GEOMETRIA
TERCERA PARTE

GEOMETRIA
PROF. OMER CANO

TERCERA PARTE
Correspondiente al 6º Año de Humanidades

TERCERA PARTE

correspondiente al 6º Año de Humanidades

Programa de Geometría correspondiente al 6º Año de Humanidades

GEOMETRIA DEL ESPACIO

1) Repaso de las materias tratadas anteriormente.

2) Angulos: diedros, triedros, poliedros.

3) Traslaciones: Simetrías, homotecia.

4) Superficies y volúmenes de cuerpos fundamentales poliédricos y redondos.

CAPITULO XVII

EXPRESION DE LOS LADOS DE LOS POLIGONOS REGULARES INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS EN FUNCION DEL RADIO r. — METODO DE LOS PERIMETROS PARA EL CALCULO DEL NUMERO π.

§ 1.—*GENERALIDADES*

Llámase *polígono regular* el que tiene sus lados y ángulos iguales.

Si los lados son cuerdas de una circunferencia, y los vértices están sobre ella, el polígono es *inscrito*. Se acostumbra designar el lado por la letra **l** (minúscula), con un subíndice que indica el número de lados del polígono: $\mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_4$, $\mathbf{l}_5$... Si no se conoce el número de lados, $\mathbf{l}_n$.

Si los lados del polígono son tangentes de una circunferencia, el polígono es *circunscrito*. El lado se designa por **L** (mayúscula) que tiene por subíndice un número igual al número de lados: $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_4$, $\mathbf{L}_5$... $\mathbf{L}_n$.

No se pueden construir todos los polígonos regulares por procedimientos geométricos clásicos (con compás y regla).

Por ejemplo, no se pueden construir los polígonos regulares de 7, 11, 13 lados... etc.

Se pueden construir con procedimientos elementales los polígonos regulares comprendidos en los grupos siguientes:

I.—Los incluídos en la fórmula: $3 \cdot 2^n$ (n es un número entero mayor o igual que cero).

Siendo $\mathbf{n}=0$, se tiene el triángulo equilátero.

Siendo $\mathbf{n}=1$, se tiene el hexágono regular.

Siendo $n=2$, se tiene el dodecágono regular.

Siendo $n=3$, se tiene el polígono regular de 24 lados, etc.

II.—Los incluídos en la fórmula: $4 \cdot 2^n$: cuadrado, octógono, polígono de 16 lados, etc.

III.—Los incluídos en la fórmula: $5 \cdot 2^n$: pentágono, decágono, icoságono, polígono de 40 lados, etc.

IV.—Los incluídos en la fórmula: $15 \cdot 2^n$: pentadecágono, polígono de 30 lados, etc.

La $\perp$ del centro a un lado del polígono regular, se llama *apotema*. Se designa por ρ con un subíndice igual a número de lados del polígono: ρ_3, ρ_4, $\rho_5 \ldots \rho_n$. En figura 280 **OH** es la apotema ρ_6.

§ 2.—HEXAGONO REGULAR Y TRIANGULO EQUILATERO INSCRITOS

a) PROBLEMA 23.—*Construir en una ⊙ dada un hexágono* (1) *regular inscrito y calcular su lado* l_6 *en función de* r.

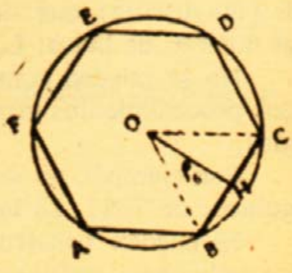


Fig. 280

Construcción.—Se aplica el radio **r** seis veces como cuerda en la circunferencia y se unen los puntos consecutivos. (**Fig. 280**).

Dem.) $\triangle$ BCO equilátero

$\measuredangle$ **BOC**$=60°$

$$\boxed{\mathbf{BC = l_6 = r.}}$$

(1) Del hexágono regular inscrito se deducen sucesivamente el dodecágono regular inscrito y los polígonos de 24, 48 y 96 . . ., $3 \cdot 2^n$ lados.

b) **PROBLEMA 24.**—*Inscribir en una ⊙ dada un △ equilátero y calcular su lado l_3, la apotema ρ_3 y su área a_3, en función de r.*

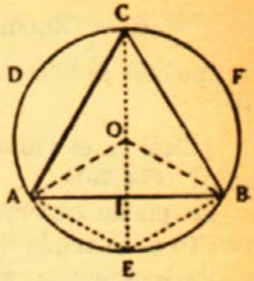


Fig. 281

1º **Construcción.**— Se divide la ⊙ en seis partes iguales. (Fig. 281).

Se unen los puntos uno por medio. ABC=△ equilátero.

2º **Cálculo de AC=l_3 en f (r)** [1]

1.er modo: Se dibuja el diámetro CE.

E(↔)A

△ECA rectángulo en A. (Teor. de Thales).

Luego $\overline{AC}^2=\overline{EC}^2-\overline{AE}^2$ (Teor. Pit. 2ª forma)

$$l_3^2= 4r^2-r^2=3r^2$$

De donde: $\boxed{l_3=r\sqrt{3}}$

2º modo de calcular l_3.—AEBO es un rombo.

Por tanto: Las diagonales se dimidian y se cortan perpendicularmente.

Luego: AI · IB = EI · IC. (Teorema LXIV).

$$\frac{l_3^2}{4} = \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}+r\right)=\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{2}$$

$$l_3^2 = r^2 + 2r^2 = 3r^2$$ (multiplicando por 4 ig. anterior)

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

---

(1) f(r), léase en función de r.

Siendo $r = \frac{1}{2}$ m y $\sqrt{3} = 1{,}73\ldots$ (aprox.)

$$l_3 = 50[\mathrm{cm}] \cdot 1{,}73 = 86{,}50[\mathrm{cm}] \quad \text{(aprox.)}$$

También se hubiera podido calcular l_3 considerando △ rect. AIO.

¿Cuál es el valor del apotema OI = ρ_3 en función del radio? (Fig. 281).

Se puede observar que la altura de un △ equilátero inscrito es el triple de su apotema. (Fig. 281).

Para tener la relación de la altura h, en función del lado l_3 de un △ equilátero, cuyo valor es útil retener para los problemas, se considera el △AIC rect. (Fig. 281). y se aplica el teorema particular de Pitágoras.

$$\overline{CI}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AI}^2$$

$$h^2 = l_3^2 - \frac{l_3^2}{4} = \frac{4l_3^2 - l_3^2}{4} = \frac{3l_3^2}{4}$$

$$\boxed{h = \frac{l_3}{2}\sqrt{3}}$$ (Retener este valor)

¿Cuánto vale h en función de r?

NOTA.—El triángulo isósceles [1] que se forma al unir el centro con dos vértices consecutivos de un polígono regular inscrito, se llama triángulo fundamental del polígono. En Fig. 281 △ ABO. Obtenido este triángulo es fácil construir el polígono total.

---

(1) En el cuadrado inscrito el △ fundamental es un △ rectángulo isósceles. En el hexágono reg. inscrito, es un △ equilátero.

§ 3.—CUADRADO Y OCTOGONO INSCRITOS

PROBLEMA 25.—*Inscribir en una circunferencia dada un cuadrado y calcular su lado l_4, la apotema ρ_4 y su área a_4, en función de* **r**.

1º Construcción.—Se construyen dos diámetros $\perp$ AC y DB. En seguida se unen sus extremos.

ABCD cuadrado inscrito. (Fig. 282).

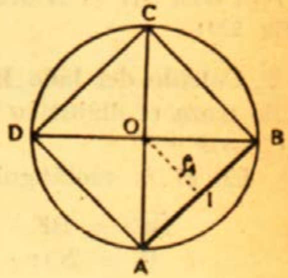


Fig. 282

2º Cálculo del lado $AB = l_4$ en función de r.

En la Fig. 282.

$\triangle ABO$ rectángulo en O.

Luego: $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$

$$l^2_4 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

De donde:

$$\boxed{l_4 = r\sqrt{2}}$$

Ejemplo: Si $d = 1$ m.

$r = 50$ cm

$l_4 = r\sqrt{2} = 50 \text{ cm} \cdot 1{,}4,\ldots = 70{,}50$ cm.

¿Cuánto vale el apotema $OI = \rho_4$, (Fig. 282), en función de r?

PROBLEMA 26.—*Construir en una* ⊙ *dada un octógono inscrito y calcular su lado l_8 en función de* **r**.

1º Construcción.— Primero se construye cuadrado ACEG. En seguida se dividen los arcos, AC, CE. . . en dos partes iguales.

ABCDEFGH es el octógono (Fig. 283).

2º Cálculo del lado BC=l_8. Se traza el diámetro BF

C(↔)F

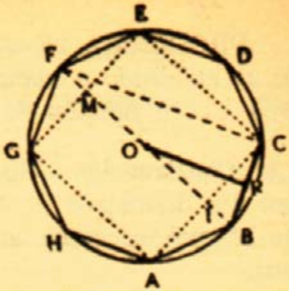


Fig. 283

En el △ rectángulo BFC se tiene:

$$\overline{BC}^2 = BF \cdot BI \qquad \text{(Teor. LXI)}$$
$$l^2_8 = 2r(r-\rho_4)$$

$$\text{Pero } OI = \rho_4 = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$$

$$l^2_8 = 2r(r - \frac{1}{2} r\sqrt{2}) = 2r^2 - r^2\sqrt{2} = r^2(2-\sqrt{2})$$

$$\boxed{l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

OBSERVACION.— Del octógono regular inscrito se pasaría del mismo modo y sucesivamente al polígono regular de 16, 32, 64 . . . 4 . 2^n lados.

§ 4.—*DECAGONO Y PENTAGONO INSCRITOS*

Para construir el decágono inscrito hay que resolver previamente el siguiente problema conocido con el nombre de *división de un segmento* (o trazo) *en sección aúrea o divina o en media y extrema razón.*

PROBLEMA 27.—*Dividir un trazo dado* **AB=a**, *en media y extrema razón o en sección aúrea o divina.*

Dividir un trazo en media y extrema razón o en sección aúrea es dividirlo en dos partes desiguales tales que, el segmento mayor sea media proporcional geométrica entre el trazo entero y el segmento menor.

Ejemplo: Si el trazo AB. (Fig. 284) quedase dividido por F en sección aúrea se verificaría la siguiente proporción:

AB : AF = AF : FB

Solución.—Sea **AB=a** el trazo dado. (Fig. 284).

Hágase: $BO \perp AB$

$$BO = \frac{1}{2} AB$$

$\odot$ (O, OB)

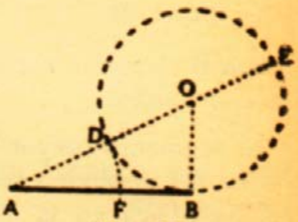


Fig. 284

Trazar secante AOE.

Se hace: AF=AD.

El punto **F** divide al trazo AB=**a**, en media y extrema razón.

De modo que resulta:

AB : AF = AF : FB.

Demostración.—En virtud del Teor. LXVI que relaciona la secante y la tangente que parten de un mismo punto, en Fig. 284 se tiene:

AE : AB = AB : AD.

Descomponiendo esta proporción, resulta:

(AE—AB) : AB=(AB—AD) : AD

Pero como: AB=DE (constr.)
y AF=AD
resulta: AE—AB=AF
y AB—AD=FB
Luego: AF : AB=FB : AF
Invìrtiendo la última prop. se tiene:
AB : AF=AF : FB. (Q. E. D.)

PROBLEMA 28.—*Construir en una ⊙ dada un decágono regular inscrito y calcular su lado l_{10} en función de* **r.**

1° **Construcción.**— El radio OA se divide en media y extrema razón. (Probl. 27).

Sea **B** el punto que divide OA en sección aúrea.

El segmento mayor OB es el lado l_{10} del decágono regular inscrito. Se aplica en la circunferencia como cuerda, diez veces. (Fig. 285).

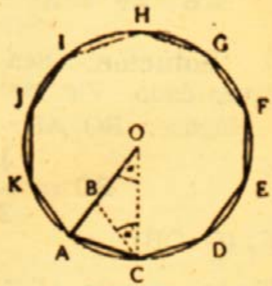


Fig. 285

Demostración.—O(↔)C (↔)B

Si AC=OB, es el lado l_{10} del decágono regular inscrito, el ∢ del centro correspondiente, α, debe medir $\frac{360°}{10} = 36°$.

En efecto: △ACO∼△ABC (2° caso).
Tienen: AO : AC=AC : AB (Div. de AO en secc. aúrea)
y ∢OAC = ∢CAB (común).
Pero △ACO es isósceles.
También su ∼△ABC, debe ser isósceles
Resulta: AC=BC=OB.

Por tanto: $\triangle OBC$ isósceles.

$\therefore \quad \alpha = \alpha'$

$\sphericalangle ABC = 2\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACO$

Luego en el $\triangle ACO$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sphericalangle \text{ en } O &= \alpha \\ \sphericalangle \text{ en } A &= 2\alpha \\ \sphericalangle \text{ en } C &= 2\alpha \end{aligned}$$

Sumando: $\sphericalangle O + \sphericalangle A + \sphericalangle C = 5\alpha = 180°$

$\alpha = 36°$

Luego: $AC = OB = l_{10}$ (Q. E. D.)

2º.—**Cálculo** del lado $AC = l_{10}$ en f (r). (Fig. 285).

Se sabe que: $OA : OB = OB : AB$ (Por división en secc. aûrea de OA).

Pero : $OA = \mathbf{r}$.

$OB = AC = l_{10}$

Entonces: $r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10})$

$l^2_{10} = r^2 - rl_{10}$

Se ordena la ecuación de 2º grado y se resuelve:

$$l^2_{10} + rl_{10} - r^2 = 0.$$

$$l_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$l'_{10} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5};$$

$$l''_{10} = -\frac{r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{5}.$$

La 2ª raíz no conviene a l_{10} por ser de valor negativo.

Entonces se tiene que:

$$\boxed{l_{10} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

Observaciones.—a) Si se unen los vértices, uno por medio, del decágono regular inscrito, resulta el pentágono regular inscrito. (Fig. 286).

b) Si se subdividen sucesivamente los arcos AB, BC, CD... (Fig. 286). en 2, 4, 8 partes iguales, se obtienen los polígonos de 20, 40, 80... $5 \cdot 2^n$ lados.

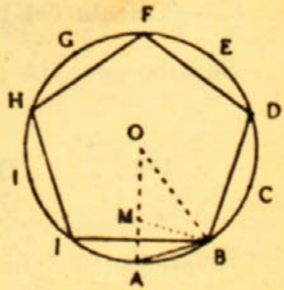


Fig. 286

§ 5.—*PENTADECAGONO*

PROBLEMA 29.—*Construir en una circunferencia el pentadecágono regular inscrito y calcular su lado l_{15} en función de r.*

1º Construcción.— (Ver figura 287).

Se hace:

$AB = l_{10}$
$AC = r = l_6$
$B(\leftrightarrow)C$
$BC = l_{15}$

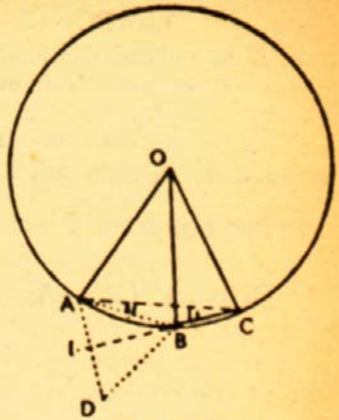


Fig. 287

2º Demostración.—Para que BC sea l_{15} se requiere que

$$\sphericalangle BOC = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$$

En efecto:

$\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC - \sphericalangle AOB$

Pero: $\sphericalangle AOC = 60^\circ$ ($\triangle$ACO equil.)

y $\sphericalangle AOB = 36^\circ$ ($AB = l_{10}$)

Luego: $\sphericalangle BOC = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$.

3º Cálculo de l_{15} en función de **r**.

Se prolonga $CB \rightarrow B$ (Fig. 287).

Se hace: $AI \perp CI$
$D(\leftrightarrow)B$

Resulta que ADB es $\triangle$ equilátero.

En efecto, $\sphericalangle ABI = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$ (Un $\sphericalangle$ ext. de un $\triangle$ es =)

Pero $\sphericalangle 1 = 18^\circ$ (Propiedad del $\sphericalangle$ inscrito)

y $\sphericalangle 2 = 12^\circ$ (Propiedad del $\sphericalangle$ inscrito)

$\sphericalangle ABI = \sphericalangle IBD = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 18^\circ + 12^\circ = 30^\circ$

$\therefore$ $\sphericalangle ABD = 60^\circ$

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BDA = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

Por tanto $\triangle ADB$ es equilátero.

$$l_{15}=BC=CI-BI.$$

CI se calcula como cateto del $\triangle$ rectángulo CIA (Teor. particular de Pitágoras).

BI se calcula como altura del $\triangle$ equilátero ADB, en función de su lado $AB=l_{10}$. (Págs. 374 y 379).

Por tanto:

$$CI = \sqrt{CA^2-AI^2}= \sqrt{r^2-\left(\frac{l_{10}}{2}\right)^2}=$$

$$\sqrt{r^2-\frac{r^2}{16}(6-2\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{16r^2-6r^2+2r^2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{10r^2+2r^2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{r^2}{16}(10+2\sqrt{5})}$$

$$=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$BI= \frac{1}{2}AB\sqrt{3}= \frac{1}{2}l_{10}\sqrt{3}= \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}$$

Reemplazando se tiene:

$$l_{15}=BC=CI-BI=\frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{r}{4}(5-1)\sqrt{3}$$

$$\boxed{l_{15} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15}\right]}$$

OBSERVACION.—Como sería un tanto engorroso el cálculo directo del lado para cada polígono, deducido de la figura respectiva, se requieren:

a) Una fórmula general que permita pasar del lado l_n (lado de un polígono regular de **n** lados) conocido previamente, al cálculo del lado l_{2n} (lado del polígono regular inscrito de doble número de lados que el polígono de lado l_n.

b) Una fórmula general que permita calcular el lado L_n (lado de un polígono regular circunscrito de **n** lados (conocido el lado l_n del polígono inscrito del mismo número de lados.

§ 6.—*CALCULO DE LOS LADOS l_{2n} y L_n EN FUNCION DE r y l_n*

a) PROBLEMA 30.—*Calcular el lado l_{2n} de un polígono regular inscrito de 2_n lados* (doble número de lados), *dados el lado l_n del polígono regular inscrito y* **r**.

Solución.—Sea $AB = l_n$ (conocido) Fig. 288.

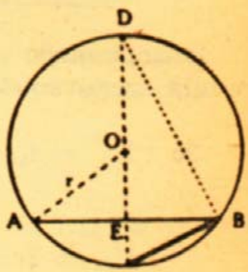


Fig. 288

Se hace: arc. CA = arc. CB

$C(\leftrightarrow)B$

Resulta: $CB = l_{2n}$

Se traza diámetro COD

$B(\leftrightarrow)D$

$\triangle$DCB rect. en B (Teor. de Thales).

Luego: CD : CB = CB : CE

$$2r : l_{2n} = l_{2n} : (r - \rho_n)$$

La apotema $OE = \rho_n$ se calcula como cateto del $\triangle$ rectángulo AEO:

$$OE = \rho_n = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{l^2_n}{4}} =$$

$$\sqrt{\frac{4r^2 - l_n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

$$\therefore 1) \quad \boxed{\rho_n = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

Sacando r^2 en factor común en la cantidad subradical y extrayendo raíz cuadrada, en la fórmula anterior, resulta:

$$2) \quad \boxed{\rho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}}$$

Reemplazando ρ_n por su valor, en igualdad anterior, resulta sucesivamente:

$$2r : l_{2n} = l_{2n} : \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_n^2}\right)$$

$$l^2_{2n} = 2r\left[r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n}\right]$$

Luego:

$$1) \quad \boxed{l_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n}\right)}}$$

o bien: $l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}}}$

2) $$\boxed{l_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}}$$

Mediante estas fórmulas si se conociera, por ejemplo, l_4, en función de **r**, se podría determinar l_8, también, en función de **r**. Conocido l_8, se podría calcular l_{16}, y así, sucesivamente, los lados l_{32}, l_{64}. . . etc., hasta el infinito. El mismo cálculo se puede hacer con los lados de los otros grupos de polígonos regulares: l_3, l_6. . . l_5, l_{10}. . ., etc.

Ejemplo: Sea $l_4 = r\sqrt{2}$, calcular l_8.

Solución.—En cualquiera de las fórmulas anteriores, por ej. en (1), se reemplaza el primer miembro por l_8 (incógnita); en el segundo miembro se reemplaza l_n por el valor de l_4 (conocido):

$$l_8 = \sqrt{2r(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - 2r^2})} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{2r^2}}$$

$$l_8 = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Hágase el mismo cálculo empleando la fórmula (2).

OBSERVACION.—La fórmula:

$$l_{2n} = \sqrt{2r(r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n})}$$

es reversible, o sea que, por medio de ella, se puede también, recíprocamente, calcular el lado l_n cuando se conoce el lado l_{2n}. La fórmula queda convertida en una ecuación irracional. (La incógnita está bajo el radical).

Ejemplo: Sabiendo que $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, calcular l_4.

Solución.—Aplicando la fórmula anterior resulta la ecuación:

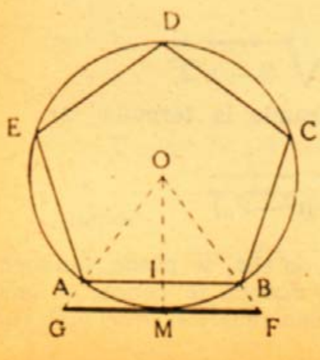
$$r\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2r(r\ \frac{1}{2}\ \sqrt{4r^2-l^2_4})}$$

$2r^2-r^2\sqrt{2}=2r^2-r\sqrt{4r^2-l^2_4}$ (Elevando al cuadrado, dividiendo por r y reduciendo)

$$\sqrt{4r^2-l^2_4} = r\sqrt{2}$$
$$4r^2-l^2_4 = 2r^2$$
$$l^2_4 = 2r^2$$
$$l_4 = r\sqrt{2}$$

Hágase el cálculo aplicando la fórmula (2) de la pág. 384.

b) PROBLEMA 31.—*Calcular el lado* $\mathbf{L}_n$ *de un polígono regular circunscrito en función de* **r** *y del lado* $\mathbf{l}_n$ *del polígono regular inscrito semejante* (mismo número de lados).



Solución.—Sea $AB = \mathbf{l}_n$ (conocido) (Fig. 289).

y $GF = \mathbf{L}_n$ (incógnita)

$OM = r$

$OI = \rho_n$

$\triangle OGF \sim \triangle OAB$ (Tienen $GF \parallel AB$)

$GF : AB = OM : OI$

$L_n : l_n = r : \rho_n$

Fig. 289

$$L_n = \frac{r \cdot l_n}{\rho_n} \quad (^1)$$

Pero $\rho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}$ (Se calcula en $\triangle$ rect. OIB como en pág. 384, fórmula 2)

Substituyendo en ig. (^{1}) ρ_n por su valor se tiene:

$$L_n = \frac{r \cdot l_n}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n}} = \frac{2r\, l_n}{\sqrt{4r^2 - l^2_n}}$$ (Se amplificó por 2 el 2º miembro)

1) $$\boxed{L_n = \frac{2r\, l_n}{\sqrt{4r^2 - l^2 n}}}$$

también: $$L_n = \frac{rl_n}{\frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{l^2_n}{r^2}}} = \frac{2l_n}{\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}$$

2) $$\boxed{L_n = \frac{2l_n}{\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}}$$

Ejemplo: Calcular L_{12}, sabiendo que $l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Solución: Aplicando la fórmula $L_n = L_{12} = \dfrac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l^2_n}}$, se tiene sucesivamente:

$$L_{12} = \frac{2r \cdot r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4r^2-2r^2+r^2\sqrt{3}}} = \frac{2r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2r^2+r^2\sqrt{3}}} = \frac{2r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{r\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$L_{12} = \frac{2r\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{4r-2r\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} =$$

$$\frac{2r(2-\sqrt{3})}{\sqrt{1}} = 2r(2-\sqrt{3})$$

$\sqrt{3} = 1{,}7320508$ y $r = \dfrac{1}{2}$

Luego: $L_{12} = 2 - 1{,}7320508 = 0{,}2679492.$

Repetir el mismo cálculo aplicando la fórmula 2.

§ 7.—*CALCULO DE π POR EL METODO DE LOS PERIMETROS*

Se designa por π el número que indica las veces que el diámetro cabe en su circunferencia rectificada.

En términos más matemáticos π se define así: *es la razón de la circunferencia al diámetro.*

$$\boxed{\pi = \frac{C}{d}}$$

Esta fórmula sugiere dos métodos para el cálculo de π:

1º El método directo o *de los perímetros,* llamado *método de Arquímedes.* En él se calcula **C**, conocido **d**.

2º El método de los *isoperímetros,* llamado también *método Schwab.* Es inverso del anterior: Se da **C** y se calcula **d**.

Se tratará sólo el primer método.

Método de los perímetros.— Se parte de la fórmula $\pi = \frac{C}{d}$ (1).

---

(1) **También se puede partir de la fórmula: $\pi = \frac{C}{2r}$**

En este caso se hace r=1

Resulta: $\pi = \frac{C}{2}$

Se hace **d=1**, (cm, m, pulgada. . ., u otra unidad cualquiera de longitud).

Resulta: π=**C** [1].

El cálculo de π se reduce a calcular la longitud de la circunferencia **C** cuyo diámetro **d=1** (cm, m, pulg. . . etc).

Pero **C** es el límite a que tienden los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos al duplicar sucesiva e indefinidamente sus lados.

Si el número de lados del polígono regular, inscrito o circunscrito, se duplicara hasta el infinito, al final resultaría el círculo y en este caso se tendría que **C** sería exactamente igual, también, al número π.

Si el número de lados del polígono no se duplica hasta el infinito, resulta:

a) **C** = *perímetro* polígono regular *inscrito* = π, pero sólo aproximadamente y por defecto.

b) **C** = *perímetro* polígono regular *circunscrito* =π, pero también aproximadamente, y en este caso, por exceso.

Prácticamente para tener por aproximación la longitud de la circunferencia **C** de diámetro **d=1** y, por tanto, el valor de π, hay que resolver los problemas siguientes:

1º En una serie o grupo cualquiera de *polígonos regulares inscritos*, se calcula el lado $\mathbf{l}_n$ y el *perímetro de un* primer polígono de **n** lados.

---

(1) Obsérvese que **C** se mide en unidades de longitud: cm, m, pulgada, etc. En cambio π, que es una razón, no lleva tales denominaciones. Pero el número absoluto (sin denominación) que expresa la longitud de **C**, el mismo, expresa y es igual al valor de π.

Por ejemplo, podría ser el cuadrado inscrito, el hexágono inscrito, etc.

2º En la misma serie de polígonos se calcula el lado l_{2n} y el *perímetro* del polígono regular *inscrito* que resulta al duplicar los lados del primer polígono que se elige. Se aplica la fórmula:

$$l_{2n} = \sqrt{2r\ (r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2_n}}$$

Se continúa calculando los lados y perímetros, cuantas veces se quiera, de los polígonos inscritos, cuyo número de lados se va sucesivamente duplicando indefinidamente. Se aprovecha la misma fórmula anterior.

3º Se hacen los mismos cálculos con los *polígonos regulares circunscritos* con el fin de tener los *perímetros*. Se aplica para ello la fórmula vista anteriormente:

$$L_n = \frac{2r\,l_n}{\sqrt{4r^2 - l^2_n}}$$

Comparando cada par de valores de los perímetros de dos polígonos regulares *inscrito y circunscrito,* de mismo número de lados (polígonos semejantes), puede uno darse cuenta de la aproximación del número π, la cual será tanto más cercana a dicho número cuanto mayor es el número de lados de los dos polígonos.

Para cada par de valores de tales perímetros, el número cuyas cifras (enteras y decimales) son comunes a los valores de ambos perímetros, es la parte exacta alcanzada del Nº π.

Los cuadros que van a continuación darán una idea más clara del proceso indicado para el cálculo de π.

Siguiendo a **Arquímedes,** se ha partido del hexágono regular inscrito.

POLIGONOS REGULARES INSCRITOS

Nº de lados	Valor del lado en función de $r = \frac{1}{2}$		Perimetros
6	$l_6 = r$	$= 0{,}50$	3,00000
12	$l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$= 0{,}258195$	3,10582
24	$l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$= 0{,}1305262$	3,13262
48	$l_{48} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	$= 0{,}0654031$	3,13934
96	$l_{96} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	$= 0{,}0327190$	3,14102
192	$l_{192} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$	$= 0{,}01636161$	3,14142
384	$l_{384} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}$	$= 0{,}00818113$	3,14155
768	$l_{768} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}$	$= 0{,}00409060$	3,14158
...	... ...	...	...

POLIGONOS REGULARES CIRCUNSCRITOS

Nº de lados	Valor del lado en función de $r = \frac{1}{2}$	Perimetros
6	$L_6 = \frac{2r}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 1{,}7320508 = 0{,}5773502$	3,46410
12	$L_{12} = 2r(2-\sqrt{3}) = 1(2-1{,}7320508) = 0{,}2679492$	3,21539
24	$L_{24} = 2r(2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}) = 0{,}1316524$	3,15965
...	... ...	...
384	$L_{384} = \frac{2r \cdot l_{384}}{\sqrt{4r^2 - l_{384}^2}} = \frac{1 \cdot 0{,}00818113}{\sqrt{1 - 0{,}00818113^2}} \doteq 0{,}00818141$	3,14166
768	$L_{768} = \frac{2r \cdot l_{768}}{\sqrt{4r^2 - l_{768}^2}} = \frac{1 \cdot 0{,}00409060}{\sqrt{1 - 0{,}00409060^2}} = 0{,}0040907$	3,14165
...	... ...	...

Puede observarse en los dos cuadros anteriores cómo van aumentando los perímetros en los polígonos inscritos, y, disminuyendo en los circunscritos, a medida que aumentan los lados en ambas clases de polígonos.

Se puede ver, también, cómo los mismos perímetros tienden a confundirse en un límite común que, como se ha dicho, es el valor del número π.

Si nos detenemos en el polígono regular de 768 lados (inscrito y circunscrito) se puede deducir que π está comprendido entre los perímetros 3,14158 y 3,14165 de los polígonos regulares de lados l_{768} y L_{768}, respectivamente, o sea que:

$$3{,}14158 < \pi < 3{,}14165$$

Como estos perímetros coinciden hasta la tercera cifra decimal, el valor: $\pi = 3{,}141$, queda determinado exactamente hasta dicha tercera cifra, inclusive.

Siendo π un número inconmensurable sólo se podrán obtener para él valores aproximados. No puede ser estrictamente igual a ningún número entero ni fraccionario.

En la práctica, suelen utilizarse los siguientes valores aproximados:

$$\pi = 3{,}1416.$$

$$\pi = \frac{22}{7}$$

§ 8.—RECTIFICACION DE LA CIRCUNFERENCIA Y CUADRATURA DEL CIRCULO

a) Rectificación de la circunferencia.— Este problema consiste en construir geométricamente una recta equivalente a la longitud de una circunferencia.

Como π es un número inconmensurable, es imposible construir geométricamente una recta exactamente igual a la longitud de la circunferencia. Sólo existen soluciones aproximadas.

1° **La de Specht.**—Sea la circunferencia C de centro O. (Fig. 290).

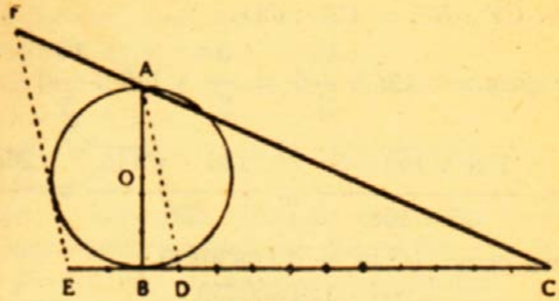


Fig. 290

El diámetro **AB = d** se divide en cinco partes iguales.

En **B** se traza la tangente $\mathbf{BC} = \dfrac{11}{5}$ del diámetro **d**.

C(↔)A.

En △ rectángulo **ABC** se tiene:

$$\mathbf{AC} = \sqrt{\mathbf{d}^2 + \left(\frac{11}{5}\mathbf{d}\right)^2} = \frac{\mathbf{d}}{5}\sqrt{146}$$

Se toman : $\mathbf{BD} = \dfrac{\mathbf{d}}{5}$

y $\mathbf{BE} = \dfrac{2}{5}\mathbf{d}$

A(↔)D

Se traza EF ∥ AD

Se prolonga CA→A, hasta cortar EF en F.

Resulta CF igual, aproximadamente, a C. (Circunf.)

Demostración.— $\triangle CEF \sim \triangle CDA$ (Toda $\parallel$ a un lado de un $\triangle$... Pág. 245).

Luego: $CF : CE = CA : CD$

Reemplazando: $CF : \frac{13}{5}d = \frac{d}{5}\sqrt{146} : \frac{10}{5}d$

$$CF = \frac{13d^2\sqrt{146} \cdot 5}{25 \cdot 10d} = \frac{13d \cdot \sqrt{146}}{50} = \frac{26d\sqrt{146}}{100}$$

pero como $\sqrt{146} = 12,0830459$

resulta: $CF = \frac{26d \cdot 12,0830459}{100} = 3,1415934$ **d.**

Luego: $CF = 3,1415934 \cdot 2r = \pi \cdot 2r = C.$

Este valor es exacto hasta la quinta cifra decimal.

2º **La de Wicke** (de Rengo)

Se construye un $\triangle$ rectángulo ABC de catetos 2r y r. (Fig. 291).

La hipotenusa AB será igual a **r** $\sqrt{5}$.

Luego el perímetro es:

$2r+r+r\sqrt{5}=r\ (3+\sqrt{5})$
$=r \cdot 5,236068.$

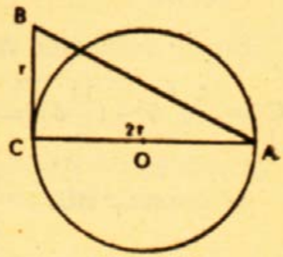


Fig. 291

Los $\frac{3}{5}$ de este perímetro son aproximadamente igual a la semicircunferencia.

En efecto: $\frac{5,236068 \cdot 3r}{5} = 3,14161$ **r** $= \pi$**r.**

b) Cuadratura del círculo.—Consiste en construir un cuadrado equivalente a un círculo dado, geométricamente.

Si el lado del cuadrado = x

Resulta la ecuación: $x^2 = \pi r^2$.

Transformando la igualdad anterior en proporción se tiene: $r : x = x : \pi r$.

El lado del cuadrado es M. p. g. entre **r** y la semicircunferencia πr.

Como es imposible construir una recta exactamente igual a una semicircunferencia, puesto que π es inconmensurable, el problema no tiene solución exacta.

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Desde un punto A situado en una ⊙ de centro O, parten las cuerdas $AB = l_6$ y $AC = l_5$. ¿De qué polígono regular es el lado la cuerda BC?

Idem, ¿si $AB = l_6$ y $AC = l_4$? Idem, ¿si $AB = l_3$ y $AC = l_4$?

Idem, ¿si $AB = l_4$ y $AC = l_5$? Idem, si $AB = l_8$ y $AC = l_{12}$?

2. Dada una ⊙ de radio r = 12 cm, calcular: a) el perímetro del cuadrado inscrito; b) el área comprendida entre los cuadrados inscrito y circunscrito; c) el perímetro del △ equilátero inscrito; d) el perímetro del △ equilátero circunscrito; e) la apotema ρ_3; f) el área del △ equilátero inscrito; g) el área del △ equilátero circunscrito.

3. En una ⊙ de radio = b determinar la razón entre las áreas: 1º) de los cuadrados inscrito y circunscrito en dicha ⊙; 2º) de los △s equiláteros inscrito y circunscrito; 3º) de los hexágonos regulares inscrito y circunscrito; 4º) del hexágono regular inscrito y △ equilátero inscrito.

4. En un △ equilátero cuyo lado mide 36 cm, se inscribe y circunscribe una ⊙. Calcular los radios de ambas ⊙s.

5. En una ⊙ se inscribe y circunscribe un △ equilátero. Calcular el radio de dicha ⊙ si el área comprendida entre ambos polígonos es $36\sqrt{3}$ cm².

6. Si la diferencia de las áreas entre los hexágonos regulares inscrito y circunscrito a una misma ⊙ es $18\sqrt{3}$. Determinar el radio de esta ⊙.

7. A partir del extremo A de un diámetro AB de una ⊙, se aplican sucesivamente y en el mismo sentido, las cuerdas $AC = l_4$ y $CD = l_{12}$. Si se une D con B, ¿de qué polígono es el lado la cuerda DB?

8. Dado un pentágono regular inscrito ABCDE, desde el vértice A se trazan la diagonal AC y una cuerda AF= al lado del △ equilátero inscrito. ¿De qué polígono regular es lado la cuerda FC.

9. Si un △ rectángulo tiene por catetos l_6 y l_{10}, tendrá por hipotenusa l_5, en el mismo círculo. Calcular l_5 en función del radio r.

INDICACIONES:

$AB = l_{10}$ (Fig. 292).
Se prolonga AB→B
Se hace: $AC = AO = r = l_6$
Resulta: CA : AB = AB : CB.
(Probl. 28, pág. 378).

Desde C se traza la tangente CD a la circunferencia O.

D(→O.

Resulta CA : CD = CD : CB
Teor. de la tang., pág. 310).

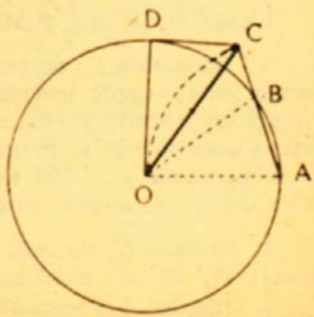


Fig. 292

10. Dado un círculo, construir el lado del decágono y del pentágono regulares en la misma figura y sin dividir previamente el radio en sección aúrea.

Solución.— Se traza diámetro AB. (Fig. 293).

$OC \perp AB$

Se hace $MO = MA$

Con centro en M y radio MC se describe arco CD

$OD = l_{10}$

$CD = l_5$

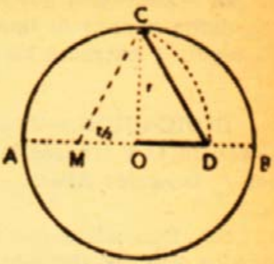


Fig. 293

Demostración.—En $\triangle$ rect. CMO se aplica teor. de Pitág.: $\overline{MC}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{OC}^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5r^2}{4}$

$$MC = MD = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$\text{Luego: } OD = MD - MO = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = l_{10}$$

También $CD = l_5$. En efecto, aplicando teor. part. de Pitág. en $\triangle$ rect. COD, se tiene:

$$CD = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2} = \sqrt{r^2 + \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4r^2 + 6r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10r^2 - 2r^2\sqrt{5}}}{4} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = l_5$$

11. Demostrar que si en una circunferencia una cuerda $AB = l_{10}$, dicha cuerda es igual al segmento mayor del radio dividido en media y extrema razón.

INDICACION.—Unanse los extremos A y B de la cuerda con el centro O y trácese la bisectriz de uno de los ángulos basales del $\triangle$ isósceles ABO.

12. Demostrar que las diagonales AD y BE de un pentágono regular ABCDE inscrito se cortan en un punto M en media y extrema razón.

13. La altura de un $\triangle$ equilátero inscrito mide 1 m. Calcular el perímetro del $\triangle$ semejante circunscrito al mismo círculo.

14. Demostrar que en todo $\triangle$ isósceles cuyo ángulo basal es el duplo del ángulo del vértice, la bisectriz de un ángulo basal divide al lado opuesto en media y extrema razón.

15. ¿Cuál es el valor de la apotema de un hexágono regular cuyo perímetro es 120 m.?

• **16.** La apotema de un hexágono regular es 2,80. Calcular el perímetro del hexágono.

• **17.** Calcular la apotema ρ_8 de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio $= 6$ cm.

• **18.** Si $l_8 = 4$ cm, calcular la apotema ρ_8 (octógono regular inscrito).

• **19.** En un octógono regular inscrito $l_8 = 1$ m. ¿Cuánto mide r del círculo circunscrito?

20. La diferencia entre l_4 y l_8 de un cuadrado y octógono regular inscritos en una misma circunferencia es 3 m. Calcular el radio de la circunferencia y los lados de ambos polígonos.

• **21.** Calcular la apotema ρ_{10} del decágono regular inscrito, en función del radio r de la circunferencia circunscrita.

22. El lado l_{12} de un dodecágono regular inscrito mide 30 cm; determinar el radio de la circunferencia circunscrita.

• **23.** Calcular l_{12}, sabiendo que $l_6=r$

• **24.** Calcular l_8, sabiendo que $l_4=r\sqrt{2}$

25. Calcular l_6, deduciéndolo de $l_3=r\sqrt{3}$

• **26.** Calcular l_{16}, sabiendo que $l_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

27. Calcular l_{24}, sabiendo que $l_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

28. Calcular l_3, sabiendo que $l_6=r$

29. Calcular l_4, partiendo de que $l_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

30. Calcular l_5, sabiendo que $l_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

• **31.** Calcular l_8, sabiendo que $l_{16}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

• **32.** Calcular l_{10}, deduciéndolo de $l_5=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

33. Calcular l_{20}, sabiendo que $l_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

• **34.** Calcular L_3, si $l_3=r\sqrt{3}$

• **35.** Calcular L_4, si $l_4=r\sqrt{2}$

36. Calcular L_6, si $l_6=r$

• **37.** Calcular L_5, si $l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

• **38.** Calcular L_8, si $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

• **39.** Calcular L_{16}, si $l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

• **40.** Calcular L_{12}, si $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

41. Calcular L_{10}, si $l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$

42. Calcular L_{24}, si $l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

mínese el radio de la $\odot$ circunscrita en función de m.

43. Calcular el valor de l_n en función de L_n y de r.

44. Calcular en función del radio r de la $\odot$: 1º el área del pentágono regular inscrito; 2º el área del pentágono regular circunscrito; 3º el área del hexágono regular inscrito; 4º el área del hexágono regular circunscrito; 5º el área del decágono regular inscrito; 6º el área del dodecágono regular circunscrito.

45. El perímetro del octógono regular inscrito en una $\odot$ es $32\sqrt{2+\sqrt{2}}$ metros. Calcular: 1º el radio r de la $\odot$; 2º el perímetro del octógono circunscrito; 3º el área del octógono inscrito; 4º el área del octógono circunscrito.

46. El área de un pentágono regular circunscrito es s^2. Determínese el radio de la $\odot$ inscrita en función de s.

47. El área de un octógono regular inscrito es m^2. Deter-

48. Las bases de un trapecio isósceles inscrito en una $\odot$ miden, respectivamente, 20 m y 12 m y el lado del mismo mide de 8 m. Calcular: 1º el área del trapecio; 2º el radio de la $\odot$ circunscrita.

49. Un trapecio isósceles inscrito en una $\odot$ de radio r, tiene por base menor r y por lado $r\sqrt{2}$. 1º Pruébese que las diagonales son $\perp$s; 2º Calcular el área del trapecio.

50. Demostrar que el área de un $\triangle$ rectángulo es igual al producto de los segmentos que el punto de contacto de la $\odot$ inscrita determina sobre la hipotenusa.

51. ¿Cuál es el perímetro de un octógono regular cuya área es igual 12 m^2?

52. Desde un punto A de una $\odot$ se trazan sucesivamenlas cuerdas $AB = BC = l_4$; $CD = l_6$, y finalmente, DA. Calcular: 1º el valor de los $\sphericalangle$s del trapezoide ABCD; 2º su perímetro; 3º su área.

53. En una semi $\odot$ de diámetro AB, se marcan los puntos C y D, sobre ella, de modo que arc. $AC = 60°$ y arc. $BD = 45°$. Enseguida se unen los puntos A, C, D y B. Calcúlese cada uno de los ángulos del trapezoide ABCD y su perímetro.

54. En una $\odot$ de radio r se inscribe un $\triangle$ equilátero ABC. Enseguida se une el punto medio D del arco AB con el punto medio E del lado BC y se prolonga DC hasta cortar la $\odot$ en F. Calcular en función de r, BE, DE, EF y AF.

55. En una semi $\odot$ de diámetro MN, desde el extremo M, se aplica la cuerda $MA = l_6$, y desde el extremo N, se aplica la cuerda $NB = l_{12}$. Calcular el área del trapezoide MABN en función del radio r de la $\odot$.

56. En una $\odot$ de radio r se marcan los puntos M, N, P y Q de modo que $MN = l_4$, $NP = l_{12}$ y $PQ = l_6$. Se pide calcular el área del trapezoide MQPN.

CAPITULO XVIII

APLICACION DEL ALGEBRA A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS GEOMETRICOS

§ 1.—*PROCEDIMIENTOS QUE DEBEN OBSERVARSE EN LA RESOLUCION ALGEBRAICA DE LOS PROBLEMAS GEOMETRICOS*

En los capítulos precedentes los problemas de construcción y en general todos los problemas gráficos, se han resuelto por medio del *análisis geométrico.*

En el presente capítulo veremos que dichos problemas se pueden resolver, también, por medio del *análisis algebraico.*

En efecto, como los diversos elementos geométricos (ángulos, segmentos rectilíneos, áreas, volúmenes) se expresan por números que indican cuantas veces tales elementos contienen a la unidad respectiva, los procedimientos generales que en Algebra sirven para determinar *incógnitas,* se pueden perfectamente aplicar en geometría.

La resolución de un problema de Geometría por medio del Algebra, al igual que el método geométrico, consta de de cuatro partes: *análisis, construcción, demostración* y *discusión.*

1º El *camino a seguir* en el análisis algebraico es el siguiente:

a) Se *supone el problema resuelto,* dibujando arbitrariamente una figura más o menos aproximada a la figura que se pide.

b) *Se anotan los elementos conocidos* [1] de la figura que se trata de construir, designándolos por **a, b, c, d. . . y** se eligen una o varias *incógnitas*, que son los elementos desconocidos de la figura, cuya determinación permita resolver fácilmente el problema. Las *incógnitas* suelen denotarse por las últimas letras del alfabeto: **x, y, z.**

c) *Se plantean una o varias ecuaciones independientes* (sistema de ecuaciones), según el número de incógnitas que se elijan, relacionando las cantidades conocidas con las desconocidas.

Para el *planteamiento* de tales ecuaciones se emplean los teoremas estudiados, entre los cuales suelen usarse con mayor frecuencia, *el de Pitágoras, los de Euclides, los que se refieren al cálculo y comparación de áreas de las figuras, los referentes a líneas proporcionales en el △ y en la circunferencia, etc. . .*

d) Por último, se *resuelve la ecuación* establecida o el *sistema de ecuaciones*, siguiendo las reglas que da el Algebra. Resulta para la incógnita o para cada una de las distintas incógnitas, un valor o expresión algebraica bien determinada.

2º La *Construcción* interpreta geométricamente la expresión algebraica de la incógnita, en que remató el análisis; la construye y representa por un trazo y da término a la figura pedida.

---

(1) Por datos o elementos conocidos debe entenderse tanto los dados directamente, como los que se dan indirectamente. Entre estos últimos se hallan, por ejemplo, la distancia entre dos puntos dados, la distancia entre un punto y una recta dados. Si se da un △ ABC, se dan indirectamente sus diversos elementos. Si se da una ⊙ y un punto exterior, la tangente trazada desde el punto a la ⊙, se conoce indirectamente, etc.

3º En la *demostración* se comprueba que la figura construída cumple con las condiciones exigidas por el problema.

4º En la *discusión* se estudian los diversos casos que se pueden presentar al variar ciertos datos, las condiciones de posibilidad del problema, y el número de soluciones que puede tener. Generalmente se parte del valor o expresión encontrada para la incógnita al final del análisis.

Entre otras condiciones, para que la solución sea posible, se requiere que el valor de la incógnita sea *cantidad real*. Si fuera imaginaria o compleja, la solución sería imposible. Si el valor de la incógnita es negativa y contradice el problema, también la solución es imposible.

Si en el análisis se plantea una ecuación de primer grado, el problema tendrá una solución, y pueden tener 1 ó 2 soluciones si la ecuación es de 2º grado.

NOTA.—Lo expuesto anteriormente se aclarará con un ejemplo.

Ejemplo de resolución de un problema por el análisis algebraico.

PROBLEMA 32.—*Dado un $\triangle ABC$, trazar una transversal desde uno de sus vértices tal que, los dos $\triangle$s que resulten tengan igual perímetro.*

1º Análisis.—

Supongamos el problema resuelto.

Sea **AD** la transversal pedida. (**Fig. 294**).

$$\left.\begin{array}{l} BC=a \\ AC=b \\ AB=c \end{array}\right\} \text{datos conocidos.}$$

Para determinar **D** se necesita conocer uno de los trazos **DB** o **DC**.

Sea $DB=x$

$DC=a-x$

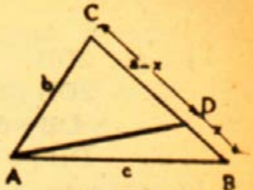


Fig. 294

Según las condiciones del problema resulta la ecuación:

$$c+x+AD = b+(a-x)+AD$$
$$c+x = b+a-x$$
$$2x = a+b-c$$
$$x = \frac{a+b-c}{2}$$

2º Construcción.—

Se construye la expresión igual a x. (**Fig. 295**).

Se hace: $BE=a+b$

$EF=c$

Resulta: $FB=a+b-c$

Se hace:

$$DF=DB=x=\frac{a+b-c}{2}$$

$A(\leftrightarrow)D$

$AD=$transversal pedida.

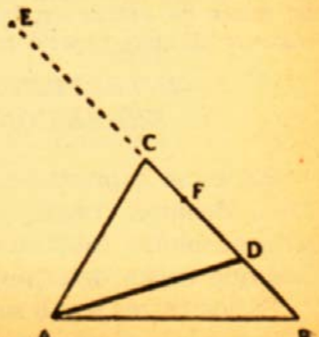


Fig. 295

3º Demostración.—$DB = x = \dfrac{a+b-c}{2}$ por construcción.

Luego: $2DB = a+b-c$

$\therefore \quad 2DB+c=b+a$

$\therefore \quad DB+c=b+(a-DB)$

$\therefore \quad DB+c+AD=b+CD+AD. \quad (a-DB=CD)$

La transversal AD cumple con las condiciones impuestas al problema.

4º Discusión.—En todo caso $a+b>c$.

El problema siempre es posible y tiene una solución, puesto que la transversal corta en un solo punto al lado opuesto.

NOTA.—Véanse más adelante otros ejemplos de problemas resueltos por el método del análisis algebraico, pág. 419.

OBSERVACION.—En el ejemplo precedente, el análisis remató en una expresión o valor muy sencillo para x. Su interpretación y construcción pertenece al programa de 2.º Año de Humanidades. Como en muchos casos podrían presentarse algunas dificultades en la construcción de expresiones algebraicas, antes de entrar en la resolución de problemas, conviene construir algunas expresiones fundamentales.

§ 2.—*INTERPRETACION GRAFICA DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS*

En estas expresiones, debe entenderse que **a, b, c, d, e, f**. . . denotan trazos conocidos; **m** y **n** representan números absolutos (abstractos) y **x, y, z,** son trazos desconocidos que deben determinarse.

Si dos trazos **a** y **b** se dividen, el primero por el segundo, la razón o cuociente que resulta, es un número absoluto. Si $a=40$ cm y $b=10$ cm, por ejemplo, la razón $\frac{a}{b} = 4$, sólo significa que **b** está contenido 4 veces en **a.**

Cuando una expresión representa un trazo, se dice que es una **cantidad lineal** o de **primera dimensión.**

Ejemplo: En $x=\frac{ab}{d}$, multiplicando la igualdad por d y transformando en seguida la 2ª igualdad en proporción, resulta sucesivamente: $dx=ab$.

$$\frac{d}{a} = \frac{b}{x}$$

x es un trazo que se puede construir como 4ª proporcional geométrica entre **d, a y b.**

La expresión del ejemplo es, pues, de primera dimensión.

En general, *cuando en una expresión (cociente) el número de factores del numerador excede en uno a los factores del denominador, dicha expresión representa un trazo.* Luego, es de primera dimensión.

Por ejemplo, sea la expresión: $x=\frac{abcd}{efg}$

A la expresión se le puede dar la forma:

$$x = \frac{a}{e} \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{c}{g} \cdot d$$

Como $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$ son razones o números absolutos (abstractos), el trazo **d** multiplicado por el valor numérico del producto de las tres razones, representa un trazo.

La expresión que representa una área o relaciona las áreas de dos figuras, es de **segunda dimensión.**

La expresión: $\mathbf{x^2=ab}$ representa el área de un cuadrado equivalente a un rectángulo cuyos lados son **a** y **b.**

El valor $\mathbf{x=\sqrt{ab}}$ representa geométricamente el trazo cuyo cuadrado es equivalente al área dada. Tal trazo es la media proporcional geométrica (M. p. g.) entre **a** y **b,** puesto que la expresión se puede transformar en la proporción: $a : x = x : b$.

En general, *el cociente entre dos productos de trazos es de segunda dimensión cuando el número de factores del numerador excede en dos a los factores del denominador.*

La expresión $x^2=\dfrac{\mathbf{abcdf}}{\mathbf{ghk}}$ pertenece a esta clase. Puede transformarse así: $x^2=\dfrac{a}{g}\cdot\dfrac{b}{h}\cdot\dfrac{c}{k}\cdot df$.

$\dfrac{a}{g}$, $\dfrac{b}{h}$, $\dfrac{c}{k}$, como queda dicho anteriormente, son números absolutos. Su producto también es un número absoluto. La expresión **d f** es de segunda dimensión y su producto por un número absoluto, es igualmente de segunda dimensión.

Las expresiones de 3.ª, 4.ª, 5.ª dimensión, que constan de tres o más factores que representan trazos, no admiten interpretación en la Geometría plana.

Por último, téngase presente que las expresiones para que puedan tener una interpretación geométrica, es necesario que las cantidades que se comparan sean homogéneas. En otros términos deben compararse trazos con trazos y áreas con áreas.

* § 3.—*CONSTRUCCIONES GRAFICAS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS*

Construir:

1. **x = a+b**. Es la suma de los dos trazos.
2. **x = a—b**. Es la diferencia de los dos trazos, siendo a > b.
3. **x = (a+b)—(c+d)**. Se construye p = a+b y q = c+d.

La expresión se convierte en x = p—q (Según Nº 2).

Para tener un valor positivo debe ser (a+b) > (c+d).

4. **x = a—b+c—d+f**. Ordenando la expresión, se tiene:

x = (a+c+f)—(b+d).

Se construye: p=a+c+f y q=b+d.

La expresión se reduce a x=p—q (Nº 2).

Ha de ser a+c+f>b+d.

5. **x = na**. Como n es un número absoluto: 2, 3, 4. ..., se aplica el trazo **a**, sucesivamente, n veces sobre un rayo o segmento indefinido.

* 6. $\mathbf{x = \dfrac{a}{n}}$. Se divide el trazo **a** en tantas partes iguales cuantas exija el valor de n. (Ver pág. 235).

* 7. $\mathbf{x = \dfrac{ab}{c}}$. Se le da a la igualdad forma entera multiplicando por c y en seguida se transforma en proporción.

Resulta: cx = ab.

c : **a** = b : x

Se construye la 4ª **p. g.** entre **c**, **a** y **b**. (Pág. 243).

8. $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b^2}}{\mathbf{a}}$. Transformando se tiene:

$ax = b^2$

$\mathbf{a} : b = b : x$. Se construye la **3ª p. g.** entre **a** y **b.** **(Pág. 314).**

9. $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{abcd}}{\mathbf{efg}}$. La expresión se puede escribir así:

$$\mathbf{x} = \frac{ab}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$$

Se hace $p = \frac{ab}{e}$. El trazo **p** se determina construyendo la **4ª p. g.** entre **e, a** y **b.** **(Pág. 243).**

La expresión queda convertida así:

$$\mathbf{x} = \frac{p \cdot c \cdot d}{f \cdot g}$$

Se hace $\mathbf{q} = \frac{p \cdot c}{f}$; $q =$ **4ª p. g.** entre **p, c** y **f.** Se construye.

Entonces $\mathbf{x} = \frac{q \cdot d}{g}$ que también se construye como **4ª p. g.**

10. $\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{ab}}$. Sucesivamente la igualdad se eleva al cuadrado y se transforma en proporción.

$x^2 = ab$

$a : x = x : b$; x se determina por la M. p. g. **(Pág. 312).**

11. $\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}$. Elevando al cuadrado resulta: $x^2 = a^2+b^2$. Se cumple el teorema de Pitágoras.

x es la hipotenusa de un $\triangle$ rect. de catetos **a** y **b**.

12. $\mathbf{x = \sqrt{a^2-b^2}}$. **x es un cateto** de un $\triangle$ rect. que tiene por hip. a y el otro cateto b.

También la expresión se puede escribir:

$x = \sqrt{(a+b)\ (a-b)}$. Se eleva al cuadrado.
$x^2 = (a+b)\ (a-b)$; x = M. p. g. entre la suma y la diferencia de a y b.

En efecto: $(a+b) : x = x : (a-b)$

13. $\mathbf{x = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. Se hace $s^2=a^2+b^2$

$s = \sqrt{a^2+b^2}$ = hipotenusa de un $\triangle$ rect. de catetos a y b (Nº 11, pág. 412).

La expresión propuesta queda así convertida en:

$x = \sqrt{s^2+c^2}$ que también es una hipotenusa de un $\triangle$ rect. de catetos s y c.

14. $\mathbf{x = \sqrt{a^2+b^2-c^2}}$. Se hace $p^2 = a^2+b^2$

$p = \sqrt{a^2+b^2}$ = hipotenusa de un $\triangle$ rect. de catetos **a** y **b**.

Entonces: $x = \sqrt{p^2-c^2}$ = catetos de un $\triangle$ rect. que tiene hipotenusa p y por otro cateto c.

15. $\mathbf{x = \sqrt{a^2+b^2-c^2-d^2}}$.

La expresión se puede escribir:

$x = \sqrt{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}$.

$p^2=a^2+b^2$ y $q^2=c^2+d^2$

Se construyen **p** y **q** según número 11.

Queda $\mathbf{x} = \sqrt{p^2-q^2}=$**cat.** de un $\triangle$ rect. $\left\{\begin{array}{l}\text{hip.}=p.\\ \text{cat.}=q.\end{array}\right.$

16. $x = \sqrt{\mathbf{ab\pm cd}}$.

Se hace $p^2=ab$ y $q^2=cd$.

o sea: $p=\sqrt{ab}$ y $q=\sqrt{cd}$.

Se construyen p y q como M. p. g. (Nº 10).

Entonces: $x = \sqrt{p^2\pm q^2}=$hipotenusa o cateto (Números 11 y 12).

17. $\mathbf{x} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{abc}}{\mathbf{d}}}$

Se hace: $s = \dfrac{ab}{d}$

$d : a=b : s$

$s=4^a$ p. g. entre d, a y b.

Entonces $x=\sqrt{sc}=$M. p. g. (Nº 10).

18. $\mathbf{x} = \mathbf{a}\sqrt{\mathbf{2}}$... Hay varias soluciones:

1º **x**=el lado $\mathbf{l_4}$ de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio a.

2º $\mathbf{x} = \sqrt{2a^2}=\sqrt{a^2+a^2}=$**hipotenusa** de un $\triangle$ rect. isósc. de catetos iguales a **"a"**.

3º Elevando al cuadrado la expresión propuesta resulta:

$x^2 = 2a^2$.

Entonces: $\dfrac{2a}{x} = \dfrac{x}{a}$; $x =$ **M. p. g.** entre **2a** y **a.**

19. $\mathbf{x = a\sqrt{3}}$

Como en el caso anterior hay diversas soluciones:

1º $\mathbf{x}$ = **lado** $\mathbf{l_3}$ del △ equil. inscrito en un ⊙ de radio a;

2º $\mathbf{x}$ = **altura de un** △ **equil.** cuyo lado es igual a **2a**.

3º) $\mathbf{x} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} =$ **cateto** de un △ rect.

de $\begin{cases} \text{hip.} = 2a \\ \text{cat.} = a \end{cases}$

4º Elevando al cuadrado la expresión propuesta:

$$x^2 = 3a^2$$

$$\frac{3a}{x} = \frac{x}{a}. \quad \mathbf{x} = \textbf{M. p. g. entre } \mathbf{3a} \text{ y } \mathbf{a.}$$

20. $\mathbf{x = a\sqrt{n}.}$

Esta expresión es la generalización de las propuestas en los números 18 y 19.

Introduciendo el coeficiente dentro del radical se tiene

$\mathbf{x} = \sqrt{na^2} = \sqrt{a(na)}$ siendo n un número absoluto y positivo, $\mathbf{x}$ = **M. p. g.** entre **a** y **na.**

También la expresión del Nº 20 se puede construir como hipotenusa o cateto de un △ rect. descomponiendo la cantidad subradical na^2, en una suma o diferencia de cuadrados.

Ejemplos: Si n = 5

$x = \sqrt{5a^2} = \sqrt{4a^2 + a^2}$ = **hipotenusa** de un $\triangle$ **rect.** de catetos 2a y a.

Si n = 7

$x = \sqrt{7a^2} = \sqrt{16a^2 - 9a^2}$ = **cateto de un** $\triangle$ **rect.** de hipotenusa 4a y cuyo cateto es igual a 3a.

Si n = 14

$$x = \sqrt{14a^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2 + a^2}$$

o también: $x = \sqrt{16a^2 - a^2 - a^2}$

Se construye según N.os 13 ó 14 ó 15.

En general, todo número entero se puede representar por una suma de, a lo más, cuatro cuadrados. Así:

$$23 = 9 + 9 + 4 + 1 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

EJERCICIOS DE APLICACION

Construir el valor de x en las siguientes expresiones:

56. $x = \frac{ab}{2c}$ **57.** $x = \frac{2ab}{c}$ **58.** $x = \frac{a^3}{bc}$

59. $x = \frac{ab^2}{c^2}$ **60.** $x = \frac{a^3}{b^2}$ **61.** $x = \frac{a^2 - b^2}{3c}$

62. $x = \sqrt{3ab}$ **63.** $x = \frac{ab}{\sqrt{cd}}$ **64.** $x = \sqrt{2a^2 - ab}$

65. $x = \sqrt{a^2 + \frac{bcd}{e} - \frac{f^2g}{h}}$ **66.** $x = a(1 + \sqrt{5})$

67. $x = a\sqrt{\frac{2}{3}} - b\sqrt{\frac{1}{2}}$ **68.** $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$

69. $x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt[4]{a^3b}$ **70.** $x = \dfrac{a^2 + b^2}{c}\sqrt{5+\sqrt{7}}$

71. $x = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + 2b^2 - 0{,}5c^2}$ **72.** $x = \sqrt{\dfrac{4}{3}b^2\sqrt{3}}$

73. $x = \sqrt{2c^2 - ab}$ **74.** $x = \dfrac{ab - cd}{f}$ **75.** $x = \sqrt{ab + cd}$

76. $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$ **77.** $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$ **78.** $x = c(2 - \sqrt{2})$

79. $x = \sqrt[4]{c^2df}$ **80.** $x = (bcdf)^{0{,}25}$

81. $x = \sqrt{ab + \sqrt{c^4 + d^4}}$ **82.** $x = \sqrt{a\sqrt{\dfrac{2}{3}cd}}$

83. $x = \dfrac{a^2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{b}$ **84.** $x = \dfrac{a^2 + b^2}{a + b + d\sqrt{5}}$

85. Determinar gráficamente dos trazos x e y cuya diferencia sea 4 cm y su producto 12 cm^2.

86. Construir dos trazos cuya suma sea 3a y la media proporcional geométrica sea a.

87. Construir x en: $\dfrac{c}{b} - \dfrac{x}{a} = -\dfrac{b}{c}$

88. Construir x en: $\dfrac{\sqrt{a}}{x} = \dfrac{\sqrt{b}}{a - x}$ siendo a y b trazos dados.

89. Construir dos trazos cuya diferencia sea 2a y la media proporcional sea $a\sqrt{3}$.

90. Construir el trazo x determinado por la ecuación $x^2 = a^2\sqrt{3}$.

91. Construir el trazo determinado por la ecuación

$$x^2 = a\sqrt{b^2\sqrt{2}}$$

92. Indique la construcción del trazo determinado por la ecuación $a^3x + b^3x + c^3x + d^3x = abcd$, en que a, b, c, y d son trazos dados.

93. Construir x en:

$$a^{-2}x + c^{-2}x = \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^{-2} \right. \;.\; b^{-1}$$

94. Siendo **p** y **q** dos trazos dados, construir las raíces de la ecuación de 2º grado $x^2 - 2px + q^2 = 0$.

Solución.—Sean x' y x'' las raíces.

Se requiere:

1º Que sea $q < p$, para que las raíces no resulten imaginarias.

2º Que sea $\left.\begin{aligned} x' + x'' &= 2p. \\ x'x'' &= q^2 \end{aligned}\right\}$ Propiedades de las raíces de la ec. de 2º grado.

Construcción.—Se describe una ⊙ de radio $OA = p$. (Fig. 296.)

Se trazan los diámetros $AB \perp CD$.

Se traza $EF \parallel AB$ (a la distancia q de AB).

Se hace $FG \perp AB$.

Las raíces gráficas de la ecuación son: $GA = x'$ y $GB = x''$.

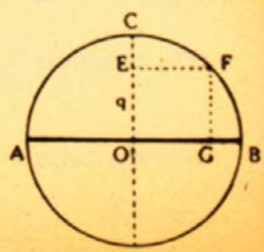


Fig. 296

Demostración.— $GA + GB = x' + x'' = AB = 2p$. (Constr.)
$GA \cdot GB = x'x'' = GF^2 = q^2$

66.—Construir las raíces de la ecuación de 2º grado:

$$\mathbf{x^2 - 2px - q^2 = 0.}$$

Solución.— Sean x' y x'' las raíces. Las dos raíces son siempre reales: una positiva y otra negativa.

Debe cumplirse:

$x' + (-x'') = x' - x'' = 2\ p.$

$x'x'' \qquad = q^2$

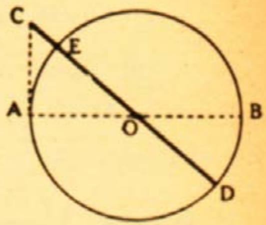


Fig. 297

Construcción.— Se describe una $\odot$ de centro **O** y radio $OA = \mathbf{p}$. (Fig. 297).

En **A** se traza la tangente $\mathbf{AC = q}$.

Se traza la secante **COD**.

Las raíces de la ecuación, son: $CD = x'$ y $CE = x''$.

Demostración.— $CD - CE = ED = 2p$.
$CD \cdot CE = AC^2 = q^2$. (Teor. LXVI, pág. 309).

PROBLEMAS PARA RESOLVER POR EL ANALISIS ALGEBRAICO (Ver ej. pág. 406).

Otros ejemplos de problemas resueltos por el análisis algebraico.

PROBLEMA 33.—*Construir un rectángulo dados la suma* $\mathbf{a + b = s}$ *de los lados contiguos y su área* $\mathbf{p^2}$.

Análisis:

Sea x el lado menor del rectángulo.

El otro lado será $s - x$.

Resulta la ecuación:

$$x(s-x)=p^2$$
$$sx-x^2=p^2$$
$$x^2-sx+p^2=0.$$

$$x=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}$$

Se hace: $\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}=q=$cateto de un $\triangle$ rect. de hipotenusa $\frac{s}{2}$ y el otro cateto p. (Fig. 298).

Desechando el signo más que está antes del radical por no convenir a la incógnita elegida en el problema, se tiene:

$x=\frac{s}{2}-q=$lado menor del rect. pedido.

$s-x=$el lado mayor del rectángulo.

Construcción.—

$ABCD=p^2$

1º Se determina q:

$\sphericalangle DAE=90°$

$AD=p$

$DE=\frac{s}{2}$

$AE=q$

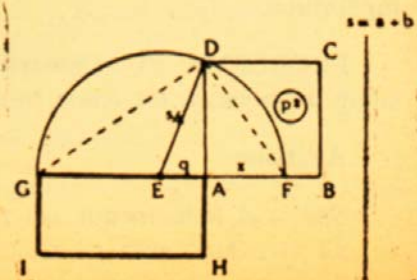


Fig. 298

$\odot\ (E,\ ED=\frac{s}{2})$

Resulta:

$GF=s.$

$AF=EF-AE=\frac{s}{2}-q=x=$ lado menor del rect.

$AG=s-x=$ lado mayor.

Conocidos los lados, se construye el rectángulo **IHAG.**

Demostración.— Hay que probar que $GA+AH=s$, y que el área del rect. $GH=p^2$.

1º $GA+AH=GA+AF=s$ (Constr.)

2º Area de rect. $GH=\overline{GA}\cdot\overline{AH}=(\overline{GE}+q)x.$

$$=\left(\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}\right)\left(\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}\right)=\frac{s^2}{4}-\frac{s^2}{4}+p^2$$
$=p^2.$

NOTA.— También hay una demostración geométrica muy sencilla:

Unase D con F y G.

Resulta $\triangle$ **GFD** rectángulo en **D.**

Luego: $GA\cdot AF=p^2=GA\cdot AH$ (2º Teor. de Euclides, referente a la altura).

Discusión.— Para que se pueda construir el cateto $q=\sqrt{\frac{s^2}{4}-p^2}$, es necesario que sea:

$\frac{s}{2}>p$ o $s>2p.$

En la expresión $x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p^2}$, si se toma el valor negativo del radical, la expresión representa el lado menor AH=AF del rectángulo; si se toma el valor +, la expresión representa el lado mayor GA.

Luego, el problema tiene una solución.

PROBLEMA 34.—*Construir un rectángulo dada su área* a^2 *y la diferencia* **d** *de sus lados contiguos.*

Análisis.—

Sea x el lado menor.
El otro lado será: $x+d$.

Resulta la ecuación:

$$x(x+d)=a^2$$
$$x^2+dx=a^2$$
$$x^2+dx-a^2=0$$

$$x = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4}+a^2}$$

Se desecha el valor con signo — delante del radical por no convenir a la solución del problema.

Se hace: $\sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2} = p =$ hipotenusa de un $\triangle$ rectángulo de catetos $\frac{d}{2}$ y a.

Entonces $x = p - \frac{d}{2}$ = lado menor del rect.

$x + d$ = lado mayor del rect.

Construcción.— (Fig. 299).

Para tener p, se prolonga $CB \rightarrow B$

Se hace: $BE = \frac{d}{2}$

$A(\leftrightarrow)E$

$AE = p.$

$x = AF = AE - EB = p - \frac{d}{2}$

$x + d = AI$ = lado mayor.

GHIA rect. pedido.

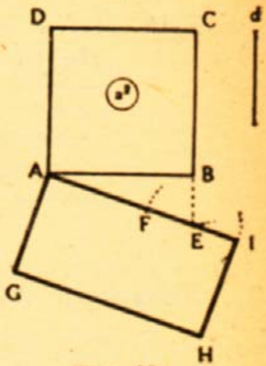


Fig. 299

NOTA.—Háganse la demostración y la discusión del problema.

PROBLEMA 35.—*En un △ dado* **ABC**, *inscribir un rectángulo de perímetro dado* **2p.** (Fig. 300).

Análisis.—

$CD = h$

$AB = c$

$HG = x$

$HE = y$

$\triangle ABC \sim \triangle HGC$

Entonces: $\frac{h}{h-y} = \frac{c}{x}$ (1).

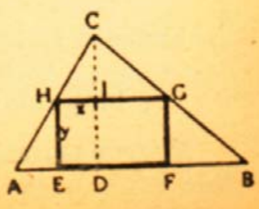


Fig. 300

$$x + y = p. \ (2)$$

En ec. (1), $hx = ch - cy$

$$x = \frac{ch - cy}{h}$$

Este valor se substituye en (2)

$$\frac{ch - cy}{h} + y = p$$

$$ch - cy + hy = hp$$

$$(c - h)\,y = (c - p)\,h$$

$$y = \frac{(c - p)\,h}{c - h}$$

Resolviendo del mismo modo resulta:

$$x = \frac{(c - p)\,h}{c - h}$$

"y" se puede determinar como 4ª p. g. entre **(c—p)**, h y (c—h).

NOTA.—Háganse la construcción y demostración.

Discusión.—Para que **x** e **y** sean positivos, se requiere que:

$$c > h, \ c > p \ y \ p > h$$

o bien $c > p > h$.

También se puede tener:

$$c < h, \ c < p, \ p < h$$

o bien $c < p < h$

El semi-perímetro del rectángulo debe estar comprendido entre la base **c** y su altura correspondiente **h** del $\triangle ABC$.

PROBLEMA 36.—*En el extremo de un diámetro de una ⊙ dada se dibuja una tangente; trazar desde el otro extremo del diámetro una secante hasta cortar la tangente, de modo que la parte externa comprendida entre la tangente y la ⊙, sea igual a un trazo dado* **a**.

Análisis.—

Supongamos el problema resuelto. (Fig. 301).

Designemos:

$AB=2r$

$DC=a$ (conocido)

$AD=x$

$AC=x+a$

$BC=y$

Se tiene:

$y^2=(x+a)^2-4r^2$ ($\triangle$ ACB rect.)

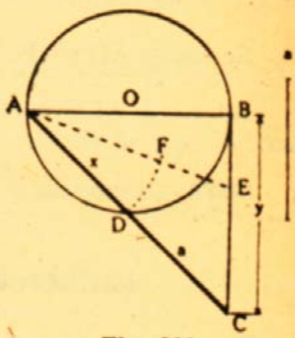


Fig. 301

$y^2=(x+a)a$ (Teor. LXVI)

$(x+a)^2-4r^2=(x+a)a$

$x^2+a^2+2ax-4r^2=ax+a^2$

$x^2+ax-4r^2=0.$

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+4r^2}$$

Haciendo $\sqrt{\frac{a^2}{4}+4r^2}=p=$hipotenusa de un $\triangle$ rect.

de catetos $\frac{a}{2}$ y $2r$ y considerando sólo el signo $+$ delante del radical, resulta: $x = p - \frac{a}{2}$.

Construcción.—Se construye △ rect. AEB con

$BE = \frac{a}{2}$ y $BA = 2r$.

$AE = p$.

Se hace: $AD = AF = p - \frac{a}{2} = x$, y se prolonga hasta C.

La recta ADC cumple con las condiciones del problema.

NOTA.—Demostrar y discutir el problema.

EJERCICIOS DE APLICACION

Resolver los siguientes problemas por el análisis algebraico:

* **95.**—Dado un **trazo a**, dividirlo en dos segmentos tales que los cuadrados construídos sobre ellos, sean entre sí como 1 : 2.

* **96.**—Dividir un trazo dado **a** en dos segmentos, de modo que el rectángulo formado por los segmentos, sea equivalente a la diferencia de los cuadrados construídos sobre ellos.

* **97.**—Construir un △ rectángulo dados el cateto **a** y la proyección **q** del otro cateto.

* **98.**—En un cuadrado dado inscribir un △ equilátero, de modo que las dos figuras tengan un vértice común.

* **99.**—Dado un cuadrado, trazar entre sus lados contiguos cuatro rectas de modo que el octógono que se forme sea regular.

* **100.**—En una ⊙ de radio **r**, inscribir un rectángulo cuyo perímetro sea 2s.

* **101.**—Construir un △ equilátero: a) dada la suma $a+h=s$, del lado y la altura; b) dada la diferencia $a-h=d$; c) dada el área p^2.

* **102.**—Construir un cuadrado conocida la suma s de la diagonal y el lado.

* **103.**—Construir un △ rectángulo isósceles de perímetro dado 2s.

* **104.**—Construir un △ rectángulo conocida la hipotenusa **c** y la razón de sus catetos $a : b=1 : 2$.

* **105.**—Construir un △ rectángulo dados los segmentos **u** y **v**, situados sobre la hipotenusa a ambos de b_γ.

* **106.** Dividir un △ dado ABC: 1º en dos partes equivalentes por medio de una recta paralela a otra recta dada L; 2º en dos partes que sean entre sí como 1:3.

* **107.**—Construir un rectángulo, dado su perímetro **2s** y equivalente a la suma de dos cuadrados dados: a^2 y b^2.

* **108.**—Dado un △ triángulo equilátero de lado **l**, transformarlo en un cuadrado.

* **109.**—Dado un △ ABC, transformarlo en un △ equilátero.

110.—Dividir un trazo dado **a** en dos segmentos tales que el rectángulo formado por dichos segmentos sea equivalente al cuadrado construído sobre la diferencia de ellos.

* **111.**—Desde un vértice de un cuadrado trazar una transversal que lo divida: 1º en la razón de 1 : 2; 2º en la razón de 2 : 3.

112.—En un △ dado ABC, inscribir un rectángulo de modo que: a) la suma de sus lados contiguos sea igual a un trazo dado s; b) la diferencia de sus lados contiguos sea igual a **d**; c) que su área sea equivalente a un cuadrado dado a^2; d) que sus lados contiguos estén en una razón dada $\dfrac{m}{n}$.

113.—Dividir un cuadrado dado en tres partes equivalentes. por dos ||s a una de las diagonales.

* **114.**—Dado un trapecio ABCD, dividirlo en dos partes equivalentes por medio de una paralela a las bases.

* **115.**—Dado un semi-círculo, inscribir en él un cuadrado.

* **116.**—En un cuadrado dado, inscribir otro cuya área sea c^2.

117.—Por el punto medio de una cuerda dada AB=c, de una ⊙, trazar otra cuerda cuyos segmentos sean entre si como 2 : 1.

* **118.**—Desde un punto situado fuera de un círculo dado, trazar una secante que resulte dimidiada por la circunferencia

* **119.**—Dado un △ ABC, dividirlo por una recta en dos partes equivalentes, de modo que una de las figuras resultantes sea un △ isósceles.

120.—Dado un △ isósceles ABC encontrar sobre la altura CD, ⊥ a la base, un punto G de modo que GD y las ⊥s trazadas desde G a los lados, dividan al △ en tres partes equivalentes.

* **121.**—Construir un △ dados: h_c, b_γ, c.

* **122.**—Construir un △ dados: u, v y su área=p^2.

* **123.**—Dado un △ ABC, dividirlo en tres partes equivalentes por medio de paralelas a uno de sus lados.

* **124.**—Dado un rectángulo ABCD, inscribir en él un rombo de modo que de los cuatro △s que se forman, dos opuestos sean isósceles.

* **125.**—En un cuadrado dado inscribir un rectángulo de área p^2.

* **126.**—En un △ equilátero dado, inscribir un cuadrado.

* **127.**—En la prolongación de un diámetro CD de un círculo dado, hallar un punto P tal que la tangente trazada desde él. sea igual al doble de la distancia PD, del punto a la circunferencia.

* **128.**—Dado un △ ABC, cortarlo por una transversal, de modo que las dos figuras que resulten, tengan igual perímetro y área.

129.—Dadas dos ⊙s concéntricas construir en el círculo mayor una cuerda, que sea igual al duplo de la cuerda interceptada por la circunferencia menor.

130.—Dividir un círculo dado en tres partes equivalentes por medio de circunferencias concéntricas.

131.—Desde un punto situado fuera de un círculo dado, trazar una secante de modo que el rectángulo formado por su parte externa y la cuerda interceptada por la ⊙, sea equivalente a un cuadrado dado a^2.

132.—Dado un punto **P** en el interior de un círculo, trazar por él una cuerda, de modo que la diferencia de sus dos segmentos sea igual a un trazo **d.**

133.—Se dan dos ⊙s tangentes exteriormente. Por el punto de tangencia trazar una secante, de modo que el rectángulo que tenga por lados las dos cuerdas, sea equivalente a un cuadrado dado $\mathbf{p}^2$.

134.—Dado un △ ABC, determinar un punto **P** sobre el lado AB, de modo que el rectángulo formado por las ⊥s trazadas desde dicho punto a los lados, sea equivalente a un cuadrado dado a^2.

135.—Inscribir un círculo en un cuadrante de otro círculo.

* **136.**—Dado un △ ABC, dividirlo en dos partes equivalentes por medio de una ⊥ a uno de sus lados.

137.—En un cuadrante, inscribir un cuadrado tal que, dos de sus vértices estén situados sobre el arco y los otros dos sobre los radios $\perp_s$.

• **138.—**En un △ equilátero ABC dado, inscríbase otro △ equilátero cuya área sea igual a la mitad del primero.

139.—Dividir un trazo de 60 cm. en media y extrema razón. (Sólo se dispone de un metro plegadizo dividido en dm., cm. y mm.)

140.—Dados un círculo y un punto P, situado fuera de él, trazar desde dicho punto una secante que corte la circunferencia en dos puntos X y Z, y de modo que PX y PZ sean catetos de un △ rectángulo cuya hipotenusa sea el diámetro.

141.—C es el punto medio de AB. Se construyen tres semicircunferencias que tienen por diámetros AB, AC y BC, respectivamente, situadas las tres a un mismo lado de AB. Construir la circunferencia tangente a estas tres semicircunferencias.

GEOMETRIA DEL ESPACIO O ESTEREOMETRIA
PLANOS Y RECTAS EN EL ESPACIO

CAPITULO XIX

§ *1.—DEFINICIONES:*

Al indicar el objeto de la Geometría (Omer Cano, Tomo I, pág. 14), la dividimos en:

1º Geometría plana o *planimetría: estudia las figuras geométricas en un mismo plano.*

2º Geometría del espacio o *estereometría: estudia las figuras en el espacio.*

Hasta ahora nos hemos referido únicamente a la primera. En efecto, los diversos elementos geométricos de una figura (puntos, líneas, superficies, etc. .) los hemos considerado en un solo y mismo plano.

La Geometría del espacio o estereometría estudia los cuerpos y figuras cuyos elementos geométricos no están situados en un mismo plano.

Propiedades del plano.—*Plano* es una superficie *ilimitada* tal, que contiene totalmente una recta que tiene con él dos puntos comunes.

Sus principales propiedades son:

a) Tiene sólo *dos dimensiones*: *largo y ancho*. Carece de grosor;

b) Es *ilimitado;*

c) *Toda recta* del plano lo *divide en dos semiplanos;*

d) *Todo plano divide* al espacio en dos regiones o *semi espacios* situados a distinto lado del plano;

e) Toda recta que une dos puntos situados en dos semi espacios distintos, *atraviesa* necesariamente el plano.

La noción de plano es de origen experimental. Ejemplo: un cristal, una pizarra, bien pulimentados.

Representación gráfica del plano.— Aun cuando el plano no sea una superficie *ilimitada*, para facilitar las demostraciones, por convención, se representa, como si fuera limitado, por un polígono cualquiera, por ejemplo,

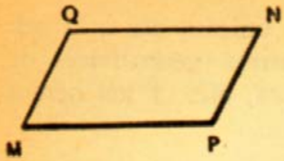


Fig. 302

un triángulo, un rectángulo, etc., con más frecuencia se representa por un paralelógramo oblicuo, o rectángulo en perspectiva. Se designa por cuatro letras mayúsculas colocadas en sus vértices, o por dos mayúsculas colocadas en dos vértices opuestos.

En Fig. 276 léase plano **MPNQ**, o plano **MN**, sencillamente.

NOTA.—En general, las figuras del espacio, aunque tengan sus puntos situados en distintos planos, se representan en el papel y en el pizarrón, por una figura plana. Los principios geométricos que hay que tomar en cuenta en su representación constituyen la teoría de la perspectiva.

§ 2.—*DETERMINACION Y GENERACION DE UN PLANO*

Elementos que determinan un plano.—Un plano queda determinado:

1º Por una *recta* y un *punto* exterior a esta recta.
2º Por *dos rectas* que se *cortan*.
3º Por *dos* rectas *paralelas*.
4º Por *tres puntos* no situados en línea recta.

Por una recta pueden pasar infinidad de planos. Dicho de otro modo, una recta no fija la posición de un plano. Ejemplo: las diferentes páginas de un libro que se abre.

Generación de un plano.—Un plano puede considerarse engendrado por una recta que se mueve:

1º Resbalando *sobre dos rectas paralelas;*
2º Resbalando *sobre dos rectas que se cortan;*
3º Resbalando *sobre una recta fija*, de tal modo que *siempre* permanezca *paralela a sí misma;*
4º Resbalando *sobre una recta fija* y de modo que uno de sus puntos *coincida* en todo momento con un *punto fijo;*
5º Girando *en torno de una recta fija* y de modo que la recta que gira permanezca constantemente perpendicular a la recta fija en un punto fijo de ella. Ejemplos: un rayo de una rueda que gira en torno del eje; el canto inferior de una puerta de un cuarto, que gira en torno de la arista que lleva las bisagras, genera el plano del piso.

§ 3.—*POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS*

Una recta y un plano pueden tener las siguientes posiciones:

1º **Coincidir.**—Esta coincidencia se cumple si la recta y el plano tiene por lo menos dos puntos comunes. La recta **AB** coincide con el plano **PQ**, o dicho en otros términos, se halla situada sobre él. (Fig. 303).

Toda recta situada sobre un plano lo divide en dos partes llamadas *semiplanos.*

2º La recta puede **cortar** o perforar al plano. Ambos tienen un punto común.

En Fig. 303 **RI** corta perpendicularmente al plano y **CD** lo corta oblicuamente.

El punto **E** en que **CD** perfora o penetra en el plano, es el *pie* de la recta CD en el plano o su *punto de penetración*. Lo mismo se debe decir del punto O.

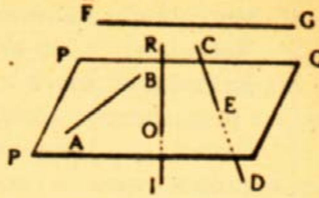


Fig. 303

> *Una recta es ⊥ a un plano cuando es ⊥ a todas las rectas trazadas por su pie en dicho plano.*

En caso contrario es *oblicua.*

3º La recta puede ser **paralela** al plano, cuando no tienen ningún punto común con él. FG||PQ. (**Fig. 303**).

§ 4.—*POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO*

En el espacio, dos rectas pueden tener las siguientes posiciones:

1º **Coincidir.**—Ocurre siempre que tengan por lo menos dos puntos comunes.

2º **Cortarse.**—En esta posición tienen un punto común. Se pueden cortar *perpendicularmente* u *oblicuamente.*

3º Pueden ser **paralelas.** En este caso no tienen ningún punto común y forman un plano bien determinado.

> Para que *dos rectas*, en el espacio, *sean paralelas* se requiere que, a la vez: a) *no tengan ningún punto común;* b) *que pertenezcan a un mismo plano.*

4º Pueden **cruzarse**. Tampoco tienen en esta situación ningún punto común, pero, además, ambas rectas no pertenecen a un mismo plano.

§ 5.—*POSICION RELATIVA DE DOS PLANOS*

Dos planos pueden:

1º **Ser paralelos**.—No tienen ningún punto común. Ejemplo: el cielo raso y el piso de una sala.

2º **Cortarse.**—Este caso se cumple si los dos planos tienen por lo menos dos puntos comunes. Planos MN y PQ. (Fig. 304).

Los dos planos se pueden cortar *perpendicularmente* u *oblicuamente*.

Los planos se cortan según una recta que se halla situada a la vez en cada uno de ellos. Esta recta, común a los planos, **AB** en Fig. 304, es su *intersección* o *arista*.

Arista es la intersección de dos planos.

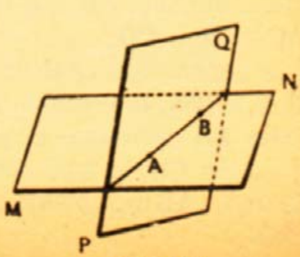


Fig. 304

3º **Coincidir.**—En este caso los planos tienen por lo menos tres puntos comunes. En consecuencia tienen entonces todos sus puntos comunes.

§ *6.—RECTAS Y PLANOS PARALELOS*

¿Qué se entiende por rectas paralelas en el espacio?
¿Cuándo una recta es || a un plano, en el espacio?

TEOREMA LXXXI.—**Por un punto dado, del espacio, se puede trazar una sola paralela a una recta dada.**

Demostración.—La recta y el punto determinan un plano único y, en este plano, según el postulado de Euclides, se puede trazar una sola || a la recta dada.

TEOREMA LXXXII.—**Si una recta es paralela a otra recta situada en un plano, es también paralela a dicho plano.**

Hip.) AB || CD (**Fig. 305**).
Tes.) AB || MN

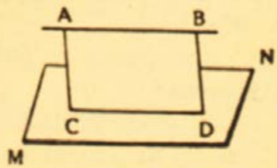


Fig. 305

Dem.) Siendo **AB || CD**, determinan el plano **CB**, que cortan **MN** según **CD**.

Si se supone que **AB** no es paralela a **MN**, lo cortará. Pero como **AB** pertenece al plano **CB**, cortaría también a la intersección **CD**, lo cual contradice la hipótesis.

Luego **AB** no puede cortar al plano **MN**. Luego **AB||MN.**

TEOREMA LXXXIII.—(Recíproco del LXXXII).—**Si por una recta AB, paralela a un plano MN se hace pasar un plano cualquiera de modo que corte al primero, resulta que la recta AB es || a la intersección de los dos planos.**

Hip.) AB||MN. (Fig. 305).

Tes.) AB||CD.

Dem.) **AB** no puede cruzarse con **CD** por pertenecer al mismo plano **CB**. Tampoco puede cortarse con **CD**, porque cortaría al plano **MN**, contradiciendo la hipótesis. Luego si **AB** no puede cruzarse ni cortarse con **CD**, tiene que ser paralela.

TEOREMA LXXXIV.— **Si dos planos paralelos son cortados por un tercer plano, las intersecciones son paralelas.** (Fig. 306).

Hip.): $\begin{cases} MN \parallel JR \\ QP \text{ corta } MN \text{ y } JR \end{cases}$

Tes.): AB || CD

Dem.): AB y CD no pueden cruzarse por estar situadas en el mismo plano **QP**.

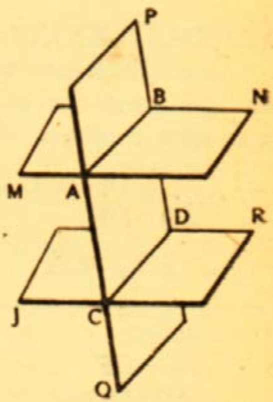


Fig. 306

Tampoco pueden cortarse por hallarse situadas en planos paralelos.

Luego: AB || CD.

Ejemplo: la pared de una sala de clase corta al cielo y al piso según dos rectas paralelas.

TEOREMA LXXXV.—**Los segmentos de rectas paralelas interceptados por planos paralelos, son iguales.**

Hip.) $\begin{cases} MN \parallel JR \text{ (Fig. 306).} \\ AQ \parallel PD \end{cases}$

Tes.) $AC=BD$

Dem.) AB y CD determinan el plano **QP**, que corta a los planos **MN** y **JR** según las rectas **AB** y **CD.**

Pero, $AB \parallel CD$. Luego **ACDB** es un paralelógramo.

Luego: $AC=BD$.

TEOREMA LXXXVI.—**Dos ángulos situados en distintos planos que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales si son de la misma naturaleza, es decir, ambos agudos, o ambos obtusos.**

Hip.): $\begin{cases} AC \parallel DF \text{ (Fig. 307).} \\ AB \parallel DE \end{cases}$

Tes.): $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$

Dem.): Se hace:

$AC=DF$

y $AB=DE$

Siendo $AC \# DF$, el cuadril. **FDAC** es un #.

Por lo tanto $AD \# CF$.

También **EDAB** es un #.

Por lo tanto $AD \# BE$.

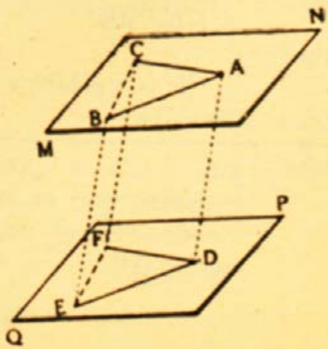


Fig. 307

Resulta entonces que $CF \# BE$ (Axioma: 2 cantidades...) y $BC=EF$.

Luego: $\triangle BAC \cong \triangle EDF$ (Tres lados iguales)
Luego: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$. (Q. E. D.)

NOTA.—Si los lados AB y DE fueran del mismo sentido y los lados AC y DF de sentidos contrarios, los ángulos serían suplementarios. (El uno agudo y el otro obtuso).

§ 7.—*RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES*

¿Cuándo se dice que una recta es $\perp$ a un plano?

TEOREMA LXXXVII.—**Una recta que corta a un plano, y es perpendicular a otras dos trazadas por su pie, en dicho plano, es perpendicular a cualquier otra recta del plano que sea trazada por su pie.** (Fig. 308).

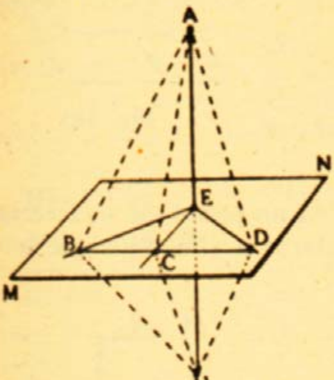


Fig. 308

Hip.): $AE \perp EB$; $AE \perp ED$
Tes.): $AE \perp EC$

Dem.): Se prolonga $AE \rightarrow E$.
Se hace: $AE = EA'$

Se traza en el plano MN, la recta BD de modo que corte a las rectas EB, EC y ED.

Se unen A y A' con los puntos B, C y D.

Resulta: $\begin{cases} AB = A'B \\ AD = A'D \end{cases}$ (Por ser oblicuas que se apartan igualmente del pie de la $\perp$).

Entonces: $\triangle ABD \cong \triangle A'BD$ (Por tener los tres lados =s)

De esta congruencia se desprende:

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle A'BD.$$

Por tanto: $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$ (Tienen dos lados y el ángulo comprendido iguales).

Resulta así: $CA = CA'$.

Entonces: $\triangle ACA'$ isósceles.

Luego: $CE \perp$ **AA'** (Teor. "La recta que une el vértice con el punto medio de la base de un $\triangle$ isósceles es $\perp$ a ella").

o sea: $AE \perp EC$. (Q. E. D.)

COROLARIO.—*Para que una recta sea $\perp$ a un plano, basta que lo sea a dos rectas que pasan por su pie en dicho plano.*

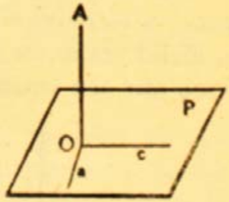


Fig. 309

OBSERVACION.—En la práctica para **trazar** perpendiculares a un plano, se emplea la escuadra de tres ramas. Cada rama es perpendicular al plano de las otras dos. (Fig. 309).

TEOREMA LXXXVIII.—**Si en un punto de una recta se trazan tres o más perpendiculares a ella, todas se hallan situadas en un mismo plano.**

Hip.): $EP \perp PA$; $EP \perp PB$; $EP \perp PD$. (Fig. 309-a).

Tes.): PA, PB, PD están situadas en QH.

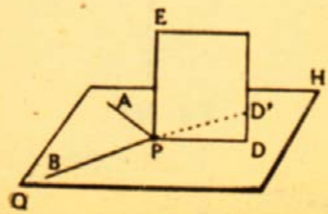


Fig. 309 a

Dem.): **EP** es $\perp$ al plano **QH** determinado por las rectas PA y PB. (Corol. de Teor. LXXXVII, pág. 439).

Supóngase que **PD** no está situada en el plano **QH**.

Tomaría entonces una posición cualquiera **PD'**, fuera de él, pero situada en el mismo plano determinado por **EP** y PD.

Este plano ED' cortaría al plano **QH** según una recta PD, distinta de PD'.

Resultaría así el absurdo que en el mismo plano **ED**, habría dos perpendiculares en P a la recta EP que serían PD' y PD. (1). Este absurdo provendría de suponer que **PD** está situada fuera del plano **QH.**

Luego **PD** se halla situada en **QH.** (Q. E. D.)

COROLARIOS.—1º *Por un punto de una recta se puede trazar un solo plano ⊥ a ella.*

2º *Por un punto situado fuera de una recta, se puede trazar un solo plano ⊥ a ella.*

3º *En un punto de un plano, no se puede trazar más que una sola ⊥ a dicho plano.*

Hip.): $\overline{PH} \perp MN$. (Fig. 310).

Tes.): $\overline{PH}$ única ⊥.

Dem.): Supóngase que también $\overline{PI} \perp MN$. $\overline{PH}$ y $\overline{PI}$ determinan un plano que cortaría al MN según $\overline{EF}$.

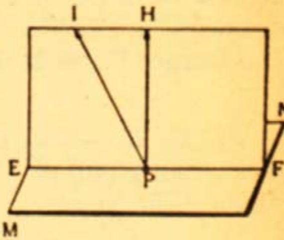


Fig. 310

(1) PD'⊥EP por hipótesis por ser simplemente la dirección que tomaría PD, fuera del plano QP.

PD⊥EP, porque siendo PD intersección del plano ED' con QH, pertenece también a este último plano. Además, EP⊥OH. Luego EP es ⊥ a todas las rectas del plano QH que pasan por P.

Resultaría entonces el absurdo que en el mismo plano EFHI habría dos perpendiculares en P a la recta EF. Luego PH es la única $\perp$ al plano MN.

4º *Por un punto fuera de un plano no se puede trazar más que una sola perpendicular a dicho plano.* (Fig. 311).

Hip.): $\overline{PA} \perp MN$.

Tes.): $\overline{PA}$ única $\perp$.

Dem.): Supóngase que se pueda trazar otra $\perp$ $\overline{PB}$ a MN.

PA y $\overline{PB}$ determinan un plano que cortaría a MN según DC. En el plano **DABP** habría dos $\perp$s desde P a la misma recta DC, lo cual es un absurdo.

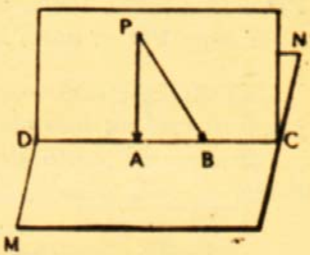


Fig. 311

Luego: PA es la única $\perp$ a MN.

L. G. 25.—*El L. G. de todas las $\perp$s a una recta, trazadas en un punto de ella, es el plano perpendicular a la recta en dicho punto.*

TEOREMA LXXXIX.—(De las tres perpendiculares).—**Si una recta AP es $\perp$ a un plano MN, y si desde el pie de esta perpendicular, se traza otra perpendicular PE a una recta cualquiera CD del plano, la recta AE que une un punto arbitrario A de AP con el punto E, es perpendicular a CD.** (Fig. 312).

Hip.): AP⊥MN; PE⊥CD (Fig. 312).

Tes.): AE⊥CD.

Dem.): Se hace EC=ED.
C(↔)P (↔)D

Resulta: PC=PD (PE es simetral de CD).

C(↔)A (↔)D.

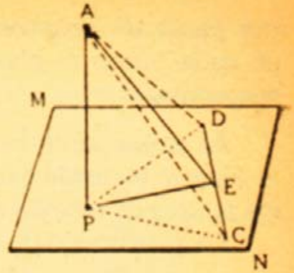


Fig. 312

Resulta △APC≅△ADP (Tiene 2 lados y el ∢ comp. iguales).

De donde: AC=AD.

Entonces △ACD isósceles, siendo E punto medio de su base CD.

Luego: AE⊥CD. (Q. E. D.)

COROLARIO.—*PE, PC y PD son las proyecciones de las oblicuas AE, AC y AD sobre el plano.*

Proyección ortogonal en un plano.—*Proyección ortogonal de un punto en un plano, es el pie de la perpendicular bajada desde el punto al plano.*

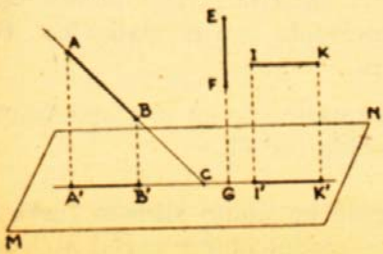


Fig. 313

Así, las proyecciones de los puntos A, B y C en el plano MN (Fig. 313), son los puntos A', B' y C.

En el plano MN en el cual se proyecta, se llama *plano de proyección* y los segmentos perpendiculares de cada punto al plano, se llaman *proyectantes* del punto respectivo.

La proyección de una figura cualquiera en un plano, es la figura formada por el conjunto de las proyecciones de los puntos de aquélla en el plano.

La proyección de un punto es otro punto.

La proyección ortogonal de un trozo en un plano, es el trazo que une los pies de las $\perp$ trazadas a dicho plano desde los extremos del trazo. Así, la proyección del trazo AB, **Fig.** 313, es el trazo A'B'.

La proyección de un trazo $\perp$ al plano de proyección se reduce a un punto. La proyección del trazo EF es el punto G. (**Fig. 313**).

La proyección de un trazo $\parallel$ al plano de proyección es otro trazo $\parallel$ a aquel e igual a él. Ej.: La proyección del trazo IK es I'K'.

Si uno de los extremos del trazo coincide con el plano de proyección, la proyección de dicho trazo se obtiene uniendo la proyección de otro extremo, con el punto de intersección del extremo coincidente con el plano. Ej.: B'C es la proyección del trazo BC.

Si el trazo está situado totalmente en el plano de proyección, su proyección coincide con él.

TEOREMA XC.—**Si desde un punto situado fuera de un plano, se trazan a él la perpendicular y varias oblicuas:**

1º **La perpendicular es menor que cualquiera oblicua.**

2º **Las oblicuas que tienen iguales proyecciones son iguales.**

3º **La oblicua de mayor proyección es también la mayor.**

1ª Hip.) AP⊥MN. (Fig 314).

Tes.) AP<AC.

Dem.) AP y AC determinan el plano PF y en el △APC situado en dicho plano AP<AC.

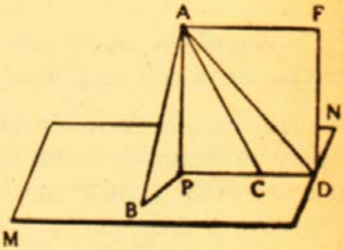


Fig. 314

2º Hip.) AP⊥MN;
PB=PC.

Tes.) AB=AC.

Dem.) △APB≅△APC.
Luego: AB=AC.

3º Hip.) AP⊥MN; PD>PC.

Tes.) AD>AC.

Dem.) En el △ACD.
el ∢ACD>90º.
∴△ACD es obtusángulo en C.
Luego: AD>AC.

COROLARIO.—*La recta más corta de un punto del espacio a un plano, es la perpendicular a este plano.*

Llámase **distancia de un punto a un plano** la ⊥ trazada desde dicho punto al plano.

L. G. 26.—*El L. G. de los puntos de un plano que se encuentran a la distancia* **a** *de un punto dado P, en el espacio, es la ⊙ que tiene por centro el pie de la ⊥ trazada desde el punto P al plano y cuyo radio es* $\sqrt{\mathbf{a}^2 - \perp^2}$.

Angulo de una recta con un plano es el ∢ que forma dicha recta con su proyección en el plano.

El ángulo formado por una oblicua y su proyección sobre el plano, se llama *ángulo de inclinación*. En Fig. 312 los ∢s AEP y ACP son los ∢s de inclinación de las oblicuas AE y AC.

Como se demostrará a continuación, el ángulo de inclinación es el menor de los ángulos que la oblicua puede formar con cada una de las rectas del plano que pasan por su pie.

TEOREMA XCI.—**El ángulo de inclinación es el menor ángulo que una oblicua forma con el plano.**

Hip.: Sea el plano QP y $\overline{AB}$ una oblicua que lo corta. (**Fig. 315**).

$\overline{AC} \perp QP$ determina ángulo de inclinación ABC.

Tes.): ∢ABC < ∢ABI

Dem.): Se hace BD=BC

A(↔)D

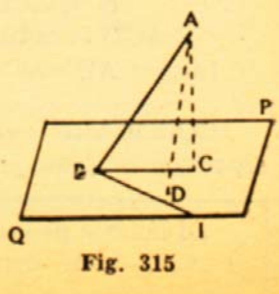


Fig. 315

Los $\triangle$s ABC y ABD tienen:

$AB = AB$ (lado común)

$BC = BD$ (Construc.)

$AC < AD$ (La $\perp$ es menor que la oblicua. Teor. XC, corol. 1º).

Luego: $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABI$ (En virtud del Teor.: "Dos $\triangle$s que tienen 2 lados=s y el 3º desigual, al menor lado se opone menor ángulo. Teor. 35º, Tomo 3.er. Año de O. Cano).

TEOREMA XCII.—**Dos o más rectas $\perp$s a un mismo plano, son paralelas entre sí.**

Hip.) AB y CD $\perp$s MN. (Fig. 316).

Tes.) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Dem.) (B$\leftrightarrow$)D.

Se traza $FG \perp BD$ en el plano MN.

A($\leftrightarrow$)D (A=punto cualquiera de AB).

$AD \perp FG$ (Teor. LXXXIX)

También $CD \perp FG$ (Por Hip.)

$\therefore$ DC, DA y DB son $\perp$s a FG en el punto D y se hallan situadas en un mismo plano BC (Teors. LXXXVIII y LXXXIX).

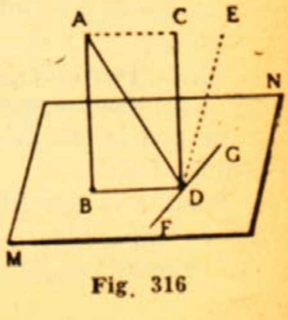


Fig. 316

Además AB tiene dos puntos en el plano BC.

Resulta entonces que AB y CD pertenecen a un mismo plano BC, en el cual, ambas rectas son $\perp$s a BD.

Luego: AB $\parallel$ CD (En virtud del teorema de Geometría plana: "Dos o más $\perp$s a una misma recta son $\parallel$s entre sí").

TEOREMA XCIII.—(Recíproco del Teor. XCII).—**Si dos rectas del espacio son $\parallel$s y una de ellas es $\perp$ a un plano, la otra también lo es.**

Hip.) AB $\parallel$ CD; AB$\perp$MN. (Fig. 316).
Tes.) CD$\perp$MN.

1ª Dem.) B($\leftrightarrow$)D.
Se traza FG$\perp$BD por D en el plano MN.
A($\leftrightarrow$)D (A = punto cualquiera de AB).
Resulta AD$\perp$FG (Teor. (Teor. LXXXIX).
$\therefore$ FG$\perp$ plano BC, determinado por DA y DB.
También FG$\perp$DC puesto que DC pertenece al plano BC.
Luego: siendo CD$\perp$ a las rectas FG y BD del plano MN es $\perp$ a este último plano.

2.a Demostración del Teorema XCIII.— (Indirecta). Supóngase que CD no fuera $\perp$ a MN. (Fig. 316).

Se podría trazar entonces por D la perpendicular, por ejemplo, DE.

Resultaría así ED paralela a AB, distinta de CD, lo cual es imposible.

Luego AB $\parallel$ CD.

TEOREMA XCIV.—**Dos planos perpendiculares a una misma recta, son paralelos.** (Fig. 317).

Hip.) MQ y NQ$\perp$AB
Tes.) MQ $\parallel$ NQ

1º Dem.) Los planos **QM** y **NQ** no pueden coincidir según la hipótesis.

Luego: o bien se cortan o son paralelos.

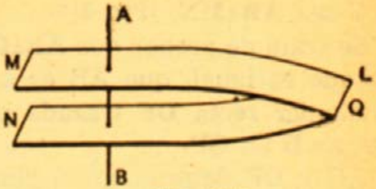


Fig. 317

Supóngase que dichos planos se cortaran. Su intersección sería una recta **LQ**.

Resultaría así que por un punto **Q** de su intersección se podrían trazar dos planos $\perp$s a la recta **AB;** lo cual es imposible según el corolario 1º del teorema LXXXVIII.

Luego: **MQ** $\parallel$ **NQ.**

2.a Demostración del Teorema XCIV.—

Si los planos MQ y NQ se cortasen, su intersección sería una recta LQ. (**Fig. 317**).

Si se une un punto O de LQ con A y B, resultaría el $\triangle$OAB y los $\measuredangle$s OAB y OBA, rectos, por hipótesis; lo cual es imposible, porque un triángulo no puede tener dos $\measuredangle$s rectos.

Luego: MQ $\parallel$ NQ.

TEOREMA XCV.—(Recíproco del Teor. XCIV).—**Si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular a uno de ellos, lo es también al otro.**

Dem.) Sean **MN** y **QP** los dos planos ||s.

Y sea **AB⊥MN.** (Fig. 318).

Se trata de probar que **AB⊥QP** lo que es igual, que AB es ⊥ a cualquier recta **DF** trazada por su pie **D** en QP.

AB y DF determinan el plano CF que corta al plano **MN** según una recta **CE.**

Resulta: CE||DF. (Teorema LXXXIII).

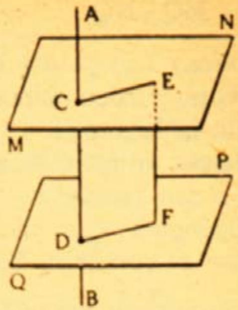


Fig. 318

La recta AB⊥CE (Hipótesis).

También AB⊥DF (puesto que CE || DF)

El mismo razonamiento se puede repetir para cualquiera otra recta que pase por **D** en el plano **QP**.

Luego: **AB⊥QP** (Teorema LXXXVII).

COROLARIO.—*Dos rectas ||s a una tercera en el espacio, son ||s entre sí.*

DEFINICION.—Por distancia entre dos planos ||s debe entenderse la parte de la perpendicular comprendida entre ambos planos.

CD o EF representa la distancia entre los planos MN y QP. (Fig. 318).

PROBLEMA 37.—*Desde un punto situado fuera de un plano, trazar la ⊥ a dicho plano.*

1.ª Solución.— (Fig. 319).

Sea **MN** el plano y **P** el punto.

Se marcan tres puntos en el plano MN a una misma distancia **a** de **P:** A, B y C.

Se construye una ⊙ que pase por los tres puntos.

El centro de la ⊙ es el pie de la ⊥ pedida.

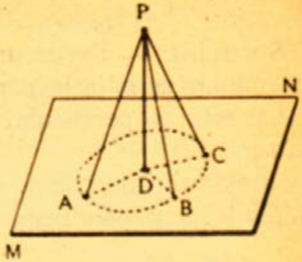


Fig. 319

2.a Solución (Fig. 320).

Sea **MN** el plano y **P** el punto.

Se traza una recta cualquiera **BC** en **MN.**

BC y P determinan el plano **BG**.

En este plano se hace:

PD⊥BC

y ED⊥BC (en el plano MN).

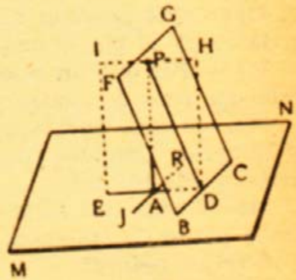


Fig. 320

En el plano **DI** determinado por PD y DE, se traza PA⊥DE. PA es la perpendicular pedida.

Dem.) En (MN) se traza:

JR ∥ BC.

Se sabe que: BC⊥DP y DE (construc.)

entonces BC⊥ plano PDE (Corol. Teor. LXXXVII).

∴ AJ⊥PDE (Teor. XCIII).

∴ AJ⊥PA.

Por ser PA⊥DE y PA⊥RJ, PA⊥MN.

PROBLEMA 38.—*En un punto situado sobre un plano levantar la perpendicular a él.*

Solución.— Desde un punto cualquiera situado fuera del plano, se baja la perpendicular. (**Problema 37**).

Por esta perpendicular y el punto dado se hace pasar un plano.

En este último plano, y por el punto dado, se traza la paralela a la perpendicular anterior.

EJERCICIOS DE APLICACION

142.—¿Qué posición tienen el piso y el cielo raso de la sala de clase? ¿Y el piso y una muralla?

143.—¿Por qué un piso de tres patas queda mejor en equilibrio que otro de cuatro patas?

144.—Si una puerta gira en torno de la arista que tiene las bisagras. ¿cuántos puntos deben afirmarse para que la puerta quede inmóvil?

145.—Dadas tres rectas OA, OB y OC que concurren, en un mismo punto O. ¿Cuántos planos determinan si están situados en distintos planos?

146.—¿Cuántas perpendiculares se pueden trazar en el espacio en un punto de una recta L? ¿Dónde se hallan situadas?

147.—Dos rectas perpendiculares a una tercera, en el espacio, ¿son forzosamente paralelas?

148.—¿Podrían ser perpendiculares a un mismo plano, dos rectas que se cruzan?

* **149.**—¿Cuál es el L. G. de los puntos equidistantes de dos puntos dados, en el espacio?

150.—Dados en el espacio una recta L y dos puntos fuera de ella (determinar en la recta un punto que equidiste de los dos puntos dados.

* **151.**—Dado un plano y un punto A fuera de él, indicar cuál es el L. G. de las rectas paralelas al plano que pasan por el punto A.

• **152.—Determinar el L. G. de los puntos equidistantes de dos planos dados: a) los planos son paralelos; b) los planos se cortan.**

• **153.—Determinar el L. G. de los puntos que equidistan de tres puntos dados en el espacio A, B y C.**

• **154.—¿Cuál es la L. G. de los puntos de un plano que equidistan de dos puntos dados A y B situados fuera de él?**

155.—Dado un triángulo rectángulo isósceles tal que CA= CB=10 cm, se levanta CP=10 cm perpendicular al plano del triángulo. Calcular AB, PA, PB. ¿De qué naturaleza es el △ PAB?

156.—En el vértice C del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC, se levanta la perpendicular al plano del triángulo. Siendo M un punto variable de esta perpendicular, mostrar que los △s MCA y MCB son △s rectángulos. ¿A qué condición será equilátero el triángulo MAB?

157.—Una sala rectangular mide 6,40 de largo y 4,80 m de ancho. En el piso, a tres de los ángulos de la sala se fija un cordel de 5 m de largo. Los extremos libres de estos cordeles queden tirantes. Precisar este punto y calcular la altura de la sala.

158.—Dado un triángulo equilátero ABC de lado a, desde un punto P, exterior al plano del triángulo y situado a una distancia l de cada uno de los tres vértices, se baja la perpendicular al plano ABC. Precisar la posición del pie de esta perpendicular y calcular su longitud PH. ¿Con qué condición ha de cumplir l para que sea posible el problema?

159.—Dados dos puntos A y B en el espacio, por el punto medio O del segmento AB, se traza el plano P perpendicular a AB. 1º Mostrar que cualquier punto M de este plano equidista de A y B. 2º Mostrar que cualquier punto M, equidistante de A y B está en el plano P. De este estudio deducir una proposición general.

160.—¿Cuál es el lugar de los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto A a un plano que gira alrededor de una recta?

161.—Dado un punto O situado a una distancia d de un plano dado P ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos de este plano situado a una distancia l del punto O? (Discutir según los valores de l).

162.—Trazar por un punto dado P un plano paralelo a dos rectas que se cruzan L y L'.

163.—Las distancias de los puntos A y B a un plano son 14 y 29, respectivamente. Si la distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas desde los puntos A y B al plano es 20 ¿cuál es la distancia entre los dos puntos?

* **164.**—Determinar el L. G. de todos los puntos que están a una distancia dada **a** de un plano dado.

165.—Demostrar que dos planos ||s a un tercero son ||s entre sí.

166.—Demostrar que si entre tres planos ||s se trazan dos rectas cualesquiera, los segmentos de las rectas que interceptan los planos, son proporcionales.

CAPITULO XX

ANGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

§ *1.—ANGULOS DIEDROS*

Llámase *ángulo diedro* a la abertura comprendida entre dos planos que se cortan.

Los planos que forman el diedro se llaman *caras.*

La intersección de dos caras se llama *arista.*

El ángulo diedro se designa por las dos letras de la arista o bien por cuatro letras: las dos de la arista y una de cada cara. Las de la arista se leen entre las otras dos.

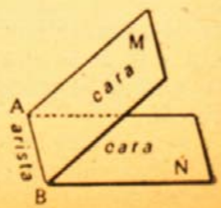


Fig. 321

Ej.: Diedro AB o diedro MABN. (Fig. 321).

Un ángulo diedro se genera por la rotación de un plano en torno de una recta situada sobre él.

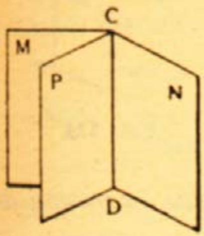


Fig. 322

La *magnitud* del diedro depende de este giro o sea de la mayor o menor abertura entre sus caras.

Se llaman diedros adyacentes dos diedros que tienen una arista y un plano común.

Ej.: los diedros MCDP y PCDN son adyacentes. (Fig. 322).

Dos *diedros* son *iguales* cuando sobrepuestos coinciden.

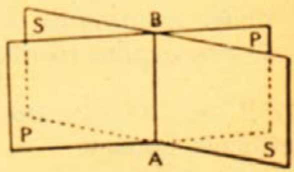


Fig. 323

En la figura 322 el diedro MCDN es igual a la suma de los diedros MCDP y NCDP.

Los diedros, también, pueden restarse, duplicarse, triplicarse, etc., y dividirse en partes iguales.

Plano bisector de un diedro es el plano que lo divide en dos diedros iguales.

En la Fig. 324, HI⊥AB y HG⊥AB.

El ∢ IHG que resulta, se llama *ángulo plano o rectilíneo* de diedro EABC.

Llámase ángulo plano o rectilíneo correspondiente a un diedro al ángulo formado por dos perpendiculares trazadas a la arista en un punto cualquiera de ella y situadas una en cada plano del diedro.

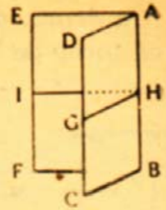


Fig. 324

Los ángulos rectilíneos correspondientes a un mismo diedro, son todos iguales. (Teor. XCVI).

La medida de un ángulo diedro es, pues, la misma de su ángulo rectilíneo.

El ángulo diedro será recto, agudo u obtuso si su ángulo rectilíneo es recto, agudo u obtuso.

También, *la razón de dos ángulos diedros* es la misma que la de sus ángulos rectilíneos.

TEOREMA XCVI.—**Dos diedros iguales, tienen ángulos rectilíneos iguales.**

Hip.) diedro AB=diedro A'B' (**Fig. 325**).

Tes.) $\sphericalangle$EAC=$\sphericalangle$E'A'C'

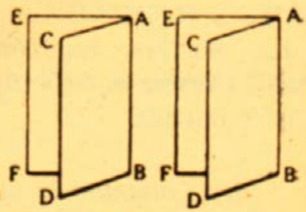


Fig. 325.

Dem.) Se sobrepone el diedro AB sobre su igual A' B' de modo que la arista AB coincida con A' B' y el punto C con C'.

Las rectas AE y A'E' coinciden por estar en un mismo plano y ser perpendiculares a A'B' en un mismo punto.

Lo mismo AC con A'C'.

Luego: $\sphericalangle$EAC=$\sphericalangle$E'A'C'.

OBSERVACION.—Enúnciese y demuéstrese la proposición recíproca al teorema XCVI.

TEOREMA XCVII.—**Dos ángulos diedros son proporcionales a sus ángulos rectilíneos respectivos.**

Tes.) $$\frac{\text{Diedro CBAE}}{\text{Diedro C'B'A'E'}} = \frac{\sphericalangle \text{EAD}}{\sphericalangle \text{E'A'D'}} \quad \text{(Fig. 326).}$$

Dem.) Supóngase que los dos diedros tengan como común medida un diedro δ y que esta común medida esté contenida **m** veces en el diedro **CBAE** y **n** veces en **C'B'A'E'**.

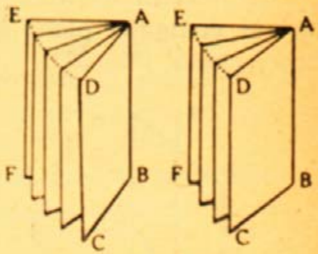


Fig. 326

Resulta:

$$\text{diedro} \quad \text{CBAE} = m\delta$$
$$\text{diedro} \quad \text{C'B'A'E'} = n\delta$$

Dividiendo miembro a miembro se tiene:

$$\frac{\text{Diedro CBAE}}{\text{Diedro C'B'A'E'}} = \frac{m}{n}$$

Al dividir los diedros en m y n partes iguales, los $\sphericalangle$s rectilíneos quedan igualmente divididos en m y n partes iguales.

Supóngase que un ángulo α sea la común medida de los dos ángulos rectilíneos, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle \text{EAD} &= m\alpha \\ \sphericalangle \text{E'A'D'} &= n\alpha \end{aligned}\right\} \text{Luego: } \frac{\sphericalangle \text{EAD}}{\sphericalangle \text{E'A'D'}} = \frac{m}{n}$$

Comparando las dos prop. cuyo 2º miembro es la razón $\dfrac{m}{n}$

se tiene: $\dfrac{\text{Diedro CBAE}}{\text{Diedro C'B'A'E'}} = \dfrac{\sphericalangle \text{EAD}}{\sphericalangle \text{E'A'D'}}$ (Q. E. D.)

Planos perpendiculares.— *Dos planos son perpendiculares cuando forman un diedro recto,* (su ángulo rectilíneo mide 90°).

TEOREMA XCVIII.—**Si una recta y un plano son $\perp$s entre sí, cualquier plano que pasa por dicha recta es $\perp$ al primer plano.** (Fig. 327).

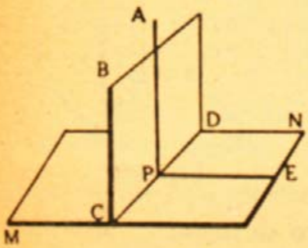


Fig. 327

Hip.) AP$\perp$MN.
Tes.) BD$\perp$MN.

Dem.) En MN se traza PE$\perp$CD (por P).

El $\sphericalangle$ APE, rectilíneo del diedro BCDN = 90°.

Si el $\sphericalangle$ rectilíneo es recto, lo será el diedro.

Luego BD$\perp$MN.

COROLARIO.—*Si dos planos que se cortan son perpendiculares a un tercero, su intersección es también perpendicular a este tercer plano.* (Fig. 328).

Ej.: La arista común a dos murallas de la sala de clase, es $\perp$ al piso.

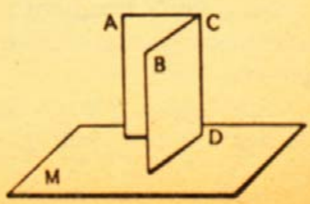


Fig. 328

§ 2.—ANGULOS POLIEDROS

Llámase ángulo poliedro o sólido la figura formada por varios ángulos planos que tienen un mismo vértice y dos a dos un lado común.

En la figura 329, **S-ABCDE** es un ∢ poliedro. (Se lee primero la letra del vértice).

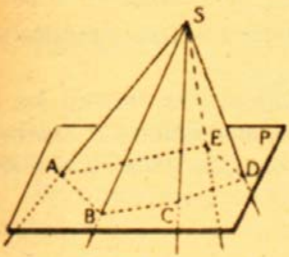


Fig. 329

La abertura formada en la cúspide de una pirámide, es un ejemplo de ∢ poliedro o sólido.

El punto común **S**, en que concurren los planos, se llama *vértice* del ángulo sólido o poliedro. (Fig. 329).

Cada uno de los planos que forman el ángulo poliedro, se llama cara. En la figura 329, **ASB, BSC**... son caras.

Las intersecciones de las caras, son las *aristas*. Las aristas deben considerarse prolongadas indefinidamente.

Prácticamente se suponen cortadas por un plano.

Se dice que *un ángulo poliedro es convexo cuando al cortar sus aristas por un plano, la sección que resulta es un polígono convexo.* (Véanse Figs. 329 y 330).

También se puede afirmar y definir que:

Todo ángulo poliedro es la figura engendrada por el movimiento de una recta en torno del perímetro de un polígono, permaneciendo fija en uno de sus puntos, situado fuera del plano de dicho polígono.

La magnitud de un ángulo poliedro no depende de la extensión de sus caras, sino de la *abertura* de ellas.

El ángulo poliedro formado por tres caras se llama *ángulo triedro*.

Ej.: Dos murallas que se cortan y el techo de la sala de clase, forman un ángulo triedro.

El ángulo *triedro* que tiene dos ángulos planos iguales es *isósceles*.

El *triedro es equilátero*, si tiene sus tres ángulos planos iguales.

Dos ángulos poliedros son congruentes cuando los ángulos diedros y rectilíneos del uno, son iguales a los ángulos diedros y rectilíneos del otro, considerados en el mismo orden.

TEOREMA XCIX.— **En todo ángulo triedro un ángulo plano (cara) cualquiera es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.**

Hip.) Sea el triedro S y sus ángulos planos BSC=a, CSA=b y ASB=c (Fig. 330).

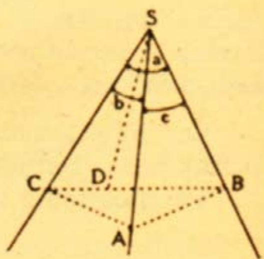


Fig. 330

Tes.) $\begin{cases} 1^\circ\text{:} \ a < b + c \\ 2^\circ\text{:} \ b > a - c \end{cases}$

Dem.) 1° La tesis sería evidente si uno de los sumandos del 2° miembro fuera igual o mayor que ∢ BSC=a (1.er miembro).

Por tal motivo supóngase ∢ BSC mayor que cada uno de los otros dos ángulos planos.

Se hace: $\sphericalangle BSD = \sphericalangle BSA = c$. **(Sobre el plano BSC).**
y $SA =$ SD **(magnitud arbitraria)**

Se traza BC de modo que pase por D. **(En el plano BSC)**
$B(\leftrightarrow)A\ (\leftrightarrow)C$

Resulta $\triangle BSA \cong \triangle BSD$ **(Dos lados y el $\sphericalangle$ comprendido iguales).**

Por lo tanto $BA = BD$.

También en el plano CAB se tiene:

$$BC < BA + AC.$$

Quitando BD del 1.er miembro y su igual BA del 2º, resulta: $DC < AC$.

Entonces los $\triangle$s CSD y CSA tienen dos lados respectivamente iguales y el tercero desigual, siendo $CD < CA$.

Luego $\sphericalangle CSD < \sphericalangle CSA$. **(Teorema 35 del 3.er Año).**

Agregando al 1.er miembro de la última desig. el $\sphericalangle DSB$ y al 2º m. su igual $\sphericalangle ASB$, resulta:

$$\sphericalangle BSC < \sphericalangle CSA + \sphericalangle ASB \text{ o } a < b + c.$$

2º La desigualdad precedente se puede escribir:
$b + c > a$.

Se resta de ambos miembros c y queda:
$b > a - c$. **(Q. E. D.)**

TEOREMA C.— **La suma de los ángulos planos de cualquier ángulo poliedro convexo es menor que 4 R.**

Sea $S =$ suma de los $\sphericalangle$s planos del $\sphericalangle$ poliedro. **(Fig. 331).**

Tes.) $S < 4R$.

Dem.) Se corta el $\sphericalangle$ poliedro por un plano arbitrario ABCD que determina sobre las aristas los puntos A, B, C, D:

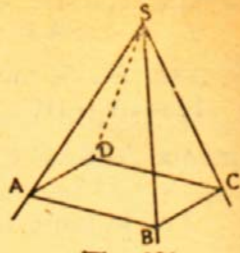


Fig. 331

En cada uno de los vértices A, B, C y D, se forma un ángulo triedro.

Según Teorema XCIX, se tiene:

$$\sphericalangle DAB < \sphericalangle SAD + \sphericalangle SAB$$
$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle SBA + \sphericalangle SBC$$
$$\sphericalangle BCD < \sphericalangle SCB + \sphericalangle SCD$$
$$\sphericalangle CDA < \sphericalangle SDC + \sphericalangle SDA$$

Sumando miembro a m., estas desigualdades resulta:

$\sphericalangle$s $DAB+ABC+BCD+CDA <$ $\sphericalangle$s $SAD+SAB+SBA+SBC+SCB+SCD+SDC+SDA$.

El 1.er m. de la desig. representa la suma de los $\sphericalangle$s interiores del polígono convexo.

$ABCD = 2nR - 4R$ (Fórmula de la suma de los $\sphericalangle$s int. de un polígono de n lados).

El 2º miembro de la desigualdad es igual a la suma de los ángulos en la base de los n $\triangle$s de las caras laterales que designamos por Σ_b.

Entonces: $2nR - 4R < \Sigma_b$ (1)
También: $2nR = \Sigma_b + S$ (2) (Se resta desigualdad 1 de igualdad 2).

$\therefore \quad 4R > S$

Lo que es lo mismo: $S < 4R$.

EJERCICIOS DE APLICACION

167.—¿Cuál es el L. G. de los puntos del espacio que equidistan de las caras de un diedro?

168.—Dado un triángulo ABC, se pasa por cada uno de los vértices un plano perpendicular al lado opuesto. Mostrar que los tres planos así determinados tienen una recta común y que esta recta es perpendicular al plano ABC.

169.—Un segmento AB penetra en O en un plano P. Se proyectan A y B en a y b sobre el plano P. Sabiendo que AB= 1 m, Aa=20 cm, Bb=30 cm, calcular las longitudes ab, AO, OB y el ángulo de la recta AB con el plano P.

170.—Siendo MABN, NABP y PABM tres diedros consecutivos iguales de misma arista AB ¿cuál es el valor de cada uno?

171.—Comparar los diedros formados por dos planos paralelos cortados por un tercer plano.

172.—Mostrar que dos rectas trazadas a un plano desde un mismo punto fuera de él y que forman con él ángulos iguales, son iguales entre sí y recíprocamente.

173.—Desde un punto situado fuera de un plano se traza a este plano una oblicua de longitud a y que forma con él un ángulo de 30º; ¿cuál es la distancia del punto al plano?

174.—Construir un plano perpendicular a un plano dado M y que pase: 1º por una recta situada en el plano M; 2º por una recta paralela a M; 3º por una recta oblicua a M.

175.—En el centro O de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero ABC de lado a, se levanta la perpendicular OS al plano ABC. Se une un punto S de esta perpendicular con los vértices A, B, C.

1º Mostrar que son iguales las caras del triedro de vértice S

2º Determinar la posición de S para que este triedro sea trirectángulo.

3º Determinar la posición de S para que el triedro S tenga por caras tres triángulos equiláteros.

176.—Dado un triedro tri-rectángulo OABC, se toman en las aristas longitudes iguales OA=OB=OC=a. Mostrar que el triángulo ABC es equilátero. Se proyecta O en el plano ABC; determinar la posición del pie de la proyectante y calcular la longitud de ésta.

177.—En las aristas de un triedro tri-rectángulo, se toman tres cualesquiera longitudes OA, OB, OC. Se traza la altura AH del triángulo ABC, se une O con H y se proyecta O en O' del plano ABC.

1º Mostrar que OH es perpendicular a BC.

2º Mostrar que el punto O' se halla sobre la recta AH.

3º Mostrar que O' es el punto de concurrencia de las alturas del triángulo ABC.

177'.—Demuestre que: Si una recta y un plano son $\perp$s a otro plano, o son $\perp$s entre sí, o la recta está en el plano.

CAPITULO XXI

CUERPOS GEOMETRICOS. SUS PROPIEDADES Y ELEMENTOS PRINCIPALES

Se dividen en { *Cuerpos poliedros*: caras planas y *Cuerpos redondos:* caras curvas.

I.—CUERPOS POLIEDROS

§ *1.—DEFINICIONES Y DIVISION GENERAL*

Llámase cuerpo poliedro un sólido limitado completamente por porciones de planos.

En un poliedro se pueden considerar:

Las *caras* que son los polígonos planos de que se compone la superficie del poliedro. Ej.: AA'B'B (Fig. 332).

Las *aristas* que son las intersecciones de las caras.

Los *vértices* que son las intersecciones de tres o más aristas.

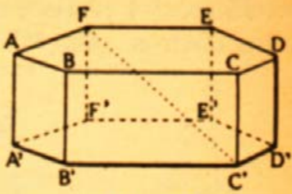


Fig. 332

Los *ángulos diedros* y *poliedros.*

Las *diagonales* que son las rectas que unen dos vértices no situados en una misma cara. Ej.: FC' (Fig. 332).

Se dice que *un poliedro es convexo, si todas sus secciones planas de él son polígonos convexos.*

Los poliedros se designan según el número de sus caras, por: tetraedro si tiene 4 caras.

pentaedro	"	" 5	"	
hexaedro	"	" 6	"	
heptaedro	"	" 7	"	
octaedro	"	" 8	"	
decaedro	"	" 10	"	
dodecaedro	"	" 12	"	
icosaedro	"	" 20	"	etc...

Los poliedros se dividen en *regulares e irregulares.*

a) POLIEDROS REGULARES.—*Son aquellos cuyas caras son polígonos regulares congruentes entre sí y cuyos ángulos poliedros son iguales.*

Son cinco poliedros regulares convexos:

1º El *tetraedro regular*, que tiene 4 caras que son △s equiláteros; 4 vértices o ángulos triedros y 6 aristas o ángulos diedros. (Fig. 333).

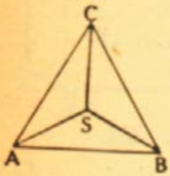


Fig. 333

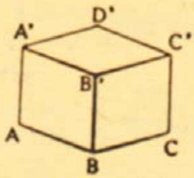


Fig. 334

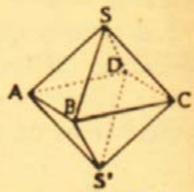


Fig. 335

2º El *hexaedro regular* o *cubo* que tiene:
6 caras cuadradas;
8 vértices o ángulos triedros;
12 aristas o ángulos diedros, y
4 diagonales iguales y concurrentes. (Fig. 334).

3º El *octaedro regular* que tiene:
8 caras que son △s equiláteros;
6 vértices o ángulos tetraedros;
12 aristas o ángulos diedros.

Está formado por dos pirámides cuadrangulares opuestas por su base común **ABCD**. (Fig. 335).

4º El *dodecaedro* regular que tiene:
12 caras pentagonales;
20 vértices o ángulos poliedros, y
30 aristas.

5º El *icosaedro regular* que tiene:
20 caras que son △s equiláteros;
12 vértices o ángulos pentaedros; y
30 aristas.

b) POLIEDROS IRREGULARES.—*Son los que no cumplen con algunas de las condiciones del poliedro regular.*

Tienen diversas formas.

Se pueden clasificar en dos grupos principales: *prismas y pirámides.*

§ 2.—DEL PRISMA

Se llama *superficie prismática a la engendrada por una recta que se desplaza paralelamente a sí misma, siguiendo el perímetro de un polígono plano.*

Si la superficie prismática se corta por dos planos paralelos, resulta un *prisma.*

Prisma es un poliedro comprendido entre dos polígonos congruentes y paralelos y cuyas caras laterales son paralelógramos.

Los dos polígonos congruentes y paralelos son las *bases del prisma.* (Fig. 336).

Es muy fácil demostrar que las bases son congruentes.

En efecto, tienen sus lados respectivamente iguales, dos a dos, por ser lados opuestos de #s. Además sus ∢s son iguales por tener sus lados respectivamente ||s en el espacio y ser ∢s de misma naturaleza. (Teor. LXXXVI).

El nombre del prisma depende del polígono basal.

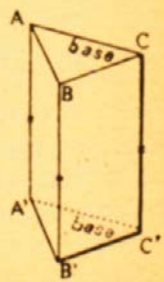


Fig. 336

Si la base es un triángulo, se tendrá un *prisma triangular.* (Fig. 336).

Será *prisma cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc.*, según que la base sea un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono, etc.

El prisma puede *ser recto* u *oblicuo,* según que las aristas laterales sean o no perpendiculares a las bases. (Fig. 337).

Cualquier sección plana paralela a las bases de un prisma, es un polígono congruente con ellas. (¿Por qué?)

Los planos AB', BC', CA', (Fig. 336), son las *caras laterales. Todas las aristas laterales de un prisma son iguales entre sí*, por ser segmentos paralelos comprendidos entre planos paralelos que determinan trazos paralelos.

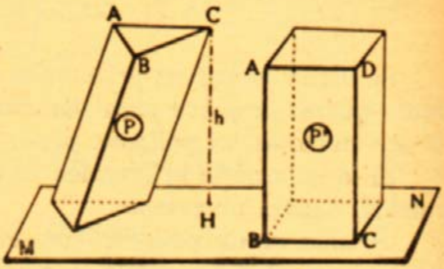


Fig. 337

En Fig. 336 AA'=BB'=CC'.

Sección recta de un prisma es la que es perpendicular a las aristas laterales.

Todas las secciones rectas de un prisma son congruentes.

En la Fig. 338 **EMFN** es una sección recta de un prisma oblicuo.

Altura de un prisma es la perpendicular entre las dos bases.

En un prisma recto cada arista lateral es igual a la altura.

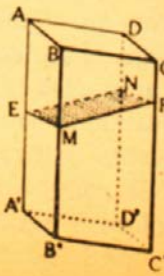


Fig. 338

El prisma cuyas bases son paralelógramos, recibe el nombre de paralelepípedo.

Todas sus caras son #s.

En un paralelepípedo las caras opuestas son congruentes y paralelas. (Demuéstrese).

Prisma regular es un prisma recto que tiene por bases un polígono regular.

Prisma truncado o tronco de prisma es la parte de un prisma comprendida entre una de las bases y una sección plana que, sin ser paralela a la base, corta todas las aristas. Ej.: el prisma **E M F N—A B C D** en **Fig. 338.**

§ *3.—POLIEDROS CONGRUENTES Y EQUIVALENTES*

Dos cuerpos poliedros son congruentes cuando pueden coincidir.

En este caso los cuerpos tienen misma forma y mismo volumen.

Dos poliedros son equivalentes cuando tienen el mismo volumen pero sin tener necesariamente la misma forma.

TEOREMA CI.—**Dos prisma rectos de igual base y altura, son congruentes.**

Hip.) $B=B'$; $h=h'$ (Fig. 339).

Tes.) $P \cong P'$

Dem.) Se sobrepone el prisma **P** sobre el prisma **P'** de modo que coincidan las bases congruentes **B y B'**.

Las aristas **AE** y **A'E'** coinciden por ser perpendiculares igua-

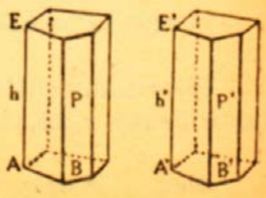


Fig. 339

les trazadas de un mismo punto a un plano.

Lo mismo sucede con las otras aristas laterales.

Así las bases superiores coinciden y como consecuencia, también coinciden los prismas. Luego son congruentes.

TEOREMA CII.—**Un prisma oblicuo, es equivalente a un prisma recto que tiene por altura la arista lateral del prisma oblicuo y por base una sección recta del mismo.**

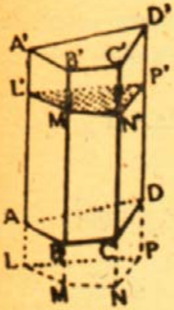


Fig. 340

Tes.) LP'=AD'

Dem.) Sea AD' un prisma oblicuo. (Fig. 340).

LP=sec. recta del prisma oblicuo.

LP'=prisma recto cuya altura LL' =arista lat. **AA'** del prisma oblicuo.

Para demostrar que **AD'=LP'** basta probar la igualdad de los troncos de prismas **LD** y **L'D'** que son exteriores a la parte común **AP'**.

Ahora bien, estos troncos de prismas rectos tienen: bases LMNP≅L'M'N'P' y aristas LA=L'A'; MB=M'B', por ser diferencias de longitudes iguales.

Se pueden, por lo tanto, sobreponer y hacer que coincidan. Entonces: LD≅L'D' y LD+AP'=L'D'+AP'.

Luego: LP'=AD'.

TEOREMA CIII.—**Dos prismas cualesquiera de bases equivalentes y alturas iguales, son equivalentes.**

Dem.) Se aplica el principio de Cavalieri que figura inmediatamente más abajo.

§ 4.—*PRINCIPIO DE CAVALIERI (Postulatum de Cavalieri)*

Si entre dos rectas paralelas L y L' Fig. 341, se disponen dos series de rectángulos de misma altura y tales que los rectángulos que se hallan enfrente uno del otro tengan

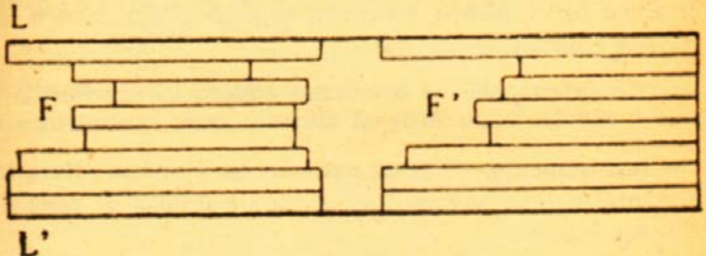


Fig. 341

la misma base, es evidente que las dos figuras formadas F y F' son equivalentes puesto que una y otra constan del mismo número de rectángulos respectivamente congruentes. Subsiste la igualdad por mínima que sea la altura.

Si entre dos planos paralelos se colocan uno encima de otro prisma o cilindros de base plana de modo que los sólidos situados a la misma distancia de uno de los planos ten-

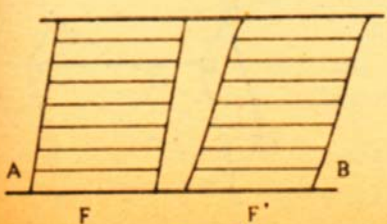


Fig. 342

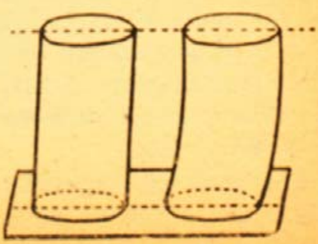


Fig. 343

gan misma altura y bases equivalentes, los dos cuerpos formados son equivalentes por ser sumas del mismo número de sólidos respectivamente equivalentes. (Figs. 342 y 343).

Haciéndose infinitamente más y más pequeña la altura o espesor de las láminas equivalentes siempre subsiste la equivalencia de los volúmenes. En otros términos, se puede enunciar que *"Dos o más cuerpos tienen igual volumen si en igual altura sobre un mismo plano, tienen sus secciones equivalentes"*. Así:

a) Un prisma oblicuo o cilindro oblicuo es equivalente al prisma o cilindro recto de igual altura y bases equivalentes.

b) Dos tetraedros de bases equivalentes y misma altura son equivalentes porque se componen de una infinidad de secciones planas equivalentes.

c) Una pirámide recta y otra oblicua o un cono recto y otro oblicuo de igual altura y bases equivalentes, tienen igual volumen, etc...

TEOREMA CIV.—**Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio.** (Fig. 344).

Dem.) Dos aristas opuestas, por ejemplo, EA y GC, son paralelas y determinan un plano.

El cuadrilátero ACGE es un #. (Tiene un par de lados iguales y ||s: EA # GC).

Entonces las diagonales GA y CE se cortan en su punto medio O.

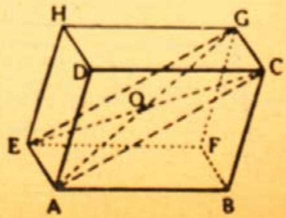


Fig. 344

Si se consideran las diagonales **HB** y **GA,** también concurren en **O,** puesto que el punto medio **O de GA** es siempre el mismo.

La diagonal **DF** también concurre en **O** por las razones anteriores.

Luego la tesis es verdadera.

El punto medio **O** de las diagonales es el centro de la figura de este paralelepído y centro de simetría.

TEOREMA CV.—**En un paralelepípedo rectángulo el cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.** (Fig. 345).

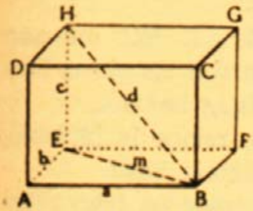


Fig. 345

Hip.) d=diagonal; a, b, c, dimensiones.

Tes.) $d^2=a^2+b^2+c^2$.

Dem.) El $\triangle$BEH rectángulo en E, da:

$d^2=m^2+c^2$.

El $\triangle$ABE rectáng. en A, da: $m^2=a^2+b^2$.

Luego: $d^2=a^2+b^2+c^2$ (Reemplazando m^2 por su valor).

Caso particular.—En el cubo: $d^2=3a^2$

$$o\ d=a\ \sqrt{3}$$

§ 5.—*LA PIRAMIDE*

Se llama superficie pirámidal, la engendrada por una recta que pasando constantemente por un punto fijo, resbala siguiendo el perímetro de un polígono plano.

La recta móvil se llama *generatriz;* la línea poligonal recibe el nombre de *directriz* y el punto fijo o director, se llama *vértice.*

Pirámide es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos que tienen un vértice común.

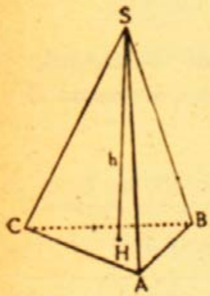


Fig. 346

El punto de concurrencia S de las caras laterales, es la *cúspide* de la pirámide. (Fig. 346).

El polígono ABC es la base.

El △ ABS es una cara lateral.

Las rectas AS, BS, CS, intersecciones de las caras laterales, son las aristas laterales.

Las rectas AB, AC, BC, intersecciones de la base con las caras laterales son las aristas basales.

El nombre que recibe la pirámide depende del polígono basal.

Si la base es un *triángulo,* la pirámide es *triangular.* Si es un *cuadrilátero,* es *cuadrangular,* etc. . .

Altura de una pirámide, es la perpendicular trazada desde la cúspide al plano de la base.

La recta SH es la altura. (Fig. 347).

Se dice que *una pirámide es recta cuando el pie de la altura equidista de todos los vértices basales.*

En ella las aristas laterales son iguales entre sí. (Demuéstrese).

Una pirámide es oblicua, cuando el pie de la altura desequidista de los vértices basales.

Pirámide regular es la pirámide recta cuya base es un polígono regular. En ella el pie de la altura coincide con el centro del polígono basal. (Fig. 347).

En una pirámide regular, las caras laterales son triángulos isósceles congruentes. ¿Por qué?

Apotema lateral de una pirámide regular, es la altura de las caras laterales. **SM** es una apotema lateral. (Fig. 347).

Apotema basal de una pirámide es la apotema del polígono basal. **MH** es una apotema basal. (Fig. 347).

HA, HB..., etc., son radios del polígono basal.

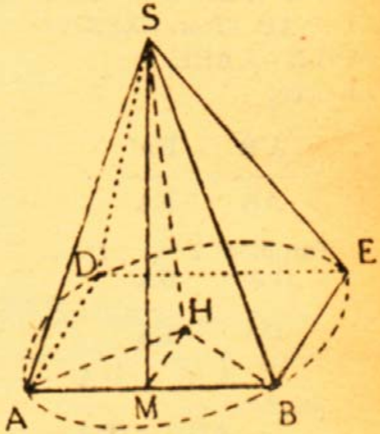


Fig. 347

Las apotemas laterales de una pirámide recta regular, son iguales. (¿Por qué?)

TEOREMA CVI.—**Si una pirámide se corta por una sección plana paralela a la base, dicha sección es un polígono semejante a la base.**

Sea A'B'C'D' la sección plana y ABCD la base. (Fig. 348).

Hip.) A'B'C'D' || ABCD.
Tes.) A'B'C'D' ∼ ABCD.

Dem.) Se debe comprobar que los lados homólogos de ambos polígonos son proporcionales y los ∢s homólogos son iguales.

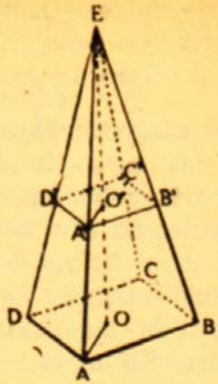


Fig. 348

Siendo A'B'C'D' ∥ ABCD resulta:
A'B' ∥ AB (Teor. LXXXIV).
△A'B'E∼△ABE
Entonces:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{EA'}{EA}$$

También: D'A' ∥ DA

$$y \quad \frac{D'A'}{DA} = \frac{EA'}{EA} \quad (\triangle D'A'E \sim \triangle DAE)$$

$$\text{Luego: } \frac{A'B'}{AB} = \frac{D'A'}{DA}$$

De la misma manera se puede probar que los demás lados homólogos de los dos polígonos son proporcionales.

También se tiene:

∢ D'A'B' = ∢ DAB (Teor. LXXXVI).
∢ C'D'A' = ∢ CDA, etc...

Luego A'B'C'D'∼ABCD

COROLARIOS.—*Si una pirámide se corta por un plano paralelo a la base, resulta que:*

1º Las aristas laterales y la altura quedan divididos en partes proporcionales.

2º Los lados homólogos de dos secciones planas paralelas a la base, son proporcionales a las distancias de dichas secciones a la cúspide.

Para su demostración se considera

$$\triangle EA'O' \sim \triangle EAO. \quad \text{(Fig. 348).}$$

Entonces:

$$\frac{EO'}{EO} = \frac{EA'}{EA}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{EA'}{EA}$$

Luego: $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{EO'}{EO}$$

3º Las áreas de dos secciones planas paralelas a la base, son proporcionales a los cuadrados de sus distancias a la cúspide.

Demostración.— $A'B'C'D' : ABCD = \overline{A'B'}^2 : \overline{AB}^2$

(Las secciones son semejantes).

Pero $$\overline{EO'} : \overline{EO} = \overline{A'B'} : \overline{AB}$$

(Corolario anterior)

$$\therefore \overline{EO'}^2 : \overline{EO}^2 = \overline{A'B'}^2 : \overline{AB}^2$$

Luego $$A'B'C'D' : ABCD = EO'^2 : EO^2$$

TEOREMA CVII.—**Si dos pirámides de bases equivalentes y de alturas iguales, se cortan por planos paralelos a las bases, y a igual distancia de las cúspides, las secciones que resultan son, también, equivalentes.**

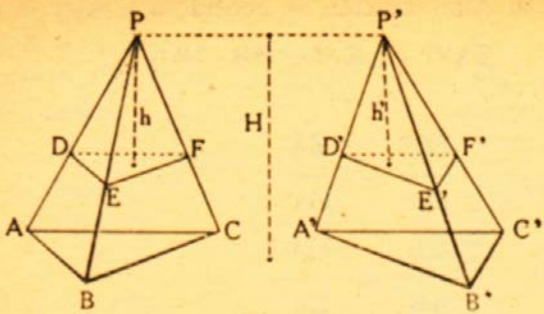


Fig. 349

Hip.) $\begin{cases} ABC = A'B'C' \\ H = \text{altura común};\ h = h' \end{cases}$ **(Fig. 349).**

Tes.) $DEF = D'E'F'$

Dem.): $\dfrac{ABC}{DEF} = \dfrac{H^2}{h^2}$ (Teor. CVI — Cor. 3º)

$$\frac{A'B'C'}{D'E'F'} = \frac{H^2}{h^2}$$

Luego: $\dfrac{ABC}{DEF} = \dfrac{A'B'C'}{D'E'F'}$

Pero en esta última proporción los antecedentes son iguales, también, deben serlo los consecuentes.

Luego: $DEF = D'E'F'$.

TEOREMA CVIII.—**Dos o más pirámides de bases equivalentes y de alturas iguales, son equivalentes.**

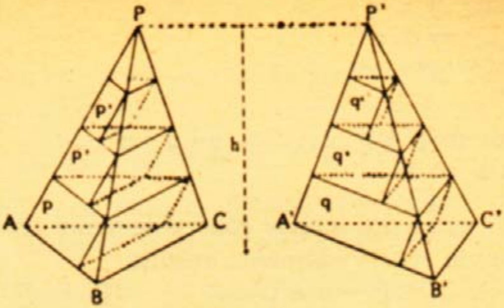


Fig. 350

Dem.): Sean **P—ABC** y P'—**A'B'C'** las pirámides. (**Fig. 350**).

Se suponen colocadas las bases de ambos poliedros, sobre un mismo plano y dividida su altura **h** en un número cualquiera **n** de partes iguales.

Por los puntos de división se trazan planos paralelos a las bases de ambos sólidos.

Las secciones correspondientes en ambas pirámides, de cada uno de estos planos, serán equivalentes. (Teorema CVII...)

Ahora se consideran estas secciones como bases de prismas internos, construídos paralelamente a las aristas **PA** y **P'A'**; estos prismas serán respectivamente equivalentes, por serlo sus bases y tener igual altura $\frac{h}{n}$. (Teor. CIII)

Si se designan por **p**, **p'**, **p''**,... los volúmenes de los prismas inscritos en **P—ABC** y por Σ su suma.

Los volúmenes de los prismas inscritos en **P'—A'B'C'**, se designan por q, q', q'',... y por Σ' su suma.

Se tiene: $p = q$

$p' = q'$

$p'' = q''$

. . . .

Luego: $p+p'+p''+\ldots = q+q'+q''+\ldots$

o sea $\Sigma = \Sigma'$.

Siendo estas dos sumas constantemente iguales, cuando n aumenta indefinidamente resulta:

$P—ABC=P'—A'B'C'\ldots$ (Q. E. D.)

§ 6.—*TRONCO DE PIRAMIDE*

Tronco de pirámide o pirámide truncada es la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección plana paralela a ella.

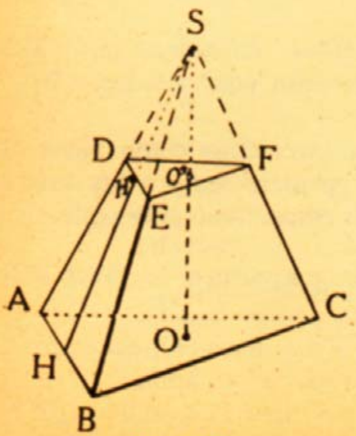


Fig. 351

El poliedro ABC—DEF es un tronco de pirámide. (Fig. 351).

Altura del tronco es la distancia entre las dos bases. OO' es la altura del tronco.

Las caras laterales de un tronco de pirámide son trapecios.

Si el tronco resultante es de una pirámide regular, se llama *tronco piramidal regular*.

En este caso las caras laterales son trapecios isósceles congruentes.

Se llama *apotema lateral del tronco*, la altura de una de sus caras laterales.

HH' es la apotema lateral. (Fig. 351)

La parte que falta al tronco para completar la pirámide total, se llama *pirámide complementaria o deficiente.*

En la Fig. 351 la pirámide complementaria es S-DEF.

§ 7.—*POLIEDROS SEMEJANTES*

Poliedros semejantes son los que tienen respectivamente iguales los ángulos rectilíneos, y semejantes las caras homólogas.

De esta definición se desprende que cuando dos poliedros son semejantes:

1º *Sus ∢s diedros homólogos son iguales*;

2º *Todas sus dimensiones homólogas son proporcionales entre sí* (alturas, aristas, apotemas. . .). Esta razón común se llama *razón de similitud.*

TEOREMA CIX.—**Todo plano trazado paralelamente a la base de una pirámide determina otra pirámide semejante a la propuesta.**

Dem.): Sea **P** una pirámide cualquiera y sea **EG** una sección paralela a la base AC. Hay que demostrar que la pirámide **S—EFGL** y **S—ABCD** son semejantes. (Fig. 352).

1º Las caras homólogas son semejantes. En efecto:

EFGL~ABCD (Teor. CVI)

Las caras laterales también lo son por tener en **S** un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales.

2º Los ∢s rectilíneos son respectivamente iguales.

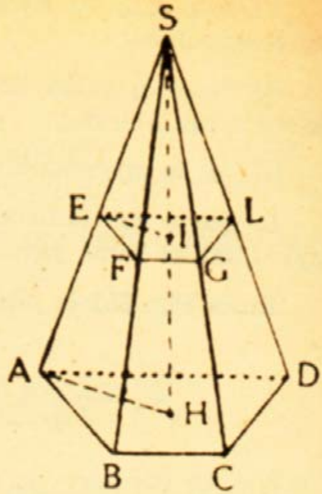


Fig. 352

En los triedros A y E los ∢s de las caras son respectivamente iguales por pertenecer a polígonos semejantes. Luego estos ∢s triedros podrían coincidir. Lo mismo ocurre con los demás triedros.

EJERCICIOS DE APLICACION

178.—Un prisma recto tiene por base un hexágono regular de 10 cm. de lado. Sus caras laterales son cuadradas. Calcular la longitud de las tres diagonales que parten de uno de sus vértices.

* 179.—Las tres dimensiones de un paralelepípedo recto de base rectangular son entre sí como 2 : 3 : 6. Calcular dichas dimensiones sabiendo que una de sus diagonales mide 35 cm

• **180.**—La arista de un cubo mide $10\sqrt{3}$ cm. ¿Cuál es la longitud de una de sus diagonales?

• **181.**—Si una diagonal de un cubo mide 30 cm. ¿Cuánto mide su arista?

182.—Demostrar que en un paralelepípedo de base rectangular la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren a un mismo vértice es equivalente al cuadrado de una de sus diagonales.

• **183.**—Demostrar que en un paralelepípedo una sección plana corta cuatro aristas paralelas, dicha sección es un paralelógramo.

• **184.**—Si por dos aristas opuestas de un cubo se hace pasar una sección plana (**plano diagonal**), decir la naturaleza del polígono de la sección y calcular su área si la arista del cubo es igual a $10\sqrt{2}$.

185.—Demostrar que en un paralelepípedo las rectas que unen los puntos medios de dos aristas paralelas situadas en distintas caras, se cortan en un mismo punto que, coincide con el punto de concurrencia de las diagonales.

186.—Por los extremos de tres aristas de un cubo que parten de un mismo vértice A se hace pasar un plano.

Demostrar que la sección resultante es un $\triangle$ equilátero y que la diagonal AA' es perpendicular al plano de sección. Determinar la posición del punto en que la diagonal corta la sección.

• **187.**—La altura de una pirámide recta regular triangular mide 8 m. y su arista basal es igual a $6\sqrt{3}$. ¿Cuánto mide su arista lateral?

• **188.**—En una pirámide recta regular triangular, 1º la arista basal $= 6\sqrt{3}$ m y la altura 4 m. Calcular la apotema lateral; 2º la arista lateral $= 12$ m y su apotema lateral $= 6\sqrt{3}$ m.

Calcular la apotema basal; 3º la arista basal $= 12\sqrt{3}$ y la apotema lateral $= 10$. Calcular la altura de la pirámide; 4º la arista lateral $= 2$ m y la altura $= 1{,}6$ m. Calcular la arista basal.

189.—La arista basal de una pirámide hexagonal regular mide 4 cm y su arista lateral mide 8 cm. ¿Qué ángulo forma esta última con la base?

190.—Si en los centros de las $\odot$s circunscritas a las caras laterales de un tetraedro regular se levantan las $\perp$s a los planos de las caras, demostrar que estas $\perp$s concurren en un punto que equidista de los vértices del tetraedro.

191.—Demostrar que el plano que pasa por los puntos medios de tres aristas no $\parallel$s y no concurrentes de un cubo corta al sólido según un hexágono regular.

II.—CUERPOS REDONDOS

§ 1.—*SU DIVISION. NOCIONES PRELIMINARES*

Cuerpos redondos son los que están limitados por superficies curvas o por superficies curvas juntamente con planas.

Los principales son: *el cilindro, el cono y la esfera.*

Suelen llamarse *sólidos de revolución*. En general, se llama **superficie de revolución** *la superficie engendrada por una línea que gira alrededor de un eje, llamado eje de revolución.*

La línea móvil es la *generatriz.*

Sólido de revolución es *el cuerpo engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje situado en el mismo plano.*

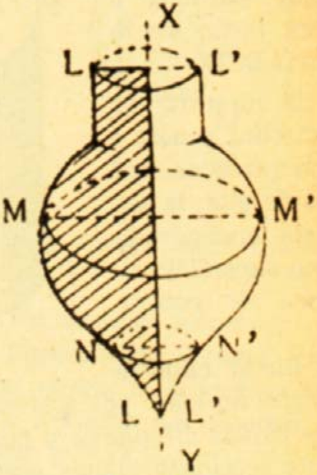


Fig. 353

NOTA.—En la Fig. 353 **XY** es la recta o eje; **LMN** es una línea situada en el plano del eje que, al girar en torno de él, engendra la superficie de revolución.

Cada punto de la línea **LMN**, **M** y **N**, por ej., genera una circunferencia cuyo plano es perpendicular a **XY**, y cuyo centro se encuentra sobre **XY**.

La superficie plana **XYLNM**, al girar en torno de **XY**, engendra un sólido de revolución; en este caso genera un trompo.

§ 2.—*EL CILINDRO DE REVOLUCION*

Se llama **superficie cilíndrica** *la engendrada por una línea recta llamada* **generatriz** *que, permaneciendo siempre paralela a sí misma, se mueve en torno de una curva fija llamada* **directriz**.

En la Fig. 354 la recta AA' se mueve siempre paralela a EF en torno de la curva ABCD.

Si la directriz es una circunferencia y la generatriz es ⊥ al plano de ella, la superficie engendrada se dice *superficie cilíndrica de revolución.*

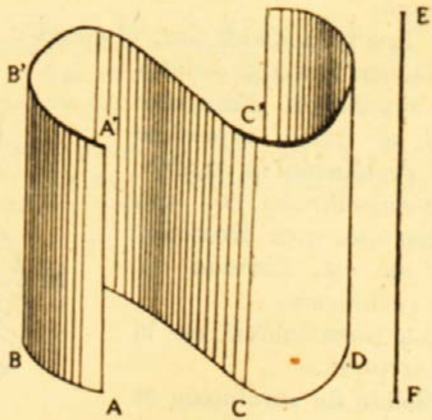


Fig. 354

Se llama **cilindro** *el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y dos secciones planas circulares y paralelas.*

Las secciones planas paralelas y circulares que limitan la superficie cilíndrica, son las *bases del cilindro.*

La recta que une los centros de los dos círculos basales, es el *eje del cilindro.*

El cilindro puede ser *recto* (1) *u oblicuo*, según que las generatrices sean o no perpendiculares a las bases.

---

(1) Tanto en los problemas como en el desarrollo de la materia, nos referiremos más especialmente, al cilindro recto.

Cilindro circular recto o cilindro de revolución, *es el cuerpo generado por la rotación o revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.*

En la Fig. 355 el lado **DB**, alrededor del cual gira el rectángulo, es a la vez *eje y altura* del cilindro.

El lado opuesto **CA** es la *generatriz* que genera la *superficie lateral del cilindro o superficie cilíndrica*.

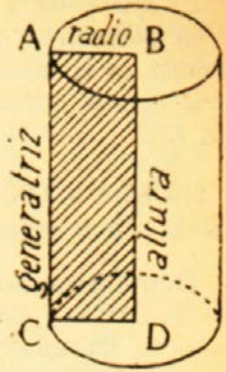


Fig. 355

En este cuerpo, todas las generatrices son iguales y paralelas entre sí y con el eje, y perpendicularmente a los círculos basales.

Los lados BA y DC generan los *círculos basales.*

En resumen: **el cilindro está limitado por 3 caras: dos planas, los círculos basales, y una curva, la superficie lateral, llamada superficie cilíndrica o manto del cilindro.**

Un cilindro se genera, también, *por el movimiento de un círculo que se desplaza paralelamente a sí mismo, moviéndose su centro sobre la normal.*

Considerando el cilindro como un prisma en estado límite, se puede definir así:

Cilindro *es un prisma de una infinidad de caras laterales infinitamente angostas.*

Según esta última definición, se puede aplicar al cilindro todos los teoremas referentes al prisma que son independientes del número de caras laterales.

L. G. 27.—*El L. G. de todos los puntos del espacio, que se encuentran a una distancia dada* **r**, *de una recta fija dada, es la superficie cilíndrica de revolución, cuya directriz es una circunferencia de radio* **r** *y cuyo eje es la recta fija.*

TEOREMA CX.—**Toda sección plana de un cilindro paralela a una generatriz o al eje, es un paralelógramo.**

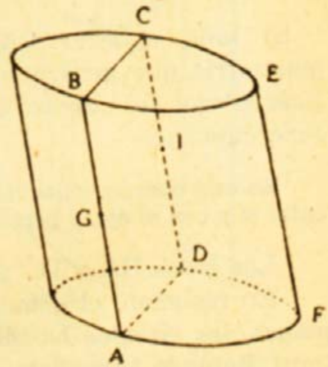


Fig. 356

Demostración.— (Fig. 356).—Si **ADCB** ‖ EF, las generatrices trazadas por un punto cualquiera **G** o **I** de las intersecciones **BA** y **CD**, respectivamente, coinciden con el plano de la sección, por ser paralelas con **EF**.

Las generatrices trazadas por **G** e **I**, pues, pertenecen al mismo tiempo a la sección y a la superficie cilíndrica y como son paralelas e iguales, el cuadrilátero **ADCB** es un **paralelógramo,** (Un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos #s es un #).

Si la sección plana pasa por el eje del cilindro, se llama *sección central.*

Una sección central perpendicular a los círculos basales, se denomina *paralelógramo característico* del cilindro.

Todas las secciones centrales de un cilindro recto son rectángulos congruentes. ¿Por qué?

Llámase **tronco de cilindro** *a la parte del cilindro comprendida entre una base y una sección oblicua a ésta.*

§ 3.—EL CONO

Llámase **superficie cónica** *la que engendra una recta que, pasando por un punto fijo* **S**, *se mueve en torno de una curva fija llamada* **directriz.** (Fig. 357).

La recta móvil AA' que genera la superficie cónica, se llama **generatriz.** (Fig. 357).

La curva **ABC** es la *directriz.*

El punto fijo S se llama *cúspide o vértice.*

La *superficie cónica* se compone de dos partes u *hojas* o *mantos* opuestos por el vértice.

Si la directriz es una *circunferencia*, la recta que pasa por su centro y por la cúspide, es el *eje* de la superficie cónica.

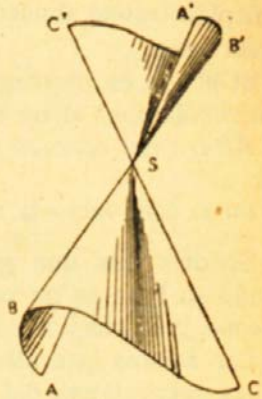


Fig. 357

Si la superficie cónica, cuya directriz es una circunferencia, se corta por un plano perpendicular al eje, el cuerpo que resulta es el *cono de revolución o cono recto.*

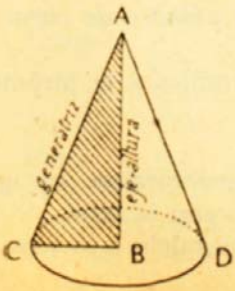


Fig. 358

Cono de revolución *es el sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos como eje.*

La hipotenusa **AC** es la *generatriz.* (Fig. 358).

Durante el movimiento, este lado genera la *superficie la-*

teral o superficie cónica, que también se suele llamar *manto del cono.*

El cateto **BC** es el *radio* que genera el círculo que sirve de *base* al cono.

La recta **BA** que une el centro del círculo basal con la cúspide (cateto alrededor del cual gira el △ rectáng.), es el *eje* del cono.

Si el eje es perpendicular a la base, el cono es *recto o de revolución;* si no es perpendicular a ella, es *oblicuo.*

Altura del cono es la perpendicular de la cúspide a la base.

En el cono recto la altura coincide con el eje.

Se dice que una **pirámide** está **inscrita** en un cono cuando su base es un polígono inscrito en el círculo basal del cono y su cúspide coincide con la del cono.

Las aristas laterales de la pirámide inscrita coinciden con las generatrices del cono.

Como el círculo se puede considerar como un polígono regular de una infinidad de lados, el cono se puede considerar como una **pirámide en estado límite,** pudiéndose definir:

Cono *es una pirámide de infinito número de caras laterales infinitamente angostas.*

Los teoremas y propiedades referentes a la pirámide, son aplicables al cono.

Se puede, pues, enunciar:

1) **En un cono recto, todas las generatrices son iguales entre sí y forman ángulos iguales con la base.**

2) **Toda sección plana del cono paralela a la base, es un círculo.**

Sea la Fig. 359.

Dem.) Se trazan las generatrices **CA** y **CB** y el eje **CO.**

El eje corta la sección en **O'.**

Por **CA** y **CB** se hacen pasar dos planos de modo que ambos pasen por CO.

Estos planos cortan la sección según las rectas O'D y O'E.

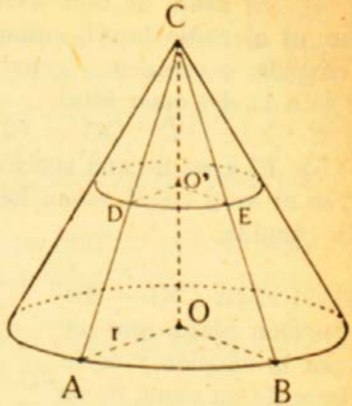


Fig. 359

Resulta: O'D || OA (Las secciones son ||s)

O'E || OB (Id.)

También:

$$\frac{O'D}{OA} = \frac{CO'}{CO}$$

$$\frac{O'E}{OB} = \frac{CO'}{CO}$$

Luego:

$$\frac{O'D}{OA} = \frac{O'E}{OB}$$

Pero OA = OB (radios de la base)

Entonces: O'D = O'E

Luego: la sección que pasa por O' es un círculo. (Tiene los radios iguales).

3) **El centro de cualquier sección plana || a la base de un cono, está situada en el eje del cono.**

4) **El radio de una sección plana || a la base de un cono, es al radio basal, como sus distancias respectivas a la cúspide, o como una generatriz del cono complementario es a la del cono total.**

$r' : r = O'C : OC = CD : CA$ (Fig. 359).

5) **El área de una sección plana || a la base de un cono, es al área basal, como los cuadrados de sus distancias a la cúspide.**

TEOREMA CXI.— **Toda sección plana que pasa por la cúspide y corta la base de un cono, es un triángulo.**

Dem.) La sección CAB corta la base según la recta AB. (Fig. 360).

Las generatrices CA y CB están situadas en el plano de la sección, porque tienen dos puntos comunes con él: C y A de una y C y B, de la otra.

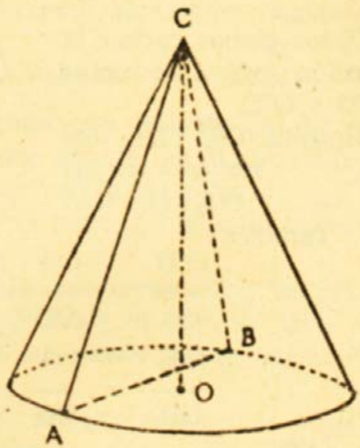


Fig. 360

Luego la tesis es verdadera.

COROLARIO.—*Toda sección plana que pasa por la cúspide y el eje de un cono recto es un triángulo isósceles.*

La sección plana que pasa por la cúspide y por el eje de un cono, se llama *sección central.*

El △ que resulta se llama △ *característico del cono.*

Resumiendo se puede enunciar que:

Si un cono recto de base circular se corta por un plano, pueden resultar las secciones siguientes:

a) Un **círculo,** cuando el plano es paralelo a la base;

b) Un **triángulo isósceles,** si dicho plano pasa por el eje.

c) Una **elipse,** si el plano es oblicuo con respecto a la base y corta a todas las generatrices sin cortar a la base;

d) Una **hipérbola,** cuando el plano es perpendicular a la base y no pasa por el eje.

e) Una **parábola,** cuando es paralela a una generatriz.

§ 4.—*CONOS SEMEJANTES*

Una sección MN paralela a la base AB de un cono SAB determina un segundo cono SMN semejante al primero. Fig. 361.

De modo general, **dos conos son semejantes cuando los △s rectángulos generadores, son semejantes.**

Las áreas laterales o totales de dos conos se-

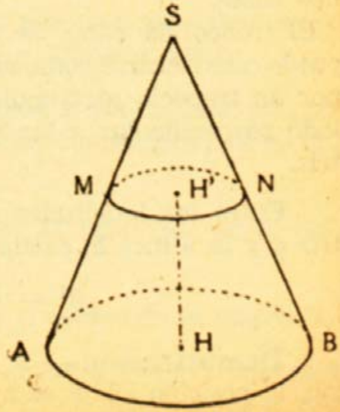


Fig. 361

mejantes son entre sí como los cuadrados de las alturas, o de los radios, o de las generatrices.

Los volúmenes de dos conos semejantes son entre sí como los cubos de las alturas, o de los radios, o de las generatrices.

§ 5.—*CONO TRUNCADO*

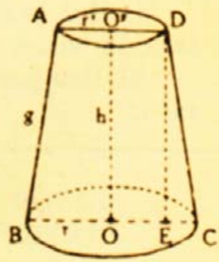


Fig. 362

Tronco de cono de revolución o cono truncado recto de bases paralelas, *es la porción de cono comprendida entre la base y una sección paralela a esta base*. (Fig. 362).

Las bases del tronco son dos círculos y la altura es la distancia de las dos bases.

El tronco de cono de revolución puede considerarse como engendrado por un trapecio rectángulo ABOO' que gira alrededor del lado perpendicular a las bases. El lado AB es la generatriz.

Entre las longitudes r y r' de los radios, la generatriz **g** y la altura **h**, existe la siguiente relación:

$$g^2 = h^2 + (r - r')^2.$$

Demostración.—Se traslada la altura "**h**" hasta ocupar la posición DE y se aplica el teor. de Pitágoras en el △ rectángulo DEC. Fig. 362.

Cono complementario, es la parte que falta al tronco para completar el cono.

Un tronco de pirámide está inscrito en un tronco de cono cuando sus bases son polígonos inscritos en las bases del tronco de cono y sus aristas laterales se confunden con las generatrices del tronco de cono.

El tronco de cono recto se puede considerar como un tronco de pirámide en estado límite.

La sección central de un tronco de cono recto es un trapecio isósceles, cuyas bases son 2r y 2r' respectivamente. El lado es la generatriz del tronco.

§ 6.—*LA ESFERA*

Esfera *es el sólido limitado por una superficie cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro.*

Se puede también decir que es el sólido generado por la rotación completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.

La semicircunferencia genera la superficie de la esfera, llamada **superficie esférica**.

El centro del semicírculo, es el **centro de la esfera.**

El radio del semicírculo, es el **radio** de la esfera: **es la recta que une un punto de la superficie esférica con el centro.** Se designa por R.

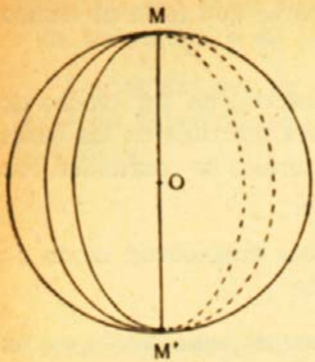


Fig. 363

Diámetro de una esfera, es la recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de la superficie esférica. Es igual a 2R.

La superficie esférica es superficie cerrada. Divide al espacio en dos regiones:

1º La región **interior** cuyos puntos están a una distancia del centro menor que el radio.

2º La región **exterior** cuyos puntos están a una distancia del centro, mayor que el radio.

Todos los puntos que se hallan sobre la superficie esférica están a una distancia **R** del centro O.

L. G. 28.—*La superficie esférica es el L. G. de todos los puntos del espacio que se encuentran a la distancia del radio R, de un punto del espacio.*

TEOREMA CXII.—**Toda sección plana de una esfera es un círculo.**

Sea la sección EDF (Fig. 364).

Tes.) Sección EDF es un círculo.

Dem.) Se traza OC⊥secc. EDF.

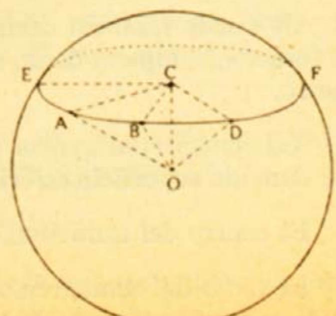


Fig. 364

Se unen C y O con tres puntos arbitrarios A, B y D de la curva de la sección.

$\triangle OCA \cong \triangle OCB \cong ODC$.

Tienen OC lado común.

y $OA = OB = OD$ (Por ser radios de la esfera).

$\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO = \sphericalangle DCO$ (Por ser $\sphericalangle$s rectos)

Luego $CA = CB = CD$.

y Secc EDF es un círculo. (Cualquiera de los puntos de la curva de la sec. equid. de **C**)

COROLARIOS.—1. *El centro de una sección plana de la esfera es el pie de la $\perp$ bajada del centro de la esfera a la sección.*

2. *La recta que une el centro de una sección plana con el centro de la esfera es $\perp$ a la sección.*

3. *La $\perp$ levantada en el centro de una sección plana, pasa por el centro de la esfera.*

Cálculo del radio **r** de la sección plana.

Sea la Fig. 364.

$OA = R$ (radio de la esfera).

$OC = d$ (distancia de la Secc. al centro).

$CA = r$ (radio de la sección circular).

$\triangle OCA$ es $\triangle$ rectángulo en C.

Luego: $r = \sqrt{\mathbf{R}^2 - \mathbf{d}^2}$. (Teor. Particular de Pitágoras).

Polos de una sección plana *de una esfera son los extremos del diámetro perpendicular a esta sección.*

P y P' son los polos de la sección plana ACB (Fig. 365). Son también los polos de la esfera.

Los polos de la sección circular equidistan de todos los puntos de su circunferencia.

Círculo máximo de una esfera *es la sección plana que pasa por el centro.* PCP' y EE' son ⊙ máximos.

Entre los círculos máximos se distinguen los *círculos meridianos* y el *ecuador*.

Meridiano es el círculo máximo que pasa por dos puntos diametralmente opuestos considerados como polos. PBE'P' y PCP', son meridianos Fig. 365).

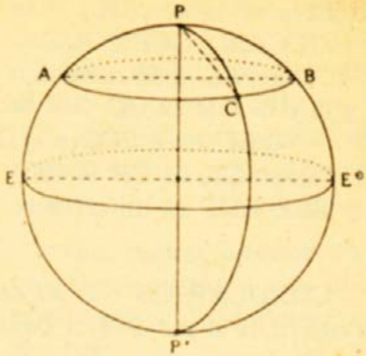


Fig. 365

Ecuador es el círculo máximo que está a igual distancia de los polos. Es ⊥ a todos los planos meridianos. EE' es el ecuador, siendo los polos P y P'. (Fig. 365).

Círculo menor de una esfera es la sección plana que no pasa por el centro de la esfera. Ej.: Círculo ACB, (Fig. 365).

Se llaman **paralelos los círculos menores paralelos al** ecuador. Ej.: ACB. (Fig. 365).

Se llama **distancia polar**, la distancia que existe desde un polo a un punto de la circunferencia de una sección plana. Se mide sobre la cuerda o su arco de circunf. máxima que une ambos puntos. **CP** es la distancia polar del punto **C**. (Fig. 365).

TEOREMA CXIII.—**La distancia polar de una sección plana, es igual para todos los puntos de su circunferencia.**

Sean A, B y D tres puntos de la circunferencia de la sec. plana ADB. (Fig. 366).

Tes.) PA=PB=PD.

Dem.) Se une C con A, B y D.

△APC≅△BPC≅ △DPC

Tienen:

PC común.

CA=CB=CD (radios de la sección)

∢ACP=∢BCP=∢DCP (Por ser rectos)

Luego: PA=PB=PD.

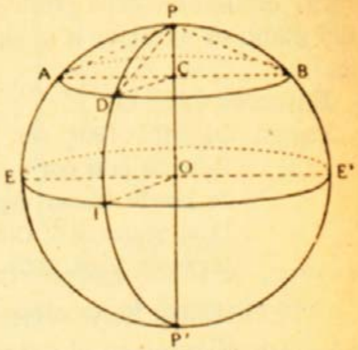


Fig. 366

COROLARIO.—*Los arcos correspondientes a una misma distancia polar, son iguales.* En la Fig. 366, arc AP=arc DP=arc BP. (Por corresponder a cuerdas iguales de ⨀s máximas de una misma esfera).

El arc. **AP** se llama **radio esférico.**

PLANO TANGENTE.—*Un plano es tangente a una esfera, cuando tiene con ella un solo punto común.*

TEOREMA XCIV.—**Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de contacto.**

Hip.) Plano MN tangente (Fig. 367).

Tes.) OI⊥MN.

Dem.) Siendo I el único punto común al plano y a la esfera, cualquier otro punto K del plano es exterior a la esfera.

Entonces OK>OI

Luego OI⊥MN (Por ser OI la recta más corta que se puede trazar desde O al plano MN. Corolario de Teor. XC).

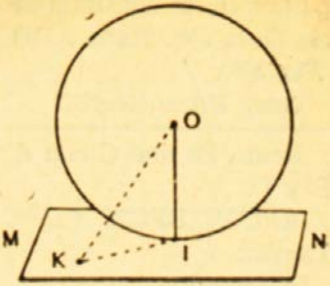


Fig. 367

TEOREMA XCV.—(Recíproco del XVIV).—**Todo plano perpendicular en el extremo de un radio de una esfera, es tangente a esta esfera.**

Hip.) OI⊥MN en I (Fig. 367).

Tes) I único punto de contacto con MN.

Demostración.—Cualquier otra recta OK, por ejemplo, es oblicua al plano y, por lo tanto, mayor que OI. Luego, K está fuera de la esfera.

El plano MN no tiene, pues, más que el punto I común con la esfera.

Luego MN es tangente a la esfera.

Se llama *normal a la esfera en un punto dado, la perpendicular al plano tangente en dicho punto, o el radio de la esfera que termina en ese punto.*

Una recta es **tangente** a una esfera cuando tiene con ella un solo punto común, llamado punto de contacto.

TEOREMA CXVI.—**Toda recta perpendicular al radio de una esfera en su extremo, es tangente a la superficie esférica.**

Demostración.— (Fig. 368).— La recta AT perpendicular en el extremo del radio OA está en el plano perpendicular a este radio en su extremo A.

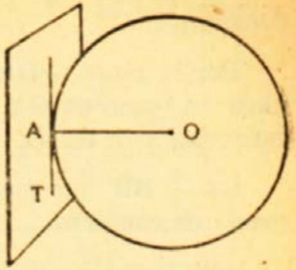


Fig. 368

Ahora bien, este plano es tangente a la esfera.

Luego la recta dada y la esfera no tendrán más punto común que el punto A.

TEOREMA (recíproco del CXVI).—**Toda recta tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de contacto.**

L. G. 29.—*El L. G. de todas las tangentes a una esfera en un punto dado A de ella, es el plano tangente a dicha esfera en el punto dado.*

§ 7.—*CONO Y CILINDRO CIRCUNSCRITOS A UNA ESFERA*

L. G. 30.— *El L. G. de las tangentes trazadas a una esfera O, desde un punto situado fuera A, es una superficie cónica de revolución.*

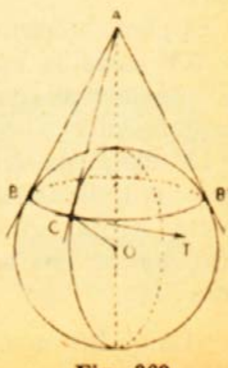


Fig. 369

Dem.) Desde el punto A se traza una tangente cualquiera AC, a la esfera.

Sea C punto de contacto. (Fig. 369).

El plano determinado por el centro O y la tangente AC, corta a la esfera según un ⊙ máximo, al cual es tangente la recta AC.

El △ rect. **OAC** tiene la hipotenusa **OA** y el cateto **OC** constantes.

Por lo tanto ∢**OAC** es constante y la tangente **AC** al girar en torno de **OA** engendra una superficie cónica circunscrita a la esfera.

La ⊙ **BB'** que pasa por el punto C se llama **circunferencia de contacto.**

L. G. 31.—*El L. G. de las tangentes trazadas a una esfera O, paralelamente a una dirección dada, es una superficie cilíndrica de revolución.*

Demostración.—Sea XY un diámetro || a una dirección dada. (Fig. 370).

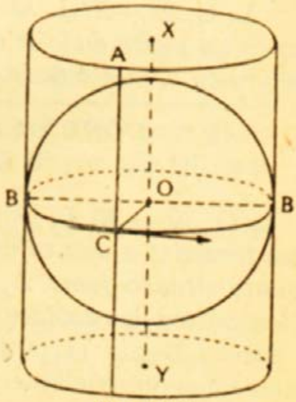


Fig. 370

Se traza paralelamente a XY una tangente cualquiera AC a la esfera, siendo **C** su punto de contacto.

El plano determinado por **AC** y **XY** corta la esfera según un ⊙ máximo al cual la recta **AC** es tangente.

La distancia entre AC y XY es = al radio **OC** de la esfera. La recta AC, al girar en torno de XY, genera una superficie cilíndrica circunscrita a la esfera.

La ⊙ BB' que pasa por C se llama **circunferencia de contacto**.

Zona esférica.—*Llámase zona esférica la parte de la superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos.*

Se distinguen: la zona de **dos bases:** Ej.: ABCD (Fig. 372) y la zona de **una base o casquete esférico.** Ej.: EGF. (Fig. 372).

La zona tiene una sola base cuando uno de los planos es tangente a la esfera.

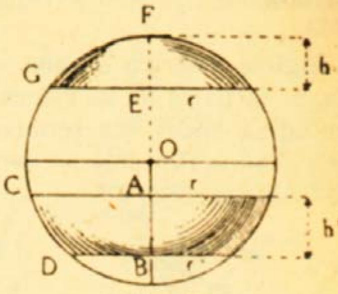


Fig. 371

Altura de la zona *es la distancia entre los planos paralelos que determina la zona.* En la Fig. 371, **AB=h' y EF=h** representan las alturas de las zonas respectivas.

La zona se puede considerar engendrada por la rotación de un arco CD de un círculo máximo, alrededor de un diámetro FB. (Fig. 371).

Segmento esférico *es la parte de la esfera comprendida entre una zona esférica y sus bases.* (Fig. 372).

El segmento no es superficie, es un sólido, un volumen.

Puede estar limitado por **dos círculos paralelos** y por la **zona** que ellos determinan. Ej.: ABCD, o por un **círculo** y un **casquete esférico.** Ej.: EFG. (Fig. 372).

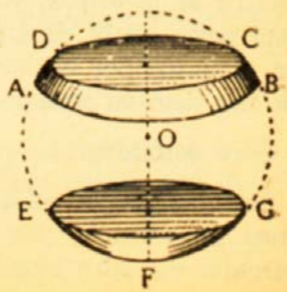


Fig. 372

Huso esférico es la parte de la superficie esférica comprendida entre dos semicírculos meridianos. Ej.: el huso ABDIA. (Fig. 373).

Inglete esférico o cuña esférica, es la parte de la esfera comprendida entre dos semicírculos meridianos. (Un gajo de naranja). Ej.: ABDCA. (Fig. 373).

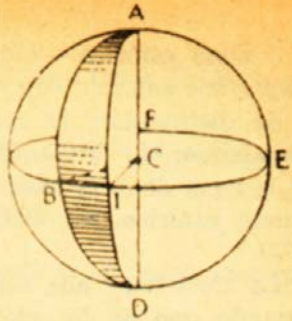


Fig. 373

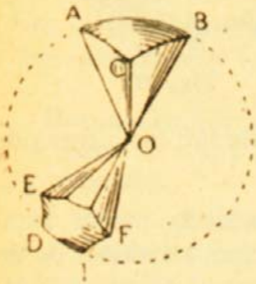


Fig. 374

Pirámide esférica es la parte de la esfera comprendida entre los planos de un ángulo poliedro, cuyo vértice se halla en el centro de la esfera. (Fig. 374).

La base de la pirámide puede ser un polígono cualquiera: triángulo, cuadrilátero, hexágono esférico, etc.

Sector esférico, es un cono cuyo vértice está en el centro de la esfera, y su base es una parte de la superficie esférica, limitada por la circunferencia de una sección plana. (Fig. 375).

Otra definición:

Se llama **sector esférico** el volumen engendrado por un **sector circular** que gira alrededor de un diámetro situado en su plano.

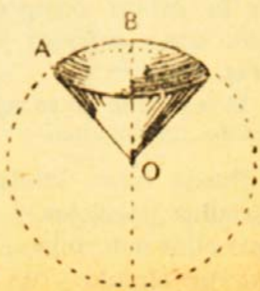


Fig. 375

PROBLEMA 39.— *Dados cuatro puntos* **A, B, C** *y* **D,** *no situados en un mismo plano, determinar el centro y el radio de la esfera sobre cuya superficie se hallan situados dichos puntos.*

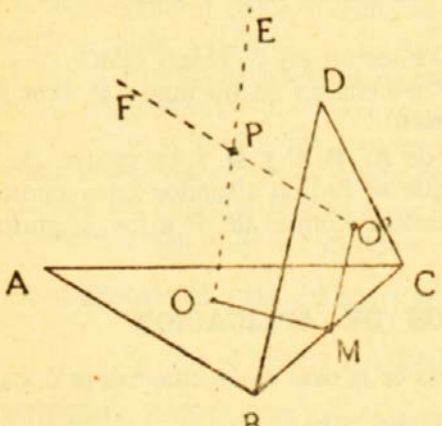


Fig. 376

Sea la Fig. 376.

Se unen los puntos A, B y C. Resulta el △ o plano **ABC.**

También se unen B, C y D. Se tiene el △**BCD.**

Los dos planos se cortan según la recta **BC**. En O y O', centros de las ⊙s circunscritas ABC y BCD se levantan las ⊥s OE y O'F a los respectivos planos.

OE es el L. G. de los puntos del espacio que equidistan de A, B y C.

O'F = L. G. de los puntos que equidistan de B, C y D.

En efecto, si se une cualquier punto de OE con A, B y C, resultan oblicuas que se apartan igualmente del pie O de la ⊥.

Lo mismo sucede con cualquier punto de O'F.

Se marca el punto medio M de BC.

Se une M con O y O'.

Resulta: $\left.\begin{array}{l} OM \perp BC \\ O'M \perp BC \end{array}\right\}$ MO y MO' son simetrales de BC.

Plano **OMO'⊥BC.** (Teor. LXXXVII).

Por tanto OMO'⊥a los planos ABC y BCD. (Estos planos contienen BC).

Entonces: OE y O'F están en el plano OMO'.

También OE y O'F concurren en un punto P. (Por ser ⊥s a dos rectas que se cortan).

Luego **P** equidista de **A, B, C y D** y es centro de la superficie esférica en que se hallan situados tales puntos.

El radio es la distancia común de P a los 4 puntos dados.

EJERCICIOS DE APLICACION

* **192.**—La circunferencia de la base de un cilindros es C. Calcúlese el valor del radio.

* **193.**—¿Cuánto mide la generatriz g de un cono recto, si el radio de la base = 6 m. y la altura = 8 m?

* **194.**—Calcular la altura de un cono recto cuya generatriz mide 10 m y el radio basal es igual a $5\sqrt{3}$ m.

195.—Calcular el radio basal de un cono recto cuya generatriz mide 20 m y su altura 16 m.

196.—Escriba la fórmula que permita hallar:

1º la generatriz g de un cono recto en función de su altura h y de su radio basal r.

2º h en función de g y r.

3º r en función de g y r.

197.—¿Cuál es la altura de un cono recto cuya generatriz es 15 y la circunferencia basal = 18π?

* **198.**—¿Cuál es la altura de un tronco de cono recto cuyos radios basales miden respectivamente r=13 m; r'=7 m y la generatriz 10 m.

CAPITULO XXII

DETERMINACION DE LAS AREAS DE LOS CUERPOS GEOMETRICOS

La regla general para calcular el área de los cuerpos geométricos es la siguiente:

a) *Si el cuerpo es poliedro se calcula el área de cada uno de los polígonos o caras que forman su superficie, según las reglas establecidas por la Geometría plana, y, enseguida se suman las áreas obtenidas.*

b) *Para los cuerpos redondos se aplican, generalmente, las mismas reglas de los cuerpos poliedros.*

I.—AREA DE LOS CUERPOS POLIEDROS

§ *1.—AREA DEL PRISMA*

TEOREMA CXVII.—**El área lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura** (o arista lateral) **por el perímetro de una de las bases.** (Fig. 377).

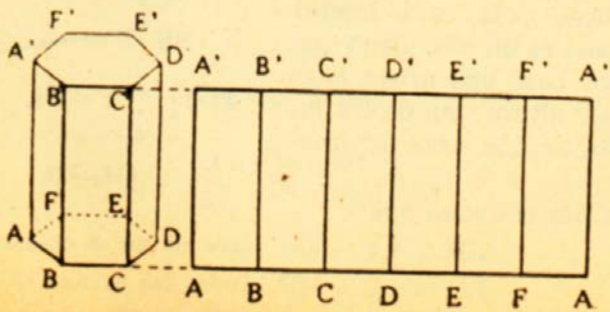


Fig. 377

Demostración.—Al desarrollar la superficie lateral, resulta un rectángulo cuyos lados contiguos son AA'=alt. del prisma=**h.**

y AA = AB+BC+CD+DE+EF+FA = perímetro de una de las bases = 2s.

Luego área lat. pr. recto=área rect. AAA'A'=h . 2s.

$$\boxed{S_{1\ \text{pr. recto}} = \mathbf{h} \cdot 2s}$$

TEOREMA CXVIII.—**El área lateral de un prisma oblicuo es igual al producto de una arista lateral por el perímetro de una sección recta.**

Sea el prisma oblicuo B'—ABCD. (Fig. 378).

Hip.) EF es sección recta.

Tes.) $S_1 = \overline{AA'}\ (\overline{EM} + \overline{MF} + \overline{FN} + \overline{NE})$

Dem.) AA'=BB'=CC'=DD'

Las aristas laterales son ⊥s a la sección recta y por lo tanto a los lados de dicha sección.

Entonces cada cara lateral del prisma es un # oblicuo que tiene por base una arista lateral y por altura uno de los lados de la sección recta del prisma.

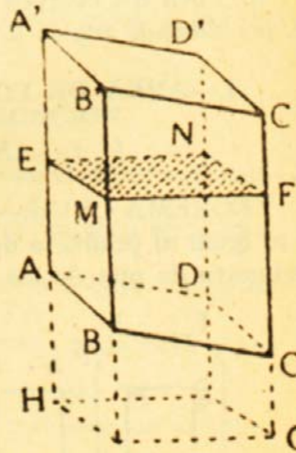


Fig. 378

Resulta entonces que:

$AB' = \overline{AA'} \cdot \overline{EM}$ (área de un # oblicuo).

$BC' = \overline{AA'} \cdot \overline{MF}$ (Todas las aristas laterales son =s entre sí)

$$CD' = AA' \cdot FN$$
$$DA' = AA' \cdot NE$$

$$S_{lat.} = AB' + BC' + CD' + DA' = \overline{AA'}(\overline{EM} + \overline{MF} + \overline{FN} + \overline{NE})$$

(Q. E. D.)

COROLARIOS: 1º.—*Tanto en el prisma recto como en el oblicuo, el área total se obtiene añadiendo al área lateral el área de las dos bases.*

$$\boxed{S_{tot.\,pr.} = h \cdot 2s + 2B}$$

2º.—*En el cubo, designando por* **a** *la arista, se tiene:*

$$\boxed{S_{tot.} = 6a^2}$$

PROBLEMA 40.—*Calcular el área total de un prisma recto hexagonal cuya arista basal es* **a** *y su altura* **h**.

Solución.—

Se sabe que: $S_{tot.\,pr.} = h \cdot 2s + 2B.$

$B = s \cdot \rho$ (s=semiperímetro y ρ=apotema del pol. reg.)

$$B = 3a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$$

(ρ=alt. de un Δ fund. pág. 374)

$$S_{tot.} = h \cdot 6a + 2 \cdot \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} = 6ah + 3a^2\sqrt{3}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

199.—Calcular el área de un cubo cuya arista mide 5 m.

• **200.**—¿Cuál es la área total de un cubo en que la diagonal de una de sus caras es: 1º $3\sqrt{a}$?; 2º m?

• **201.**—¿Cuál es el área total de un cubo cuya diagonal mide 1º) $4\sqrt{3}$?; 2º) d.?

• **202.**—Si el área total de un cubo es 294 m^2 ¿Cuánto mide su arista?

203.—¿Cuánto debe medir la arista de un cubo para que su área sea la mitad de la de otro que tiene 16 m de arista?

• **204.**—Si el área total de un cubo es 108 m^2. ¿Cuánto mide la diagonal de una cara?

• **205.**—Si el área total de un cubo es 500 m^2 ¿Cuál es la longitud de una de sus diagonales?

206.—¿Cuál es el área total de un paralelepípedo rectangular cuyas aristas concurrentes a un mismo vértice miden 4 m, 8 m, 5 m?

207.—El área total de un paralelepípedo rectangular es equivalente a la de un cubo. Si el paralelepípedo mide 40,2 cm de largo, 12 cm de ancho y 8 cm de alto, ¿cuánto mide una de las diagonales del cubo?

208.—El área total de un paralelepípedo de base cuadrada es 80 m^2; su altura es 3 m. Calcular el lado de la base.

209.—El área total de un prisma recto de base rectangular es 100,2 m^2 y su altura es 2 m. Las dimensiones de la base son entre sí como 2 : 3. Calcular la longitud de una de las diagonales.

210.—Calcular el lado de la base de un prisma hexagonal regular, cuya área total es igual a $648+108\sqrt{3}$ y su altura al triple del lado de la base.

211.—El área lateral de un prisma recto de base pentagonal regular es 104 m^2. Calcular su altura sabiendo que uno de los lados de la base es igual a 2,60 m.

212.—El área lateral de un paralelepípedo rectangular es 63 m^2 y su altura 2 m. Calcular el perímetro de la base.

• **213.**—Las tres aristas que concurren a un mismo vértice de un paralelepípedo rectangular suman 17 m.

Calcúlese cuánto mide cada una de ellas, sabiendo que la diagonal de una de sus bases es 10 m y la superficie total del paralelepípedo es 180 m^2.

214.—Calcular el área total de un paralelepípedo recto de base rombal, sabiendo que uno de los ángulos de la base mide 60°, la arista basal 4 m y la altura 5 m.

215.—La base de un prisma recto regular hexagonal se halla inscrita en una $\odot$ de 12 cm. de radio. Calcular el área total del prisma si su arista lateral mide 80 cm.

216.—Calcular el área total de un paralelepípedo recto de base rectangular cuyas aristas concurrentes a un mismo vértice son entre si como 1 : 3 : 5 y cuya diagonal es igual a $4\sqrt{35}$ cm.

• **217.**—La base de un prisma recto es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia cuyo radio es 3 m. Calcúlese la altura, sabiendo que su área lateral es $135\sqrt{3}$ m^2.

218.—¿Cuál es el área total de un prisma octogonal regular, si la arista basal mide 4 m y su altura 6 m?

219.—En un prisma oblicuo, la proyección de la arista lateral sobre la base es 3 m; la altura es 4 m. Calcular el perímetro de una sección recta si el área lateral del prisma es igual a 60 m^2.

220.—La superficie de un prisma es 22,04 m^2. ¿Cuál es la de un prisma semejante cuyas dimensiones son la mitad de las del primero?

§ 2.—*AREA DE UNA PIRAMIDE REGULAR*

TEOREMA CXIX.—**El área lateral de una pirámide regular es igual al producto del semiperímetro de la base, por la apotema lateral.**

Sea la pirámide P—ABCD. (Fig. 379).

MP$=\rho=$apotema lateral.

Tes.) $S = s \cdot \rho$

Dem.) Se calcula el área de cada una de las caras laterales y se suman las áreas, sacando ρ en factor común.

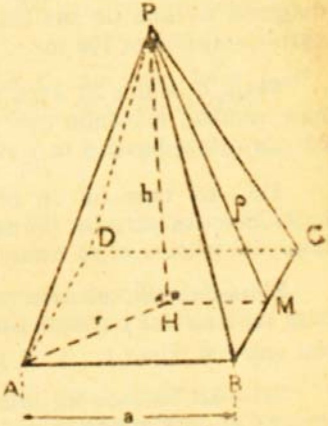


Fig. 379

Resulta:

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} AB \cdot \rho = \frac{1}{2} a \,\rho$$

$$\triangle BCP = \frac{1}{2} BC \cdot \rho = \frac{1}{2} b \,\rho$$

$$\triangle CDP = \frac{1}{2} CD \cdot \rho = \frac{1}{2} c \,\rho$$

$$\triangle ADP = \frac{1}{2} AD \cdot \rho = \frac{1}{2} d \,\rho$$

$$\triangle ABP + \triangle BCP \; \triangle CDP + \triangle ADP =$$

$$\left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d\right) \rho = s \cdot \rho$$

Luego $S_{1 \text{ pir. reg.}} = s \cdot \rho$

En forma breve se puede demostrar así:

Designando por **l** el lado de la base y por **n** el número de lados, se tiene:

$$S \text{ de } 1 \triangle \text{ lat.} = \frac{1}{2} l \cdot \rho$$

$$S_{\text{lat.}} = \frac{1}{2} l \rho \cdot n \text{ o } \frac{1}{2} n l \rho = s \cdot \rho$$

Para obtener el área total de la pirámide, se añade al área lateral, el área de la base.

$$\boxed{S_{\text{lat. pi.}} = \frac{1}{2} n l \rho = s \cdot \rho}$$

$$\boxed{\mathbf{S}_{\text{tot. pi.}} = \mathbf{s}\, \rho + \mathbf{B}}$$

§ *3.—AREA DEL TRONCO DE PIRAMIDE REGULAR*

TEOREMA CXX.—**El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto de la semi suma de los perímetros basales, por la apotema lateral.**

Sea el tronco
ABCD · A'B'C'D'. Fig. 380
EF $=\rho=$ apotema lateral.
Tes.) $S_{lat.} = (s+s')\ \rho$

Dem.) Todas las caras laterales son trapecios isósceles congruentes.

Designando por **l** y **l'** los lados de las bases y por **2s** y **2s'** los perímetros de las mismas, resulta:

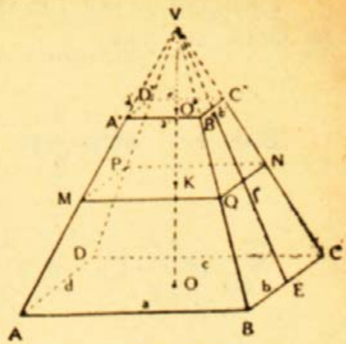


Fig. 380

$$\textbf{Area de 1 cara lat.} = \frac{1}{2}\ (l+l')\ \rho$$

$$\textbf{Area de n caras lat.} = n \cdot \frac{1}{2}\ (l+l')\ \rho$$

$$\textbf{Area de n caras lat.} = (\frac{1}{2}nl+\frac{1}{2}nl')\ \rho$$ (Haciendo el producto de $\frac{1}{2}$ n por el paréntesis)

Luego:

$$\boxed{S_{lat.} = (s+s')\ \rho}$$

$$\boxed{S_{tot.\,tr.\,pi} = (s+s')\ \rho+B+B'}$$

OBSERVACION.—En la Fig. 380, MQNP es una sección media paralela a las bases del tronco de pirámide. Es fácil probar que el perímetro de esta sección es igual a la semi suma de los perímetros basales. Demuéstrese.

Por lo tanto el teorema CXX se podría enunciar como sigue:

"El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al perímetro de la sección media paralela a las bases por la apotema lateral del tronco".

$$\boxed{S_{\text{lat. tr. pi.}} = s_m \cdot \rho}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

* **221.**—La arista basal de una pirámide triangular regular es 5 m y la apotema lateral 4,7 m. Calcular la superficie lateral.

* **222.**—Calcular el área total de una pirámide triangular regular cuya arista basal mide 12 m. y la arista lateral 10 m.

* **223.**—La arista basal de una pirámide de base cuadrada es 6 m y la altura 4 m. Calcular la superficie total.

224.—En una pirámide recta regular de base pentagonal, las aristas laterales miden 9 m y la arista basal 10,8 m. ¿Cuál es el área lateral del sólido?

* **225.**—Cada arista lateral de una pirámide regular hexagonal mide 5 m; el radio **r** de la base es 8 m. Calcular 1º el área lateral; 2º el área total.

* **226.**—Calcular el área total de un tetraedro regular en función 1º, de su arista cuya longitud es **a**; 2º, de su altura **h**; 3º, de su apotema lateral ρ.

227.—La altura de una pirámide regular hexagonal mide 8 m y la arista basal 4 m. ¿Cuál es el área total de la pirámide?

228.—El área lateral de una pirámide regular pentagonal es 77,05 m^2; la apotema lateral es 6,70 m. ¿Cuál es el valor de la arista basal?

* **229.**—El área total de un tetraedro regular es $36\sqrt{3}$ m^2. Calcular: 1º, la longitud de una de sus aristas; 2º, su altura.

230.—Calcular el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada cuya arista lateral, con una inclinación de 30° sobre la base, mide 8 m.

231.—Calcular el área total de una pirámide cuadrangular recta, cuya arista basal mide 22,20 m y la altura 14,80 m.

232.—Calcular la altura de una pirámide hexagonal regular, sabiendo que la arista basal es 3 y que su superficie lateral es seis veces la superficie de la base.

* **233.**—Calcular la superficie lateral de un tronco de pirámide de bases cuadradas, si la arista basal superior es 5; la inferior 8 y la apotema lateral 4.

234.—La arista lateral de un tronco de pirámide de base hexagonal regular es 4. Las aristas basales son 12 y 8 respectivamente. Calcular el área total.

* **235.**—¿Cuál es el área de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas aristas basales miden respectivamente 4 m y 2 m y la altura 4 m?

236.—Un tronco de pirámide regular, de bases cuadradas. tiene 4 m de altura y las aristas basales son 3 m y 5 m. Calcular: 1º, la longitud de las aristas laterales de la pirámide completa; 2º, la apotema lateral del tronco.

237.—Un tronco de pirámide recta tiene por bases dos rectángulos cuyas dimensiones son respectivamente 5 y 9; y 15 y 27. La altura del tronco es 24. ¿Cuál es el área total?

II.—AREA DE LOS CUERPOS REDONDOS

§ 4.—*AREA DEL CILINDRO*

TEOREMA CXXI.—**El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la circunferencia de una de sus bases por la generatriz.**

Demostración.— El cilindro de revolución es un prisma recto de infinidad de caras laterales en que la circunferencia del círculo basal es el perímetro de la base, y la generatriz, se confunde con la arista lateral o altura del prisma.

Luego:

$$\boxed{S_{l.\,cil.} = 2\,\pi\,rg.}$$

$$\boxed{\mathbf{S}_{\text{tot. cil.}} = \mathbf{2\,\pi\,rg + 2\,\pi\,r^2} = \mathbf{2\,\pi}\,r(g+r)}$$

§ 5.—*AREA DEL CONO*

a) en función de la generatriz

TEOREMA CXXII.—**El área lateral de un cono de revolución** (en función de la generatriz) **es igual al producto de la semicircunferencia basal por la generatriz.**

Demostración.— El cono de revolución es una pirámide de infinidad de caras laterales. Basta aplicar el teorema CXIX referente al área lateral de una pirámide.

Luego: $\boxed{S_{1\,cono} = \pi\ gr.}$

$$\boxed{S_{total\ cono} = \pi\ gr + \pi\ r^2 = \pi\ r\ (g+r)}$$

b) en función de la altura

TEOREMA CXXIII.—**El área lateral de un cono de revolución,** (en función de la altura), **es igual al producto de la altura, por la circunferencia que tiene por radio la parte de la $\perp$ construída en el punto medio de la generatriz y comprendida entre ésta y el eje.**

Demostración.— Sea el cono CAB. (Fig. 381).

$EC = EB$
$EF \perp BC$
$EF = \rho$ (corta al eje en F).
$CO = h.$
$\triangle CFE \sim \triangle CBO.$

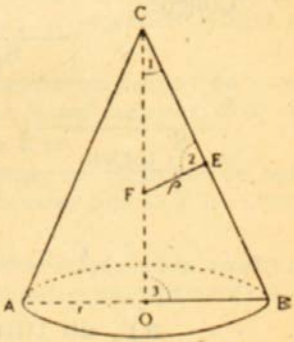


Fig. 381

Tienen:
$\measuredangle 1$ común y $\measuredangle 2 = \measuredangle 3 = 90°.$

Luego: $\dfrac{EF}{OB} = \dfrac{CE}{CO}$

o sea: $\dfrac{\rho}{r} = \dfrac{\frac{1}{2}g}{h}$

$\dfrac{1}{2}\, rg = \rho\, h$ (Haciendo los prod. de medios y extr.)

Multiplicando por 2π los dos m. resulta:

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} rg = 2\pi\rho h.$$

$$\pi rg = 2\pi\rho h.$$

El primer miembro es igual al área lateral del cono. (Teor. CXXII).

También lo será el segundo.

Luego:

$$\boxed{S_{\text{lat. cono}} = 2\pi\rho h}$$

§ 6.—*AREA DEL TRONCO DE CONO*

a) en función de la generatriz

TEOREMA CXXIV.—**El área lateral de un tronco de cono (en función de la generatriz), es igual al producto de la semi suma de las circunferencias basales por la generatriz.**

Demostración.— *El tronco de cono es un tronco de pirámide en estado límite.* Bastará aplicar la fórmula de la pirámide para calcular el área lateral de este cuerpo. (Teorema CXX).

Luego:

$$\boxed{S_{\text{l del tr. cono}} = (\pi r + \pi r')g = \pi g(r+r')}$$

$$\boxed{S_{\text{tot. tr. cono}} = (\pi r + \pi r')\ g + \pi r^2 + \pi r'^2}$$

b) en función de la altura

TEOREMA CXXV.—**El área lateral de un tronco de cono** (en función de la altura) **es igual al producto de la alt. por la ⊙ que tiene por radio la parte de la ⊥ construída en el punto medio de la generatriz y comprendida entre ésta y el eje.**

Dem.) Sea el tronco de cono CABD. (Fig. 382).

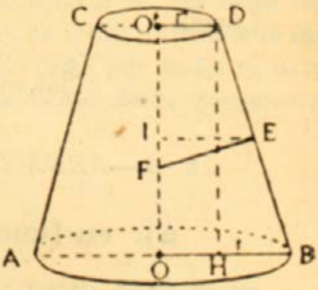


Fig. 382

$DH \perp OB$

$OO' = DH = h.$

$EB = ED$

$EF \perp BD$

$EF = \rho$ (corta al eje OO' en F)

$EI \parallel OB \parallel O'D.$

$EI = \dfrac{r + r'}{2}$ (por ser la mediana del trapeci OBDO')

$\triangle EIF \sim \triangle DHB.$

Tienen: $\measuredangle I = \measuredangle H = 90°.$

$\measuredangle FEI = \measuredangle BDH$ (Por tener sus lados ⊥s)

Luego: $\dfrac{EI}{DH} = \dfrac{EF}{BD}$

o sea: $\dfrac{\frac{1}{2}(r+r')}{h} = \dfrac{\rho}{g}$

$\dfrac{1}{2}\,g\,(r+r') = \rho\, h \mid \cdot\, 2\,\pi$

$\pi\, g\,(r+r') = 2\,\pi\,\rho\, h.$

El primer miembro representa el área lateral del tronco de cono, en función de la generatriz.

El segundo miembro, también, representa el área lateral, pero en función de la altura.

$$\therefore \quad \boxed{S_{\text{tr. cono}} = 2\pi \, \rho \, h}$$

§ 7.—*AREA DE LA ESFERA*

TEOREMA CXXVI.—**El área de una esfera es igual al cuádruplo del área de un círculo máximo.**

Tes.) $S_e = 4 \pi R^2$

Demostración.— Sea **ABCDEFG** una línea poligonal regular inscrita en la circunferencia de radio **OA = OG**. (Fig. 383).

Al hacer girar esta línea poligonal en torno del diámetro **AG**, se generan diversos cuerpos:

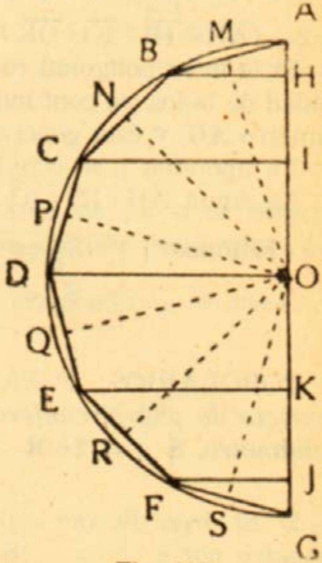


Fig. 383

AB genera un cono de altura **AH**.

BC genera un tronco de cono de altura **HI**.

CD genera un tronco de cono de altura **IO**.

DE genera otro tronco de altura **OK**.

EF genera también un tronco de cono de altura **KJ**.

FG genera un cono de altura **JG**.

(También podría resultar un cilindro si una cuerda fuese $\parallel$ al eje).

Como la línea poligonal es regular, todas las apotemas son iguales: $OM = ON = OP = OR = OS = \rho$.

La línea poligonal regular entera, genera un cuerpo cuya área S es equivalente a la suma de las áreas laterales de los diversos conos y troncos de conos.

Por consiguiente:

$$S = 2\pi\rho \cdot \overline{AH} + 2\pi\rho \cdot \overline{HI} + 2\pi\rho \cdot \overline{IO} + 2\pi\rho \cdot \overline{OK} + 2\pi\rho \cdot \overline{KJ} + 2\pi\rho \cdot \overline{JG}$$

$$= 2\pi\rho\,(\overline{AH} + \overline{HI} + \overline{IO} + \overline{OK} + \overline{KJ} + \overline{JG})$$

Si la línea poligonal regular está formada por una infinidad de lados, se confunde con la semi circunferencia de diámetro **AG**, y ésta genera entonces la superficie esférica.

La apotema ρ se convierte en el radio $OA = OG = R$.

La suma $AH + HI + IO + OK + KJ + JG = 2R$.

Entonces: $$\boxed{\begin{array}{l} S_e = 2\pi R \cdot 2R \\ S_e = 4\pi R^2 \end{array}}$$

COROLARIOS: 1° *El área de una esfera es igual al producto de una circunferencia máxima de la esfera, por el diámetro.* $\mathbf{S_e = 2\pi R \cdot d}$.

2° *El área de una esfera es igual al cuadrado de su diámetro por π.* $\mathbf{S_e = \pi d^2}$.

TEOREMA CXXVII.—**El área de una zona esférica es igual al producto de una circunferencia máxima por la altura de la zona.**

Sea la zona generada por el arco AB y de altura EF=h. (Fig. 384).

Tes.) $S_z = 2\pi R \cdot h.$

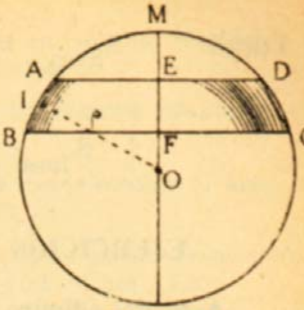


Fig. 384

Dem.) El área lateral del tronco de cono generado por la cuerda AB, es $= 2\pi\rho \cdot h$.

Si se considera el arco AB, formado por una infinidad de cuerdas sucesivas, desde A hasta B, el área engendrada por AB será la zona y ρ se convertirá en el radio R.

Luego: $\boxed{S_z = 2\pi R \cdot h.}$

TEOREMA CXXVIII.—**El área de un huso esférico es igual al producto de un círculo máximo de la esfera por la razón $\frac{\alpha}{90°}$.** (α=áng. rectilíneo correspondiente al diedro del huso). (Fig. 385).

Tes.) $S_{huso} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha°}{90°}$

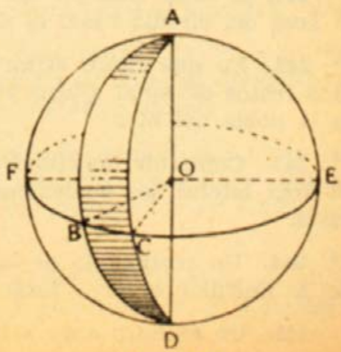


Fig. 385

Dem.) Considerando la superficie de la esfera como un huso completo y el ángulo rectilíneo correspondiente de 360°, y aplicando el teorema CXXVI, se tiene:

$S_{huso} : 4\pi R^2 = \alpha° : 360°$

Luego: $$S_{huso} = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}$$

$$\boxed{S_{huso} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

Area del cilindro

• **238.** ¿Cuál es el área lateral de un cilindro cuyo radio basal es 2,55 m y su altura igual a los $\frac{3}{5}$ de la circunferencia basal?

• **239.** Calcular el radio basal de un cilindro de revolución cuya área lateral es 48,30 m² y su generatriz 7 m.

240. El radio de la base de un cilindro es 0,35 m y la altura es el duplo del diámetro de la base.
Calcúlese el área del cilindro.

241. El área total de un cilindro de revolución es $182{,}80\pi$. El área del círculo basal es $49{,}96\pi$. Calcúlese la altura.

• **242.** En qué razón están las áreas laterales de dos cilindros rectos de igual altura y cuyo radio basal de uno de ellos es el doble del otro.

• **243.** Construir un cilindro de altura dada g, de modo que su área lateral sea equivalente a la suma de las áreas de sus bases.

• **244.** Un rectángulo de lados a y b, gira en torno del lado a. Calcular el área total del cuerpo generado.

245. Un cilindro cuya altura es igual al diámetro tiene de área total 1 m². ¿Cuál es su altura?

Area del cono

246. Calcular el área lateral de un cono de revolución cuya generatriz es 10 y cuyo radio basal es 6.

• 247. Calcular el área total de un cono de revolución cuya generatriz es 15 y su altura 12.

248. En un cono recto $g : h = 5 : 4$. Calcular el área lateral y el área total del cono si $h = 8{,}4$ m.

• 249. Calcular el área total de un cono de revolución sabiendo que su radio basal es 8,4 y su altura 11,2.

250. Calcular el área lateral de un cono de revolución cuya circunferencia basal es igual a $7{,}8\,\pi$ y su altura igual 5,2.

• 251. La generatriz de un cono de revolución tiene una inclinación de 45° sobre la base. Calcular el área total, sabiendo que la generatriz es igual $10\sqrt{2}$.

252. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto, cuyo radio basal es 1,40 m y la generatriz es igual a los $\frac{5}{7}$ de la circunferencia de la base?

253. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto sabiendo que la generatriz mide 3 m y la altura igual al diámetro basal?

• 254. ¿En qué razón están el área lateral de un cono recto con su área basal, 1º si la generatriz es igual al diámetro basal; 2º si su altura es igual al diámetro basal?

• 255. En un cono de revolución, la sección plana que pasa por la cúspide y su eje es un triángulo equilátero. Calcular el área total: 1º en función de su altura **h**; 2º en función del radio **r** de la base.

• 256. Un cilindro de 8 m de altura está inscrito en un cono cuya generatriz mide 15 m y la altura 12 m. Calcular el área total del cilindro..

* **257.** Determinar el área del cuerpo que se genera por la rotación de un cuadrado: 1º en torno de una de sus diagonales; 2: alrededor de una paralela a una diagonal que pasa por un vértice del cuadrado.

258. La sección plana que pasa por la cúspide y el eje de un cono recto es un triángulo rectángulo isósceles, de hipotenusa 1,8 m. Calcular el área lateral de este cono.

259. En un cono recto la altura mide 40 cm; calcular el área total sabiendo que $g : r = 5:3$.

Area del tronco de cono

* **260.** ¿Cuál es el área lateral de un tronco de cono recto cuya generatriz es 3 m y los radios de las bases paralelas $r = 2{,}8$ m y $r' = 2{,}1$ m?

* **261.** Calcular la superficie total de un tronco de cono recto sabiendo que su altura es 4,5; el diámetro de la base inferior es 18 y el de la superior 6.

262. ¿Cuál es el área lateral de una cuba cuyo diámetro de fondo es 2,10 m, el de su abertura 2,30 y su generatriz 3,84?

263. Determinar el área de un tronco de cono recto, sabiendo que la generatriz es 6 m y la suma de las circunferencias de las bases paralelas 8,48 m.

* **264.** El radio de la base de un cono recto es 6 m y su altura 12 m. A 4 m de distancia de la cúspide se hace pasar un plano paralelo a la base. ¿Cuál es el área total del tronco?

* **265.** Calcular el área total de un tronco de cono de revolución, si sus radios basales son 10 y 4 y su altura 8..

266. En un tronco de cono recto el radio de la base inferior es 5, el de la base superior 2; el ángulo de inclinación que forma la generatriz sobre la base es 45°. Calcular el área total.

267. Calcular el área lateral de un tronco de cono recto, sabiendo que su sección central tiene un área a^2 y que la generatriz es el duplo de la altura.

Area de la esfera

268. Calcular el área de una esfera de 3 cm de radio.

* **269.** Calcular el área de una esfera cuyo diámetro mide 1,2 m.

270. Si el área de una esfera es $10{,}24\,\pi$. ¿Cuál es su radio?

* **271.** El área total de un cubo es $8{,}64\ m^2$. Calcular el área de la esfera inscrita en él.

* **272.** Determinar el área de la esfera circunscrita a un cubo de arista $a = 4\sqrt{3}$ m.

* **273.** El área de una esfera es equivalente al área de un cubo cuya arista mide 4 m.

Calcular el radio de la esfera.

* **274.** Determinar la relación que existe entre el área de una esfera y el área lateral del cilindro circunscrito a ella.

275. Determinar el radio de la esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista **a**, en función de dicha arista.

* **276.** Dado un cono de revolución de altura **h** y radio basal **r**, calcular el radio **R** de la esfera inscrita a este cono y tangente al círculo basal.

277. Calcular la circunferencia de un círculo máximo de una esfera cuya área es $36\ m^2$.

* **278.** Probar que las superficies de dos esferas son entre sí como los cuadrados de los radios o de sus diámetros.

279. ¿En qué razón están el área de una esfera y el área total del cilindro circunscrito a ella?

280. ¿En qué razón están las áreas de una esfera y del cono equilátero circunscrito a ella?

281. Calcular el radio de una esfera cuya área es equivalente a la suma de las áreas de dos esferas de radios 9 y 12 respectivamente?

282. Calcúlese el área de la tierra, si el radio R = 6370 Km.

283. Dado un tetraedro regular de arista 12 m. ¿Cuál es el área de la esfera circunscrita?

284. Construir un círculo cuya área sea equivalente al área lateral de un tronco de cono de altura $h = 10\sqrt{15}$ cm y cuyos radios basales son: $r = 25$ cm y $r' = 15$ cm.

285. Calcular el área de una zona esférica cuya altura es 6 y el radio de la esfera 10.

286. ¿Cuál es el área interior y exterior de una esfera hueca, sabiendo que su espesor es de 0,04 m y el diámetro de la circunferencia exterior es 0,60 m?

* **287.** Calcular el área total de un casquete esférico de 0,8 m de altura, en una esfera de 2.10 m de radio.

* **288.** Calcular la altura de un casquete esférico de 3 m², en una esfera de 1 m de radio.

* **289.** El área de un casquete esférico es 2.261952 m² y su altura 0,45 m. Calcular el área de la esfera correspondiente.

290. El área de una zona esférica es 5,4 m². ¿Cuál es el radio de la esfera, sabiendo que la altura de la zona es 1,8 m?

291. El área de una esfera es 144 π y la de una zona de la misma esfera es 33,6 π. ¿Cuál es la altura de la zona?

292. ¿En qué tanto por ciento habrá que disminuir el radio R de una esfera para que la superficie de ésta: a) disminuya en el 20%? b) ¿En qué tanto % hay que aumentar el radio para que la superficie aumente en el 40%?

• **293.** Una esfera se corta por dos planos paralelos a las distancias 4 y 8 del centro, respectivamente. Calcúlese la zona resultante, si el radio de la esfera es 12. (**Dos casos**).

• **294** Calcular el área de un huso esférico cuyo ángulo rectilíneo es 30°, sabiendo que el radio de la esfera es 6.

295. Calcular el ángulo rectilíneo correspondiente a un huso esférico cuya área es $24\frac{2}{5}$ cm², sabiendo, además, que la esfera a la cual pertenece dicho huso, tiene 180 cm² de área.

296. Calcular el área total de un segmento esférico en función del radio **R** de la esfera a la cual pertenece, y a la altura **h** del segmento, conociéndose, además, el radio r de la base menor. (**Los tres casos**).

CAPITULO XXIII

DETERMINACION DEL VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMETRICOS

Volumen de un cuerpo es la extensión que ocupa, considerada en sus tres dimensiones (largo, ancho y alto o profundidad).

La palabra **volumen** *se emplea con frecuencia para designar el número que lo mide.*

Medir un volumen es compararlo con otro volumen elegido como unidad. Este último volumen es la **unidad de medida.**

La **unidad de volumen** es un cubo cuya arista mide la unidad de longitud.

Son unidades de volumen el m³, el dm³, etc.

El m³ es un cubo cuya arista mide un m o 10 dm o 100 cm. ¿Qué es dm³? ¿cm³?

§ *1.—VOLUMEN DEL PRISMA*

TEOREMA CXXIX.—**El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de las tres aristas que concurren a un mismo vértice,** (o sea es igual al producto de los números que miden las tres dimensiones).

Demostración.— Sea el paralelepípedo de la Fig. 386 cuyas tres aristas concurrentes en B, miden:

BA=6 cm (largo); BC=5 cm (ancho); BF=4 cm (alt.)

La altura BF se divide en 4 partes iguales (cada parte =1 cm) y por los puntos de división, se hacen pasar planos paralelos a las bases; se determinan cuatro paralelepípedos congruentes, (Misma base e igual altura de 1 cm).

El área de la base de cada uno de ellos=6 cm. 5 cm=30 cm².

En cada cm² se puede colocar o construir 1 cm³ y en toda la base 30 cm³, quedando todos a la altura de 1 cm.

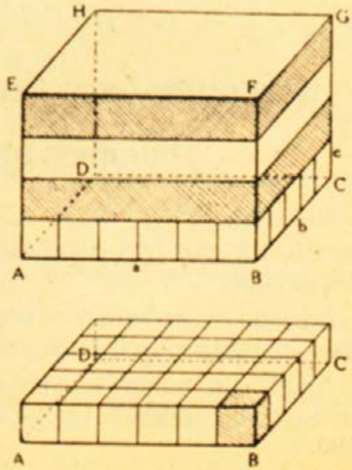


Fig. 386

El volumen de cada paralelepípedo parcial = 6 cm · 5 cm · 1 cm = 30 cm² · 1 cm = 30 cm³.

El volumen del paralelepípedo total$=30$ cm$^3 \cdot 4 = 120$ cm$^3 = 6$ cm largo $\cdot$ 5 cm ancho $\cdot$ 4 cm alto.

Generalizando y designando las aristas por **a** (largo), **b** (ancho), **c** (alto), resulta:

$$\boxed{\mathbf{V = a \cdot b \cdot c\ [cm^3]}}$$

COROLARIOS: 1º *El volumen de un paralelepípedo rectangular es igual al producto de la base por su altura.*

Dem.) En la fórmula anterior del volumen, a . b$=$B (área de la base y c$=$h (altura).

$$\boxed{V_p = B \cdot h}$$

2º *El volumen de un cubo es igual al cubo de su arista.*

Dem.) En el cubo las tres aristas son iguales. Designando la arista por a se tiene:

$$\boxed{V_{cubo} = a^3}$$

3º *El volumen de todo paralelepípedo recto es igual al producto de la base por su altura.* (**La base puede ser cualquier paralelógramo**).

Dem.) Dicho paralelepípedo se puede transformar en otro de base rectangular equivalente y de igual altura.

TEOREMA CXXX.—**El volumen de un paralelepípedo oblicuo, es igual al producto de la base por la altura.**

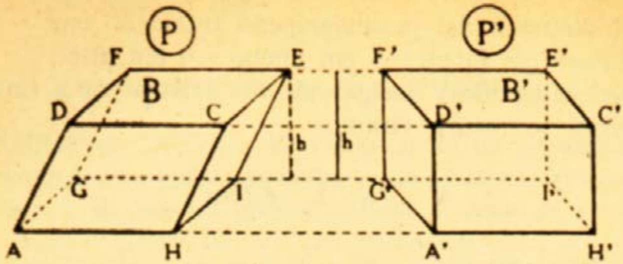


Fig. 387

Dem.) Sea P el paralelepípedo oblicuo.

DCEF = B = base.

Su altura = **h.** (Fig. 387).

Se prolonga la arista **FE** y las demás aristas paralelas a ella.

Se hace F'E' = FE.

Por F' y E' se construyen los planos F'A' y E'H', perpendiculares a F'E'.

Resulta un paralelepípedo recto P', en el cual la cara F'A', es una sección recta del paralelepípedo oblicuo P y F'E' = arista FE.

Entonces: P' = P. (Teor. CII).

Designando la base **D'C'E'F'** = B', y la altura **F'G' = h**, se tiene:

$$P' = B' \cdot h \quad \text{(Teor. CXXIX, corol. 1º).}$$

$$P' = B \cdot h \quad (B' = B)$$

$$\text{Luego:} \quad P = B \cdot h \quad \text{(Por ser } P' = P\text{)}$$

TEOREMA CXXXI.—**El volumen de un prisma cualquiera** (recto u oblicuo) **es igual al producto de su base por su altura.**

1º Se hace la demostración para un prisma de base triangular.

2º Para un prisma de base cualquiera.

1º Volumen del prisma triangular.- Sea el prisma triangular recto **AHCDEF** de altura AD=h y de base AHC=b. Fig. 388.

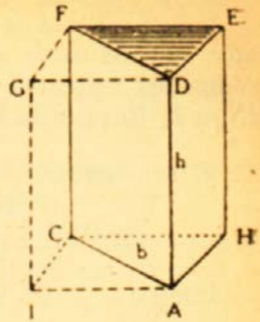


Fig. 388

Por los puntos **F** y **D** se hacen pasar **planos paralelos** a las caras AE y CE, respectivamente.

Se forma así el paralelepípedo recto D—AHCI de altura **h** y de base **AHCI**=B.

Volumen paral D—AHCI=B · h=2 b · h (B=2b).

Prisma AHC—DEF≅prisma ACI—DFG (Igual base y altura).

Luego:

$$\text{Vol. pr. AHC—DEF} = \frac{1}{2}\text{Vol. D—AHCI} = \frac{1}{2}B \cdot h = b \cdot h$$

2º Volumen de un prisma de cualquier base.—

Si la base del **prisma recto** es **un polígono** cualquiera, se descompone el prisma en prismas triangulares, por medio de **planos diagonales** que pasan todos por una misma arista lateral. (Fig. 389).

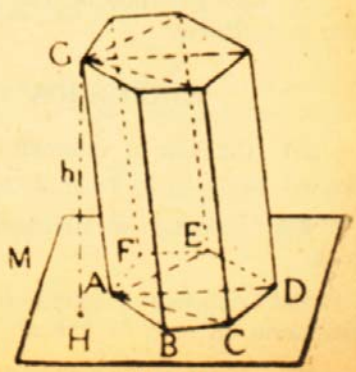


Fig. 389

Se calcula el volumen de

cada uno de estos prismas triangulares. Se suman los volúmenes parciales y se saca como factor común la altura **h**. Resulta la tesis.

O sea que:

$$V_{\text{pr. recto}} = b_1h + b_2h + b_3h + \ldots + b_n \cdot h$$
$$= (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\, h.$$

Luego: $$\boxed{V_{\text{pr. recto}} = B \cdot h}$$

COROLARIOS: 1º *El volumen de un prisma cualquiera* (recto u oblicuo) *es igual al producto de una arista lateral por su sección recta.*

Dem.) Ver teoremas CXXX y CXXXI.

2º *Dos prismas son entre sí como los productos de las bases por sus alturas.*

3º *Dos prismas de igual altura y de distintas bases son entre sí como sus bases.*

4º *Dos prismas de bases equivalentes son entre sí como sus alturas.*

EJERCICIOS DE APLICACION

297. Calcular el volumen de un cubo sabiendo que su arista es: 1º 0,7; 2º $2\sqrt{3}$; 3º $a\sqrt{b}$.

• **298.** Calcular el volumen de un cubo cuya diagonal es $5\sqrt{3}$.

• **299.** Calcular el volumen de un cubo si, 1º una de sus caras tiene un área de 961 m²; 2º la diagonal de una cara=8.

300. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya área total es: a) 13,5 m²?; b) S cm²?

* **301.** Calcular el volumen de un cubo sabiendo: 1º que el perímetro de su plano diagonal es 2s; 2º que el área de su plano diagonal es a^2.

302. ¿En qué % aumenta el volumen de un cubo, si cada una de sus aristas aumenta en el 20%?

* **303.** Calcular el volumen de un paralelepípedo recto que mide 3 m de largo, 5 de ancho y 4 m de alto.

* **304.** Un paralelepípedo recto de base rectangular tiene un área total de 148 m^2. Calcular su volumen sabiendo que las dimensiones de la base son 6 m y 5 m.

305. Una sala de clase que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular, la diagonal mide 14,5 m y las tres dimensiones son entre sí como los números 3 : 6 : 7. ¿Cuál es el volumen de aire contenido en esta sala?

* **306.** El área total de un paralelepípedo rectangular es 248 m^2. Su volumen es 240 m^3 y su altura 4 m. Calcular las dimensiones de la base.

* **307.** ¿Cuánto debe medir la arista de una fosa cúbica para que su capacidad sea doble de otra cuya arista mide 2,20 m?

308. Dos cubos de latón miden 15 cm y 24 cm de arista; si se funden juntos, ¿Cuál será la arista del nuevo cubo equivalente a la suma de los anteriores?

309. Calcular el volumen de un paralelepípedo rectangular cuya área total es 184 m^2 y cuya base tiene como dimensiones 8 y 5 m.

310. El volumen de un paralelepípedo rectangular es 405 m^3; las dimensiones de la base son 10 y 9 m. ¿Cuál es la superficie total?

311. Se desea transformar un cubo de 8 m de arista en un paralelepípedo rectangular cuya base mide 16 m de largo por 8 m de ancho. ¿Qué altura debe tener el paralelepípedo?

312. Si la arista de un cubo es **a.** ¿Cuánto medirá la de un cubo de doble volumen?

313. En un paralelepípedo rectangular las dimensiones de la base son entre sí como 1 : 2. La altura es 2,4 m y la superficie total es 43,2 m². ¿Cuál es su volumen?

314. En un paralelepípedo rectangular las aristas concurrentes a un mismo vértice suman $9\frac{1}{4}$ m si el volumen es 27 m³ y la altura es el medio geométrico de las dimensiones basales, ¿cuáles son las dimensiones del paralelepípedo?

315. La arista basal de un prisma recto regular triangular mide 6 m y la altura 5 m. Calcular su volumen.

316. El volumen y el área total de un paralelepípedo rectc rectangular están expresados por el mismo número. Se pide calcular la altura del paralelepípedo, sabiendo que una de las aristas basales mide 8 m y que la diagonal de la base es igual a 10 m.

• **317.** Calcular el volumen de un prisma recto triangular regular de 4 m de altura y de 3,75 de perímetro basal.

318. Las aristas basales de un prisma triangular recto son 9 m, 5m y 6 m. Calcular su volumen si su altura es 3 m.

• **319.** La base de un prisma recto es un triángulo rectángudo de catetos 5 y 8 m respectivamente. El volumen es 6,90 m³. Calcular el área lateral.

320. Calcular el volumen de un prisma recto triangular cuya altura es 8 m y cuya base es un triángulo ABC de lados $a=6{,}40$ m, $c=5$ m y ángulo $\beta=30°$.

321. Calcular el volumen de un prisma recto hexagonal sabiendo que su altura es 6 m y que cada arista basal mide $2\sqrt{3}$ m.

322. El volumen de un prisma recto hexagonal es $90\sqrt{3}$ m^3; cada una de sus aristas basales mide 6 m. Calcular la superficie lateral.

323. El volumen de un prisma recto hexagonal regular es $120\sqrt{3}\ m^3$; su altura es 5 m. Calcular el lado del hexágono de la base.

324. Un prisma recto tiene por base un hexágono regular, inscrito en una circunferencia de radio 6 m. Su altura es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita a la base. Calcular el volumen.

* **325.** Un prisma recto tiene por base un octógono regular, inscrito en una circunferencia de radio 8. Calcular su volumen, sabiendo que su altura es igual al lado del cuadrado inscrito en la circunferencia anterior.

326. Un prisma oblicuo tiene por base un rombo cuyo lado mide 10 m y el ángulo agudo 30°.

La arista lateral mide 20 m y tiene una inclinación de 30° sobre el plano de la base. Calcular el volumen del prisma.

327. La base de un prisma oblicuo es un rombo cuyas diagonales miden 8 y 12 m, respectivamente. La arista lateral mide 20 m y forma un ángulo de 45° con la base. Calcular el volumen del prisma.

328. Un estanque tiene la forma de un prisma octogonal regular de 8 m de perímetro. ¿Cuál es el volumen de agua que contiene cuando ésta se eleva a 0,75 m?.

329. Un paralelepípedo oblicuo tiene por base un rectángulo cuyos lados contiguos miden 4 y 5 m. La arista lateral forma un ángulo de inclinación de 60° y su proyección sobre la base es igual a 3 m. ¿Cuál es su volumen?

§ 2.—*VOLUMEN DE LA PIRAMIDE*

Para calcular el volumen de una pirámide cualquiera se parte del volumen de un tetraedro o pirámide triangular, y para determinar el volumen de esta última, se parte del *teorema de Eudoxio.*

TEOREMA CXXXII.—(**Teorema de Eudoxio, 370 A. de C.**) .—**Todo prisma triangular puede descomponerse en tres tetraedros o pirámides equivalentes.**

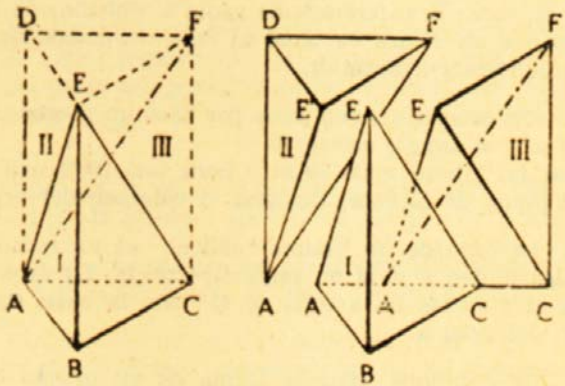


Fig. 390

Tes.) I=II=III.

Dem.) Sea el prisma **ABCDEF** (Fig. 390).

Por el vértice E y la arista AC, se hace pasar un plano.

El prisma queda dividido en dos pirámides: una **triangular, E—ABC=I** y la otra **rectangular, E—ACFD.**

En esta 2ª pirámide se hace pasar otro plano por el vértice E y la diagonal AF de la base. Resultan las pirámides triangulares E—AFD=II y E—AFC=III.

Pero: II=III. (Igual base AFD=ACF y misma altura común desde cúspide E, a estas bases. Teor. CVIII).

También: II=I. (Igual base: DEF=ABC e igual altura, la del prisma).

Luego: I=III=II [1] (Q. E. D.)

COROLARIO: *Un tetraedro o pirámide triangular, es equivalente a la tercera parte de un prisma triangular de igual base y altura.*

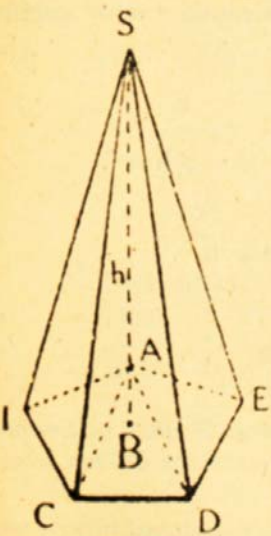


Fig. 391

TEOREMA CXXXIII.—**El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del producto de su base por su altura.**

Tes.) $V_{pi} = \frac{1}{3} B\,h.$

Dem.) La demostración se hace: 1º para una pirámide de base triangular; 2º para una pirámide de base cualquiera.

1º **Pirámide triangular.—Sea b** la base y **h** la altura de la pirámide.

Se completa la pirámide en un prisma triangular de misma base y altura.

---

(1) La 1ª vez se consideró la pirámide II con base DAF y la cúspide opuesta E., para compararla con la pirámide III.

La 2ª vez se consideró la pirámide II con la base DEF y de cúspide A, para compararla con I.

Resulta:

Vol. prisma = bh.

$$V_{pi} = \frac{1}{3} V_{pr} = \frac{1}{3} \text{ bh.}$$ (Corol. teor. **CXXXII**, pág. **539**).

2º **Pirámide de base cualquiera.**—Sea la base un polígono cualquiera **AICDE = B** (Fig. 391) y su altura h.

Se descompone la pirámide en pirámides triangulares por medio de planos que pasan por la cúspide y por las diagonales de la base que parten de uno de sus vértices.

Se calcula el volumen de cada pirámide triangular y se suman los diversos volúmenes, sacando factor común $\frac{1}{3}$h.:

$$V_{pi} = \frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} b_2 h + \frac{1}{3} b_3 h + \ldots + \frac{1}{3} b_n h =$$

$$\frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) \text{ h.}$$

Resulta: $$\boxed{V_{pi} = \frac{1}{3} \text{ B h.}}$$

COROLARIOS: 1º *Los volúmenes de dos pirámides cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas respectivas.*

2º *Los volúmenes de dos pirámides de igual altura son entre sí como sus bases.*

3º *Los volúmenes de dos pirámides de bases equivalentes son entre sí como sus alturas.*

4º *Los volúmenes de dos pirámides semejantes son entre sí como los cubos de dos líneas homólogas cualesquiera.*

Dem.) Sean los tetraedros semejantes P y P'. (Fig. 392)

$$V_1 = \frac{1}{3} B \cdot h$$

$$V_2 = \frac{1}{3} B' \cdot h'$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} Bh}{\frac{1}{3} B'h'} = \frac{Bh}{B'h'}$$

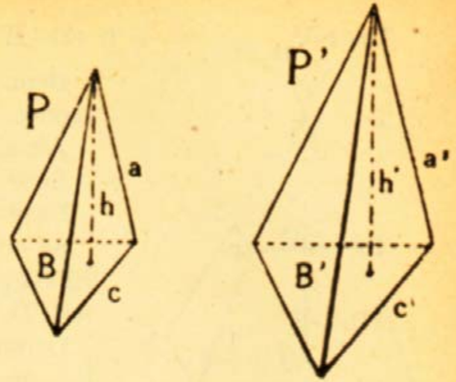


Fig. 392

Pero: $\dfrac{B}{B'} = \dfrac{c^2}{c'^2} = \dfrac{a^2}{a'^2}$

y $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{a}{a'}$

Multiplicando miembro a miembro, resulta:

$$\frac{Bh}{B'h'} = \frac{c^3}{c'^3} = \frac{a^3}{a'^3} = \frac{1/_3 \, Bh}{1/_3 \, B'h'}$$

O sea: $\dfrac{V_{pir.}}{V'_{pir.}} = \dfrac{c^3}{c'^3} = \dfrac{a^3}{a'^3}$

§ *3.—VOLUMEN DE UN TRONCO DE PIRAMIDE*

TEOREMA CXXXIV.—**El volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas es igual a un tercio del producto de su altura, por la suma de las dos bases y de la media geométrica entre ellas.**

Tes.) $V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3} h \left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$

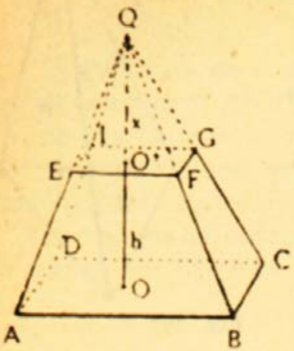


Fig. 393

Dem.) Sea ABCD—EFGI el tronco de pirámide. (**Fig. 393**).

Altura **OO'=h**.

Base inferior=**B**.

Base superior=**B'**.

Se completa el tronco **ABCD** EFGI en la pirámide total Q—ABCD.

Denotando la altura QO', de la pirámide complementaria por **x**, resulta:

$$V_{tr.\,pi} = \text{Vol. Q ABCD} - \text{Vol. Q EFGI.}$$

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}B(h+x) - \frac{1}{3}B'x$$

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}Bx - \frac{1}{3}B'x$$

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}x(B - B') \quad (1)$$

(sacando factor común x).

Como en la última igualdad no se conoce el valor de **x,** se calcula este valor en la siguiente igualdad y se introduce en la ecuación precedente.

$$\frac{B}{B'} = \frac{(h+x)^2}{x^2}$$ **(Corol. 3º de Teor. CVI, pág. 477).**

$$\therefore \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}} = \frac{h+x}{x}$$

$$x\sqrt{B} = h\sqrt{B'} + x\sqrt{B'}$$

$$x(\sqrt{B} - \sqrt{B'}) = h\sqrt{B'}$$

$$x = \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} = \frac{h\sqrt{B'}(\sqrt{B} + \sqrt{B'})}{(\sqrt{B} - \sqrt{B'})\ (\sqrt{B} + \sqrt{B'})} =$$

$$\frac{h(B' + \sqrt{BB'})}{B - B'}$$

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3} \cdot \frac{h(B' + \sqrt{BB'})}{B - B'} \cdot (B - B')$$ (Se reemplazó x en [1].

$$V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}h\ (B' + \sqrt{BB'})$$

$$\boxed{V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3}h\ (B + B' + \sqrt{BB'})}$$

COROLARIO: *Un tronco piramidal de bases paralelas se puede descomponer en tres pirámides de misma altura que el tronco y cuyas bases son, respectivamente, las bases del tronco de pirámide y la media geometría de ellas.*

§ 4.—*VOLUMEN DE UN POLIEDRO CUALQUIERA*

Para calcular el volumen de un **poliedro cualquiera**, se descompone en prismas y pirámides, cuyas dimensiones y volúmenes se determinan sucesivamente.

PROBLEMA 41.—*Calcular el volumen de un tronco de prisma recto cuya base* **B=40 cm²** *y cuyas aristas miden respectivamente* **GD=12 cm, GE=8 cm** *y* **AF=10 cm.** **(Fig. 394)**. **(Ver definición de tronco de prisma, pág. 469).**

Si por el extremo **E** de la arista más corta se traza un plano **RES** paralelo a la base, el sólido dado queda dividido en un prisma recto ACD—RES$=V_1$ y una pirámide de cúspide E y base RSGF$=$**b**$=V_2$.

El volumen del prisma es:

$V_1 = B \cdot CE = 40 \cdot 8 = 320$ cm³.

La base **b** de la pirámide $=$un trapecio rectángulo de altura **RS** y de bases **FR** y **GS**.

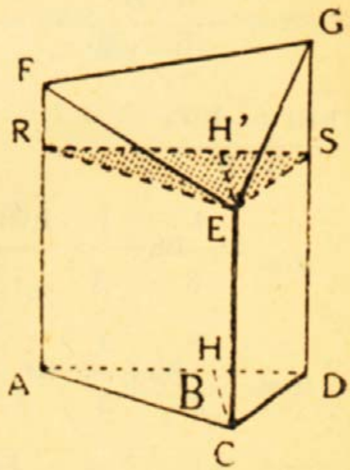


Fig. 394

La altura de la pirámide $=$ **EH'** $=$ altura del $\triangle$**ESR**, puesto que plano ESR $\perp$ al plano del trapecio.

El volumen de la pirámide es, entonces:

$$V_2 = \frac{1}{3} b \cdot EH' = \frac{1}{3} \left(\frac{GS+FR}{2} \cdot RS\right) \cdot EH' =$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4+2}{2}\cdot RS\cdot EH'\right). \qquad \text{(Se simpl. por 2)}$$

$$V_2=\frac{1}{3}(3\cdot RS\cdot EH')=\mathbf{1}\cdot \mathbf{RS}\cdot \mathbf{EH'}. \quad \text{(Se simpl. por 3)}$$

Pero el producto $RS \cdot EH' = 2\triangle ESR = \mathbf{2B}$.

Luego: $V_2 = 40 \cdot 2 = \mathbf{80\ cm^3}$.

$$V_{\text{tronco prisma}}=V_1+V_2=320\ cm^3+80\ cm^3=400\ cm^3$$

NOTA.—Repetir el cálculo para el caso en que la base del tronco de prima es **B** y la longitud de las aristas **m, n, p.**

se obtiene: $\mathbf{V} = \dfrac{1}{3}\ \mathbf{B}\ (\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p})$.

EJERCICIOS DE APLICACION

• **330.** Calcular el volumen de una pirámide triangular regular cuya arista basal es 6 m y su altura 3 m.

• **331.** Calcular el volumen de una pirámide triangular cuyas aristas basales son respectivamente 14 m, 12 m y 10 m, y su altura 6 m.

• **322.** Idem de una pirámide recta de base cuadrada cuya arista basal es 8 y la arista lateral 6.

• **333.** Idem de una pirámide recta de base cuadrada en la cual su apotema lateral es 10,5 y la arista basal es 16,8.

• **334.** Idem de una pirámide triangular regular sabiendo que su arista lateral mide 10 m y su altura 8 m.

• **335.** Calcular el volumen de un tetraedro regular, si se conoce: 1º su arista basal **a**; 2º su altura **h**; 3º su apotema lateral ρ.

336. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide recta de base cuadrada, si su altura es 7 m y su volumen 15,75 m^3?

337. Calcular el volumen de una pirámide hexagonal regular, si la arista basal es 4 y su altura 9.

338. ¿Cuál es el volumen de una pirámide regular hexagonal cuya arista lateral es 8 y el ángulo de inclinación sobre la base 30°?

339. ¿Cuál es el volumen de una pirámide regular hexagonal si cada uno de sus ángulos diedros de la base vale 45° y su altura es $4\sqrt{3}$?

340. Idem, si la pirámide es de base cuadrada.

341. Calcular el volumen de una pirámide regular hexagonal, sabiendo que la arista lateral mide 8 m y que su proyección sobre la base es 6, 4.

342. En una pirámide recta regular hexagonal la arista lateral mide 25 cm. y su altura 20 cm. Calcular: a) el volumen; b) la superficie total.

• **343.** Calcular el volumen de una pirámide triangular, sabiendo que las aristas basales son 13, 14 y 15, respectivamente, y que una de las aristas laterales es 1,5 y su proyección sobre la base 0,9.

344. La altura de una pirámide es 9. Calcular el volumen sabiendo que su base es un rombo cuyas diagonales miden 8 y 6.

• **345.** Calcular la arista de un tetraedro regular cuyo volumen es: 1º $144\sqrt{2}$ m^3; 2º 1 m^3; 3º v m^3.

• **346.** Calcular el volumen de una pirámide que tiene su base cuadrada y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros, si, además, se sabe que su arista basal mide 10 cm.

347. Determinar el volumen y el área total de un octaedro regular de arista **a**.

• **348.** En una $\odot$ de 10 cm de radio se inscribe un triángulo equilátero. ¿Cuál sería el volumen de la pirámide que tuviera por base dicho triángulo y 12 cm de altura?

349. A un tercio de la longitud de las aristas laterales, medidas desde el vértice, se corta una pirámide por un plano paralelo a la base. ¿Qué parte de la pirámide completa es la pirámide desprendida?

350. ¿A que distancia de la cúspide debe cortarse una pirámide, por planos paralelos a la base para que resulte dividida: 1º en dos partes equivalentes; 2º en tres partes equivalentes.

• **351.** ¿Cuál es el volumen de una pirámide truncada de bases paralelas, cuya base inferior tiene un área de 144 m^2, la superior 81 m^2 y la altura 15 m?

352. Calcular el volumen de un tronco de pirámide regular de bases cuadradas y paralelas, cuyos lados son 9 m y 4 m, respectivamente; si la altura del tronco es 15 m.

353. Calcular el volumen de un tronco de pirámide triangular regular, sabiendo que la arista de la base inferior es 6, la de la base superior 4, y la altura del tronco $6\sqrt{3}$.

• **354.** Las aristas basales de un tronco de pirámide de bases paralelas y cuadradas son 3 m y 2 m, respectivamente. Determinar el volumen de dicho tronco, si la altura de la pirámide complementaria es 1,2 m.

355. En un tronco de pirámide recta regular hexagonal la arista lateral mide 40 cm, sus aristas basales miden, respectivamente, 40 y 16 cm. Calcúlese el volumen y el área total del tronco de pirámide.

356. El volumen de un tronco de pirámide triangular regular de bases paralelas es 49 m^3. La arista de la base inferior es $3\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}$ m y la de la base superior es $2\sqrt[3]{27}$ m. Calcular el volumen de la pirámide completa.

Resp. = 62,5 m^3.

357. El volumen de un tronco de pirámide de bases cuadradas y paralelas es 50,8 m^3; su altura es 1,2 m. ¿Cuál es el volumen de la pirámide completa, si la arista de la base menor es 6 m?

358. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto cuya área basal$=$**B** y la longitud de las aristas **m, n, p.**

$$R. = \frac{1}{3} \mathbf{B}\ (m+n+n+p)$$

359. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto triangular cuyas aristas laterales son respectivamente: 4 m, 6 m y 8 m; la arista basal$=6\sqrt{3}$. Calcular el volumen del tronco y la altura de una pirámide equivalente y de misma base.

360. Un tronco de prisma recto tiene por base un triángulo equilátero de lado **a**; sus aristas miden respectivamente: a, 2.a, 3a. Calcular su volumen y área total.

$$\text{Resp.:} \quad V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}; \ S = \frac{a^2}{4}\ (24+\sqrt{15}+\sqrt{3})$$

361. Un tronco de prisma recto tiene por base un cuadrado de lado **a**; dos aristas tienen por longitud común **a** y las otras dos **2.a** Calcular el volumen y área total.

362. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide hexagonal regular de bases paralelas, sabiendo que las aristas basales son 0,60 m y 0,20 m y la altura 2m?

• **363.** Un tronco de pirámide triangular regular tiene: Volumen $95\sqrt{3}$ cm^3; arista de la base inferior 6 cm; altura 15 cm. Calcúlese el área de la base superior.

364. En un tronco piramidal triangular regular se tiene: base inferior$=$10,24 m^2; base superior$=$6,25 m^2; altura$=$4,20 m. ¿Cuál es el volumen de la pirámide complementaria o deficiente?

365. El volumen de un tronco de pirámide es **v**; la altura es **h**; la base superior=**b**. Calcúlese la base inferior.

366. En un tronco de pirámide de bases paralelas, la base inferior=**B**; la base superior=**B'**; la altura de la pirámide complementaria o deficiente=**h**. Calcular el volumen del tronco.

367. En un tronco de pirámide de bases paralelas se tiene: base inferior=**B**, base superior=**B'**, la altura de la pirámide entera=**h**. Calcúlese el volumen del tronco.

368. En un octaedro regular calcular: a) el volumen conocida su área $72a^2\sqrt{3}$ cm²; b) su área conocido su volumen $81\sqrt{3}$ cm³.

II.—VOLUMEN DE LOS CUERPOS REDONDOS

§ *5.—VOLUMEN DEL CILINDRO*

TEOREMA CXXXV.—**El volumen de un cilindro recto es igual al producto de su base por la altura.**

Tes.) $V_{cil} = \pi r^2 g.$

Dem.) Se puede considerar el cilindro como un prisma de una infinidad de caras laterales.

Luego para obtener su volumen basta aplicar la fórmula del volumen de un **prisma recto:** $V_{pr} = B \cdot h$.

Como en el cilindro recto $\mathbf{B} = \pi \mathbf{r^2}$ y $\mathbf{h} = \mathbf{g}$ resulta directamente la tesis.

Luego: $$\boxed{V_{cil} = \pi\, r^2\, g.}$$

COROLARIO.—*El volumen de un cilindro cualquiera* (recto u oblicuo) *es igual al producto de su base por su altura*:

$$\mathbf{V_{cil} = \pi\, r^2 \cdot h.}$$

Dem.) El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la base por su altura. (Teor. CXXXI, pág. 532).

§ 6.—*VOLUMEN DE UN CONO*

TEOREMA CXXXVI.—**El volumen de un cono de revolución es igual a un tercio del producto de su base por su altura.**

Tes.) $V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\, r^2 \cdot h.$

Dem.) El *cono* se puede considerar como una *pirámide de una infinidad de caras laterales* o una pirámide en estado límite. Para tener su volumen basta aplicar la fórmula del volumen de la pirámide: $V_{pi} = \frac{1}{3} B \cdot h.$

Como en el cilindro $B = \pi\, r^2$, resulta:

$$\boxed{V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h.}$$

§ 7.—*VOLUMEN DE UN TRONCO DE CONO*

TEOREMA CXXXVII.—**El volumen de un tronco de cono de altura h y cuyas bases tienen por radios r y r' tienen por expresión:**

$$V_{tr.cono} = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r'^2 + rr').$$

Dem.) El tronco de cono es un tronco de pirámide en estado límite.

Su volumen se obtiene por la fórmula del volumen del tronco de pirámide: $V_{tr.\,pi} = \frac{1}{3} h (B + B' + \sqrt{BB'})$.

Las bases B y B' se reemplazan por las áreas de los respectivos círculos basales: $B = \pi r^2$; $B' = \pi r'^2$.

Luego:

$$V_{tr.\,cono} = \frac{1}{3} h (\pi r^2 + \pi r'^2 + \pi rr')$$

$$V_{tr.\,cono} = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r'^2 + rr')$$

OBSERVACION.— El volumen de cualquier prisma o cilindro, pirámide, cono y la esfera, se puede obtener también, aplicando el **principio de Cavaliere**, pág. 471.

§ 9.—*VOLUMEN DE LA ESFERA*

TEOREMA CXXXVIII.—**El volumen de una esfera es igual a un tercio del producto de su radio por su área.**

Tes.) $V_e = \frac{4}{3} \pi R^3$

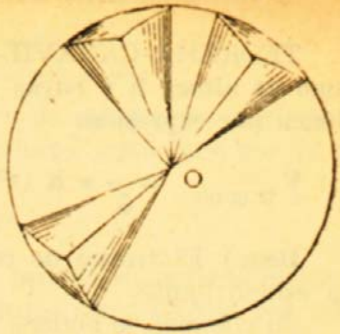


Fig. 395

1ª **Dem.)** Se considera la superficie esférica dividida en una infinidad de partes, infinitamente pequeñas: b_1, b_2, b_3. . ., b_n.

Sobre cada una de estas partes infinitesimales de la superficie esférica, considerada como base, se construyen pirámides cuyas cúspides se encuentran en el centro. (Fig. 395.

Todas estas pirámides tienen la altura igual al radio de la esfera.

La suma total de sus bases equivale a la superficie esférica, y la suma de sus volúmenes es equivalente al volumen de la esfera.

Denotando los volúmenes de las pirámides por V_1, V_2, V_3. . ., V_n y el volumen de la esfera por V_e se tiene:

$$V_1 = \frac{1}{3} b_1 R \qquad \text{(Teor. CXXXIII).}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} b_2 R$$

$$V_3 = \frac{1}{3} b_3 R$$

. . . .

$$V_n = \frac{1}{3} b_n R$$

Sumando y sacando factor común $\frac{1}{3}$ R, resulta:

$$V_e = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n = \frac{1}{3} R (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

$$V_e = \frac{1}{3} R \cdot 4 \pi R^2$$

Luego: $$\boxed{V_e = \frac{4}{3} \pi R^3}$$

Volumen de la esfera en función de su diámetro "D".

Se tiene: $R = \frac{D}{2}$

Se reemplaza R en la fórmula anterior:

$$V_e = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} = \frac{1}{6} \pi D^3$$

Luego:

$$\boxed{V_e = \frac{1}{6} \pi D^3}$$

COROLARIO.—*Los volúmenes de dos esferas son entre sí como los cubos de sus radios o los cubos de sus diámetros.*

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{D^3}{D'^3}$$

2º DEMOSTRACION DEL VOLUMEN DE LA ESFERA (Fig. 396).

Se parte del método para determinar el volumen de un poliedro.

Se considera un poliedro regular circunscrito a una esfera. (**Todas sus caras planas son tangentes a la esfera**).

Este poliedro se puede descomponer en tantas pirámides regulares como caras tenga el poliedro dado, teniendo todas ellas el centro de la esfera por cúspide común y el radio **R** de la misma por altura.

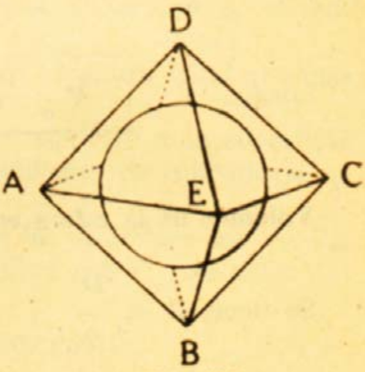


Fig. 396

Ahora bien, el volumen de estas pirámides elementales es igual al producto de su base por $\frac{1}{3}$ R.

Designando las bases de las pirámides por b_1, b_2, b_3... b_n, el

$$V_{pol.} = \frac{1}{3} R(b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$$

Si por medio de planos tangentes a la esfera se van cortando sucesivamente los ángulos poliedros de sus vértices, el poliedro circunscrito irá aumentando el número de sus caras **hasta convertirse en el límite, en una esfera.**

Y en este caso, el volumen y el área del poliedro serán iguales a los de la esfera.

Reemplazando la superficie $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n$ por $4\pi R^2$, resulta:

$$V_{pol.} = V_e = \frac{1}{3} R \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

3ª DEMOSTRACION DEL VOLUMEN DE UNA ESFERA (1)

Para calcular el volumen de la esfera, por este método, se parte del cálculo del volumen del cuerpo engendrado por algunas figuras planas al girar alrededor de un eje fijo.

TEOREMA CXXXIX.—**El volumen engendrado por un △ que gira alrededor de un eje trazado por uno de sus vértices, en su plano y sin cortarlo, es igual al tercio del producto del área engendrada por el lado opuesto al vértice situado en el eje, por la altura correspondiente a dicho lado.**

Sea el △ABC que gira alrededor del eje XY. Se traza la altura BH=h y la perpendicular AD=**R** al eje de rotación.

Pueden ocurrir dos casos:

1.er CASO.—El eje XY coincide con un lado del triángulo. (Fig. 397).

El volumen engendrado por el △ABC= suma de los volúmenes de los conos engendrados por los △s rectángulos ABD y ACD. Resulta entonces:

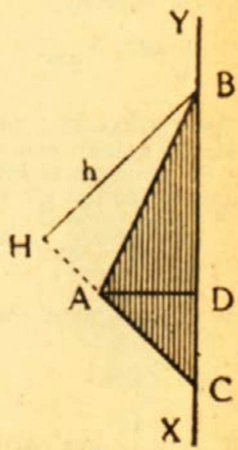


Fig. 397

(1) Este método para calcular el volumen de una esfera, da una idea como pueden determinarse las áreas y volúmenes de los cuerpos, engendrados por la rotación de figuras planas en torno de un eje situado en el mismo plano de dichas figuras.

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \overline{BD} + \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \overline{CD} =$$

$$\frac{1}{3}\pi R^2 (\overline{BD} + \overline{DC}).$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \overline{BC} = \frac{1}{3}\pi R \cdot R \cdot BC$$

$R \cdot \overline{BC}$ = duplo del área $\triangle ABC$ (= **prod. de base por alt.**)
$R \cdot BC = AC \cdot h.$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}\pi R \cdot \overline{AC} \cdot h$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} h\pi \cdot R \cdot \overline{AC}$$

Pero $\pi \cdot R \cdot \overline{AC}$ = área lateral del cono ACD engendrada por el lado AC.

Luego: $V_{ABC} = \dfrac{1}{3}$ **área engendrada por $\overline{AC} \cdot h$.**

2º CASO.—El $\triangle$ **ABC** no tiene sino un vértice común con el eje. (**Fig. 398**).

Se prolonga el lado AC hasta su encuentro con el eje en D. Resulta:

$$V_{ABC} = V_{ABD} - V_{CBD}$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \text{ área (AD)} \cdot \overline{BH} - \frac{1}{3} \text{ área (CD)} \cdot \overline{BH}.$$

$$V_{ABC} = \frac{1}{3}[\text{área (AD)} - \text{área (CD)}] \cdot \overline{BH}.$$

Luego:

$$V_{ABC} = \frac{1}{3} \text{ área (AC)} \cdot \overline{BH}.$$

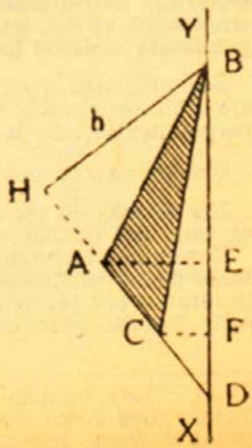


Fig 398

OBSERVACION.—El caso en que AC llega a ser paralelo al eje **XY**, (Fig. 399) puede considerarse como un caso límite del precedente, que subsiste cuando el punto D se aleja indefinidamente sobre el eje.

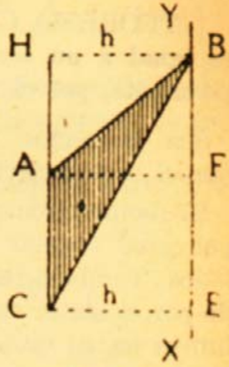


Fig. 399

TEOREMA CXL.—**El volumen engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un diámetro exterior al mismo, es igual a un tercio del producto del área que engendra la línea poligonal regular por la apotema de la misma.** (Fig. 400).

Sea **OABCD** un sector poligonal regular que gira alrededor de **XY**.

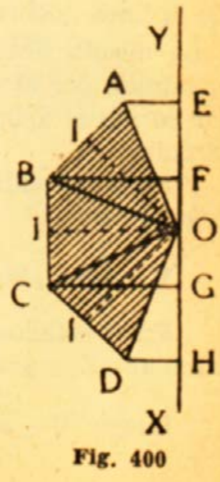


Fig. 400

Se tiene:

$$V_{AOB} = \frac{1}{3} \text{ área AB} \cdot OI$$

$$V_{BOC} = \frac{1}{3} \text{ área BC} \cdot OI$$

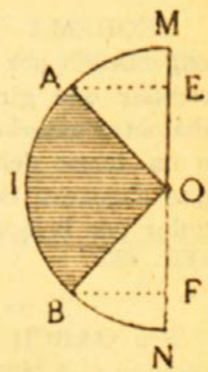
$$V_{COD} = \frac{1}{3} \text{ área CD} \cdot OI$$

$$V_{OABCD} = \frac{1}{3} (\text{área AB} + \text{área BC} + \text{área CD}) \cdot OI$$

§ 9.—*VOLUMEN DE UN SECTOR ESFERICO*

TEOREMA CXLI.—**El volumen de un sector esférico es igual a un tercio del producto de la zona correspondiente, por el radio de la esfera.**

Sea el sector esférico engendrado por el sector circular **OAB.** (Fig. 401).



El sector circular **OAB** es un sector poligonal regular de una infinidad de lados. También, el volumen engendrado por el sector circular **OAB,** es el volumen en su estado límite, del engendrado por el sector poligonal regular, al aumentar indefinidamente los lados de la línea quebrada.

La misma fórmula del volumen engendrado por el sector poligonal regular se puede aplicar al volumen engendrado por el sector circular.

Pero el volumen engendrado por el sector poligonal regular es:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{S} \cdot \rho \quad (\mathbf{S} = \textbf{área engendrada por línea polig.}; \ \rho = \textbf{apot.})$$

En el estado límite, **S**=zona correspondiente al sector circular=Z, y ρ=R.

$$\text{Luego: V} \cdot \text{sector esférico} = \frac{1}{3} \text{ área zona AIB} \cdot \text{R.}$$

$$\text{V} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad = \frac{1}{3} \cdot 2\pi\,\text{Rh} \cdot \text{R}$$

$$\boxed{V_{\text{sect. esf.}} = \frac{2}{3}\,\pi\,R^2 \cdot h}$$

Volumen de la esfera.—La esfera se puede considerar como un sector esférico engendrado por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro.

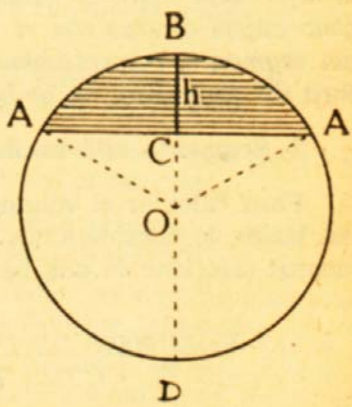
En este caso el área de la Zona=toda la superficie esférica$=2\pi R \cdot h = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

Luego: $V_e = \frac{1}{3}\,4\pi\,R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\,\pi\,\mathbf{R^3}$.

§ *10.—VOLUMEN DEL SEGMENTO ESFERICO*

1º **Segmento esférico de una base.**—

Sea el segmento esférico ABA' de altura CB=**h** en una esfera de radio **R**. (Fig. 402).



V. segm. esf. AA'B = V. sect. esf. AOA'B — V. cono AOA'.

V. segm. esf. AA'B $= \frac{2}{3}\,\pi R^2 h - \frac{1}{3}\,\pi \overline{CA}^2 \cdot \overline{OC}$.

(Vol. sect. esf. y cono).

Pero $\overline{CA}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{CD} = h\,(2R - h)$.

$$V \cdot \text{segm. esf.} = \frac{2}{3}\,\pi R^2 h - \frac{1}{3}\,\pi h\,(2R-h)\,(R-h).$$

Haciendo los cálculos, resulta:

$$\textbf{V. segmento esf.} = \frac{1}{3}\,\pi\, h^2\,(3\,R - h).$$

Al resolver el paréntesis la fórmula precedente queda convertida así:

$$\boxed{\textbf{V. segmento. esf.} = R\pi\, h^2 - \frac{1}{3}\, h\, \pi\, h^2.}$$

De esta última fórmula se desprende que:

El volumen de un **segmento esférico** *es equivalente a la diferencia entre el volumen de un cilindro y el de un cono cuyas alturas son el radio de la esfera y la altura del segmento, respectivamente, y el radio basal es la altura del segmento, en ambos cuerpos.*

2º **Segmento esférico de dos bases.—**

Para calcular el volumen de un segmento esférico de dos bases, lo consideramos como la diferencia de dos segmentos esféricos de una base.

§ *11.—VOLUMEN DE UN INGLETE ESFERICO O CUÑA ESFERICA*

Sea α° = ángulo rectilíneo correspondiente al ángulo diedro del inglete.

R = radio de la esfera.

Como los volúmenes de dos ingletes de una misma es-

342 - 357 - 358 - 362 - 367 - 375 - 387

fera son entre sí como sus ángulos diedros correspondientes, se tiene:

$$V_{\text{ing.}} : \frac{4}{3} \pi R^3 = \alpha^\circ : 360.$$

$$\mathbf{V_{ing.}} = \frac{4\pi \mathbf{R}^3 \alpha}{\mathbf{3 \cdot 360}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \mathbf{R} \frac{\alpha^\circ}{\mathbf{90^\circ}} \pi \mathbf{R}^2$$

Resultado que se puede enunciar así:

"El volumen de un **inglete esférico** *es igual al producto de su área por un tercio del radio de la esfera".*

EJERCICIOS DE APLICACION

369. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de revolución cuya altura es **b** y el radio basal **a**?

370. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de revolución cuya circunferencia basal mide 8,06 π m y su altura 3 m?

371. Expresar en litros la capacidad de una cuba cilíndrica de 4,8 m de diámetro basal y 1,20 de profundidad.

372. ¿Cuántos m³ de tierra se han removido al cavar un pozo de 2,8 de diámetro y 12 m de profundidad?

373. ¿Qué profundidad ha de tener un depósito cilíndrico de 12 m de radio basal que pueda contener 1440 π Hl?

374. De un estanque cilíndrico de 8,80 m de diámetro, salen 2 litros de agua por segundo. ¿De cuánto habrá bajado el nivel después de $^3/_4$ de hora?

375. Calcular el diámetro de los cilindros de un doble litro, un litro, medio litro, si el diámetro es igual a la altura?

376. Idem de las medidas cilíndricas de 1 l, 1 dl, 1 cl; si la profundidad es doble del diámetro.

?

377. Los diámetros basales de dos cilindros están en la razón de 8 : 6. Calcúlese el % de volumen que mide el menor con relación al mayor, sabiendo que la altura del menor es el 75% de la del mayor.

?

378. Calcular el volumen de un cilindro cuya área lateral es equivalente a la suma de las áreas laterales de dos cilindros de radio basales 4 y 6 cm, respectivamente, y sabiendo, además, que cada uno de ellos tiene una altura de 12 cm.

379. Calcular el volumen de materiales empleados en la construcción de una torre cilíndrica de 15 m de altura, si el muro tiene un metro de espesor y la circunferencia basal exterior mide 20. m.

• **380.** Un cubo está inscrito en un cilindro de 1 m de diámetro basal. ¿Cuál es la diferencia de volumen de los dos cuerpos?

• **381.** Si el área lateral de un cilindro recto es S. Calcular su volumen, sabiendo que el radio de la base $=$c.

• **382.** El volumen de un cilindro de revolución es 80 π y el diámetro de la base es 16. Calcular el área total.

383. Calcular el volumen de un tubo cilíndrico de altura g, y cuyo radio de la circunferencia basal exterior es $\mathbf{r}_1$, y el de la circunferencia interior, $\mathbf{r}_2$.

• **384.** Se quiere construir un cilindro equivalente a la suma de dos cilindros dados cuyos radios son 6 y 8 mts respectivamente. ¿Qué magnitud debe tener el diámetro del cilindro pedido, si los tres cilindros tienen la misma altura?

385. Un cubo de 1 m de arista es circunscrito a un cilindro. Calcular la diferencia de volumen.

• **386.** Calcular el volumen de un cono de revolución de altura 5 m y diámetro basal $=$ 8,40m.

387. Idem de un cono de revolución cuya altura es 3,2 m y la generatriz 4 m.

• **388.** Idem de un cono de revolución cuya generatriz es 4,50 m y el diámetro de la base 5,40 m.

• **389.** Calcular el diámetro de la base de un cilindro de revolución de 9 m de altura y equivalente a un cono de 12 m de altura y 9 m de radio basal.

390. Calcular el volumen de un cono de revolución cuya altura es 4,5 y la circunferencia basal $= 1{,}6\ \pi$.

391. El volumen de un cono de revolución es 250 π; calcular su área lateral sabiendo que su altura es 7,50.

• **392.** ¿Cuál es el volumen de un cono de revolución cuya área total es 96π y su generatriz 10?

393. La altura de un cono recto es b metros y su radio basal c metros; si el radio basal aumenta en 20% y la altura disminuye en 25%. ¿En qué tanto % varía el volumen?

394. Un vaso cónico de 24 cm de diámetro basal y 18 cm de altura está lleno con agua. Si ésta se vierte en un vaso cilíndrico de 20 cm de diámetro y 11,52 cm de alto, ¿a qué % de la altura del cilindro llega el agua?

395. Calcular el volumen de un cono de revolución, dadas la generatriz $= 13$ m y el área lateral $= 135{,}2\ \pi$.

396. El área lateral de un cono de revolución es $7{,}2\ \pi$; el diámetro basal es 4,8. Calcular su volumen.

397. ¿Cuál es el radio de la base de un cono recto cuyo volumen es 1,6 m^3 y altura 0,80 m?

398. El radio de la base de un cono recto es 5 y su generatriz es igual a los $^2/_3$ de la ⊙ basal. Calcular: 1º, el volumen; 2º, el área lateral.

399. La generatriz de un cono recto es **a**. Calcular en función de la generatriz el área lateral y el volumen, sabiendo que la altura es equivalente a los $^{12}/_{13}$ de la generatriz.

• **400.** Por el punto medio de la generatriz de un cono, se hace pasar un plano paralelo a la base. ¿Qué parte del cono total es el cono complementario?

?

• **401.** Una vasija cónica de 20 cm de altura está llena de agua. ¿A qué altura llegará el líquido cuando se haya escurrido la mitad?

X

402. Calcular el volumen de un cono recto, sabiendo que la generatriz tiene una inclinación de 60° sobre el plano de la base, y la altura mide 9 m.

?

403. Calcular el volumen de un cono de revolución, sabiendo que el área de la base $= B$ y que el área de una sección central $= m^2$.

• **404.** Las secciones centrales de un cono recto son triángulos equiláteros. Calcular el volumen del cono, dados: 1° el diámetro basal $= \mathbf{a}$; 2° su altura **h**.

405. Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución, si sus diámetros basales son 10 m y 8 m, respectivamente y su altura = 6 m.

• **406.** La generatriz de un tronco de cono de revolución de bases paralelas mide 15 m, el diámetro de la base inferior = 22 m, el de la base superior = 4 m. Calcular su volumen y el área total.

407. Los diámetros basales de un tronco de cono recto son entre si como 5 : 3. ¿En qué % aumenta el volumen de dicho tronco al aumentar el diámetro basal inferior en 40% y el superior en 20% y permaneciendo la altura constante?

? 408

407. En un tronco de cono recto hay inscrita una esfera de 10 cm de radio. Si la sección plana que pasa por el eje del tronco tiene un perímetro de 100 cm, calcular: a) el volumen del cuerpo que resulta al extraer la esfera del tronco de cono; b) el área total del mismo cuerpo; c) la razón entre los volúmenes del tronco de cono y la esfera.

X

• **409.** Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución cuya generatriz mide 7,5 m, su altura 6 m. y el radio de la base inferior 6,5 m.

410. El volumen de un tronco de cono de revolución es 78 π. El radio de la base superior es 2 y la altura = 6. Calcular el radio de la base inferior.

411. Los radios basales de un tronco de cono recto son 9 cm y 4 cm. La generatriz es igual a la suma de los radios. ¿Cuál es el volumen?

412. ¿Cuál es la altura de un tronco de cono que tiene un volumen de 84 m^3, si la base superior = 3 m^2 y la inferior 12 m^2?

413. Dado un cono truncado recto de radios basales 3 m y 9 m, encontrar el radio de la base de un cilindro equivalente y de misma altura que el tronco del cono. ?

414. De un tronco de cono recto se conoce su volumen V y su altura h. Determinar los radios de las circunferencias basales, si están en el razón m : n.

415. El diámetro de una esfera es 6. Calcular su volumen.

416. El volumen de una esfera es 288π. Calcular su diámetro.

417. El volumen de una esfera es 36 π. Calcular su área.

• **418.** ¿Cuánto debe medir el radio de una esfera para que un mismo número exprese al mismo tiempo su volumen y área? ¿Cuál es ese número?

419. El área de una esfera es 225 π. ¿Cuál es el volumen?

420. Una esfera de radio R se corta por un plano perpendicularmente en el punto medio del radio. Calcular el volumen del cono recto que tiene por base dicha sección y por cúspide el centro de la esfera.

421. Probar que en todo cubo se puede inscribir una esfera.

Determinar el centro de la esfera y calcular su radio en función de la arista "a" del cubo.

422. Calcular el volumen de una esfera circunscrita en un cubo, cuyo volumen es 216 cm³.

4233. Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cubo cuya área total es 150 cm².

• **424.** En un cilindro recto cuya altura es igual al diámetro basal se hallan inscritos una esfera y un cono. Averiguar en qué razón están los volumenes de los tres sólidos. El cono tiene igual base y altura que el cilindro. (Problema de Arquímedes).

425. Calcular el radio de una esfera circunscrita a un tetraedro regular de arista **a**.

426. Dado un cono de revolución de radio basal r y altura h, calcular el radio R de la esfera inscrita en este cono y tangente al círculo de la base.

• **427.** ¿Cuál es el volumen de una esfera, si la circunferencia de un círculo máximo mide 10_{π}?

428. El volumen de una esfera es 32 cm³. ¿Cuál es el área de un círculo máximo?

429. Calcular el volumen de un sector esférico que tiene por base 10 m² si el radio de la esfera es 12 m.

430. En una esfera de 1,20 m de radio se trazan dos planos secantes paralelos y simétricos con respecto al centro y distantes de 0,90. ¿Cuál es el volumen del segmento esférico?

431. Calcular el volumen de un segmento esférico de una base cuya altura es igual a 2 m y el radio de la esfera 10 m.

432. Calcular el volumen de un segmento esférico de una base cuya altura es 2 y el radio de la base 3.

433. Se da un cono de revolución de altura b y de radio basal a. Si en él se inscribe un cilindro cuya área total es equivalente al área de la base del cono, calcular la altura y el radio basal del cilindro.

434. Calcular el área y el volumen de una esfera cuyo volumen es equivalente a la suma de los volúmenes de otras dos esferas cuyas áreas, de estas últimas, son a_1 y a_2, respectivamente.

435. La longitud de la circunferencia de un círculo menor de un esfera es 1. ¿Cuál es el volumen de la esfera si la distancia de dicho círculo al centro es h?

436. Dado un cono de revolución de altura 8 y radio basal 6, se traza un plano paralelo a la base, de manera que la superficie lateral del cono entero sea igual a la superficie total del cono complementario. Calcular el volumen de este último.

437. Se construye un cono de revolución dándole por área lateral la de un sector circular de 120º y radio R. Hallar el área total y el volumen de dicho cono.

438. El diámetro basal de un cilindro es igual a su altura. ¿Cuánto mide el diámetro, si el volumen es 8?

439. ¿Cuál es el volumen de un cono de revolución, cuya sección central es un triángulo equilátero de área $9\sqrt{3}$ m^2?

440. ¿Cuál es el ángulo del sector formado por el desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución de 4 m de circunferencia y 5 de generatriz?

441. El área lateral de un cono, desarrollada, forma un sector de 30º. La generatriz es 25. Calcular el radio basal.

442. El ángulo del centro de un sector circular es de 60º y su área 300 cm^2. Calcular el radio de una esfera equivalente al cono cuya área lateral es equivalente al sector circular.

443. Dado un cono que tiene 60 cm de altura y la misma longitud como radio de la base, se le inscribe una esfera de 10 cm de radio. 1º ¿Cuál será el volumen de la parte restante del cono? 2º ¿Cuál será el radio de la circunferencia de contacto la esfera y el cono, suponiendo que los puntos de contacto formen una circunferencia?

444. Demostrar que si un cilindro y un cono equilátero son circunscritos a una esfera, el volumen del cilindro es una media proporcional geométrica entre los volúmenes de la esfera y del cono.

445. Dado un cono de revolución de 6 m de altura y 8 m de radio basal, se traza un plano paralelo a la base que lo corta de tal manera que el área de la base superior del tronco es igual al área lateral del mismo. Calcular el volumen del cono complementario.

446. Calcular el volumen de un tetraedro: 1º inscrito en un cubo de arista **a**; 2º inscrito en una esfera de radio R.

447. Calcular el volumen de un octaedro regular, inscrito en una esfera de radio R.

448. Calcular en función de la arista **a** de un octaedro regular: 1º el radio de la esfera inscrita; 2º el radio de la esfera circunscrita.

449. Dado un cono de revolución de radio basal **r** y de altura **h**, calcular el radio de la esfera inscrita en este cono y tangente al círculo basal.

450. Las caras laterales de una pirámide de base cuadrada son triángulos equiláteros. La arista basal es **a**. Calcular en función de **a** el radio de la esfera inscrita.

451. De un tronco de revolución se dan los radios basales **r** y **r'** y la generatriz **g**. Determinar el radio de la esfera circunscrita.

452. Un cono es circunscrito a dos esferas que son tangentes exteriormente y cuyos radios son 4 y 12. Calcúlese el volumen del cono.

• **453.** Un triángulo equilátero de lado a se hace girar: 1º alrededor de una de sus alturas; 2º alrededor de uno de sus lados;

3º alrededor de la paralela a uno de sus lados que pasa por el vértice opuesto. Determinar en cada caso el volumen del cuerpo engendrado por la rotación [1].

454. Determinar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un △ equilátero de lado a, alrededor de un eje que está situado fuera de él, y paralelo a uno de sus lados. Si la distancia del eje al lado paralelo es **b.**

• **455** un △ rectángulo de hipotenusa 15 cm y uno de sus catetos = 12 cm, gira en tono de un eje paralelo a este último y situado fuera del triángulo. Calcular el área lateral y el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, sabiendo que la distancia del eje al cateto paralelo es igual a 1 cm.

456. Calcular el volumen del cuerpo que se engendra al hacer girar un cuadrado de lado a, en torno:

1º de una de sus diagonales;
2º de la paralela a una de las diagonales que pasa por uno de los vértices del cuadrado;
3º de la recta que une los puntos medios de dos lados contiguos.

457. Se hace girar un △ ABC en torno de su lado AB como eje. Calcular el volumen del cuerpo generado por la rotación, sabiendo que AB=25 cm; BC=20 cm y AC=15 cm.

458. Se hace girar un rectángulo de lados **a** y **b** alrededor de la paralela a una de las diagonales que pasa por un vértice del rectángulo. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

---

[1] Es útil recordar aquí las reglas de Gúlden sobre superficies y volúmenes de los cuerpos engendrados por la rotación de una figura plana alrededor de un eje:

1: **La superficie de un cuerpo de rotación, es igual al producto de la línea generadora por el camino recorrido por su centro de gravedad.**

2º **El volumen de un cuerpo de rotación, es igual al producto de la superficie generadora, por el camino recorrido por su centro de gravedad.**

459. Se hace girar un segmento circular, cuyo arco mide 60°, alrededor del diámetro paralelo a su cuerda. ¿Cuál es el volumen del cuerpo engendrado, si el radio del círculo al cual pertenece el segmento, es **r**?

460. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación de un trapecio isósceles ABCD, alrededor de la base AB, sabiendo que $AB=10$; $AC=6$; $AD=BC=5$.

461. ¿Cuál es el volumen de un cuerpo engendrado por la rotación de un hexágono regular de lado **a**, que gira alrededor de uno de sus lados como eje?

462. Se da un rombo ABCD en el cual $AB=a$ y el $\sphericalangle DAB=60°$; se hace girar dicha figura en torno de AC. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la rotación.

* **463.** El lado de un rombo mide 10 cm y una de sus diagonales mide 16 cm. Se pide calcular el volumen del cuerpo que se engendra al girar el rombo alrededor de uno de sus lados.

464. Las coordenadas ortogonales de los vértices de un $\triangle$ ABC son: $A(2,-4)$; $B(4,-2)$ y $C(4,2)$. Se pide calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar dicho $\triangle$ alrededor del eje de las ordenadas.

465. Los vértices de un cuadrilátero ABCD tienen, respectivamente las siguientes coordenadas: $A(-8,-2)$; $B(8,-2)$; $C(2,6)$ y $D(-2,6)$. Diga de qué clase de cuadrilátero se trata y calcule el volumen y el área total del cuerpo que se engendra al girar el cuadrilátero: a) en torno al eje de las ordenadas, b) en torno al lado AB; c) en torno al lado DC.

466. En un trapecio rectángulo la altura mide 3 cm. y la base mayor es el triple de la menor; si esta última mide 2 cm., calcular el volumen y el área total del cuerpo que se engendra al girar el trapecio: a) en torno a la base mayor; b) en torno a la base menor; c) en torno al lado $\perp$ a las bases.

467. En un sistema ortogonal las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero son: A(2,3); B(6,–2); C(4,8) y D(2,6). Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar el cuadrilátero en torno del eje de las ordenadas.

468. En una semi ⊙ de radio **r** se halla inscrito un △ ABC, siendo el lado AB el diámetro de la ⊙ y AC igual a l_3. Calcular en función de **r** el volumen y el área total del cuerpo engendrado por la rotación del △ ABC alrededor: a) del lado BC; b) del lado AC; c) del lado AB.

APENDICE

TRANSFORMACIONES [1]

Traslaciones, Simetría, Homotecia

Definiciones Preliminares. —*Dada una figura* **(F)**, *por leyes diversas, se puede obtener otra figura* **(F')** *que esté en relación con la figura original, de modo que a un punto de la primera corresponda un punto de la segunda y viceversa. Cuando esto sucede, se dice que ha tenido lugar una* **transformación**.

Tipos de estas transformaciones son: *la traslación, la rotación, la simetría, la homotecia...*, etc...

Conviene hacer notar que en estas transformaciones, *las figuras se mantienen invariables*, tanto en su *forma* como en la *magnitud* de sus lados y ángulos.

Si la figura **(F')** *coincide* con la figura **(F)**, la *transformación es idéntica.*

Si a cada punto **M** de la figura **(F)** corresponde un punto **M'** de la figura **(F')**, *y uno sólo, la transformación es puntual.*

Si un punto **M** es homólogo de si mismo, es *un punto doble de la transformación.*

Si la misma ley que relaciona o hace corresponder a (F') con (F), relaciona a **(F)** con **(F')**, *la transformación es recíproca.*

---

(1) Antes de comenzar la presente materia conviene repasar el párrafo sobre "Elementos de Geometría Vectorial", página 209.

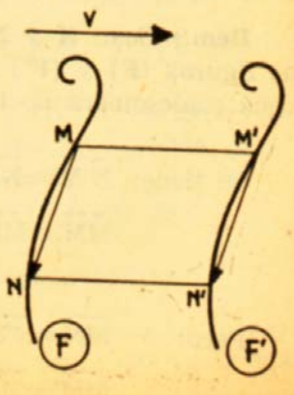
Si las figuras **(F)** y **(F')** resultan *congruentes*, se dice que *la transformación es un desplazamiento.*

Si una primera transformación hace corresponder la figura (F') con (F) y si una segunda transformación, hace corresponder la figura **(F")** con **(F')**, *la transformación única que hace corresponder a* **(F")** *con* **(F)** se dice que *es el producto de las dos transformaciones precedentes.*

§ *1.—TRASLACION*

Definición.—*Sean un vector* $\vec{\mathbf{V}}$ *y una figura* **(F)** *dados. Si a cada punto* **M** *de* **(F)** *se hace corresponder un punto* **M'** *tal que* $\overrightarrow{\mathbf{MM'}}=\vec{\mathbf{V}}$, *se obtiene una nueva figura (F'), la cual, se dice que viene o se deduce de la figura* **(F)** *por* **traslación.** Fig. 402.

El vector $\vec{\mathbf{V}}$ se dice que es el *vector traslación.*



Una traslación del vector $\vec{\mathbf{V}}$ se designa abreviadamente por: **traslación** $(\vec{\mathbf{V}})$.

Los puntos **M** y **M'** son *puntos homólogos* de las figuras **F** y **F'**.

Los vectores que unen dos puntos **M** y **N** de la figura **(F)** y sus homólogos **M'** y **N'** de la figura **(F')** son dos *vectores homólogos.*

Propiedades de la traslación.— *a) Dos vectores homólogos son equipolentes en dos figuras que se deducen una de la otra por traslación.*

Dem.) Sean **N** y **N'**, **M** y **M'** dos parejas de puntos homólogos de dos figuras **(F)** y **(F')** que se deducen una de la otra por traslación$(\vec{V})$. Fig. 402.

Resulta: $\overrightarrow{NN'}=\overrightarrow{MM}=\vec{V}$

y $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'M'}+\overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{AM}=\vec{V}+\overrightarrow{A'M'}-\vec{V}$

Luego: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$

Recíprocamente, para que dos figuras **(F)** y **(F')** se correspondan en una traslación, la *condición necesaria y suficiente* es que los *vectores sean equipolentes.*

Dem.) Sean **N** y **N'** dos puntos homólogos dados en las figuras **(F)** y **(F')** y **M** y **M'** otros dos puntos homólogos cualesquiera de las mismas figuras. (Fig. 402).

Se tiene: $\overrightarrow{N'M'}=\overrightarrow{NM}$ **(Los vectores homólogos son =s)**

$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN'}+\overrightarrow{N'M'}$ **(composición de vectores pág. 219).**

Pero: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{N'M'}=0$ **(Relación de Chasles pág. 218)**

$\therefore$ $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$

Luego se puede pasar de **(F)** a **(F')** por la **traslación** $(\overrightarrow{NN'})$.

Esta propiedad es característica de la traslación.

b) *La traslación es un desplazamiento.*

Dem.) Sean **(F)** y **(F')** dos figuras homólogas en la **traslación** $(\vec{V})$; **A** y **A'**, **B** y **B'**, **C** y **C'**, tres parejas de puntos homólogos dados; **M** y **M'** una pareja de puntos homólogos cualesquiera. Fig. 403.

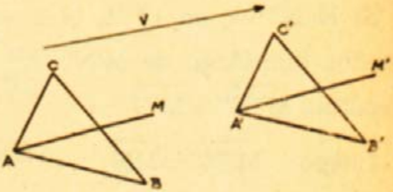


Fig. 403

La condición necesaria da:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'};\ \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{C'B'};\ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'A'}\ \text{y}\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$$

Triedro ACBM$\cong$ triedro A'C'B'M' (tienen sus caras respectivamente$=$s).

Si se hace coincidir la cara CAB con la cara C'A'B' los dos triedros coinciden, AM toma la dirección de A'M' y como AM$=$A'M' M coincide con M.

Luego las dos figuras (F) y (F') son $\cong$s.

Luego la traslación es un desplazamiento.

NOTA.— Si las dos figuras son planas los Δs ACM y A'C'M' son congruentes. La superposición de AC con A'C' hace coincidir M con M'.

Producto de dos traslaciones.—Sea **(F')** la figura homóloga de **(F)** en el vector traslación $\vec{\mathbf{V}}$. Sean $\overrightarrow{\mathbf{MN}}$ un vector de **(F)** y $\overrightarrow{\mathbf{M'N'}}$ su homólogo de **(F')**. Fig. 404.

Se tiene: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

Si $\overrightarrow{M''N''}$ es, en **(F'')**, el vector homólogo de $\overrightarrow{M'N'}$, resulta: $\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{M'N'}$

Luego: $\overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{MN}$

Siendo equipolentes dos vectores homólogos de **(F)** y **(F'')** se puede pasar por una traslación de **(F)** a **(F'')**.

Además: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{V} + \vec{V'}$.

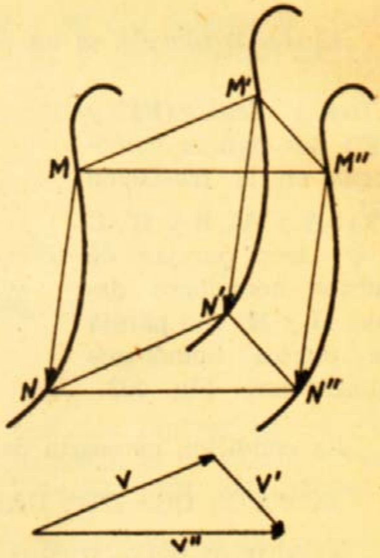


Fig. 404

De lo expuesto anteriormente se puede sacar la conclusión que: *el producto de dos traslaciones es una traslación cuyo vector traslación es la suma geométrica de los vectores componentes*. O sea: $\vec{\mathbf{V''}} = \vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{V'}}$

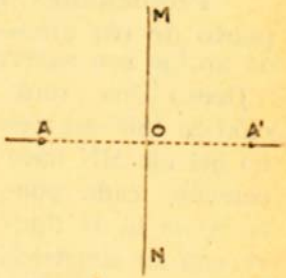
OBSERVACION.—La traslación es una transformación sin punto doble.

§ 2.—*SIMETRIA EN EL ESPACIO*

La simetría en el espacio se puede definir con relación: 1º *a una recta*; 2º *a un punto*; 3º *a un plano.*

a) Simetría con relación a una recta.—

Dos puntos **A** *y* **A'** *son simétricos* respecto de una recta **MN,** si esta recta es $\perp$ en el punto medio **O** del segmento **AA'**. (Fig. 405).



La recta **MN** recibe el nombre de **eje de simetría.**

Figuras simétricas.—Si a a cada punto **A** de una figura **(F)**, se hace corresponder *su simétrico* **A'** respecto a un eje MN, se obtiene una *nueva figura* **(F')**, que es el L.G. de los puntos A' y que se dice es una *transformación de F por simetría, o figura simétrica* de la figura (F), respecto del eje MN.

La figura (F') es *independiente* del sentido que tenga el eje.

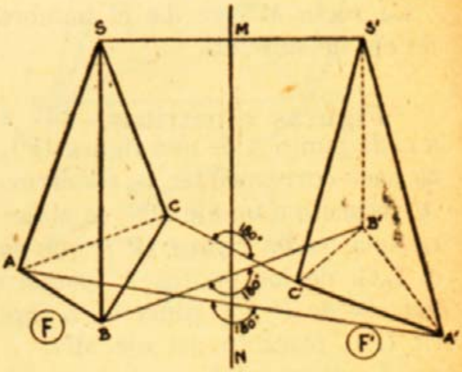
La simetría respecto a un eje es **una rotación** de $\pi + 2\,k\pi$ y alrededor de esta recta.

El valor de k puede ser cero o un número entero cualquiera. Si A y A' son dos puntos homólogos de dos figuras simétricas (F) y (F'), respecto al eje MN, y O el punto medio del segmento AA', el $\sphericalangle$ de rotación es el formado por los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ y se indica por la notación: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$.

Dicho ángulo es igual: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \pi + 2k\pi$ (expresado en radianes) [1].

Si $k = o$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \pi = 180°$

Propiedades de dos figuras simétricas respecto de un eje.— 1ª) *Dos figuras simétricas respecto de un eje son superponibles*, o sea, *son congruentes.*



Dem.) Una rotación de 180° en torno del eje MN hace coincidir cada punto A de la 1ª figura con su simétrico A' de la 2ª figura y así ambas figuras coinciden.

2ª) *La simetría respecto a un eje es una transformación recíproca.*

---

1) Radián es el ángulo del centro de un círculo cualquiera que subtiende entre sus lados un arco de longitud igual al radio. Es la unidad principal angular del sistema circular.

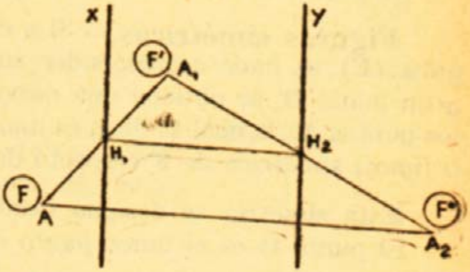
Un ∢ completo expresado en radianes es igual: $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes.

$\therefore$ $360° = 2\pi$ radianes; $180° = \pi$ radianes $= 3{,}1416$ radianes

$\therefore$ 1 radián $= 180° : 3{,}1416 = 57°{,}296 = 57°\ 17'\ 45''$.

Si (F') es simétrica de (F), (F) es simétrica de (F').

Productos de dos simetrías con relación a dos rectas.—Sean (F) una figura dada, (F') la figura homóloga de (F) respecto de la recta X; (F'') la figura homóloga de (F') respecto de la recta Y; A un punto cualquiera de (F) y A_1 su homólogo en (F'); (A_2) homólogo de (A_1) en (F'').



Los ejes X e Y son ||s.

Se tiene: $\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_1A_1}$ y $\overrightarrow{A_1H_2} = \overrightarrow{H_2A_2}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AH_1} + \overrightarrow{H_1A_1} + \overrightarrow{A_1H_2} + \overrightarrow{H_2A_2}$$

$$\text{y} \quad \overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{H_1A_1} + 2\overrightarrow{A_1H_2} = 2(\overrightarrow{H_1A_1} + \overrightarrow{A_1H_2})$$

Luego: $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{H_1H_2}$

El vector $\overrightarrow{H_1H_2}$ es de magnitud y dirección constante. Se pasa de (F) a (F'') por la traslación $2\overrightarrow{H_1H_2}$.

El producto de dos simetrías respecto de dos rectas paralelas es una traslación.

Simetría con relación a un punto.—

Dos puntos **A** y **A'** *son simétricos* respecto de un punto **O**, si este punto está situado en el punto medio del segmento **AA'**.

El punto **O** es el *centro de simetría.*

Figuras simétricas.— Si a cada punto **A** de una figura (**F**) se hace corresponder su simétrico **A'** respecto a un punto **O**, se obtiene una *nueva figura* (**F'**), L. G. de los puntos A', la cual se dice, es *una transformación* de (F) o *figura simétrica* de F respecto de O.

Esta simetría se designa también, por **simetria (O).**

El punto **O** es el único *punto doble* de la transformación.

La simetría con relación a un punto es una *transformación recíproca.*

Si la figura (F) es plana y el centro de simetría O está situado en su plano, su figura simétrica (F'), tiene mismo sentido que (F) y ambas figuras *son superponibles,* pues, esta simetría equivale al caso de la simetría respecto de una recta $\perp$ al plano de (F) en el punto O.

Fuera de este caso, dos figuras simétricas respecto de un punto no son superponibles. Los elementos correspondientes (distancias, $\sphericalangle$s) son iguales pero dispuestos en sentido inverso.

Producto de dos simetrías con relación a dos puntos.—Sean (F) una figura dada, (F_1) la figura homóloga de F respecto del punto O_1 y (F_2) homóloga de (F_1) en la simetría O_2.

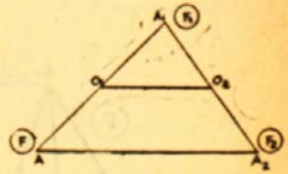
Si A es un punto cualquiera de (F) y A_1 su homólogo en (F_1), y A_2 homólogo de A_1 en Fig. (F_2), se tiene sucesivamente:

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{2O_1A_1} \text{ y } \overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{2A_1O_2}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=$$

$$\overrightarrow{2(O_1A_1}+\overrightarrow{A_1O_2})$$

Luego: $\overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{2O_1O_2}$



Se pasa de la Fig. (F) a la fig. (F_1) por una traslación de vector $\overrightarrow{2O_1O_2}$.

El producto de dos simetrías respecto a dos puntos es una traslación.

Las *figuras simétricas* de una figura dada *respecto de dos puntos* son *congruentes*.

Simetría con relación a un plano.—

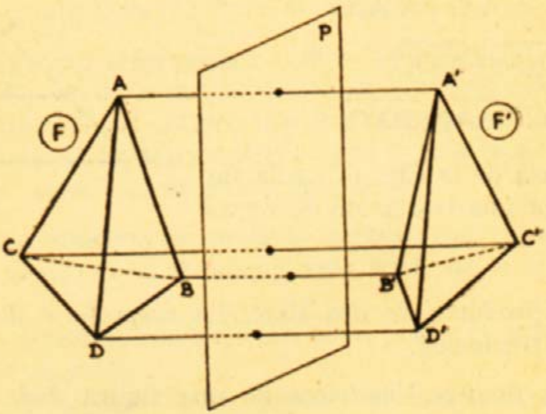
Dos puntos **A** y **A'** *son simétricos* respecto de un *plano* **P**, si este plano es ⊥ al segmento **AA'** en su punto medio.

Figuras simétricas.—Si a cada punto **A** de una figura (**F**), se hace corresponder su simétrico **A'** respecto a un plano **P**, se obtiene una *nueva figura* (**F'**), L. G. de los puntos **A'**, y que se dice *es transformación* de (**F**) *por simetría, o figura simétrica* de F respecto al plano P.

El plano **P** es el *plano de simetría*.

Todos los puntos del plano P son los *puntos dobles de la transformación*: Se consideran simétricos de sí mismos.

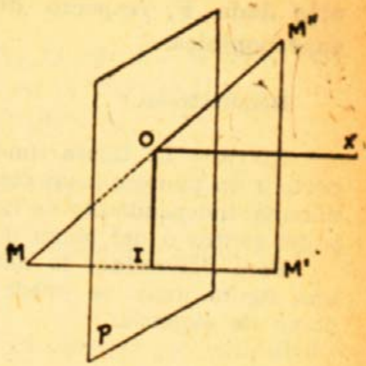
Esta es una transformación recíproca.



Dos figuras simétricas respecto *a un plano no son superponibles,* excepto el caso que sean planas y estén situadas en un plano ⊥ al plano de simetría.

Los elementos correspondientes (distancias, ∢s) son iguales pero dispuestos en sentido inverso.

TEOREMA 1.—**Dos figuras F' y F" respectivamente simétricas de una misma figura F respecto de un plano, son superponibles.**



Dem.) Sean M un punto de la figura F, M' y M'' sus simétricos respecto al plano P y al punto O.

Se traza $OX \perp P$.

El plano $MM'M'' \perp P$ (Teorema XCVIII).

$\therefore$ OX pertenece al plano MM'M'' y corta a M'M'' en su punto medio por ser O punto medio de MM'' y $OX \parallel MM'$.

$OX \perp M'M''$ por ser $\perp$ a su paralela OI.

$\therefore$ M' y M'' son simétricos respecto de OX.

Un giro de 180° alrededor del eje OX de la figura (F') la hará coincidir con (F'').

Luego F' y F'' son superponibles.

TEOREMA 2.—**Dos figuras simétricas, F' y F'' de una misma figura F, respecto de dos puntos O y O' cualesquiera, son superponibles.**

Dem.) En efecto, c/u de ellas es superponible a F''' figura simétrica de F respecto a un plano P que pasa por O' y O'.

TEOREMA 3.— **Dos figuras simétricas, F' y F'', de otra dada F con relación, respectivamente, a un plano P y a un punto O' exterior a este plano, son superponibles.**

Demuéstrese.

TEOREMA 4.— **Dos figuras simétricas, F' y F'', de otra dada F, respecto de dos planos cualesquiera, son superponibles.**

Demuéstrese.

NOTA.— La figura simétrica de una figura dada con respecto a un punto o a un plano cualquiera, es una figura determinada, independiente de la clase de simetría (punto o plano) y del centro o del plano de simetría.

Para determinar la naturaleza de la figura simétrica de una figura dada, se puede elegir a voluntad el centro o el plano de simetría.

Elementos de simetría de una figura.— Una figura admite *un centro, un eje* o *un plano de simetría, si todos sus puntos son de dos en dos simétricos,* respectivamente, con relación a *dicho centro, eje o plano de simetría,* según la clase de simetría de que se trate.

a) Ejemplos: en la circunferencia y la esfera, **el centro de simetría** coincide con su centro; en un polígono regular coincide con el centro de la ⊙ circunscrita. Un paralelógramo **y** un paralelepípedo son simétricos respecto al punto de intersección de sus diagonales... etc...

b) **Son ejes de simetría** de sus respectivas figuras: el diámetro de un círculo; las rectas que unen los centros de gravedad de las caras opuestas de un cubo; la recta que une los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedo regular, etc...

c) **Son planos de simetría de sus respectivas figuras:** el plano que pasa por las aristas opuestas ||s de un cubo, todo plano meridiano de una superficie de revolución, cada plano que pasa por el punto medio, de dos aristas opuestas y por dos vértices de un octaedro regular, etc...

Aplicaciones.—) *La figura simétrica de una recta es otra recta.*

2) *La figura simétrica de un* $\measuredangle$ *es otro* $\measuredangle$ *igual*: tomando como centro de simetría su vértice, la figura simétrica es el $\measuredangle$ opuesto por el vértice.

3) *La figura de un plano es otro plano.*

4) *La figura simétrica de un polígono plano es otro polígono igual al primero.*

5) *La figura simétrica de un diedro es otro diedro igual al primero pero de sentido contrario.*

§ 3.—HOMOTECIA [1]

Definición.—*Si se da un punto fijo* **O** *y un número algebraico* **k**, *si a cada punto* **M** *de una figura* **(F)**, *se hace corresponder un punto* **M'** *tal que* $\overrightarrow{\mathbf{OM'}}=\mathbf{k}\cdot\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ *se obtiene una nueva figura* **(F')**, *la cual, se dice, es homotética de la figura* **(F)**.

Esta definición supone que: a) *los puntos* **O, M, M'** *están en línea recta* (vectores $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{OM'}$ colineales); b) *la razón entre las distancias* **OM** *y* **OM'** *es constante.*

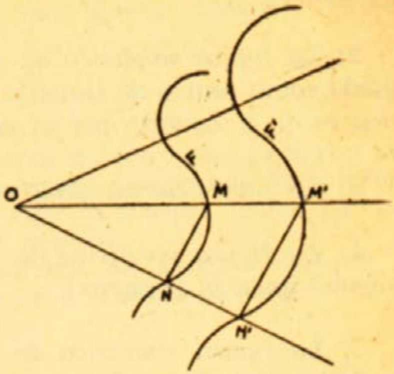
---

[1] Ver Homotecia en la pág. 287.

El punto **O** es *el centro de homotecia;* el número algebraico **k** es *la razón de homotecia.*

Una homotecia de centro O y de razón k se designa: **homotecia (O, k).**

Si **k>O**, la homotecia es *positiva* M y M' están situados al mismo lado del centro O.



Si **k<O,** la homotecia es *negativa;* M y M' están situados a distintos lados del centro O.

Si **k=1**, la homotecia equivale a la *transformación idéntica;*

Si **k=—1**, la homotecia equivale a *una simetría con respecto al centro O.*

La homotecia no es transformación recíproca sino en el caso de **k=—1**.

El punto **O** es homólogo de sí mismo; *es el único punto doble de la transformación.*

Propiedad fundamental.—*En dos figuras homotéticas, los vectores homólogos son* $\|$*s y están en una razón constante.*

Dem.) Sean $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{M'N'}$ dos vectores homólogos de dos figuras F y F' homotéticas de homotecia (O, k).

Se tiene: $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{ON}$; $\overrightarrow{ON'}=k \cdot \overrightarrow{ON}$

Se puede escribir la relación: $\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{ON'}}{\overline{ON}} = k\ldots$

Por consiguiente: M'N' y MN son $\parallel$s por determinar segmentos proporcionales sobre dos rectas secantes y la semejanza de los $\triangle$s OMN y OM'N' permite escribir: $\dfrac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = k$:

Luego: $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

Corolarios.—

1) *La figura homotética de una recta es otra recta.*

2) *La figura homotética de un ángulo es otro ángulo igual.*

3) *La figura homotética de un polígono es un polígono semejante.*

4) *La figura homotética de un plano es un plano* $\parallel$.

5) *La figura homotética de un círculo es otro círculo.*

6) *Las secciones* $\parallel$*s de un* $\measuredangle$ *poliedro son homotéticas.*

EJERCICIOS DE APLICACION

1. Los vértices A y B de un $\triangle ABC$, de magnitud invariable, resbalan sobre rectas $\parallel$s. Encontrar el L.G. del tercer vértice.

2. Por el punto A, intersección de dos $\odot$s que se cortan, se traza una secante variable y sobre esta secante, a partir de A, se aplican los segmentos AM y AN cuya longitud es igual a la semisuma de las cuerdas interceptadas. Hallar el L.G. de los puntos M y N.

3. Construir un segmento de longitud dada $\parallel$ a una recta de dirección dada y cuyos extremos estén situados sobre dos rectas dadas.

4. Construir un trapezoide dados: b, d, e, f, ε (método de traslación).

5. Se da un $\measuredangle AOB$ y un vector $\overrightarrow{V}$ de su plano. Construir el vector $\overrightarrow{MN}$ equipolente a V y tal que M se halle sobre OA y N sobre OB.

6. Determinar los elementos de simetría: a) de un cubo; b) de un tetraedro regular; c) de una pirámide recta regular cuadrangular; d) de un octaedro regular.

7. Demuestre que: a) Si una figura admite dos planos de simetría rectangulares dicha figura admite un eje de simetría; b) Si una figura admite tres planos de simetría rectangulares, de dos a dos, admite tres ejes de simetría y un centro de simetría.

8. Se dan dos puntos fijos A y B y én AB otros dos puntos M y N tales que la razón de sus distancias a los puntos A y B sea un número dado k. Demuestre que si la razón de las distancias de A y B a un recta L del espacio es igual a k, la razón de las distancias del pie de la $\perp$ bajada de M a L a los puntos A y B, es también igual a k.

9. Se dan dos △s isósceles congruentes ABC y ABD de base común y situados en planos diferentes. Demuestre que las rectas AB y CD son ⊥s, y que el tetraedro ABCD admite un eje de simetría.

10. Inscribir un cuadrado en un △ isósceles de modo que uno de los lados del cuadrado esté situado en la base del △ y los otros dos vértices se hallen en los lados iguales.

11. Un △ABC tiene el vértice A fijo, el vértice B describe una recta L y el lado BC permanece equipolente a un vector fijo $\vec{V}$. Hallar el L. G. del punto medio de los tres lados del △ ABC.

12. Demuestre que dos ⊙s tangentes son homotéticas respecto a su punto de contacto.

13. Dos ⊙s son tangentes en A. La tangente a una de ellas en un punto M, corta a la otra en B y C. Demuestre que la recta AM es bisectriz del ∢ BAC.

14. Construir un △ dados: α, t_a, t_b.

15. Dados un punto O y una ⊙ fija C que no pasa por O, trazar un secante AOB tal que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = k$, siendo k un número algebraico dado.

PROBLEMAS DE BACHILLERATO SOLUCIONABLES POR 6º AÑO DE HUMANIDADES

1.—Halle los términos de una proporción sabiendo que la suma de los medios es 5, la suma de los extremos es 7, y la suma de los cuadrados de sus 4 términos es 50. (Temuco, 1956)

2.—Construya las rectas $y = -x + 5$; $x - 3y = -3$; después determine el área del triángulo limitado por ellas y el eje de las abscisas. (Temuco, 1956).

3.—Resuelva:

$$\begin{aligned} mx &= ny = pz \\ ax + by + cz &= d. \end{aligned}$$

(Temuco, 1954)

4.—Construya el gráfico de la relación entre el perímetro de un triángulo equilátero y el lado del triángulo, suponiendo que éste es variable. Temuco, 1954).

5.—La Compañía de Electricidad me cobró por consumo:

Agosto	104 KWH	\$ 265,70
Septiembre	40 KWH	\$ 162.

La cuenta es a base de una cuota fija, más el pago de la energía consumida, más el 8 por ciento de impuesto. ¿Cuánto me cobrarán por los 28 KWH que gasté en Octubre?

Halle la solución por un sistema de ecuaciones o por representación gráfica. Talca, 1953).

6.—Resuelva

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} &= 2 \\ \frac{1}{x} - \frac{9x}{y^2} &= x \end{aligned}\right|$$

Talca, 1953).

7.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 4xy + 8y^2 &= 3 \\ 9x^2 + 6xy + 32y^2 &= 10 \end{aligned}\right|$$

(Santiago, 1955.

8.—En una proporción se tiene que la suma de los medios es 23 y la de los extremos 26. La suma de los cuadrados de los términos es 725.

¿Cuáles son los términos?

(Santiago, 1955).

9.—Al unir el punto P con el origen de un sistema ortogonal de coordenadas, se tiene que la distancia OP = 3 cm y el ángulo que OP forma con OX es igual a 30°. Calcular las coordenadas de los vértices de uno de los cuadrados que pueden construirse sobre OP.

(Santiago, 1955).

10.—Dibuje el gráfico de la función $3x - 2y = 5$ y determine en él un punto tal que la abscisa sea igual a la ordenada.

(Talca, 1955)

11.—Resolver:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + x^2y^2 &= 481 \\ x^2 + y^2 + xy &= 37 \end{aligned}$$

12.—Represente gráficamente las rectas:

$$x + 2y = 16$$
$$5x - 3y = 14, \text{ y}$$

determine las coordenadas de su punto de intersección.

13.—Resolver:

$$\begin{aligned} 2^{5x} : 2^{y} &= 2^{17} \\ b^{xy} &= b^{12} \end{aligned}$$

¿Qué puede decirse cuando $b = 1$?

14.—Por P (3,4) se traza PX perpendicular a OP.

¿Qué largo tiene PX?, siendo X el punto en que la $\perp$ intercepta al eje de las abscisas.

15.—El número formado por las dos últimas cifras del año en que nació Newton, aumentado en 12, es el doble del número formado por las dos últimas cifras del año de su fallecimiento.

Este último número de 2 cifras, aumentado en 1, da los 2/3 del primer número.

¿En qué año del siglo XVIII nació Newton?

16.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{1}{a} \\[2ex] \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{1}{a^2} \\[2ex] \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{a^3} \end{array}\right|$$

17.—Verifique mediante el cálculo, que el perímetro de un decágono regular inscrito es mayor que el del hexágono regular inscrito en igual circunferencia.

18.—Resuelva:

$$\left.\begin{array}{l} 3x = 11 - 6y - 14z \\ 14y = 35 - 6x - 36z \\ 98z = 113 - 14x - 36y \end{array}\right|$$

19.—Por un punto P intersección de dos circunferencias dadas O_1, O_2, se traza una secante que corta en A_1 y A_2.

20.—El centro M de una ⊙ es (—5, —12). ¿Cuál es su radio, si pasa por el origen? ¿Cuáles son los puntos en que corta a los ejes del sistema ortogonal?

21.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2 + by + c = o \\ bx - ay - c = o \end{array}\right|$$

22.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right) = 2 \\[2ex] y\left(1+\dfrac{y}{x}\right) = 3 \end{array}\right|$$

Santiago, 1952.

23.—Determinar el área del trapecio formado por los ejes ortogonales de un sistema de coordenadas y por:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 6 \\[2ex] \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right|$$

Santiago, 1952.

24.—Resolver:

$$\begin{array}{l} x+y=5xyz \\ y+x=8xyz \\ x+z=9xyz \end{array}$$

25.—Dos vértices de un triángulo equilátero son $Q(0,0)$ y $P(2,2\sqrt{3})$.

¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice? Discusión.

26.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} x^4+x^2y^2+y^4 = 91 \\[1ex] x^2-xy+y^2 = 7 \end{array}\right|$$

(Talca, 1950)

27.—El centro de un cuadrado es el punto de origen de un sistema ortogonal de coordenadas.

Si un vértice es A(—13, +85) ¿qué coordenadas tienen los otros vértices?

¿Cuánto mide el lado? y ¿cuánto la diagonal?

(Talca, 1950)

28.—Resolver:

$$x+y+pz=a$$
$$x+y+px=b$$
$$x+z+py=c$$

29.—Resuelva:

$$xy+xz=2xyz$$
$$xy+yz=5xyz$$
$$xz+yz=7xyz$$

(Valdivia, 1951).

30.—Resolver:

$$\frac{1}{u}+v=5$$
$$\frac{1}{v}+u=\frac{5}{6}$$

31.—Resolver:

$$1-y^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=0$$
$$y^2-2(x^2-y^2)=0$$

32.—Resolver:

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$
$$\frac{y}{z}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$
$$xyz=a+b+c$$

33.—Un tren recorre cierta distancia a velocidad constante. Si ésta, aumenta en 6 Km por hora, el tiempo empleado para recorrer la distancia disminuye en 4 horas; y si la velocidad disminuye en 6 Km por hora, el tiempo aumenta en 6 horas.

Calcule la distancia y las tres velocidades.

34.—Determine qué valores hay que dar a **m** y **n** en:

$$mx+2ny=b$$
$$5mx-ny=2$$

Para que $x = 11$
$y = 4$

(Valdivia, 1951)

35.—Se dibujan dos rectas a partir del punto P (1,1) que cortan en los semiejes del primer cuadrante brazos iguales a $\frac{1}{2}$.

¿Cuál es el área del cuadrilátero que se forma?

(Valdivia, 1951).

36.—Determine dos cantidades de las cuales se conoce la suma **a** de sus recíprocos y la suma **b** de sus cuadrados.

(Valparaíso, 1952).

37.—En una circunferencia se inscribe el triángulo equilátero ABC, y en seguida se dibuja el $\sphericalangle BAD=45^\circ$, siendo D punto de la circunferencia. Desde D se bajan las perpendiculares a los lados del triángulo.

¿Cuánto mide cada una de estas perpendiculares, en función del lado **a** del $\triangle$?

(Valparaíso, 1952).

38.—Resolver:

$$\left.\begin{aligned} \frac{xy}{4y-3x} &= 20 \\ \frac{yx}{5z-4y} &= -12 \\ \frac{xz}{2x-3z} &= 15 \end{aligned}\right|$$

(Valparaíso, 1952).

39.—Resuelva:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{y}} &= \frac{33}{4} \\ x - y &= 5 \end{aligned}\right|$$

(Punta Arenas, 1952)

40.—Resuelva:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 4y &= -6 \\ xy + 3x + 3y &= 15 \end{aligned}\right|$$

(Punta Arenas, 1952).

41.—Encontrar 4 números proporcionales entre sí, tales que la suma de los extremos sea 21, la suma de los medios 19, y la suma de los 4 números 442.

42.—Resuelva:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= 4 \\ x^2 - y^2 &= 9 \end{aligned}\right|$$

43.—Resuelva:

$$\left.\begin{aligned} 5x - 2y &= 13 \\ 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} &= 3 \end{aligned}\right|$$

44.—Resuelva:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} &= \frac{z^2}{c^2} \\ bcx^2 + acy^2 + abz^2 &= m^2 \end{aligned}\right|$$

45.—Encontrar el área del triángulo limitado por el eje de abscisas, la recta $y = 2x$.

y la recta $x = 5$.

46.—La suma, la diferencia y el producto de dos números son entre sí como 5 : 3 : 16.

¿Cuáles son los dos números?

47.—Resolver y representar gráficamente, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x\sqrt{2}-y\sqrt{3}=1$$
$$x^2-xy\sqrt{3}=0$$

48.—En un sistema ortogonal de coordenadas, la unidad elegida es el cm. Un móvil parte del origen, ascendiendo en la recta $y=\frac{1}{2}x$ hasta llegar a $y=-\frac{1}{2}x+7$ por la cual desciende hasta el eje de las x. ¿Cuánto ha demorado si se ha movido con velocidad uniforme de 3 cm /minuto? ¿A qué distancia del origen termina su movimiento en el eje OX?

49.—Determinar el área del cuadrilátero formado por los dos ejes de coordenadas ortogonales y las rectas $y-x=3$

$$x=2$$

50.—Resolver:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=29\\ xy-yz-zx&=-14\\ x+y+z&=9 \end{aligned}$$

51.—Demuestre que (1,7), (3,0), (3,5), (1,—1) son los vértices de un trapecio. Calcule su mediana y su área.

52.—Resolver:

$$\begin{aligned} x^3+8y^3&=35\\ x+2y&=5 \end{aligned}$$

53.—Representar gráficamente la relación que existe entre el lado y la diagonal de un cuadrado.

54.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2} \\[2ex] x + y = \dfrac{3}{2} \end{array}\right|$$

55.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + xy = 17 \\ 2x + 3y + xy = 29 \end{array}\right|$$

56.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ 0 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{array}\right|$$

(Santiago, 1951).

57.—Resolver:

$$\left.\begin{array}{l} x(y+z) = a \\ y(z+x) = b \\ z(x+y) = c \end{array}\right|$$

58.—Un empleado recibe su sueldo de E° 8.000 el primer día de cada mes; el día 4 paga E° 3.000 de arriendo y el día 9, las cuentas de gas y luz que suman E° 400. Fuera de ello, el gasto diario es de E° 140. Hacer el gráfico del dinero que le resta desde el primer día de cierto mes y por dos meses consecutivos, suponiendo que al recibir el primer sueldo mensual considerado, le quedaban E° 200.

59.—Divida un trapecio en 3 partes equivalentes mediante paralelas a las bases.

(Temuco, 1950).

60.—El desarrollo de un tetraedro regular es un paralelógramo cuyo lado menor mide $\sqrt{5}$[cm] — ¿Cuál es la superficie y el volumen del cuerpo?

(Temuco, 1950)

61.—Un observador situado en Ecuador ve el día 4 de febrero a una hora dada una estrella en el meridiano del lugar.

¿Dónde ve esa misma estrella, desde el mismo lugar y a la misma hora, los días 1.o de mayo y 4 de mayo? ¿Por qué? Si no estuviera en el Ecuador ¿serían iguales las respuestas?

(Talca, 1955)

62.—Dos circunferencias se cortan bajo ángulo recto. Se pide encontrar la distancia de los 2 centros y la magnitud de la cuerda común sabiendo que los radios son respectivamente iguales a 3 cm y 4 cm.

(Santiago, 19555).

63.—La altura de culminación superior de una estrella, en Santiago, es igual a su declinación austral. ¿Cuánto vale esta declinación si en Santiago la declinación es 33° 34'? ¿Es o no estrella circumpolar?

(Santiago, 1955).

64.—El día solar medio es 1,00274; tomando como unidad el día sideral; expresarlo en horas, minutos y segundos.

(Talca, 1950).

65.—Hable de la paralaje y del diámetro aparente.

Señale algunas aplicaciones.

(Valparaíso, 1952).

66.—Diga lo que sepa acerca de los eclipses de luna, e ilustre con dibujos sus explicaciones.

67.—¿Cuál debería ser la velocidad, expresada en [km/h] a que debería viajar un automóvil a lo largo del Ecuador terrestre para que el tiempo no transcurra para él?

¿En qué sentido debería moverse?

68.—¿Cuál es la menor distancia, medida en la superficie terrestre, entre dos puntos de la Tierra pertenecientes al mismo meridiano, cuyas latitudes son +33° y —27°?

¿Cuál es la mayor distancia?

R=6370,26 [km].

69.—Construir las expresiones:

a) $$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

b) $$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}$$

c) $$x = \sqrt{a^2\sqrt{3} - bc\sqrt{2}}$$

70.—La declinación boreal de una estrella es de 45°, y culmina a 50° al norte del cenit.

¿Cuál es la altura del polo sobre el horizonte del lugar de observación?

71.—Hable acerca de los principales movimientos de la tierra.

72.—Calcule el radio del paralelo terrestre en que un grado mide 5.555,5 m.

¿De qué paralelo se trata, aproximadamente?

(Talca, 1956).

73.—¿Cuál es la mayor altura de culminación que alcanza el sol en cualquier ciudad de Chile?

¿Qué días se verifica?

(Santiago, 1952).

74.—En cierto día, el sol pasa por el meridiano del lugar, simultáneamente con una estrella determinada. ¿Qué ocurre al día siguiente? ¿Qué consecuencia acerca del movimiento de la tierra, deriva Ud. de la consecuencia que señala?

75.—¿En qué parte del firmamento están situados y pueden verse los planetas, especialmente Venus?

Explique por qué.

76.—¿Cuáles son las variaciones periódicas de la declinación del sol? Determine la mayor y la menor altura del sol para Santiago, latitud 33° 26' 42" y longitud 73° 1' 44". ¿En qué día del año ocurren esas alturas solares? ¿Hay algún dato de más en el problema?

(Punta Arenas, 1952).

77.— La latitud geográfica de Santiago es 33° 33' 33". Calcular la distancia cenital de una estrella, cuya declinación es 28° 19' 53", en el momento de su culminación en el meridiano de Santiago.

78.—Enuncie y comente la ley de la gravitación universal de Newton. Aplíquela a la determinación del peso de 1 [kg-masa] en la luna y en el sol; compararlo con el que tiene en la tierra, sabiendo que las masas de la luna y del sol, son respectivamente: 1/81 y 333.432 veces la de la tierra; y que los radios de estos cuerpos miden 3/11 y 110 radios terrestres.

79.—Calcular la latitud de un lugar, en el que la sombra de una estaca vertical, en el solsticio de verano y a mediodía verdadero, tiene una longitud de **a** (cm), siendo la estaca de $a\sqrt{3}$ cm de longitud.

80.—La rueda delantera de un coche da 50 vueltas más que la trasera, cuando el coche recorre 1 kilómetro. La suma de las dos ruedas (⊙s) es 9 m. ¿Cuánto miden sus radios?

81.—Santiago está a 33° 30' s". ¿Cuáles son los ángulos de elevación máxima y mínima que, en Santiago, puede tener el sol a mediodía? ¿Por qué no se indicó en esta cuestión, el número de segundos de la latitud de Santiago?

(Talca, 1953).

82.—¿A qué distancia del Ecuador se encuentra Santiago si su latitud es de —33° 23' 39"? El arco de meridiano correspondiente a 1° es de 111,1 km.

Talca).

83.—Una estrella cuya declinación es 42°, alcanza en su movimiento diurno una altura máxima de 84°. ¿Cuál es la latitud del lugar de observación?

84.—La latitud de un lugar es 40° 50' — se pide calcular las distancias cenitales de una estrella cuya declinación austral es de 70° 10' en los momentos de sus pasos por el meridiano ¿Entre qué límites debe variar la declinación de una estrella para que salga y se ponga a la misma latitud?

85.—Explique las fases lunares.

(Santiago, 1951).

86.—¿Qué consecuencias estima Ud. que afectarían a la vida en la Tierra, si su eje de rotación quedara perpendicular al plano de la eclíptica?

¿Cuáles, en el caso de que dicho eje estuviera situado en el plano de la órbita?

Justifique sus respuestas.

87.—Explique la noche polar.

88.—Relación entre la latitud de un lugar y la altura del polo en ese lugar. Explique con una figura. Explique también qué relación existe entre longitud geográfica y hora de un lugar.

89.—Se da el lado **a** de un cuadrado inscrito en una circunferencia, en la cual está circunscrito otro cuadrado que, a su vez, está inscrito en una segunda circunferencia... y así, sucesivamente.

Calcular el lado del cuarto cuadrado, así obtenido.

90.—Resolver y construir:

$$\frac{a}{b} + x = \frac{\frac{c}{d} + x}{d}$$

91.—Se corta una esfera por un plano, de modo que la diferencia de las áreas de los casquetes obtenidos sea equivalente al área de la sección plana. Se pide determinar en función del

R de la esfera, la distancia de la sección al centro O de la esfera.

92.—Hoy día las edades de tres personas están en la razón de 7 : 9 : 10.

¿Cuáles son sus edades, si hace 4 años las de las dos últimas eran como 23 : 26?

93.—Sabiendo que se verifican:

$$a + b = 7$$
$$b + c = 8$$
$$a + c = 9,$$ demostrar que se tiene
$$c = a+1 = b+2.$$ Y en seguida resolver el sistema, aprovechando dicha propiedad.

94.—¿Cuál es la razón entre la arista a de un cubo, y el radio R de una esfera, si ambos tienen igual superficie e igual volumen?

95.—Dos capitales suman E° 100.000 y están colocados al 3% y al 4% de interés anual. En dos años, a interés simple, producen en total E° 7.500. Determine los dos capitales.

96.—Dos circunferencia secantes, tienen radios de 3 m y 4 m. Sus centros distan entre sí 5 m. Determine la superficie que resulta si el conjunto gira en 360° en torno de la línea de los centros.

97.—Se dan los trazos: **a, b, c** y se pide construir:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{c} \sqrt[4]{1 + \sqrt{2}}$$

98.—Se dan los trazos: **a, b, c** y se pide construir:

$$x = \frac{a^2 + b^2}{c} \sqrt{5 + \sqrt{7}}$$

99.—Determine el volumen comprendido entre dos esferas tangentes exteriormente y la superficie cónica tangente a ellas, si sus radios miden 2 cm y 1 cm.

100.—Una pirámide recta regular triangular, en que el apotema lateral es igual a la arista basal, se corta por un plano paralelo a la base y que dimidia las aristas laterales; determine la razón entre las superficies totales de los dos cuerpos resultantes.

(Temuco, 1954)

101.—Construya el trazo:

$$x = \frac{m\sqrt{n}+n\sqrt{p}}{\sqrt{n+p}}$$

m, n, p son trazos dados.

(Temuco, 1956)

102.—Demuestre que si un triángulo rectángulo isósceles gira en 360°, en torno a la paralela a la hipotenusa trazada por el vértice del ángulo recto, engendra un volumen igual al de la esfera que tiene a la hipotenusa por diámetro.

(Temuco, 1956)

103.—En una circunferencia de diámetro **2r** se pide inscribir un trapecio de modo que una de sus bases sea diámetro de la circunferencia, y que la suma de los cuadrados de los otros tres lados sea igual a 0,35 r^2.

(Talca, 1955).

104.—Compare los volúmenes, superficie laterales y superficies totales de 2 cilindros, uno de los cuales tiene una circunferencia basal de perímetro **a** y altura **b** y el otro tiene una $\odot$ basal de perímetro **b** y su altura es **a**.

(Talca, 1955)

105.—Construir un triángulo, dados:

$$a + b,\ p,\ q.$$

(Santiago, 1955).

106.—Un cuadrado, un triángulo equilátero y una circunferencia tienen igual perímetro.

¿En qué razón están sus áreas?

(Concepción).

107. Construir el trazo:

$$x = \sqrt[3]{a^3 \pm b^3}$$

(Concepción)

108. Dados los trazos a, b, c, construir la expresión:

$$x = \sqrt{a^2 \pm \sqrt{b^4 - c^4}}$$

109. Tres números tienen por suma 57; si el primero se aumenta en 7, el segundo en 5 y el tercero en 3, los números aumentados son entre sí como 3 : 4 : 5. ¿Cuáles son los números?

110. En un tetraedro regular se traza un plano paralelo a una de las bases y equidistante de ella y del vértice opuesto. Calcular en función de la arista a, del tetraedro, las superficies totales de los cuerpos resultantes.

(Santiago, 1956)

111. Resolver:

$$a : b : c = 5 : 6 : 1$$

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$$

(Santiago, 1956)

112. Repartir E° 801,000 entre 4 personas en razón inversa a sus edades que son: 20, 25, 30 y 40 años.

(Talca, 1953)

113. Construya la expresión:

$$t = \sqrt{pq - mn\sqrt{3}}$$

m, n, p, q son trazos dados.

(Talca, 1953)

114. Se da un cuadrado de lado, a. Se pide determinar la superficie del anillo limitado por las ⊙s inscrita y circunscrita al cuadrado, y la altura que debe tener un tronco de cono recto que tiene por bases los dos círculos, para que su superficie lateral sea equivalente a la del anillo.

(Talca, 1953)

115. Desde un vértice de un cuadrado dado, trace una transversal que lo divida en la razón 1 : 2.
Indice el Nº de soluciones. (Temuco, 1964)

116. Una pirámide recta regular triangular en que el apotema lateral es igual a la arista basal, se corta por un plano paralelo a la base y que dimidia las aristas laterales, determine la razón entre las superficies totales de los dos cuerpos resultantes. (Temuco, 1954)

117. ¿Qué forma ofrece la sección central de un cono recto circular cuando su superficie lateral es la sección áurea de su superficie total. (Talca, 1953)

118. Kepler descubrió que los cubos de las distancias de los planetas al sol, son proporcionales a los cuadrados de sus períodos. Sabiendo que la distancia de Venus al sol es 0,7225 de la distancia Tierra-Sol y que la de Marte es 2,1025 de la de Venus, calcule los períodos de Venus y Marte, tomando como unidad, el período de la Tierra. (Talca, 1953)

119. Demuestre que las distancias de un punto, situado en el interior de un pentágono regular, a los lados, es igual a 5 veces el radio de su circunferencia inscrita. Generalice el problema. (Valdivia, 1951)

120. Resuelva:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\;\dfrac{x}{y}\;}{\dfrac{z}{u}} = \dfrac{\;\dfrac{a^3+a^2+a+1}{a^2+a+1}\;}{\dfrac{a+1}{1}} \\[2em] \dfrac{y}{u} = \dfrac{a^2+a+1}{1} \\[1.5em] x-y+z+u = \dfrac{a(a^4-1)}{a+1} \end{array}\right|$$

(Valdivia, 1951)