Para sumar dos o más vectores, *es indispensable que éstos sean homogéneos*, es decir, que representen cantidades de significación análoga: velocidades, fuerzas, desplazamientos, etc.

Sean los vectores $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{OC}}$. (Fig.177).

Para *sumar estos vectores,* se desplazan los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ paralelamente a sí mismos y en igual sentido hasta que ocupen, respectivamente, la posición $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{DF}$. (Vectores equipolentes).

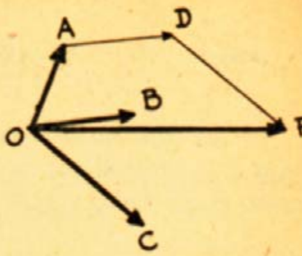


Fig. 177

Quedan, así, los vectores uno a continuación del otro, coincidiendo el origen del uno con el extremo del anterior. El vector $\overrightarrow{OF}$ que une el origen del primero con el extremo del último de los vectores componentes, es la resultante de los tres vectores. El vector $\overrightarrow{OF}$ es la suma geométrica de los tres vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$; se anota así: $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Resta de vectores.—Restar el vector $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ de otro $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ es lo mismo que sumar con $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ el vector opuesto de $\overrightarrow{\mathbf{b}}$. (Fig. 178a)

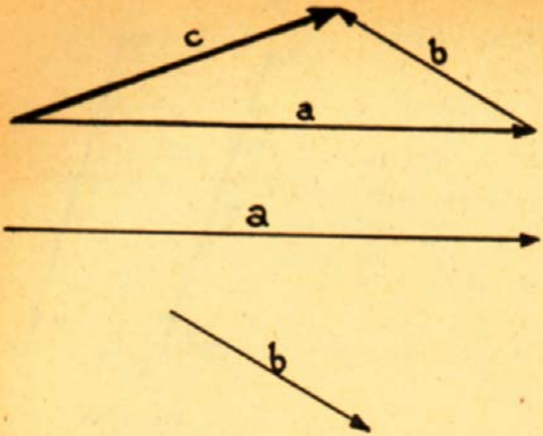


Fig. 178a

El vector $\vec{c}$ es la resultante

Se puede observar que el minuendo $\vec{a}$ es igual al sustraendo $\vec{b}$ sumado con la diferencia $\vec{c}$.

Producto de un vector por un número algebraico (o escalar) k.— Dados un vector $\overrightarrow{AB}$ y un escalar (o número algebraico), *se llama producto del vector* $\overrightarrow{AB}$ *por el escalar k, un vector* $\overrightarrow{AC}$:

de mismo origen y de mismo soporte que el vector $\overrightarrow{AB}$;
de mismo sentido que el vector $\overrightarrow{AB}$ *si k es positivo;*
de sentido contrario si k es negativo y cuya magnitud es la de AB multiplicada por $|k|$. (Fig. 178b).

Se indica $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

Ejemplo: $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB}$ $(k=2)$

$$\mathbf{AE} = -\frac{3}{2}\,\mathbf{AB}$$

Si $k = -1$, el vector

$\overrightarrow{AF} = (-1) \cdot \overrightarrow{AB}$

o sea: $\overrightarrow{\mathbf{AF}} = -\overrightarrow{\mathbf{AB}}$

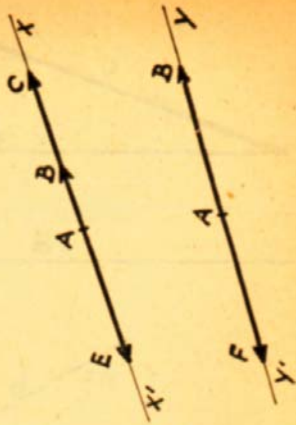


Fig. 178b

Si el vector dado es un vector deslizante o un vector libre $\vec{V}$, el vector $k\vec{V}$ es también un vector deslizante o un vector libre.

§ 2.—*RAZON Y PROPORCIONALIDAD DE TRAZOS Y VECTORES*

Se llama *razón*, en general, el *cociente* entre dos cantidades homogéneas.

Ej.: Eº. 10 : Eº. 5.

Razón entre dos trazos o segmentos rectilíneos *es el cociente entre los números que expresan las longitudes de dichos trazos, cuando se han medido con la misma unidad.*

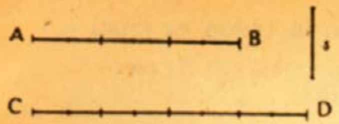


Fig. 178c

Ej.: Los trazos AB y CD están en la razón de 3 : 4 porque la unidad de longitud δ cabe 3 veces en AB y 4 veces en CD. (Fig. 178c).

Razón de dos vectores.— La razón entre dos vectores *pertenecientes a un mismo eje orientado o a ejes* $\|$*s, es igual al cuociente entre los números que expresan sus medidas algebraicas.*

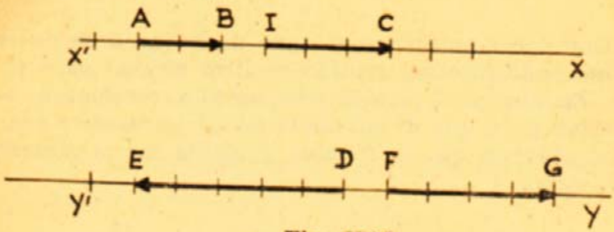


Fig. 178d

Si los vectores tienen el *mismo sentido, la razón es positiva* (de signo más): $\dfrac{\overrightarrow{IC}}{\overrightarrow{FG}} = + \dfrac{3}{\overrightarrow{4}}$.

Si los vectores tienen *sentido contrario,* la razón será *negativa* (de signo —): $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{FG}} = - \dfrac{2}{\overrightarrow{5}}$ (Fig. 178d).

Si los vectores son equipolentes, la razón es igual a la unidad: $\dfrac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{EF}} = 1$ (Fig. 171a).

Si los vectores son opuestos, la razón es igual a

$$-1 : \frac{\overrightarrow{IH}}{\overrightarrow{EF}} = -1 \quad \text{(Fig. 171a).}$$

Cuando los *vectores son* $\|$*s,* hay que referirlos a un mismo eje orientado $\|$ a ellos. Este eje puede coincidir con la recta portadora de uno de los vectores (soporte del vector).

Conviene hacer notar que el **signo de la razón** de dos vectores es **independiente** del sentido positivo elegido para el eje orientado. En efecto, si cambia este sentido, cambiarán, también, de signo cada uno de los términos de la razón, o sea, los números algebraicos que la forman, y así, la razón conservará su mismo signo.

La igualdad de dos razones se llama *proporción.*

Ej.: $\frac{E^o.\ 10}{E^o.\ 5} = \frac{E^o.\ 6}{E^o.\ 3}$ o también: $\frac{8\ cm.}{2\ cm.} = \frac{12\ m^2}{3\ m^2}$

Refiriéndose a trazos o vectores se dice que:

"Dos segmentos rectilíneos o dos vectores o dos trazos son proporcionales a otros dos, *cuando la razón que existe entre los dos primeros, es igual a la razón entre los dos últimos".* (1)

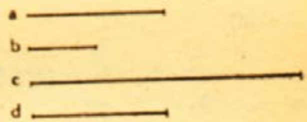
(1) La expresión "razón entre 2 trazos" con frecuencia empleada para abreviar el lenguaje, debe entenderse que se trata de la razón entre los números que expresan las longitudes de dichos trazos medidos con la misma unidad.

La igualdad de estas dos razones, forma una *proporción entre trazos.*

Ej.: Si se dan los 4 trazos siguientes:

a=4 (cm.); b=2 (cm.); c=6 (cm.); d=3 (cm.)

La razón de los dos prime·



La razón de los dos últimos:

$\frac{c}{d}$, vale también, 2.

Fig. 179

Resulta, entonces, la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

Se dice que los trazos **a** y **b** son *proporcionales* con **c** y **d.**

En general los segmentos a, b, c, d, e... etc., son proporcionales a los segmentos a', b', c', d', e'... si se tiene: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} \ldots$

Del mismo modo se dice que los segmentos a, b, c, son proporcionales a los números 3, 4, 5, por ej., si resulta:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$$

En toda proporción el 2º y 3.er términos, se llaman *medios,* y el 1º y 4º, se llaman términos *extremos.*

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, **b** y **c** son los términos medios y **a** y **d** son los extremos.

Si en esta última proporción los 4 términos son trazos de distintas longitudes, cada uno de los términos de la proporción, es una *cuarta proporcional geométrica* = 4ª p. g.

Si se dan tres trazos:

a=4 (cm); **b**= 2 (cm); **e**=1 (cm), se puede formar la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{e}$$ (Cada una de las razones vale 2).

En esta última proporción el trazo **b** figura como consecuente de la 1ª razón y se repite en el antecedente de la 2ª razón (términos medios iguales). Esto se puede expresar diciendo que el trazo **b** es una *media proporcional geométrica* entre los dos trazos distintos **a** y **e**.

Cada uno de estos dos últimos trazos recibe el nombre de 3ª *proporcional geométrica*, en la proporción propuesta (3ª p. g.).

DEFINICION.—*Un trazo es la media proporcional geométrica* (M. p. g. o ½ p. g.) *entre otros dos, cuando es medio repetido en una proporción, cuyos extremos son los otros dos.*

REPASO DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES.—Se pueden aplicar a una proporción cuyos términos son trazos, las mismas propiedades de las proporciones, estudiadas en el programa de Algebra de 4º Año.

I.—En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ej.: En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

resulta: bc=ad.

Recíprocamente la igualdad de dos productos se puede transformar en proporción.

Ej.: $pq = mm$

$\frac{m}{p} = \frac{q}{n}$ Los factores de uno de los productos son términos medios y los del 2º producto, términos extremos.

II.—En toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se puede:

1º *Alternar los medios*: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2º *Alternar los extremos*: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

3º *Invertir las razones*: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

4º *Permutar las razones*: $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

III.—En toda proporción la suma o diferencia de los términos de la 1ª razón es a su consecuente o antecedente, como la suma o diferencia de los términos de la 2ª razón es a su consecuente o antecedente.

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}\\[2ex]\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{c+d}{c}\end{array}\right\}\quad\text{(Componer una proporción)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}\\[2ex]\dfrac{a-b}{a}=\dfrac{c-d}{c}\end{array}\right\}\quad\text{(Descomponer una proporción)}$$

IV.—En toda proporción la suma de los términos de la 1ª razón es a la diferencia de los mismos, como la suma de los términos de la 2ª razón es a su diferencia.

En la proporción $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, resulta:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\qquad\text{(Componer y descomponer)}$$

V.—En una serie de proporciones (serie de dos o más razones iguales) *la suma algebraica de los antecedentes es a la suma algebraica de los consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente respectivo.*

Si se tiene: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}\ldots$

Resulta: $\dfrac{a+c+e+\ldots}{b+d+f+\ldots}=\dfrac{a}{b}=\ldots$

§ 3.—DIVISION DE UN TRAZO EN UNA RAZON DADA. DIVISION ARMONICA.

PROBLEMA 8.—*Encontrar el máximo común divisor de dos números dados.*

Para encontrar el **m. c. d.** de dos números, se divide el mayor por el menor.

Si no hay residuo, el número menor es el m. c. d. de ambos.

Si queda residuo, se divide el divisor por este residuo; en seguida el primer residuo por el segundo, el segundo por el tercero, y así sucesivamente, hasta que no quede residuo.

El último divisor empleado es el **m. c. d.** buscado.

Ej.: encontrar m. c. d. entre 195 y 30.

$$\begin{array}{l} 195 : 30 = 6 \\ \ \ 15 \\ \ \ 30 : 15 = 2 \\ \ \ 0 \end{array}$$

el m. c. d. es 15.

PROBLEMA 9.—*Encontrar la máxima medida común para dos trazos dados.* (Fig. 180).

El procedimiento es análogo al que se emplea en aritmética para encontrar el **m. c. d.** de dos números dados.

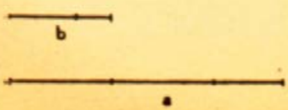


Fig. 180

El trazo menor **b** se aplica sobre el mayor **a** tantas veces como sea posible.

El residuo se aplica sobre el trazo menor **b**; el nuevo residuo si lo hay, sobre el anterior, hasta que no quede residuo; el último trazo que se aplica es la medida común.

Trazos conmensurables e inconmensurables.— En el problema precedente, los trazos tienen una común medida: los trazos son *conmensurables.*

Trazos inconmensurables son aquellos trazos que no tienen una común medida.

Por más que se prolongue la operación, nunca un residuo estará contenido exactamente en el anterior.

Citemos como ejemplo la relación entre el lado de un cuadrado y la diagonal. (Fig. 181).

DB—DA=EB

DA cabe 1 vez en DB y sobra EB.

Se traza EF⊥EB.

entonces EF=EB=AF.

EB en AB cabe 2 veces y sobra GB.

Se traza GH⊥GB.

GH=HE=GB.

GB cabe 2 veces en EB y sobra IB, y así sucesivamente...

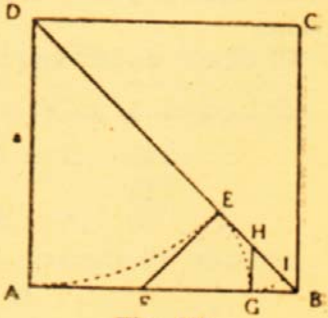


Fig. 181

TEOREMA XXXVIII.—**"En un trazo AB existe un solo punto cuyas distancias a los extremos A y B del trazo están en una razón dada".** (Fig. 182).

Dem.—Sea **C** ese punto.

y supóngase que $\frac{CA}{CB} = \frac{3}{4}$

Si existiera otro punto **C'**, tal que

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{3}{4}$$

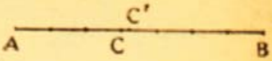


Fig. 182

se tendría

$$\frac{CA}{CB} = \frac{C'A}{C'B}$$

y componiendo

$$\frac{CB}{CA+CB} = \frac{C'B}{C'A+C'B}$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AB}{C'B}$$

CB=C'B . . . **C** y **C'** se confunden. Luego, hay un solo punto interior que divide a AB en la razón dada.

TEOREMA XXXIX.— **"Sobre la prolongación de un trazo AB, existe un solo punto cuyas distancias a los extremos del trazo están en una razón dada".** (Fig. 183).

Dem) Sea **D** el punto y supóngase que

$$\frac{DA}{DB} = \frac{4}{3}$$

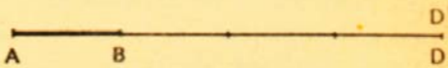


Fig. 183

si existiera otro punto **D'** tal que

$$\frac{D'A}{D'B} = \frac{4}{3}$$

se tendría

$$\frac{DA}{DB} = \frac{D'A}{D'B}$$

y descomponiendo

$$\frac{DA—DB}{DB} = \frac{D'A—D'B}{D'B}$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AB}{D'B}$$

DB = D'B... **D** y **D'** se confunden.

Luego, la tesis es verdadera.

COROLARIO.— *Dados dos puntos A y B en una recta indefinida, existen en esta recta dos puntos y sólo dos que dividen al segmento AB en cierta razón dada.*

Sea la recta L. (Fig. 184).

Uno de los puntos, **C**, está entre **A** y **B**. Divide *interiormente* al trazo **AB**, por ej., en la razón de 1 : 3.

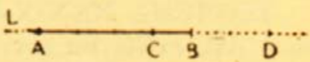


Fig. 184

O sea que: CB : CA = 1 : 3.

El otro punto es **D**, está en la prolongación de AB. Divide *exteriormente* al trazo AB, supongamos, en la misma razón anterior, de 1 : 3.

O sea que: DB : DA = 1 : 3.

Dividido el trazo **AB** en esas condiciones, se dice que está dividido armónicamente por **C** y **D**.

Los puntos **A, B, C** y **D**, se llaman *puntos armónicos*.

DEFINICION.—*Dividir un trazo armónicamente es dividirlo interior y exteriormente en una razón dada.*

Para dejar establecido que un trazo **AB** queda dividido armónicamente por dos puntos **C** y **D**, (Fig. 184), basta probar la exactitud de la proporción: $CB : CA = DB : DA$.

La proporción resultante es una *proporción armónica.*

Los puntos **C** y **D** son puntos *conjugados armónicos* con relación a **A** y **B**, y recíprocamente.

Entre los dos pares de puntos, se forma un *juego armónico.*

OBSERVACION: Más adelante, pág. 246, se indica el procedimiento para dividir un trazo armónicamente, en una razón cualquiera, dada.

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Trazar un eje orientado X'X y representar en él los puntos A, B, C, D, cuyas abscisas son, respectivamente, +3, +5, —2, —6. Enseguida expresar la medida algébrica de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DO}$. (Unidad: 1 cm.).

2. En un eje orientado, a partir de un origen O, colocar 4 puntos A, B, C, D, cuyas abscisas son: $a=-4$; $b=+5$; $c=-6$; $d=+1$. Encontrar el valor algébrico de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

3. En un eje orientado se dan los puntos A, B, C, cuyas abscisas son: $a=-1$; $b=-5$; $c=+5$. Calcular: 1º la abscisa x del punto medio M de AB; 2º la abscisa x' del punto medio N de MC.

4. Tres puntos A, B, C, de un eje X'X tienen por abscisas respectivamente, a, b, c. Calcular la abscisa de un cuarto punto D de modo que se cumpla la relación: $\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}=0$.

5. Un punto D, situado en la prolongación del trazo AB=36 cm. es tal que DA : DB=7 : 3. Determinar **DA** y **DB.**

6. Un punto C divide interiormente al trazo AB = 42 cm en la razón CA : CB=2 : 5. Calcular **CA** y **CB.**

7. Un punto N divide interiormente al trazo AB en la razón NA : NB = 5 : 9. Su distancia al punto medio de AB es 28 cm. Calcular **NA, NB** y **AB.**

8. Un punto M divide exteriormente al trazo CD en la razón MC : MD = 5 : 9. Su distancia al punto medio de CD es 28 cm. Calcular **MC** y **MD.**

9. Divida un trazo de 15 cm en la razón 2 : 3, interior y exteriormente. Otro de 6 cm como 1 : 2. Otro de 35 cm como 2 : 5. Verifique las proporciones en sus dibujos.

CAPITULO IX

TEOREMA GENERAL DE THALES — SUS CONSECUENCIAS Y APLICACIONES

§ *1.—DIVISION DE UN SEGMENTO RECTILINEO EN PARTES IGUALES — TEOREMA PREPARATORIO (O LEMA)*

TEOREMA XL.—**Las $\parallel$s que determinan partes iguales sobre una recta dada, determinan también, partes iguales sobre cualquier otra recta secante.** (Fig. 185 a).

Hip.) $\begin{cases} AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH \\ AC = CE = EG \end{cases}$

Tes.) $BD = DF = FH.$

Dem.) Trazar:

$$AL \parallel CM \parallel EN \parallel BH$$

se tiene que:

$$AL = BD$$
$$CM = DF$$
$$EN = FH$$

y $\triangle\ ACL \cong \triangle CEM \cong \triangle EGN$

(1.er caso)

luego $\quad AL = CM = EN$

y $\quad BD = DF = FH$

(Q. E. D.)

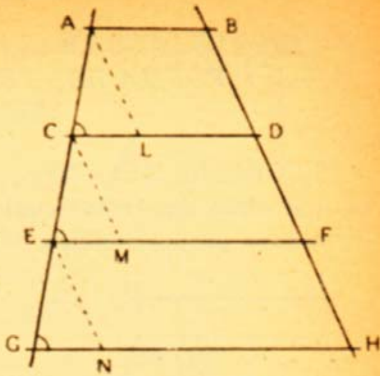


Fig. 185 a

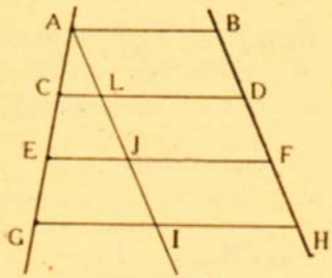


Fig. 185 b

2ª Demostración del teorema XL.—Se traza $AI \parallel BH$ (Por A) Fig. 185 b.

Resulta CL mediana de $\triangle$ EJA

$\therefore\ AL = LJ$

Pero $\begin{cases} AL \ \# \ BD & \text{(lados op. de un \#)} \\ LJ \ \# \ DF & \text{(lados op. de un \#)} \end{cases}$

Luego $\quad BD = DF$

y análogamente $DF = FH$... etc.

COROLARIO.—*Para dividir un trazo dado AB, en un número cualquiera de partes iguales.* (Fig. 186).

En 5 por ejemplo.

Se traza una recta indefinida AF. Sobre ella se copia 5 veces una unidad cualquiera, a partir de A.

Se une **B** con **C;** y por los puntos de división se trazan paralelas a **BC.**

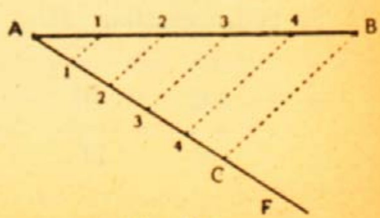


Fig. 186

§ 2.—*DIVERSAS FORMAS DEL TEOREMA DE THALES*

a) 1ª FORMA DEL TEOREMA GENERAL DE THALES

TEOREMA XLI.—**Tres o más rectas paralelas cortadas por otras dos rectas cualesquiera, determinan en éstas, segmentos proporcionales.** (Fig. 187).

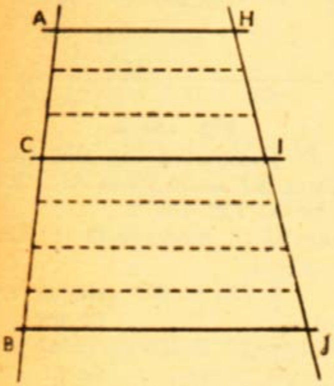


Fig. 187

Hip.) $AH \parallel CI \parallel BJ$.

Tes.) $$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ}$$

Dem.) *1º Los segmentos tienen medida común, es decir, son* **conmensurables.**

Supongamos que

$$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{4} \quad \text{(Fig. 187)}$$

Si por todos los puntos de división se trazan paralelas a AH, los segmentos HI e IJ serán divididos en 3 y 4 partes iguales.

Se podrá escribir $\dfrac{HI}{IJ} = \dfrac{3}{4}$

$$\therefore \quad \frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ} \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

2º *Los segmentos interceptados por las* $\parallel$*s no tienen medida común, es decir, son* **inconmensurables.** (Fig. 188).

Se toma una medida δ que quepa, por ej., **m** veces en **AC**, y **n** veces en **CB**, hasta el punto D, quedando un resto **DB**, menor que la medida adoptada δ.

Entonces, según el 1.er caso, se tiene:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{HI}{ID'}$$

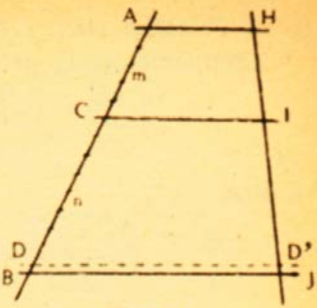


Fig. 188

Tomando ahora una medida cada vez menor, el punto **D** se va acercando al punto **B**, y **CD** *tiende a su límite* **CB** y cada vez se tiene según el 1.er caso:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{HI}{ID'}$$

Tenemos 2 cantidades variables, a saber, las 2 razones $\frac{AC}{CD}$ y $\frac{HI}{ID'}$ que tienden a sus límites respectivos.

$$\frac{AC}{CB} \text{ y } \frac{HI}{IJ}$$

Pero: *si dos cantidades variables son iguales y permanecen constantemente iguales en todas sus variaciones, tendiendo a sus límites, en el límite también son iguales.*

Luego, se tiene:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ}$$

b) *2ª FORMA DEL TEOREMA GENERAL DE THALES*

Componiendo la proporción precedente:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ} \quad \text{(Fig. 187)}$$

resulta:

$$\frac{AC+CB}{AC} = \frac{HI+IJ}{HI}$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{HJ}{HI}$$

Del mismo modo comparando la suma de los términos con el consecuente:

$$\frac{AC+CB}{CB} = \frac{HI+IJ}{IJ}$$

$$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{HJ}{IJ}$$

Resultado que se puede enunciar así:

"Si tres o más rectas $\parallel$s se cortan por dos rectas secantes, dos segmentos cualesquiera determinados en una de las secantes, son entre sí como los dos segmentos correspondientes determinados en la otra secante".

c) *3ª FORMA DEL TEOREMA GENERAL DE THALES*

En la proporción:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ},$$ (Fig. 187), alternando los

medios resulta:

$$\frac{AC}{HI} = \frac{CB}{IJ}$$

Expresar este resultado con palabras.

Resumen de las diversas formas del Teorema de Thales o maneras de leer las proporciones entre los trazos.

a) *Eligiendo los segmentos de la primera razón en una misma recta.* (Fig. 187).

$$\frac{AC}{CB} = \frac{HI}{IJ}; \frac{AB}{AC} = \frac{HJ}{HI}; \frac{AB}{CB} = \frac{HJ}{IJ} \ldots \text{etc.}$$

b) *Eligiendo alternadamente los segmentos en una y otra recta.* (Fig. 187).

$$\frac{AC}{HI} = \frac{CB}{IJ}; \frac{AB}{HJ} = \frac{AC}{HI}; \frac{AB}{HJ} = \frac{CB}{IJ} \ldots \text{etc.}$$

¿Qué otras proporciones se pueden obtener además de las del cuadro precedente? Demostrarlas.

§ *3.—APLICACIONES DEL TEOREMA DE THALES*

En la figura 189 el segmento de una de las $\|$s interceptado por las rectas secantes, puede reducirse al punto de convergencia o de intersección **A** de dichas secantes, Fig. 189 a; o bien una de las $\|$s puede cortar las secantes más allá de su punto de intersección **C**. Fig. 189 b.

El Teorema de Thales se puede, pues, aplicar: 1º *a un ángulo cuyos lados o sus prolongaciones más allá del vértice están cortados por ||s; 2.º a un triángulo cortado por una || a uno de sus lados.*

En ambos casos las demostraciones son las mismas y con las mismas formas diversas que en el Teorema de Thales.

Al referirse a un ángulo, el Teorema de Thales se puede enunciar así:

"Si los lados de un ángulo, o sus prolongaciones más allá del vértice se cortan por dos ||s, dos segmentos cualesquiera determinados por ellas en uno de sus lados, son entre sí como los dos segmentos correspondientes determinados en el otro". (Fig. 189 a y b).

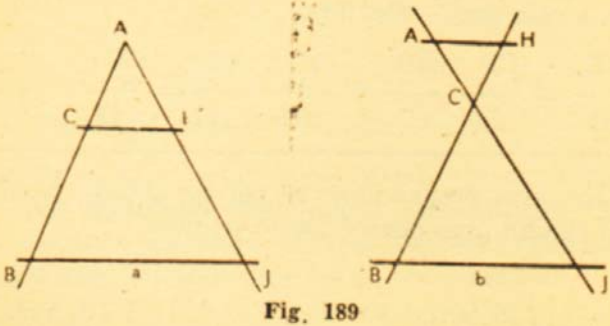


Fig. 189

El Teorema de Thales aplicado a un triángulo se enuncia como sigue:

TEOREMA XLII.— **Toda paralela a un lado de un △ determina en los otros dos lados segmentos proporcionales.**

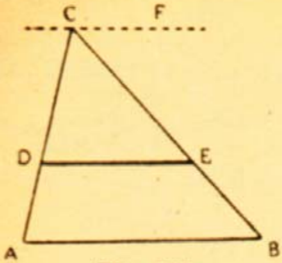


Fig. 190

Dem.) Por el vértice C, trazar

CF || AB (Fig. 190).

Segun el teorema anterior:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$

OBSERVACION.—La paralela **DE** se puede trazar fuera del triángulo, más allá del **vértice** o más allá de la base. (**Fig.** 189 b).

TEOREMA XLIII.—(Recíproco).—**Toda recta que determina segmentos proporcionales en dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.** (Fig. 191).

Hip.) $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$

Tes.) DE || AB

1º **Dem.)** Si DE no es || con AB, al trazar DE' || AB se tendría:

$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE'}{E'B}$$

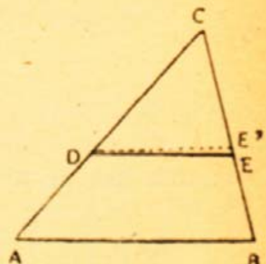


Fig. 191

lo que contradice la hipótesis, puesto que entre C y B existe un solo punto E tal que $\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA}$

Luego E y E' se confunden.
y DE es paralela con AB. (Q. E. D.)

2.a Demostración del Teorema XLIII.—
(Indirecta) (Fig. 191).

Si DE no fuera || con AB, lo sería otra recta: DE'||AB

Se tendría: $$\frac{CD}{DA} = \frac{CE'}{E'B} \quad \text{(Teor. XLI)}$$

Pero por Hip. se tiene:
$$\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$

Entonces resultaría:
$$\frac{CE'}{E'B} = \frac{CE}{EB} \quad \text{(2 cantidades. . .)}$$

$$y \quad \frac{CE'+E'B}{CE'} = \frac{CE+EB}{CE} \quad \text{(Componiendo prop. anterior)}$$

$$\frac{CB}{CE'} = \frac{CB}{CE}$$

Se tendría así, un absurdo:
$$CE' = CE$$

Luego, DE || AB (Q. E. D.)

TEOREMA XLIV.—**Si los lados de un ángulo** (o sus prolongaciones más allá del vértice) **se cortan por rectas paralelas, las paralelas son entre sí como los segmentos de cada lado medidos desde el vértice hasta la paralela respectiva.** (Fig. 192).

Hip.) En ∢ C, HI ∥ AB

Tes.) $\dfrac{HI}{AB} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CI}{CB}$

Dem.) Trazar HD ∥ CB

Considerando ∢ A se tiene:

$\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{HC}{AC}$ (Teor. de Thales aplicado a 1 ∢)

Pero DB=HI (DBIH es #)

Luego: $\dfrac{HI}{AB} = \dfrac{CH}{CA}$ (Reemplazando DB por su valor) (Q. E. D.)

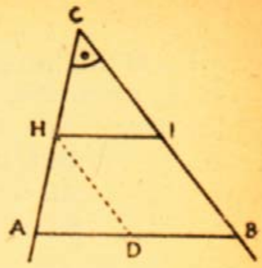


Fig. 192

Determinación gráfica de la 4ª proporcional geométrica.—

PROBLEMA 10.—*Construir la 4ª proporcional geométrica entre los trazos dados:* **a, b** *y* **c.**

Solución.—Para que el problema resulte *determinado,* se escribe, previamente, la proporción que debe verificarse entre dichos trazos: a : b = c : x.

Los teoremas XLI, XLII, proporcionan la solución.

Los trazos a y b, términos de la 1ª razón de la proporción anterior, pueden ocupar la posición de los segmentos de la 1ª razón, en cualquiera de las proporciones de la pág. 239.

Los trazos c y x deben ocupar la posición de los segmentos de la 2ª razón, en las mismas proporciones de la pág. 239.

Hay, pues, varias soluciones:

1.a Solución.— construye un $\sphericalangle$ A, arbitrario.

Se hace: AB=a (Fig. 193).
BC=b
AD=c
B(↔)D (Extremos de los dos antecedentes).
CE || BD
DE=x=4.ª p. g.

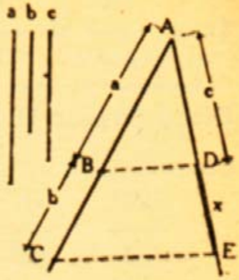


Fig. 193

2.a Solución.—
(1) $\sphericalangle$**A** (Fig. 194).
AB=a
AC=b
AD=c
B(↔)D
CE || BD
AE=x=4.ª p. g.

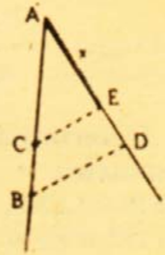


Fig. 194

3.a Solución.—
$\sphericalangle$**A** (Fig. 195)
AB=a
BC=b
AD=c
B(↔)D
CE || BD
DE=x=4.ª p. g.

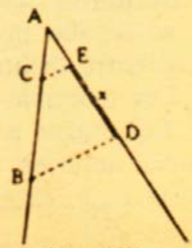


Fig. 195

---

(1) En cada una de las cinco soluciones se emplearán los trazos a, b y c de la Fig. 193.

4.a Solución.—

$\sphericalangle A$ (Fig. 196)
AB=a
AC=b
BD=c
CE || BD
CE=x=4.ª p. g.

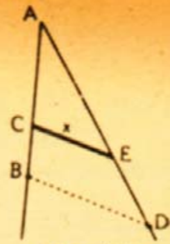


Fig. 196

5.a Solución.—

$\sphericalangle$ **A** (Fig: 197)
AB=a
AC=b
AD=c
B(↔)C
DE || BC
AE=x=4.ª p. g., etc.

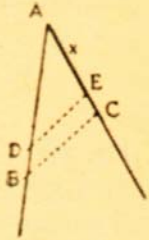


Fig. 197

Procedimientos para dividir un trazo armónicamente.—

PROBLEMA 11.—*Dividir interiormente un trazo dado AB en la razón de 2 : 3.*

Solución.— Sea AB el trazo dado. (Fig. 198).
Se traza un rayo dado AX.
Se hace:
AE=2 unidades arbitrarias
EF=3 unid. de las anteriores.
F(↔)B
EC || FB
Resulta:
AC : CB=AE : EF=2 : 3
Dem.) Teor. XLII.

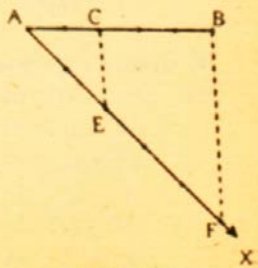


Fig. 198

PROBLEMA 12.—*Dividir exteriormente un trazo dado AB en la razón de 2 : 5.*

Solución.—Sea AB el trazo dado. (Fig. 199).

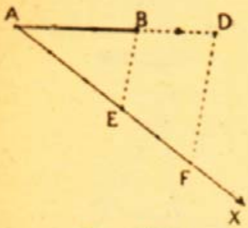


Fig. 199

Se traza rayo AX.

AF=5 unidades arbitrarias.

FE=2 unid. de las anteriores.

E(↔)B

FD || EB

Resulta:

DB : DA=FE : FA=2 : 5.

PROBLEMA 13.—*Dividir armónicamente un trazo dado AB en una razón dada m : n.*

1.a Solución.—Sea AB el trazo dado y m : n la razón dada. (Fig. 200).

a) Trazar rayo **AX.**

AC=m

CD=n

D(↔)B

CE || DB

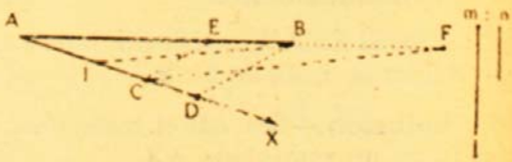


Fig. 200

E divide **interiormente** trazo **AB** en la razón de m : n.

b) Para dividirlo exteriormente se hace:

AC=m

CI=n

I(↔B)

CF || IB

F=punto de **división exterior** de **AB** en la razón de m : n.

Resulta: EA : EB=FA : FB=m : n.

Dem.—a) Considerando el $\sphericalangle$ **A** cuyos lados **AX** y **AF** están cortados por **BD** $\parallel$ **EC** (Fig. 200).

Resulta: $$\frac{EA}{EB} = \frac{CA}{CD} = \frac{m}{n}$$ (Teor. de Thales, con aplicación a un ángulo, página 240).

b) El $\sphericalangle$ **A** y sus lados cortados por **FC** $\parallel$ **BI** dan la proporción:

$$\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CI} = \frac{m}{n}$$ (id.)

$$\therefore \quad \boxed{\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{m}{n}}$$

Luego AB queda dividido armónicamente.

2.a Solución.—Sea AB el trazo dado (Fig. 201).

Trazar rayo arbitrario AM.

Se hace: **AM = m**
NN' $\parallel$ **AM** (Por B)
BN = BN' = n
M(↔)N→ . . . X
M(↔)N'→ . . . Y

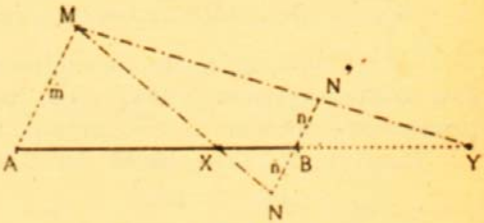


Fig. 201

X e Y dividen armónicamente el trazo AB.

Dem.) En el $\sphericalangle$ **AXM** sus lados XA y XM y sus prolongaciones son cortados por AM $\parallel$ BN. (Fig. 201).

$$\therefore \quad \frac{XA}{XB} = \frac{AM}{BN} = \frac{m}{n}$$ (Teor. de Thales, aplicado a un $\sphericalangle$, pág. 240)

En el $\measuredangle$ Y cuyos lados son cortados por AM $\parallel$ BN', resulta:

$$\frac{YA}{YB} = \frac{AM}{BN'} = \frac{m}{n} \qquad \text{(id.)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{XA}{XB} = \frac{YA}{YB} = \frac{m}{n}} \qquad \text{(Dos cant. =s a . . .)}$$

Luego AB queda dividido armónicamente.

Puntos armónicos.—Según quedó establecido en pág. 233, los puntos A, E, B, F, de la Fig. 200 y los puntos A, X, B, Y, de la Fig. 201, forman una *división armónica* o *un juego armónico*. Esto significa, tratándose por ej. de la Fig. 200, que, **si los puntos E y F son conjugados armónicos con relación a los puntos A y B, recíprocamente, A y B son conjugados armónicos, con relación a E y F.**

Dicho en otros términos significa que: "**si E y F dividen armónicamente al trazo AB, los puntos A y B, recíprocamente, dividen armónicamente al trazo EF**".

Para probar esto, basta demostrar la exactitud de la proporción: $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{BF}$.

En efecto se tiene:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} \qquad \text{(E y F div. AB armónicamente)}$$

$$\therefore \quad \frac{EA}{FA} = \frac{EB}{FB} \qquad \text{(alternando los medios)}$$

o sea: $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{BF}$ (Q. E. D.)

EJERCICIOS DE APLICACION

* **10.** Dividir un trazo dado AB en partes proporcionales a 1, 4, 5.

* **11.** Se da la razón m : n entre dos trazos y uno de ellos. Construir el otro trazo.

* **12.** Construir el trazo que indica la expresión: $x = \dfrac{ab}{d}$, si **a**, **b** y **d**, son trazos dados.

* **13.** Construir el valor de x, en la expresión: $x = \dfrac{a^2}{c}$, siendo **a** y **c** trazos dados.

* **14.** La suma de dos trazos es s. Si están en la razón de 3 : 4, construir dichos trazos. Id si los trazos están en la razón **m : n**.

* **15.** Dado un trazo **a**, prolongarlo en una magnitud **x** de modo que se cumpla la siguiente relación: a : x = m : n, siendo **m** y **n** trazos dados. Id si los trazos están en la razón de 5 : 3.

* **16.** Dado un trazo **a**, prolongarlo en una magnitud **x** de modo que se verifiquen las relaciones siguientes: 1º $\dfrac{a+x}{a} = \dfrac{m}{n}$; 2º $\dfrac{a+x}{x} = \dfrac{m}{n}$, (m y n son trazos conocidos).

* **17.** Cuatro paralelas determinan sobre una recta segmentos de 3 cm., 5 cm., 8 cm. ¿Qué longitudes determinarán sobre un trazo de 64 cm. que tiene un extremo en la primera de ellos y el otro en la cuarta?

* **18.** Una recta paralela a un lado de un triángulo determina en un segundo lado segmentos de 27 cm y 18 cm.; ¿cuáles son los segmentos determinados en el tercer lado que mide 60 cm?

• **19.** Dos lados de un triángulo miden AB=24 cm y AC=32 cm. Sobre AB se toma AD=13 cm. ¿Qué longitud AE hay que tomar sobre AC para que DE sea paralela a BC?

• **20.** Dado un ángulo XOY se aplican sobre el rayo OX las longitudes OA=4 cm; OA'=6 cm; sobre OY se toman OB=6 cm y OB'=9 cm. ¿Qué se puede decir de las rectas AB y A'B'? Si AB =10 cm, calcular A'B'.

• **21.** En un trapecio ABCD de base mayor AB, se da sobre AD un punto M tal que AM $= \frac{2}{3}$ AD y sobre BC un punto N tal que NB=2NC.

¿Qué se puede decir de MN? Si AD=12 cm y BC=15 cm, calcular AM y BN.

• **22.** Un trazo de 40 cm se divide en tres segmentos m, n, q, que son entre sí como 2 : 3 : 5. ¿Cuánto mide cada uno de los segmentos?

• **23.** Se da la diferencia **d** de dos trazos y su razón 2 : 3. Construir dichos trazos.

• **24.** Dos trazos están en la razón de **m** : **n** y su diferencia es igual a un trazo dado **d.** Construir dichos trazos. (m y n son trazos conocidos).

• **25.** En un △ ABC trazar una paralela al lado AB de modo que la parte de ella interceptada por los otros dos lados sea igual: a) a los $\frac{4}{5}$ del lado paralelo; b) a los $\frac{3}{4}$ del lado paralelo.

• **26.** En un △ ABC (Fig. 202). DE ∥ AC; calcular:

1.º AD, sabiendo que: BD=8, BE=6 y EC=3

2.º AC, sabiendo que: BE=6, EC=3 y ED=8

3.º AD, sabiendo que:

$$AB=15 \text{ y } \frac{CE}{EB} = \frac{2}{4}$$

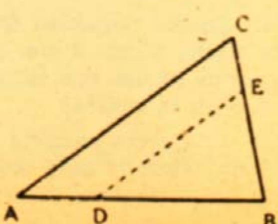


Fig. 202

4.º Sabiendo que: AC = 12, ED = 8 y BE = 6, calcular los segmentos BC y EC.

5º Calcular BE, si BE = 2DA, BD = 9 y EC = 2.

• **27.** Por un punto **P** situado entre los lados de un ángulo A, trazar una recta que corte los lados en B y C, de manera que se verifique: 1º) **AB : AC = m : n**; 2º) **PB : PC = m; n**; 3º) **BC : PC = m : n.**

• **28.** Determinar el **L. G.** de los puntos cuyas distancias a los lados de un ángulo dado sean entre sí como **m : n** (m y n son trazos conocidos).

SOLUCION: Se trazan las ||s. a los lados del ángulo a las distancias m y n, respectivamente. La recta que une el vértice del ángulo con el punto de intersección de las ||s. es el L. G. pedido. ¡Demuéstrelo!

29. Se da un ángulo A y un punto P situado fuera de él; trazar por P una recta **PBC** que corte los lados del ángulo en **B** y en **C** de tal modo que se pueda verificar la proporción siguiente: **PB : PC = 2 : 5.**

30. Demostrar que si por el punto de intersección de las diagonales de un trapecio se traza una || a las bases, los segmentos de la || comprendidos entre dicho punto y los lados no ||s, son iguales.

PROBLEMAS DE CONSTRUCCION

(Aplicación de la 4ª proporcional geométrica)

Construir un △ dados $a : b = m : n$, p, h_c

Análisis.—Sea ABC el △ pedido. Fig. 203.

En él se conoce:

$CD = h_c$
$DB = p$

∴ s. p. c. el △ rect. auxiliar CDB (h_c, ∢$D = 90°$, p)

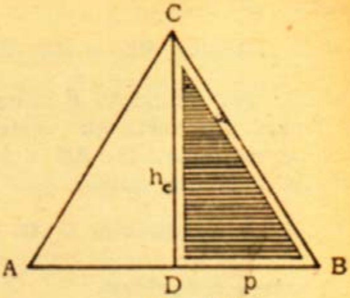


Fig. 203

Por el △ aux. quedan conocidos:
los vértices B y C,
el lado BC = a
y ∢DBC = β

Conociendo a, m y n, en la proporción dada, se puede obtener b como 4ª p. g. (Probl. 10, pág. 243).

∴ Ls. Gs. para A $\begin{cases} 1^{\circ} \text{ BD prolongado} \rightarrow \text{D} \\ 2^{\circ} \odot (C, b) \end{cases}$

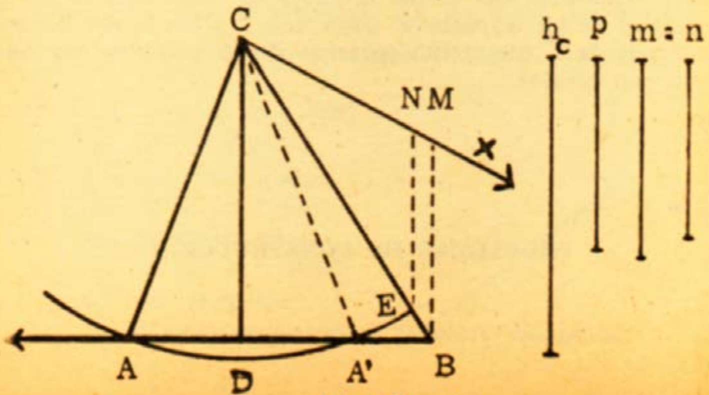


Fig. 204

Construcción.—Se hace: $CD = h_c$ (Fig. 204).

$\sphericalangle CDB = 90^\circ$

$DB = p$

$B(\leftrightarrow)C$

Se determina b como 4ª p. g.:

Rayo CX

$CM = m$

$CN = n$

$CB = a$

$B(\leftrightarrow)M$

$NE \parallel MB$

$CE = b = 4^a$ p. g. (m, n, a)

Se prolonga $BD \rightarrow D$

$\odot$ (C, b)

$A(\leftrightarrow)C$

Los $\triangle$ ABC y A'BC cumplen con las condiciones impuestas al problema.

Demostración.—En el $\triangle$ ABC (Fig. 204) se tiene:

$\sphericalangle CDB = 90^\circ$ (Por construcción)

$CD = h_c$ id.

$DB = p$ id.

También $CB : CE\ (CA) = CM : CN = m : n$ (Por constr.)

Es decir: $a : b = m : n$

Lo mismo se puede demostrar en el $\triangle$ A'BC.

Discusión.—Con los datos h_c y p es posible en todo caso la construcción del $\triangle$ rectáng. aux. CDB y obtener $CB = a > h_c$.

Haciendo variar la magnitud de los términos de la razón m : n, se presentan los siguientes casos:

1º Si $m < n$, resultará siempre $a < b$ y a fortiori $h_c < b$.

$\therefore$ habrá dos soluciones, porque la $\odot$ (C, b) cortará a BD en dos puntos: a la izquierda de D y a la derecha de B.

2º Si $m = n$, resultará: $a = b$ y $b > h_c$

$\therefore$ habrá una solución y el $\triangle$ pedido resultará isósceles.

3º Si $m > n$, resultará siempre $a > b$
pero puede dar lugar a 3 casos con relación de b con h_c:

a) puede resultar: $b > h_c$, habrá 2 soluciones, caso de la Fig. 204.

b) puede resultar: $b = h_c$, habrá una solución. El △ será rectángulo.

c) puede resultar: $b < h_c$, habrá 0 solución.

Construir un △ dados:

• **31.** $a : b = 4 : 3,\ a,\ h_a$
• **32.** $a : b = m : n,\ h_c,\ p$
• **33.** $a : b = m : n,\ q,\ a$
• **34.** $p : q = m : n,\ a,\ h_c$
• **35.** $a : b = m : n,\ r,\ \alpha$
• **36.** $c : t_c = m : n,\ r,\ \gamma$
• **37.** $a : b = 3 : 2,\ a,\ h_c$
• **38.** $a : c = m : n,\ h_b,\ \gamma$
39. $(a+b) : c = m : n,\ c,\ r$
• **40.** $h_c : c = m : n,\ c, t_c$
• **41.** $c : t_a = m : n,\ r,\ \gamma$
42. $c : t_c = 3 : 2,\ c,\ t_a$
• **43.** $(a+b+c) : h_c = m : n,\ p\ \beta$
44. $c : t_c = m : n,\ c,\ t_b$

Construir un # dados:

• **45.** $a : e = m : n,\ a,\ \varepsilon$
46. $a : b = 4 : 3,\ b,\ h_a$
47. $b : h_c = m : n,\ \varepsilon,\ h_b$
48. $e : b = 5 : 3,\ b,\ \measuredangle\ (a, f)$

49. Construir un rombo dados: $e : f = m : n,\ e$.

• **50.** Dado un rectángulo de lados a y b, transformarlo: a) en otro que tenga un lado **c**; b) en un △ rectángulo de hipotenusa c.

51. Por un punto P situado dentro de una circunferencia, trazar una cuerda APB tal que, se verifique la siguiente proporción: **PA : PB = m : n** (m y n son trazos conocidos).

52. Resolver gráficamente la siguiente ecuación: $4x = 12$. (Construir x y medirlo).

• **53.** Dado un △ ABC, determinar un punto P sobre AB, cuyas distancias a los otros lados, sean entre sí como **m : n.** (m y n son trazos conocidos).

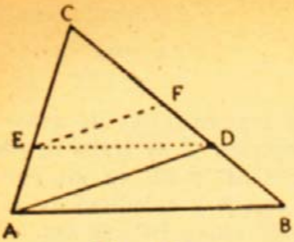


Fig. 205

54. Dado un $\triangle$ ABC, (Figura 205), únanse el vértice A con un punto arbitrario D, sobre CB. Trazar DE $\parallel$ AB y EF $\parallel$ AD. Probar que se verifica la siguiente relación:

$$CB : CD = CD : CF$$

¿Qué nombre recibe el trazo CD en la proporción anterior?

55. Dado un $\triangle$ ABC, márquese punto medio M de BC y trácese las bisectrices de los $\sphericalangle$s AMB y AMC que cortan los lados AB y BC en D y E, respectivamente.

Demostrar que: 1º) DA : DB = EA : EC; 2º) DE $\parallel$ BC.

• **56.** Si desde dos puntos B y C de un rayo AX se trazan dos segmentos paralelos de modo que sus longitudes sean procionales a las distancias de B y C al extremo A del rayo, la recta que une los extremos de los segmentos, pasa por el extremo del rayo. (Teorema recíproco del teor. XLIV).

57. Se da una recta L y un punto B sobre ella. Fuera de la recta se halla situado un punto P; sobre el segmento PB se encuentra otro punto C tal que PC : PB = m : n. El punto B se mueve sobre la recta L de modo que en cada posición se verifica la misma proporción: PC : PB = m : n.

¿Cuál es el L. G. del punto C?

58. Se dan dos $\triangle$s ABC y ABC' que están construídos a distintos lados de la base común AB. Sobre AB se marca un punto cualquiera D y se hace DM $\parallel$ AC y DN $\parallel$ AC', siendo M y N los puntos de intersección de las $\parallel$s con los lados BC y BC', respectivamente. Uniendo C con C' y M con N, demuéstrese que CC' $\parallel$ MN.

59. Sabiendo que E y F dividen armónicamente un trazo dado AB (E interiormente y F exteriormente) y que M es el punto medio de **AB**. Demostrar las relaciones siguientes:

1º $MA^2 = ME \cdot MF$;

2º $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AE} + \dfrac{1}{AF}$

60. En un △ ABC se trazan las transversales de gravedad AM y BN; por su punto de intersección G se traza la paralela al lado AB que corta a los lados AC y BC en los puntos D y F, respectivamente. Unase M con N y calcúlese los lados del # DFMN, si AB=40 cm, AC=60 cm y BC=90 cm.

CAPITULO X

CIRCUNFERENCIA DE APOLONIO

TEOREMA XLV.—**La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide interiormente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados.**

Hip.) En △ ABC, $CX = b_\gamma$.

$\measuredangle s = \measuredangle t$

Tes.) $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$.

Dem.) (Fig.206).

AC→C

Trazar BD ∥ CX

$\measuredangle s = \measuredangle r$ (Corresp. ∥s)

$\measuredangle t = \measuredangle i$ (alt. int. ∥s)

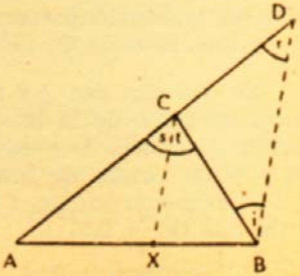


Fig. 206

Pero $\measuredangle s = \measuredangle t$
$\therefore$ $\measuredangle i = \measuredangle r$
y $CD = CB$

las paralelas CX y BD dan: $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CD}$

y reemplazando CD: $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$

(Q. E. D.)

TEOREMA XLVI.—(Recíproco del teorema XLV).—**Si se da la proporción** $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$, **la recta CX es bisectriz del ángulo en C.** (Fig. 206).

Hip.) $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CB}$
Tes.) $\measuredangle s = \measuredangle t$

Dem.) Prolongar $AC \rightarrow C$
y hacer $CD = CB$
$B(\leftrightarrow)D$

Reemplazando CB por CD se tiene: $\dfrac{XA}{XB} = \dfrac{CA}{CD}$

luego, $CX \parallel BD$.
y $\measuredangle r = \measuredangle s$
$\measuredangle i = \measuredangle t$

Pero $\measuredangle r = \measuredangle i$ ($\measuredangle$s basales de $\triangle$ isósceles BDC)
$\therefore$ $\measuredangle t = \measuredangle s$
y CX es bisectriz del $\measuredangle ACB$. (Q. E. D.)

TEOREMA XLVII.—**La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, divide exteriormente el lado opuesto en la razón de los otros dos lados.** (Fig. 207).

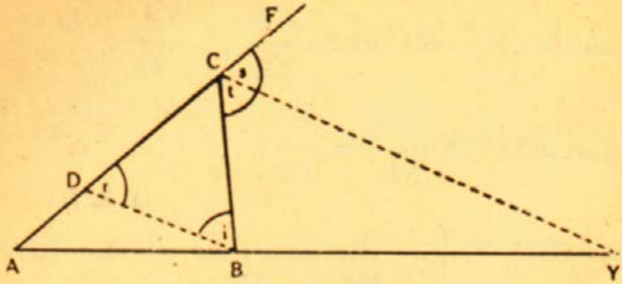


Fig. 207

Hip.) En $\triangle ABC$, CY bisectriz ext.

$\sphericalangle s = \sphericalangle t$

Tes.) $\dfrac{YA}{YB} = \dfrac{CA}{CB}$

Dem.) Trazar BD $\parallel$ CY

$\sphericalangle s = \sphericalangle r$ (corres. $\parallel$s)

$\sphericalangle t = \sphericalangle i$ (alt. int. $\parallel$s)

Pero $\sphericalangle s = \sphericalangle t$ (hip.)

$\therefore$ $\sphericalangle i = \sphericalangle r$

y CD=CB

las paralelas CY y BD, dan $\dfrac{YA}{YB} = \dfrac{CA}{CD}$

y reemplazando CD: $\dfrac{YA}{YB} = \dfrac{CA}{CB}$

(Q. E. D.)

TEOREMA XLVIII.—(Recíproco del teor. XLVII).— **Si se da la proporción** $\frac{YA}{YB} = \frac{CA}{CB}$ **la recta CY es bisectriz exterior del ángulo BCF.** (Fig. 207) Demuéstrese.

COROLARIOS.—1º *En un △ la bisectriz de un ángulo interior y la del ángulo exterior adyacente dividen al lado opuesto armónicamente en la razón de los otros dos lados que comprenden el ángulo.*

Dem.) En Fig. 208 se tiene:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{CB}{CA} \text{ (Teor. XLV}$$

$$\frac{NB}{NA} = \frac{CB}{CA} \text{ (Teor. XLVII}$$

$$\therefore \frac{MB}{MA} = \frac{NB}{NA}$$

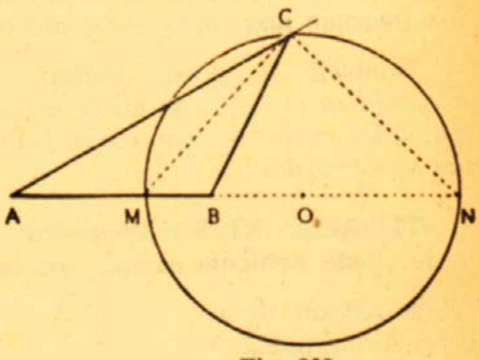


Fig. 208

También:

$$\frac{MB}{NB} = \frac{MA}{NA} \text{ (alt. medios pr. ant.)}$$

Lo mismo: $$\frac{BM}{BN} = \frac{AM}{AN}$$

Los puntos A, M, B, N son conjugados armónicos.

2º.—△MNC es rectángulo en C.

3º.—Cuando en un △ se conoce, un lado y la razón de los otros dos, el L. G. del 3.er vértice del △ es la ⊙ que tiene por diámetro el trazo determinado por los dos puntos que dividen armónicamente el lado conocido en la razón dada.

Dicha ⊙ se llama **circunferencia de Apolonio.**

DEFINICION.— Circunferencia de Apolonio *es el L. G. de todos los puntos cuyas distancias a dos puntos dados, guardan una razón constante m : n.*

También se puede definir así: "*Circunferencia de Apolonio es el L. G. de los terceros vértices de todos los △s de los cuales se conocen un lado y la razón en que están los otros dos*".

TEOREMA XLIX.—**Demostrar que cualquier punto de la ⊙ de Apolonio cumple con la condición de L. G.**

Sea AB un trazo dividido armónicamente por los puntos M y N, y C un punto cualquiera del L. G. (⊙ de Apolonio.

Dem.— Se traza DBF||AC (Fig. 209).

Se prolonga **CM** hasta D.

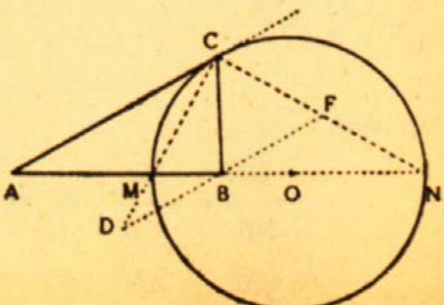


Fig. 209

Considerando

$\sphericalangle AMC$ y $AC \parallel DB$, se tiene:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{DB} = \frac{m}{n} \text{ (Hip.) } (1)$$

En $\sphericalangle N$ y $AC \parallel BF$ se tiene:

$$\frac{NA}{NB} = \frac{AC}{BF} = \frac{m}{n} \text{ (Hip.) } (2)$$

$$\therefore \frac{AC}{DB} = \frac{AC}{BF} \left(- \text{razón común} \frac{m}{n}\right)$$

$\therefore$ $DB = BF$ (antecedentes iguales en prop. anterior)

Pero $\triangle DFC$ es rectángulo en C.

y CB=transversal de grav. correpondiente a la hipotenusa.

$\therefore$ $CB = DB = BF = r$ (Del $\triangle$ rect. DFC)

Reemplazando DB y BF respectivamente en 1 y 2 por CB, se tiene:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{CB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

• **61.** Un triángulo tiene por lados BC = 12 cm, AC = 15 cm, AB = 24 cm. Calcular los segmentos determinados en AC por la bisectriz del ángulo β.

• **62.** Los lados de un triángulo miden respectivamente 18, 30 y 36 cm. Calcular los segmentos determinados en los lados por las tres bisectrices interiores.

PROBLEMAS DE CONSTRUCCION

(Ejercicios basados en la circunferencia de Apolonio)

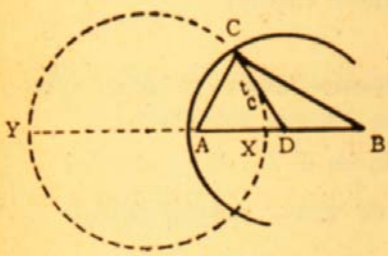


Fig. 210

Construir un △ dados: $a : b = m : n$, c, t_c.

Análisis.—Sea ABC el △ pedido (Fig. 210).

En el: $AB = c$
$DC = t_c$

Por el lado c quedan determinados los vért. A y B.

Ls Gs de C:
- 1º La circunferencia de Apolonio determinada por la división armónica de $AB = c$, según la razón de $m : n$.
- 2º ⊙ (D = punto medio de AB, t_c).

Construcción.—$AB = c$. (Fig. 211).
Se divide AB armónicamente en la razón $m : n$. Se hace para ello: Rayo BE arbitrario.

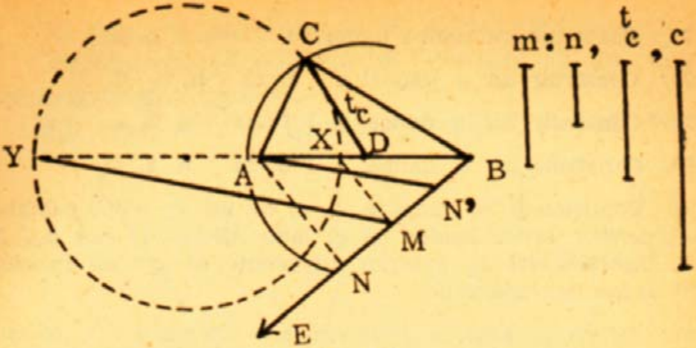


Fig. 211

BM = m
MN = n
N(↔)A
MX ∥ NA, resulta X.
MN' = n
N'(↔)A
MY ∥ N'A, resulta Y
⊙ de Apol. de diám. XY
AD = DB
⊙ (D, t_c) corta en C y C' a la ⊙ de Apol.
A(↔) C(↔)B
Los △s ABC y ABC' cumplen con las condiciones del probl.
Hacer la demostración y la discusión.

Construir un △ dados:

• **63.** $a : b = m : n,\ c,\ h_c$

• **64.** $c : a = 5 : 3,\ b,\ h_b$

• **65.** $a : b = m : n,\ c,\ b_\gamma$

• **66.** $a : c = m : n,\ b,\ \beta$

66'. $a : b = m : n,\ c,\ t_c$

66''. $u,\ v,\ t_c$

67. $t_a : t_b = m : n,\ p,\ q$

• **68.** $a : b = m : n,\ c,\ r$

69. $a : b = m : n,\ p - q = d,\ \alpha - \beta = \delta$

• **70.** $u,\ v,\ \beta$

• **71.** $c : b = m : n,\ a,\ b_\alpha$

72. $a : c = m : n,\ b_\beta,\ b$

• **73.** $a : b = m : n,\ c,\ \gamma$

74. $c : a = m : n,\ b,\ \beta$

75. $b : c = 2 : 3,\ a,\ b + c = s$

76. $c,\ a : b = m : n,\ t_a : t_b = m' : n'$

• **77.** Construir un rombo dados: e : f=m : n, a.

• **78.** Construir un # dados: e : f=m : n, h_b, d.

• **79.** Construir un # dados: e : f=m : n, d, ε.

80. Construir un # dados: a : d=m : n, f, β

• **81.** Conociendo los lados a, b, c, de un △ ABC, calcular los segmentos determinados en el lado AB=c: 1º por b_γ; 2º por la bisectriz del ∢ exterior adyacente al ∢γ en función de los lados del triángulo.

82. En un △ ABC, a = 24 cm, b = 20 cm y c = 40 cm. Calcular los segmentos v, u y el radio de la ⨀ de Apolonio que pasa por el vértice C.

83. Dado un △ **ABC** determinar dentro de él un punto **P** tal que, sus distancias a los vértices del △ sean entre sí como tres trazos dados **m, n y p.**

83'. En un △ ABC en el cual a : b = m : n, demostrar la relación: $r = \dfrac{mnc}{m^2-n^2}$, siendo r el radio de la ⨀ de Apolonio que divide el lado c armónicamente en la razón en que están los otros dos lados.

CAPITULO XI

TRIANGULOS SEMEJANTES

§ *1.—DEFINICIONES Y GENERALIDADES*

Triángulos semejantes y en general, *polígonos semejantes,* son los que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos, proporcionales.

Dos polígonos semejantes tienen misma forma sin ser necesario que tengan igual área.

El signo de semejanza es ∾. Se debe leer semejante a.

Vértices homólogos son los vértices de los ángulos respectivamente iguales.

Ej.: el vértice B es homólogo con el vértice E. (Fig. 212).

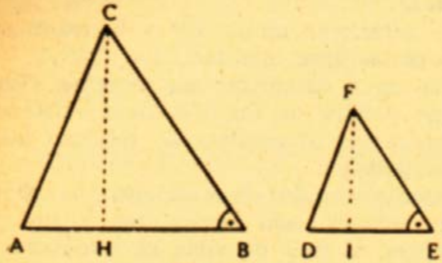


Fig. 212

Lados homólogos son los lados que unen dos vértices homólogos, o bien, son los lados que se oponen a ángulos iguales.

Ej.: AC y DF son lados homólogos.

Con relación a polígonos semejantes, se llaman *puntos homólogos*, los situados en el plano de esos polígonos, y que si se unen con los extremos de lados homólogos, dan lugar a △s semejantes.

Ej.: H es homólogo con el punto I en Fig. 212.

Líneas homólogas son rectas que unen puntos homólogos. Ej.: CH es homóloga con FI. Fig. 212.

Razón de similitud o de semejanza es el número que expresa la razón constante k entre dos lados homólogos o dos líneas homólogas cualesquiera de polígonos semejantes.

En la figura 212 la razón de similitud es de $\frac{2}{3}$. Todas las líneas homólogas son entre sí como 2 : 3.

§ 2.—*CASOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS*

Cuando dos △s ABC y A'B'C' son semejantes, de acuerdo con la definición, deben satisfacer las 5 condiciones siguientes:

$\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$ (∢s interiores)

CB : C'B' = CA : C'A' = AB : A'B' o sea, a : a' = b : b' = c : c'.

Estas 5 condiciones las cumplen, luego son semejantes:

1º Dos △s congruentes.

En efecto, tienen sus ∢s respectivamente iguales y la razón entre sus lados homólogos vale 1.

2º Dos △s equiláteros.

En efecto, sus **3** ∢s interiores miden 60º y la razón entre dos lados homólogos es siempre idéntica.

3º A continuación se va a demostrar un teorema (Teor. particular de Thales) que pondrá de manifiesto la existencia de △s que, sin ser congruentes ni equiláteros, realizan las 5 condiciones anteriores señaladas.

Este teorema juntamente con los 2 principios: a) **"2 figuras semejantes a una tercera, son semejantes entre sí"**; b)**"de 2 figuras congruentes, si una de ellas es semejante a una tercera, la otra también lo será"**, constituyen el fundamento para dejar establecido que existen, además, para los △s, 4 casos, en los cuales, cumpliéndose 2 condiciones de las 5 señaladas, forzosamente se cumplirán las otras tres.

Estos 4 casos son los llamados **"casos de semejanza de △s"** y son análogos a los 4 casos de congruencia de △s. A cada caso de congruencia corresponde uno de semejanza.

TEOREMA L.—(Particular de Thales).— **Toda paralela a un lado de un triángulo determina un segundo △ semejante al primero.** (Fig. 213).

Hip.) En △ ABC, HD ∥ AB.

Tes.) △ HDC ∼ △ ABC.

Dem.) ∢ C común

∢ H = ∢ α (Por corresp. ∥s)

∢ D = ∢ β (id.)

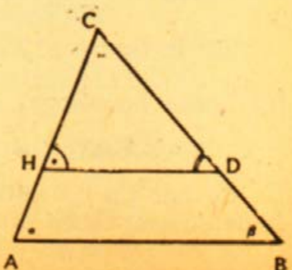


Fig. 213

y por ser HD || AB, $\dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{HD}{AB}$

Si los dos triángulos tienen iguales sus ángulos y los lados respectivamente proporcionales, son semejantes.

COROLARIO.—*La mediana de un triángulo es igual a la mitad del lado paralelo a ella.*

PRIMER CASO DE SEMEJANZA.—**Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.** (Fig. 214).

Hip.) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$
$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$

Tes.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

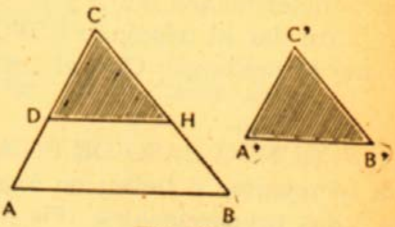


Fig. 214

Dem.) En el $\triangle$ ABC hacer CD = C'A'
y DH || AB.
El $\triangle ABC \backsim \triangle DHC$ (Teor. L).

Basta demostrar que $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$.

por hipótesis $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ (1)
por ser correspondientes entre ||s $\sphericalangle D = \sphericalangle A$
pero por hipótesis $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$
$\therefore$ $\sphericalangle D = \sphericalangle A'$ (2)
por construcción CD = C'A' (3)
$\therefore$ $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ (1.er caso Congr.)

Luego: $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

PROBLEMA 15.—*Construir un* $\triangle$, *dados*: α, β, t_c.

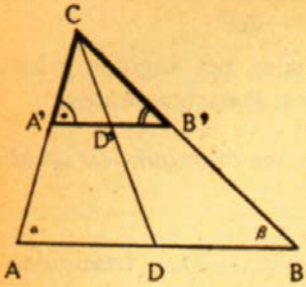


Fig. 215

Análisis.—Sea ABC el triángulo pedido y $CD = t_c$. (Fig. 215).

Trazar $A'B' \parallel AB$ (Por D' punto arbitrario de CD).

Resulta: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (1.er Caso)

$\therefore \measuredangle A' = \alpha$ y $\measuredangle B' = \beta$

y $A'D' = D'B'$.

El triángulo A'B'C es constructible. Sólo importa su forma determinada por α y β.

Para dar al triángulo A'B'C la magnitud pedida, basta que al prolongar CD', el trazo CD sea igual a t_c.

SEGUNDO CASO DE SEMEJANZA.—**Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.** (Fig. 216).

Hip.) $\measuredangle C = \measuredangle C'$

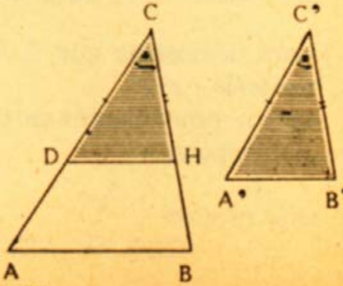
$CA : C'A' = CB : C'B'$

Tes.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Dem.) En el $\triangle ABC$ hacer

$CD = C'A'$

y $DH \parallel AB$



entonces $\triangle ABC \sim \triangle DHC$ (Teor. L).

Fig. 216

Basta probar que $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$, y lo son pues:

por ser $DH \parallel AB$, $\quad CA : CD = CB : CH \quad (1)$

y como $C'A' = CD$ (Por construcción)

prop. (1) se transforma en $\boxed{CA : C'A'} = CB : CH \quad (2)$

pero por Hip. $\quad \boxed{CA : C'A'} = CB : C'B'$

Resulta: $\quad CB : \mathbf{CH} = CB : \mathbf{C'B'} \quad (3) \quad$ (2 cant.)

$\therefore \quad CH = C'B'$ (Antecedentes =s de proporción) (3)

Pero $\quad CD = C'A'$ (Por construcción)

También: $\quad \sphericalangle C = \sphericalangle C'$ (Hip.)

$\therefore \quad \triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ (2º caso de $\cong$)

Luego: $\quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

PROBLEMA 16.—*Construir un triángulo dados:*

$$\gamma, \ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}, \ h_c$$

Análisis.—(Fig. 217).

Sea ABC el triángulo pedido

y $CH = h_c$

Sobre CA, hacer $CA' = n$

y sobre CB, " $CB' = m$.

resulta: $A'B' \parallel AB$.

y $\triangle A'B'C \sim ABC$ (2º caso).

$CH' \perp A'B'$

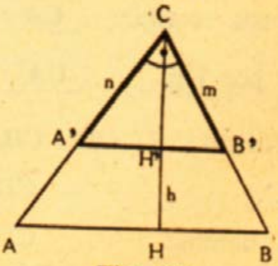


Fig. 217

El $\triangle A'B'C$ es constructible por conocer γ, m, n; tiene igual **forma** que el $\triangle$ pedido. Para darle la **magnitud** requerida, basta que al prolongar CH' el trazo CH sea igual a h_c.

TERCER CASO DE SEMEJANZA.—**Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus lados respectivamente proporcionales, y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, iguales.** (Fig. 218).

Hip.) $\begin{cases} CA : C'A' = CB : C'B' \\ CB > CA;\ C'B' > C'A' \\ \text{y } \measuredangle A = \measuredangle A' \end{cases}$

Tes.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Dem.) En el $\triangle$ ABC, hacer $CD = C'A'$
y $DH \parallel AB$
$\therefore$ $\triangle ABC \sim \triangle DHC$ (Teor. L)

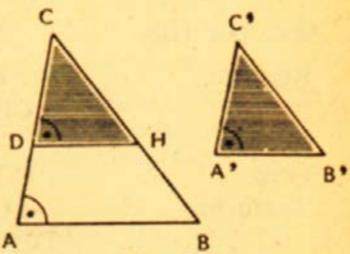


Fig. 218

basta probar que $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$, y lo son, pues:

por ser $DH \parallel AB$, $\quad CA : CD = CB : CH$

y como $\quad C'A' = CD$ (Por construcción)

se puede escribir: $\boxed{\mathbf{CA : C'A'}} = CB : CH \quad (^2)$

pero, por Hip. $\boxed{\mathbf{CA : C'A'}} = CB : C'B'$

Resulta: $\quad CB : \mathbf{CH} = CB : \mathbf{C'B'} \quad (^3)$ (Dos cant. =s...)

$\therefore \quad CH = C'B'$ (Anteced. =s de prop. ant)

Además: $\quad CD = C'A'$ (Por construcción)

y por Hip. $\quad \measuredangle A = \measuredangle A'$

$\therefore \quad \triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ (3.er caso)

Luego: $\quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

CUARTO CASO DE SEMEJANZA.—**Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados respectivamente proporcionales.** (Fig. 219).

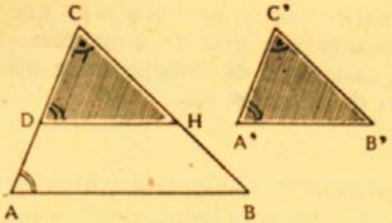


Fig. 219

Hip.) $CA : C'A' = CB : C'B' = AB : A'B'$
Tes.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Dem.) En el $\triangle$ ABC, hacer
$\mathbf{CD = C'A'}$
y $DH \parallel AB$

resulta el $\triangle ABC \sim \triangle DHC$ (Teor. L).
basta probar que: $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ y lo son, pues:
por ser $DH \parallel AB$, $CA : CD = CB : CH = AB : DH$
y como $C'A = CD$ (Por construcción)

Resulta: $\boxed{CA : C'A'} = CB : CH = AB : DH$

Pero por Hip. $\boxed{CA : C'A'} = CB : C'B' = AB : A'B'$

$$\therefore \; 1^{\circ} \quad \frac{CB}{\mathbf{CH}} = \frac{CB}{\mathbf{C'B'}} \qquad \therefore \; \mathbf{CH = C'B'}$$

$$2^{\circ} \quad \frac{AB}{\mathbf{DH}} = \frac{AB}{\mathbf{A'B'}} \qquad \therefore \; \mathbf{DH = A'B'}$$

También $CD = C'A'$ (Constr.)

$\therefore$ $\triangle DHC \cong \triangle A'B'C'$ (4.º caso)

Luego: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

OBSERVACION.—Se puede observar que a cada caso de congruencia corresponde uno de semejanza. Y que, en la demostración de cada caso de semejanza se aprovecha el correspondiente caso de congruencia.

COROLARIOS 1º.—**En triángulos semejantes:** *a ángulos iguales se oponen lados proporcionales; y, a lados proporcionales, se oponen ángulos iguales.*

Según este corolario, los teoremas de semejanza sirven para **probar la igualdad de $\sphericalangle$s y la proporcionalidad de trazos.**

Para ello: a) Se debe descubrir que realmente se cumplen las condiciones de uno de los 4 casos de semejanza; b) Se afirma que los $\triangle$s son semejantes y c) se aplica el corolario anterior, sacando la conclusión que se necesita.

El corolario 1º es el más importante y el que más se emplea.

2º.—Dos $\triangle$s rectángulos son semejantes si tienen un $\sphericalangle$ agudo igual. (1.er caso).

Esta proposición tiene muchas aplicaciones.

3º.—Dos $\triangle$s rectángulos son semejantes si tienen los catetos respectivamente proporcionales. (2º caso).

4º.—Dos $\triangle$s isósceles son semejantes cuando tienen igual el $\sphericalangle$ del vértice o uno de los $\sphericalangle$ basales.

5º.—Dos $\triangle$s son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente $\parallel$s o $\perp$s. (Fig. 220 a y b).

Dem.—En ambos casos los $\triangle$s tienen sus ∢s respectivamente iguales (1.er caso) Teor. 8º y 12º del 3.er A.

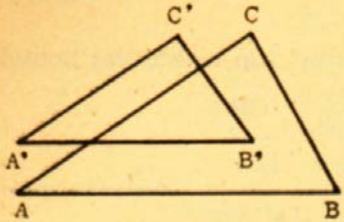


Fig. 220 a

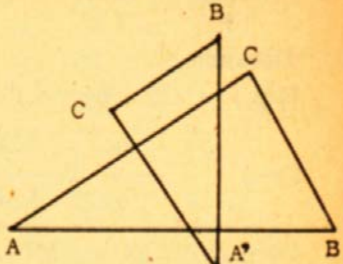


Fig. 220 b

OBSERVACION.—Para la claridad del razonamiento, se recomienda decir siempre en el mismo orden los vértices homólogos de dos $\triangle$s semejantes.

§ *3.—APLICACIONES DE LA SEMEJANZA DE $\triangle$s*

TEOREMA LI.—**Las alturas y bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes son entre sí como dos lados homólogos.** (Fig. 221).

1.º Alturas:

Hip. $\begin{cases} \triangle ABC \sim \triangle MNL \\ CH = h_c \text{ y } LD = h_c' \\ \text{son alturas} \end{cases}$

Tes.) $\dfrac{h_c}{h_c'} = \dfrac{CA}{LM} = \dfrac{CB}{LN}$

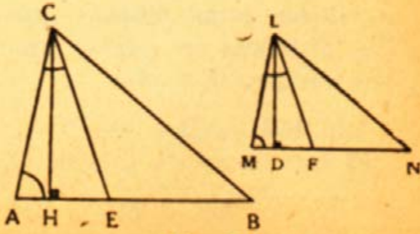


Fig. 221

Dem.) $\triangle$**AHC**$\sim\triangle$**MDL** (1.er caso)

$$\therefore \quad \frac{h_c}{h_c'} = \frac{CA}{LM} \ldots \text{etc.}$$

2.º Bisectrices:

Hip.) $CE = b_\gamma$ y $LF = b_\gamma'$ son bisectrices homólogas

Tes.) $$\frac{b_\gamma}{b_\gamma'} = \frac{CA}{LM} = \frac{CB}{LM}$$

Dem.) $\triangle AEC\sim\triangle$**MFL** (1.er caso)

$$\therefore \quad \frac{b_\gamma}{b_\gamma'} = \frac{CA}{LM} \ldots \text{etc.}$$

En general, en dos $\triangle$s semejantes, todas las *líneas homólogas* son respectivamente proporcionales dos a dos.

Si $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$ resultará:

$a : a' = b : b' = c : c' = h_a : h_a' = b_\alpha : b_\alpha' = t_a : t_a' = p : p' = r : r' = u : u' = \rho : \rho'$, etc.

TEOREMA LII.—**Si un haz de rectas concurrentes a un mismo punto, se corta por dos paralelas, estas últimas quedan divididas en partes proporcionales.** (Fig. 222).

Hip. $EH \parallel AD$

El haz de rectas sale de O.

Tes.) $$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD}$$

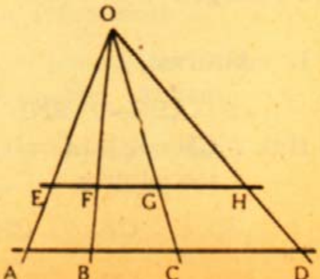


Fig. 222

Dem.) Los triángulos OEF, OFG, OGH, son respectivamente semejantes a los triángulos OAB, OBC, OCD.

Entonces
$$\frac{OE}{OA} = \frac{EF}{AB} = \frac{OF}{OB}$$
$$\frac{OF}{OB} = \frac{FG}{BC} = \frac{OG}{OC}$$
$$\frac{OG}{OC} = \frac{GH}{CD} = \frac{OH}{OD}$$

y relacionando las igualdades, resulta que:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GH}{CD}$$

(Q. E. D.)

PROBLEMA 16.—*Dividir un trazo dado AB en tres partes que sean entre sí como m:n:p* (m, n, p, son longitudes dadas). (Fig. 223).

En A'B' $\parallel$ AB se llevan, una a continuación de otra,

A'D' = m

D'E' = n

E'B' = p.

En seguida

A'(↔) A→ . . . O

B'(↔) B→ . . . O

Las rectas OD' y OE' efectúan la división pedida.

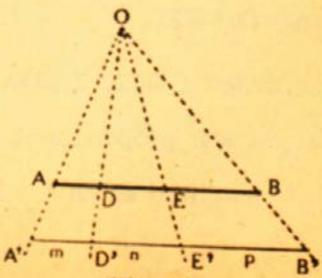


Fig. 223

En efecto, se tiene: AD : DE : EB = m : n : p.

Haz armónico *es la figura que se obtiene al unir un punto O cualquiera con los puntos A, B, X, Y, de una recta dividida armónicamente.*

Toda recta paralela a AB queda dividida armónicamente por los rayos del haz armónico.

TEOREMA LIII.—**Las transversales de gravedad de un triángulo, se cortan en un mismo punto, que divide a cada transversal en la razón de 1 : 2.** (Fig. 224).

Hip.) AE y BD transversales de gravedad del $\triangle ABC$

Tes.) $\dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{1}{2}$

y la 3ª transversal pasa por O.

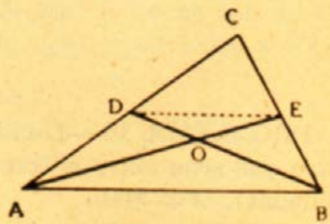


Fig. 224

Dem.) D(↔)E.

Se tiene: $\triangle DOE \sim \triangle BOA$ (1.er caso), luego los lados homólogos son proporcionales; y como $DE = \dfrac{1}{2} AB$, la razón de similitud es de 1 : 2.

$$\therefore \quad \frac{OE}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}$$

Como se eligieron dos transversales cualesquiera, la tercera transversal cortaría a BD en la razón de 1 : 2, es decir, en O.

Luego, las 3 transversales se cortan en un solo punto.

(Q. E. D.)

TEOREMA LIV.—**En un △ABC inscrito en una ⊙ de radio r, el producto de dos lados es equivalente al producto de la altura correspondiente al tercer lado por el diámetro de la ⊙ circunscrita.** (Fig. 225).

Tes.) $ab = h_c \cdot 2r$

Dem.) A(↔)D

Resulta: △ CAD ∼ △ CHB (1.er caso).

∢D = ∢B (∢s inscr. que subtienden mismo arco AC)

y ∢CAD = ∢H = 90°.

∴ CA:CH = CD:CB

o sea: $b : h_c = 2r : a$

∴ $ab = h_c \cdot 2r$. (Propiedad de las prop., pág. 226)

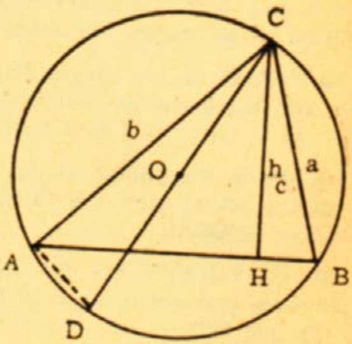


Fig. 225

EJERCICIOS DE APLICACION

• **84.** Los lados de un triángulo miden respectivamente: a= 4 cm, b=3 cm, c=6 cm.

Se traza una paralela al lado c y esta paralela mide 4 cm. Calcular los segmentos determinados por ella en **a** y **b**.

85. En un triángulo ABC, AB=5 cm, BC=8 cm, AC=7 cm. Por un punto D de BC, tal que BD=2 cm, se trazan paralelas a los otros lados. Calcular el perímetro del paralelógramo así formado.

• **86.** Los lados de un triángulo ABC miden: AB=12 cm. BC=11 cm, AC=9 cm. Paralelamente a AB se traza MN=10 cm. Calcular las longitudes de los trazos AM, MC, NC, NB.

• **87.** Las bases de un trapecio miden 8 m y 12 m y los lados 3 m y 5 m. Calcular los lados del triángulo menor que se forma al prolongar los lados.

88. ¿Cuál es la altura del triángulo mayor obtenido al prolongar los lados no paralelos de un trapecio cuyas bases miden 27 m y 36 m y la altura 15 m.?

• **89.** Dado un ángulo O, en uno de los lados se lleva OA =4 cm.; y en el otro, OB=2 cm.; OC=8 cm. Demostrar que: $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCA$.

90. La bisectriz AD del ángulo A de un triángulo ABC, prolongada, encuentra en E la circunferencia circunscrita. Demostrar que $BE^2 = AE \cdot DE$.

91. En el rectángulo ABCD, AB es el doble de AD. Se une el vértice D con un punto E de AB, tal que $AE = \frac{1}{4} AB$.

La recta DE corta en F a la diagonal AC. Demostrar que cuadrilátero BCFE es inscriptible.

• **92.** Demostrar que en un paralelógramo, las distancias de un punto de una diagonal a dos lados adyacentes, son inversamente proporcionales a estos lados.

92'. Se da un △ isósceles ABC y con centro en el punto medio D de la base AB, se describe una O tangente a los otros dos lados; por un punto F de la ⊙ se traza una tangente que corta a los lados CA y CB en M y en N, respectivamente. Demostrar que $AD^2 = AM \cdot BN$.

93. En un △ ABC se trazan sus tres alturas $AA' = h_a$, $BB' = h_b$ y $CC' = h_c$. Demostrar las igualdades: a) $h_a \cdot A'H = A'C \cdot A'B$; b) $h_b \cdot B'H = B'C \cdot B'A$; c) $h_c \cdot C'H = C'A \cdot C'B$; siendo H el ortocentro del △ ABC.

93'. Dado un trapecio ABCD, determinar y construir una paralela a las bases, que sea dividida en tres segmentos iguales por los lados no paralelos y las diagonales.

• **94.** Demostrar que en un △ ABC dos alturas son inversamente proporcionales a los lados correspondientes.

• **95.** Demostrar que en △s semejantes los perímetros son entre sí como dos lados homólogos o dos líneas homólogas cualesquiera.

• **96.** Dos △s ABC y ABC' construídos sobre una misma base hacia un mismo lado, y que tienen igual altura, se cortan por una ‖ a la base común; probar que los segmentos de la ‖ interceptados por los lados de cada △, son iguales.

97. En un △ ABC las alturas AD y BE se cortan en H. Pruébese que △AHE ∼ △BHD.

x • **98.** En un △ las tres medianas forman un △ semejante al total.

99. Si se unen los 3 vértices de un △ ABC con un punto P situado fuera de él, y se marcan los puntos medios A', B' y C' de las rectas de unión, resulta que △ABC ∼ △A'B'C'.

100. Los lados de un △ABC son: $a=15$; $b=10$; $c=20$; $h_c=8$. Calcular h_a y h_b.

• **101.** Los lados de un △ABC son a, b y c. Calcular los de otro △ semejante al primero y construirlo, si el lado homólogo de a es p.

102. Construir un △ cuyos lados sean, respectivamente, el duplo de los de otro △ABC dado. ¿Serán o no semejantes estos dos △s? ¿Por qué?

• **103.** Se da un △ ABC circunscrito a una ⊙ y se une el vértice C con el centro O de la ⊙, hasta cortar el lado AB en D. Probar que: $(a+b) : c = CO : OD$.

104. En un △ABC se aplican sucesivamente sobre AB a partir de A, los trazos $AE = EF = 1/5\ AB$ y se unen C con E y con F. Si se traza la transversal de gravedad t_b, probar que esta transversal dividirá una de las rectas de unión en la razón de 3 : 5 y la otra en la razón de 4 : 5.

104'. Por el vértice de un △ABC se traza una ∥ CX al lado AB y por el punto medio M de AB se traza una recta cualquiera que corta a AX en un punto N, al lado CB en un punto Q y a la prolongación de CA en un punto P. Demostrar que: $PN : PM = QN : QM$.

105. Se da un △ABC inscrito en una ⊙ de radio r; probar la siguiente relación: $S = \dfrac{abc}{4r}$. Generalice dicha relación, formulando o enunciando una proposición.

106. Se da un # ABCD y una transversal trazada desde A divide al lado DC en la razón de 1 : n. Probar que la misma recta divide a la diagonal BD en la razón de $\dfrac{1}{n+1}$. (Ejemplo $n = 5$).

• **107.** Dado un △ ABC trazar una ∥ a uno de sus lados de modo que el △ determinado por dicha paralela tenga un perímetro dado 2s'.

• **108.** Dado un △ ABC, trazar al lado AC una paralela MN de manera que: a) $AM+CN=s$; b) $AM—CN=d$ (s y d son trazos dados).

Construcciones basadas en la semejanza de $\triangle$s

Construir un $\triangle$ dados:

• **109.** $a : b = m : n, \gamma, h_a$

• **110.** $a : b = m : n, \gamma, c$

• **111.** $a : b = m : n, \gamma, t_c$

• **112.** $a : b = 4 : 3, \gamma, h_c$

113. $a : b = 3 : 2, \gamma, r$

114. $a : b = 3 : 2, \gamma, \rho$

• **115.** $a : b = m : n, \gamma, p_c$

• **116.** $a : b = m : n, \gamma, u$

• **117.** $a : b : c = 4 : 3 : 5, t_a$

118. $a : b : c = m : n : q, b_\gamma$

119. $a : b : c = m : n : q, h_b$

• **120.** $a : b : c = 3 : 4 : 5, b_\alpha$

• **121.** $a : b_\gamma = 3 : 2, \gamma, \rho_c$

122. $b : h_c = m : h, c, \gamma$

123. $p : h_c = m : n, \gamma, h_a$

• **124.** $b : c = m : n, \beta, t_b$

• **125.** $c : t_c = 3 : 2, r, \gamma$

126. $r : h_c = 3 : 2, b_\gamma, \gamma$

127. $c + h_c, \alpha, p : q = m : n$

• **128.** $h_c : t_c = m : n, \alpha, v$

129. $(a+b+c) : h_c = m : n, \gamma, \rho_c$

130. $b : t_c = m : n, t_a + t_b, \gamma$

131. $b : b_\gamma = m : n, \alpha, a + b - c = d.$

132. $c : \rho = m : n, \beta, b$

CAPITULO XII

POLIGONOS SEMEJANTES

§ 1.—DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Polígonos semejantes *son polígonos que de igual número de lados tienen los ángulos respectivamente iguales y los lados homólogos proporcionales.*

Dos polígonos de más de tres lados pueden tener todos sus ángulos respectivamente iguales y no tener sus lados respectivamente proporcionales. En efecto, si se traza una paralela a un lado del polígono, todos los ángulos del nuevo polígono son iguales a los del primero, pero alguno de sus lados son iguales a los del primero y otros no.

Por *lados homólogos,* se entiende los lados cupos extremos están en vértices homólogos.

Por *vértices homólogos,* los vértices de $\sphericalangle$ homólogos.

Por $\sphericalangle$s *homólogos* los $\sphericalangle$s respectivamente iguales e igualmente dispuestos.

Así, en Fig. 226, los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' serán semejantes si se verifica que:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$; $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B'C'D'$, etc... y si al mismo tiempo se cumple en ellos que: $AB : A'B' = BC : B'C' = \ldots = k =$ constante, siendo homólogos los lados AB y A'B', BC y B'C', etc...

Suponiendo que $AB = \frac{3}{4} A'B'$, se tendrá que la razón constante $AB : A'B' = \ldots = 3 : 4$, será *la razón de semejanza o similitud* de dichos polígonos.

TEOREMA LV.—**Dos polígonos semejantes pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente semejantes, por las diagonales que, sin cortarse, parten de vértices homólogos.** (Fig. 226).

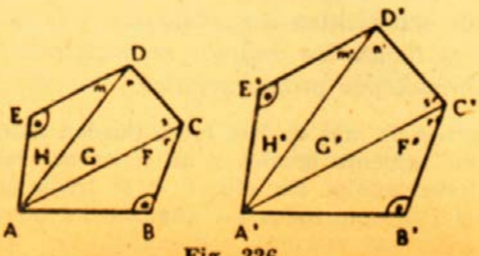


Fig. 226

Hip.) ABCDE~A'B'C'D'E'
y AC, AD, A'C', A'D' son diagonales.

Tes.) Los triángulos H, G, F son semejantes a los triángulos H', G' F'.

Dem.) el $\triangle$ H ~ $\triangle$ H' pues

por hipótesis $\sphericalangle E = \sphericalangle E'$

$$\text{y} \quad \frac{AE}{ED} = \frac{A'E'}{E'D'} \quad \text{(2º caso S.)}$$

el $\triangle$F ~ $\triangle$F' pues $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$
por hipótesis

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{(2º caso S.)}$$

si $\triangle$H ~ $\triangle$H' $\quad \sphericalangle m = \sphericalangle m'$
y como $\quad \sphericalangle D = \sphericalangle D'$
$\therefore \quad \sphericalangle n = \sphericalangle n'$ (1)
y si $\triangle$F ~ $\triangle$F' $\quad \sphericalangle r = \sphericalangle r'$
y como $\quad \sphericalangle C = \sphericalangle C'$
$\therefore \quad \sphericalangle s = \sphericalangle s'$ (2)
luego, también

$$\triangle G = \triangle G' \quad \text{(1.er caso S)}$$

COROLARIO.—*En polígonos semejantes, dos diagonales homólogas son entre sí como dos lados homólogos. Puede decirse lo mismo de todas las líneas homólogas de polígonos semejantes.*

TEOREMA (recíproco) LVI.—**2 polígonos compuestos del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente colocados, son semejantes.** (Fig. 227).

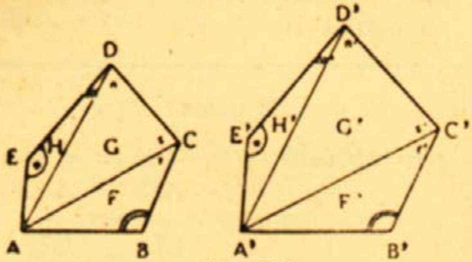


Fig. 227

Hip.) Los triángulos H, G, F son semejantes a los triángulos H', G', F' respectivamente.

Tes.) ABCDE$\sim$A'B'C'D'E'

Dem.) Hay que demostrar la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados.

si $\triangle H \sim \triangle H'$	$\sphericalangle E = \sphericalangle E'$
	$\sphericalangle m = \sphericalangle m'$
si $\triangle F \sim \triangle F'$	$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$
también	$\sphericalangle r = \sphericalangle r'$
y si $\triangle G \sim \triangle G'$	$\sphericalangle s = \sphericalangle s'$
luego	$\sphericalangle C = \sphericalangle C'$
En la misma forma se prueba que:	$\sphericalangle D = \sphericalangle D'$
y	$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$

si $\triangle F \sim \triangle F'$: $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

si $\triangle H \sim \triangle H'$: $\quad \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{EA}{E'A'} = \dfrac{AD}{A'D'}$

si $\triangle G \sim \triangle G'$: $\quad \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{AD}{A'D'}$

A causa de esta última igualdad, se puede decir que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

Luego: $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

TEOREMA LVII.—**Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos o como dos líneas homólogas.**

Hip.) $ABCD \sim A'B'C'D'$

Tes.) $\dfrac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'} = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{m}{m'}$

Dem.) Si $ABCD \sim A'B'C'D'$ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'} = \ldots \dfrac{m}{m'}$

y en una serie de razones iguales $\dfrac{a+b+c+d}{a'+b+c+d'} = \dfrac{a}{a'} = \ldots \dfrac{m}{m'}$

TEOREMA LVIII.—**Dos polígonos regulares de un mismo número de lados, son semejantes.**

Dem.) a) Tienen sus $\sphericalangle$s iguales (iguales a $\frac{n\ 2R—4R}{n}$)

b) Existe una razón única entre sus lados homólogos: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \ldots$

Luego dichos polígonos son semejantes.

COROLARIO 1º.—*En polígonos regulares de un mismo número de lados, los radios y las apotemas son entre sí como los lados.*

COROLARIO 2º.—*Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados, son entre sí como sus radios o sus apotemas.*

Compás de reducción. Fig. 228

Para reducir las dimensiones de una figura (plano, mapa ...) a la tercera, cuarta, quinta ... parte se emplea un **Compás de reducción.**

Se compone de dos ramas iguales terminadas en puntas verticales.

Ambas ramas pueden girar alrededor de O.

Una de las reglas está graduada.

$\triangle AOC \sim \triangle BOD$

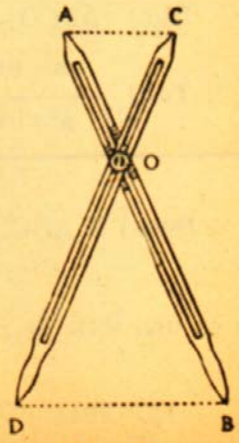


Fig. 228

Si $OA = \frac{1}{2} OB$

también $AC = \frac{1}{2} BD$

La razón $\frac{OA}{OB}$ es graduable a voluntad.

§ 2.—*HOMOTECIA — SUS PROPIEDADES*

Homotecia es la parte de la Geometría que trata del estudio de las propiedades de las *figuras homotéticas.*

Se llaman **figuras homotéticas,** *figuras semejantes* que están dispuestas de tal modo que sus *lados homólogos son paralelos.* (Fig. 229).

TEOREMA LIX.—**Las rectas que unen vértices o puntos homólogos de polígonos homotéticos concurren a un mismo punto.** (Fig. 229).

Hip.) ABCD homotético con EFGH.

Tes.) AE, CG, BF, DH se cortan en el mismo punto, P.

Dem.) Supóngase que DH y CG se cortan en P y que BF corta en P'.

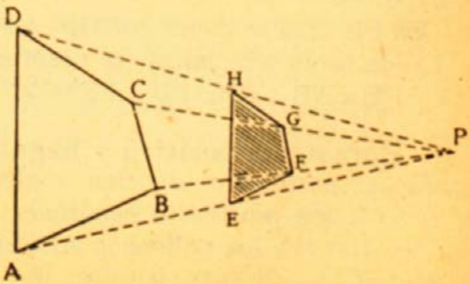


Fig. 229

se tendría:

$$PC : PG = CD : GH$$
$$P'C : P'G = CB : GF$$
$$CD : GH = CB : GF \quad \text{(Hipótesis)}$$
$$\therefore \quad PC : PG = P'C : P'G \quad \text{(Dos cantid. =s...)}$$

y como existe un solo punto que divide exteriormente a CG en una razón dada, P y P' se confunden.

Las rectas que unen los vértices homólogos de polígonos homotéticos se llaman *rayos de similitud o de homotecia.*

Centro de similitud o de homotecia es el punto en que concurren todos los rayos de homotecia, en figuras homotéticas.

La razón constante entre las distancias del centro de similitud a dos vértices homólogos de polígonos homotéticos, se llama *razón de homotecia.* En Fig. 229 se tiene: $PA : PE = PB : PF = \ldots = k$.

Esta razón *es igual* a la razón de *semejanza o similitud,* es decir, igual a la que existe entre dos *lados homólogos* o dos *líneas homólogas cualesquiera* de los polígonos semejantes.

En Fig. 229 se tiene: $\triangle PAB \sim \triangle PEF; \triangle PBC \sim \triangle PFG \ldots$ etc.... de estas semejanzas se desprende directamente que: $PA : PE = AB : EF = PB : PF = BC : FG = \ldots = k$.

Homotecia positiva y negativa.— La homotecia puede ser *positiva o negativa,* según que *la razón de homotecia* k sea *positiva o negativa.*

En Fig. 230, los polígonos ABCD y A'B'C'D' *son positivamente homotéticos* porque la razón de homotecia

$$\frac{OB}{OB'}, = \ldots = k, \text{ es positiva.}$$

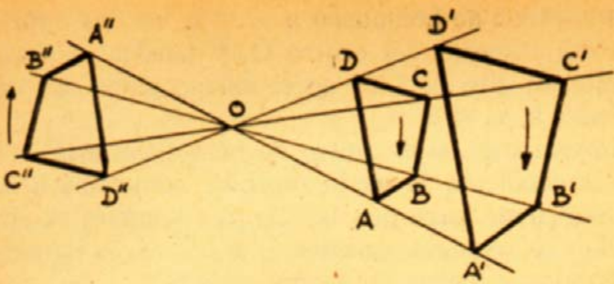


Fig. 230

Los polígonos ABCD y A"B"C"D" son *negativamente homotéticos* puesto que $\frac{OB}{OB''}$ es negativa.

En el primer caso, las figuras quedan a *un mismo lado del centro de similitud* y los rayos de similitud (radios vectores) tienen el *mismo signo*. (Fig. 230).

En el segundo caso, las dos figuras quedan *separadas por el centro de similitud o de homotecia* y los rayos de similitud son de *distinto signo*.

La homotecia positiva y negativa se suelen designar, respectivamente, con el nombre de homotecia **directa** e **inversa**. Sin embargo, este último término no es el más apropiado, puesto que los perímetros de las tres figuras homotéticas son recorridos siempre en el mismo sentido y los $\sphericalangle$s de las mismas tienen el mismo sentido. Fig. 230.

Cuando dos figuras planas son negátivamente homotéticas, tal sistema, puede ser transformado en un sistema homotético positivo haciendo girar a una de las figuras en 180° alrededor del centro de similitud O, en el mismo plano.

Si la razón de homotecia $k = -1$, las dos figuras son simétricas respecto del centro O, y pueden sobreponerse mediante un giro de 180° en el mismo plano. En éste último caso, $k = +1$.

Sin embargo, si el centro de homotecia está en el infinito, la condición de ser la razón de homotecia $k = +1$, no es suficiente para que las figuras homotéticas puedan coincidir; se requiere, además, que los rayos de similitud sean iguales y tengan la misma dirección.

Dos figuras homotéticas son siempre semejantes. La propiedad recíproca no es cierta, porque dos figuras semejantes pueden ser o no homotéticas, pero siempre será posible colocarlas de manera que lo sean.

TEOREMA LIX'.—**Dos polígonos semejantes se pueden colocar siempre de manera que sean homotéticos, tanto positiva como negativamente.**

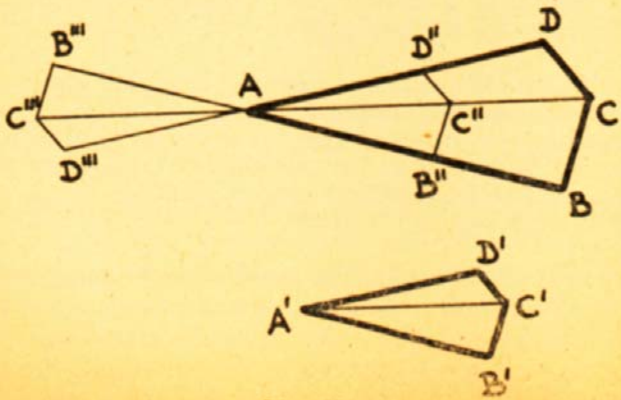


Fig. 231

Demostración.—Sean los polígonos semejantes dados ABCD y A'B'C'D' (Fig. 231).

1º Para obtener que sean positivamente homotéticos se hace AD"=A'B'; D"C" || DC; D"C"=D'C'; C' (↔) C.

CC" pasará necesariamente por A (teor. ejerc. Nº 56).

Por último se traza C"B" || CB.

Resulta que el polígono AB"C"D" es positivamente homotético del polígono ABCD (lados homólogos ||s).

Para dejar demostrada la tesis del teorema bastará hacer ver que A'B'C'D' tiene la posición de AB"C"D", o sea, que estos dos polígonos son congruentes entre sí.

En efecto, lo son, porque tienen todos sus ángulos y lados respectivamente iguales: sus ángulos: $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ (por Hip.); $\sphericalangle D = D'$ (Hip) y $\sphericalangle D = \sphericalangle D''$ $\therefore$ $\sphericalangle D' = \sphericalangle D''$.

Del mismo modo, $\sphericalangle C' = \sphericalangle C''$; $\sphericalangle B' \leftrightarrow \sphericalangle B''$.

Sus lados: A'D'=AD" (construcción); D'C'=D"C" porque:

(1) DC : D'C' = AD : A'D' (Hip.)

(2) DC : D"C" = AD : AD" (cuadr. ABCD∼cuadr. AB"C"D")

$\therefore$ DC : D'C' = D'C' : D"C" (2.os miembros =s en 1 y 2)

$\therefore$ D'C' = D"C" (antecedentes =s de últ. prop.)

Del mismo modo se puede demostrar que C'B'=C"B" y que A'B'=AB".

Luego cuadril. A'B'C'D' ∼ AB"C"D" y positivamente homotético de cuadr. ABCD.

2º AB'"C'"D'" simétrico de AB"C"D";

$\therefore$ A'B'C'D'≌AB'"C'"D'".

Luego el cuadr. A'B'C'D' es en esta última posición negativamente homotético de cuadr. ABCD.

NOTA.—Se puede hacer notar que en la **similitud, las figuras semejantes** pueden tener una infinidad de posiciones diferentes en el plano, no sucede así en la homotecia, en la cual, la propiedad más importante es que en las **figuras homotéticas las líneas homólogas son paralelas.**

La homotecia es pues, un caso particular de la similitud.

De lo expuesto anteriormente se puede concluir:

1.º *La figura homotética de un punto, es otro punto que es colineal con el centro de similitud y con su homólogo.*

2.º *La figura homotética de una recta cualquiera es otra recta paralela a la primera.*

En efecto, en fig. 231 B'A' || BA es homotética de BA; B'C' || BC es homotética de BC. Como B'A' y B'C' tienen un punto común B' y ambas son ||s a la recta ABC, B'A y B'C' determinarán la || A'C' a la recta ABC.

3.º *La figura homotética de un segmento de recta o de un vector es otro segmento de recta u otro vector paralelo al primero.*

4.º *La figura homotética de un ángulo es otro ángulo igual al primero y del mismo sentido que aquel.*

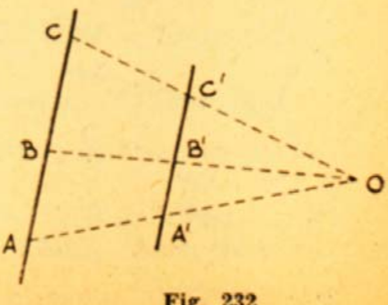


Fig. 232

En efecto cada lado del ∢ dado tiene por homólogo una semirrecta paralela con él y del mismo sentido o de sentido contrario según que la homotecia sea positiva o negativa.

5.° *La figura homotética de un △ es otro △ semejante.*

6.° *La figura homotética de un polígono es otro polígono semejante al primero.*

7.° *La figura homotética de toda recta que pasa por el centro de homotecia es ella misma; recíprocamente, si una recta coincide con la homóloga, pasa por el centro.*

Para el segmento OA, fig. 231, el punto O es homotético de sí mismo y el homotético del punto A está sobre el radio OA.

8.° *La figura homotética de un círculo es otro círculo.*

9.° *La figura homotética de una curva es otra curva.*

Las tangentes a dos curvas homotéticas en dos puntos homólogos son ||s.

Demostración. — Sean A y B dos puntos de la curva L, y A' y B' los puntos homólogos correspondientes de la curva L'. Fig. 233.

Siendo las curvas L y L' homotéticas las cuerdas AB || A'B'.

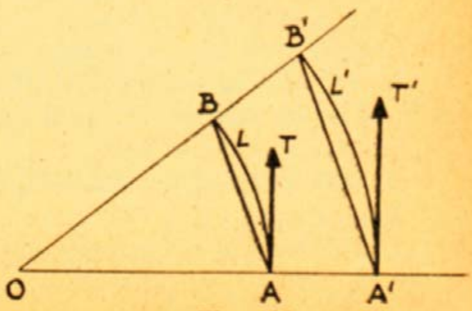


Fig. 233

Si el punto B se aproxima al punto A, permaneciendo siempre sobre la curva L, el punto B', en iguales condiciones, se aproximará al punto A', las cuerdas AB y A'B' permanecerán durante este desplazamiento constantemente $\parallel$s. En la posición límite, esto es, cuando lleguen a ser tangentes seguirán siendo $\parallel$s. Luego AT $\parallel$ A'T'.

TEOREMA LIX'.—**Dos $\odot$s cualesquiera, son a la vez positiva y negativamente homotéticas.**

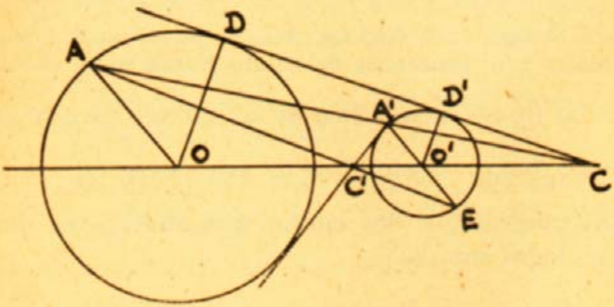


Fig. 234

Sean O y O' las $\odot$s dadas y sus radios r y r'. Se traza OA $\parallel$ O'A' y la secante CA'A hasta su intersección con la línea de los centros OO' prolongada.

Resulta $\triangle$ COA$\sim$CO'A'

$\therefore$ CO : CO'$=$CA : CA'$=$OA : OA'$=$r : r'

Pero siendo CO : CO' r : r', razón constante, cualquier otra secante o tangente que una dos puntos homólogos de ambas $\odot$s (extremos de radios $\parallel$s) debe pasar por C (teor. XXXIX.

Luego C es el centro de homotecia para las $\odot$s O y O' y como sus radios tienen mismo sentido, las ⊙s son positivamente homotéticas.

Si se consideran los radios OA || O'E y de sentido contrario, se tendrá:

$$\frac{\overline{C'O}}{\overline{C'O'}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'E}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{O'E}} = -\frac{r}{r'}$$

y las ⊙s serán negativamente homotéticas respecto del centro de homotecia C'. Las tangentes comunes exteriores de las ⊙s, como DD'C, pasan por el centro de homotecia positiva C. Las tangentes comunes interiores, como L, pasan por el centro de homotecia positiva negativa C'.

Elementos que determinan la homotecia.— La homotecia queda definida:

a) *Por el centro de homotecia y un par de puntos homólogos;*

b) *Por dos segmentos homólogos paralelos;*

c) *Por la razón de homotecia y el centro de homotecia.*

§ 3.—*APLICACIONES DE LA HOMOTECIA*

PROBLEMA 17.—*Construir un polígono que tiene un lado conocido semejante a otro dado.*

Sea ABCD el polígono dado y a' el lado del polígono ∼ pedido.

a) *El centro de homotecia queda fuera del polígono dado.* (Fig. 235).

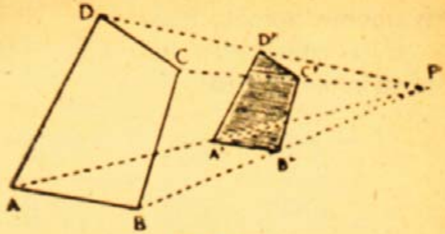


Fig. 235

Solución.—Se hace:
A'B' || AB
y A'B'=a' (el lado dado).

Se trazan los rayos de homotecia AA' y BB' hasta su intersección en el punto **P.** Este punto será el centro de similitud de los polígonos.

Se trazan todos los demás rayos de homotecia uniendo P con los vértices del polígono dado:

Rayos CP y DP

Se hace: B'C' || BC y C'D' || CD
A'(↔)D'

A'B'C'D' polígono pedido. ¿Cuántas soluciones hay?

b) *El centro de homotecia queda dentro del polígono dado.* (Fig. 236).

Se hace: A'B' || AB (en el interior del polígono).

y A'B'=a'

Se trazan los rayos de homotecia y B'C'||BC.
C'D' || CD . . . etc. mismo camino del caso anterior **a.**

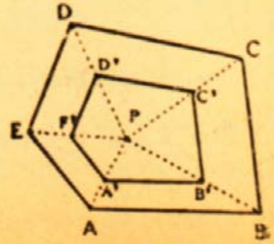


Fig. 236

c) *El centro de homotecia queda en un vértice del polígono dado.* (Fig. 237).

Se hace AB'=a'.

Se trazan los rayos de homotecia y B'C'' || BC. . . etc.

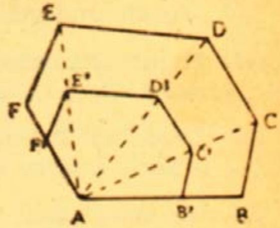


Fig. 237

d) *El centro de homotecia queda en un punto situado en un lado del polígono.*

e) *El centro de homotecia queda entre los dos polígonos homotéticos.* (Fig. 230).

PROBLEMA 18.—*Por un punto dado P trazar la recta que pasa por el vértice del ángulo que formarían dos rectas L y L' que no pueden prolongarse.* (Fig. 238).

Por P se trazan PM y PN de modo que corten las rectas en M y N.

M(↔)N

Por cualquier punto M' de L se trazan: M'N' || MN y M'P' || MP en seguida N'P || NP

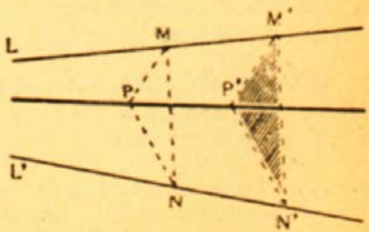


Fig. 238

PP' es la recta pedida, porque los triángulos MPN y M'P'N' son homotéticos.

EJERCICIOS

133. En un triángulo dado, inscribir un cuadrado.

134. En un triángulo, inscribir otro triángulo cuyos lados sean paralelos a tres rectas dadas.

135. Desde un **P** exterior a una $\odot$ trazar una secante tal, que la parte exterior sea igual a la parte interior.

* **136.** En una $\odot$ dada inscribir un triángulo semejante a otro triángulo dado.

* **137.** Circunscribir a una $\odot$ dada un triángulo que sea semejante a otro triángulo lado.

138. En un semicírculo inscribir un cuadrilátero semejante a otro cuadrilátero dado y que tenga dos vértices en el diámetro y los otros dos en la circunferencia.

139. ¿Cuál es la razón de los perímetros de dos triángulos equiláteros que tienen por lado 10 m y 18 m respectivamente?

140. Un triángulo tiene por lados 12, 25 y 32 m; ¿cuánto miden los lados de un triángulo semejante y de perímetro triple?

141. En un rectángulo ABCD, AB = 6 cm y BC = 9 cm. Trazar EF paralela a AB de modo que los rectángulos ABFE y ABCD sean semejantes.

142. Dado un rectángulo ABCD, se baja desde cada vértice una perpendicular a la diagonal opuesta. Demostrar que los pies de estas perpendiculares son los vértices de un rectángulo semejante al dado.

* **143.** Describir una circunferencia que pase por un punto dado P y sea tangente a dos rectas dadas L y L'.

CAPITULO XIII

RELACIONES METRICAS EN EL TRIANGULO RECTANGULO

TEOREMA LX.—**En todo $\triangle$ rectángulo la altura bajada desde el vértice del ángulo recto es media proporcional geométrica entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.** (Fig. 239).

Hip.) $\triangle$ ABC es $\triangle$ rect.

$CH = h_c$.

Tes.) $h_c^2 = p \cdot q$.

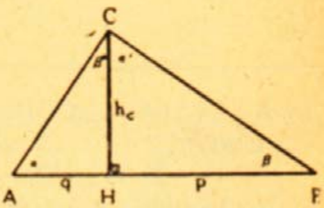


Fig. 239

Dem.) $\triangle AHC \sim \triangle CHB$.

porque: 1° $\sphericalangle AHC = \sphericalangle BHC$ $(= 90°)$

2° $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$ (lados $\perp$s) (1.er caso)

si los triángulos son semejantes, sus lados homólogos son proporcionales.

$$\therefore \quad q : h_c = h_c : p.$$

(Q. E. D.)

Haciendo el producto de los medios igual al producto de los extremos se tiene la demostración del 2° teorema de Euclides (el referente a la altura) cuyo enunciado se puede ver en la pág. 139.

o sea que:

$$\boxed{h_c^2 = p.\ q.}$$

(Q. E. D.)

TEOREMA LXI.—"**Un cateto de un triángulo rectángulo es ½ p. g. entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella".** (Fig. 240).

Hip.) $\triangle ABC$ es rectángulo
$CH = h_c$.

Tes.) $\begin{cases} a^2 = c \cdot p \\ b^2 = cq \end{cases}$

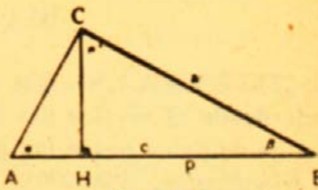


Fig. 240

Dem.) $\triangle ABC \sim \triangle CBH$. (1.er caso de semejanza de $\triangle$s).
En efecto, 1º $\beta = \beta$ ($\sphericalangle$ común)
2º $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CHB = 90°$

Si los triángulos son semejantes, las lados homólogos son proporcionales;

Luego: $c : a = a : p$

Del mismo modo: $c : b = b : q$

En la proporción anterior, haciendo el producto de los medios igual al de los extremos, resulta demostrado el 1.er teorema de Euclides (el referente al cateto) cuyo enunciado puede verse en la pág. 138.

O sea que:

$$\boxed{a^2 = c \cdot p}$$

De igual forma se puede demostrar que $b^2 = cq$.

TEOREMA LXII.—(Particular de Pitágoras).—"**El cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos".** (Fig. 114).

Hip). $\triangle ABC$, $\triangle$rectángulo.

Tes.) $c^2 = a^2 + b^2$

Dem.) $a^2 = cp$ (1.er teor. de Euclides)

$b^2 = cq$

Sumando $a^2+b^2=cp+cq$

$a^2+b^2=c\ (p+q)$

pero $p + q = c$

luego $a^2+b^2=c^2$

o $\boxed{c^2=a^2+b^2}$ (Q. E. D.)

También se puede escribir: $a^2=c^2-b^2=(c+b)\ (c-b)$

$b^2=c^2-a^2=(c+a)\ (c-a)$

$c = \sqrt{a^2+b^2}$

$a = \sqrt{c^2-b^2}$

$b = \sqrt{c^2-a^2}$

También se puede demostrar fácilmente que en un triángulo rectángulo:

$$\boxed{ab = c\ h_c}$$

TEOREMA GENERAL DE PITAGORAS LXIII.—**"En cualquier triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de ellos, por la proyección del otro sobre él".** (Fig. 241).

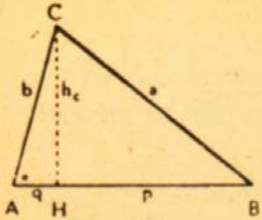


Fig. 241

Hip.) $\alpha < 90°$
$CH = h_c$
Tes.) $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$

Dem.) $a^2 = h_c^2 + p^2$
$h_c^2 = b^2 - q^2$
y como $p = c - q$
$p^2 = c^2 + q^2 - 2cq$

Sumando miembro a miembro:

$$h_c^2 + p^2 = b^2 + c^2 - 2cq$$

Luego: $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$

(Q. E. D.)

NOTA.—Si $\alpha > 90°$, se tiene: $p = c + q$ entonces resulta:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\ cq.$$

Cálculo de las alturas de un triángulo en función de los 3 lados. (Fig. 242).

$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

Calculamos p^2 $(\beta < 90°)$.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cp.$$

$$\therefore p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

$$p^2 = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2}$$

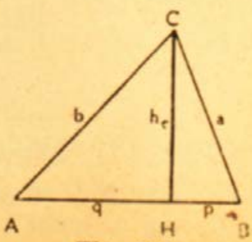


Fig. 242

reemplacemos p^2 en la primera ecuación

$$h_c^2 = a^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}$$

$$h_c^2 = \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}$$

$$h_c^2 = \frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)\ (2ac-a^2-c^2+b^2}{4c^2}$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}\ (a^2+2ac+c^2-b^2)\ (b^2-[a^2-2ac+c^2])$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}\ [(a+c)^2-b^2]\ [b^2-(a-c)^2]$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}\ (a+c+b)\ (a+c-b)\ (b+a-c)\ (b-a+c)$$

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2}\ 2s \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-a)$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$$

Fórmula de Herón de Alejandría (229-284 A. de C— *La superficie de un triángulo ABC en función de los tres lados.*

$$\text{Si} \qquad h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$$

$$S_{\text{triang. ABC}} = \frac{1}{2}c\,h_c = \frac{1}{2}c \cdot \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)\ (s-b)\,(s-c)}$$

$$\text{Luego: } S_{\text{triang. ABC}} = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$$

Fórmula de la superficie de un triángulo ABC en función de los radios de las circunferencias inscritas y ex-inscritas.

$$S = s\,\rho$$
$$S = \rho_a\ (s-a)$$
$$S = \rho_b\ (s-b)$$
$$S = \rho_c\ (s-c)$$

Multiplicando m. a m. las 4 igualdades

$$S^4 = s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)\ \rho\rho_a\ \rho_b\ \rho_c$$
$$S^4 = S^2 \cdot \rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c$$
$$S^2 = \rho\rho_a\rho_b\rho_c$$
$$S = \sqrt{\rho\ \rho_a\ \rho_b\ \rho_c}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

• **144.** Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 20 m y 21 m.

• **145.** Calcular la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son 15 m y 8 m.

• **146.** Calcular los dados de un rombo, cuyas diagonales miden 6 m y 8 m.

147. ¿Por qué es rectángulo todo triángulo cuyos lados son entre sí como 3 : 4 : 5?

148. Colocado verticalmente a 4 m de la orilla de un río. un palo sobresale 3 m; inclinado, su extremo toca la ribera. ¿Cuál es la profundidad del río?

• **149.** En un $\triangle$ rectángulo ABC, $h_c = 9{,}6$ y la hipotenusa $c = 20$. Calcúlense los dos catetos.

• **150.** En un triángulo rectángulo un cateto vale la mitad de la hipotenusa, y el cuadrado de ésta es 256 m^2. ¿Cuál será la longitud de los catetos?

• **151.** En un triángulo rectángulo ($\triangle$ R.) calcular: a, b, h_c, p, q, si $a+b=35$ m y $c=25$ m.

152. En un $\triangle$ R., calcular h_c si $a = 8$ m y $b = 6$ m.

• **153.** En un $\triangle$ R., calcular a, b, si $p = 32$ m y $q = 18$ m.

• **154.** En un $\triangle$ R., calcular a y b si $p : q = 9 : 16$ y $h_c = 12$ m.

• **155.** En un $\triangle$ R., calcular a, p, q, si $b=15$ m y $h_c=12$ m.

• **156.** En un $\triangle$ R., calcular a, b, p, q, si $h_c=9$; $p-q=5{,}25$ m.

157. En un $\triangle$ R. se tiene $c = 100$ m, $a = 60$ m. Calcular el perímetro de cada uno de los triángulos parciales determinados por la altura.

158. Demostrar que para todo punto situado dentro de un rectángulo, se verifica que la suma de los cuadrados de las distancias a dos vertices opuestos, es igual a la suma de los cuadrados de las distancias a los otros dos.

• **159.** Demuestre que si en un cuadrilátero las diagonales se cortan perpendicularmente, la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

• **160.** En un triángulo ABC la altura $CH = 6$ cm divide la base en dos segmentos $HA = 3$ cm y $HB = 2$ cm. Calcular los lados CA y CB y el radio **r** del círculo circunscrito al triángulo.

161. En un círculo de 4 cm de radio, se inscribe un triángulo ABC, tal que $AB=4{,}8$ cm y $AC=6$ cm. Determinar la longitud del lado BC.

• **162.** En un $\triangle$ ABC, $CA = CB$. La altura h_c vale 8 m y el radio de la circunferencia circunscrita es de 5 m. Calcular los lados del triángulo.

• **163.** Calcular el radio del círculo circunscrito a un triángulo de lados $a = 39$ mm. $b = 60$ mm, $c = 63$ mm.

• **164.** Demostrar que en un $\triangle$ rectángulo los cuadrados de los catetos son entre sí como sus proyecciones sobre la hipotenusa.

• **165.** Se da un $\triangle$ equilátero cuyo lado mide 10 cm. ¿Cuánto mide su altura?

• **166.** Si el lado de un $\triangle$ equilátero vale l, calcular la altura en función de l. **Retenga ese valor.**

• **167.** Si en un $\triangle$ equilátero $h = 5\sqrt{3}$ cm. ¿Cuánto mide el lado?

168. En un $\triangle$ rectángulo isósceles, $c = 6$ m. Calcular a y b.

169. En un $\triangle$ ABC, $a=15$; $b=20$; $c=7$. Calcular p.

170. En un $\triangle$ isósceles ABC, $h_c = 20$; $a = 24$ cm. Calcular el área.

• **171.** El área de un $\triangle$ equilátero es $25\sqrt{3}$. Calcular 1º su altura; 2º calcular su base.

• **172.** Demostrar que si sobre un mismo trazo AB, como hipotenusa, se construyen varios $\triangle$s rectángulos: ABC, ABC', ABC" . . . etc. se verifican las siguientes relaciones:

$$a^2 : a'^2 : a''^2 \ldots = p : p' : p'' \ldots \text{etc.}$$

173. Demostrar que en un $\triangle$ ABC se cumplen las siguientes relaciones:

1) $a^2+b^2 = 2\left(\frac{c}{2}\right)^2+2t_c^2$

2) $a^2+4t_a^2 = 2b^2+2c^2$

Formular estos resultados por medio de una proposición.

3) En el mismo $\triangle$, calcular p y q en función de sus lados a, b y c.

174. En un $\triangle$ ABC rectángulo en C, el ángulo α mide 60° Determinar en qué razón la bisectriz de este ángulo divide al lado BC y a la altura CH.

* **175.** En un trapecio isósceles ABCD, los lados no paralelos son iguales a la base menor CD = 10 cm. Los ángulos en A y en B, miden 60°.

Calcular la base mayor, la altura y la diagonal del trapecio.

176. En un trapecio ABCD, rectángulo en A y D, el ángulo B vale 60° y la diagonal AC es perpendicular a BC. Calcular los lados y la diagonal del trapecio sabiendo que la base menor vale 10 cm.

177. Calcular el radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo cuyos catetos son a = 7 m y b = 24 m.

* **178.** Un triángulo rectángulo está inscrito en un círculo de 37 m de diámetro y circunscrito a un círculo de 5 m de radio.

Calcular los catetos.

179. Demostrar que si dos triángulos rectángulos son semejantes, $cc' = aa' + bb'$.

180. En un triángulo ABC la base AB = 36 mm queda fija y el vértice C es variable. Se da la relación $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 2960$. Calcular la transversal de gravedad CM. Hallar el lugar geométrico del vértice C. (Se hará ver que es una circunferencia cuyo centro es el punto medio de AB).

181. Dado un segmento fijo AB = a, determinar y construir el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2a^2$. ¿Cuál es la altura máxima de los triángulos PAB?

182. Dado un segmento fijo de longitud AB = a, determinar el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k^2$ (siendo k una longitud dada). (Se determinará primero la longitud de la proyección de la transversal de gravedad relativa a AB y de ello se deducirá que el lugar buscado es una circunferencia). Discutir.

183. En un triángulo ABC de base fija $AB=8$ cm de vértice C variable, se tiene $CA^2-CB^2=12$. Determinar la longitud de la proyección de la transversal de gravedad CM sobre AB. Deducir de ello que el lugar geométrico del vértice C es una perpendicular a AB. Situar el pie H de esta perpendicular con respecto al punto medio M de AB.

184. Siendo AB un segmento dado de longitud a, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos P tales $PA^2-PB^2=k^2$ siendo k una longitud dada? Construir el lugar en los casos particulares siguientes: 1º $k^2=2a^2$; 2º $k^2=a^2$; 3º $k^2=o$. Interpretar este último caso particular recordando proposiciones generales conocidas.

CAPITULO XIV

RELACIONES METRICAS EN EL CIRCULO

TEOREMA LXIV.—**Si dos cuerdas de un círculo se cortan, el producto de los segmentos de una de ellas, es igual al producto de los segmentos de la otra.** (Fig. 243).

Hip). Las cuerdas AB y CD se cortan en E.

Tes.) $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

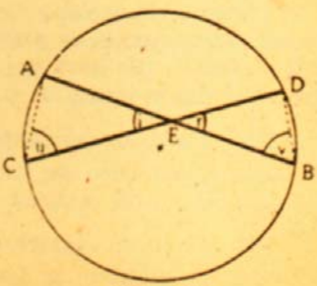


Fig. 243

Dem.) $\sphericalangle u = \sphericalangle v$ ($\sphericalangle$s inscritos que comprenden = arco)

$\sphericalangle i = \sphericalangle r$. (op. vértice)

luego,

$\triangle CEA \sim \triangle BED$ (1.er caso)

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{EB}{ED}$$

Haciendo el producto de los medios, igual al producto de los extremos, resulta: $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

COROLARIO.—*La mitad de una cuerda que queda dimidiada por otra es ½ p. g. entre los segmentos de ésta.*

TEOREMA LXV.—**Dos secantes que salen de un mismo punto, situado fuera de un círculo, son inversamente proporcionales a sus segmentos externos** (Fig. 244).

Hip.) Las secantes PA y PC se cortan en P.

Tes.) $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$

Dem.) Unir A con D y C con B

$\triangle APD \sim \triangle CPB$ (.er caso)

En efecto:

1º) $\sphericalangle P$ común

2º) $\sphericalangle i = \sphericalangle r$ (Teor. IX, corol 1)

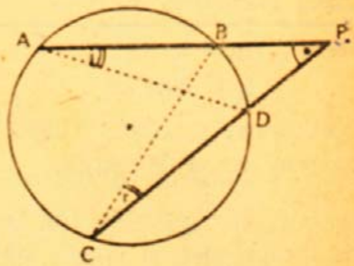


Fig. 244

luego: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB}$

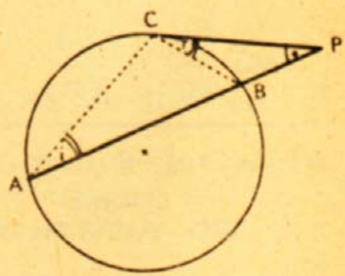
(Q. E. D.)

COROLARIO—*Si por un punto situado fuera de un círculo, se trazan dos secantes, el producto de una secante por su segmento exterior, es igual al producto de la otra secante por su parte exterior.*

Pues si, $$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

resulta que $$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

TEOREMA LXVI.—**Si por un punto situado fuera de un círculo, se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante entera y su segmento exterior.** (Fig. 245).



Hip.) PC es tangente y
PA es una secante

Tes.) $PC^2 = PA \cdot PB.$

Dem.) Unir A con C
y C con B;

entonces $\triangle ACP \sim \triangle CBP$
porque: 1.° $\sphericalangle$ P común;

2.° $\sphericalangle i = \sphericalangle r$ (el $\sphericalangle$ i inscrito y el $\sphericalangle$ r semi-inscrito, comprenden el mismo arco BC).

luego: $$\frac{PB}{PC} = \frac{PC}{PA}$$

y $$PC^2 = PA \cdot PB.$$

Potencia de un punto P respecto de una $\odot$.—*Es el producto constante de las distancias de este punto a los 2 puntos de intersección de la* $\odot$ *con la recta trazada por el punto considerado.*

Ej.: $PD \cdot PE = PB \cdot PC = PF^2 = k^2$ **(Fig. 246 a)** o bien, $PD \cdot PE = PF \cdot PG = PB \cdot PC = k^2$ **(Fig. 246 b)**.

Dicha recta puede ser una cuerda o una secante cualquiera. y aun la tangente, trazadas por dicho punto.

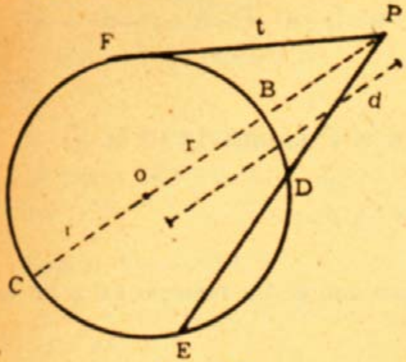


Fig. 245

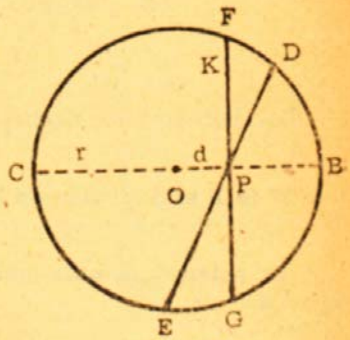


Fig. 246

Cálculo de la potencia de un punto en función de la distancia del punto al centro O de la ⊙.—Se traza el diámetro BC que pasa por P. Fig. 246 a y b).

Sea la distancia $OP = d$; el radio de la ⊙ $= r$; $PF = t$.
Hay que calcular el producto $PE \,.\, PD$.

1º Si P es exterior a la ⊙, $d > r$. Fig. 246 a.

Se tiene: $PC = d + r$; $PB = d - r$

$$PE \,.\, PD = PC \,.\, PB = PF^2 = (d+r)\,(d-r) = d^2 - r^2 = t^2$$

La potencia de un punto respecto de una ⊙ es igual al cuadrado de la tangente.

La potencia es negativa si P es exterior a la ⊙.

2º Si P es interior a la ⊙, $d<r$. Fig. 246 b.

$$PC=r+d;\ PB=r-d;\ PF=PG=k=1/2FG.$$

$$PE\ .\ PD=PC\ .\ PB=(r+d)\ \ (r-d)=r^2-d^2=-k^2.$$

La potencia es negativa si P es interior a la ⊙.

3º Si P está situado en la ⊙, $d=r$.

La potencia es nula porque uno de los factores PC o PB es igual a 0

4º Si P se halla en el centro de la ⊙, la potencia es igual $-r^2$.

¿Cuál es el L. G. de los puntos que tienen igual potencia respecto de una ⊙ dada?

APLICACIONES GRAFICAS

a) *Hallar la media proporcional geométrica entre dos segmentos dados* **"a"** *y* **"b"**.

Siendo: $a<b$

1.a Solución.—1º Se traza la recta indefinida o eje horizontal AB. (Fig. 247).

2º Se hace: AH=a

3º HB=b

4º semi ⊙ de diámetro AB.

5º HC⊥AB

El trazo HC=M. p. g. entre a y b.

Dem.—A(↔)C(↔)B

ABC △ rect. en C (Teor. de Thales, pág. 37).

Se aplica teor. LX.

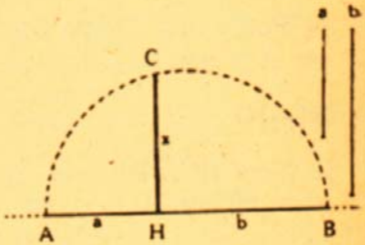


Fig. 247

2.a Solución.—1º Se traza la recta indefinida o eje horizontal AB. (Fig. 248).

2º Se hace: AH=b

3º AB=a

4º semi ⊙ de diámetro AH=b (sobre el trazo mayor).

5º BC⊥AH

A(↔)C.

Trazo AC=M. p. g. entre a y b.

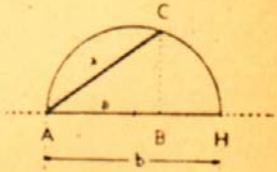


Fig. 248

Dem.—C(↔)H

ABC △ rect. en C. Aplíquese teor. LXI.

3.a Solución.—(**Fig. 249**). 1º Sobre un eje horizontal se aplican las longitudes

AH=a y HB=b

2º Se dibuja una ⊙ que pase por A y por B.

3º H(↔)O

4º Se traza HC⊥HO
El trazo HC es M. p. g. entre a y b.

Dem.) Corol. de Teor. LXIV pág. 280.

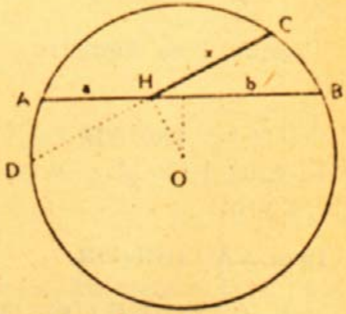


Fig. 249

4.a Solución.—(**Fig. 250**). 1º Sobre un eje horizontal se aplican las longitudes HB=a y HA=b.

2º Sobre AB=b—a como cuerda (o diámetro) se dibuja una ⊙.

3º Desde H se traza HC tang. a la ⊙.

HC es la M. p. g. entre a y b.

Dem.—Teor. LXVI, pág. 281.

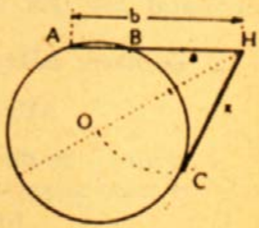


Fig. 250

b) Hallar la 3º p. g. entre dos trazos dados "**a**" *y* "**m**". *Siendo* **m** = *M p. g. y* **a**>**m**.

1ª Solución.—Se procede como para construir la 4ª p. g. (Ver Problema 10, pág. 225).

Se tiene la proporción: $\dfrac{a}{m}=\dfrac{m}{x}$.

AB=a; BC=m; AD=m; DE=x=3ª p. g. (Fig. 251).

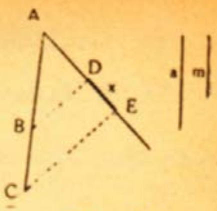


Fig. 251

2ª Solución.— Se construye un △ rect en el cual figure "m" como altura bajada del vért. del ∢R y "a" como una de sus proyecciones. La otra proyección será la 3ª p. g. pedida.

AD=a; AC⊥AD; DC=m; A(↔)C; CB⊥CA (Fig. 252).

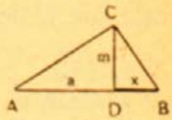


Fig. 252

3ª Solución.—Se construye △ rect. ABC haciendo: AB=a (hipotenusa).

⊙ de diámetro AB;

BC=m (corta en C desde B)

CD⊥AB

BD=x=3ª p. g. ¿Por qué (Fig. 253).

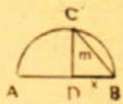


Fig. 253

4ª Solución.—Se dibuja una ⊙ arbitraria O.

Se construye la tangente AB=m.

Se describe: ⊙ (B, a) corta en C a la ⊙O. C(↔)B.

BD=x=3ª p. g. ¿Por qué (Fig. 254).

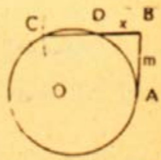


Fig. 254

5ª Solución.—Se traza AB=2m.

Se describe una ⊙ que pase por A y B.

Se describe una ⊙, con radio "a" y con centro en el punto medio C de AB. Corta en D.

D(↔)C.

CE=x=3ª p. g. (Fig. 255).

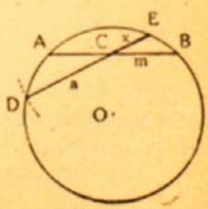


Fig. 255

NOTA.—Hallar la 3 p. g. entre "a" y "m" en el caso en que a<m, empleando las cinco soluciones anteriores.

c) *Construir dos trazos* "**a**" *y* "**b**" *conociendo la suma* "**s**" *de dichos trazos y su ½ p. g.* "**m**" $= \sqrt{ab}$. (Fig. 256).

Solución.— Se copia AB = s.

Describir semicircunferencia con diámetro AB.

En cualquier punto de AB se traza **m** perpendicular a AB.

MC || AB

y CH ⊥ AB

AH y HB son los trazos pedidos.

¡Discusión!

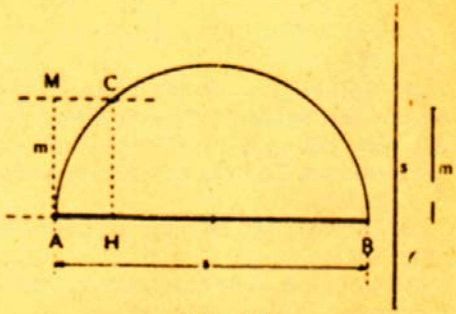


Fig. 256

d) *Construir dos trazos* "**a**" *y* "**b**" *conociendo su diferencia* "**d**" = **a—b** *y su ½ p. g.* "**m**" $= \sqrt{ab}$. (Fig. 257).

Solución.—Dibujar la ⊙ $\left(O, \dfrac{d}{2}\right)$

En un punto N de la ⊙ trazar la tangente NC = m.

C(↔)O

CB y CA son los trazos pedidos.

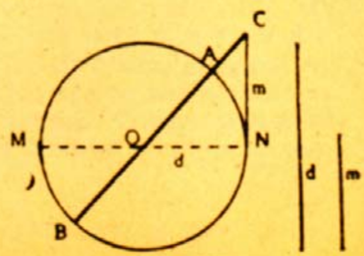


Fig. 257

EJERCICIOS DE APLICACION

* **185.** En un círculo de centro O y diámetro AB=27 cm se traza una cuerda AM=9 cm. Calcular su proyección sobre AB.

* **186.** Dos cuerdas se cortan en un círculo cuyo radio mide 17 cm. El producto de los dos segmentos de una de ellas es 145. Calcular la distancia entre el punto de intersección y el centro.

* **187.** En un círculo de radio r=5 cm, una cuerda está dividida en dos segmentos $AI = \frac{1}{4}r$ e $IB = \frac{4}{3}r$. ¿Cuál es la longitud de una cuerda CD que pasa por I y tal que IC : ID = 4 : 3?

188. Una cuerda CD encuentra un diámetro AB en el punto medio O del radio; los segmentos OC y OD son entre sí como 1 : 2.

Determinar estos dos segmentos en función del radio r de la circunferencia.

* **189.** Una cuerda de un círculo mide 50 mm y la sagita correspondiente a esta cuerda mide 15 mm. ¿Cuánto mide el radio?

190. En un círculo de 1,5 m de radio, una secante que pasa por el centro mide en total 15 m. ¿Cuánto vale la tangente que sale del mismo punto?

* **191.** El diámetro de un círculo mide 32 m y se prolonga en 4 m. Calcular la tg. trazada por el punto obtenido.

* **192.** En la prolongación del radio OA de un círculo O, hallar un punto P tal que la tangente PB=2 PA.

* **193.** A una circunferencia de radio **r** se traza una tangente AB=2r, y una secante BD=3r. Calcular la parte interior de la secante.

* **194.** A una circunferencia de diámetro BOD=40 cm se traza en B una tangente BA=30 cm y se traza DA que corta en C la circunferencia. Determinar AD, AC, BC y la proyección de DC sobre el diámetro BD.

* **195.** Dos círculos son tangentes exteriormente; la distancia de los centros es 36 cm y la tangente común exterior mide 28 cm. Calcular los radios de los círculos.

* **196.** Construir una cuarta proporcional entre tres longitudes dadas, considerando estas longitudes:

1º Como segmentos de dos cuerdas que se cortan.

2º Como secantes que salen de un mismo punto.

* **197.** Demuéstrese que en un △ ABC el producto de dos lados es igual al cuadrado de la bisectriz del ∢ comprendido entre ellos, más el producto de los segmentos que dicha bisectriz determinada sobre el tercer lado.

INDICACION: Construir la ⊙ circunscrita al △ ABC.

* **198.** En una ⊙ dada se traza un diámetro AB y en su extremo A se levanta la tangente AC. La secante CB corta la ⊙ en M. Demostrar las siguientes relaciones: 1º) $AB^2 = BM.BC$; 2º) $AM^2 = BM \cdot MC$. ¿Qué teoremas le recuerdan estas relaciones?

* **199.** En un △ ABC, $a = 14$; $b = 21$; $c = 15$ ¿cuánto mide b_α? Idem $a = 44$; $b = 22$; $c = 42$. ¿Cuánto mide b_γ?

* **200.** En un △ ABC dado, expresar en función de sus lados a, b, y c. 1º las bisectrices b_α, b_β, b_γ; 2º las transversales de gravedad.

* **201.** Construir una ⊙ O que sea tangente a una recta dada L y que pase por dos puntos dados P y Q.

* **202.** Idem que sea tangente a una ⊙ dada y que pase por dos puntos dadas P y Q.

203. En una ⊙ de radio r, probar que éste es M. p. g. entre los segmentos de una tangente determinados por su punto de tangencia y otras 2 tangentes ∥s que cortan las primera tangente.

204. Probar que en un cuadrilátero inscrito el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de sus lados opuestos. (Teor. de Ptolomeo).

205. Calcular h_a en un △ ABC inscrito en una ⊙ de radio $r = 5$ cm, si $b = 12$ cm y $c = 16$ cm.

206. Dado un punto M fuera del círculo O, trazar una secante MCD tal que la circunferencia de diámetro CD sea tangente al diámetro ABM.

207. Dado un punto P dentro de un círculo (O, r) y dada una cuerda APB, demostrar que PA . PB se mantiene constante cuando la cuerda gira alrededor de P.

208. En un círculo O, el diámetro AB y la cuerda DE son perpendiculares.

Por A, se traza cualquier cuerda que corta a DE en F y la circunferencia en C.

Probar que AF . AC = Cte.

209. Dado un △ rectángulo ABC, describir: 1ª la ⊙ (A, c) y prolongar los catetos hasta su intersección con la ⊙; 2º la ⊙ (A, b). Demostrar mediante ambas figuras el teorema particular de Pitágoras.

CAPITULO XV

COMPARACION DE LAS AREAS DE DOS POLIGONOS SEMEJANTES

TEOREMA LXVII.—**Las áreas de dos △s de bases y alturas diferentes, son entre sí como los productos de sus bases por las alturas correspondientes.** (Fig. 258).

Tes.) $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{c \cdot h_c}{c' \cdot h'_c}$$

Dem.) $$\triangle ABC = \frac{1}{2} c\, h_c$$

$$\triangle A'B'C' = \frac{1}{2} c'\, h'_c$$

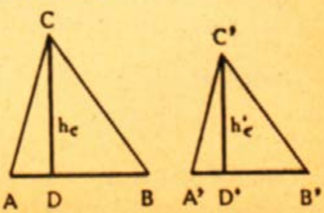


Fig. 258

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2}\, c\, h_c}{\frac{1}{2}\, c' h'_c}$$ (Se divide m. a m. y se simplifica por ½)

Luego, la tesis es verdadera.

TEOREMA LXVIII.—**Las áreas de dos triángulos de igual base son entre sí como las alturas correspondientes.** (Fig. 259).

Tes.) $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{h_c}{h'_c}$$

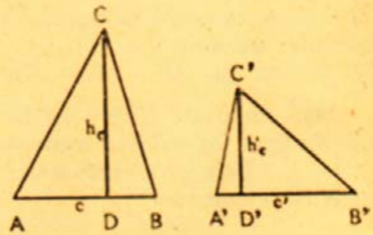


Fig. 259

Dem.) Sean c y c' las bases iguales y h_c y h'_c las alturas correspondientes.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{c \cdot h_c}{c' \cdot h'_c}$$ (Teorema anterior)

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{h_c'}{h_c'}$$ (Se simplifica por c=c')

COROLARIO.—*Dos paralelógramos de igual base son entre sí como sus alturas correspondientes.*

Dem.) Un # es el doble de un △ de igual base y altura.

TEOREMA LXIX.—**Las áreas de dos triángulos de igual altura son entre sí como las bases correspondientes.** (Fig. 260).

Tes.) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$

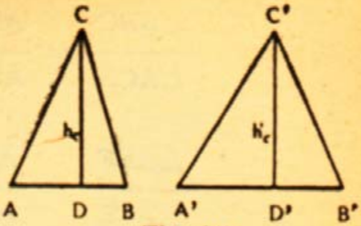


Fig. 260

Dem.) Sean AB y A'B' las bases y $h_c = h'_c$.

Se tiene:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \cdot h_c}{A'B' \cdot h'_c}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{(Se simplifica por } h_c = h'_c\text{).}$$

COROLARIO.—*Dos #s de igual altura son entre sí como sus bases correspondientes.*

TEOREMA LXX.—**Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que forman este ángulo** (Fig. 261).

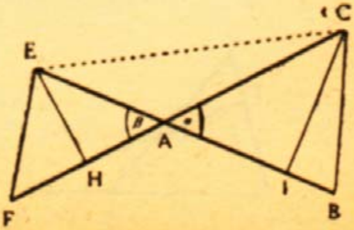


Fig. 261

Hip.) $\alpha = \beta$

Tes.) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AEF} = \dfrac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF}$

Dem.) $E(\leftrightarrow)C$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ACE} = \frac{AB}{AE} \quad (1)$$ (Los 2 $\triangle$s tienen misma altura CI)

$$\frac{\triangle AEF}{\triangle ACE} = \frac{AF}{AC} \quad (2)$$ (Misma altura EH)

$$\frac{\triangle ABC \cdot \triangle ACE}{\triangle ACE \cdot \triangle AEF} = \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF}$$ (Se dividen m. a m. 1 y 2 y se simplifica 1ª razón por $\triangle$ACE)

Luego: $$\frac{\triangle ABC}{\triangle AEF} = \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF}$$ (Q. E. D.)

Nota.—Demuéstrese el teorema precedente con las figuras 262 y 263. En la 1ª de las figuras únase **F** con **B** y compárense los 2 $\triangle$s con el $\triangle$BFA que se forma.

En la 2ª de las figuras únase **B** con **E**.

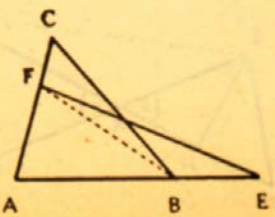


Fig. 262

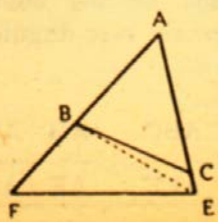


Fig. 263

ESCOLIO [1].—**Los dos $\triangle$s gozan de la misma propiedad si los ángulos considerados son suplementarios.**

En la figura 264, los $\triangle$s ABC y ADF, tienen suplementarios los ángulos en A.

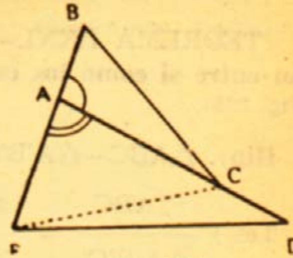


Fig. 264

Se tiene:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AFC} = \frac{AB}{AF} \text{ (Misma alt.)}$$

$$\frac{\triangle AFC}{\triangle ADF} = \frac{AC}{AD} \text{ (Misma altura)}$$

$$\frac{\triangle ABC \cdot \triangle AFC}{\triangle AFC \cdot \triangle ADF} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AD} \text{ (Se simpl. por } \triangle AFC\text{)}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle ADF} = \frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AD}$$

COROLARIO 1°.—*Las áreas de dos #s que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que forman el ángulo.*

COROLARIO 2°.—*El área de un $\triangle$ es una función de dos de sus lados y del ángulo comprendido entre ellos.*

[1] **Escolio es una observación acerca de una proposición ya demostrada.**

COMPARACION DE LAS AREAS DE POLIGONOS SEMEJANTES

TEOREMA LXXI.—**Las áreas de dos △ semejantes son entre sí como los cuadrados de dos lados homólogos.** (Fig. 265).

Hip). △ABC∼△A'B'C'

Tes.) $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{a^2}{a'^2}$

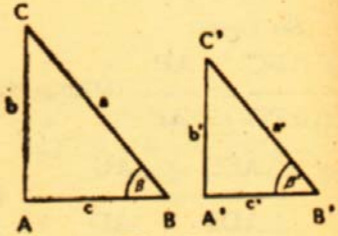


Fig. 265

Dem.) Siendo
△ABC∼△A'B'C' (Hip.)
se tiene: $\beta=\beta'$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{ac}{a'c'} \quad (^1) \text{ (Teor. LXX)}$$

$$\text{Pero: } \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \quad (\triangle\text{s semejantes})$$

Reemplazando en (¹) $\frac{c}{c'}$ por su igual $\frac{a}{a'}$, resulta:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{a^2}{a'^2}$$

(Q. E. D.)

COROLARIO.—*Las áreas de dos △s semejantes son entre sí como los cuadrados de dos líneas homólogas cualesquiera de dichos △s* (alturas, bisectrices, transversales de gravedad, etc.).

TEOREMA LXXII.—**Las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera, son entre sí como los cuadrados de dos lados homólogos o de dos diagonales homólogas.** **(Fig. 266).**

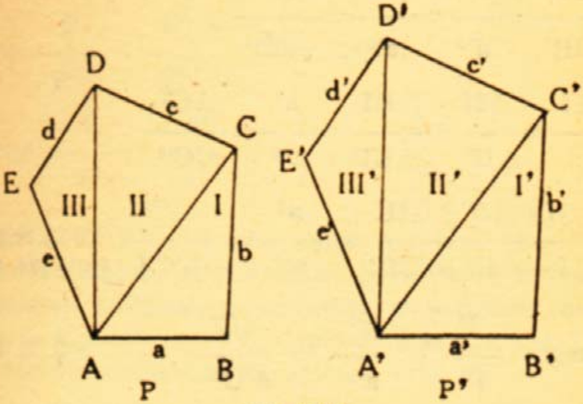


Fig. 266

Hip.) $P \sim P'$.

Tes.) $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{a^2}{a'^2} = \dfrac{b^2}{b'^2} \ldots = \dfrac{CA^2}{C'A'^2} = \dfrac{CE^2}{C'E'^2} = \ldots$

Dem.) Se trazan las diagonales que parten de dos vértices homólogos A y A'.

Se tiene: $\triangle I \sim \triangle I'$; $\triangle II \sim \triangle II'$; $\triangle III \sim \triangle III'$;

$$\therefore \frac{\triangle I}{\triangle I'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} \qquad \text{(Teor.LXIX)}$$

$$\frac{\triangle II}{\triangle II'}=\frac{c^2}{c'^2}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$$

$$\frac{\triangle III}{\triangle III'}=\frac{d^2}{d'^2}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$$

$$\therefore \frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{\triangle II}{\triangle II'}=\frac{\triangle III}{\triangle III'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$$

$$\therefore \frac{\triangle I+\triangle II+\triangle III}{\triangle I'+\triangle II'+\triangle III'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$$ (Teor. sobre serie de prop.)

Luego: $$\frac{P}{P'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$$ (Q. E. D.)

COROLARIO—*Las áreas de dos polígonos regulares de mismo número de lados, son entre sí como los cuadrados de los radios o de los apotemas.* (Fig. 267).

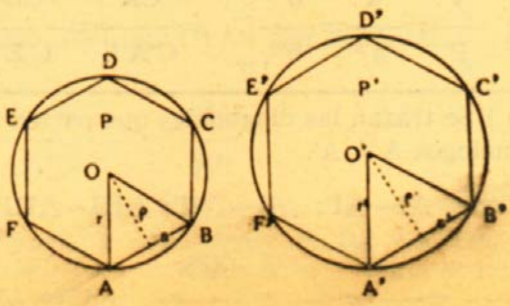


Fig. 267

Dem.) Se sabe que

$$\frac{a}{a} = \frac{r}{r'} = \frac{\rho}{\rho'} \quad \text{(Corol. 1º de Teor. LVIII).}$$

Pero: $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{a^2}{a'^2}$ (Teor. LXXII)

Luego: $\dfrac{P}{P'} = \dfrac{a^2}{a'^2} = \dfrac{r^2}{r'^2} = \dfrac{\rho^2}{\rho'^2}$

TEOREMA LXXIII.—**Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, considerados como lados homólogos, se construyen polígonos semejantes, el polígono construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los polígonos construídos sobre los catetos.** (Fig. 268).

Hip). $A \sim B \sim C$
Tes.) $C = A + B$

Dem.) Comparando C con cada uno de los otros dos polígonos semejantes, se tiene:

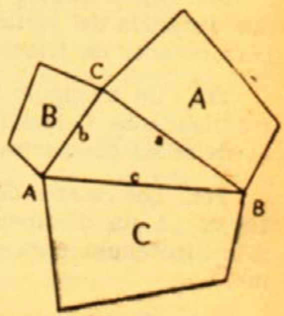


Fig. 268

$$\frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{(Teor. LXXI)}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{b^2}{c^2} \quad \text{(Teor. LXXI)}$$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{a^2+b^2}{c^2} \quad \text{(Sumando miembro a m.)}$$

$$\text{Pero: } \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \quad (c^2=a^2+b^2 \text{ Teor. Pitág.})$$

$$\text{También: } \frac{A+B}{C} = 1$$

Luego: $C = A+B$

(Q. E. D.)

EJERCICIOS DE APLICACION

• **210.** Construir un cuadrado que guarde con otro la razón **m : n.**

• **211.** Construir un polígono semejante a un polígono dado de modo que la razón de sus áreas sea m : n.

212. Un triángulo tiene 48 m de base y 16 m de altura. ¿A qué distancia del vértice se ha de trazar una paralela a la base para obtener un triángulo de 54 m^2 de área?

213. Un triángulo tiene 20 m de base y 15 m su altura correspondiente. Calcular la longitud de la paralela a la base que lo divide en dos partes equivalentes y su distancia a la base.

214. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 144 m y 108 m. ¿A qué distancia del vértice hay que trazar una paralela a la hipotenusa para que el área del trapecio obtenido sea 972 m^2?

215. Un trapecio cuyas bases miden 12 m y 7 m y la altura 6 m queda dividido en dos partes equivalentes por una paralela a la base. Calcular la longitud de esta paralela.

• **216.** En una circunferencia dada inscribir un rectángulo cuyos lados sean entre sí como m : n.

• **217.** En un triángulo ABC, trazar entre los lados AB y BC, una recta DE tal que AD=DE=EC.

• **218.** Transformar un triángulo ABC en un triángulo isósceles que tenga: 1º un ángulo común; 2º un lado común con el triángulo dado.

• **219.** Transformar un triángulo ABC en triángulo equilátero.

• **220.** Transformar un triángulo dado ABC en otro tal que tenga el ángulo α común con él, y el lado opuesto a este ángulo tenga una dirección dada.

• **221.** Transformar un triángulo dado ABC en otro semejante a un triángulo dado DEF.

• **222.** Dividir un triángulo ABC en partes que sean entre sí como m : n : p : 1º por medio de transversales que salgan de un mismo vértice; 2º por medio de transversales que salgan de un punto dado en uno de los lados; 3º por medio de paralelas a un lado.

• **223.** Construir un triángulo semejante a otro dado ABC, de modo que su área sea 9 veces mayor que la del △ dado ABC. Id, 16 veces mayor.

• **224.** Construir un polígono semejante a otro dado de modo que su área sea el cuádruplo del polígono dado.

• **225.** Construir un polígono cuya área sea equivalente a la suma de dos polígonos semejantes dados, y que además, sea semejante con estos últimos.

• **226.** Idem que sea equivalente a la diferencia de los dos polígonos semejantes dados y semejante a ellos.

227. Construir un △ semejante a otro dado ABC y de modo que su área sea equivalente a los $\frac{2}{3}$ del △ dado.

• **228.** Construir un cuadrado que esté con otro dado en la razón de m : n (m y n son trazos o números).

229. Dividir un cuadrado en tres partes equivalentes por dos cuadrados concéntricos.

230. Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por rectas perpendiculares a uno de los lados.

• **231.** Dividir un triángulo dado en dos partes equivalentes por medio de una || a una recta dada.

• **232.** Transformar un cuadrado en un triángulo equilátero equivalente.

CAPITULO XVI

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y AREA DEL CIRCULO

§ 1.—LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Experimentalmente se puede obtener la longitud de una circunferencia arrollando un hilo o cinta alrededor de la circunferencia o llanta de una rueda o disco, lo más perfectos posibles, que después se rectifica.

Pero este concepto carece de *precisión matemática.* Para obtener la longitud de la circunferencia por un procedimiento matemático, se asimila la ⊙ a una *línea poligonal regular* de lados muy pequeños. Así se consigue obtener una longitud tanto más aproximada cuanto mayor sea el número de lados de dicha línea poligonal regular.

La circunferencia es el *límite* a que tiende la línea poligonal regular inscrita. "En este caso particular *el límite hacia el cual tiende la longitud de la línea poligonal regular inscrita, es la longitud exacta de la* ⊙".

Ejemplo: Considerando las fracciones 2/3 y 3/2, si se añade sucesivamente la unidad a cada uno de los términos, la primera se hace 3/4, 4/5, 5/6. . . 9/10. . . 999/1000; y la segunda 4/3, 5/4, 6/5... 10/9... 1.000/999. Una y otra se acercan a la unidad: la primera le queda siempre inferior, y la segunda, siempre superior. Se dice que el **límite común** de las dos fracciones consideradas es la **unidad.**

Si se considera una circunferencia **C** y los polígonos regulares del mismo número de lados: **M**, inscrito y **N**, circunscrito en ella, la circunferencia está comprendida entre los perímetros **p** del primero y **P** del segundo. (Fig. 269).

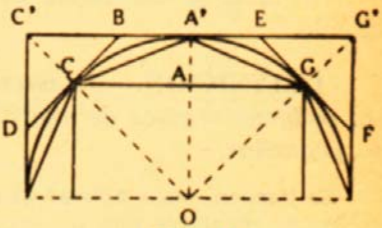


Fig. 269

O sea que: $p<C<P$. (Una línea poligonal convexa es menor que cualquier otra línea envolvente que une los mismos extremos).

Si se duplica el número de lados de los polígonos regulares M y N el perímetro p aumenta, mientras el perímetro P disminuye.

En efecto: $CA'+A'G>CG$

$EF<EG'+G'F$ (Fig. 269).

Designando por p' y P' los nuevos perímetros, resulta: $p'<C'<P'$.

Repitiendo indefinidamente esta operación, los perímetros del polígono inscrito y circunscrito, se *acercan* más y más a la circunferencia C, y, en el *límite* se tendrá: límite p= límite P =C.

De lo expuesto anteriormente se puede enunciar:

"La longitud de una circunferencia es el límite común hacia el cual tienden los perímetros p y P de los polígonos regulares semejantes, inscritos y circunscritos, cuando se duplica indefinidamente el número de sus lados".

Al confundirse los perímetros de los dos polígonos con la circunferencia, dichos polígonos coinciden con el círculo.

De aquí se desprende la siguiente definición para el círculo.

DEFINICION.—*Un círculo se puede considerar como un polígono regular de una infinidad de lados infinitamente pequeños.*

Se pueden, pues, aplicar al círculo todos los teoremas sobre polígonos regulares que no exijan un determinado número de lados.

TEOREMA LXXIV.—**Todos los círculos son semejantes entre sí.**

Dem.)—Ver Teorema LVIII.—Sobre polígonos regulares.

TEOREMA LXXV.—**Dos circunferencias son entre sí como sus radios o como sus diámetros.**

1º Dem.) Sean C y C' las circunferencias y r y r' sus respectivos radios.

Se consideran C y C' como los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo, pero infinito número de lados en que los radios y apotemas se confunden respectivamente con r y r'.

Aplicando la propiedad de los polígonos regulares que dice: **"que los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son entre sí como sus radios, resulta directamente:**

$$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'}$$ (Corol. 2º, pág. 286).

Amplificando por 2, la 2ª razón, se tiene la razón entre los diámetros:

$$\frac{C}{C'} = \frac{2r}{2r'} = \frac{d}{d'}$$ (Q. E. D.)

2.ª Demostración del Teorema LXXV.—(Fig. 270).

Sean:

C y C' dos circunferencias.

r y r' = radios.

p y p' = perímetros de los polígonos regulares del mismo número n de lados.

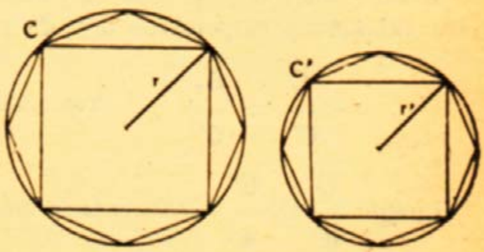


Fig. 270

Siendo los dos polígonos semejantes se tiene:

$$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}$$ (Teor. LVIII, corol. 2º, pág. 286).

Duplicando indefinidamente el número de los lados de los polígonos, p y p', tienen por *límites* respectivamente **C** y **C'**.

Pero para todos los valores de **p** y **p'** siempre resulta:

$$\frac{p}{p'} = \frac{r}{r'}$$

También en el *límite* que es la circunferencia, se tendrá:

$$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'} \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

TEOREMA LXXVI.—**La razón entre una circunferencia y su diámetro es constante.**

Dem.) Sean **C** y **C'** dos circunferencias cualesquiera y sus diámetros respectivos **d** y **d'**, resulta:

$$\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'} \qquad \text{(Teor. LXXV)}$$

Luego: $\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'}$ (Alternando medios prop. precedente)

La razón constante entre una circunferencia y su diámetro se designa por la letra griega π.

Por tanto $\frac{C}{d} = \pi$

El número π es **inconmensurable** y tiene por valor aproximado: $\pi = 3{,}141592653\ldots$

En la práctica se adoptan los siguientes valores:

$$\pi = 3{,}1416 \text{ ó } \frac{22}{7} \text{ ó } \frac{355}{113}$$

COROLARIO.—*La longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por π o al producto del duplo del radio por π.*

Dem.) Se sabe que: $\dfrac{c}{d} = \pi$

Luego: $C = \pi d = \pi 2r = 2\pi r.$

Si el diámetro d=1, ¿cuál es el valor de la ⊙ C?

Inversamente, conociendo la longitud C de la circunferencia, se puede determinar r.

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{\pi}$$

El valor recíproco aproximado de π es: $\dfrac{1}{\pi} = 0{,}3183.$

§ 2.—*DETERMINACION DE UN ARCO DE ⊙ EN FUNCION DE SU ANGULO DEL CENTRO RESPECTIVO Y DEL RADIO*

TEOREMA LXXVII.—**En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, dos arcos son entre sí como los ángulos del centro correspondientes.**

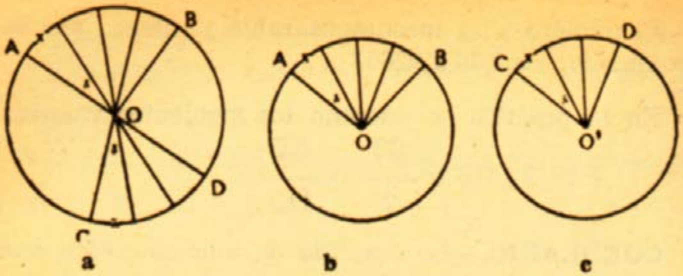


Fig. 271

$$\text{Tes.)}\quad \frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}} = \frac{\measuredangle AOB}{\measuredangle COB}$$

Demostración.—1º Consideraremos el caso en que los arcos AB y CD tienen una medida común, es decir, son **conmensurables.** (Fig. 271 a, b, c).

Supóngase que una medida común **x** quepa 4 veces en el arco AB y 3 veces en el arco CD, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\text{arc. AB} = 4x \\ \text{arc. CD} = 3x\end{array}\right\}\text{Luego: } \frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3} \quad (^1)$$

Si se unen los puntos de división de los arcos con el centro O, los ángulos **AOB** y **COD** quedan divididos en 4 y 3 partes iguales. (A arcos iguales corresponden ángulos del centro iguales en una misma ⊙ ó en △s congruentes).

Supóngase que δ es la común medida de estos ángulos, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle AOB = 4\,\delta \\ \measuredangle COD = 3\,\delta\end{array}\right\}\text{Luego: } \frac{\measuredangle AOB}{\measuredangle COD} = \frac{4\,\delta}{3\,\delta} = \frac{4}{3} \quad (^2)$$

De las igualdades 1 y 2 resulta:

$$\frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}} = \frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD}$$

2º En el caso en que los arcos AB y CD sean **inconmensurables**, procédase en forma análoga a la del Teor. **XLII**, 2º, pág. 236.

El teorema anterior permite resolver los 2 problemas siguientes.

PROBLEMA 19.—*Calcular la longitud de un arco* **p**, *conocidos el radio* **r** *de la circunferencia y el ángulo del centro correspondiente* α.

Solución.—Se considera la circunferencia como un arco completo cuyo ángulo del centro correspondiente mide 360° y se aplica teorema LXXVII.

$$\frac{2\pi r}{\text{arc. p}} = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

$$\text{arc. p} = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \qquad \text{(Simpl. por 2).}$$

PROBLEMA 20.—*Calcular el ángulo del centro* α, *en función de su arco correspondiente* **p** *y del radio* **r** *de la circunferencia.*

Solución.—Se aplica, también, el teorema LXXVII.

$$\frac{2\pi r}{\text{arc. p}} = \frac{360^\circ}{\alpha}$$

En este caso se despeja la incógnita α.

$$\alpha = \frac{\text{arc. p} \cdot 360^\circ}{2\pi r} = \frac{\text{arc. p} \cdot 180^\circ}{\pi r}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

* **233.** ¿Cuál es la longitud de un arco de 72º en una circunferencia de 17,5 m de radio?

* **234.** Calcular el radio de una circunferencia en la cual un arco de 45º tiene 14,1372 m de longitud.

* **235.** Dos arcos de 22º y 35º pertenecen a la misma circunferencia. El primero mide 2,7 m. Calcular la longitud del segundo y el radio de la circunferencia.

* **236.** Calcular en grados y minutos un arco cuya longitud es igual a su radio.

237. Calcular la longitud de la circunferencia circunscrita a un cuadrado de 16 cm. de lado.

* **238.** En el diámetro AB de una circunferencia de centro O, se marca el punto C entre A y O, y el punto D entre O y B, y se describen las circunferencias de diámetros AC, CO, OD, DB. Mostrar que la suma de las longitudes de estas cuatro circunferencias es igual a la circunferencia mayor.

239. En un círculo O de radio r, se inscribe un hexágono regular y se circunscribe un cuadrado al círculo. Expresar, en función de r, el perímetro de estos polígonos. Deducir que el valor de π está comprendido entre 3 y 4.

240. De cada vértice de un cuadrado ABCD como centro, se describe, con radio igual al lado, un cuadrante de circunferencia limitado a los lados. Expresar, en función del lado a, el perímetro de cuadrilátero curvilíneo EFGH determinado por los arcos.

241. Dos circunferencias son tangentes interiormente en A y la menor pasa por el centro O de la mayor. Un radio OC de la mayor encuentra la menor en B. Mostrar que los arcos AB y AC tienen la misma longitud.

242. Dos ruedas cuyos diámetros respectivos miden 3,6 m y 0,9 m y cuya distancia de los centros es 2,7 m están unidas por una correa no cruzada. Calcular la longitud de esta correa.

243. Dos circunferencias tienen por radios respectivos 100 m y 25 m. La distancia de los centros es 150 m. Se trazan las dos tangentes comunes exteriores AB y CD. ¿Cuál es la longitud del circuito convexo formado por las dos circunferencias y sus tangentes?

§ 3.—AREA DE UN CIRCULO

TEOREMA LXXVIII.—**El área de un círculo es igual al semi producto de su circunferencia por su radio.**

Tes.) $S_c = \dfrac{C}{2} \cdot r.$

Dem.) Se considera el círculo como un polígono regular de una infinidad de lados, en el cual la circunferencia **C** es su perímetro y su radio **r** se confunde con la apotema.

Pero la fórmula para calcular el área de un polígono es: $\mathbf{S} = \mathbf{s} \cdot \rho$ (s=semi perímetro; ρ=apot.).

Aplicando esta fórmula al círculo resulta:

$$\boxed{S_c = \frac{C}{2} \quad r}$$

COROLARIOS—1º *El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio.*

Dem.) En la fórmula: $S_c = \dfrac{2}{C} \cdot r$, se reemplaza C por su valor $2 \pi r$. Resulta:

$$\frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2$$

Luego: $\boxed{S_c = \pi r^2}$

2º *Las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios o de sus diámetros.*

Dem.) Denotando por S_1 y S_2 las áreas de los círculos y por r y r' sus radios respectivos, se tiene:

$$S_1 = \pi r^2$$
$$S_2 = \pi r'^2$$

Luego:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r^2}{\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{4r^2}{4r'^2} = \frac{(2r)^2}{(2r')^2} = \frac{d^2}{d'^2}$$ (Se simplifica por π y se amplifica por 4).

También se puede aplicar el corolario del teorema LXXII, considerando los círculos como polígonos regulares de un mismo, pero infinito número de lados.

3º *Un círculo es equivalente a un triángulo cuya base es igual a la longitud de la circunferencia y cuya altura es igual al radio.*

§ 4.—CALCULO DEL AREA DE UN SECTOR CIRCULAR

Ver en la Pág. 12 la definición de sector circular.

TEOREMA LXXIX.—**El área de un sector circular es igual al semi producto de su arco por su radio.** (Fig. 272).

Se designa:

sector circ. OAG $= S_c$

arco ABCDG $= a$

Apotema OI $= \rho$

Radio AO $=$ OB $= r$

Tes.) $S = \frac{1}{2} a \cdot r$

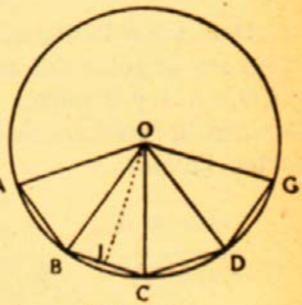


Fig. 272

Dem.) Sea el sector poligonal regular OABCDG $= S_{p \cdot r}$

$$S_{p \cdot r} = \frac{1}{2} AB \cdot \rho + \frac{1}{2} BC \cdot \rho + \frac{1}{2} CD \cdot \rho + \frac{1}{2} DG \cdot \rho$$

$$S_{p \cdot r} = \frac{1}{2} (AB + BC + CD + DG) \rho$$

El sector circular OA se puede considerar como un sector poligonal regular de una infinidad de lados cuyo perímetro es el arco **a** y cuyo apotema ρ se confunde con el radio **r**.

Luego resulta directamente:

$$\boxed{S_c = \frac{1}{2} a\, r}$$

COROLARIO.—*Un sector circular es equivalente a un triángulo que tiene por base el arco lineal y por altura el radio.*

TEOREMA LXXX.—**En un mismo círculo o en círculos congruentes, dos sectores circulares son entre sí como sus ángulos del centro, o sus arcos correspondientes.**

Dem.) En la figura 271 a, los mismos radios que dividen los ángulos del centro AOB y COD y los arcos AB y CD, en 4 y 3 partes iguales respectivamente, dividen también los sectores AOB y COD en el mismo número de partes iguales.

$$\frac{\text{sector AOB}}{\text{sector COD}} = \frac{4}{3} = \frac{\sphericalangle AOB}{\sphericalangle COD} = \frac{\text{arc. AB}}{\text{arc. CD}}$$

Denotando por $\mathbf{S_1}$ y $\mathbf{S_2}$, las áreas de los sectores, por $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$ los arcos y por $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$ los radios y por α_1 y α_2 los ángulos del centro, resulta:

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 r_1 \qquad \text{(Teorema LXXIX)}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} a_2 r_2 \qquad \text{(Teorema LXXIX)}$$

Luego: $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \text{(Dividiendo m. a m. y simplificando la razón)}$$

Pero: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (Teorema LXXVII)

Luego: $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (Q. E. D.)

Este teorema permite, también, calcular el área de un sector circular: 1º en función del radio **r** y su arco; 2º en función del radio **r** y el ángulo del centro correspondiente.

También permite calcular el arco y el ángulo del centro, dándose el radio y el área del sector.

PROBLEMA 21.—*Calcular el área de un sector circular dados el ángulo del centro $\alpha = 40°$ y el radio $r = 10$ cm.*

Solución.— $\dfrac{360°}{40°} = \dfrac{100\pi}{x}$ (Teorema LXXX)

$$x = \frac{40 \cdot 100\,\pi}{360} = \frac{100\pi}{9}$$

PROBLEMA 22.—*Calcular el área de un sector circular dados el arco* a=50 (cm) *y el radio* r=10 (cm).

Solución.— $\dfrac{2\pi \cdot 10}{50} = \dfrac{\pi \cdot 100}{x}$

$$x = \frac{50 \cdot \pi \cdot 100}{2\,\pi \cdot 10} = 250\ [cm^2]$$

§ 5.—*AREA DE UN SEGMENTO CIRCULAR*

(Véase la definición de segmento circular en página 12).

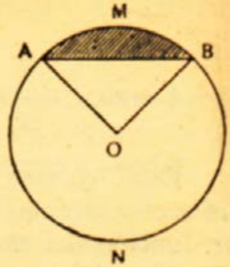


Fig. 273

El área de un segmento circular *es igual a la del sector correspondiente disminuída (o aumentada) del triángulo que tiene por base la cuerda del segmento y por vértice el centro del círculo.* **(Fig. 273).**

Segmento ABM = sect. OAMB — $\triangle$ AOB
Segmento ANB = sect. OANB + $\triangle$ AOB

§ 6.—*AREA DE UNA CORONA CIRCULAR*

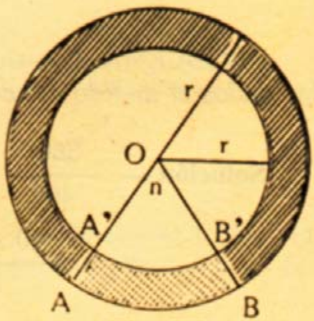


Fig. 274

Corona circular es la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas. **(Fig. 274).**

El área de una corona circular *es igual a la diferencia de área de los dos círculos.*

$$S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - \pi r'^2)$$

Un *sector de corona circular* de **n** grados es igual a los $\frac{n}{360}$ de la corona entera, lo que da:

$$S = \pi \ (r^2 - r'^2) \cdot \frac{n}{360}.$$

Ej.: el sector de corona ABB'A'.

EJERCICIOS DE APLICACION

• **244.** Calcular el área de un sector de 75º en un círculo de 30 cm de diámetro.

• **245.** Cálcular el área de la base de una columna circular de 1,20 m de circunferencia.

246. En un triángulo ABC de base AB=72 m, la altura y la transversal correspondientes miden respectivamente 45 y 60 m. Calcular la longitud de los lados CA y CB. ¿Cuál sería el radio del círculo equivalente al triángulo ABC?

• **247.** Calcular en función de r el área de los segmentos de 60º, 90º y 120º.

• **248.** Calcular el radio de un círculo sabiendo que el área del segmento correspondiente a un arco de 45º es a^2. (Aplicación: $a^2 = 1$ cm²).

• **249.** Calcular el área de un círculo inscrito en un sector de 60º de radio **r**.

250. Demostrar que el área de una corona circular tiene por medida el producto de su anchura (r—r') por la semisuma ($\pi r+\pi r'$) de las dos circunferencias que la limitan.

251. Demostrar que el área de una corona circular es equivalente al área del círculo que tiene por diámetro la cuerda de la circunferencia exterior tangente a la circunferencia interior.

• **252.** El área de una corona circular es 120 m² y el diámetro menor mide 12 m. Calcular el radio del círculo mayor.

• **253.** Una corona circular de 1 m² de área tiene 0,5 m. de anchura. Calcular el área del círculo menor.

254. Dividir un círculo en dos partes: 1º equivalentes; 2º proporcionales a 2 y 3, por un segundo círculo concéntrico.

255. Dos circunferencias concéntricas dejan entre sí una corona circular de 25,328 m^2. Siendo la anchura de esta corona 2 m; calcular el radio de cada circunferencia.

* **256** Sobre un diámetro AOB y sobre los dos radios OA y OB, se describen, a un mismo lado de AB, tres semi circunferencias. El área comprendida entre las tres semi circunferencias es 2464 $cm.^2$ Calcular r.

257. Un arco AB mide 80 cm y las tangentes en A y B, forman un ángulo de 144º. Calcular el área del círculo entero y la del sector AOB.

* **258.** Calcular la longitud de las circunferencias inscrita, circunscrita y ex inscrita a un triángulo equilátero de lado $a = 1$ m. y el área comprendida entre las dos primeras.

259. Un rombo que tiene un ángulo de 60º está circunscrito a un círculo de 10 cm. de radio. Calcular el área comprendida entre el rombo y la circunferencia.

260. En un círculo de diámetro AB se traza la tangente AD y una secante $BCD = 4$ r. Calcular el área de los triángulos ABC y ADC y de la superficie mixtilínea AMCD.

261. El área comprendida entre el perímetro de un hexágono regular y la circunferencia circunscrita a este polígono es 13 cm^2. Calcular el radio de esta circunferencia. (Tomar $\pi = 22/7$).

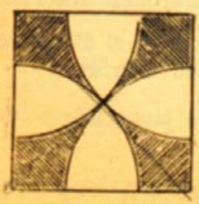


Fig. 275

* **262.** Siendo a el lado del cuadrado, buscar el área de la cruz de Malta, que se obtiene trazando arcos tangentes, de dos en dos, en el punto medio de las diagonales. (Fig. 275).

263. En un cuadrado de lado m, se describen, desde dos vértices opuestos y con radio m, arcos que por su intersección determinan una naveta; calcúlese el área de ésta. (Fig. 276).

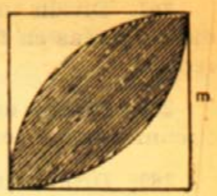


Fig. 276

* 264. Sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se describen semicircunferencias de modo que el vértice del ángulo recto sea punto común de los tres arcos. Calcular el área comprendida entre los arcos secantes y compararla con la del triángulo. (Fig. 277).

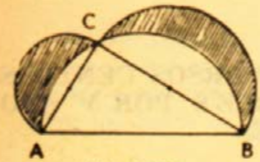


Fig. 277

265. En los extremos A y B de un trazo AB se aplican segmentos iguales AC=BD y se describen semi circunferencias sobre AB, AC, DB hacia un lado y sobre CD hacia el otro. Mostrar que el área limitada por las cuatro semi circunferencias es equivalente al círculo cuyo diámetro es igual a la suma de los radios de las dos circunferencias concéntricas. (Fig. 278).

Fig. 278

* 266. El diámetro AB de un círculo se divide en tres segmentos AC=a, CD =b y DB=c y se describen semi circunferencias sobre AC y AD hacia un lado y sobre CB y DB hacia el otro lado. Mostrar que el círculo dado queda dividido en partes proporcionales a a, b, c. (Fig. 279).

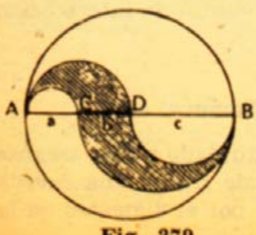


Fig. 279

267. Dividir un círculo en tres partes equivalentes, por medio de curvas en forma de S, compuestas de dos semi circunferencias.

268. Dividir un círculo en tres partes equivalentes por dos circunferencias concéntricas.

269. Dividir una corona en dos partes equivalentes por una circunferencia concéntrica.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN DIVERSOS CENTROS DE BACHILLERATO SOLUCIONABLES POR 5º AÑO DE HUMANIDADES

1. En un cuadrilátero cualquiera ABCD, determinar M sobre CD de modo que $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$.

2. En un cuadrado ABCD se traza una recta desde A que corta el lado BC en M y la prolongación de DC en I.

Demuestre que:

$$\frac{1}{\overline{AM}^2} + \frac{1}{\overline{AI}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2}$$

(Temuco, 1956)

3. En un cuadrilátero ABCD en donde AB = AD y BC = CD se prolongan sus lados opuestos hasta sus puntos de intersección M y N.

Demuestre que $MN \parallel BD$.

(Temuco, 1956)

4. Dada una circunferencia de diámetro dado y una secante que forma con él un ángulo oblicuo, se pide trazar una cuerda paralela a la secante y que quede dividida por el diámetro en la razón de 3 : 1.

5. Construir un $\triangle$ dados: $a+b+c=s$, y $\rho : c = m : n$.
Talca, 1954)

6. Si AA', BB', CC' y DD' son las distancias de los vértices de un cuadrado ABCD a una recta cualquiera, demuestre que:
$\overline{AA'}^2 + \overline{CC'}^2 - 2\overline{BB'} \cdot \overline{DD'} = \overline{AB}^2$

7. Se pide inscribir un rombo EFGH en un triángulo cualquiera ABC; con el lado EF en el lado AB del triángulo y siendo E un punto dado en el lado AB.

(Talca, 1954)

8. Los lados de un triángulo miden $a = 6$ dm 3 cm ; $b = 0,84$ m; $c =$ 1 m 5 cm. Calcule el valor de cada uno de los seis segmentos determinados por las bisectrices de los ángulos interiores sobre los lados opuestos.

(Temuco, 1954)

9. Determine en la altura CD de un triángulo isósceles de base AB, un punto P tal que

$$CP = AP + PB.$$

(Santiago, 1955)

10. Construir un triángulo dados:

$$b : h_a = m : n,\ b : h_c = m' : n',\ t_c$$

(Santiago, 1955)

11. Construir un triángulo dados: la razón en que la bisectriz de α divide el lado BC, la razón en que la bisectriz de β divide al lado AC y h_c.

(Santiago, 1955)

12. ¿Es verdad que las bisectrices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo dividen a los lados, respectivamente opuestos, en la misma razón en que dividen a la altura?

Explique las distintas situaciones.

(Santiago, 1955)

13. En un triángulo rectángulo CD es bisectriz; DM y DN son perpendiculares a BC y AC; CN=d. Demostrar que:

a) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a+b+c)^2-6(ab+bc+ac)$.

b) Calcular CD=m, en función de a y b.

(Valparaíso, 1955)

14. Dados tres puntos A, B, C y un trazo k.

Encontrar P sobre AC y Q sobre BC, de modo que

$$CA \cdot CP = CB \cdot CQ = k^2$$

(Valparaíso, 1955)

15. El área de un triángulo equilátero se ha medido en unidades de superficie que son triángulos equiláteros de a=1 [cm] y el área de un cuadrado, con unidades que son cuadrados de lado a=1 [cm].

Resultan, los valores 17 y 22. ¿Qué valores resultarán si se intercambian las unidades?

16. Construir un # dados: $a, e : f = m : n, \varepsilon$

17. Construir un triángulo rectángulo, dados:

$$c,\ 3a+b=s$$

18. Construir un △ rectángulo dados en una recta los pies H, D y M de la altura, de la bisectriz y de la transversal de gravedad que parten del vértice del ángulo recto.

19. En un triángulo dado, inscribir un triángulo equilátero. ¿Está determinado dicho problema? Si no es así ¿qué condición agregaría usted para determinarlo?

20. Trazar por el vértice A de un triángulo, una recta tal que las distancias de A a las proyecciones de B y C en esta recta, estén en una razón dada m : n.

21. Construir un rombo, dados: $h, a : f = m : n$.

22. Las bases de un trapecio miden 12 m y 5 m. ¿Qué longitud tiene el segmento de una paralela a las bases, limitado por los lados no paralelos, si dicho segmento queda dimidiado por el punto de intersección de las diagonales?

23. Construir un cuadrilátero, dados: un ángulo, una diagonal y sabiendo que: $a : b : c : d = 5 : 6 : 3 : 4$.

24. Demostrar que si el centro de gravedad de un triángulo se une con los vértices, el triángulo queda dividido en tres partes equivalentes.

Trate de establecer si éste es el único, o si hay otros puntos en el interior del triángulo, que gozan de la misma propiedad.

25. Dadas dos circunferencias y un punto P, se pide trazar por P un segmento rectilíneo AB, cuyo extremo A esté en una de las dos circunferencias, el extremo B en la otra, y de modo que resulte dividido por P en la razón $2 : 3$.

Discusión.

26. En el triángulo ABC se ha trazado $CD = t_c$, y en ésta un punto M tal que $CM = \frac{1}{3} CD$.

Se une B con M y se prolonga BM hasta su intersección E con el lado AC. ¿En qué razón queda dividido BE por el punto M.

27. Demuéstrese que dos circunferencias tienen dos centros de homotecia. ¡Discuta!

(Talca, 1950).

28. Dada una cuerda en una circunferencia dada, trazar otra cuerda paralela, de modo que ambas cuerdas sean entre sí como $m : n$.

(Santiago, 1952).

29. Inscribir un trapecio isósceles en una circunferencia, dada la razón entre una base y el lado, y un ángulo.

(Santiago, 1952).

30. Inscribir, en un triángulo dado, un triángulo semejante a otro dado, y de modo que $c \parallel c'$.

31. Demostrar que las distancias de un punto de una transversal de gravedad de un triángulo a los lados no dimidiados por ella, son inversamente proporcionales a esos lados

32. Construir un triángulo, dados c, h_c, $t_a : t_b = 5 : 6$.

33. Encontrar un punto en el interior de un triángulo, de modo que los pies de las perpendiculares trazadas desde él a los tres lados, sean los vértices de un triángulo equilátero.

34. Inscriba en un triángulo dado, otro que sea semejante a un segundo triángulo dado y de modo que un lado del triángulo pedido sea perpendicular a uno de los lados del triángulo primitivo.

¿Cuántas soluciones tiene el problema?

35. En un triángulo rectángulo isósceles ABC, CD es la altura y $DE \perp BC$. Demostrar que $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{DE}$

¿Se cumple esta relación en cualquier $\triangle$ rectángulo?

36. En el $\triangle$ ABC, rectángulo en C, se trazan $CD \perp AB$.
Sean O, O_1 y O_2 centros de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC, ADC y BDC.

Demostrar que $\triangle AOO_1 \sim \triangle ABO \sim \triangle CBO_2 \sim O_2O_1O$.

37. Por los dos extremos de un diámetro se trazan tangentes AF y BH, y por un punto **I** de la circunferencia, se traza la tangente que corta AF en C, y BH en D.
Demostrar que el $\triangle COD$ es rect. y que $CI \cdot ID = \text{constante}$

38. Demostrar que la siguiente relación se cumple en un $\triangle$ rectángulo: $h_c^{-2} = a^{-2} + b^{-2}$

Santiago, 1946.

39. En el hexágono ABCDEF, la diagonal AC mide 15 cm. Calcular el área del hexágono.

40. Construir un triángulo, dados:

$$t_a : t_b = m : n,\ c,\ \measuredangle t_a\, t_c).$$

41. Por el punto de intersección E de las diagonales de un trapecio, se traza la paralela a las bases.

Denótese por x la parte de esta paralela comprendida entre los lados del trapecio.

Demuéstrese que $x = \dfrac{2ac}{a+c}$

(Valparaíso, 1953)

42. Dado un triángulo ABC se pide trazar por C una transversal de modo que uno de los triángulos parciales resultantes sea semejante al △ ABC.

Discutir y generalizar.

43. En el △ ABC trazar la línea poligonal APQRS de modo que P esté en AB, Q en AC, R sea un punto dado, S esté en BC y que se verifique:

$$PQ : QR : RS = m : n : o, \text{ y}$$
$$AQ : QR = p : q.$$

44. Dado un ángulo CAB y un punto P, determine un punto X en el lado AC de modo que PX : XY = m : n.

Teniendo en cuenta que XY es ⊥ a AB y que en **m** y **n** son trazos dados.

Emplee homotecia. ¡Discuta!

45. Buscar el L. G. de los puntos que dividen a las distancias de un punto dado a los puntos de una circunferencia dada, en la razón de m : n.

46. En un △ inscrito a una ⊙, la bisectriz de uno de sus ángulos interiores corta a la circunferencia en un punto D. Demuestre que la posición del punto D no depende de la situación del vértice opuesto en la circunferencia.

47. En una ⊙ se da un punto P y una cuerda AB. Trazar la cuerda HPE que corte a AB en D, de modo que:

HD : PB = m : n.

48. Demostrar que si en un trapecio se traza una paralela a las bases de modo que sea 1/2 p. g. entre éstas, las diagonales de los nuevos trapecios que se forman, son paralelas entre sí.

49. Demostrar que si en un rectángulo se bajan las perpendiculares de los vértices a las diagonales que no parten de ellos, los pies de dichas perpendiculares son los vértices de un nuevo rectángulo semejante al dado.

50.—Se pide construir un $\triangle$, dados: un lado, (en posición y magnitud) y dos puntos de la bisectriz del ángulo opuesto.

51. La base de un $\triangle$ queda fija, mientras que el vértice se mueve sobre una circunferencia de modo que el ángulo opuesto a la base permanezca constante.

¿Cuál es el L. G. de su centro de gravedad?

52. AB y CD son dos cuerdas de una circunferencia que se cortan en el punto P.

Demostrar que si se hace PB'=PB en la prolongación CP más allá de P y PD'=PD en la prolongación AP más allá de P. se tiene B'D' $\parallel$ AC.

53. El lado AB de un triángulo es fijo y su área p^2 es constante. ¿Cuál es el L. G. del centro de gravedad?

54. En una $\odot$ dada dibuje un diámetro AB. En un punto D de AB levante DE $\perp$ AB. Por A trace una cuerda cualquiera AM que corte a DE en el punto N. Demuestre que AD. AB = AN. AM. ¿Puede estar D en alguna prolongación de AB?

Justifique su opinión.

55. En el $\triangle$ ABC trace MN $\parallel$ AB, y las rectas que unen A con N y B con M que se cortan en S. Demuestre que en el trazo PSQ paralelo a AB y limitado por AC y BC, se verifica que SP =SQ.

56. En un triángulo isósceles trace las alturas y busque y mencione todos los triángulos congruentes o semejantes que se forman y diga cuál magnitud tiene el valor $\dfrac{c^2}{2a}$

(Talca, 1953).

57. Hay dos $\odot$s tangentes exteriormente de radios R y r Demostrar que la tangente común exterior es igual a $2\sqrt{Rr}$.

58. Demostrar que en un triángulo rectángulo se tiene: $(a+b-c)^2=2(c-a)\ (c-b)$. Explique en qué teorema funda su conclusión.

59. Construir un triángulo dados: $a : b = m : n$, c, t_a.

60. Dado un triángulo ABC, trazar una recta DE que corte los lados AC y BC, de modo que AD=DE=EB.

Santiago, 1957.

61. La mediana de un trapecio mide 19 cm y el trazo que une los puntos medios de sus diagonales 7 cm.

¿Cuánto miden las bases?

62. Demostrar que si se une el vértice de un triángulo isósceles con un punto H cualquiera de la base, se verifica:

$$\overline{AC}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}\ .\ \overline{HB}.$$

63. Dadas dos rectas no paralelas, en un plano, y un punto P entre ellas. Trazar la recta que pasa por el vértice y por el punto P, sin prolongar las dos rectas dadas.

64. Resuelva la ecuación.

$$\sqrt{A+\sqrt{x}}+\sqrt{A-\sqrt{x}} = B$$

Valparaíso, 1957

65. En un trapecio isósceles ABCD, la base mayor es el duplo del lado no paralelo y uno de los ángulos basales inferiores vale 60º. Determine el valor de $BD : AB = CD : AC$.

Talca, 1957.

66. En un triángulo rectángulo, el ángulo β es igual a 60º. Calcule los catetos, sus proyecciones sobre la hipotenusa y la altura, en función de c.

67. Se pide inscribir un cuadrado en otro, de modo que sus áreas estén en una razón dada: k. Discuta.

68. ¿Está determinado el problema que pide construir un trapecio, dados: $a : b : c = m : n : o$ y la altura ¿Qué dato elegiría para determinarlo?

En seguida haga la construcción.

Talca, 1950.

69. Demuestre que en un triángulo rectángulo, $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

70. Sea una semi ⊙ de diámetro AB. Si AD y BC son dos cuerdas cualesquiera que se cortan en P, demuestre que: $AB^2 = AD \cdot AP + BC \cdot BP$.

Indicación: Baje desde P la ⊥ al diámetro AB.

71. En un △ ABC trazar una paralela MN de modo que $CM - CN = d$.

Santiago, 1952.

72. Construya un triángulo, dados: $h_c : b_\gamma = m : n, \beta, q$.

Talca, 1956.

73. En un triángulo ABC se da la altura h_c correspondiente al lado c, y los segmentos **u** y **v** determinados sobre ese lado por la bisectriz b_γ. Constrúyalo.

Talca, 1956.

74. Demuestre que en todo △ rectángulo, $c^2 = s^2 - 4r\rho - \rho^2$.

Santiago, 1955.

75. Construir un △ dados: $a : b : c = 1 : 2^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{2}}$ y $h_a + h_b - h_c = 4$ cm.

76. En el triángulo ABC se traza la bisectriz AD del ángulo α y la simetral de AD que corta a la bisectriz del ángulo exterior adyacente a γ, en E.

Demostrar que el cuadrilátero ADCE es inscriptible.

77. En un triángulo se verifica: $a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$. Se pide demostrar que dicho triángulo es rectángulo.

78. Construir un triángulo, dados: h_a, h_b, h_c.

Santiago, 1951.

79. Construir un triángulo, dados el vértice A, el pie de la altura, el pie de la transversal y el pie de la bisectriz correspondiente al lado **c**.

Talca, 1954.

80. Demostrar que en todo triángulo: $p^2 - q^2 = a^2 - b^2$.
Aplique esto al problema de construir un triángulo, dados:

$$c,\ a^2 - b^2,\ h_c.$$

Valparaíso, 1952.

81. Dos lados de un triángulo inscrito en una circunferencia son, respectivamente, el radio y el lado del triángulo equilátero inscrito. Calcule el área del triángulo en función del radio **r** de la circunferencia.

Temuco, 1956.

82. Determine el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo, de catetos **a** y **b**, en función de ellos.

Temuco, 1954.

83. Inscribir un cuadrado en un rombo.
¿Podría ex inscribir otro?

84. Construya una circunferencia que pase por dos puntos dados y que intercepte en una recta dada un segmento de longitud dada. Discuta.

Talca, 1953.

85. Se pide construir un rombo, dados: el perímetro y sabiendo que $e : f = 5 : 4$.

86. Dados 4 puntos, se pide determinar un rectángulo de modo que cada uno de sus lados pase por uno de dichos puntos, dándose, además, la razón m : n en que uno de esos puntos divide al lado que pasa por él.

Talca, 1955.

87. Un sector circular tiene $\alpha°$ y radio **r**. Otro sector circular tiene $2\alpha°$ y $2r$. ¿Cómo son las superficies entre sí?

88. Inscribir en una circunferencia dada un cuadrilátero conociendo dos lados y la razón de los otros dos.

89. Determinar el centro de una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas L_1 y L_2 y a una circunferencia dada. Discusión.

Valdivia, 1951.

90. Los rectángulos que tienen por lados los segmentos determinados por el ortocentro en cada altura de un triángulo, son equivalentes. Demuéstrelo para el triángulo obtusángulo y para el triángulo acutángulo. ¿Se verifica para el triángulo rectángulo?

Punta Arenas, 1952.

91. Determinar los límites entre los cuales puede variar **n** para que la siguiente ecuación tenga raíces reales.

$$2ax(ax+nc)+(n^2-2)c^2=O.$$

92. Calcule el valor numérico de:

$$\left(a-\frac{b}{c}\right) : \left(\frac{d}{4}+\sqrt{e}\right)$$

si $a=12{,}4$ $\quad b=4\frac{1}{2}$

$c=b^{\frac{1}{2}}$ $\quad d=a.$ $\quad e=c^4$

Temuco, 1954.

93. Resuelva:

$$\frac{2}{z+(2-z^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{z-(2-z^2)^{\frac{1}{2}}}=z$$

Temuco, 1954.

94. Resuelva:

$$\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}+\frac{a-b}{x-1}\right]^{-1}=\frac{1-x}{x-a+b}+2$$

Santiago, 1955.

95. Simplifique: $$\frac{1-a^2}{(1-x)^2-(a+x)^2}$$

96. Divida $(x-y)$ por $\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}$ utilice el resultado para hacer racional el denominador de la fracción.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$$

Talca, 1956.

97. Resuelva:

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-x}{d^2-x}}=\frac{c}{d}\sqrt{\frac{a^2-x}{b^2-x}}$$

98. El medio aritmético y el medio geométrico de dos números que se diferencian en 32 unidades, están en la razón de $\frac{5}{3}$

Halle los números. Temuco, 1956.

99. Determine la raíz cuadrada de:

$9^n-2\cdot 6^n+4^n$

¿Cuál es el valor de dicha raíz si $n=5$?

100. Calcular la raíz cuadrada de:

$$x^{-4}-4x^{-3}+8x^{-1}+4$$

101. Reduzca a su forma más simple:

$$\frac{2m}{a}\cdot\sqrt[\sqrt{2}]{a^{\frac{m}{\sqrt{8}}}\cdot b^{\frac{m}{\sqrt{50}}}\cdot c^{\frac{r}{\sqrt{2}}}}:a^{\frac{m}{5}}\cdot b^{-2n}\cdot c^{\frac{r}{2}}$$

102. Resolver:

$$x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$$

103. Determinar a, b, c, d, sabiendo que se tiene:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c};\ \frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

$a+b+c=15$ y $b+c+d=5$.

104. Si a y β son las raíces de

$$x^2+px+q=o,$$

formar la ecuación cuyas raíces sean:

$$\alpha + \frac{2}{\beta} \text{ y } \beta + \frac{2}{\alpha}$$

105. Resolver:

$$3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = 2$$

106. Racionalizar y reducir:

$$\frac{1}{2}\, t \left(2at - t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left(a - t\right) - \sqrt{2at - t^2}$$

Punta Arenas, 1952.

107. Calcular las 3 raíces de la ecuación

$$(x-1)^3 = (3-x)^3$$

Punta Arenas, 1952

108. Resolver $x^3+27=0$. Y verifique si las 3 raíces satisfacen la ecuación.

Valparaíso, 1952.

109. Obtener el valor más simple de:

$$\sqrt[n]{\frac{5^{n+2} - 5^n}{24}}$$

110. Dada la igualdad:

$$\frac{a^2 b\sqrt{ac}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{ab^2}{c}}$$

expresar cada una de las cantidades **a**, **b**, **c**, en función de **las** otras dos.

Talca 1955.

111. Si $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$

y $a+b+c=2s$ demostrar que:

$$b^2-x^2 = \frac{4}{c^2}s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)$$

Talca 1950.

112. Calcular aproximadamente el valor de $a^{-c} \,.\, b^{-c}$ si
$a=0,65$
$b=\ 2$
$c=0,25$

Aprovechando este resultado, calcular $(16a)^{-c} \,.\, b^{-c}$

Santiago, 1952.

113. Resolver:

$$2^x \,.\, 5^{x+1} = 0,5 \,.\, 10^{-8}$$

114. Inscribir en un triángulo, un rectángulo cuyos lados sean entre sí como $m : n$.

115. Construir un triángulo rectángulo, dados: $b+h_c$, $a+c$.

116. Dada la ecuación $mx^2-2mx+m=2x-2$ se pregunta:
a) ¿Cuánto debe valer m para que las raíces de la ecuación sean dos números enteros consecutivos? ¿Cuáles son dichas soluciones?

b) ¿Qué sucede con la diferencia de las raíces si m es un número grande y sigue creciendo?

Talca, 1955.

117. Si a y b son las raíces de $x^2+px+1=0$, y c, d, las raíces de $x^2+qx+1=$ o verifique que se cumple la relación:

$$(a-c)\ (b-c)\ (a+d)\ (b+d) = q^2-p^2.$$

118. ¿Qué valor toma la expresión?

$$N = \frac{\dfrac{1}{x}-b}{\dfrac{1}{x}+b}\sqrt{\frac{1+ax}{1-ax}} \qquad \text{si } x = \sqrt{\frac{2}{ab}-\frac{1}{b^2}}$$

119. Expresse en forma más sencilla:

$$\sqrt[5]{\sqrt{1024}} - \sqrt{3+\sqrt{5}-13}\ \sqrt{\sqrt{8\frac{1}{4}} + 7\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

120. Resolver: $2^{2x+3} - 57 = 65\ (2^x - 1)$

121. Resuelva:

$$\frac{1}{(1+b+b^2)^{1/2} + \sqrt{1-b+b^2}} = \frac{1}{4}$$

122. Reducir a la fórmula más sencilla:

$$\left[\frac{3(-1 \pm i\sqrt{3})}{5}\right]^3$$

123. Simplificar la fracción e indicar si es independiente de x o de y.

$$\frac{\sqrt{48\ y^3} - \sqrt{75\ y^3} + \sqrt{12x^2\ y}}{2x - y}$$

124. Demuestre que en $ax^2+bx+c=o$, si $a=c$, una de las raíces es el valor recíproco de la otra. En tal caso, ¿cuál es el valor $x'^2+x''^2$ expresado en función de la razón k entre a y b?

125. Resolver:

$$(y^2-7by+10b^2)^{\frac{1}{3}} - (y^2+by-5b^2)^{\frac{1}{3}} = y-2b$$

126. Calcular el valor de $A = \dfrac{(2x'-5)\ (2x''-5)}{x'^2+3x'x''+x''^2}$ siendo x' y x'' las raíces de $x^2-15x+11=0$.

127. Determine las constantes a y b de la ecuación $3x^2 - 2ax+b=0$ de modo que la suma de sus raíces sea igual a 3 y su diferencia igual a uno.

128. Resolver:

$$\sqrt{x^2-3x-6} + \sqrt{x^2-3x+15} = 7.$$

129. En $x^3-1=0$, $x'=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuánto valen x" y x'"?

130. Demuestre que 4^{-1} es el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{2^{x+1}}{(2^x)^{x-1}} : \frac{4^{x+1}}{(2^x)^{x-1}}$$

131. Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces x' y x" satisfagan a:

$$x'x''+x'+x''-a=0$$
$$x'x''-a\ (x'+x'')+1=0$$

132. Demostrar la identidad:

$$(1+\sqrt{3})^3(5-3\sqrt{3})=[(1+\sqrt{3})+(3+3\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})]\cdot\frac{-2(7\sqrt{3}+11)}{13}$$

133. Resolver: $x^{1/2} + x^{-1/2} = -\dfrac{13}{6}$

$$\text{y} \quad x^{1/2} + \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{13}{6}$$

134. Dadas las ecuaciones:

$$z^2 = 7z - 12$$
$$z^2 = 3z - p$$

determine "p" de modo que ambas ecuaciones tengan una raíz común.

Temuco, 1954.

135. Determine m de manera que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación $x^2+(m-2)\ x-(m+3)=0$ sea igual a 25.

Santiago, 1955.

136. Encontrar la ecuación de segundo grado, cuyas raíces excedan en 5 unidades a las de la ecuación: $x^2-6x+a=0$.
¡Discusión!

137. Se pide resolver:

$$\frac{x^3+a^3}{x+a}=a^2$$

138. Obtenga la ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$$\frac{a\pm\sqrt{a^2-16(a-1)}}{4\,(a-1)}$$

139. Exprese en la forma más simple:

$$\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}}-\frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$$

140. Dada la ecuación

$$x^2-mx+m^2-3m+2=0$$

a) Determinar para qué valores de m las raíces de la ecuación son iguales.

b) Determinar m de modo que una de las raíces sea el doble de la otra.

141. Resolver $\sqrt{9a^4+36a^3b-27a^2b^2+ab^3+b^4}$

142. Se pide determinar "a" de modo que en la ecuación, una de las raíces sea el cuadrado de la otra:

$$x^2-\frac{15x}{4}+a^2=0$$

143. Sea $ax^2+bx+c=0$ una ecuación cuyas raíces son x' y x''. Buscar otra ecuación cuyas raíces sean $\frac{1}{x'}$ y $\frac{1}{x''}$

144. Determinar p y q de manera que las raíces de $x^2 - px - q = 0$ tengan por diferencia 2i y estén en la razón de 1 : 3.

145. Resolver:

$$3x^2(a+b+c) + 4x(ab+bc+ac) + 4abc = 0$$

146. Reducir a la forma más simple:

$$(a+xi)\ (a-xi)^{-1} - (a-xi)\ (a+xi)^{-1}$$

Santiago, 1951.

147. Determinar m de modo que las raíces de la siguiente ecuación sean iguales y de signo contrario:

$$(z^2-az)\ (m+1) - (bz-c)\ (m-1) = 0$$

Santiago, 1951.

148. Determinar los valores que deben tener a y b para que las siguientes ecuaciones tengan raíces iguales:

$$(7a-2)\ x^2-(5a-3)\ x + 1 = 0$$
$$8bx^2-(4b+2)\ x + 2 = 0$$

149. Verifique la expresión:

$$\frac{c^2}{x^{-2}} + (a^2-b^2)^{1/2} - \frac{(cx)^6}{(a+b)^2} - \frac{(a-b)}{c^{-1}x^{-1}}^{1/2}$$ se reduce a cero para $x = (c^{-1})\ \sqrt{a+b}$

150. Se sabe que $e = 2{,}72$ y que $e^3 = 20$.

Determine lo más cómodamente posible, los valores de e^7 y

$$\sqrt[4]{e^{-e^3}}$$

Talca, 1953.

151. Resuelva y discuta:

$$8(1-x\sqrt{x}) = 4\left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)^2 - 1$$

152. Reducir al máximo la expresión:

$$\left(m^{\frac{a}{b}} \cdot n^{-1}\right)^{b} : \left(\frac{m^{a^2-b^2}}{n^{ab+b^2}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$$

(Talca).

153. Resuelva y discuta:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{a}{x} = \frac{b}{x} \pm \frac{x}{b}$$

Temuco, 1954

154. Verifique la identidad:

$$\tfrac{1}{2}(5+\sqrt{7})^2 - 2(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = \sqrt{415-40\sqrt{105}}$$

155. Resolver:

$$5x^2+\sqrt{5x^2+x+1} = 5-x$$

156. Resolver la ecuación: $(x^2-x-20)\ (x^2-x-42) = 504$

Talca, 1954

157. Se pide construir un $\triangle$ rectángulo de hipotenusa dada $AB=c$ y en ella el punto de intersección de la bisectriz del ángulo recto.

Valdivia, 1956

158. En una $\odot$ de $r=30$ cm. el $\measuredangle$ del centro AOB mide $60°$. Se pide calcular el área del círculo tangente a los lados del $\measuredangle$AOB y a la $\odot$.

159. Si α y β son las raíces de la ecuación $x^2+px+9=0$, forme la ecuación cuyas raíces son $(\alpha+\beta)^2$ y $(\alpha-\beta)^2$.

160. Si las raíces de la ecuación $ax^2+bx+b=0$ están en la razón de m : n, demuestre que:

$$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$$

161. Resuelva: $$\frac{a+b\sqrt[n]{cx+d}}{b+f\sqrt{cx+d}} = g.$$

162. En un $\triangle$ ABC se conoce el lado AC=b. Se pide calcular los lados BC=a y AB=c, en función de "b", sabiendo que la bisectriz del $\sphericalangle\ \beta$, es media proporcional geométrica entre los segmentos que esta bisectriz determina sobre el lado "b" y que la transversal de gravedad, t_b, es media proporcional geométrica entre los lados "a" y "c". Dígase de qué naturaleza es el triángulo ABC.