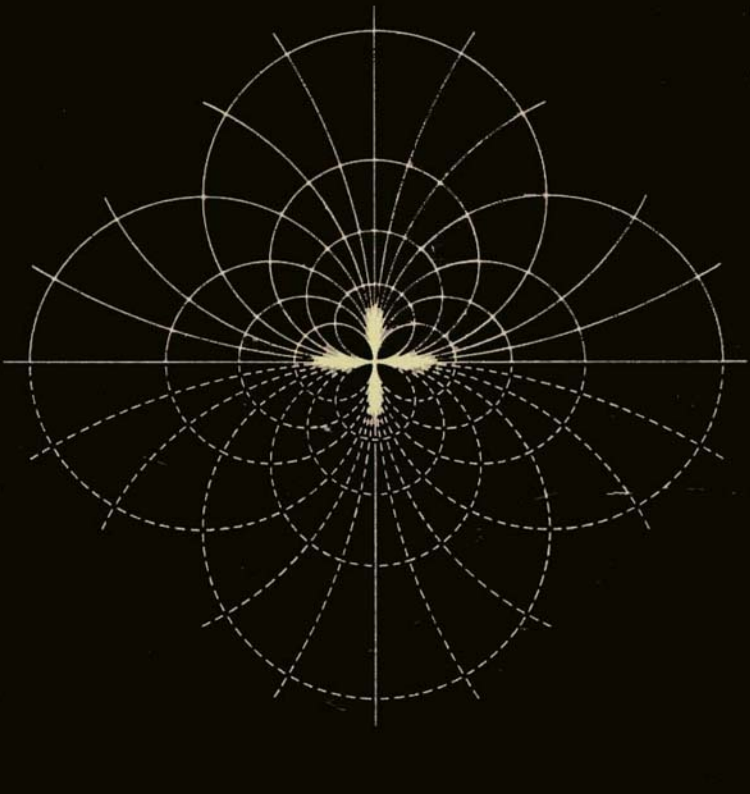
GEOMETRÍA SUPERIOR

N. V. EFÍMOV



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Н. В. ЕФИМОВ

ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

GEOMETRÍA SUPERIOR

N.V. EFÍMOV

EDITORIAL·MIR·MOSCÚ

Traducido del ruso
por J. J. Tolosa, candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas,
y Yu. P. Murzín

Impreso en la URSS

На испанском языке

Indice

PARTE I

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

Capítulo I. Breve reseña de las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría

Capítulo II. Axiomas de la geometría elemental

Capítulo III. Teoría no euclidiana de las paralelas

Parte I

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

Capítulo I

BREVE RESEÑA DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRÍA

1. Axiomas de Euclides

§ 1. El surgimiento de las ideas geométricas se remonta a épocas muy lejanas. Las primeras formulaciones de las mismas son comúnmente adjudicadas a las antiguas culturas de Babilonia y de Egipto.

A partir del siglo VII antes de nuestra era comienza el período del desarrollo de la geometría en los trabajos de los científicos griegos. En los siglos VI y V se obtuvieron muchos resultados geométricos fundamentales. Hacia esta época, por lo visto, se consolidó el concepto de demostración de teoremas.

En el siglo III los griegos ya poseían conocimientos geométricos profundos; ellos no sólo tenían acumulada una buena cantidad de resultados, sino que también disponían de métodos de demostraciones geométricas. Resulta natural, por ello, que en este período aparecieran tentativas de reunir todo este material y disponerlo en un orden lógico coherente.

Muchos autores griegos, cuyas obras no han llegado hasta nosotros, acometieron la tarea de exponer los principios de la geometría. Por lo visto, fueron olvidados luego de la aparición de los famosos «Elementos» de Euclides.

§ 2. Euclides, uno de los grandes geómetras de la antigüedad, vivió en un período que se extiende aproximadamente del año 330 al 275 antes de nuestra era. Sus «Elementos» fueron divididos en 13 libros, de los cuales el quinto, el séptimo, el octavo, el noveno y el décimo están dedicados a la teoría de las proporciones y a la aritmética (expuestas en forma geométrica); los restantes son propiamente geométricos.

El libro primero contiene las condiciones de igualdad de triángulos, las relaciones entre lados y ángulos de triángulos, la teoría de líneas paralelas y criterios de equivalencia de triángulos y polígonos. En el segundo libro se expone la transformación de un polígono en un cuadrado equivalente. El libro tercero está dedicado a la circunferencia. En el cuarto se consideran los polígonos inscritos y circunscritos. El libro sexto analiza la semejanza de polígonos. En los tres últimos libros se exponen los fundamentos de la estereometría.

Así, pues, los «Elementos» contienen el material correspondiente a la geometría elemental propiamente dicha. Mucho de lo que ya se sabía en los tiempos de Euclides (por ejemplo, la teoría de las secciones cónicas) no se halla expuesto en los «Elementos».

Euclides comienza cada libro definiendo los conceptos que tendrá que manejar en él.

El primer libro está precedido de 23 definiciones. Transcribimos las primeras ocho.

Definición I. El punto es aquello que no tiene partes.

Definición II. La línea es longitud sin ancho.

Definición III. Las fronteras de una línea son puntos.

Definición IV. La recta es aquella línea que se halla igualmente dispuesta con respecto a todos sus puntos.

Definición V. La superficie es lo que posee únicamente longitud y ancho.

Definición VI. Las fronteras de una superficie son líneas.

Definición VII. El plano es una superficie que se halla igualmente dispuesta con respecto a todas las rectas que se encuentran en ella.

Definición VIII. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran, y que están situadas en un mismo plano.

Inmediatamente después de las definiciones, Euclides expone los postulados y los axiomas, es decir, afirmaciones que se aceptan sin demostración*).

Postulados

I. Se exige que de cada punto a cualquier otro se pueda trazar una línea recta.

II. Y que cada recta pueda ser continuada indefinidamente.

III. Y que de cualquier centro se pueda trazar una circunferencia de radio arbitrario.

IV. Y que todos los ángulos rectos sean iguales.

V. Y que cada vez que una recta, al intersecar otras dos, forme a un mismo lado ángulos internos cuya suma sea menor que dos rectos, y que dichas dos rectas se intersequen en aquel lado en el cual esta suma sea menor que dos rectos.

Axiomas

I. Dos cosas iguales separadamente a una tercera son iguales entre sí.

II. Y si a iguales agregamos iguales, obtenemos iguales.

III. Y si de iguales quitamos iguales, obtenemos iguales.

IV. Y si a desiguales agregamos iguales, obtenemos desiguales.

V. Y si duplicamos iguales, obtenemos iguales.

VI. Y las mitades de iguales son iguales entre sí.

VII. Y cosas que se pueden superponer son iguales.

VIII. Y el todo es mayor que una parte.

IX. Y dos rectas no pueden encerrar espacio.

Se duda que algunos de los axiomas referidos (los IV, V, VI y IX) pertenezcan realmente a Euclides. En otras ediciones de los «Elementos» los postulados IV y V se incluyen entre los axiomas; a esto se debe que el quinto postulado a veces se mencione como el axioma XI. En cuanto al principio por el cual las premisas básicas se

---

*) En distintas ediciones de los «Elementos» las listas de postulados y axiomas no coinciden. Aquí reproducimos una de las listas más difundidas.

ponían entre los postulados o entre los axiomas, éste ha quedado en esencia sin aclarar.

A continuación de los axiomas, Euclides expone los teoremas de la geometría, disponiéndolos en orden lógico, de forma que cada proposición pueda demostrarse a base de las proposiciones, los postulados y los axiomas precedentes.

§ 3. La enumeración de definiciones y axiomas, suficientes para la demostración lógica rigurosa de todos los teoremas subsiguientes se denomina fundamentación (axiomática) de la geometría.

El problema de fundamentar la geometría fue planteado claramente por Euclides en sus «Elementos» y resuelto con el grado de precisión que se podía alcanzar en la antigüedad. Es más, posteriormente, durante muchos siglos, el rigor de las demostraciones euclidianas se reconoció invariablemente como un modelo a imitar.

Sin embargo, si consideramos la exposición de los «Elementos» desde el punto de vista de las matemáticas modernas, habrá que reconocer que es insatisfactoria en varios aspectos.

Analicemos ante todo las definiciones de Euclides; algunas han sido expuestas más arriba.

Los enunciados de estas definiciones operan con conceptos que, a su vez, deberían ser también definidos, tales como «frontera», «longitud», etc. Ninguna de las definiciones I — VIII es utilizada en la demostración de teorema alguno; por ende, al no estar relacionadas con el resto del libro son, en esencia, inútiles, y pueden ser omitidas sin dañar lo más mínimo los razonamientos ulteriores. Estas definiciones son tan sólo descripciones de las figuras geométricas, expuestas, por lo demás, en forma extremadamente ingenua.

Por el contrario, los postulados y axiomas son, en general, esenciales; al demostrar muchas proposiciones geométricas hay que tomar en consideración, por ejemplo, que la recta se determina por dos de sus puntos, que existe una circunferencia de radio arbitrario, etc. Pero aquí hay que destacar otro problema: inclusive un análisis superficial pone al descubierto que la lista de proposiciones básicas adoptadas por Euclides sin demostración es demasiado pobre para servir de base a un desarrollo lógico de la geometría. Daremos algunos ejemplos, a fin de aclarar este juicio.

En los razonamientos geométricos hay que operar a cada paso con conceptos que habitualmente expresamos con la frase «el punto dado de la recta se encuentra entre otros dos puntos de ésta», «dos puntos se encuentran a un lado con respecto de una recta».o también «dos puntos se encuentran en lados diferentes con respecto a una recta», «el punto se encuentra dentro del polígono», etc. Los postulados de Euclides no suministran ningún dato para fundamentar estos conceptos. Cuando los utilizamos en la demostración de algún teorema, si disponemos únicamente de los postulados de Euclides, nos vemos obligados a apelar a la intuición geométrica sobre la base de la figura dibujada. Sin embargo, en una construcción lógica rigurosa de la geometría, cada proposición no contenida en los axiomas debe ser demostrada, por más evidente que parezca.

Cabe observar, además, que, según el significado del axioma VII, la igualdad de magnitudes y figuras geométricas se define mediante movimientos. Por otra parte, el propio concepto de movimiento no está definido en los libros de Euclides, y sus propiedades no se enumeran en ningún axioma. Por último, cada vez que Euclides considera dos circunferencias, una de las cuales pasa por un punto interior y otro exterior con respecto a la otra, él asume sin más la existencia de puntos de intersección de éstas; asimismo, cuando se trata de una recta que pasa por un punto interior de alguna circunferencia, se acepta que la recta y la circunferencia se cortan en dos puntos. A pesar de la evidencia intuitiva de estos hechos, ellos deben ser demostrados. Pero no hay entre los postulados y axiomas de Euclides ninguna proposición que permita fundamentar tales demostraciones.

Resulta ser, entonces, que el rigor de la lógica de Euclides se basa, en muchos casos, en la intuición adquirida por el hábito de nuestras representaciones espaciales. Esto quiere decir que los «Elementos» no contienen una fundamentación lógica rigurosa de la geometría.

§ 4. Algunas de las fallas de los «Elementos» de Euclides fueron observadas ya por los científicos de la antigüedad. En particular, Arquímedes amplió la lista de los postulados geométricos, y completó mucho la exposición de Euclides en la teoría de medición de longitudes, áreas y volúmenes. Mientras Euclides establece únicamente relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes, mostrando, por ejemplo, que las áreas de los círculos son como los cuadrados de los radios, y los volúmenes de esferas como los cubos de los radios, Arquímedes presenta expresiones que permiten calcular prácticamente las magnitudes correspondientes. Este último introdujo los cinco postulados siguientes, a fin de fundamentar la geometría métrica:

I. Entre todas las líneas con extremos comunes la recta es la más corta.

II. Otras dos líneas cualesquiera que tengan extremos comunes y se hallen en un mismo plano no son iguales, si ambas son convexas y una de ellas es encerrada por la otra y por la recta que une los extremos, así como tampoco lo son si las curvas tienen una parte común, y de las partes restantes una encierra a la otra; en este caso, la encerrada es menor que la que encierra.

III. Asimismo, de todas las superficies con una misma periferia plana, el plano es menor que todas las demás.

IV. Cualesquiera otras dos superficies con periferia plana común no son iguales, si ambas son convexas y una de ellas (o una parte de ésta) está encerrada por la otra y por el plano de la periferia; en este caso, la superficie encerrada es menor que la que encierra.

V. Además, de dos líneas desiguales, dos superficies desiguales, o dos cuerpos desiguales, la mayor resultará ser menor que la magnitud que se obtiene si se repite la menor un número adecuado de veces.

Las primeras cuatro proposiciones de Arquímedes no sirven para tomarse como postulados en una fundamentación lógica de la geometría métrica, pues se refieren a la longitud de una línea, el área de una superficie y el volumen de un cuerpo, mientras que estos conceptos deben ser, en rigor, definidos a partir de otras categorías geométricas más simples. Si se enuncian estas definiciones de manera adecuada, las afirmaciones de Arquímedes pueden ser demostradas; es por ello que no tiene sentido considerarlas como postulados.

Por el contrario, la última afirmación, que es llamada comúnmente postulado de Arquímedes, es extremadamente importante. Se la puede expresar brevemente como sigue: para cualesquiera a y b, $a < b$, existe un entero n tal que $na > b$. Este postulado sirve de base a la medición de magnitudes geométricas, como se mostrará en detalle en el capítulo II, § 20.

Después de Arquímedes también continuaron los intentos de precisar los postulados básicos de la geometría. Sin embargo, durante muchos siglos nadie agregó nada nuevo en principio a lo que ya había sido hecho por Euclides. El rigor de las demostraciones euclidianas se consideraba en general suficiente, hasta el siglo XIX. Sólo a fines de dicho siglo fue cristalizada definitivamente la idea de una construcción lógica exacta de la geometría, e indicado un sistema completo de axiomas de los cuales se deducen todos los teoremas sin apelación alguna a nuestra intuición en las representaciones espaciales.

Muy pocos geómetras sentían la necesidad de completar la lista de los postulados de Euclides. Por el contrario, la mayoría de las obras relacionadas con los «Elementos» de Euclides se proponían disminuir el número de afirmaciones geométricas que se asumían sin demostración. Esto era dictado por un deseo completamente natural de poner en claro bajo qué premisas mínimas puede ser desarrollado de modo lógico todo el material de la geometría.

En esta dirección se obtuvo un resultado sin trabajo alguno: precisamente, se observó que el IV postulado de Euclides es superfluo, pues la igualdad de los ángulos rectos puede ser demostrada con el mismo rigor que muchas otras proposiciones.

La mayoría de las obras dedicadas a los fundamentos de la geometría se reducían a la tentativa de eliminar de la lista de suposiciones básicas el V postulado de Euclides, que parecía ser demasiado complicado para ser referido a los postulados.

Los estudios dedicados al V postulado son tan antiguos como los propios «Elementos» de Euclides. Sólo fueron concluidos hacia fines del siglo XIX, y condujeron a descubrimientos de gran importancia.

Pasamos a referir algunas páginas de la historia del V postulado; esto facilitará al lector la comprensión de los problemas modernos de los fundamentos de la geometría.

2. El quinto postulado

§ 5. Para cualquiera que haya estudiado la geometría elemental le resultará claro el papel fundamental del V postulado; en él se basa la teoría de las paralelas y todas las secciones relacionadas con ésta: la semejanza de figuras, la trigonometría, etc.

Recordemos la sucesión de proposiciones de partida de la planimetría, a fin de observar dónde se utiliza por primera vez el V postulado.

En los manuales escolares se introduce, ante todo, la comparación de figuras geométricas: segmentos, ángulos, triángulos se consideran iguales si pueden ser superpuestos por medio de un movimiento; un segmento (ángulo) es mayor que otro, si el segundo puede ser superpuesto a una parte del primero. El propio concepto de movimiento queda, en esencia, sin definir.

A continuación se muestra una serie de teoremas básicos, entre ellos:

Teoremas de igualdad de triángulos.

Teorema: en un triángulo isósceles los ángulos adyacentes a la base son iguales.

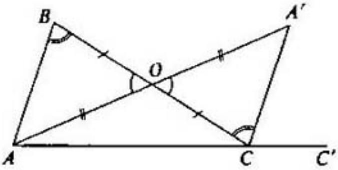


Fig. 1

Teorema: el ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de los internos no adyacentes.

Teorema: en un triángulo, a mayor lado le corresponde mayor ángulo opuesto (y recíprocamente).

Teoremas sobre rectas perpendiculares y oblicuas.

Teorema: cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Es de particular interés para nuestra exposición el teorema sobre los ángulos interno y externo de un triángulo; más adelante nos referiremos con frecuencia a él. Pasamos a demostrarlo. Sea dado el triángulo ABC (fig. 1); hay que mostrar que cada ángulo externo es mayor que cualquier interno no adyacente. Probemos esto para el ángulo externo correspondiente al vértice C y para el interno en el vértice B.

Sea O el punto medio del lado BC; construimos el segmento AO y, sobre su prolongación, determinamos el punto A' de forma que se cumpla $AO = OA'$. Ahora unimos el punto A' con el C, y pasamos a considerar los triángulos AOB y $A'OC$. Estos son iguales, por contener ángulos iguales determinados por lados respectivamente iguales. De la igualdad de dichos triángulos sigue que $\angle ABC = \angle BCA'$. De aquí ya se deduce el teorema, pues $\angle BCA'$ es una parte del ángulo externo en cuestión.

El último paso de la demostración debe considerarse con más cuidado. Precisamente, el hecho de que $\angle BCA'$ sea parte de $\angle BCC'$, o bien que el punto A' se encuentre dentro de $\angle BCC'$ (donde C' es un punto arbitrario sobre la prolongación del segmento AC), se establece, en esencia, a partir de la intuición geométrica, mirando la figura. Como ya hemos indicado, los axiomas de Euclides no permiten fundamentar con todo rigor los conceptos «entre», «dentro de», etc.

Además, hemos utilizado el concepto de igualdad de triángulos, que tampoco está fundamentado, pues Euclides no define movimiento.

En resumen, el razonamiento expuesto se basa fuertemente en la intuición geométrica aplicada al dibujo hecho.

Por supuesto, podríamos hacer observaciones similares en la deducción de casi cualquier teorema geométrico. Pero es, con todo, importante observar que tanto el teorema sobre los ángulos externo e interno de un triángulo como las otras proposiciones enumeradas más arriba no requieren el V postulado para ser demostrados.

Después de establecidas estas proposiciones, se da la definición de paralelas: dos rectas se dicen paralelas si no tienen ningún punto común*).

*) Recuérdese que estamos tratando la planimetría.

Para que esta definición tenga sentido, debe demostrarse la existencia de paralelas. La demostración se obtiene fácilmente mediante el conocido teorema: dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí, cosa que sigue de inmediato de la proposición sobre los ángulos externo e interno de un triángulo.

En efecto, supongamos que las rectas a y b forman ángulos rectos con la recta c, en los puntos A y B (fig. 2). Supongamos que a y b no son paralelas, y denotemos por C su punto común. Pero entonces el ángulo externo del triángulo ABC correspondiente al vértice A debe ser mayor que el interno del vértice B, lo que contradice la hipótesis hecha con respecto a estos ángulos. Con esto concluye la prueba de nuestra afirmación, por reducción al absurdo.

De aquí sigue inmediatamente que por cada punto M se puede trazar una paralela a cualquier recta u que no pase por él (fig. 3). Para esto basta trazar por M la perpendicular MN a u, y construir la recta u', perpendicular a MN en el punto M. La recta u' será paralela a u, en virtud de lo que acabamos de ver.

Una vez demostrada la existencia de paralelas y establecido que por cada punto se puede trazar una recta paralela a otra dada, debe resolverse, naturalmente, el siguiente problema: ¿por cada punto del plano pasa una única paralela a una recta dada, o hay un conjunto de ellas?

En la teoría de las paralelas se demuestra que *por cada punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.* Vamos a reproducir esta demostración (fig. 3).

Sea u una recta arbitraria, y M algún punto que no le pertenece; sea MN la perpendicular a u. Denotemos por u' la recta perpendicular a MN en M. Ya sabemos que u' es paralela a u. Tracemos una recta arbitraria u'' que pase por M y no coincida con u'; mostraremos que u'' no puede ser paralela a u. Como u'' no coincide con u', debe formar un ángulo agudo con el segmento MN para alguno de los dos lados. Entonces, las rectas u y u'' forman con MN al intersecarla ángulos internos a un mismo lado de MN, cuya suma es menor que dos rectos; de aquí sigue, en virtud del V postulado, que u y u'' deben intersecarse.

Como vemos, *esta prueba de unicidad de la paralela utiliza de manera esencial el V postulado. Es fácil advertir que, recíprocamente, el V postulado puede ser demostrado, ya como teorema, si se considera que por cada punto exterior a una recta dada pasa una única paralela a ella.*

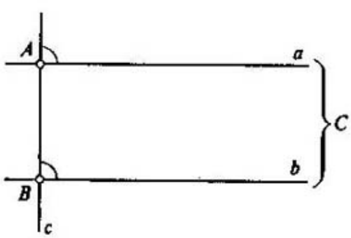


Fig. 2

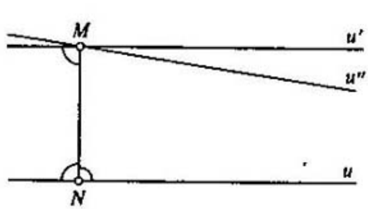


Fig. 3

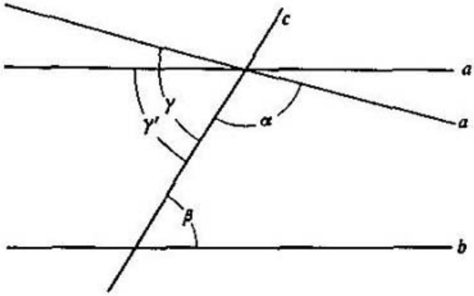


Fig. 4

En efecto, supongamos que las rectas a y b (fig. 4) al ser intersecadas por la tercera c forman a un mismo lado ángulos internos cuya suma sea menor que $2d$ *). Debemos probar que a y b tienen un punto común, en este mismo lado de la recta c.

Denotemos con α y β los ángulos que las rectas a y b forman con c y supongamos, de acuerdo con nuestra hipótesis, que

$$\alpha + \beta < 2d. \qquad (*)$$

Sea, además, γ el ángulo adyacente a α. Tracemos una recta a' que pase por el punto de intersección de a y c, de modo que forme con c un ángulo $\gamma' = \beta$.

Entonces las rectas a' y b son paralelas, pues si suponemos que se cortan, llegaremos a una contradicción con el teorema sobre los ángulos externo e interno de un triángulo. Pero, al tomar como postulado la unicidad de la paralela, debemos concluir que la recta a (por ser diferente de a') no es paralela a b. Sólo queda probar que a y b se cortan del lado en que se hallan los ángulos α y β. Con este fin, observemos que $\alpha + \gamma = 2d$; de aquí y de la desigualdad (*) sigue que $\gamma > \beta$. En consecuencia, a y b no pueden cortarse del lado en que está γ, pues en este caso γ será un ángulo interno del triángulo obtenido, y β, externo, resultando imposible la desigualdad $\gamma > \beta$.

Así, pues, el V postulado es equivalente a afirmar que existe una única recta paralela a una dada, que pase por un punto determinado; a su vez, la última afirmación determina toda la construcción de la geometría de Euclides. De aquí sigue, en particular, que dos paralelas, al cortarse con una tercera recta, forman ángulos correspondientes iguales, que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, y muchos otros teoremas. De este modo, el V postulado o, como también se lo llama, el postulado sobre las paralelas, constituye la base de la mayoría de las proposiciones importantes de la geometría elemental.

§ 6. Es posible que incluso el propio Euclides tratase de demostrar el postulado sobre las paralelas. Un argumento a favor de esto es que las primeras 28 proposi-

---

*) El autor denota por d la magnitud del ángulo recto. (*N. del Tr.*).

ciones de los «Elementos» no se basan en el V postulado. Parecería ser que Euclides trató de aplazar la aplicación de este postulado hasta que fuese imprescindible utilizarlo.

Desde Euclides hasta fines del siglo XIX el problema del V postulado era uno de los más populares de la geometría. Durante todo ese período se propusieron muchas demostraciones diferentes del V postulado. Todas eran, sin embargo, equívocas. Por lo común, sus autores utilizaban alguna afirmación geométrica que resultaba tan evidente en el dibujo, que se deslizaba en los razonamientos sin que el propio autor se diese cuenta. Pero al tratar de dar una prueba lógica de esta afirmación, no basada en el V postulado, se fracasaba invariablemente.

Tales análisis no alcanzaron entonces la meta propuesta, ya que el problema consistía en liberar la teoría euclidiana de las paralelas de ese postulado *especial*; no se trataba, entonces, de sustituir el V postulado por otra afirmación, por evidente que ésta fuera, sino más bien de demostrarlo, partiendo de los restantes postulados de la geometría*).

Con todo, cabe destacar que las numerosas tentativas de demostrar el V postulado, a pesar de su fracaso, condujeron a varios resultados positivos.

Gracias a ellas, precisamente, se puso en claro la interdependencia lógica entre diversas proposiciones geométricas; en particular, se estableció toda una serie de proposiciones equivalentes al postulado euclidiano sobre las paralelas (es decir, afirmaciones que, habiéndose adoptado sin demostración, junto con otras premisas básicas de la geometría euclidiana permiten demostrar el V postulado).

Podemos exponer los siguientes ejemplos de afirmaciones equivalentes al V postulado:

1. Por cada punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella.
2. Dos rectas paralelas al intersecarse con una tercera forman ángulos correspondientes iguales.
3. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.
4. Los puntos situados a un mismo lado de una recta dada, a una misma distancia de ésta, forman una recta.
5. Dadas dos rectas paralelas, las distancias de los puntos de una de ellas a la segunda están acotadas.
6. Existen triángulos con área arbitrariamente grande.
7. Existen triángulos semejantes.

Cada una de estas proposiciones puede ponerse como base de la teoría sobre las paralelas; en otras palabras, si se acepta cualquiera de ellas como verdadera por evidencia, se puede demostrar rigurosamente el V postulado y luego, siguiendo a Euclides, demostrar todos los teoremas ulteriores. La equivalencia del V postulado con las proposiciones enumeradas, así como también con algunas otras, se mostrará en la exposición que sigue.

§ 7. De los múltiples trabajos dedicados al V postulado, cabe destacar los de Saccheri y Lambert, que dejaron una huella significativa en el camino de la fundamentación de la teoría de las paralelas.

---

*) Más adelante plantearemos con toda precisión este problema.

Los estudios de Saccheri fueron publicados en 1733, bajo el título «Euclides depurado de toda mácula, o la experiencia que establece los principios primordiales de la geometría universal». En esta obra Saccheri hace un intento de demostrar el V postulado *por reducción* al absurdo.

Saccheri parte del cuadrilátero $AA'B'B$ (fig. 5) con dos ángulos rectos en la base AB y dos lados iguales, AA' y BB'. De la simetría de la figura con respecto a la perpendicular HH' a la mitad de la base AB, sigue que los ángulos en los vértices A' y B' son iguales entre sí. Si se acepta el V postulado y, en consecuencia, la teoría euclidiana de las paralelas, se puede establecer inmediatamente que los ángulos A' y B' son rectos, y $AA'B'B$ es un rectángulo. Recíprocamente, como muestra Saccheri, si al menos en un cuadrilátero del tipo indicado los ángulos de la base superior resultan ser rectos, tendrá lugar el postulado euclidiano de las paralelas. Con el objeto de demostrar este postulado, Saccheri considera tres casos posibles: o bien los ángulos A' y B' son rectos, o bien obtusos, o bien agudos. Estas tres hipótesis las llama, respectivamente, hipótesis del ángulo recto, del obtuso y del agudo. Como la hipótesis del ángulo recto equivale al V postulado, a fin de demostrar este último hay que descartar las otras dos hipótesis. Con razonamientos totalmente rigurosos Saccheri llega, ante todo, a una contradicción con la hipótesis del ángulo obtuso. A continuación, adoptando la hipótesis del ángulo agudo, deduce consecuencias extremadamente elaboradas de tal premisa, a fin de obtener también aquí dos afirmaciones contradictorias. Al desarrollar estas consecuencias, Saccheri construye un sistema geométrico complejo, algunas de cuyas proposiciones son tan contradictorias con nuestras ideas habituales sobre la disposición de las rectas en el plano, que podrían ser consideradas absurdas. Por ejemplo, en el sistema geométrico correspondiente a la hipótesis del ángulo agudo, dos paralelas tienen o bien una única perpendicular común, a ambos lados de la cual éstas se alejan indefinidamente una de la otra, o bien no poseen ninguna, en cuyo caso convergen asintóticamente en un sentido y divergen indefinidamente en el otro.

Saccheri, con justeza, no considera que la sola contradicción con las ideas intuitivas de las representaciones habituales en el espacio sea un argumento para la invalidación lógica de estas premisas. Pero, al cabo de una serie de razonamientos precisos, Saccheri concluye la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo, basándose en que dos rectas que convergen asintóticamente deben tener una perpendicular común en el punto del infinito, cosa que «contradice la naturaleza de la recta». Aceptando que, de este modo, las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo conducen a contradicciones, Saccheri concluye que la única verdadera es la hipótesis del ángulo recto, con lo que queda demostrado el V postulado. Evidentemente, el propio Saccheri siente aquí que no pudo reducir la hipótesis del ángulo agudo a una contradicción lógica, y él regresa a ella, a fin de demostrar que «contradice a sí misma». Con este fin, calcula de dos maneras diferentes la longitud de cierta línea, y obtiene dos valores distintos para ella. Esto sería, en efecto, una contradicción, pero Saccheri llegó a ella habiendo cometido un error de cálculo.

Las ideas de Lambert, desarrolladas en la obra «Teoría de las líneas paralelas» (1766) se aproximan a los razonamientos de Saccheri.

Lambert considera el cuadrilátero $ABCD$ con los tres ángulos A, B y C rectos (fig. 6); con respecto al cuarto también se pueden efectuar tres supuestos: o bien es

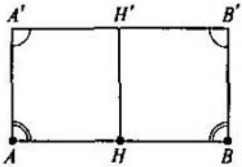


Fig. 5

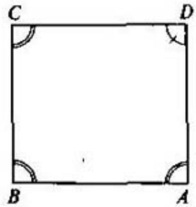


Fig. 6

agudo, o bien recto, o bien obtuso. De este modo, aquí nuevamente surgen tres hipótesis. Una vez establecida la equivalencia de la hipótesis del ángulo recto con el V postulado, y habiendo reducido a una contradicción la hipótesis del ángulo obtuso, Lambert, como Saccheri, se ve obligado a analizar más la hipótesis del ángulo agudo. Y nuevamente esta hipótesis conduce a Lambert a un sistema geométrico complicado. Sin embargo, a pesar de que este sistema fue profundamente desarrollado por Lambert, no le fue posible hallar en él contradicción lógica alguna. También en el trabajo de Lambert se encuentran las particularidades, paradójicas a primera vista, de la disposición de las rectas en el sistema basado en la hipótesis del ángulo agudo, que expusimos más arriba, al describir las ideas de Saccheri. Lambert, al igual que Saccheri, no dedujo la falsedad de la hipótesis del ángulo agudo basándose únicamente en que estas particularidades contradicen nuestras ideas intuitivas sobre las propiedades de las rectas. Pero, a diferencia de Saccheri, él no cometió error alguno, que le diera pie para considerar descartada la hipótesis del ángulo agudo y, por ende, demostrado el V postulado. Lambert no afirma, en ninguna parte de su obra, haber demostrado el V postulado, y llega a la firme conclusión de que las restantes tentativas en esta dirección no llevaron a la meta deseada.

«Las demostraciones del postulado euclidiano —escribe Lambert— pueden ser llevadas tan lejos que, a primera vista, sólo queda un detalle insignificante. Pero al hacer un análisis escrupuloso, resulta que en esta insignificancia aparente reside, precisamente, la esencia del problema; comúnmente ésta contiene o bien la proposición a demostrar, o bien un postulado equivalente a ella».

Es más, al desarrollar el sistema de corolarios de la hipótesis del ángulo agudo, Lambert descubre una analogía de este sistema con la geometría esférica, y ve en esto una posibilidad de su existencia.

«Inclusive yo me inclino a pensar que la tercera hipótesis es válida en alguna esfera imaginaria. Al fin de cuentas, debe existir una causa por la cual en el plano se resiste altamente a ser refutada, cosa que puede hacerse fácilmente con la segunda hipótesis».

Más adelante veremos que Lambert predijo genialmente la verdadera solución del problema del V postulado. En todo caso, él siguió el camino correcto mucho más lejos que cualquiera de los que lo precedieron.

§ 8. Ahora nos detendremos a analizar las investigaciones de Legendre (1752—1833), que es bien conocido por sus trabajos en análisis y en mecánica y dejó, asimismo, una herencia importante en geometría.

Legendre intentó, durante mucho tiempo, demostrar el V postulado, y llegó a publicar algunas variantes de su «demostración». Aunque ninguna resultó correcta, de todos modos los razonamientos de Legendre tienen interés, pues ponen en claro la relación existente entre el V postulado y la proposición relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo.

En la geometría de Euclides es bien conocida la demostración, basada en el V postulado, de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.

Legendre muestra, primeramente, que, recíprocamente, si se admite sin demostración que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, el V postulado puede ser demostrado como un teorema.

Luego, con el fin de obtener una demostración del V postulado sin introducir otros nuevos, Legendre considera tres hipótesis excluyentes:

I. La suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos.

II. La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

III. La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.

La primera es reducida a una contradicción por Legendre, mediante razonamientos exactos. Si pudiese hacer lo mismo con la tercera, sin usar el V postulado, habría demostrado que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, con lo cual habría demostrado el V postulado. Sin embargo, al efectuar la reducción de la tercera hipótesis a una contradicción, Legendre utilizó, sin darse cuenta, una de las proposiciones equivalentes al V postulado.

El saldo positivo del trabajo de Legendre se encuentra en las proposiciones siguientes.

PROPOSICIÓN I. *Si la suma de los ángulos de cada triángulo es igual a dos rectos, tiene lugar el V postulado.*

Para probarlo, tomemos una recta arbitraria a y algún punto A que no le pertenece (fig. 7).

Sea AB la perpendicular a la recta a que pasa por A. Sabemos que la recta a', que pasa por A y es perpendicular al segmento AB, no interseca a a. Debemos mostrar que cualquier otra recta que pase por A corta a a. En la demostración que sigue utilizaremos la hipótesis adoptada de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos.

Sea b alguna recta que pase por A, y β, el ángulo agudo que esta recta forma con el segmento AB. Probemos que b corta a a del lado del ángulo agudo. Con este fin, determinemos sobre la recta a, del lado del ángulo agudo, un punto B_1 de forma que el segmento BB_1 sea igual al AB. Del mismo lado a partir de B_1 determinemos el punto B_2 de manera que B_1B_2 sea igual a AB_1, etc. Determinemos, por fin, el punto B_n de modo que $B_{n-1}B_n$ sea igual al segmento AB_{n-1}.

Consideremos los triángulos $ABB_1, AB_1B_2, \ldots, AB_{n-1}B_n$. Como admitimos que la suma de los ángulos de cada triángulo es igual a dos rectos, tendremos que en el triángulo isósceles ABB_1 los ángulos internos en los vértices A y B_1 son iguales a $\frac{\pi}{4}$.

Luego, el ángulo interno correspondiente a B_1 en el triángulo ABB_1 es externo con respecto al triángulo AB_1B_2, y como este último es asimismo isósceles, sus ángulos internos no adyacentes al B_1 serán iguales entre sí. Pero de la hipótesis hecha acerca de la suma de los ángulos de un triángulo se desprende que un ángulo externo

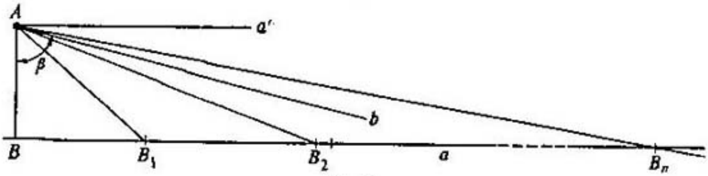


Fig. 7

de un triángulo es igual a la suma de los dos internos no adyacentes a él; por esto, los ángulos internos del triángulo AB_1B_2 en los vértices A y B_2 son iguales a $\frac{\pi}{8}$ cada uno. Continuando este proceso, hallamos que el ángulo interno correspondiente a B_n en el triángulo $AB_{n-1}B_n$ es igual a

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

De aquí sigue que

$$\angle\, BAB_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Como β es un ángulo agudo, podemos poner

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

donde $\varepsilon > 0$. Escojamos n tan grande como para que se cumpla

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2} < \varepsilon.$$

Entonces tendremos que $\beta < \angle\, BAB_n$.

En este caso, la recta b pasa entre los lados AB y AB_n del triángulo BAB_n y, en consecuencia, tendrá un punto común con la recta a, situado entre los puntos B y B_n *). Esto prueba nuestra afirmación.

Pasemos ahora a discutir el problema sobre los valores posibles de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Para mayor comodidad, designaremos por $S(\Delta)$ la suma de los ángulos internos de un triángulo Δ, y por $D(\Delta)$, la diferencia entre dos rectos y dicha suma, de forma que

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta);$$

esta diferencia suele llamarse *defecto del triángulo*.

PROPOSICIÓN II. *En cada triángulo*

$$S(\Delta) \leqslant \pi.$$

La demostración se basa en los dos lemas siguientes:

I. *En cada triángulo la suma de dos ángulos internos es menor que dos rectos.*

II. *Para cada triángulo es posible construir uno nuevo que tenga la misma suma de ángulos internos que el dado y con uno de sus ángulos al menos dos veces menor que algún ángulo prefijado del triángulo dado.*

Demostremos estos lemas.

---

*) La demostración rigurosa de la última afirmación puede efectuarse utilizando el axioma de Pasch (véase el § 13).

El primero sigue directamente de la proposición que se refiere a los ángulos interno y externo de un triángulo. En efecto, sean α y β ángulos internos de cierto triángulo, y α', el ángulo externo de este triángulo que es adyacente al α. Entonces

$$\alpha + \alpha' = \pi.$$

Pero el ángulo externo de un triángulo es mayor que el interno no adyacente. (Esta proposición, como recordará el lector, se demuestra sin recurrir al V postulado.) Así, pues,

$$\alpha' > \beta$$

y, por consiguiente,

$$\alpha + \beta < \pi.$$

Para demostrar el segundo lema, consideremos algún triángulo ABC y mostremos que es posible construir uno nuevo que tenga la misma suma de ángulos que el dado, y que posea un ángulo al menos dos veces menor que, digamos, el ángulo del vértice A del triángulo dado (fig. 8).

Designamos con O el punto medio de BC, unimos A con O y prolongamos el segmento AO hasta el punto A', de forma que sea $AO = OA'$. Entonces el triángulo $AA'C$ tendrá la propiedad requerida. En efecto, con las notaciones de la fig. 8, tenemos:

$$S(ABC) = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1,$$
$$S(AA'C) = \alpha_1 + \alpha' + \gamma_1 + \gamma_2.$$

De la igualdad de los triángulos ABO y COA', que se considera de inmediato, sigue que

$$\alpha' = \alpha_2, \quad \gamma_2 = \beta.$$

De aquí se desprende, ante todo, que los triángulos ABC y $AA'C$ tienen igual suma de ángulos.

Además, los ángulos internos del segundo triángulo correspondientes a los vértices A y A' forman, sumados, el ángulo al vértice A del primero. Por esto alguno de ellos es al menos dos veces menor que el ángulo prefijado A del triángulo ABC, que es lo que se deseaba mostrar.

Vamos ahora a demostrar la proposición básica. Haremos la demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que algún triángulo Δ tiene suma de ángulos internos mayor que dos rectos, de forma que $S(\Delta) = \pi + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$.

Denotemos alguno de los ángulos internos de Δ con α. Según el lema II, podemos construir un nuevo triángulo Δ_1, tal que uno de sus ángulos internos α_1 sea al menos dos veces menor que α, y que $S(\Delta_1) = S(\Delta)$. Construyamos ahora un triángulo Δ_2 de manera que uno de sus ángulos internos α_2 sea al menos dos veces menor que α_1 y que $S(\Delta_2) = S(\Delta_1)$. Continuando este proceso, construimos un triángulo Δ_n, tal que uno de sus ángulos internos α_n será al menos dos veces menor que α_{n-1}, y que $S(\Delta_n) = S(\Delta_{n-1})$. De este modo,

$$S(\Delta_n) = \pi + \varepsilon \quad \text{y} \quad \alpha_n \leqslant \frac{\alpha}{2^n}.$$

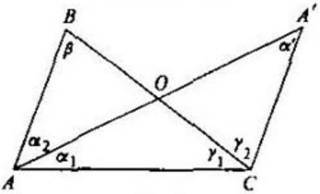


Fig. 8

Escogemos n tan grande como para que sea $\frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$ y, consecuentemente, $\alpha_n < \varepsilon$. Pero entonces la suma de los otros dos ángulos internos del triángulo Δ_n será mayor que π, lo cual contradice el lema I.

Queda así probada la proposición II.

Podemos, pues, afirmar, sin basarnos en el V postulado, que la suma de los ángulos internos de un triángulo no supera dos rectos.

Esto resulta ser de extremada importancia para lo que sigue.

Siguiendo a Legendre, ahora mostraremos, sin recurrir al V postulado, que si suponemos que al menos para un triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a dos rectos, entonces para todo otro triángulo la suma de sus ángulos también será igual a dos rectos.

Establezcamos algunos lemas previos.

LEMA I. *Si el triángulo ABC se divide en dos por la transversal BP, el defecto de ABC será igual a la suma de los defectos de los triángulos ABP y BPC.*

La demostración se ve en seguida. En efecto, en las notaciones de la fig. 9,

$$D(ABP) = \pi - (\alpha + \beta_1 + \delta_1),$$
$$D(BPC) = \pi - (\beta_2 + \delta_2 + \gamma).$$

De aquí sigue que

$$D(ABP) + D(BPC) = 2\pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2 + \gamma) =$$
$$= \pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma) = D(ABC).$$

LEMA II. *Sean dados dos triángulos ABC y AB_1C_1 con vértice común A y tales que los vértices B_1 y C_1 del segundo se encuentren respectivamente en los lados AB y AC del primero. Entonces el defecto del segundo triángulo no supera el del primero* (fig. 10).

La demostración se obtiene inmediatamente utilizando la proposición II y el lema precedente.

En efecto, unamos los puntos B y C_1; entonces, según el lema anterior,

$$D(ABC) = D(AB_1C_1) + D(B_1BC_1) + D(BC_1C).$$

Pero de la proposición II sigue que el defecto de cada triángulo es o bien un número positivo, o bien cero. De aquí y de la igualdad que acabamos de escribir se tiene que

$$D(AB_1C_1) \leqslant D(ABC).$$

LEMA III. *Sean dados dos triángulos rectángulos ABC y A'B'C', tales que los catetos AC y BC del triángulo ABC son mayores que los catetos A'C' y B'C' res-*

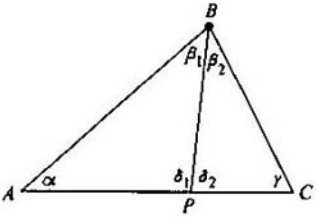


Fig. 9

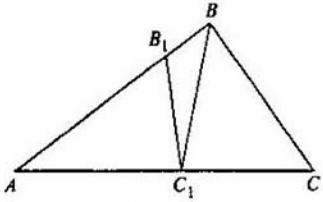


Fig. 10

pectivamente. Entonces, si la suma de los ángulos internos del triángulo ABC es igual a dos rectos, también lo será la suma de los ángulos internos de $A'B'C'$.

Para probar esto, traslademos $A'B'C'$ hasta que su vértice C' coincida con C, el cateto $A'C'$ esté sobre el AC, y el $B'C'$, sobre el cateto BC del triángulo ABC. Entonces, en virtud del lema precedente,

$$D(A'B'C') \leqslant D(ABC).$$

Pero como hemos adoptado $D(ABC) = 0$ y, por la proposición II, $D(A'B'C') \geqslant 0$, de la desigualdad de arriba se deduce que $D(A'B'C') = 0$, lo cual deseábamos demostrar.

LEMA IV. *Si la suma de los ángulos internos de cierto triángulo rectángulo es igual a dos rectos, también lo será la de cualquier otro triángulo rectángulo.*

Consideremos dos triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$. Supongamos que la suma de los ángulos del triángulo ABC es igual a dos rectos. Demostremos que también lo será la suma de los ángulos de $A'B'C'$. Si los catetos AC y BC del primer triángulo son respectivamente mayores que los catetos $A'C'$ y $B'C'$ del segundo, la afirmación es confirmada por el lema III. Si al menos uno de los catetos de ABC es más corto que un cateto de $A'B'C'$, para probar el lema mostremos que se puede construir un nuevo triángulo rectángulo cuya suma de los ángulos sea, como la de ABC, igual a dos rectos, y cuyos catetos sean arbitrariamente grandes. Con este fin, sobrepongamos al triángulo ABC otro igual a él, de forma que su hipotenusa coincida con la de ABC y que en el cuadrilátero así obtenido los lados iguales resulten opuestos. Denotemos por D el vértice del ángulo recto del nuevo triángulo (fig. 11). Como la suma de los ángulos internos de cada uno de los triángulos rectángulos ABC y ABD es igual a dos rectos, resulta evidente que todos los ángulos internos del cuadrilátero $ACBD$ serán rectos.

Desplazando $ABCD$, podemos «pavimentar» el plano con rectángulos iguales, tal como se muestra en la fig. 11.

Es fácil ver que la parte del plano indicada en esta figura representa un rectángulo. Dividiéndolo por medio de una diagonal, obtenemos dos triángulos rectángulos iguales, cuya suma de ángulos internos es igual a dos rectos. Los catetos de estos triángulos, evidentemente, pueden hacerse tan largos como se desee *).

Resulta así posible construir un triángulo rectángulo cuya suma de ángulos sea de dos rectos, y cuyos catetos sean mayores que los del triángulo rectángulo

*) Aquí se utiliza el axioma de Arquímedes (véase el § 4).

$A'B'C'$. De aquí y del lema III sigue que la suma de los ángulos del triángulo rectángulo (arbitrario) $A'B'C'$ es igual a dos rectos.

Ahora, utilizando el último lema, estamos en condiciones de probar la proposición enunciada más arriba.

PROPOSICIÓN III. *Si la suma de los ángulos de al menos un triángulo es igual a dos rectos, también lo será la de cualquier otro triángulo.*

Sean dados los triángulos ABC, $A'B'C'$, y se sabe que la suma de los ángulos de ABC es igual a dos rectos. Mostremos que la suma de los ángulos de $A'B'C'$ también será de dos rectos.

Tracemos las alturas de los dos triángulos dados. Cada uno de ellos tendrá al menos un vértice tal que la altura trazada por el mismo caerá dentro del lado opuesto. Sin restricción de la generalidad, podemos suponer que tal vértice es A para el triángulo ABC y A' para el $A'B'C'$ (esto siempre puede conseguirse escogiendo adecuadamente la notación).

Sea P el pie de la altura del triángulo ABC correspondiente al vértice A, y P', el de la altura de $A'B'C'$ que corresponde a A'. Según el lema II,

$$D(ABP) \leqslant D(ABC);$$

por hipótesis, $D(ABC) = 0$, y como, en virtud de la proposición II, $D(ABP) \geqslant 0$, concluimos que $D(ABP) = 0$.

Así, pues, la suma de los ángulos del triángulo rectángulo ABP es igual a dos rectos. Entonces, por el lema IV, cada triángulo rectángulo tendrá suma de ángulos igual a dos rectos. Pero, según el lema I,

$$D(A'B'C') = D(A'B'P') + D(B'P'C');$$

como los triángulos $A'B'P'$ y $B'P'C'$ son rectángulos, de lo que acabamos de demostrar se desprende que $D(A'B'P') = 0$ y $D(B'P'C') = 0$.

Por ende, $D(A'B'C') = 0$ y, en consecuencia, la suma de los ángulos internos de $A'B'C'$ es igual a dos rectos. La proposición queda así demostrada.

Una vez establecidas las proposiciones I — III, se puede intentar probar que existe al menos un triángulo cuya suma de ángulos internos es igual a dos rectos. Si pudiese hacerse esto, entonces, en virtud de la proposición III, cada triángulo tendría la suma de sus ángulos internos igual a dos rectos y, por la proposición I, se verificaría el V postulado.

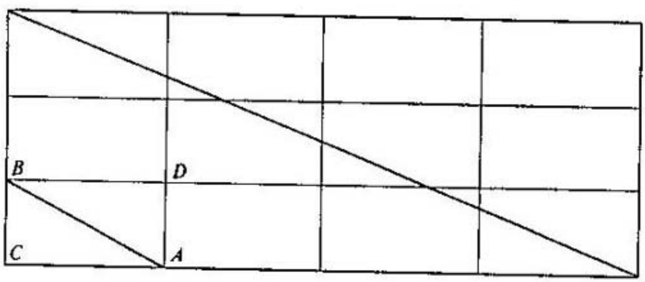


Fig. 11

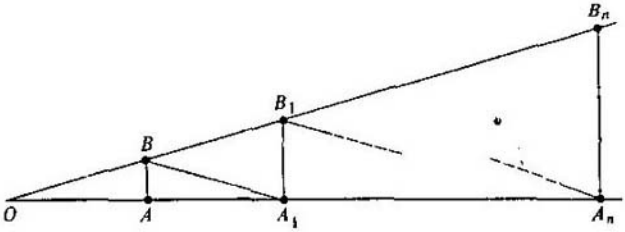


Fig. 12

He aquí un ejemplo de una pseudo-demostración.

Sea dado un ángulo agudo arbitrario con vértice en el punto O (fig. 12). Tomemos en uno de sus lados un punto B, y tracemos por él la perpendicular BA al otro lado. Según la proposición II, la suma de los ángulos del triángulo OAB no supera dos rectos, es decir, $D(OAB) \geqslant 0$.

Para conseguir nuestro objetivo basta mostrar que no puede ser $D(OAB) > 0$.

Admitiendo lo contrario, pongamos $D(OAB) = \varepsilon > 0$. Determinemos sobre el lado OA de nuestro ángulo el punto A_1 de forma que sea $OA = AA_1$. Unamos el punto B con el punto A_1 y levantemos por A_1 la perpendicular a la recta OA. Denotemos por B_1 el punto de intersección de esta perpendicular con la recta OB. En virtud del lema I,

$$D(OA_1B_1) = D(OAB) + D(BAA_1) + D(BA_1B_1).$$

Pero es fácil ver que el triángulo OAB es igual al BAA_1 y, en consecuencia,

$$D(OAB) = D(BAA_1) = \varepsilon.$$

De aquí y de la igualdad precedente sigue que

$$D(OA_1B_1) \geqslant 2\varepsilon.$$

Fijemos ahora sobre el lado OA el punto A_2, de forma que sea $OA_1 = A_1A_2$. Levantemos por A_2 la perpendicular a OA y denotemos por B_2 el punto de intersección de ésta con OB. Por razonamientos análogos a los precedentes se concluye que

$$D(OA_2B_2) \geqslant 4\varepsilon.$$

Continuando este proceso, obtendremos un triángulo OA_nB_n, cuyo defecto satisfará la desigualdad $D(OA_nB_n) \geqslant 2^n\varepsilon$. Escogiendo n suficientemente grande, podremos satisfacer la desigualdad $2^n\varepsilon > \pi$. Sin embargo, el significado mismo de la definición de defecto de un triángulo nos dice que éste no puede ser mayor que π.

Así, pues, al admitir que $\varepsilon > 0$, hemos llegado a una contradicción. Queda entonces establecido que el defecto del triángulo OAB es igual a 0, es decir, que la suma de los ángulos de este triángulo es igual a dos rectos. Con esto hemos probado, asimismo, el V postulado.

No es difícil percibir el punto débil de este razonamiento. Precisamente, el razonamiento sería totalmente riguroso, si se probase que las perpendiculares a la recta OA levantadas en todos los puntos A_1, A_2, etc. deben encontrar a la recta OB. Nosotros, en cambio, hemos utilizado los puntos B_1, B_2, etc. sin establecer su existencia, confiados en la evidencia.

Un análisis detalladó revela que no se puede hacer la demostración de la existencia de los puntos B_1, B_2, etc. sin recurrir al V postulado (esto lo discutiremos en detalle más tarde).

De este modo, el razonamiento efectuado sólo descubre un nuevo equivalente del V postulado. Por cuanto este resultado será esencial en lo sucesivo, lo enunciaremos como una proposición particular.

PROPOSICIÓN IV. *Si existe un ángulo agudo tal que la perpendicular levantada en cualquier punto de uno de sus lados corta al otro lado, entonces tiene lugar el V postulado.*

Es fácil percibir una relación estrecha entre los razonamientos de Legendre y los de Saccheri y Lambert.

· En efecto, las tres hipótesis de Legendre sobre los posibles valores de la suma de los ángulos de un triángulo corresponden a las hipótesis del ángulo obtuso, del recto y del agudo de Saccheri.

Si se acepta la hipótesis del ángulo obtuso, para algún cuadrilátero de Saccheri, entonces, dividiéndolo por medio de una diagonal, obtendremos dos triángulos, de los cuales al menos uno tendrá la suma de sus ángulos mayor que dos rectos. Y, recíprocamente, si asumimos que la suma de los ángulos de algún triángulo es mayor que dos rectos, habrá que aceptar la hipótesis de Saccheri del ángulo obtuso.

La proposición II viene a expresar así EL CARÁCTER CONTRADICTORIO DE LA HIPÓTESIS DEL ÁNGULO OBTUSO.

Si suponemos que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos, resulta evidente que para cada cuadrilátero de Saccheri habrá que aceptar la hipótesis del ángulo agudo. Y recíprocamente si aceptamos la hipótesis del ángulo agudo al menos para algún cuadrilátero de Saccheri, entonces, dividiéndolo por una diagonal en dos triángulos, nos encontraremos con que al menos uno de ellos tiene la suma de sus ángulos menor que dos rectos. Pero entonces, como se ve de los razonamientos precedentes, cada triángulo tendrá la suma de sus ángulos menor que dos rectos y, consecuentemente, los ángulos de la base superior de cada cuadrilátero de Saccheri serán agudos.

Podemos, pues, afirmar que vale la

PROPOSICIÓN V. *Si se acepta la hipótesis del ángulo agudo para un cuadrilátero de Saccheri, será necesario aceptarla para todo otro cuadrilátero de Saccheri.*

Por último, se establece directamente que *la hipótesis del ángulo recto de Saccheri y la suposición de Legendre sobre la existencia de un triángulo cuya suma de ángulos sea igual a dos rectos, son en igual grado equivalentes al V postulado.*

A pesar de sus múltiples intentos, Legendre no logró demostrar que no existe ningún triángulo cuya suma de sus ángulos sea menor que dos rectos, así como Saccheri tampoco consiguió llevar a una contradicción la hipótesis del ángulo agudo. Con todo, en la construcción de un sistema de corolarios de las hipótesis que rechazan el V postulado, Saccheri y Lambert fueron mucho más lejos que Legendre.

Cabe observar que las proposiciones I — III eran conocidas ya antes de Legendre. En todo caso, tanto Saccheri como Lambert conocían bien la dependencia existente entre el V postulado y la afirmación de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

Las proposiciones I — III están relacionadas con el nombre de Legendre por pura tradición, pues fue él quien las enunció de manera particularmente clara, y éstas se hicieron conocidas gracias precisamente a sus trabajos.

3. N. I. Lobachevski y su geometría

§ 9. Hasta principios del siglo XIX, ningún intento de demostrar el V postulado fue coronado por el éxito. A pesar de los esfuerzos dedicados por los geómetras durante más de veinte siglos, el problema de fundamentación de la teoría de las paralelas se hallaba, en esencia, en el mismo nivel que en los tiempos de Euclides.

Pero ya las primeras décadas del siglo XIX trajeron, al fin, la solución del problema del V postulado; sólo que esta solución resultó ser tal que el mundo matemático de la época ni la esperaba ni estaba preparado para ella.

Los laureles de la resolución de este famoso problema pertenecen al profesor de la Universidad de Kazán, Nikolai Ivánovich Lobachevski (1793—1856). En su informe a la Facultad de Física y Matemáticas de la Universidad de Kazán (del 11 de febrero de 1826, según el calendario juliano vigente entonces en Rusia) y en las obras *) publicadas a partir de 1829, por primera vez fue formulada de manera precisa y confirmada la idea de que *el V postulado no puede ser deducido de los restantes postulados de la geometría.* A fin de probar esto, Lobachevski, conservando las premisas básicas de Euclides, a excepción del postulado del paralelismo, admite que dicho postulado no tiene lugar, y construye un sistema lógico cuyas proposiciones son consecuencias de las premisas aceptadas.

Muchas de las proposiciones obtenidas por Lobachevski se encontraban en los trabajos de Saccheri y Lambert que desarrollaban la hipótesis del ángulo agudo. Esto es comprensible, pues la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri y las premisas básicas de Lobachevski son equivalentes. Pero mientras Saccheri se propuso mostrar que la hipótesis del ángulo agudo conduce a una contradicción y debe ser descartada por inadmisible desde el punto de vista lógico, Lobachevski, al desarrollar el sistema de sus teoremas, establece que éste representa una nueva geometría (la llamó «Imaginaria»), la cual, como la euclidiana, no contiene contradicciones lógicas.

Lobachevski desarrolló la geometría imaginaria hasta llevarla al mismo nivel en que se encontraba la de Euclides. En todo esto Lobachevski no encontró contradicción lógica alguna. Sin embargo, él comprendía perfectamente que esto todavía no demuestra que la geometría imaginaria es efectivamente no contradictoria pues si existen contradicciones, es imposible prever de antemano en qué nivel del desarrollo del sistema éstas pueden aparecer. A fin de demostrar la consistencia de su geometría, Lobachevski realizó un análisis algebraico profundo de sus ecuaciones básicas y dio así una solución de este problema, satisfactoria en la medida en que era posible en aquel tiempo.

---

*) Véanse N. I. Lobachevski, Obras Completas (Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений, Гостехиздат, М. — Л., 1951). El lector puede encontrar detalles sobre la vida y obra de N. I. Lobachevski en el libro de V. F. Kagan «Lobachevski», Editorial «Mir», 1985.

La demostración de la consistencia de la geometría de Lobachevski a un nivel moderno de rigor fue hecha en el siglo XIX, después de establecidos los principios generales de la fundamentación lógica de la geometría.

Los resultados de las investigaciones de Lobachevski pueden resumirse como sigue:

1. *El postulado de las paralelas no es consecuencia necesaria de los restantes postulados de la geometría (como decimos, no depende lógicamente de ellos).*

2. *El V postulado no se desprende de los demás, precisamente porque conjuntamente con la geometría de Euclides, en la cual dicho postulado se acepta como verdadero, es posible otra geometría, «imaginaria», en la cual el V postulado no tiene lugar.*

Lobachevski era un científico materialista; en sus obras expresaba sus puntos de vista materialistas en forma explícita y perseverante. Él rechazaba de plano la posibilidad de conocimientos a priori y, en particular, la tesis kantiana de que nuestras representaciones espaciales son innatas y no tienen un origen empírico. «Los conceptos primarios, a partir de los cuales se desarrolla una ciencia —escribe Lobachevski— deben ser claros y reducidos a la mínima cantidad. Sólo entonces éstos pueden proporcionar una base sólida y suficiente para la teoría. Tales conceptos se adquieren por medio de los sentidos; los conceptos innatos son inaceptables» («Acerca de los principios de la geometría», 1829).

Lobachevski comprendía de manera profunda y fina la relación entre la geometría de Euclides y su geometría no euclidiana: ambas son lógicamente no contradictorias y por esto están destinadas al fracaso todas las tentativas de demostrar desde un punto de vista lógico que sólo la primera es la única verdadera; ahora bien, el problema de cuál de estas geometrías corresponde mejor a las propiedades del espacio real, es algo que debe decidirse experimentalmente.

«En mi obra sobre los principios de la geometría —escribe Lobachevski— demostré, basándome en algunas observaciones astronómicas, que en un triángulo cuyos lados son del orden de la distancia de la Tierra al Sol, la suma de los ángulos puede diferir de dos rectos en no más de 0″,0003, en segundos sexagesimales de grado. La suposición de la Geometría usual debe, por consiguiente, considerarse como demostrada rigurosamente y, al mismo tiempo, debe llegarse a la convicción de que, sin recurrir a la experiencia, sería estéril buscar demostraciones de una verdad que todavía no se encuentra dentro de nuestra concepción de los cuerpos» («*Geometría imaginaria*», 1835).

Lobachevski llamaba «usual» a la geometría de Euclides, e «imaginaria» a la suya. Esto, sin embargo, no significa que considerase a su geometría como un sistema cerrado, puramente lógico. Por el contrario, veía en ella un instumento útil para el análisis matemático, y fue en este plano quien escribió el extenso trabajo «*Aplicación de la geometría imaginaria a algunas integrales*» (1836). Es interesante destacar que en las tablas de integrales definidas de Bierens de Haan (cuya impresión comenzó aún en vida de Lobachevski, en 1853, y culminó en 1858) hay más de 200 integrales que fueron calculadas y publicadas por Lobachevski *). En la actualidad se cono-

*) Para más detalles, véanse las Obras Completas de Lobachevski, t. 3, pág. 413. (Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, Гостехиздат, М. — Л., 1951).

cen relaciones profundas entre la geometría de Lobachevski y diversas ramas de la matemática y de la física teórica.

Las ideas de Lobachevski parecían paradójicas a los geómetras de su época, y siempre fueron recibidas con ironía. Muy pocos estaban en condiciones de comprender y apreciar sus trabajos; entre éstos, deben ser destacados C. F. Gauss y J. Bolyai, que trabajaban en la teoría de las paralelas en forma independiente entre sí y con respecto a Lobachevski. Gauss tenía clara la idea de una nueva geometría; sin embargo, no la desarrolló suficientemente, dejando sólo esbozos de algunos teoremas más elementales. Ni siquiera llegó a publicar sus puntos de vista sobre los fundamentos de la geometría, por temor a ser incomprendido. J. Bolyai editó su trabajo tres años después de la primera publicación de Lobachevski (ignorando su existencia). En él, J. Bolyai expuso la misma teoría que Lobachevski, pero en forma menos desarrollada. Al igual que Lobachevski, Bolyai no obtuvo reconocimiento, careciendo él mismo de apoyo.

El mundo científico supo apreciar el significado de las investigaciones de Lobachevski sólo después de su muerte; este significado es, en verdad, excepcional.

Antes de Lobachevski, la geometría euclidiana se consideraba la única teoría imaginable del espacio. El descubrimiento de la geometría imaginaria —o, como se la llama comúnmente, no euclidiana— destruyó este punto de vista. Esto marcó el comienzo de profundas generalizaciones de los enfoques de la geometría y su finalidad, que condujeron al concepto moderno de espacio abstracto con sus múltiples aplicaciones en la propia matemática y en disciplinas afines.

La geometría no euclidiana de Lobachevski fue el primero y decisivo eslabón en esta cadena de generalizaciones.

4. Formación del concepto de espacio geométrico

§ 10. Sabemos cuán fructífero para las matemáticas fue el período helenístico. Los grandes científicos de la Grecia Antigua enriquecieron la ciencia matemática con muchos importantes resultados y crearon métodos para su sistematización lógica. Después de los griegos, un gran aporte al desarrollo de las matemáticas fue realizado por los pueblos de la India, de los países del califato árabe y particularmente (del siglo IX al XV) por los pueblos del Asia Media y los transcaucasianos, que desarrollaron los elementos del álgebra y la trigonometría plana. Después, el siglo XVI trajo consigo un método esencialmente nuevo de resolución de problemas matemáticos utilizando letras como símbolos. La creación del álgebra simbólica fue en verdad un suceso de importancia primordial, sin el cual habrían sido imposibles los progresos ulteriores. Los dos siglos siguientes —el XVII y particularmente el XVIII— se distinguieron por un trabajo muy intenso del pensamiento matemático y por la formulación de teorías matemáticas nuevas. En esta época fueron creados los cálculos diferencial e integral, la invención de la geometría analítica abrió el camino a la aplicación del álgebra y el análisis a la resolución de problemas geométricos, así como también de numerosos problemas de la mecánica y la astronomía.

Sin embargo, los enfoques del espacio geométrico y de los conceptos que forman la base de la geometría, se encontraban esencialmente iguales que en la época de Euclides. Sólo como resultado de los notables progresos del siglo XIX se alcanzó la claridad y, con ella, la amplitud de la concepción de la geometría y de los objetos geométricos, que caracterizan a la matemática moderna y la diferencian radicalmente de la matemática de los tiempos antiguos.

En el siglo XIX se desarrollaron activamente muchas disciplinas geométricas. Destacaremos las tres más importantes: los fundamentos de la geometría, la geometría diferencial y la geometría proyectiva. Los caminos por que se desarrollaron estaban inicialmente muy alejados entre sí, pero a fines del siglo estas disciplinas se aproximaron en grado sumo, uniéndose en algunas partes, hasta que su síntesis iluminó de manera clara y completa toda una serie de viejos problemas de la geometría, y descubrió toda una problemática nueva, que se sigue desarrollando aún hoy.

Los fundamentos de la geometría tienen dos objetivos principales: 1) la construcción lógica de la geometría a base de algunas pocas premisas, llamadas axiomas; 2) el estudio de la interdependencia lógica entre distintas proposiciones geométricas. Como ya sabemos, estos problemas parten de Euclides, cuya famosa obra es la primera que conocemos dedicada a los fundamentos de la geometría.

Las investigaciones dedicadas a la demostración del V postulado también deben ser referidas a los fundamentos de la geometría, pues tenían por finalidad establecer la dependencia del V postulado con respecto a otros postulados geométricos. Lobachevski, al establecer la independencia del V postulado, proporcionó el primer resultado fundamental en este campo. Es más, al construir un sistema geométrico diferente del euclidiano, Lobachevski amplió la comprensión del propio significado de la geometría y, por ende, de los problemas de su fundamentación.

Un importante resultado en esta dirección fue obtenido luego por B. Riemann, quien en su trabajo «Sobre las hipótesis que se hallan en la base de la geometría» (de 1854) *), al desarrollar los principios analíticos de la geometría obtuvo, en particular, un sistema geométrico que difería tanto del euclidiano como del de Lobachevski. En la geometría de Riemann, una recta se determina por dos puntos; un plano, por tres; dos planos se intersecan según una recta,etc., pero por un punto dado no se puede trazar ninguna paralela a una recta dada. En particular, en esta geometría vale el teorema: la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos. Ya sabemos que si se conservan todas las premisas de Euclides, excepción hecha del postulado sobre las paralelas, las dos últimas afirmaciones deben rechazarse por contradictorias (véanse los § § 5 — 8). En consecuencia, Riemann, al desarrollar su sistema, debió alterar la axiomática euclidiana aún más que Lobachevski.

Vemos, así, que à mediados del siglo XIX los fundamentos de la geometría recibieron un impulso muy significativo. Sin embargo, tampoco en esta época fue resuelto el problema de una construcción lógica rigurosa de la geometría.

A fines de los años 60, cuando las ideas de Lobachevski fueron reconocidas, el problema de dar una construcción lógica de la geometría fue puesto sobre el tapete. Su resolución era, en particular, necesaria para que quedaran totalmente claros los

---

*) B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Abh. der Königlichen Ges. der Wiss. zu Götingen, 13, 1866. Hay traducción al español en el apéndice del libro «Estado actual, métodos y problemas de la geometría diferencial», Edit. Vidal Abascal, Madrid, 1958.

resultados de Lobachevski. En efecto, su resultado básico acerca de la independencia del V postulado de los demás postulados de la geometría, no sólo no podía ser demostrado con todo rigor, sino que tampoco podía darse por formulado en forma precisa, mientras no se conocieran todos los postulados geométricos.

A fines del siglo XIX se publicaron varios trabajos sobre este problema, pertenecientes a matemáticos de primera línea. La más famosa fue la obra de D. Hilbert «Fundamentos de la geometría», publicada en 1899, y que obtuvo en 1903 el premio internacional N. I. Lobachevski.

En su libro, Hilbert enuncia un sistema completo de axiomas de la geometría euclidiana, es decir, una lista de premisas básicas de las cuales se pueden obtener todos los demás resultados de esta geometría, por medio de deducciones lógicas *). Hilbert establece, asimismo, la independencia de los axiomas más importantes de su sistema, con respecto a los restantes, contenidos en éste.

En los próximos capítulos de nuestro libro se expone la lista de los axiomas de Hilbert y se discuten sus relaciones mutuas. Ahora nos detendremos en analizar el punto de vista particular con que se consideran hoy en día los conceptos geométricos básicos y los axiomas de la geometría.

A diferencia de los «Elementos» de Euclides, en las listas modernas de axiomas de la geometría euclidiana no hay descripciones de los objetos geométricos. Se supone únicamente que existen tres grupos de objetos, llamados «puntos», «rectas» y «planos», con respecto a los cuales se verifican ciertas condiciones muy precisas.

Tales condiciones son:

1. Entre los objetos denominados puntos, rectas y planos, así como también entre algunos conjuntos de estos objetos (segmentos, ángulos) deben existir determinadas relaciones, que se denotan por los términos «pertenece a», «entre», «congruentes».

2. Las relaciones indicadas deben satisfacer las condiciones enumeradas en los axiomas que siguen a continuación.

Es claro que los axiomas se componen tomando en estricta consideración el material empírico acumulado por la geometría, y de modo que este material pueda ser deducido de ellos por medio de razonamientos lógicos. Pero los objetos a que se refieren los axiomas no deben, forzosamente, ser de alguna naturaleza especial ni, digamos, poseer algún aspecto exterior determinado. Las relaciones entre estos objetos tampoco están obligadas a tener algún carácter especial. Tanto unos como otras pueden ser escogidas de manera arbitraria, siempre que se verifiquen las condiciones impuestas por los axiomas. Tal enfoque de la geometría y sus objetos obedece a dos circunstancias:

1. La geometría opera con conceptos que surgen de la experiencia, como resultado de una determinada abstracción de objetos del mundo real, en la cual se toman en consideración sólo algunas propiedades de estos objetos reales; en los razonamientos rigurosamente lógicos efectuados al demostrar los teoremas, hay que tratar únicamente con estas propiedades de los objetos las cuales son precisamente

*) Otros autores anteriores a Hilbert también confeccionaron listas completas de axiomas de la geometría euclidiana, por ejemplo, M. Pasch (en 1882); pero la lista de Hilbert resultó considerablemente más sencilla que las precedentes.

aquellas que deben ser destacadas en los axiomas y definiciones; las demás propiedades que estamos acostumbrados a imaginar cuando oímos las palabras «punto», «recta», «plano», no desempeñan ningún papel en la construcción lógica de la geometría y no deben ser mencionadas en las premisas básicas de esta ciencia.

2. Además de la geometría euclidiana, cuyos teoremas corresponden a nuestra idea intuitiva de las propiedades de las imágenes geométricas, existen otros sistemas geométricos (el de Lobachevski, el de Riemann), que contradicen la intuición espacial directa. Por esto, en un planteo suficientemente general del problema de fundamentación de la geometría, el propio concepto de objetos geométricos debe ser tan general que pueda ser aplicado a todos los casos necesarios.

De acuerdo con lo que acabamos de exponer, se puede decir que el espacio geométrico determinado por un sistema dado de axiomas, es el conjunto de objetos, llamados elementos geométricos, cuyas relaciones mutuas satisfacen las condiciones enunciadas en los axiomas del sistema dado.

Así, podemos hablar del espacio de Euclides, entendiendo por esto una colección de elementos sujetos a las condiciones indicadas en los axiomas de la geometría de Euclides, o bien pensar en el espacio de Lobachevski como una colección de elementos sometidos a los axiomas de la geometría de Lobachevski.

Pero el propio espacio de Euclides, por ejemplo, puede tener infinitas formas diferentes, según cuáles sean los objetos concretos que se consideran como sus elementos. Por ejemplo, además de nuestras ideas habituales de puntos, rectas y planos, podemos convenir en llamar «punto» a cualquier esfera de diámetro fijo d, «recta», a cualquier cilindro circular infinito del mismo diámetro d, «plano», a cada porción de espacio comprendida entre dos planos paralelos habituales que distan d uno del otro. Las relaciones básicas entre estos objetos pueden definirse como sigue. Convendremos en decir que el «punto», representado como la esfera A, PERTENECE a la «recta» representada por el cilindro circular a, si la esfera A está inscrita en el cilindro a; diremos que el «punto», pensado como la esfera A, pertenece al «plano» representado por la faja espacial α, si la esfera A es tangente a los dos planos paralelos habituales que delimitan dicha faja. Diremos que el «punto» B se encuentra en la «recta» a entre los «puntos» A y C, si el centro de la esfera que representa al punto B se encuentra entre los centros de las esferas que representan a A y a C. Por último, convendremos en decir que la figura M ES IGUAL A, O CONGRUENTE CON, la figura N, si M puede ser superpuesto a N por medio de algún movimiento (las figuras M y N se suponen formadas por «puntos», «rectas» y «planos» en el sentido que les estamos confiriendo ahora). Las relaciones indicadas entre los objetos considerados satisfacen todos los axiomas de la geometría euclidiana. Por esto, cada teorema que se pueda deducir de manera lógica de éstos, expresa cierto hecho que corresponde a los «puntos», «rectas» y «planos» que acabamos de describir. El conjunto de tales «puntos», «rectas» y «planos» con las relaciones mutuas que hemos indicado, representa así una de las formas concretas posibles del espacio de Euclides.

Si elegimos como puntos, rectas y planos otros objetos y definimos sus relaciones mutuas de modo que se cumplan los axiomas de la geometría euclidiana, obtendremos otras formas concretas del espacio de Euclides. A cada forma concreta del espacio euclidiano le corresponde una interpretación concreta de los teoremas euclidianos. Naturalmente, también la geometría de Lobachevski admite diversas interpretaciones concretas, así como cualquier otro sistema basado en axiomas (véanse los §§ 49 — 61, 67, 168 — 171).

Entonces, al eliminar de la geometría toda referencia a la clara evidencia y al dejar sólo su esqueleto lógico, obtenemos la oportunidad de rellenarlo con distintos materiales concretos. Por lo tanto, en una construcción lógica abstracta de la geometría, no sólo no se pierde la base real, sino que se amplía la posibilidad de las aplicaciones geométricas.

Ahora es sumamente importante destacar lo siguiente: el amplio enfoque de los elementos y axiomas geométricos que acabamos de exponer, abre la posibilidad de escoger el propio sistema de axiomas con alto grado de arbitrariedad, adaptando esta elección a uno u otro tópico concreto que se desea someter a estudio. Por esta vía, el método axiomático se traslada de la geometría a otras ramas de las matemáticas, a la mecánica y a la física, y conduce a los espacios abstractos modernos, cuyos elementos son conjuntos, funciones, transformaciones, etc. Como ejemplo de las aplicaciones de las ideas geométricas generales, se puede citar el espacio de Minkowski, que desempeña un papel importante en la teoría especial de la relatividad.

La idea de espacio abstracto fue preparada por la evolución de toda la matemática del siglo XIX. Dentro de la problemática de los fundamentos de la geometría, esta idea tuvo por fuente directa el descubrimiento de Lobachevski. Pero este descubrimiento tuvo influencia decisiva en el desarrollo de los conceptos geométricos también a través de otras disciplinas.

La consolidación de las ideas modernas del espacio geométrico fue determinada en gran medida por el desarrollo de la geometría diferencial. En la memoria de Gauss «Investigaciones generales sobre las superficies curvas» (1827) se destacan algunas propiedades particulares de una superficie, que constituyen su geometría interna. Se trata de aquellas propiedades que pueden ser establecidas por medio de mediciones que se efectúan dentro de la propia superficie (la fuente práctica de las ideas de la geometría interna fue la geodesia).

En 1868 apareció la obra de Beltrami «Experiencia de la interpretación de la geometría no euclidiana», en la cual el autor mostró que la planimetría de Lobachevski puede considerarse, bajo ciertas restricciones, como la geometría interna de una cierta superficie. Con esto, la planimetría no euclidiana, conjuntamente con la de Euclides, quedaron incluidas en un dominio totalmente concreto de la teoría de superficies.

La intersección de las investigaciones axiomáticas de Lobachevski con los métodos geométrico-diferenciales de Gauss, aún en el marco bidimensional, contribuyó en alto grado a la generalización de los conceptos geométricos. Por cierto, ya en el nivel en que se hallaba entonces la matemática, la aplicación de los métodos geométrico-diferenciales al estudio de la geometría no euclidiana no podía limitarse al caso bidimensional. Ya en 1854, en la obra citada de Riemann «Sobre las hipótesis que se hallan en la base de la geometría» se definieron espacios que generalizan tanto el euclídeo como el de Lobachevski, así como también el espacio correspondiente a la geometría de Riemann que hemos mencionado al comienzo de esta reseña. Estos espacios generales de Riemann se diferencian del euclidiano en el mismo grado que una superficie curva arbitraria se diferencia del plano.

El método puramente analítico que utilizó Riemann para enfocar los problemas geométricos, le permitió generalizar el concepto de curvatura de una vez al caso multidimensional. Los espacios generales de Riemann resultaron de utilidad para la física teórica, y son objeto de estudios intensos aún hoy.

Aproximadamente en la misma época en que Lobachevski comenzó sus estudios sobre las paralelas y en que nació la teoría de Gauss de las superficies, surgió una nueva disciplina matemática: la geometría proyectiva. Teniendo por campo de operaciones un material bien palpable, la geometría proyectiva parecía al principio muy alejada de los complejos problemas de la axiomática. Pero en la década del 70, F. Klein propuso una interpretación general de los sistemas geométricos de Euclides, Lobachevski y Riemann, basada en la geometría proyectiva. (Aquí utilizó Klein resultados obtenidos anteriormente por el matemático Cayley). Esta investigación de Klein se halla en estrecha conexión con su concepción de la geometría como la teoría de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones. Este enfoque de teoría de grupos de la esencia de la geometría, enunciado por Klein en su disertación «Reseña comparativa de las más recientes investigaciones geométricas», que figura en la historia de la ciencia bajo el nombre de «Programa de Erlangen» (1872), permitió establecer una determinada clasificación de los sistemas geométricos más importantes y las variedades que estos estudian.

El material del presente libro está dispuesto de acuerdo con las tres direcciones indicadas, en que se desarrolló en el siglo XIX el concepto de espacio geométrico.

Los capítulos II, III y IV están consagrados a problemas de carácter puramente axiomático.

En los capítulos V y VI se expone la geometría proyectiva y la clasificación de los sistemas geométricos desde el punto de vista de la teoría de grupos.

El capítulo VII se relaciona en parte con los dos anteriores; aquí se estudia el espacio de Minkowski.

En los capítulos VIII y IX se expone el estudio de sistemas geométricos mediante métodos de la geometría diferencial.

Capítulo II

AXIOMAS

DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL

1. Elementos geométricos

En este capítulo se exponen lox axiomas de Hilbert *). Conjuntamente con ellos, se citan los teoremas principales, de forma que queden suficientemente en claro los principios generales que guían el desarrollo lógico de la geometría.

§ 11. En adelante consideraremos tres conjuntos diferentes de objetos; los objetos del PRIMER conjunto se denominan *puntos*, los del SEGUNDO, *rectas* y los del TERCERO, *planos*. El conjunto de todos los puntos, rectas y planos se denomina *espacio*.

Los puntos, las rectas y los planos pueden estar relacionados unos con otros de una manera determinada, que se indica por las palabras «pertenece a», «entre», «congruentes». Estas relaciones deben satisfacer las condiciones contenidas en *los axiomas* que se enumeran a continuación; por lo demás, la naturaleza de los objetos y de las relaciones entre ellos puede ser arbitraria.

Todos los axiomas se dividen en cinco grupos **).

El grupo I contiene ocho axiomas de incidencia.

El II contiene cuatro axiomas de orden.

El III, cinco axiomas de congruencia.

El IV, dos axiomas de continuidad.

El V, un axioma de paralelismo.

2. Grupo I. Axiomas de incidencia

§ 12. Suponemos que las rectas y los planos pueden encontrarse en determinadas relaciones con los puntos. Si la recta a y el punto A se corresponden, diremos también que «a pasa por A»; «A se encuentra en a»; «A es un punto de la recta a»; «A pertenece a la recta a»; «la recta a pertenece al punto A». Si al punto A le corresponden varias rectas, diremos también que estas «rectas se cortan en el punto A», o

---

*) Los axiomas de Hilbert fueron tomados de la séptima edición de su libro: D. Hilbert, *Grundlugen der Geometrie*, Siebente Auflage, Lpz. — Berl., 1930.

**) En la numeración de los grupos nos hemos apartado un tanto de la exposición de Hilbert, en la cual el axioma de paralelismo constituye el cuarto grupo, y los de continuidad, el quinto.

bien que «las rectas tienen el punto común A». Si a la recta a se la han puesto en correspondencia dos puntos A, B, diremos que «la recta a une los puntos A, B», o bien que «a pasa por A y B», etc. Las condiciones que debe satisfacer esta relación se expresan en los axiomas I, 1 — I,8.

I,1. *Cualesquiera que sean los puntos A, B, existe una recta a que pasa por cada uno de los puntos A, B.*

I,2. *Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A, B, existe a lo sumo una recta que pasa por cada uno de los puntos A, B.*

Estos dos axiomas pueden resumirse como sigue: dos puntos diferentes determinan una y sólo una recta que pasa por ellos.

I,3. *En cada recta hay al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.*

Con respecto al punto A y al plano α que se hallen en correspondencia, utilizaremos también las expresiones: «A pertenece a α»; «A es un punto del plano α»; «α pasa por A», etc.

I,4. *Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, existe un plano α que pasa por cada uno de los tres puntos A, B, C. En cada plano hay al menos un punto.*

I,5. *Sean cuales fueren tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, existe a lo sumo un plano que pasa por cada uno de los tres puntos A, B, C.*

I,6. *Si dos puntos diferentes A, B de la recta a pertenecen al plano α, cada punto de la recta a pertenece al plano α.*

En este caso decimos que «la recta a pertenece al plano α»; «el plano α pasa por la recta a», etc.

I,7. *Si dos planos α, β tienen un punto común A, tienen al menos otro punto común B.*

I,8. *Existen al menos cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano.*

En los axiomas de incidencia se hace referencia a relaciones determinadas entre elementos geométricos, que se expresan por los términos «el punto pertenece a la recta», «el plano pasa por el punto», etc. Aquí no se hace ninguna descripción gráfica de las ideas expresadas por estos términos. En los axiomas I,1 — I,8 se describen únicamente propiedades determinadas que serán necesarias al deducir los teoremas ulteriores.

Las exigencias expresadas en los axiomas I,1 y I,2 fueron enunciadas ya por Euclides en su primer postulado y en su IX axioma. En cuanto a la necesidad del axioma I,3 y de la mayoría de los de este grupo, es poco probable que Euclides pudiera observarla.

Claramente, un geómetra que deja en sus razonamientos algún resquicio para la intuición geométrica, no se dedicará a postular que en una recta hay al menos dos puntos, o que existen tres puntos que no pertenecen a una misma recta, etc. Su clara evidencia más bien le dictaría que en una recta existen infinitos puntos. Esto, sin embargo, no debe figurar en los axiomas, pues se demuestra más adelante. Aquí se deja sentir el deseo de reducir los axiomas al mínimo.

Con los axiomas I,1 — I,8 ya se pueden demostrar algunos teoremas, por ejemplo, los siguientes:

TEOREMA 1. *Dos rectas diferentes tienen a lo sumo un punto común; dos planos o bien no tienen puntos comunes, o bien poseen toda una recta común, en la cual se* *encuentran todos los puntos comunes de ambos; un plano y una recta que no le pertenece tienen a lo sumo un punto común.*

La demostración de la primera afirmación se obtiene como consecuencia del axioma I,2.

DEMOSTRACIÓN DE LA SEGUNDA AFIRMACIÓN. Supongamos que dos planos α y β tienen un punto común A. Según el axioma I,7, estos planos α y β tienen otro punto común B. La recta a que une A y B está formada, según el axioma I,6, por puntos comunes de los planos α y β, o sea, todo punto perteneciente a a es un punto común de α y β. Pero, además, la recta a contiene todos los puntos comunes de ambos planos. En efecto, supongamos que α y β poseen además un punto común C, que no pertenece a la recta a. Del axioma I,5 sigue entonces que los planos α y β no pueden ser diferentes, pues contienen tres puntos comunes que no están sobre una misma recta.

La demostración de la tercera afirmación se desprende del axioma I,6.

TEOREMA 2. *Por una recta y un punto que no le pertenece, así como también por dos rectas con un punto común, pasa un plano y sólo uno.*

DEMOSTRACIÓN. Sean dados la recta a y el punto A, fuera de ella. Según el axioma I,3, sobre la recta a existen dos puntos B y C. De la hipótesis y del axioma I,2 sigue que los puntos A, B, C no están sobre una misma recta. En virtud del axioma I,4, existe un plano α que pasa por A, B, C. Por el axioma I,6, el plano α pasa por la recta a. No puede haber ningún otro plano que pase por a y A; en efecto, si existiese otro plano α' que pasase por a y A, tendríamos dos planos distintos α y α' que pasarían por A, B, C, lo cual contradice el axioma I,5.

TEOREMA 3. *Cada plano contiene al menos tres puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado un plano α. En virtud del axioma I,4, el plano α contiene algún punto A. Por el axioma I,8, existe un punto B que no pertenece a α. Según el axioma I,3, hay otro punto C que no pertenece a la recta AB. El plano ABC y el plano α tienen el punto común A; del axioma I,7 sigue que estos planos tienen otro punto común D más. De este modo, en el plano α, además del punto A, necesariamente hay segundo punto D. De acuerdo con el axioma I,8, existe un punto E, no perteneciente al plano ABD. Por el axioma I,4, el plano ABE existe, y es diferente de ABD. Recurriendo nuevamente al axioma I,7, concluimos que los planos ABE y α tienen algún punto común F (que además, según el axioma I,6, no está sobre la recta AB). Como D y F no pertenecen a la recta AB, concluimos, en virtud de la segunda afirmación del teorema 1, que estos puntos no pueden ser comunes a los planos ABD y ABF; de aquí sigue que D y F son diferentes. Por ende, en el plano α existen tres puntos: A, D y F.

Hemos hecho estas demostraciones con todo detalle a fin de que el lector pueda formarse una idea de cómo se efectúa el desarrollo lógico de la geometría elemental a base de los axiomas adoptados. En los razonamientos quedan totalmente excluidas las referencias a un dibujo y a la clara evidencia; cada afirmación se fundamenta refiriéndonos bien a los axiomas, bien a los teoremas demostrados con anterioridad.

Los axiomas I,1 — I,8 permiten demostrar sólo algunos resultados geométricos. En particular, éstos todavía no implican que el conjunto de elementos geométricos es infinito (para más detalles, véase el § 70).

3. Grupo II. Axiomas de orden

§ **13**. Suponemos que un punto sobre una recta puede encontrarse en determinada relación con otros dos puntos de la misma recta; esta relación se denotará por el término «se encuentra entre».

Esta relación debe verificar los siguientes axiomas.

II,1. *Si el punto B se encuentra entre el punto A y el C, entonces A, B y C son puntos diferentes de una misma recta, y B se encuentra, asimismo, entre C y A.*

II,2. *Cualesquiera que sean los puntos A y C, existe al menos un punto B sobre la recta AC tal que C está entre A y B.*

II,3. *Entre tres puntos cualesquiera de una recta, a lo sumo uno de ellos puede encontrarse entre los otros dos.*

Los axiomas II,1 — II,3 se denominan axiomas de orden lineal.

DEFINICIÓN 1. Un par no ordenado de puntos A y B se llamará *segmento* y se denotará AB, o bien BA. Los puntos que se encuentran entre A y B se llamarán *puntos interiores*, o simplemente *puntos del segmento AB*; los puntos A y B, *extremos del segmento*. Los demás puntos de la recta AB se denominarán *puntos exteriores del segmento AB*.

OBSERVACIÓN. En los axiomas II,1 — II,3 no se afirma que entre dos puntos A y B existan otros puntos; por ende, de estos axiomas no queda claro a primera vista que cada segmento tenga puntos interiores; con todo, del axioma II,2 sí sigue que cada segmento tiene puntos exteriores.

Además de los axiomas de orden lineal II,1 — II,3, el grupo II contiene el siguiente, que se refiere a la disposición de elementos geométricos en el plano.

II,4 (AXIOMA DE PASCH). *Sean A, B, C tres puntos que no pertenecen a una misma recta, y a, una recta en el plano ABC, que no contiene ninguno de los puntos A, B, C. Entonces, si la recta a pasa por algún punto del segmento AB, también pasará o bien por algún punto del segmento AC, o bien por alguno del segmento BC.*

4. Consecuencias de los axiomas de incidencia y de orden

§ **14**. Los axiomas de incidencia y de orden permiten ya demostrar muchos hechos importantes de la geometría.

Ante todo, expondremos dos teoremas que complementan de manera natural las afirmaciones de los axiomas II,1 — II,3.

TEOREMA 4. *Cualesquiera que sean los diferentes puntos A y C, existe al menos un punto D en la recta AC, que se encuentra entre A y C.*

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma I,3, existe un punto E fuera de la recta AC; en virtud del axioma II,2, sobre la recta AE habrá algún punto F tal que E sea un punto del segmento AF (fig. 13). Por el mismo axioma II,2, en la recta FC habrá un punto G tal que C esté entre F y G. Del axioma II,3 sigue entonces que G no está entre F y C, es decir, no pertenece al segmento FC. En virtud del axioma de Pasch II,4, la recta EG debe intersecar al segmento AC o al FC. Pero EG no puede intersecar al segmento FC, pues en tal caso de los axiomas de incidencia I,1 y I,2 seguiría de inmediato que todos los puntos considerados están sobre una misma recta, mientras que sabemos que ya A, C y E no están sobre una recta. Por consiguiente, la recta EG

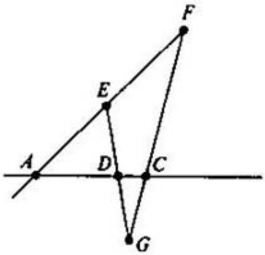


Fig. 13

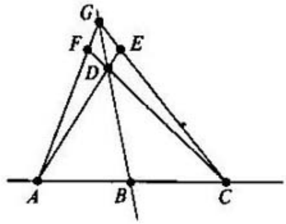


Fig. 14

corta al segmento AC en algún punto D. Queda así demostrada la existencia de algún punto D entre los puntos A y C.

TEOREMA 5. *Entre tres diferentes puntos A, B, C de una misma recta, siempre existe uno que se encuentra entre los otros dos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A no está entre B y C, ni C entre A y B. Por el axioma I,3, existe algún punto D que no está sobre la recta AC. Unamos este punto con el punto B por medio de una recta (fig. 14); en virtud del axioma II,2, sobre la recta BD existe un punto G tal que D está entre B y G. Aplicando el axioma II,4 (de Pasch) al triángulo BCG y a la recta AD, hallamos que esta recta interseca a la CG en algún punto E, situado entre C y G. De la misma manera se establece que las rectas CD y AG se intersecan en algún punto F entre A y G. Aplicando nuevamente el axioma de Pasch II,4 al triángulo AEG y la recta CF, hallamos que D está entre A y E, y del mismo axioma, ahora aplicado al triángulo AEC y la recta BG obtenemos, por último, que B está entre A y C (por cuanto G no está entre E y C).

El axioma II,2, unido al teorema 4, y el II,3, conjuntamente con el teorema 5, permiten enunciar los dos teoremas que siguen:

A) *Cualesquiera que sean dos diferentes puntos A y C, existen puntos interiores del segmento AC y puntos de la recta AC que están fuera de este segmento.*

B) *Dados tres puntos (diferentes) sobre una recta, hay siempre uno de ellos, y sólo uno, que está entre los otros dos.*

Ahora estamos en condiciones de presentar un complemento importante del axioma de Pasch, que enunciaremos como el siguiente

TEOREMA 5A. *Si los puntos A, B, C no están sobre una misma recta, y si alguna recta a interseca dos cualesquiera de los tres segmentos AB, BC, AC, entonces ésta no corta al tercer segmento* *).

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que la recta a corta cada segmento AB, BC, AC en los puntos P, Q, R respectivamente, y mostremos que esta suposición lleva a un absurdo. Ante todo, es claro que el punto B no está sobre la recta PQ (de otro modo todos los puntos A, B, C estarían en la recta PQ).

---

*) Cuando decimos que la recta corta al segmento, sobreentendemos que ésta contiene algún punto interior del segmento.

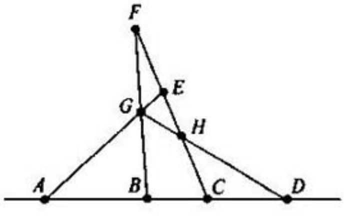


Fig. 15

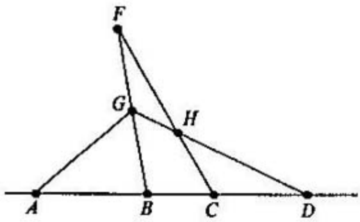


Fig. 16

A continuación, concluimos que el punto R está fuera del segmento PQ, pues en caso contrario la recta AC, al cortar el lado PQ del triángulo PQB, tendría que cortar también el lado BQ, por el axioma de Pasch, es decir, el punto C estaría entre B y Q, contra lo supuesto (según la hipótesis Q está entre B y C, y como de tres puntos dados sólo uno de ellos está entre los otros dos, esto elimina la posibilidad de que C esté entre B y Q). En forma totalmente análoga se muestra que P está fuera del segmento QR, y que Q está fuera de PR. Nos queda una contradicción con el teorema B, con lo cual hemos demostrado el teorema.

Para lo que sigue necesitaremos dos lemas.

LEMA 1. *Si B está en el segmento AC y C en el BD, entonces B y C están en el segmento AD.*

DEMOSTRACIÓN. Partiendo de los axiomas I,3 y II,2, escojamos un punto E que no esté sobre la recta AB, y en la recta EC, un punto F tal que E se encuentre entre C y F (fig. 15). Como B está en el segmento AC, aplicando al triángulo AEC y la recta FB el axioma II,4, concluimos que la recta FB tendrá que intersecar o bien al segmento AE, o bien al EC. Como el punto E está entre F y C, por el axioma II,3 el punto F no puede estar entre E y C. En consecuencia, la recta FB tiene que intersecar al segmento AE. Aplicando el axioma II,4 al triángulo FBC y la recta AE, y utilizando nuevamente el axioma II,3, vemos que el punto de intersección del segmento AE y la recta FB está entre los puntos F y B. Sea G este punto de intersección. En forma análoga se demuestra (aplicando el axioma II,4 al triángulo GBD y la recta CF y utilizando después el axioma II,3) que la recta CF corta al segmento GD en algún punto H. Como H debe estar en el segmento GD, y E, por el axioma II,3, no pertenece al segmento AG, entonces, en virtud del axioma II,4, la recta EH tendrá un punto común con el segmento AD, es decir, C está en el segmento AD. En forma totalmente análoga se puede demostrar que también B pertenece a este segmento.

LEMA 2. *Si C está en el segmento AD y B en el AC, entonces B se encuentra asimismo en el segmento AD, y C, en el BD.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un punto G fuera de la recta AB y escojamos luego un punto F de modo que G se encuentre en el segmento BF (fig. 16). Como consecuencia de los axiomas I,2 y II,3, la recta CF no tiene puntos comunes ni con el segmento AB, ni con el BG; pero entonces, en virtud del axioma II,4, tampoco tendrá puntos comunes con el segmento AG. Pero como C está en el segmento AD, entonces, aplicando el axioma II,4 al triángulo AGD vemos que la recta CF debe intersecar al segmento GD en algún punto H. De aquí y nuevamente del axioma II,4 aplicado al triángulo BGD sigue que la recta FH interseca al segmento BD. Vemos, así, que C está en el segmento BD.

La primera afirmación del lema 2 sigue entonces del lema 1.

Ahora resulta fácil demostrar el siguiente teorema importante:

TEOREMA 6. *Entre dos diferentes puntos cualesquiera de una recta existe un conjunto infinito de puntos de ésta.*

DEMOSTRACIÓN. Sean A, B dos puntos de la recta a. En virtud del teorema 4, entre A y B existe algún punto C; por el mismo teorema, entre A y C existe algún punto D. Por el lema 2, el punto D está asimismo entre A y B y, consecuentemente, A, B, C, D son puntos diferentes de la recta a. Análogamente se puede afirmar que entre A y D hay un punto E, y que éste se encuentra asimismo entre A y C y entre A y B, de forma que los puntos A, B, C, D, E son distintos.

Continuando el mismo razonamiento, obtenemos que entre A y B hay conjunto infinito de puntos C, D, E, ... , probando así el teorema.

Obsérvese que de los lemas 1 y 2 se desprende la siguiente proposición:

Supongamos que cada uno de los puntos C y D está entre los puntos A y B. Entonces, si el punto M está entre C y D, también estará entre A y B.

En efecto, de acuerdo con el teorema B (pág. 40), de los tres puntos A, C, D uno y sólo uno está entre los otros dos. Pero A no puede estar entre C y D, pues esto contradiría el lema 1. Supongamos, por ejemplo, que C está entre A y D (en caso contrario cambiamos la notación de los puntos C y D). Entonces la disposición de los puntos D, M, C, A satisface las mismas condiciones que la de los puntos A, B, C, D en el enunciado del lema 2. Por esto, en virtud de este lema el punto M está entre A y D. Ahora podemos afirmar que también la disposición de los puntos A, M, D, B satisface las mismas condiciones que la de los puntos A, B, C, D del mismo lema. En virtud del último, M estará entre A y B, cosa que se quería establecer.

Queda, así, demostrado el siguiente

TEOREMA 7. *Si los puntos C y D están entre los puntos A y B, todos los puntos del segmento CD pertenecen al segmento AB.*

DEFINICIÓN 2. En este caso se dice que el segmento CD está dentro del AB.

Del lema 2 sigue de inmediato el

TEOREMA 8. *Si el punto C está entre los puntos A y B, todos los puntos del segmento AC pertenecen al AB.*

De igual modo es fácil deducir (por reducción al absurdo), del lema 2 (tomando en consideración el axioma II,3), el

TEOREMA 8a. *Si el punto C está entre los puntos A y B, ningún punto del segmento AC puede ser punto del segmento CB.*

Resulta un tanto más difícil la demostración del

TEOREMA 8b. *Si C está entre A y B, cada punto del segmento AB, diferente de C, pertenece o bien al segmento AC, o bien al CB.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el punto M pertenece al segmento AB y no coincide con C. Supongamos, asimismo, que M no pertenece ni al segmento AC, ni al CB. Entonces o bien C está entre A y M, o bien A entre C y M. Si C está entre A y M, por cuanto M está entre A y B concluimos, basándonos en la segunda afirmación del lema 2, que M está entre C y B, contra lo supuesto. Si A está entre C y M, entonces, como C está entre A y B concluimos, por el lema 1, que A está entre M y B; consecuentemente, M no puede estar entre A y B. Nuevamente llegamos a una contradicción con lo asumido; hemos demotrado, así, el teorema, por reducción al absurdo.

Los teoremas 8, 8a, 8b nos permiten afirmar que el conjunto de puntos interiores del segmento AB, sin contar al punto C, es la unión del conjunto de puntos interiores del segmento AC y del de puntos interiores del segmento CB, y que estos dos últimos conjuntos no tienen puntos comunes.

DEFINICIÓN 3. Sea O un punto de la recta a, y A y B, otros dos puntos diferentes de la misma. Si O no está entre A y B, diremos que los puntos A y B están sobre a a un mismo lado del punto O. Si O está entre A y B, diremos que los puntos A y B están sobre la recta a en lados diferentes con respecto al punto O.

TEOREMA 9. *El punto O de la recta a divide todos los demás puntos de ésta en dos clases no vacías, de modo que dos puntos cualesquiera de a pertenecientes a la misma clase están a un mismo lado de O, mientras que dos puntos pertenecientes a distintas clases se encuentran en lados diferentes con respecto a O.*

Para probar esta afirmación, debemos fijar sobre la recta a un punto arbitrario A, diferente de O, y poner en una clase todos los puntos que se encuentran con A a un mismo lado del punto O, y en la otra, todos los puntos que se encuentran con A en distintos lados con respecto a O. Luego de esto, debe demostrarse que 1) cada clase es no vacía; 2) cada punto de la recta, a excepción de O, cae en una clase y sólo en una; 3) si M y N son puntos de una misma clase, O no pertenece al segmento MN; 4) si M y N son puntos de clases diferentes, O pertenece al segmento MN.

Las demostraciones se obtienen sin dificultad utilizando los teoremas 8, 8a, 8b.

DEFINICIÓN 4. Decimos que un punto O de una recta a, conjuntamente con algún otro punto A de la misma, determina *la semirrecta* o *el rayo OA*; los puntos que están del mismo lado que A con respecto a O se llaman *puntos de la semirrecta OA*; el punto O, *origen de la semirrecta OA*.

Si A' es un punto de la semirrecta OA, las semirrectas OA y OA' son idénticas, en el sentido que cada punto de la semirrecta OA' es un punto de la semirrecta OA, y recíprocamente.

Del teorema 9 sigue que cualquiera que sea el punto O de la recta a, éste determina exactamente dos semirrectas sobre a, con origen común O.

Todo lo expuesto permite considerar el conjunto de puntos de cada recta como un conjunto ordenado de determinada manera.

Como se sabe, un conjunto se llama ordenado si en él se han definido los conceptos «preceder a» y «seguir a», de forma que dados dos elementos diferentes cualesquiera x, y, un determinado precede al otro; en tal caso se dice que el segundo sigue al primero. Además, debe verificarse la condición de transitividad: si x, y, z son tres elementos y x precede a y e y precede a z, entonces x precede a z.

El conjunto de los números reales, por ejemplo, puede ser ordenado «según la magnitud», diciendo que a precede a b si, y sólo si, $a < b$.

Sea a una recta arbitraria, y O, un punto sobre a. Consideremos una de las dos semirrectas que tienen origen común en O. Diremos que el punto A de esta semirrecta precede al B, si A pertenece al segmento OB.

Del lema 2 sigue inmediatamente que si A precede a B y B precede a C, entonces A precede a C. Con esto quedan ordenados de manera bien definida los puntos de cada semirrecta.

Convendremos ahora en llamar *primera* a una de las dos semirrectas con origen común O y definiremos el orden de los puntos en TODA LA RECTA a por las siguientes condiciones:

1) Sean A y B dos puntos de la primera semirrecta. Entonces A precede a B en la recta a, si B precede a A en la primera semirrecta.

2) Todos los puntos de la primera semirrecta preceden, en la recta a, al punto O.

3) Todos los puntos de la primera semirrecta preceden, en la recta a, a los de la segunda.

4) El punto O precede en la recta a a los puntos de la segunda semirrecta.

5) Sean A y B dos puntos de la segunda semirrecta. Entonces A precede a B en la recta a, si A precede a B en la segunda semirrecta.

Cualesquiera que sean dos puntos de la recta a, las condiciones 1 — 5 determinan uno de ellos como precedente del otro.

La condición de transitividad será verificada en nuestro caso.

En efecto, sean A, B, C tres puntos de la recta a, de manera que, en el sentido de las condiciones 1 — 5, A precede a B y B precede a C. Mostremos que estas mismas condiciones definen a A como precedente de C.

Si los tres puntos están sobre una de las dos semirrectas con origen común O, esto sigue del lema 2, como ya observamos arriba.

Si A está en la primera semirrecta y B en la segunda (o bien coincide con el punto O), entonces C será indispensablemente un punto de la segunda (de otra forma habría una contradicción con la condición 3, o bien con la 2). En tal caso, A precede a C, de acuerdo con la condición 3.

Si A y B están en la primera semirrecta, y C en la segunda, o bien coincide con O, entonces A precede a C en virtud de la condición 3, o bien de la 2.

Toda otra hipótesis sobre la disposición de los puntos A, B, C contradirá las condiciones 1 — 5.

Con esto queda demostrada la propiedad de transitividad.

Si intercambiamos la primera semirrecta con la segunda e imponemos nuevamente las condiciones 1 — 5, obtenemos un nuevo orden de puntos sobre la recta a, que viene a ser opuesto al inicial, en el sentido que si el punto A precede al B en el primer orden, entonces B precede a A en el segundo.

Sea O' un punto de la recta a, diferente del punto O. Escogiendo una de las dos semirrectas con origen común O' como primera, podemos, recurriendo nuevamente a las condiciones 1 — 5, definir un cierto orden de puntos de la recta a. *Este orden coincidirá con uno de los dos obtenidos antes, partiendo de la elección del punto O* (omitimos la demostración). Así, independientemente de la elección del punto O, las condiciones 1 — 5 definen completamente dos órdenes posibles de disposición de los puntos de la recta a, siendo uno el opuesto del otro.

Diremos que, al escoger uno de estos órdenes, definimos *un sentido* sobre la recta.

Partiendo de la definición de orden de puntos sobre una recta es fácil observar lo siguiente: *si el punto B está entre A y C, entonces o bien A precede a B y B a C, o bien C precede a B y B a A; recíprocamente, si A precede a B y B a C, o bien si C precede a B y B a A, entonces B se encuentra entre A y C.*

Dicho de otro modo, el orden de puntos sobre una recta se define de manera tal que la posición de B entre A y C en el sentido de este orden equivale a la ubicación de B entre A y C en el sentido original, establecido en el § 13.

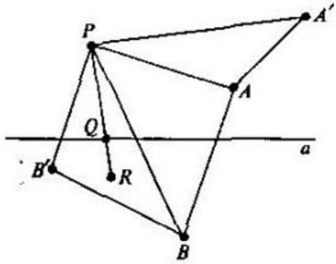


Fig. 17

§ 15. Las proposiciones precedentes tenían que ver con la disposición de puntos sobre una recta. Ahora indicaremos una serie de proposiciones que caracterizan las particularidades en la disposición de puntos en el plano y en el espacio.

TEOREMA 10. *Cada recta a, situada en un plano α, divide los puntos de este plano que no le pertenecen, en dos clases no vacías, de manera tal que dos puntos cualesquiera A y B de clases diferentes determinan un segmento AB que contiene algún punto de la recta a, mientras que dos puntos arbitrarios A y A' de una misma clase determinan un segmento AA', dentro del cual no hay ningún punto de a.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos en el plano α un punto arbitrario P que no esté sobre la recta a, y pongamos en la primera clase cada punto A del plano que no pertenezca a a y sea tal que el segmento PA no contenga puntos de la recta a; pongamos, además, al propio punto P en la primera clase (fig. 17). En la segunda clase pondremos cada punto B que no esté sobre a y sea tal que el segmento PB contenga algún punto de la recta a. Entonces

1) Cada clase es no vacía. En efecto, si Q es algún punto de la recta a, en virtud del axioma II,2 sobre la recta PQ habrá algún punto R tal que Q esté entre P y R; consecuentemente, R estará en la segunda clase. Por otra parte, la primera clase contiene, por ejemplo, el punto P.

2) Cada punto del plano α (a excepción de los puntos de la recta a) caerá en una clase, y sólo en una. En efecto, dentro de cualquier segmento o bien hay algún punto de a, o bien no hay ninguno.

3) Dos puntos arbitrarios A y A' de la primera clase determinan un segmento AA' que no contiene en su interior ningún punto de la recta a.

Efectivamente, si el segmento AA' contiene algún punto de la recta a, entonces, si suponemos que P, A, A' no están sobre una recta, por el axioma de Pasch II,4 uno de los dos segmentos PA, PA' tendrá que contener un punto de la recta a, en contradicción a la hipótesis; si, en cambio, P, A, A' están sobre la recta, llegaremos a una conclusión análoga basándonos en los teoremas B y 8, cuando P no pertenece al segmento AA', o bien basándonos en el teorema 8b, cuando P pertenece al segmento AA'.

4) Dos puntos cualesquiera B y B' de la segunda clase determinan un segmento BB' en cuyo interior no habrá ningún punto de la recta a.

La demostración se hace utilizando el teorema 5a, en el caso que P, B, B' no estén sobre una misma recta, y el teorema B junto con el 8a, cuando P, B, B' estén sobre una misma recta.

5) Dos puntos cualesquiera A y B de clases diferentes determinan un segmento AB en cuyo interior habrá algún punto de la recta a.

En efecto, según la hipótesis, el segmento PB contiene un punto de la recta a. Si P, A, B no están sobre una misma recta, en virtud del axioma de Pasch, o bien PA, o bien AB contendrá algún punto de la recta a; pero el segmento PA no puede ser, por hipótesis. En consecuencia, el segmento AB contendrá algún punto de la recta a.

Si, en cambio, P, A, B están sobre una sola recta, se llega a la misma conclusión utilizando el teorema B y los teoremas 8 y 8b.

OBSERVACIÓN. Es fácil mostrar que 1) cada clase contiene un número infinito de puntos (para demostrarlo se puede recurrir al teorema 6); 2) si P' es un punto cualquiera de la primera clase y si todos los puntos del plano están nuevamente dispuestos en dos clases de manera análoga a como lo hicimos arriba, cambiando P por P', se obtendrán las mismas clases que antes; 3) si se sustituye el punto P por algún punto de la segunda clase, esto conducirá sólo a un cambio en la numeración de las clases.

DEFINICIÓN 5. Utilizando las notaciones del enunciado del teorema 10, diremos que los puntos A y A' están en el plano α *a un mismo lado de la recta* a, mientras que los puntos A y B están en el plano α *en lados diferentes con respecto a la recta* a.

TEOREMA 11. *Cada plano α divide los puntos del espacio que no le pertenecen en dos clases no vacías, de manera tal que dos puntos cualesquiera A y B de clases diferentes determinan un segmento AB dentro del cual hay algún punto del plano α, mientras que dos puntos arbitrarios A y A' de una misma clase determinan un segmento AA' libre de puntos de α.*

DEFINICIÓN 6. Diremos que los puntos A y A' están en el espacio *a un mismo lado del plano* α, mientras que A y B están *en lados opuestos con respecto al plano* α.

No haremos la demostración del teorema 11; nos limitaremos a observar que, aunque se refiere a la geometría del espacio, para su demostración no se necesitan nuevos axiomas de orden, aparte de los ya introducidos, II,1 — II,4, que se refieren a puntos sobre una recta y sobre un plano.

Los axiomas del segundo grupo fundamentan los importantes conceptos de orden de puntos sobre una recta, de la ubicación «a un mismo lado», o «en lados diferentes», etc. De todos ellos, el concepto básico es el expresado por el término «se encuentra entre»; todos los demás derivan de él.

Utilizando los axiomas II,1 — II,4 se definen de manera natural una quebrada, un triángulo, un polígono, en general; se demuestra que un polígono simple divide el plano en dos regiones; sin embargo, de estos axiomas aún no sigue, por ejemplo, que el conjunto de los elementos de la geometría es innumerable (a este respecto, véase el cap. IV, § 72).

5. Grupo III. Axiomas de congruencia

§ 16. Suponemos que un segmento se puede encontrar en una relación determinada con otro (o consigo mismo), que denotaremos con el término «congruente», o bien «igual». La relación de congruencia debe satisfacer los siguientes axiomas.

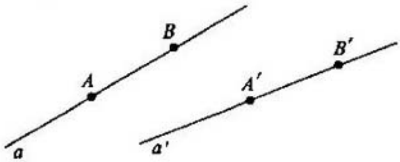


Fig. 18

III,1. *Si A, B son dos puntos sobre la recta a, y A' es un punto de la misma recta, o bien de otra recta a', siempre se puede encontrar, a un lado prefijado de A' sobre la recta a', un punto B', y sólo uno, tal que el segmento AB es congruente al $A'B'$.*

Tal relación entre los segmentos AB y $A'B'$ se denota así:

$$AB \equiv A'B'.$$

Para cada segmento AB se exige la congruencia

$$AB \equiv BA.$$

La primera parte de este axioma se expresa más concisamente así: *cada segmento puede ser aplicado de manera unívoca sobre cada recta a un lado prefijado cualquiera de cualquier punto dado de ésta* (fig. 18).

III,2. *Si los segmentos $A'B'$ y $A'B''$ son congruentes al mismo segmento AB, entonces $A'B'$ es congruente al segmento $A''B''$; es decir, si*

$$A'B' \equiv AB \quad \text{y} \quad A''B'' \equiv AB,$$

entonces también

$$A'B' \equiv A''B''.$$

De los axiomas III,1 y III,2 sigue que *si $AB \equiv A'B'$, entonces $AB \equiv B'A'$*. En efecto, de las dos relaciones

$$AB \equiv A'B', \qquad B'A' \equiv A'B'$$

(la segunda de las cuales está asegurada por el axioma III,1) concluimos, basándonos en el axioma III,2, que $AB \equiv B'A'$.

De aquí y del axioma III,1 deducimos el

COROLARIO. *Cada segmento es congruente consigo mismo*, es decir,

$$AB \equiv AB, \qquad AB \equiv BA.$$

En efecto, la relación $AB \equiv BA$ se exige en el axioma III,1, y a base de lo expuesto, de $AB \equiv BA$ sigue que $AB \equiv AB$.

Seguidamente, podemos establecer la proposición: *si $AB \equiv A'B'$, entonces $A'B' \equiv AB$*, es decir, *la relación de congruencia de segmentos es simétrica*.

En efecto, tenemos que $A'B' \equiv A'B'$; si, además, se da que $AB \equiv A'B'$, de ambas relaciones y el axioma III,2 se desprende la congruencia $A'B' \equiv AB$.

Demostremos, por último, que *si*

$$AB \equiv A'B' \quad \text{y} \quad A'B' \equiv A''B'',$$

entonces asimismo

$$AB \equiv A''B'',$$

es decir, *la relación de congruencia entre segmentos tiene propiedad de transitividad*.

Para demostrarlo, basta observar que, a base de la discusión precedente, de las dos relaciones $AB \equiv A'B'$, $A'B' \equiv A''B''$ siguen las relaciones

$$AB \equiv A'B', \qquad A''B'' \equiv A'B',$$

después de lo cual la congruencia $AB \equiv A''B''$ queda ya asegurada por el axioma III,2.

Así, pues, los axiomas III,1 y III,2 permiten establecer que: 1) cada segmento es congruente consigo mismo, 2) en las relaciones de congruencia de segmentos el orden de los puntos que los definen es indiferente*), 3) la relación de congruencia de segmentos es simétrica y transitiva.

Para obtener deducciones más jugosas son necesarios nuevos axiomas.

III,3. *Sean AB y BC dos segmentos sobre la recta a, sin puntos interiores comunes y sean, además, A'B' y B'C' dos segmentos sobre la misma recta, o bien sobre otra a', que tampoco poseen puntos interiores comunes. Si*

$$AB \equiv A'B' \quad y \quad BC \equiv B'C',$$

entonces

$$AC \equiv A'C'$$

(fig. 19).

DEFINICIÓN 7. Un par de semirrectas h, k que tienen el mismo origen O y no pertenecen a una misma recta se llama *ángulo*. Para denotar este ángulo se utilizan los símbolos $\angle(h, k)$ y $\angle(k, h)$.

Si A y B son puntos de las semirrectas h y k respectivamente, utilizaremos también la siguiente notación para este ángulo: $\angle AOB$.

Las semirrectas h y k se llaman *lados* del ángulo; el punto O, su *vértice*.

Sean h' la semirrecta que complementa h hasta la recta, y k' que complementa k hasta la recta. Los puntos del plano que se encuentran del mismo lado de la recta h, h', que los puntos de la semirrecta k, y a un mismo lado de la recta k, k' que los puntos de la semirrecta h, se denominan *puntos interiores de* $\angle(h, k)$, y la totalidad de todos estos puntos se llama *región interior del ángulo*. Los demás puntos del plano que contiene el ángulo, a excepción del punto O y los puntos de las semirrectas h y k, se llaman *puntos exteriores* del ángulo; la colección de todos estos puntos lleva el nombre de *región exterior del ángulo* (en la fig. 20 la región interior de $\angle(h, k)$ se muestra con rayado doble).

Veamos el siguiente

TEOREMA 11a. *Si A y B son puntos situados sobre distintos lados del ángulo, cada semirrecta que pasa dentro del ángulo por su vértice intersecará al segmento AB y,*

---

*) Esto significa que de la relación $AB \equiv A'B'$ siguen las relaciones $AB \equiv B'A'$, $BA \equiv A'B'$ y $BA \equiv B'A'$. La primera fue demostrada arriba; las dos últimas se deducen fácilmente utilizando la simetría y la transitividad de la relación de congruencia entre segmentos.

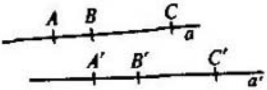


Fig. 19

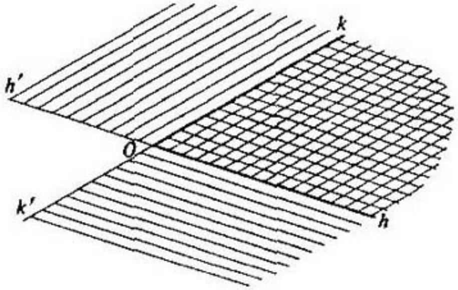


Fig. 20

recíprocamente, cada semirrecta que une el vértice con uno de los puntos del segmento AB estará dentro del ángulo.

DEMOSTRACIÓN DE LA PRIMERA PARTE DEL TEOREMA. Sea $\angle(h, k)$ el ángulo dado (estando el punto A sobre el lado h), y l, una semirrecta que parte del vértice y pasa por la región interior. Fijemos sobre la semirrecta h', complementaria de h, un punto arbitrario C, y consideremos el triángulo ABC. Sea l' el complemento de la semirrecta l, y l^*, la recta formada por las semirrectas l y l'. Por el axioma II,4, la recta l^* debe cortar bien a CB, bien a AB. Pero l^* no contiene puntos dentro de $\angle(h', k)$; por lo tanto, debe intersecar precisamente a AB.

Ahora bien, la semirrecta l' no tiene puntos dentro de $\angle(h, k)$; por lo tanto, es la semirrecta l que interseca al segmento AB. Esto demuestra la primera parte del teorema.

La segunda parte se demuestra a base de los razonamientos triviales.

Ahora introduciremos el último concepto básico: la congruencia de ángulos. Suponemos que un ángulo puede hallarse en una relación determinada con otro (o consigo mismo), y denotaremos esta relación por la palabra «congruente», o bien «igual».

III,4. *Sean dados $\angle(h, k)$ en el plano α, una recta a' en este mismo plano, o bien en otro, α', y supongamos fijado un lado determinado del plano α' con respecto a la recta a'.*

Sea h' una semirrecta de la recta a', con origen en el punto O'. Entonces en el plano α' existe una semirrecta k', y sólo una, tal que $\angle(h, k)$ es congruente con $\angle(h', k')$ y, además, todos los puntos interiores de $\angle(h', k')$ se encuentran en el lado prefijado con respecto a a'. Para denotar la congruencia de ángulos se utiliza la notación

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

Si $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$, entonces $\angle(k, h) \equiv \angle(k', h')$. Cada ángulo es congruente consigo mismo, es decir,

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k) \quad \text{y} \quad \angle(h, k) \equiv \angle(k, h).$$

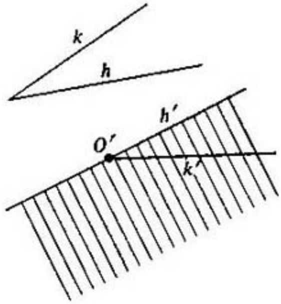


Fig. 21

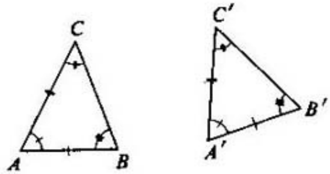


Fig. 22

La primera parte de este axioma se resume así: *cada ángulo puede ser aplicado de manera única en un plano dado, a un lado prefijado de una semirrecta dada* (fig. 21).

III,5. *Sean, A, B, C tres puntos no pertenecientes a una misma recta y A', B', C' otros tres, tampoco pertenecientes a una misma recta. Si*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \text{ y } \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

entonces

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \text{ y } \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

(fig. 22).

Comparando los axiomas del III grupo, vemos que los axiomas III,1 — III,3 tienen que ver sólo con segmentos, el III,4 se refiere a la congruencia de ángulos, mientras que el III,5 relaciona la congruencia de segmentos con la de ángulos.

6. Consecuencias de los axiomas I — III

§ 17. Hemos visto que la congruencia de segmentos es una propiedad mutua: si el segmento AB es congruente al $A'B'$, también $A'B'$ será congruente a AB. Por esto AB y $A'B'$ se llaman *mutuamente congruentes* (o, simplemente, *congruentes*).

Supongamos que sobre la recta a se ha fijado un sistema de puntos $A, B, C, \ldots, K, L$, y sobre a', el sistema $A', B', C' \ldots, K', L'$. Si los segmentos AB y $A'B'$, AC y $A'C'$, BC y $B'C'$, ..., KL y $K'L'$ son congruentes, ambos sistemas se llaman congruentes.

Tiene lugar el siguiente

TEOREMA 12. *Si en dos sistemas congruentes $A, B, C, \ldots, K, L$ y $A', B', C', \ldots, K', L'$ los puntos del primero están dispuestos de manera que B esté entre A por un lado y $C, D, \ldots, K, L$ por el otro, C entre A y B por un lado y $D, \ldots, K, L$ por el otro, etc., entonces los puntos $A', B', C', \ldots, K', L'$ tendrán análoga disposición, es decir, B' estará entre A' por un lado y $C', D', \ldots, K', L'$ por el otro, etc.*

Se puede resumir así: *al hacer una traslación congruente de un sistema de puntos de una recta a otra, el orden de disposición de los puntos se conserva.*

Sin detenernos a demostrar el teorema 12, pasaremos al siguiente, que será esencial más adelante.

TEOREMA 13. *Sean dados tres puntos A, B, C sobre una recta a, y otros tres, A', B', C', sobre una recta a'. Supongamos, además, que $AB \equiv A'B'$ y $AC \equiv A'C'$. Si B está entre A y C, y B' se encuentra, sobre la recta a', del mismo lado que C' con respecto a A', entonces B' está entre A' y C'.*

A diferencia del teorema 12, aquí no se presupone la congruencia $BC \equiv B'C'$.

La demostración se puede obtener directamente de los axiomas III,1 y III,3. En efecto, según el axioma III,1, en la recta a' hay un punto C tal que B' está entre A' y C^* y, además, $B'C^* \equiv BC$. Por el axioma III,3 debe ser, entonces, $AC \equiv A'C^*$. De este modo $AC \equiv A'C'$ y $AC \equiv A'C^*$. Pero como los puntos C' y C^* están a un mismo lado de A', en virtud del axioma III,1 los puntos C' y C^* coincidirán. En consecuencia, B' está entre A' y C'.

DEFINICIÓN 8. El triángulo ABC se llama *congruente* al $A'B'C'$ si

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad BC \equiv B'C'$$

$$\angle A \equiv \angle A', \qquad \angle B \equiv \angle B', \qquad \angle C \equiv \angle C'$$

(escritura simbólica: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$).

TEOREMA 14 (PRIMER TEOREMA DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS). *Si para dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lugar las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C' \quad y \quad \angle A \equiv \angle A',$$

entonces el triángulo ABC es congruente al $A'B'C'$.

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma III,5 tenemos que $\angle B \equiv \angle B'$, $\angle C \equiv \angle C'$; nos basta demostrar, pues, que $BC \equiv B'C'$.

Supongamos que el lado BC no es congruente al $B'C'$. A base del axioma III,1, podemos hallar sobre la semirrecta $B'C'$ un punto D' tal que $BC \equiv B'D'$. Bajo nuestra hipótesis, las semirrectas $A'C'$ y $A'D'$ son diferentes. Aplicando a los triángulos ABC y $A'B'D'$ el axioma III,5, concluimos que $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$. Pero, según la hipótesis, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. Las dos últimas relaciones contradicen la condición de unicidad del axioma III,4. En consecuencia, la hipótesis $BC \equiv B'C'$ es inadmisible.

TEOREMA 15 (SEGUNDO TEOREMA DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS). *Si para los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lugar las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \qquad \angle A \equiv \angle A', \qquad \angle B \equiv \angle B',$$

entonces el triángulo ABC es congruente con $A'B'C'$.

La demostración es análoga a la precedente (por el método de reducción al absurdo, utilizando los axiomas III,1, III,5 y III,4).

El teorema siguiente afirma para los ángulos en esencia lo mismo que el axioma III,3 para los segmentos.

TEOREMA 16. *Sean h, k, l y h', k', l' semirrectas que parten de los puntos O y O' respectivamente, de modo que cada una de estas ternas de semirrectas se encuentra en un mismo plano. Supongamos, además, que alguna de las semirrectas h, k, l está dentro del ángulo formado por las otras dos, y la semirrecta correspondiente en la terna h', k', l'* (es decir, la denotada por la misma letra) *tiene la misma disposición*

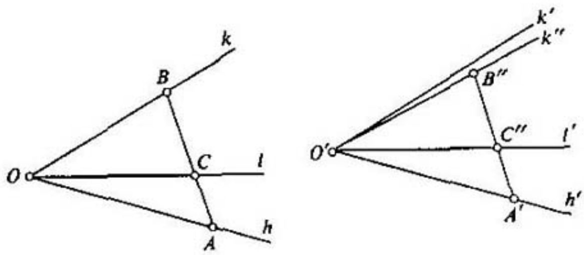


Fig. 23

con respecto a las otras dos de la terna. Entonces, de

$$\angle(h, l) \equiv \angle(h', l') \quad y \quad \angle(l, k) \equiv \angle(l', k')$$

sigue que

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

Haremos la demostración primero para el caso en que la semirrecta l esté dentro del ángulo (h, k) (fig. 23). Supongamos que $\angle(h, k)$ no es congruente con $\angle(h', k')$. Basándonos en el axioma III,4, construyamos $\angle(h', k'')$ de forma que se verifique $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k'')$ y que $\angle(h', k'')$ tenga puntos interiores comunes con $\angle(h', k')$. Tomemos sobre las semirrectas h y k puntos A y B respectivamente y determinemos sobre las semirrectas h' y k'' puntos A' y B'' a las condiciones: $OA \equiv O'A'$ y $OB \equiv O'B''$. Entonces, por el teorema 14, $AB \equiv A'B''$. Como la semirrecta l está en el interior de $\angle(h, k)$, en virtud del teorema 11a esta semirrecta intersecará el segmento AB en algún punto C. Determinemos sobre la semirrecta $A'B''$ un punto C'' se modo que tenga lugar la congruencia $AC \equiv A'C''$. Como consecuencia de las congruencias $AC \equiv A'C''$ y $AB \equiv A'B''$ y a base del teorema 13, el punto C'' estará entre A' y B''; además, tiene lugar la congruencia $BC \equiv B''C''$ (cosa que se puede demostrar por reducción al absurdo, recurriendo al axioma III,3). Ahora bien, por las congruencias $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k'')$ y por el axioma III,5, tenemos que $\angle OAC \equiv \angle O'A'C''$ y $\angle OBC \equiv \angle O'B''C''$. En virtud del mismo axioma y de las congruencias $OA \equiv O'A'$, $AC \equiv A'C''$ y $\angle OAC \equiv \angle O'A'C''$, concluimos que $\angle AOC \equiv \equiv \angle A'O'C''$; análogamente, tomando en consideración las congruencias $OB \equiv O'B''$, $BC \equiv B''C''$, $\angle OBC \equiv \angle O'B''C''$, concluimos que $\angle COB \equiv \equiv \angle C''O'B''$.

Como consecuencia de la primera de nuestras dos conclusiones y del axioma III,4, el punto C'' tendrá que estar sobre la semirrecta l'. En tal caso, la congruencia $\angle COB \equiv \angle C''O'B''$ equivale a la congruencia $\angle(l, k) \equiv \angle(l', k'')$. Pero por la condición del teorema, $\angle(l, k) \equiv \angle(l', k')$. Como, por nuestra hipótesis, las semirrectas k' y k'' son diferentes, las últimas dos relaciones contradicen el axioma III,4. Esta contradicción concluye la demostración.

Supongamos, ahora, que la semirrecta k está dentro de $\angle(h, l)$, y k', dentro de $\angle(h', l')$. Tomemos sobre las semirrectas h y l puntos A y C respectivamente, y determinemos sobre h' y l' puntos A' y C' a las condiciones: $OA \equiv O'A'$, $OC \equiv O'C'$. Sea B el punto de intersección de la semirrecta k con el segmento AC, y B' el punto de intersección de k' y $A'C'$ (la existencia de estos puntos está ahora asegurada por la disposición de nuestras semirrectas). De las condiciones del teorema, teniendo en cuenta el axioma III,5 y el teorema 15 hallamos que $CB \equiv C'B'$; de aquí, tomando en consideración la congruencia $CA \equiv C'A'$, obtenemos que $BA \equiv B'A'$. De esta forma, $OA \equiv O'A'$, $BA \equiv B'A'$; además, $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ (por el axioma III,5). Por ende, $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$, que constituye lo que queríamos demostrar.

El teorema que sigue cumple para los ángulos la misma función que el teorema 13 para los segmentos.

TEOREMA 16a. *Supongamos que en cierto plano se han dado las semirrectas h, k, l y h', k', l', con origen en los puntos O y O' respectivamente. Supongamos que las semirrectas k y l están a un mismo lado de la recta que contiene a h, y que las semirrectas k' y l' tienen disposición análoga con respecto a h'. Entonces, si $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$, $\angle(h, l) \equiv \angle(h', l')$ y si la semirrecta k está en el interior del ángulo $\angle(h, l)$, la semirrecta k' estará, asimismo, dentro del ángulo $\angle(h', l')$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos en las semirrectas h y l puntos A y C respectivamente y determinemos sobre h' y l' puntos A' y C' de modo que $OA \equiv O'A'$, $OC \equiv O'C'$. Como la semirrecta k pasa dentro del ángulo $\angle(h, l)$, intersecará al segmento AC en algún punto B. Utilizando el teorema 14, el axioma III,1 y el teorema 13, es fácil mostrar que en el segmento $A'C'$ habrá un punto B' tal que $AB \equiv A'B'$. Ahora, del axioma III,5 concluimos que $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$. De aquí y del axioma III,4 se desprende que k' pasa por el punto B'. En consecuencia, la semirrecta k', está dentro de $\angle(h', l')$.

TEOREMA 17. *Si en el triángulo ABC se tiene $AC \equiv CB$, entonces $\angle CAB \equiv \angle CBA$ y $\angle CBA \equiv \angle CAB$.*

DEMOSTRACIÓN. El teorema sigue del axioma III,5 aplicado a los triángulos CAB y CBA.

TEOREMA 18 (TERCER TEOREMA DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS). *Si para los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lugar las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C', \qquad BC \equiv B'C',$$

entonces el triángulo ABC es congruente con $A'B'C'$.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del teorema 14, nos basta demostrar que $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$. Supongamos lo contrario. Por el axioma III,4, existirá una semirrecta $A'P_1'$, que está situada del mismo lado que el punto B' con respecto a la recta $A'C'$, y que satisfaga la condición $\angle CAB \equiv \angle C'A'P_1'$. Por hipótesis, la semirrecta $A'P_1'$ no coincide con la $A'B'$ (fig. 24).

En virtud del axioma III,1, sobre la semirrecta $A'P_1'$ habrá un punto B_1' tal que $AB \equiv A'B_1'$. Como $AB \equiv A'B_1'$, $AC \equiv A'C'$ y $\angle CAB \equiv \angle C'A'B_1'$, por el teorema 14 tendremos que $\Delta ABC \equiv \Delta A'B_1'C'$. De aquí sigue la congruencia $BC \equiv B_1'C'$. Por la simetría y la transitividad de la congruencia de SEGMENTOS, concluimos a base de lo anterior que los lados del triángulo $A'B_1'C'$ son congruentes a los lados correspondientes de $A'B'C'$. En forma análoga, construimos ahora el triángulo $A'B_2'C'$ al otro lado de la recta $A'C'$ y que tenga iguales propiedades. Consideremos los triángulos $A'B_2'B'$ y $C'B_2'B'$. Por la congruencia

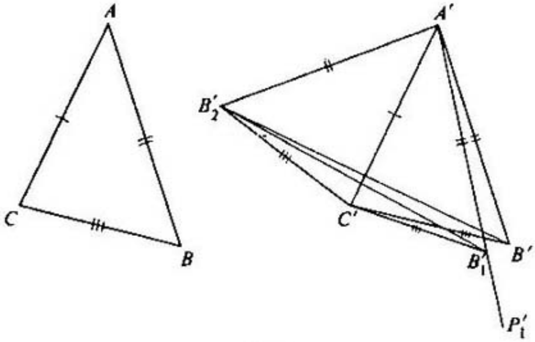


Fig. 24

$A'B_2' \equiv A'B'$, el teorema 17 implica que $\angle A'B_2'B' \equiv \angle A'B'B_2'$; análogamente, $\angle B'B_2'C' \equiv \angle B_2'B'C'$. Usando las dos últimas relaciones y basándonos en el teorema 16, concluimos que $\angle A'B_2'C' \equiv \angle A'B'C'$; de aquí y del teorema 14 sigue que $\Delta A'B_2'C' \equiv \Delta A'B'C'$ y, por ende, que $\angle C'A'B_2' \equiv \angle C'A'B'$. En forma idéntica se puede demostrar que $\angle C'A'B_2' \equiv \angle C'A'B_1'$. Las dos últimas relaciones contradicen el axioma III,4; esta contradicción demuestra el teorema.

Ahora puede demostrarse fácilmente el

TEOREMA 19. *Si* $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ *y* $\angle(h, k) \equiv \angle(h'', k'')$, *entonces* $\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'')$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos los vértices de $\angle(h, k)$, $\angle(h', k')$ y $\angle(h'', k'')$ por O, O' y O'', respectivamente. Fijemos sobre las semirrectas h, k dos puntos A, B (A sobre h, B sobre k) y determinemos sobre las semirrectas h', k', h'', k'' puntos A', B', A'', B'' de modo que $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $OA \equiv O''A''$, $OB \equiv O''B''$. Por el teorema 14, tendremos que $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A''B''$. Como la propiedad de congruencia de LOS SEGMENTOS es simétrica y transitiva, las relaciones precedentes implican las congruencias $O'A' \equiv O''A''$, $O'B' \equiv O''B''$, $A'B' \equiv A''B''$. Por el teorema 18, de aquí sigue que $\Delta O'A'B' \equiv \Delta O''A''B''$ y, por ende, $\angle A'O'B' \equiv \angle A''O''B''$. El teorema queda demostrado.

Supongamos ahora que algún $\angle(h, k)$ es congruente con $\angle(h', k')$. Como, por el axioma III,4, $\angle(h, k)$ es congruente consigo mismo: $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$, del teorema 19 sigue que $\angle(h', k')$ es congruente con $\angle(h, k)$. Resumiendo, de

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

sigue que

$$\angle(h', k') \equiv \angle(h, k).$$

Queda así demostrado que la relación de congruencia de ángulos es simétrica (recíproca). En virtud del teorema 19, es también transitiva. Conjuntamente con esto, resulta ser simétrica y transitiva también la relación de congruencia de triángulos.

Las restantes proposiciones básicas de la geometría pueden desarrollarse, por ejemplo, en el orden siguiente.

DEFINICIÓN 9. Dos ángulos que tengan vértice común, un lado común y cuyos lados restantes forman una línea recta, se denominan *adyacentes*. Dos ángulos con vértice común cuyos lados forman líneas rectas dos a dos, se llaman *opuestos por el vértice.*

TEOREMA 20. *Si dos ángulos son (mutuamente) congruentes, los ángulos adyacentes a ellos también serán congruentes.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ (fig. 25). Sean h_1 la semirrecta que complementa h, hasta la recta, y h_1', la semirrecta que complementa h' hasta la recta; denotemos por O y O' los vértices de $\angle(h,k)$ y (h',k'). Fijemos sobre las semirrectas h, k y h_1 puntos A, B y C respectivamente. Por el axioma III,1, en las semirrectas h', k', y h_1' existirán puntos A', B' y C' tales que $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$ y $OC \equiv O'C'$. De aquí, por el axioma III,3, sigue que $AC \equiv A'C'$; por el axioma III,5, será $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ (o bien $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$), por el teorema 14, $AB \equiv A'B'$. Como $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ y $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, aplicando nuevamente el teorema 14 hallamos que $BC \equiv B'C'$. Como $OB \equiv O'B'$, $OC \equiv O'C'$ y $BC \equiv B'C'$, por el teorema 18 será $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$, es decir, $\angle(k,h_1) \equiv \angle(k',h_1')$, que es lo que se pedía.

TEOREMA 21. *Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes entre sí.*

La demostración sigue fácilmente del teorema 20, pues dos ángulos opuestos por el vértice tienen un ángulo adyacente común.

Un ángulo congruente con su adyacente se llama *recto.*

A fin de demostrar la existencia de ángulos rectos, tomemos un $\angle(h,k)$ arbitrario y construyamos $\angle(h',k)$ congruente con $\angle(h,k)$, pero situado al otro lado de k (la posibilidad de hacer esto se asegura por el axioma III,4). Construyamos sobre h y h', a partir del vértice común, segmentos iguales, y unamos sus extremos con una recta. Si esta recta pasa por el vértice de $\angle(h,k)$, el propio ángulo $\angle(h,k)$ será recto. En caso contrario, ésta cortará bien a la semirrecta k, bien a su complemento. Pero entonces, del axioma III,5 —o bien del teorema 20 y del axioma III,5, respectivamente— sigue que esta recta forma ángulos rectos ya sea con la semirrecta k, ya sea con su complemento.

TEOREMA 22. *Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\angle(h,k)$ y $\angle(h',k')$ rectos (fig. 26); sean $\angle(k,h_1)$ y $\angle(k,h_1')$ los adyacentes con ellos; sean O y O' los vértices de estos ángulos. Supongamos que $\angle(h,k) \not\equiv \angle(h',k')$. Por el axioma III,4, habrá una semirrecta k'' con origen O', del mismo lado de la recta $\angle(h_1',h')$ que k' y tal que $\angle(h,$

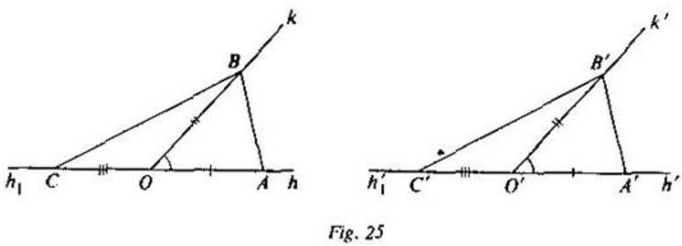


Fig. 25

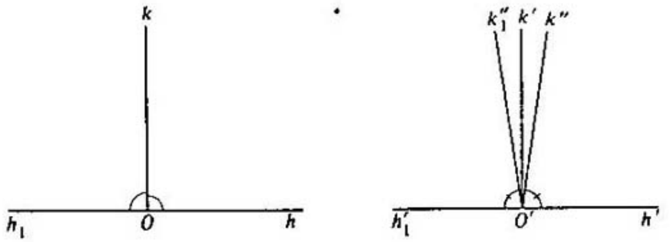


Fig. 26

$k) \equiv \angle(h', k'')$. Bajo nuestra hipótesis, la semirrecta k'' no puede coincidir con k'. Entonces debe estar o bien dentro de $\angle(h', k')$, o bien en el interior de $\angle(h_1', k')$. (Esto sigue del teorema 11a y del axioma de Pasch II,4). Supongamos, por ejemplo, que k'' está dentro de $\angle(h', k')$. En virtud del axioma III,4, existe una semirrecta k_1'', con origen O' y del mismo lado de la recta (h_1', h') que k', tal que $\angle(h', k'') \equiv \angle(h_1', k_1'')$. Como $\angle(h', k') \equiv \angle(h_1', k')$, por el teorema 16a la semirrecta k_1'' estará dentro de $\angle(h_1', k')$; por esto, dicha semirrecta no puede coincidir con k''. De aquí y de III,4 tenemos que $\angle(h_1', k'') \not\equiv \angle(h_1', k_1'')$. Pero, por otra parte, $\angle(h_1', k'') \equiv \angle(h_1, k)$ (por el teorema 20) $\equiv \angle(h, k) = \angle(h', k'') \equiv \angle(h_1', k_1'')$, lo cual contradice el resultado precedente. De modo análogo se obtiene una contradicción en el caso en que k'' pase dentro de $\angle(h_1', k)$. Con esto, queda demostrado el teorema por reducción al absurdo.

DEFINICIÓN. Sean A y B puntos diferentes. Diremos que el punto O es *el punto medio del segmento AB*, si está sobre la recta AB y satisface la condición $AO \equiv OB$.

TEOREMA 23. *Para cada segmento existe un único punto medio; el punto medio de un segmento es punto interior de éste.*

En otras palabras: *cada segmento se puede dividir por la mitad, y además de modo único.*

DEMOSTRACIÓN. Sea dado el segmento AB (fig. 27). Construyamos los ángulos congruentes $\angle MAB$ y $\angle NBA$ de forma que las semirrectas AM y BN estén en lados diferentes con respecto a la recta AB; esto puede hacerse en virtud del axioma III,4. Construyamos sobre las semirrectas AM y BN segmentos congruentes AC y BD. Como los puntos C y D están en lados diferentes con respecto a la recta AB, el segmento CD intersecará a la recta AB en algún punto; lo denotaremos por O.

La elección de los segmentos congruentes AC y BD se efectúa observando la siguiente precaución: si las rectas AM y BN se cortan, elegimos el punto C entre A y dicho punto de intersección; luego construimos $BD \equiv AC$ (en realidad este caso hipotético es imposible, pero no lo demostraremos ahora). Ahora resulta claro que el punto O no puede coincidir ni con A, ni con B. Es fácil demostrar, asimismo, que O no puede estar fuera del segmento AB. Precisamente, si suponemos, por ejemplo, que A está entre O y B, llegamos a una contradicción con el axioma de Pasch, con respecto al triángulo OBD (pues la recta AM interseca al segmento OB en el punto A, pero no puede intersecar ni a OD, ni a BD). Así, pues, O está entre A y B. De-

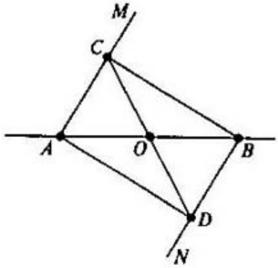


Fig. 27

mostremos que O es el punto medio del segmento AB. En efecto, por el teorema 14, los triángulos ABC y ABD son congruentes; por lo tanto, $CB \equiv AD$. De aquí y del teorema 18 se desprende la congruencia de los triángulos ACD y BCD, lo cual nos da la congruencia de $\angle ACD$ con $\angle CDB$. Utilizando esto último y recurriendo al teorema 15, concluimos que los triángulos ACO y BDO son congruentes; por consiguiente, $AO \equiv OB$.

Ahora mostraremos que el segmento tiene sólo un punto medio. Supongamos lo contrario, es decir, que AB tiene dos puntos medios. Por el axioma III,1, uno de ellos está entre el otro y el punto A *); por esto, podemos denotarlos con las letras O_1 y O_2, de modo que O_1 está entre A y O_2. Entonces, en virtud del lema 2, el punto O_2 está entre O_1 y B. Pero con las relaciones $AO_1 \equiv BO_1$, $AO_2 \equiv BO_2$ y la condición de que O_1 está entre A y O_2, del teorema 13 sigue que el punto O_1 está entre B y O_2. Así, por una parte O_2 está entre B y O_1, y por la otra, O_1 está entre B y O_2. Esto contradice el axioma II,3.

Citemos, además, los teoremas siguientes:

TEOREMA 17 bis. *En un triángulo isósceles la mediana de la base es a la vez altura y bisectriz del ángulo al vértice.* •

TEOREMA 24. *Cada ángulo se puede dividir por la mitad, y además de manera única.*

TEOREMA 25. *De cada punto se puede trazar a una recta dada una perpendicular y sólo una.*

TEOREMA 26. *De cada punto sobre una recta se puede levantar una única perpendicular a ella.*

§ 18. Utilizando los axiomas I — III pueden definirse las relaciones «mayor» y «menor» para segmentos y ángulos.

DEFINICIÓN 10. Dados los segmentos AB y $A'B'$, si en el interior de AB existe un punto C tal que

$$AC \equiv A'B',$$

se dice que *el segmento AB es mayor que el $A'B'$*, o bien que *$A'B'$ es menor que AB*; se escribe $AB > A'B'$, o bien $A'B' < AB$, respectivamente.

---

*) En virtud del axioma III,1, el punto medio está dentro del segmento; de aquí sigue que si el segmento AB posee dos puntos medios, uno de ellos está entre el otro y el punto A.

DEFINICIÓN 11. Dados $\angle(h, k)$ y $\angle(h', k')$, si entre las semirrectas con origen en el vértice de $\angle(h, k)$ y que pasan por su interior, existe una semirrecta l tal que

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

se dice que $\angle(h, k)$ *es mayor que* $\angle(h', k')$, o bien que $\angle(h', k')$ *es menor que* $\angle(h, k)$.

TEOREMA 27. *Dados dos segmentos arbitrarios AB y CD, siempre se cumple alguna de las tres relaciones*

$$AB \equiv CD, \qquad AB > CD, \qquad AB < CD,$$

y cada una de ellas excluye a las otras dos.

Efectivamente, por el axioma III,1, sobre la recta AB existe un punto M, situado al mismo lado de A que B, que satisface la condición $AM \equiv CD$. Si el punto M está entre A y B, entonces $AB > CD$; si M coincide con B, entonces $AB \equiv CD$; si B está entre A y M, será $AB < CD$. Queda así establecida la existencia de alguna de las relaciones indicadas.

Mostremos ahora que cualquiera de ellas excluye las demás. Sea, por ejemplo, $AB > CD$. En tal caso, en el segmento AB existe un punto M, para el cual $AM \equiv CD$. Si los segmentos AB y CD, además de la relación $AB > CD$, satisficieran también la relación $AB \equiv CD$, por el axioma III,2 tendría lugar la congruencia $AM \equiv AB$, lo cual contradiría el axioma III,1. Análogamente, si $AB > CD$, no puede tener lugar la relación $AB < CD$. En efecto, si $AB > CD$ y $AB < CD$, entre A y B existe un punto M tal que $AM \equiv CD$, y entre C y D existe un punto N tal que $CN \equiv AB$. Llegamos a una contradicción con el teorema 13.

TEOREMA 28. *Si $AB < A'B'$ y $A'B' < A''B''$, entonces $AB < A''B''$.*

La demostración puede obtenerse mediante razonamientos evidentes utilizando el teorema 13 y el 8 (o bien el lema 2).

Como corolario del teorema 28, presentemos el teorema siguiente.

TEOREMA 29. *Si el segmento CD es parte del segmento AB, entonces $CD < AB$.*

El lector puede enunciar fácilmente los teoremas correspondientes a los 27, 28, 29, para ángulos en lugar de segmentos.

Después de haber introducido para segmentos y ángulos los conceptos de «mayor» y «menor», se pueden enunciar y demostrar los siguientes teoremas.

TEOREMA 30. *El ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los interiores no adyacentes.*

Aunque el teorema 30 es de suma importancia en nuestra exposición, no lo demostraremos aquí, pues la demostración que se expone comúnmente en los textos se basa rigurosamente en los axiomas I — III.

En nuestra reseña histórica, este teorema fue referido en el § 5, donde también se dio una demostración.

TEOREMA 31. *En cada triángulo al menos dos ángulos son agudos.*

TEOREMA 32. *En un triángulo a mayor lado le corresponde mayor ángulo opuesto, y recíprocamente, a mayor ángulo le corresponde mayor lado opuesto.*

TEOREMA 33. *La perpendicular es más corta que cualquier oblicua.*

TEOREMA 34. *Cada lado de un triángulo es menor que la suma y mayor que la diferencia de los otros dos.*

Del teorema 34 sigue que *un segmento de recta es más corto que cualquier quebrada que une sus extremos.*

Hemos referido una serie de teoremas que pueden ser demostrados basándonos en los axiomas I — III. Sin embargo, estos axiomas no permiten deducir muchos resultados importantes de la geometría. Por ejemplo, éstos no implican que una recta que pasa por algún punto interior de un círculo debe intersecar la circunferencia. Con los axiomas I — III, al igual que con los I — II, aún no puede demostrarse que el conjunto de los elementos de la geometría es innumerable (para más detalles, véase el § 72).

§ 19. Los axiomas del tercer grupo permiten definir los movimientos.

Como ya observamos en su oportunidad, para Euclides los movimientos constituyen un concepto evidentemente claro, que no es fundamentado por axioma alguno. Figuras que se pueden superponer se consideran iguales. En consecuencia, en el sistema de Euclides los movimientos constituyen un concepto básico (pero que queda sin fundamentar), mientras que la congruencia es un concepto derivado. Hilbert introduce la congruencia como concepto básico, después de lo cual se puede definir el movimiento como derivado. Ahora expondremos esta definición.

Sean dados dos conjuntos de puntos Ω y Ω', finitos o infinitos, es indiferente. Supongamos que entre los puntos de estos conjuntos se ha establecido una correspondencia biyectiva. Cada par de puntos M y N del conjunto Ω determina un segmento MN. Sean M' y N' los puntos de Ω' que corresponden a los puntos M y N. Convendremos en llamar a $M'N'$ el segmento correspondiente a MN.

Si la correspondencia entre Ω y Ω' es tal que los segmentos correspondientes resultan siempre ser congruentes, los conjuntos Ω y Ω' se llamarán, asimismo, congruentes. En tal caso se dice, también, que cada conjunto Ω y Ω' se obtiene mediante UN MOVIMIENTO *del otro, o bien que uno (cualquiera) de estos conjuntos puede* SER SUPERPUESTO *al otro.* Los puntos correspondientes de los conjuntos Ω y Ω' se llaman *coincidentes bajo la superposición*.

(No introduciremos ahora diferencias entre los conjuntos propiamente coincidentes y mutuamente especulares.)

Tienen lugar los teoremas siguientes.

TEOREMA I. *Puntos que se encuentran sobre una recta son llevados por todo movimiento a puntos que también están sobre la recta.*

Este resultado se desprende directamente del teorema 34. Efectivamente, supongamos que sobre alguna recta a se considera algún conjunto de puntos; debemos demostrar que los puntos del conjunto congruente están situados sobre una misma recta a'. Escojamos en el conjunto dado sobre la recta a tres puntos A, B, C y supongamos, para la precisión, que B está entre A y C. Entonces, el segmento AC está formado por los segmentos AB y BC. Si los puntos A', B', C', obtenidos con un traslado congruente de los puntos A, B, C no están sobre una misma recta, forman un triángulo y, por el teorema 34, el segmento $A'C'$ debe ser menor que el segmento formado uniendo $A'B'$ y $B'C'$. Y como $A'B' \equiv AB$, $B'C' \equiv BC$, debe tener lugar la desigualdad $A'C' < AC$, que contradice la condición de congruencia de conjuntos.

Los teoremas que siguen se dan sin demostración.

TEOREMA II. *Puntos que están sobre un plano pasan mediante un movimiento en puntos que también se encuentran sobre cierto plano.*

TEOREMA III. *El ángulo entre dos segmentos que unen algún punto de un conjunto con otros dos, es congruente al ángulo entre los segmentos correspondientes del conjunto congruente.*

TEOREMA A. *Sean M, N, P, Q cuatro puntos de alguna figura* Ω (es decir, de algún conjunto de puntos), *que no están sobre un mismo plano; sean M' un punto arbitrario del espacio; a, alguna recta que pasa por M', y α, algún plano que contiene a la recta a. Entonces la figura Ω puede ser desplazada con un movimiento, de manera que el punto M coincida con M', el punto N esté sobre la recta a a un lado prefijado cualquiera del punto M', el punto P esté en el plano α a un lado arbitrario prefijado de la recta a, y el punto Q ocupe una posición a un lado prefijado cualquiera del plano α.*

TEOREMA B. *Si tres puntos M, N, P de la figura Ω que no están en una misma recta coinciden con sus puntos correspondientes M', N', P' de la figura congruente Ω', son posibles dos casos:* 1) *cada punto de Ω coincide con el punto correspondiente de la figura Ω';* 2) *cada punto de la figura Ω que se encuentra en el plano MNP coincide con el punto correspondiente de Ω', mientras que los restantes puntos correspondientes de estas figuras se encuentran en lados diferentes con respecto al plano MNP y cada punto de la figura Ω' queda determinado de manera unívoca por la posición del punto correspondiente de la figura* Ω (en este último caso las figuras se llaman *simétricas*, o bien *mutuamente especulares*, con respecto al plano *MNP*).

En la planimetría a los teoremas A y B les corresponden los dos que siguen.

TEOREMA C. *Sean M, N, P tres puntos de alguna figura Ω que no están en una recta, M', un punto arbitrario del plano, a, alguna recta que pasa por M'. Entonces Ω se puede desplazar mediante un movimiento de manera que el punto M se superponga a M', el punto N quede sobre la recta a a un lado prefijado cualquiera del punto M', y el punto P ocupe alguna posición a un lado arbitrario prefijado de la recta a.*

TEOREMA D. *Si dos puntos diferentes M* y *N de una figura Ω coinciden con los puntos correspondientes M' y N' de la figura congruente Ω', son posibles dos casos:* 1) *cada punto de Ω coincide con el punto correspondiente de la figura Ω';* 2) *cada punto de la figura Ω que esté sobre la recta MN coincide con el punto correspondiente de Ω', mientras que los demás puntos correspondientes de estas figuras están en lados diferentes con respecto a la recta MN, y cada punto de Ω' queda determinado unívocamente por la posición del punto correspondiente de la figura* Ω (en el último caso las figuras se llaman *simétricas* con respecto a la recta *MN*).

Los teoremas A y C caracterizan el grado de libertad de los movimientos de figuras. Los teoremas B y D establecen condiciones que determinan la posición de una figura; precisamente, tres puntos de una figura determinan su posición en el espacio salvo la reflexión especular y en la planimetría dos puntos determinan la posición de una figura salvo una simetría con respecto a una recta.

Al definir el movimiento de una figura Ω podemos, en particular, suponer que el conjunto de sus puntos ocupa todo el espacio y, en la planimetría, todo el plano, es decir, se puede suponer que para cada punto del espacio —o del plano, para la planimetría— hay un punto correspondiente, de manera que si a M y N les corresponden los puntos M' y N', entonces $MN \equiv M'N'$. En tal caso diremos que se efectúa un movimiento de todo el espacio, o bien de todo el plano, en el caso de la planimetría.

El movimiento de una figura, así como el de todo el espacio, se llama *giro con respecto al punto O*, si O coincide con el punto correspondiente O', es decir, si O permanece en su lugar (es un punto fijo). El movimiento se llama *giro con respecto a* *una recta a*, si cada punto de a coincide con su punto correspondiente, es decir, si cada punto de la recta a queda fijo. La recta a se denomina *eje de giro* *).

Un movimiento se llama *traslación* (también traslado o desplazamiento) *a lo largo de la recta u*, si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

1) cada punto de la recta u se desplaza, quedando sobre la misma recta u;

2) cada punto de algún plano α que contiene la recta u permanece en dicho plano, al mismo lado de la recta u:

3) cada punto que no pertenece a α permanece al mismo lado de este plano.

El movimiento en que todos los puntos permanecen fijos se incluye entre las traslaciones a lo largo de cualquier recta.

El giro alrededor de un punto y la traslación a lo largo de una recta representan casos particulares de movimientos. Sin embargo, cualquier movimiento puede ser reducido a la aplicación sucesiva de una traslación y un giro.

A fin de iluminar el sentido exacto de esta última afirmación, destacaremos ahora un resultado que juega un papel fundamental en el estudio de los movimientos.

Supongamos que dos movimientos del espacio se efectúan de manera sucesiva, uno tras otro. El primero lleva un punto M arbitrario en el punto M'; el segundo lleva M' a la posición M''. Como resultado se tiene una nueva transformación de todos los puntos del espacio, en la cual el punto arbitrario M pasa al punto M''; llamaremos *producto de los movimientos* a la transformación así obtenida. A fin de que el producto de dos movimientos quede bien determinado, no basta dar los movimientos componentes, es necesario además indicar en qué orden se efectúan éstos.

TEOREMA. *El producto de dos movimientos es un movimiento.*

La demostración de este importante teorema es totalmente evidente. En efecto, supongamos que dos puntos arbitrarios M y N del espacio se trasladan en los puntos M' y N' por el primero de los movimientos dados, y que estos puntos, a su vez, van en M'' y N'' como resultado del segundo. Hay que demostrar que el segmento MN es congruente con el $M''N''$. Pero por la hipótesis del teorema, $MN \equiv M'N'$ y $M'N' \equiv M''N''$; de aquí, en virtud del axioma III,2 y las proposiciones que le siguen, tenemos que $MN \equiv M''N''$.

La propiedad de los movimientos expresada por el teorema demostrado se llama *propiedad de grupo* (más detalladamente sobre los grupos véase el § 156). Al existir esta propiedad, puede plantearse el problema de representar un movimiento arbitrario como producto de algunos movimientos sencillos especiales. En particular (cosa que observamos arriba), cada movimiento es el producto de una traslación y un giro.

Para demostrar esto, consideremos alguna figura Ω (cuyos puntos pueden, en particular, llenar todo el espacio) y supongamos que algún movimiento la transforma en la figura congruente Ω'. Sea M un punto arbitrario de la figura Ω, y M' su nueva posicion.

Denotemos con Ω'' la figura que se obtiene de Ω por la traslación que lleva M en M'. La existencia de tal traslación sigue del teorema A. Evidentemente, Ω' y Ω'' son

*) Estas definiciones no coinciden con las habituales, pues no excluimos transformaciones especulares de las figuras.

congruentes; además, el punto de la figura Ω'' que corresponde a M' en la figura Ω', coincide con M'. Por esto, el movimiento que hace coincidir Ω'' con Ω' es un giro alrededor del punto M'. Así, pues, el movimiento arbitrario de la figura de su posición Ω a la posición Ω' se representa como el producto de la traslación de ésta de la posición Ω a la Ω'', y el giro que hace coincidir a Ω'' con Ω'.

7. Grupo IV. Axiomas de continuidad

§ 20. Utilizando los axiomas I — III hemos establecido la comparación de segmentos, de modo que dados dos cualesquiera, uno de ellos es o bien mayor que el otro, o bien menor que él, o bien igual a éste (teorema 27 del § 18).

Los axiomas I — III, con todo, no son suficientes para poder efectuar el proceso de medición, como resultado del cual la razón entre un segmento arbitrario y la unidad lineal se expresa por un número determinado.

La fundamentación para la medición de segmentos se da por el axioma IV,1 de abajo, comúnmente llamado axioma de Arquímedes. Este permite, eligiendo una unidad lineal, definir para cada segmento de manera única un número positivo, llamado longitud de este segmento. A fin de poder establecer, recíprocamente, la existencia de un segmento cuya longitud sea igual a cualquier número positivo prefijado, es necesario introducir un axioma más.

Apartándonos de la exposición de Hilbert, llamamos IV,2 a este axioma, que no es otra cosa que el conocido principio de Cantor de los intervalos encajados. En el sistema de Hilbert, la proposición IV,2 corresponde al axioma de completitud, que será confrontado en el capítulo IV con el axioma de Cantor.

IV,1 (AXIOMA DE ARQUÍMEDES). *Sean AB y CD segmentos arbitrarios. Entonces sobre la recta AB existe un número finito de puntos $A_1, A_2, \dots A_n$, situados de manera que A_1 está entre A y A_2, A_2 está entre A_1 y A_3, etc., tales que los segmentos $AA_1, A_1A_2, \dots A_{n-1}A_n$ son congruentes al segmento CD y B está entre A y A_n* (fig. 28).

IV,2 (AXIOMA DE CANTOR). *Supongamos que en una recta arbitraria a se da una sucesión infinita de segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \dots$, de los cuales cada uno está en el interior del precedente; supongamos, además, cualquiera que sea un segmento prefijado, existe un índice n para el cual A_nB_n es menor que este segmento. Entonces existe sobre la recta a un punto X, que está en el interior de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc.* (fig. 29).

De las condiciones del axioma sigue de inmediato que *existe sólo un punto X que está dentro de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc.*

En efecto, si sobre la recta a existe otro punto Y interior a todos los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \dots$, para todo n el segmento A_nB_n será mayor que el XY, cosa excluida por la condición.

DEFINICIÓN 12. Supongamos que a cada segmento le corresponde un número positivo determinado, de manera que:

1) a segmentos iguales correspondan números iguales;

2) si B es un punto del segmento AC y a los segmentos AB y BC les corresponden los números a y b respectivamente, entonces al segmento AC le corresponde el número $a + b$;

3) a algún segmento OO' le corresponde el número 1.

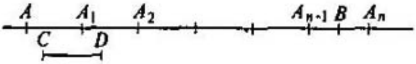


Fig. 28

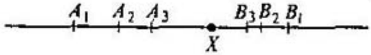


Fig. 29

Entonces el número que corresponde a cada segmento de la forma indicada se llama *longitud* de este segmento; el segmento OO' se denomina *unidad lineal*, o bien *unidad de medida de longitudes.*

Demostremos que las condiciones 1,2 y 3 determinan de manera única la longitud de cada segmento. Primeramente supongamos que a cada segmento se le ha puesto en correspondencia un número positivo de modo que se satisfagan las condiciones 1, 2, y 3 y mostremos que no puede haber otra correspondencia entre números y segmentos que observe estas tres condiciones. Hecho esto, nos convenceremos de la posibilidad de efectuar tal correspondencia. (En otras palabras, primero probaremos la unicidad, y después la existencia de la longitud.)

Ante todo, observemos que si un segmento AB es mayor que otro $A'B'$, la longitud a de AB tendrá que ser mayor que la longitud a' de $A'B'$. En efecto, según la definición de «mayor» (véase el § 18), el segmento AB contiene un punto P que determina, conjuntamente con el punto A, un segmento AP igual al $A'B'$. Supongamos que las longitudes de los segmentos AP y PB sean x e $y (x > 0, y > 0)$. En virtud de la condición 2, tenemos que $a = x + y$; por la condición 1, $x = a'$, de donde $a = a' + y$, por lo cual $a > a'$.

Ahora bien, de acuerdo al teorema 23, la unidad lineal OO' puede dividirse en la mitad. Sea O_1 el punto medio del segmento OO'. Como las longitudes de los segmentos congruentes OO_1 y O_1O' son iguales y su suma es igual a la unidad, cada uno de ellos tendrá longitud igual a $\frac{1}{2}$. Dividiendo el segmento OO_1 por la mitad mediante el punto O_2, hallaremos que la longitud del segmento OO_2 es igual a $\frac{1}{2^2}$, etc. Llamaremos a los segmentos OO_1, OO_2, ... , la mitad de la longitud lineal, la cuarta parte de ésta, etc.

Consideremos ahora un segmento arbitrario AB, cuya longitud sea igual al número a. Construyamos sobre la recta AB, a partir de A y en el sentido del punto B, segmentos AA_1, A_1A_2, etc., congruentes a OO'. Si alguno de los puntos A_n coincide con B, por la condición 2 será necesariamente $a = n$. Si ninguno de los puntos $A_1, A_2, \ldots$ coincide con B, en virtud del axioma de Arquímedes existirán dos puntos A_n y A_{n+1} tales que B esté entre ellos. En este caso, el número a tendrá que satisfacer las desigualdades.

$$n < a < n + 1,$$

pues el segmento AB es mayor que el AA_n y menor que el AA_{n+1}, siendo las longitudes de estos últimos iguales a n y $n + 1$, respectivamente. Queda así determinado el número a salvo una unidad. Ahora mostraremos que a se puede determinar con cualquier grado de exactitud. El proceso expuesto a continuación, que permite hallar el valor de a, se llama *medida* (o *medición*).

Dividamos el segmento A_nA_{n+1} en dos mitades, por medio del punto P_1. Entonces el punto B o bien está entre A_n y P_1, o bien entre P_1 y A_{n+1}, o bien coincide con

P_1. En otras palabras, el segmento A_nB o bien es menor que la mitad de la unidad lineal, o bien es mayor, o bien es igual a ella. En correspondencia con esto, tendremos: o bien

$$n < a < n + \frac{1}{2},$$

o bien

$$n + \frac{1}{2} < a < n + 1,$$

o bien

$$a = n + \frac{1}{2}.$$

En el último caso, a queda determinado exactamente, y el proceso de medida concluye; en los dos primeros, a queda determinado salvo $\frac{1}{2}$, y el proceso debe continuar. Dividiendo aquél de los intervalos A_nP_1, P_1A_{n+1} que contiene a B en dos mitades por medio del punto P_2 podemos, según la ubicación del punto B, o bien determinar el valor exacto del número a, si B coincide con P_2, y concluir así el proceso de medida, o bien, si B no coincide con P_2, hallar el valor de a con una exactitud de hasta 1/4 y continuar después el proceso de medida análogamente.

En lugar de encerrar a entre valores cada vez más estrechos, resulta más cómodo representar a en forma de fracción binaria

$$a = n, n_1 n_2 \ldots;$$

aquí n es la parte entera, que muestra cuántas unidades lineales contiene el segmento AB; n_1, la primera cifra después de la coma, será 1 ó 0, según contenga o no el segmento AB, además de las n unidades lineales, una mitad de la unidad lineal; n_2 será asimismo 1 ó 0, según el segmento AB contenga o no, además de n unidades lineales y n_1 mitades de la unidad lineal, un cuarto de unidad, etc. La fracción binaria que expresa a puede ser finita, si B coincide con alguno de los puntos P_1, P_2, ..., P_n, ... que construimos en el proceso de medida del segmento AB, o bien infinita, si B no coincide con ninguno de estos puntos. Por ejemplo, si al medir se encuentra que AB contiene exactamente una unidad lineal con un cuarto y un octavo de unidad lineal, entonces $a = 1{,}011$. En este caso, B coincidirá con P_3. Se sobreentiende que una fracción binaria finita puede considerarse formalmente como infinita; por ejemplo, $a = 1{,}011000\ldots$ En lo sucesivo, si subrayamos que una fración binaria es infinita, sobreentenderemos que es esencialmente infinita, es decir, no tiene tal orden desde el cual siguen únicamente ceros. Así, habiendo supuesto que a cada segmento se le ha puesto en correspondencia una longitud de manera que se satisfagan las condiciones 1, 2 y 3, hemos sido capaces, basándonos en el axioma de Arquímedes, de hallar para cualquier segmento dado cada cifra de la representación binaria de su longitud. Por lo tanto, las longitudes de los segmentos quedan determinadas de manera unívoca por las condiciones 1, 2 y 3.

Debemos ahora mostrar que a cada segmento se le puede poner en correspondencia un número positivo de manera que se satisfagan las condiciones 1, 2 y 3. Para esto, pongamos en correspondencia a cada segmento, como su longitud, el número obtenido como resultado de su medición por el proceso descrito arriba. Debemos demostrar que se satisfacen las condiciones 1, 2 y 3.

Ante todo, resulta claro que el proceso de medición, aplicado a la unidad lineal, da un número igual a 1. Por consiguiente, la condición 3 se satisface.

Además, para dos segmentos congruentes el proceso de medición da valores iguales de las longitudes. Esto es una consecuencia directa del teorema 13 del § 17, según el cual el sistema de puntos sobre dos rectas, obtenidos en el proceso de medida de segmentos, tiene idéntico orden de disposición de sus puntos; por ende, al medir dos segmentos congruentes, en los desarrollos binarios obtenidos surgen sucesivamente en posiciones iguales cifras iguales. Por lo tanto, la condición 1 también se satisface.

Queda demostrar que se satisface la condición 2.

Demostremos previamente dos proposiciones auxiliares.

1. *Sea dado un segmento arbitrario PQ. Siempre es posible escoger un número n tan grande como para que al dividir la unidad lineal en 2^n partes iguales se obtengan segmentos cada uno de los cuales es menor que PQ* *).

Para demostrar esto, supongamos primero que la unidad lineal OO' fue dividida por medio del punto A en dos partes iguales OA, OA' y que cada una de ellas es mayor que el segmento PQ. Entonces dentro del segmento OA habrá algún punto O_1 tal que $OO_1 \equiv PQ$, y dentro de AO' habrá un punto A_1 tal que $AA_1 \equiv PQ$. Determinemos a partir del punto O_1 en la dirección de A un segmento $O_1O_2 \equiv PQ$. Ahora observemos que 1) A está entre O_1 y A_1; 2) tienen lugar las congruencias $O_1O_2 \equiv A_1A$, $O_1A_1 \equiv A_1O_1$. De aquí y del teorema 13 sigue que O_2 está entre O_1 y A_1. Aplicando el lema 2 del § 14, hallamos que O_2 está entre O_1 y O'. En conclusión, si cada mitad de la unidad lineal OO' es mayor que PQ', entonces, construyendo segmentos OO_1 y O_1O_2 congruentes a PQ, no pasamos más allá del punto O'. De aquí sigue que si para todo n, al dividir la unidad lineal en 2^n partes iguales obtenemos segmentos $\geqslant PQ$, repitiendo el segmento PQ como sumando una cantidad arbitraria de veces no podremos superar la unidad lineal. Esto es una contradicción con el axioma de Arquímedes, quedando así demostrada nuestra proposición.

De esta proposición se desprende un corolario importante: el proceso de medición de un segmento no puede conducir a una fracción binaria infinita todas las cifras de la cual son iguales a 1, a partir de cierto orden.

En efecto, supongamos que se mide el segmento AB. Utilizaremos las notaciones usadas arriba al describir el proceso de medición. Si como resultado de la medición se obtiene una fracción binaria infinita con parte entera n, entonces B estará entre A_n y A_{n+1}. Supongamos primeramente que en la fracción obtenida las unidades comienzan en seguida después de la coma. Entonces el punto B está en el interior de cada segmento P_1A_{n+1}, P_2A_{n+1}, ... ; en consecuencia, el segmento BA_{n+1} es menor que cada una de las 2^n partes iguales de la unidad lineal para todo n, cosa que contradice la proposición 1. Supongamos ahora que la fracción obtenida tiene un cero en el k-ésimo orden, y unos en los órdenes siguientes. Entonces el punto B está dentro de cada segmento $P_{k+1}P_k$, $P_{k+2}P_k$, ... y obtenemos nuevamente una contradicción con la proposición 1.

---

*) Cada segmento puede ser dividido en 2^n partes iguales, ya que todo segmento puede dividirse en dos partes iguales (véase el teorema 23 del § 17).

El resultado que acabamos de establecer facilita la comparación de fracciones binarias que se obtienen como resultado de medición de segmentos. Precisamente, sean a y b fracciones binarias obtenidas en la medida de dos segmentos; si estas fracciones coinciden hasta cierto orden, y en el orden siguiente la fracción a tiene un cero, y la b, un uno, se puede afirmar con seguridad que el número representado por la fracción a es menor que el representado por b (con respecto a fracciones binarias cualesquiera esto puede ser falso, pues, por ejemplo, las fracciones 1,11000... y 1,10111 ... expresan el mismo número).

2. *Si el segmento A^*B^* es menor que el AB, y los números b^* y b fueron obtenidos al medir estos segmentos, entonces $b^* < b$.*

Como $A^*B^* < AB$, en el segmento AB existe un punto B' tal que $AB' \equiv A^*B^*$. Debemos mostrar que la medición del segmento AB' da un número menor que el obtenido al medir AB.

Construyamos, a partir del punto A en la dirección de B, segmentos AA_1, A_1A_2, ... , iguales a la unidad lineal. Convengamos, con respecto a un segmento arbitrario de la recta AB, en decir que un punto pertenece al segmento si está en su interior, o bien coincide con el extremo izquierdo (considerando que «de izquierda a derecha» es el sentido de A hacia B). Por ejemplo, el punto A_1 pertenecerá al segmento A_1A_2, el A_2, al segmento siguiente A_2A_3. Con esta convención, si B' y B pertenecen a segmentos diferentes del sistema AA_1, A_1A_2, ... , la parte entera del número b^* será menor que la parte entera de b y, en consecuencia, $b^* < b$. Si, en cambio, ambos puntos B y B' pertenecen al mismo segmento A_iA_{i+1}, b^* y b tendrán partes enteras iguales. Dividamos entonces el segmento A_iA_{i+1} en dos partes iguales. Si los puntos B' y B resultan estar en mitades diferentes, la primera cifra después de la coma en el desarrollo del número b^* será un cero, y en el de b, un uno, por lo cual $b^* < b$. Si, en cambio, ambos puntos B' y B pertenecen a una misma mitad del segmento A_iA_{i+1}, b^* y b tendrán partes enteras y primeras cifras después de la coma iguales. En tal caso, dividamos en dos partes iguales la mitad del segmento A_iA_{i+1} que contenga a ambos puntos B' y B, etc.

Continuando este proceso, llegaremos al fin a establecer la desigualdad $b^* < b$, siempre que B' y B no estén siempre en una misma de las dos mitades que se obtienen al dividir el segmento que fue determinado por el paso precedente de la construcción. Sin embargo, tal suposición debe ser descartada, por cuanto significa que el segmento $B'B$ es menor que cada una de las 2^n partes iguales de la unidad lineal para todo n, cosa que contradice la proposición auxiliar 1 ya demostrada.

Ahora podemos acometer directamente la demostración de que la condición 2 se verifica.

Sea AC un segmento arbitrario, B, algún punto interior de éste, a, b, c, los números obtenidos al medir los segmentos AB, BC y AC. Debemos establecer la igualdad

$$a + b = c.$$

Fijemos un entero positivo n y construyamos, a partir del punto B y en la dirección de A, segmentos BA_1, A_1A_2, ... , congruentes a los segmentos que se obtienen al dividir la unidad lineal en 2^n partes iguales. Del axioma de Arquímedes sigue que entre los puntos A_1, A_2, ... habrán dos sucesivos, A_k y A_{k+1}, tales que A_k pertenece al segmento BA o bien coincide con A, y A_{k+1} conjuntamente con el punto B determina un segmento BA_{k+1} que contiene al punto A. Análogamente se determinan los puntos C_l y C_{l+1}, poniendo en la dirección del punto C los segmentos BC_1, C_1C_2, ... , congruentes con los segmentos A_iA_{i+1}. Evidentemente, tienen lugar las siguientes desigualdades entre segmentos:

$$BA_k \leqslant AB < BA_{k+1}, \qquad BC_l \leqslant BC < BC_{l+1},$$
$$A_kC_l \leqslant AC < A_{k+1}C_{l+1}.$$

De aquí, tomando en consideración la proposición auxiliar 2, se obtienen desigualdades para los números correspondientes:

$$\frac{k}{2^n} \leqslant a < \frac{k+1}{2^n}, \quad \frac{l}{2^n} \leqslant b < \frac{l+1}{2^n}, \quad \frac{k+l}{2^n} \leqslant c < \frac{k+l+2}{2^n}.$$

De estas desigualdades sigue que

$$\frac{k+l}{2^n} \leqslant a + b \leqslant \frac{k+l+2}{2^n}, \qquad \frac{k+l}{2^n} \leqslant c < \frac{k+l+2}{2^n}.$$

En consecuencia,

$$|a + b - c| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pero como n es un entero positivo arbitrario,

$$a + b - c = 0$$

y, por lo tanto, $a + b = c$, cosa que deseábamos establecer.

Así, pues, los axiomas I — III y IV,1 permiten fundamentar la medida de segmentos y poner en correspondencia a cada segmento un número positivo, llamado su longitud. Dicha longitud se determina unívocamente por las condiciones 1, 2 y 3.

De acuerdo con la condición 1, segmentos iguales tienen igual longitud. Del teorema 27, § 18, y de la proposición auxiliar 2 sigue que, recíprocamente, segmentos con igual longitud son iguales entre sí. Podemos, pues, sustituir la comparación de segmentos por la de sus longitudes.

En forma totalmente análoga a la longitud de un segmento se define la magnitud de un ángulo.

DEFINICIÓN 13. Supongamos que a cada ángulo le corresponde un número positivo, de forma que se observan las siguientes condiciones:

1) a ángulos iguales corresponden números iguales;

2) si la semirrecta l está en el interior de $\angle(h, k)$ y tiene origen en su vértice, y si a $\angle(h, l)$ y $\angle(l, k)$ les corresponden los números α y β, entonces a $\angle(h, k)$ le corresponde el número $\alpha + \beta$.

3) a algún $\angle(o, o')$ le corresponde el número 1.

Entonces el número que corresponde a cada ángulo de la manera indicada se llama *magnitud* de este ángulo; $\angle(o, o')$ lleva el nombre de *unidad angular*.

La definición unívoca y la existencia de las magnitudes de ángulos se demuestran igual que la definición unívoca y existencia de longitudes de segmentos. Aquí no es necesario introducir un nuevo axioma para ángulos, que corresponda al de Arquímedes para segmentos: tal proposición ya puede ser demostrada.

§ 21. De acuerdo con la exposición precedente, conjuntamente con el conjunto de todos los segmentos queda completamente determinado el conjunto numérico de sus longitudes; estamos suponiendo aquí, desde luego, que ha sido elegida la unidad lineal. Sin embargo, *de los axiomas* I—III *y* IV,1 *no sigue que las longitudes de los* *segmentos cubren todos los números reales positivos.* Basándonos en estos axiomas no puede siquiera establecerse que el conjunto de longitudes es innumerable.

Sólo al ampliar el sistema de axiomas, agregando, por ejemplo, el axioma de Cantor IV,2 enunciado más arriba, obtenemos la posibilidad de demostrar el teorema que sigue.

TEOREMA 35. *Cualquiera que sea el número real $a > 0$, existe algún segmento cuya longitud sea igual a a.*

Para demostrarlo, representemos a en forma de fracción binaria $n, n_1 n_2 \dots$ Supongamos primero que a no puede ser representado como fracción binaria finita. En tal caso, la fracción $n, n_1 n_2 \dots$ no puede tener solamente unos, a partir de algún orden (pues la fracción infinita $n, n_1 n_2 \dots n_k 0111 \dots$ representa el mismo número que la fracción finita $n, n_1 n_2 \dots n_k 1$).

Consideremos alguna semirrecta con origen en el punto A y determinemos sobre ella segmentos $AA_1, A_1A_2, \dots, A_nA_{n+1}$, congruentes a la unidad lineal. El último de ellos, es decir, el A_nA_{n+1}, lo dividamos en dos partes iguales por medio del punto P_1. Convendremos en llamar «izquierda» a aquella mitad del segmento A_nA_{n+1} que se encuentra del lado del punto A, y «derecha» a la otra. Extendremos la misma condición a cualquier otro segmento de la semirrecta en el caso de que lo dividamos por la mitad. Denotemos por l_1 el segmento que coincide con la mitad izquierda del segmento A_nA_{n+1}, si $n_1 = 0$, y con la derecha, si $n_1 = 1$. Dividamos, ahora, el segmento l_1 en dos mitades por medio del punto P_2 y denotemos por l_2 su mitad izquierda o derecha, según sea $n_1 = 0$ ó $n_1 = 1$. Continuamos este proceso indefinidamente.

Queda así determinada una sucesión de segmentos $l_1, l_2, \dots$

Por construcción, los puntos interiores de cada uno de estos segmentos están dentro del precedente, y un extremo coincide con algún extremo del anterior. Sin embargo, no puede ocurrir que a partir de algún índice todos los segmentos l_n tengan extremo común (pues la fracción $n, n_1 n_2 \dots$ no puede tener, a partir de algún orden, únicamente ceros o únicamente unos). En consecuencia, entre los segmentos $l_1, l_2, \dots$ habrá algún segmento l_{k_1} que estará estrictamente dentro de l_1; habrá otro, l_{k_2}, que estará estrictamente dentro de l_{k_1}, etc. Además, de la proposición auxiliar 1, que utilizamos en la demostración de existencia de la longitud, sigue que ningún segmento puede ser menor que todos los segmentos $l_1, l_{k_1}, l_{k_2}, \dots$ Por esto podemos aplicar a la sucesión $l_1, l_{k_1}, l_{k_2}, \dots$ el axioma de Cantor IV,2 y afirmar en consecuencia que existe un único punto B interior a todos los segmentos $l_1, l_{k_1}, l_{k_2}, \dots$ Claramente, este punto B será asimismo interior a todos los segmentos $l_1, l_2, l_3, \dots$ Resulta evidente que el segmento AB tiene la longitud indicada a. En efecto, al medir este segmento obtenemos precisamente el número a.

Así, entonces, si a no puede ser representado por una fracción binaria finita, la afirmación del teorema resulta demostrada. Si, en cambio, a se representa por una fracción finita, el extremo B del segmento buscado será alguno de los puntos A_n, $P_1, P_2, \dots$ obtenidos más arriba. No tiene sentido reproducir los razonamientos detallados para este caso; nos limitaremos a observar que aquí el axioma de Cantor es innecesario.

Una proposición análoga al teorema 35 tiene lugar también para las magnitudes de los ángulos; precisamente, vale el

TEOREMA 36. *Supongamos que para alguna elección de la unidad de medida, el* *ángulo recto tiene magnitud ω; entonces, a cualquier número α, $0 < \alpha < 2\omega$, le corresponde un ángulo cuya magnitud es igual a α.*

Es usual escoger la unidad de medida de ángulos de forma que al ángulo recto le corresponda una magnitud igual a $\pi/2$. En este caso, la unidad de medida se llama *radián*.

Una vez fundamentada la medición de segmentos y de ángulos y establecida —en los teoremas 35 y 36— la posibilidad de construir un segmento dada su longitud y un ángulo dada su magnitud, queda abierto el camino de la aplicación de la aritmética y el álgebra a la geometría.

Por ejemplo, con métodos aritméticos es ahora fácil demostrar el siguiente teorema importante.

TEOREMA 37. *Dentro de cada segmento existen puntos que lo dividen en n partes iguales.*

En efecto, sea dado el segmento AB. Hemos demostrado que cada segmento posee longitud; supongamos que la longitud de AB es igual a a. Utilizando la división de números, determinamos el número a/n. Del teorema 35 y el axioma III,1 sigue que sobre la semirrecta AB existen segmentos $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}$ con la misma longitud a/n. Evidentemente, los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ son los buscados.

Un teorema análogo tiene lugar para ángulos.

TEOREMA 38. *Dentro de cada ángulo, por su vértice, pasan semirrectas que lo dividen en n partes iguales.*

§ 22. Utilizando los axiomas de los cuatro grupos I—IV puede introducirse un sistema de coordenadas para la recta, el plano y el espacio.

Construyamos primeramente un sistema de coordenadas en la recta. Sea a una recta arbitraria. Fijemos en ella algún punto O, que denominaremos *origen de coordenadas*, y convengamos en llamar una de las dos semirrectas determinadas en la recta a por O, *positiva*, y la otra, *negativa*. Adoptemos, además, algún segmento como *unidad de medida*.

A cada punto M de la recta a le pondremos en correspondencia la coordenada x, haciendo el valor absoluto de x igual a la longitud del segmento OM y determinando el signo de x según la posición de M como sigue: $x > 0$, si M está en la semirrecta positiva, y $x < 0$, si M está sobre la semirrecta negativa. Si M coincide con el punto O, hacemos $x = 0$. Del teorema 35 sigue inmediatamente la proposición:

Cualquiera que sea el número x, existe sobre la recta exactamente un punto cuya coordenada sea igual a x.

Introduzcamos ahora un sistema de coordenadas en el plano. Sea α un plano arbitrario; denotemos por O algún punto del plano α, y por a, alguna recta de este plano que pase por O. Entonces O divide la recta a en dos semirrectas; llamaremos *positiva* a una de ellas, y *negativa* a la otra. La recta a divide al plano α en dos semiplanos, uno de los cuales llamaremos asimismo *positivo*, y el otro, *negativo*. Si, además, se escoge una unidad de medida de longitudes, de acuerdo con lo expuesto, en la recta a queda determinado un sistema de coordenadas con origen O y semirrecta positiva distinguida.

Sea ahora M un punto arbitrario del plano α. Por el teorema 25 del § 17, de M se puede trazar una única perpendicular a a. Denotemos por M_x el pie de esta perpendicular. Sea x la coordenada del punto M_x en el sistema de coordenadas que hemos introducido en la recta a, e y, un número cuyo valor absoluto es igual a la longitud del segmento MM_x, y cuyo signo depende de la posición de M como sigue: $y > 0$, si M está en el semiplano positivo, $y < 0$, si M está en el semiplano negativo. Si M está sobre la recta a, hacemos $y = 0$.

Hemos puesto, así, en correspondencia a cada punto M del plano α un par ordenado de números x, y, llamados coordenadas de este punto.

Evidentemente, *cualesquiera que sean los números reales x, y, en el plano existe exactamente un punto cuyas coordenadas son respectivamente iguales a estos números.*

En efecto, el número x determina siempre y de manera unívoca en la recta a el punto M_x. Por el teorema 26 del § 17, podemos trazar en el punto M_x una única perpendicular a la recta a. Supongamos que $y \neq 0$; por el teorema 35, existe un segmento cuya longitud es igual al valor absoluto del número y. Determinemos este segmento a partir del punto M_x sobre la perpendicular a la recta a, de modo que quede situado en el semiplano positivo, si $y > 0$, y en el negativo, si $y < 0$. El extremo del segmento construido se denota por la letra M; el punto M tendrá las coordenadas x, y dadas.

Si $y = 0$, suponemos que el punto M coincide con M_x; entonces M tendrá la coordenada x dada e $y = 0$.

Siempre podemos, pues, determinar un punto cuyas coordenadas sean iguales a los números dados x, y. La unicidad de este punto se demuestra por razonamientos evidentes.

Para introducir coordenadas en el espacio, fijemos un plano arbitrario α y determinemos sobre él un sistema coordenado, de alguna manera (es decir, indicamos el punto O, la recta a, etc.). El plano α divide al espacio en dos semiespacios; llamemos *positivo* a uno de ellos, y *negativo* al otro. Entonces, a cada punto M del espacio le pondremos en correspondencia tres coordenadas (x, y, z), determinándolas como sigue: x e y coinciden con las coordenadas del pie M' de la perpendicular trazada desde M al plano α, en nuestro sistema de coordenadas que suponemos ya introducido en el plano α; z será igual en valor absoluto a la longitud del segmento MM'; el signo de z depende de la posición del punto M de la manera siguiente: $z > 0$, si M está en el semiespacio positivo, y $z < 0$, si M está en el semiespacio negativo. Si M se encuentra sobre el plano α, ponemos $z = 0$.

El método que acabamos de exponer de introducción de un sistema de coordenadas en el espacio requiere la definición previa del concepto de perpendicular a un plano y la demostración del teorema: de cualquier punto se puede trazar a cualquier plano una perpendicular, y sólo una. La definición pertinente, así como la demostración de este teorema, pueden efectuarse de manera idéntica a como suele hacerse en los textos de geometría elemental.

Si, además, se establece la existencia y unicidad de la perpendicular a un plano por un punto dado de éste, se puede, recurriendo al teorema 26 del § 17, establecer la afirmación:

Cualesquiera que sean tres números reales x, y, z, en el espacio existe exactamente un punto cuyas coordenadas son respectivamente iguales a x, y, z.

Los sistemas de coordenadas en el plano y en el espacio que acabamos de describir podrían llamarse cartesianos. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que sólo de los axiomas I—IV no siguen muchas propiedades características de las coordenadas cartesianas. Consideremos, para simplificar, el sistema de coordenadas en el plano.

Llamemos, como se hace comúnmente, eje x a la recta a, y eje y a la perpendicular a ella por el punto O. Sea M un punto arbitrario del plano, y sean M_x, M_y los pies de las perpendiculares trazadas desde M al eje x y al eje y respectivamente. Utilizando los axiomas I—IV no es posible, por ejemplo, demostrar que el segmento OM_y es igual al M_xM. Análogamente, de estos axiomas no puede deducirse la expresión bien conocida en geometría analítica para la distancia entre dos puntos.

§ 23. Al introducir coordenadas en la recta, establecemos una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todos los puntos de la recta y el conjunto de todos los números reales. Vamos a analizar ahora una particularidad característica de esta correspondencia.

Como mostramos más arriba utilizando los axiomas de los grupos I—II, en el conjunto de puntos de una recta se puede introducir una relación de orden, de manera que si el punto B sigue al punto A y precede al C, entonces B está entre A y C en el sentido del § 13. Sólo es posible establecer este orden de dos maneras diferentes; esto corresponde a nuestra idea intuitiva de los dos sentidos sobre una recta. Escojamos de estos dos órdenes posibles aquél en que el origen de coordenadas precede a todos los puntos de la semirrecta positiva (el sentido que se determina así se llamará positivo). Entonces, si M_1 y M_2 son dos puntos de coordenadas x_1 y x_2 y si M_1 precede a M_2, será $x_1 < x_2$.

Tenemos, así el

TEOREMA 39. *Entre el conjunto ordenado de todos los puntos de una recta y el conjunto ordenado de todos los números reales se puede establecer una correspondencia biyectiva tal que los elementos correspondientes se encuentren en igual relación de orden.*

La propiedad de la recta expresada por este teorema se denomina *continuidad*. Como la continuidad de la recta queda asegurada por los axiomas IV,1, IV,2 a los axiomas del grupo IV se los llama *axiomas de continuidad*.

Los axiomas IV,1 y IV,2 pueden sustituirse por otras proposiciones equivalentes, conservando los grupos precedentes I—III sin cambios. Uno de los equivalentes importantes de los axiomas del grupo IV es EL PRINCIPIO DE DEDEKIND.

En los fundamentos del análisis es bien conocida la proposición que expresa el principio de Dedekind en el conjunto de todos los números reales.

Si todos los números reales están divididos en dos clases de manera que:

1) *cada número pertenece a una clase, y sólo a una, y cada clase contiene números;*

2) *cada número de la primera clase es menor que cada uno de la segunda, entonces o bien en la primera clase existe un número máximo, o bien en la segunda un mínimo.*

La esencia de esta proposición consiste en descartar dos posibilidades: la existencia de elementos que clausuren ambas clases a la vez, y la ausencia de tales elementos en ambas clases.

Del teorema 39 y el principio de Dedekind para los números reales sigue de inmediato el principio de Dedekind para la recta.

TEOREMA 40. *Si todos los puntos de una recta están distribuidos en dos clases de manera que:*

1) *cada punto pertenece a una clase y sólo a una y cada clase contiene puntos;*

2) *cada punto de la primera clase precede a cada uno de la segunda*,

entonces o bien en la primera clase existe algún punto que sigue a todos los demás de esta clase, o bien en la segunda existe algún punto que precede a todos los demás de dicha clase.

Se dice que este punto determina *una cortadura de Dedekind* en la recta.

La equivalencia de esta afirmación con los axiomas del grupo IV se expresa por el siguiente

TEOREMA 41. *Si a los axiomas* I—III *agregamos el principio de Dedekind, las proposiciones de Arquímedes* IV,*1 y de Cantor* IV,*2 pueden ser demostradas.*

Ante todo, obtengamos el principio de Arquímedes, basándonos en el de Dedekind y en los axiomas I—III.

Razonaremos reduciendo al absurdo. Supongamos que para algún segmento AB no es válido el axioma de Arquímedes. Esto significa que existe una sucesión INFINITA de segmentos CONGRUENTES $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv A_nA_{n+1}$, situados dentro del segmento AB.

Escojamos el orden de puntos de la recta AB (sentido) para el cual A preceda al punto B, y dividamos los puntos de la recta AB en dos clases como sigue: en la primera clase pondremos cada punto que precede a alguno de los puntos A_n (y, por ende, a los puntos A_{n+1}, A_{n+2}, etc.); en la segunda, a los restantes puntos de la recta AB.

Es evidente que en este caso se cumplirán las condiciones que determinan una cortadura de Dedekind. En efecto:

1) cada punto de la recta AB pertenece a una clase, y sólo a una; cada clase es no vacía, pues la primera contiene seguramente a los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, y la segunda, al punto B;

2) todos los puntos de la primera clase preceden a los de la segunda.

Entonces, en virtud del principio de Dedekind, que ahora estamos aceptando como un axioma, existe un punto C que realiza la cortadura.

Es evidente que en la primera clase no hay último elemento; en consecuencia, C es un punto de la segunda clase, que precede a los demás de esta clase.

Por el axioma III,1, existe un punto D que precede a C y determina con él un segmento CD congruente a cada segmento AA_1, A_1A_2, etc. El punto D no puede pertenecer a la segunda clase, pues precede al punto C.

D es, entonces, un punto de la primera clase y, por esto, precede a algún punto A_n. El segmento A_nA_{n+1} es parte del segmento CD y, por el teorema 29, $A_nA_{n+1} < CD$. Por otro lado, tenemos que $A_nA_{n+1} \equiv CD$. Pero, por el teorema 27, las relaciones $A_nA_{n+1} < CD$ y $A_nA_{n+1} \equiv CD$ no pueden tener lugar simultáneamente. La contradicción obtenida concluye la demostración del principio de Arquímedes.

Demostremos ahora el principio de Cantor.

Supongamos que en alguna recta a se ha fijado una sucesión infinita de segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc, y que cada segmento $A_{n+1}B_{n+1}$ está en el interior de A_nB_n. Supongamos, también, que no existe ningún segmento menor que todos los de la sucesión. Debemos demostrar que existe un punto perteneciente al interior de cualquier segmento A_nB_n.

Fijemos algún sentido en la recta y supongamos que A_n denota siempre el extremo del segmento que precede a B_n. Dividamos los puntos de la recta a en dos clases, colocando en la primera aquellos puntos que preceden a alguno de los puntos A_n (y también, entonces, a A_{n+1}, A_{n+2}, etc.) y en la segunda, a los demás puntos de a.

Hemos obtenido una cortadura de Dedekind. Efectivamente,

1) cada punto de la recta a pertenece a una clase, y sólo a una; además, cada clase es no vacía, pues la primera contiene los puntos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, y la segunda, $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$;

2) los puntos de la primera clase preceden a los de la segunda.

En virtud del principio de Dedekind, existe algún punto C que realiza la cortadura.

Es evidente que en la primera clase no hay último punto; por lo tanto, C es el primer punto de la segunda clase. Por esto, C precede a todos los puntos B_1, $B_2, \dots, B_n, \dots$ y sigue a cada punto $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ De aquí concluimos que C está en el interior de cualquier segmento A_nB_n.

Nuestra afirmación queda así demostrada completamente.

§ 24. Como hemos visto, los axiomas de continuidad permiten demostrar que en cada recta puede introducirse un sistema de coordenadas y transformarla así en un eje numérico.

Esto resulta ser de gran importancia, pues gracias a este resultado se abre la posibilidad de aplicar en la geometría los resultados básicos del análisis.

Presentaremos dos teoremas que pueden ser fácilmente demostrados ahora, una vez introducidos los axiomas de continuidad.

TEOREMA 42. *Si una recta pasa por algún punto del interior de un círculo debe intersecar a la circunferencia de este círculo en dos puntos**).

TEOREMA 43. *Si una circunferencia k pasa por algún punto interior y por otro exterior de otra circunferencia k', entonces k y k' se intersecan en dos puntos.*

Demostremos el primer teorema.

Supongamos que alguna recta a pasa por un punto interior de un círculo k, de radio r. Tracemos del centro del círculo k a la recta a una perpendicular, y denotemos por O su pie.

Introduzcamos en la recta a un sistema de coordenadas con origen en el punto O. La distancia del centro del círculo a un punto arbitrario de la recta a, de coordenada x, es función de x que denotaremos por $s(x)$. Es fácil ver que $s(x)$ es continua para todo x; en efecto, por un teorema conocido, la diferencia de dos lados de un triángulo es menor que el tercer lado; por esto,

$$|\Delta s| = |s(x + \Delta x) - s(x)| < |\Delta x|,$$

por lo cual $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta s = 0$. Observemos, además, que $s(0) < r$, y que $s(r) > r$; así la función $s(x) - r$ cambia su signo cuando x varía de 0 a r. Como esta función es continua, existe un valor del argumento $x = x_1$, contenido entre 0 y r, para el cual $s(x_1) = r$. Las propiedades de continuidad de la recta permiten afirmar que cualquiera que sea el número x_1, sobre la recta a existe un punto M_1 de coordenada x_1

---

*) Es natural llamar a un punto *interior* con respecto a un círculo o a una circunferencia, si su distancia del centro es menor que el radio, y *exterior*, si esta distancia es mayor que el radio.

(esto fue demostrado en el parágrafo anterior). Como la distancia del punto M_1 al centro del círculo es igual a r, este punto está sobre la circunferencia periférica, es decir, es un punto de intersección de la recta a con la circunferencia del círculo k.

Es fácil ver que el punto M_2 de coordenada $x_2 = -x_1$ es el segundo punto de intersección.

Los teoremas 42 y 43 permiten fundamentar las construcciones que comúnmente se utilizan en los textos de geometría elemental al resolver problemas de dividir un segmento o un ángulo en dos partes iguales, al trazar una perpendicular a una recta dada por un punto dado, etc. En el teorema 23, referente a la posibilidad de dividir un segmento en dos partes iguales, tuvimos que eludir estas contrucciones, pues de los axiomas I—III (sin los de continuidad) no es posible deducir los teoremas 42 y 43.

8. Grupo V. Axioma de paralelismo. Geometría absoluta

§ 25. DEFINICIÓN 14. Dos rectas que se encuentren en un mismo plano y no tengan puntos comunes se llaman *paralelas*.

La definición dada requiere, evidentemente, la demostración de existencia de rectas paralelas. Esta demostración, siguiendo a Euclides, puede hacerse fácilmente utilizando el teorema que sigue.

TEOREMA 44. *Si las rectas a, b, c están en un mismo plano y la recta c, al intersecar las rectas a y b, forma con ellas ángulos alternos internos iguales, entonces las rectas a y b son paralelas.*

El teorema 44 se demuestra en dos palabras, por reducción al absurdo: supongamos que c interseca a y b en los puntos A y B, respectivamente; supongamos que a y b no son paralelas. En tal caso, tienen un punto común O, y en el triángulo AOB hay un ángulo exterior igual a uno de los interiores no adyacentes. Esto contradice el teorema 30.

Un caso particular del teorema 44 es el

TEOREMA 45. *Dos rectas que están en un mismo plano y son perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.*

De los teoremas 44 y 45 se desprende de inmediato el

TEOREMA 46. *Por cada punto exterior a una recta dada pasa una paralela a ella.*

En efecto, sea A un punto arbitrario no perteneciente a alguna recta a. Tracemos por A una perpendicular AP a la recta a, y denotemos por b la recta que pasa por A, es perpendicular a AP y está en el plano que contiene AP y a. En virtud del teorema 45, la recta b es paralela a a.

El teorema 46 complementa la definición 14, pues establece la existencia de rectas paralelas.

Para fundamentar la teoría euclidiana de las paralelas es suficiente agregar a los axiomas I—IV el siguiente axioma V:

V (AXIOMA DE PARALELISMO). *Sea a una recta arbitraria, y A, un punto exterior a ella; entonces en el plano determinado por A y la recta a, se puede trazar a lo sumo una recta que pasa por A y no interseca a.*

En en § 5 hemos demostrado que este axioma es equivalente al V postulado de Euclides.

Del axioma V sigue de inmediato un teorema recíproco del 44.

TEOREMA 47. *Si dos rectas paralelas se cortan por una tercera, los ángulos alternos internos que se forman son iguales.*

De aquí, por el método habitual, se puede deducir el

TEOREMA 48. *La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.*

No tiene sentido reproducir los teoremas ulteriores de la geometría. Todos los razonamientos que se utilizan en los textos al demostrarlos han sido rigurosamente fundamentados por lo expuesto y pueden efectuarse sin referencia alguna a una figura o a la clara evidencia *).

Digamos más que los axiomas I—V fundamentan la geometría analítica de Descartes. En el § 22 introducimos sistemas de coordenadas en la recta, en el plano y en el espacio. Ahora, disponiendo del axioma V y, en consecuencia, de la teoría euclidiana de las paralelas, de la teoría de semejanza de figuras y, en particular, del teorema de Pitágoras, se puede demostrar que la distancia entre dos puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$ y $M_2(x_2, y_2, z_2)$ se determina por la conocida fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

que todo plano se determina por una ecuación de primer grado

$$ux + vy + wz + t = 0,$$

etc. Queda así abierta la posibilidad de demostrar los teoremas de la geometría por métodos aritméticos.

§ 26. En el capítulo I expusimos ejemplos de tentativas de demostrar el postulado de Euclides de las paralelas. Los autores de estas demostraciones se proponían deducir de manera lógica el V postulado de LOS DEMÁS POSTULADOS DE EUCLIDES. Cabe observar que a pesar de que este problema estaba planteado ante los geómetras durante muchos siglos, seguía sin estar bien definido hasta fines del siglo XIX.

En efecto, las definiciones y axiomas de Euclides son tan imperfectos que no pueden servir de base para desarrollar construcciones lógicas rigurosas. Es interesante destacar que el problema del V postulado, aun cuando ya había sido resuelto por Lobachevski, seguía sin ser enunciado con rigor, pues en la época de Lobachevski todavía no se habían superado los defectos de la fundamentación euclidiana de la geometría.

Una vez expuestos los axiomas de Hilbert, tenemos la posibilidad de enunciar rigurosamente el problema del V postulado como sigue:

Habiendo aceptado los axiomas enumerados en los grupos I—IV, *deducir de ellos el axioma* V.

El resultado de Lobachevski puede ahora ser expresado también con total precisión:

---

*) En esencia, estamos afirmando que el sistema de axiomas de Hilbert es completo, es decir, que si aceptamos todos sus axiomas se puede hacer un desarrollo rigurosamente lógico de la geometría. La definición exacta del concepto de completitud de un sistema de axiomas y la demostración de la completitud del sistema de Hilbert se den en el cap. IV.

El axioma V *no es consecuencia de los axiomas* I—IV.

Este mismo resultado puede enunciarse de otra forma:

Si a los axiomas I—IV *se adjunta una proposición que niega la justeza del axioma* V, *los corolarios de todas estas premisas formarán un sistema lógico no contradictorio* (geometría no euclidiana).

Los resultados básicos de la teoría sobre las paralelas de la geometría de Lobachevski y la demostración de su consistencia se exponen en el cap. III.

§ 27. El sistema de corolarios que se desprenden únicamente de los axiomas I—IV se denomina *geometría absoluta* (término de J. Bolyai). Evidentemente, la geometría absoluta es la parte común de las geometrías euclidiana y no euclidiana, pues las proposiciones que pueden ser demostradas por medio de los axiomas I—IV son verdaderas en igual medida tanto en la geometría de Euclides como en la de Lobachevski.

Todos los teoremas que enunciamos en este capítulo, hasta el 46 inclusive, son teoremas de la geometría absoluta. A ellos agregaremos los siguientes, que son resultado de los trabajos de Saccheri, Lambert y Legendre, y que fueron demostrados en el § 8.

TEOREMA 49. *El defecto* $D(\Delta)$ *de cualquier triángulo satisface la desigualdad*

$$D(\Delta) \geqslant 0.$$

O, en un enunciado diferente: *La suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos rectos.*

TEOREMA 50. *Los ángulos de la base superior de un cuadrilátero de Saccheri no pueden ser obtusos* (*es decir, la hipótesis del ángulo obtuso es contradictoria*).

TEOREMA 51. *Si existe algún triángulo con defecto positivo, cada triángulo tendrá defecto positivo.*

O bien, en otra forma:

Si existe algún triángulo la suma de cuyos ángulos es menor que dos rectos, todo triángulo tendrá suma de ángulos menor que dos rectos.

TEOREMA 52. *Si se acepta la hipótesis del ángulo agudo para algún cuadrilátero de Saccheri, es necesario aceptarla para todo otro cuadrilátero de Saccheri.*

TEOREMA 53. *La hipótesis del ángulo recto de Saccheri y la suposición de Legendre acerca de la existencia de un triángulo la suma de cuyos ángulos es igual a dos rectos, son equivalentes al axioma* V.

TEOREMA 54. *Si existe un ángulo agudo tal que la perpendicular trazada a uno de sus lados por cualquier punto de éste corta al otro lado, entonces el axioma* V *puede ser demostrado.*

Capítulo III

TEORÍA NO EUCLIDIANA DE LAS PARALELAS

1. Definición de paralelas según Lobachevski

§ 28. Ahora procederemos a exponer los resultados básicos de la teoría no euclidiana de las paralelas. En su base pondremos los axiomas de la geometría absoluta I—IV y el siguiente axioma de Lobachevski.

Existen una recta a y un punto A que no le pertenece, tales que por A pasan no menos de dos rectas que no cortan a y están en un mismo plano con ella.

Demostremos que *en el mismo plano pasan por A infinitas rectas que no cortan a.*

Sean a_1 y a_2 dos rectas que pasan por A y no intersecan la recta a (fig. 30); su existencia queda asegurada por el axioma de Lobachevski. Fijemos sobre la recta a_2 un punto B_2 de modo que se encuentre del lado de la recta a_1 donde NO ESTÁ la recta a. Unamos B_2 con algún punto B de la recta a. El segmento B_2B intersecará la recta a_1 en algún punto B_1. Sea M un punto arbitrario del segmento B_1B_2. Es fácil ver que la recta AM no corta la recta a. En efecto, si la recta AM tiene con la recta a algún punto C de intersección que se encuentra en la dirección de A hacia M, se formará un triángulo MBC uno de cuyos lados, MB, interseca la recta a_1. Entonces, por el axioma de Pasch II,4, la recta a_1 tendrá que cortar la recta a, cosa que se descarta. Si, en cambio, AM tiene con la recta a un punto de corte C' en la dirección de M hacia A, se formará un triángulo MBC', cuyo lado MC' interseca la recta a_2. Entonces, por el axioma de Pasch, dicha recta tendrá que cortar la recta a, cosa que también queda descartada.

Podemos, pues, concluir que si a_1 y a_2 pasan por A y no cortan a, todas las rectas que pasan por A en un par determinado de ángulos opuestos por el vértice, determinados por a_1 y a_2, tampoco cortan la recta a.

Con el axioma de Lobachevski se niega la propiedad característica de la geometría euclidiana de unicidad de la paralela, al menos para algún punto determinado y alguna recta determinada. Sin embargo, es fácil comprobar que *si el enunciado del postulado de Lobachevski se cumple para algún punto y alguna recta determinados, entonces se cumplirá para puntos y rectas cualesquiera.*

Demostremos esto por reducción al absurdo.

Supongamos, en contra de lo afirmado, que por algún punto B, que no está sobre una recta b, pasa una única recta b' que no corta la recta b y se encuentra en un mismo plano con ella (fig. 31).

Tracemos la perpendicular BB_1 por B a la recta b y tomemos sobre b algún otro punto B_2, diferente de B_1.

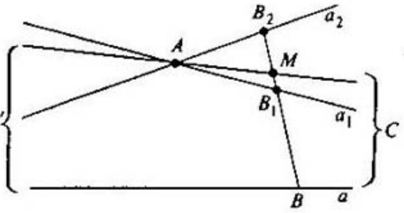


Fig. 30

Es fácil ver que la recta BB_2 forma con las rectas b y b' ángulos alternos internos iguales. En efecto, si esto no fuera así, se podría, trazar por B una recta b'', diferente de b' y tal que la recta BB_2 formara con las rectas b y b'' ángulos alternos iguales. Pero entonces la recta b'', por un lado, no podría tener punto común con b, como sigue del teorema 44 del capítulo II y, por el otro, no podría dejar de cortar la recta b, ya que la única recta que pasa por B y no corta b es, según nuestra hipótesis, la recta b'. Análogamente, también la recta BB_1 formará con b y b' ángulos alternos iguales; en consecuencia, BB_1 es perpendicular no sólo a la recta b, sino también a b'. De aquí sigue de inmediato que el triángulo BB_1B_2 tiene suma de ángulos internos igual a dos rectos. Entonces, en virtud del teorema 51 del capítulo II, la suma de los ángulos de cualquier triángulo será igual a dos rectos. De aquí, según el teorema 53, se desprende el V postulado de Euclides y, por consiguiente, la unicidad de la recta que pasa por un punto arbitrario dado y no corta una recta arbitraria prefijada.

Se obtiene así una contradicción con el axioma de Lobachevski, que niega esta unicidad con respecto a la recta a y el punto A.

Entonces, al aceptar el axioma de Lobachevski llegamos necesariamente a la siguiente proposición.

TEOREMA I. *Cualesquiera que sean dados una recta y un punto que no le pertenece, por este punto pasa un conjunto infinito de rectas que no cortan la recta dada.*

Aquí se sobreentienden, claro está, rectas que están en un mismo plano junto con la recta dada. En lo sucesivo no volveremos a hacer esta salvedad, asumiendo que nuestro análisis (hasta el § 33) se hace desde punto de vista de planimetría, es decir, que se consideran puntos y rectas de un plano determinado.

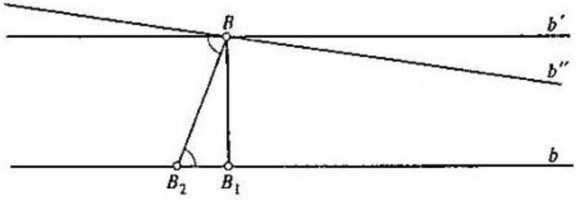


Fig. 31

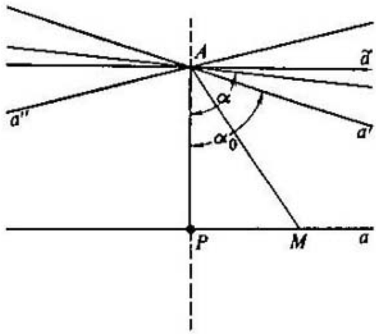


Fig. 32

De acuerdo con lo expuesto, como consecuencia del axioma de Lobachevski debemos:

1) para cada cuadrilátero de Saccheri aceptar la hipótesis del ángulo agudo;

2) suponer que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos.

§ 29. A diferencia de la definición de Euclides, según Lobachevski son paralelas a una recta dada sólo algunas rectas particulares de aquellas que no tienen puntos comunes con la dada. Ahora daremos la definición de rectas paralelas según Lobachevski; no es tan sencilla como la de Euclides, y requiere algunas consideraciones previas.

Sea a alguna recta y A un punto que no le pertenece (fig. 32). Bajemos desde A la perpendicular AP a la recta a. La recta AP divide al plano en dos partes, una de las cuales convendremos en llamar semiplano «derecho», y la otra, semiplano «izquierdo». Análogamente, la recta a divide al plano en dos partes; llamaremos «superior» a aquella que contiene al punto A.

Sea $\tilde{a}$ la recta perpendicular a AP por el punto A. De la geometría absoluta se sabe que las rectas a y $\tilde{a}$ no tienen puntos comunes. Como consecuencia del postulado de Lobachevski, existe un conjunto infinito de rectas diferentes de $\tilde{a}$ y que tampoco intersecan la recta a. Sea α el ángulo que forma la semirrecta derecha de alguna de estas rectas con la semirrecta AP, y sea α_0 la cota inferior del conjunto de tales ángulos α *).

Evidentemente, tienen lugar las desigualdades

$$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2} .$$

*) Es decir, α_0 no es mayor que *cada* ángulo del conjunto indicado ($\alpha_0 \leqslant \alpha$), pero si aumentamos α_0 en un valor positivo ε arbitrariamente pequeño, entonces $\alpha_0 + \varepsilon$ ya superará *cierto* ángulo de este conjunto.

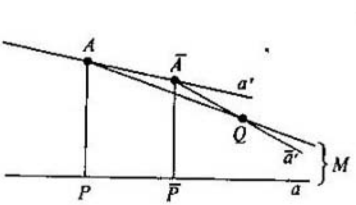


*Fig. 33*a

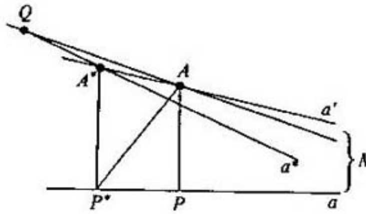


*Fig. 33*b

En efecto, α_0 es mayor que el ángulo PAM, siendo M un punto arbitrario de la recta a, a la derecha de P; consecuentemente, $\alpha_0 > 0$. Como $\bar{a}$ no es la única recta que no tiene puntos comunes con a, entonces $\alpha_0 < \dfrac{\pi}{2}$.

Tracemos por A una recta a' de forma que su semirrecta derecha forme con AP un ángulo igual a α_0.

Es fácil ver que a' no corta la recta a. En efecto, si las rectas a y a' pueden cortarse, lo harán sólo en el semiplano derecho. Supongamos que a y a' tienen un punto común R.

Tomemos sobre la recta a un punto R', situado a la derecha de R, y denotemos $\alpha' = \angle PAR'$. Pero entonces $\alpha_0 < \alpha'$, y la cota inferior de las magnitudes α será mayor que α_0, lo que contradice la definición de α_0.

Sea a'' la recta que pasa por A y es simétrica a a' con respecto a AP.

Las rectas a' y a'' forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Cada recta, que pasa por A y está en el par de ángulos opuestos por el vértice que contiene el punto P, interseca la recta a, mientras que cada recta, que pasa por A y está en el otro par de ángulos opuestos por el vértice, no corta la recta a. Las propias rectas a' y a'', como acabamos de demostrar, pertenecen a las rectas que no intersecan a, y son las rectas frontera de esta colección. Llamaremos a la recta a' *recta frontera derecha*, y a la a'', *izquierda*.

Tiene lugar el siguiente importante

TEOREMA II. *Sean dadas las rectas a y a'. Si a' es recta frontera derecha del conjunto de rectas que pasan por alguno de sus puntos y no cortan la recta a, entonces a' será recta frontera derecha también en el conjunto análogo de rectas que pasan por cualquier otro punto de ella.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un punto sobre la recta a' con respecto al cual se cumple la condición del teorema; bajemos desde A la perpendicular AP a la recta a.

Demostremos primero la afirmación del teorema para los puntos que están a la derecha de A. Sea $\bar{A}$ alguno de estos puntos, y $\bar{A}\bar{P}$ la perpendicular a la recta a (fig. 33a). Nos basta establecer que cualquier semirrecta que parte de $\bar{A}$ y está situada en el semiplano derecho con respecto a $\bar{A}\bar{P}$ «por debajo» de la recta a', debe cortar la recta a. Sea $\bar{a}'$ una tal semirrecta. Fijemos sobre $\bar{a}'$ un punto Q arbitrario y construyamos la semirrecta AQ. Como para el punto A se satisface la hipótesis del teorema y la semirrecta AQ está en el semiplano derecho con respecto a AP «por debajo» de la recta a', esta semirrecta debe cortar la recta a en algún punto; lo denotaremos por M. Por cuanto la semirrecta $\bar{a}'$ interseca uno de los lados del triángulo APM, precisamente el AM, en virtud del axioma de Pasch II,4 debe intersecar también uno de los otros dos lados de este triángulo *). Pero con el lado AP la semirrecta $\bar{a}'$ no puede tener puntos comunes, pues AP está en el semiplano izquierdo con respecto a $\bar{A}\bar{P}$. En consecuencia, la semirrecta $\bar{a}'$ tiene un punto común con el lado PM (evidentemente, a la derecha del punto P), cosa que precisamente había que demostrar.

Consideremos ahora un punto arbitrario A^* que está sobre la recta a' a la izquierda de A (fig. 33b). Sea A^*P^* la perpendicular a la recta a, y a^*, alguna semirrecta con origen A^*, situada en el semiplano derecho con respecto a A^*P^* por debajo de la recta a'. Debemos demostrar que a^* tiene un punto común con la recta a. Tomemos sobre el complemento de la semirrecta a^* un punto arbitrario Q, y unámoslo con el A por una recta. Según nuestra hipótesis, la recta a' es frontera en el conjunto de rectas que pasan por A y no cortan a. Por esto, la recta QA cortará la recta a en algún punto M, a la derecha de P. Observemos ahora que la semirrecta a^* pasa por el vértice y el interior del ángulo AA^*P^*; por lo tanto, tendrá que cortar al segmento AP^* (de acuerdo con el teorema 11a del capítulo II). Pero entonces, por el axioma de Pasch II,4, la semirrecta a^* tendrá que intersecar o bien al lado AM, o bien al P^*M del triángulo AP^*M. Como la recta a^* tiene con la AM un punto común Q, fuera del segmento AM, la semirrecta a^* deberá intersecar precisamente al lado P^*M. Así, esta semirrecta se interseca con la recta a, quedando con ello demostrado el teorema.

Se puede hacer una demostración análoga para el caso en que a' sea la recta frontera izquierda.

Ahora podemos definir el concepto de paralelismo en la geometría de Lobachevski.

Según Lobachevski, *la recta a' se dice paralela a la recta a, si en el conjunto de las rectas que pasan por algún punto de a' y no cortan la recta a, la recta a' resulta ser frontera.*

Del teorema II sigue que si algún punto de la recta a' posee la propiedad indicada en la definición que acabamos de dar, *todo otro punto de a' tendrá la misma propiedad.*

Fijemos uno de los dos sentidos de la recta a (indicado con una flecha en la fig. 34) y bajemos de algún punto A de la recta a' sobre la recta a la perpendicular AP. El segmento AP forma con la recta a' dos ángulos adyacentes, uno de los

---

*) El axioma de Pasch II,4 se refiere a un triángulo y una recta. Con respecto a una semirrecta (rayo), este axioma puede aplicarse si el origen de la semirrecta está fuera del triángulo, y es inaplicable si el origen está dentro de él.

Al aplicar el axioma de Pasch a un triángulo y una semirrecta, tendríamos que hacer la salvedad previa de que el origen de ésta se halla fuera del triángulo. Sin embargo, no vamos a hacer cada vez esta salvedad, omitiendo así en este caso y en otros similares los detalles de los razonamientos, siempre que éstos sean suficientemente evidentes. Una exposición demasiado escrupulosa complicaría la lectura del libro con menudencias que no son ni interesantes ni esencialmente importantes.

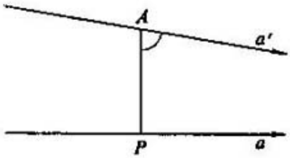


Fig. 34

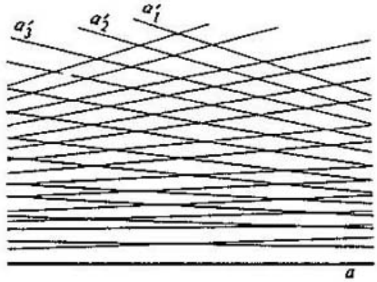


Fig. 35

cuales será agudo, y el otro, obtuso. Si el ángulo agudo queda del lado de la recta AP hacia el cual está orientada nuestra recta a, diremos que *a' es paralela a la recta a en el sentido prefijado, o en la dirección prefijada* (en las figuras indicaremos la dirección del paralelismo por medio de flechas en ambas rectas).

Utilizando nuestra convención sobre la notación de los lados del plano con respecto a la recta AP («derecho» e «izquierdo»), se puede describir la dirección de paralelismo de otro modo: en el conjunto de rectas que pasan por A y no cortan la recta a, a' puede ser recta frontera derecha o izquierda; en el primer caso, decimos que *a' es paralela a la recta a hacia la derecha*, en el segundo, que *a' es paralela a la recta a hacia la izquierda.*

Así, entonces, por cada punto del plano pasan dos rectas paralelas a una recta dada, que son paralelas a ella en dos direcciones diferentes (véase la fig. 35; las rectas paralelas a la recta a hacia la derecha se denotan con las letras a_1', a_2', ...). En particular, tiene lugar el siguiente

TEOREMA III. *Por cada punto del plano pasa exactamente una recta paralela a otra dada en una dirección determinada.*

§ 30. Basándonos en la definición dada más arriba de paralelismo, no podemos todavía hablar de dos rectas *mutuamente* paralelas. Más adelante estableceremos la reciprocidad de la relación de paralelismo, es decir, que si una de dos rectas dadas es paralela a la otra, entonces la segunda es paralela a la primera. Pero antes tendremos que demostrar algunas proposiciones auxiliares.

LEMA I. *Sean a y b dos rectas arbitrarias; O, un punto sobre b; OA, la perpendicular bajada de O sobre a. Supongamos, además, que OA forma con la recta b ángulos adyacentes desiguales. Entonces, si x denota la distancia de O a un punto tomado sobre la recta b del lado del ángulo obtuso, e $y = f(x)$, la longitud de la perpendicular trazada de este punto a la recta a, $f(x)$ será una función continua, monótona y creciente indefinidamente.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos, del lado del ángulo obtuso, sobre la recta b dos puntos M y M', de forma que M esté entre O y M' (fig. 36). Tracemos las perpendiculares OA, MP y $M'P'$ a la recta a, y pongamos

$$OM = x, \qquad OM' = x',$$
$$MP = y, \qquad M'P' = y';$$

en este caso, $x' > x$.

Obsérvese que en virtud del axioma de Lobachevski, la suma de los ángulos internos del cuadrilátero $OMPA$ es menor que cuatro rectos; esto, sumado a que los ángulos internos en los vértices A y P son rectos, implica que $\angle PMM'$ es mayor que $\angle AOM$. En consecuencia, $\angle PMM'$ es obtuso.

Determinemos sobre la recta $P'M'$, a partir del punto P', un segmento $P'N = PM$. Uniendo los puntos M y N, obtenemos un cuadrilátero de Saccheri $PMNP'$; $\angle PMN$, por ser un ángulo de la base superior de éste, es agudo. Como $\angle PMM'$ es obtuso y $\angle PMN$, agudo, el punto N estará entre P' y M', es decir, $P'M' > PM$. Así, cuando $x' > x$, será también $y' > y$. Queda con esto demostrado que $f(x)$ es una función monótona creciente.

Hagamos ahora $\Delta x = x' - x$ y $\Delta y = y' - y (\Delta x > 0,\ \Delta y > 0)$. Evidentemente, $\Delta x = MM'$, $\Delta y = NM'$. Partiendo de la igualdad

$$NM' < NM + MM'$$

y tomando en consideración que NM es más corto que MM', pues en el triángulo NMM' el lado NM es opuesto a un ángulo agudo, y el MM' opuesto al obtuso, hallamos que

$$NM' < 2MM',$$

o bien que $\Delta y < 2\Delta x$.

Considerando análogamente el caso en que M' está entre O y M, llegamos a establecer la desigualdad

$$|\Delta y| < 2|\Delta x|,$$

válida para todas las posiciones posibles de los puntos M y M'. De aquí sigue que $\Delta y \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, es decir, que $f(x)$ es efectivamente una función continua.

Queda por demostrar que cuando x crece indefinidamente, $f(x)$ también crece indefinidamente. Para mostrar esto, fijemos sobre la recta b un punto M'' de forma que se cumpla $MM' = M'M''$ y tracemos la perpendicular $M''P''$ a la recta a. Supongamos que al punto M'' le corresponde $x'' = OM''$ e $y'' = f(x'') = M''P''$. Introduzcamos las notaciones $h_1 = y' - y$, $h_2 = y'' - y'$; entonces $MP = y$, $M'P' = y + h_1$, $M''P'' = y + h_1 + h_2$. Determinemos sobre la recta $P'M'$, a partir de P' y en la dirección de M', los segmentos $P'N = PM$, $P'Q = P''M''$, y a partir de M', el segmento $M'R = M'N$. Evidentemente,

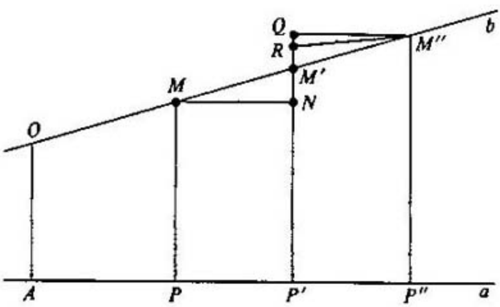


Fig. 36

$NM' = h_1, M'R = h_1$ y $M'Q = h_2$. Observemos ahora que los triángulos $M'NM$ y $M'RM''$ son iguales, pues tienen ángulos iguales encerrados entre lados iguales. En consecuencia, $\angle M'RM'' = \angle M'NM$. Pero $\angle M'NM$ es adyacente al ángulo agudo $\angle MNP'$ en el cuadrilátero de Saccheri. Por eso, este ángulo es obtuso, así como también el $\angle M'RM''$, que es igual a él. El ángulo $M'QM''$, por estar en la base superior del cuadrilátero de Saccheri $P'QM''P''$, es agudo. De la comparación de $\angle M'QM''$ con $\angle M'RM''$ se desprende que el punto R está entre M' y Q, es decir, que $M'Q > M'R$, o bien que $h_2 > h_1$.

Tenemos, de aquí, que $MP = y$, $M'P' = y + h_1$, $M''P'' > y + 2h_1$. Si hacemos, entonces, $MM' = M'M'' = s$ y tomamos la sucesión $x_1 = x, x_2 = x + s$, $x_3 = x + 2s, \ldots$, obtenemos respectivamente $f(x_1) = y$, $f(x_2) = y + h_1$, $f(x_3) > y + 2h_1, f(x_4) > y + 3h_1$, etc. De estas relaciones se aprecia directamente que cuando x crece indefinidamente, la función $f(x)$ crece también en forma indefinida. El lema está demostrado.

Obsérvese que el lema I pertenece a la geometría absoluta, a pesar de que los razonamientos efectuados se basaron esencialmente en las propiedades de un cuadrilátero de Saccheri en el sistema de Lobachevski. En la teoría euclidiana de las paralelas la demostración de este lema se efectúa sin dificultad alguna; en este caso habrá que sustituir las relaciones que obtuvimos al final de la demostración por las igualdades respectivas $MP = y$, $M'P' = y + h_1$, $M''P'' = y + 2h_1, \ldots$, que expresan el carácter lineal de la función $y = f(x)$.

Un caso particular importante del lema I es la siguiente proposición.

LEMA II. *Si x denota la distancia del vértice de un ángulo a un punto que está sobre un lado de este ángulo, e $y = f(x)$, la longitud de la perpendicular trazada de este punto al otro lado, entonces $f(x)$ es una función continua, monótona e indefinidamente creciente.*

Los lemas I y II serán aplicados más de una vez.

Ante todo, utilizaremos el lema I para demostrar la reciprocidad de la relación de paralelismo.

TEOREMA IV. *Si una de dos rectas es paralela a la otra en una dirección determinada, entonces la segunda es paralela a la primera en la misma dirección.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la recta a es paralela a la recta b en alguna dirección. Tenemos que demostrar que b es paralela a a en la misma dirección.

Ante todo, estableceremos la existencia de un punto equidistante de las rectas a y b. Esto, que por evidencia es bien claro, se desprende directamente del lema I. En efecto, sea P algún punto de la recta a, y PB, la perpendicular trazada por P a la recta b (fig. 37). Fijemos sobre el segmento PB un punto arbitrario M y tracemos por él la perpendicular MA a la recta a.

Hagamos $PB = s$, $PM = x$, $MA = f(x)$; consideremos, además, la función $\varphi(x) = s - x$. Evidentemente, $f(x)$ y $\varphi(x)$ denotan respectivamente la distancia del punto M a las rectas a y b. En virtud del lema I, $f(x)$ es una función continua monótonamente creciente; $\varphi(x)$, como se ve de su expresión, es una función también continua y monótonamente decreciente. Como $f(0) < \varphi(O)$, y $f(x) > \varphi(s)$, existe un valor de x, $0 < x < s$, y sólo uno, tal que $f(x) = \varphi(x)$. A este valor de x le corresponde un punto M que equidista de las rectas a y b, es decir, tal que $MA = MB$.

Para este punto M, la recta AB forma ángulos iguales con las rectas a y b; esta recta se denomina *secante de igual pendiente* para las rectas a y b.

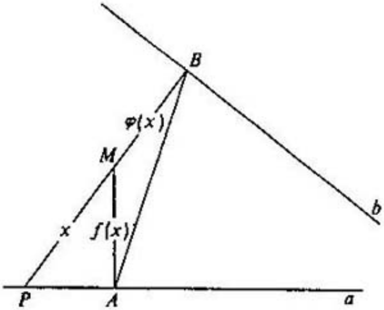


Fig. 37

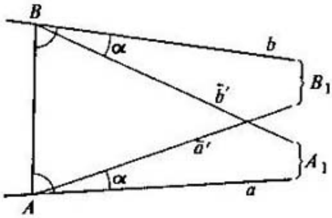


Fig. 38

Una vez probada la existencia de una secante de igual pendiente, la reciprocidad de la relación de paralelismo se hace claramente evidente. Con todo, daremos la demostración rigurosa del teorema.

Como, según la condición, la recta a es paralela a b, entonces a y b no se cortan. De este modo, para verificar que b sea paralela con respecto a a, debemos establecer que b es una recta frontera entre todas las que pasan por alguno de sus puntos y no cortan a. Sea B tal punto (fig. 38). Denotemos con $\bar{b}$ la semirrecta de la recta b que tiene origen en B y está dirigida en el sentido de paralelismo de la recta a a la recta b; esta semirrecta no corta la recta a. Debemos demostrar que cualquier otra semirrecta $\bar{b}'$ con origen B y desviada de $\bar{b}$ hacia la recta a en un ángulo α arbitrariamente pequeño, corta la recta a. Sea dado un ángulo α. Tracemos por A una semirrecta $\bar{a}'$, situada del mismo lado de a que la recta b y que forme con el sentido de paralelismo de la recta a un ángulo α. Como la recta a es paralela a b, la semirrecta $\bar{a}'$ encontrará a b en algún punto B_1. Determinemos sobre la recta a, en el sentido de paralelismo, un segmento AA_1 igual al BB_1. Como AB es secante de igual pendiente para las rectas a y b, el triángulo BB_1A es igual al AA_1B. De aquí sigue que la semirrecta con origen B que pasa por el punto A_1 forma con la recta b el ángulo dado α hacia la recta a, es decir, coincide con la semirrecta $\bar{b}'$. Pero la primera semirrecta, por construcción, corta la recta a. Así, pues, una semirrecta que pasa por B y se desvía de $\bar{b}$ hacia la recta a en un ángulo arbitrariamente pequeño, corta esta recta. Por ende, la recta b es paralela a la recta a, quedando con esto demostrado el teorema.

Sean a y c dos *rectas paralelas entre sí.* La recta a divide al plano en dos semiplanos; denotemos por Π_{ac} aquel que contiene la recta c. Análogamente, la recta c dividirá al plano en dos semiplanos; llamaremos Π_{ca} aquel que contiene la recta a. Convendremos en llamar a la parte común de los semiplanos Π_{ac} y Π_{ca} zona interior del plano con respecto a las rectas a y c. *Sea b una tercera recta, paralela a alguna de las dos rectas a y c en la misma dirección en que éstas son paralelas entre sí.* Es fácil dilucidar que en este caso b no puede intersecar ni la recta a, ni la recta c. En efecto, supongamos, por ejemplo, que b es paralela a la recta c; entonces b y c no pueden tener intersección, como rectas paralelas. Pero a y b tampoco pueden intersecarse, pues en caso contrario por su punto común pasarían dos rectas paralelas a c en una misma dirección, cosa imposible (véase el teorema III).

LEMA III. *Si para las condiciones indicadas arriba la recta b está en la zona interior del plano con respecto a las rectas a y c, entonces debe cortar a cada segmento que una algún punto de la recta a con otro de la recta c.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que b es paralela a c. Tomemos sobre la recta a un punto arbitrario A, y sobre c, otro punto cualquiera C; tracemos el segmento AC. Sea $\bar{c}$ la semirrecta de c que parte del punto C en la dirección de paralelismo de las rectas a y c (fig. 39). Sea $\bar{c}'$ alguna semirrecta que sale del punto C hacia el interior del ángulo determinado por las semirrectas CA y $\bar{c}$; supongamos, además, que $\bar{c}'$ está del lado del paralelismo con respecto a las perpendiculares trazadas desde C a las rectas a y b. Según la condición de paralelismo entre a y c, la semirrecta $\bar{c}'$ debe cortar la recta a en algún punto P. Análogamente, según la condición de paralelismo entre c y b, la semirrecta $\bar{c}'$ tiene que intersecar la recta b. Como b se encuentra en la zona interior con respecto a las rectas a y c, el punto de intersección de la semirrecta $\bar{c}'$ con la recta b tiene que estar entre los puntos C y P. De esto, más el axioma de Pasch, concluimos que la recta b cortará bien el segmento AC, bien el AP. Pero no puede cortar a este último, pues no puede tener intersecciones con la recta a. Consecuentemente, la recta b corta al segmento AC. El lema queda demostrado.

El siguente teorema establece la transitividad de la relación de paralelismo.

TEOREMA V. *Dos rectas paralelas a una tercera en una misma dirección son paralelas entre sí, en la misma dirección.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que las rectas a y b son paralelas en una misma dirección a la recta c. De aquí, como arriba, concluimos que las rectas a y b no pueden intersecarse (en caso contrario, por su punto común pasarían dos rectas paralelas a c en una misma dirección, cosa imposible).

A fin de demostrar que a y b son paralelas, consideremos dos casos (fig. 40).

1. Las rectas a y b están a un mismo lado de la recta c.
2. Las rectas a y b están en lados diferentes de la recta c.

En el primer caso, una de las dos rectas a, b está en la zona interior del plano, determinada por la otra recta conjuntamente con c. Supongamos, por ejemplo, que b está en la zona interior con respecto a a y c.

Tomemos sobre a un punto arbitrario A y denotemos con $\bar{a}$ la semirrecta de a que parte de A en el sentido de paralelismo de las rectas a y c. Tenemos que demostrar que la semirrecta $\bar{a}$ es de frontera en el conjunto de todas las semirrectas con el punto A que no cortan la recta b. Admitiendo lo contrario, supongamos que

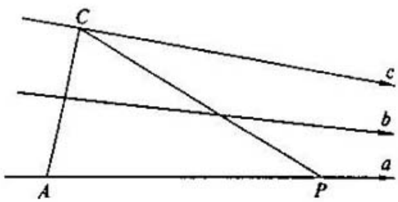


Fig. 39

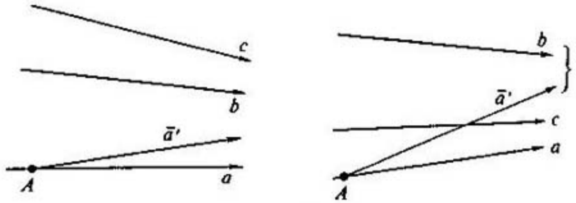


Fig. 40

existe una semirrecta $\bar{a}'$ que sale del punto A en la dirección de paralelismo (es decir, se encuentra en la dirección de paralelismo con respecto a las perpendiculares desde A a las rectas b y c) y está más cerca de la recta b que la semirrecta $\bar{a}$ pero que no corta la recta b. Entonces, en virtud del lema precedente, la semirrecta $\bar{a}'$ no puede cortar tampoco la recta c, cosa que contradice el paralelismo de las rectas a y c, pues la semirrecta $\bar{a}'$, en este caso, no sería de frontera en el conjunto de las que parten de A y no cortan la recta c.

Consideremos el segundo caso. Supongamos que a y b están en lados diferentes con respecto a c; entonces b y c estarán del mismo lado de a. Tracemos por un punto arbitrario A de la recta a una semirrecta $\bar{a}'$ de forma que esté más cerca de las rectas b y c que la recta a y que pase en el sentido de paralelismo con respecto a las perpendiculares desde A a las rectas b y c. Como a y c son paralelas, la semirrecta $\bar{a}'$ cortará la recta c, y en virtud del paralelismo de c y b, esta semirrecta cortará también la recta b. Así, en el conjunto de semirrectas que pasan por A y no intersecan la recta b, la semirrecta $\bar{a}$ resulta ser de frontera; por ende, las rectas a y b son paralelas entre sí (en la misma dirección en que ambas lo son con la recta c). El teorema queda demostrado.

Las proposiciones establecidas en este parágrafo muestran que aunque la definición de paralelismo en la geometría de Lobachevski es bastante complicada, el conjunto de rectas paralelas a una recta dada en una dirección determinada posee las mismas propiedades básicas que el conjunto de rectas paralelas en la geometría euclidiana.

2. Particularidades de la disposición de rectas paralelas y rectas divergentes

§ 31. Si dos rectas no se cortan y no son paralelas, se llaman *divergentes* [*]. Por cada punto del plano pasan dos rectas paralelas a una recta dada, y un número infinito de rectas divergentes con ella (teorema I).

Ahora estudiaremos algunas propiedades de la posición recíproca de las rectas paralelas y las divergentes. Los resultados que obtendremos aquí nos permitirán representarnos en forma bien clara la diferencia entre las rectas paralelas y las divergentes.

---

[*] El término «rectas divergentes» se justifica por las particularidades de la posición recíproca de estas rectas; véase el teorema VIII más abajo.

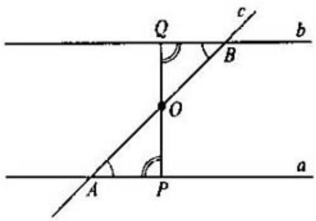


Fig. 41

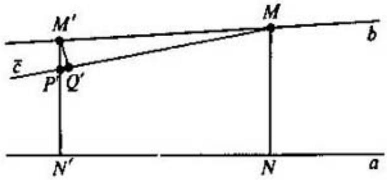


Fig. 42

Indiquemos, ante todo, los dos teoremas siguientes.

TEOREMA VI. *Dos rectas perpendiculares a una tercera son divergentes.*

La demostración se ve en seguida. En efecto, el que dos rectas a y b, perpendiculares en los puntos A y B a una tercera recta c, no tienen puntos comunes, ya nos es conocido como proposición de la geometría absoluta. Pero estas rectas no son paralelas, pues por A pasa un número infinito de rectas que no se cortan con b, y entre ellas la recta a no es de frontera y por ende no es paralela a la recta b. El teorema VI ya fue establecido en forma implícita en el § 29.

TEOREMA VII. *Dos rectas que al cortarse con una tercera forman ángulos alternos iguales, o bien ángulos correspondientes iguales, son divergentes.*

DEMOSTRACIÓN. Este teorema es una generalización del precedente, pero se reduce fácilmente a él. Sean a y b dos rectas dadas, y sea c una secante de ambas (fig. 41). Sean A y B los puntos en que c corta a y b, y O, el punto medio del segmento AB. Bajemos desde O las perpendiculares OP y OQ a las rectas a y b.

En los triángulos rectángulos OAP y OBQ tenemos: $OA = OB$, por la elección del punto O; $\angle OAP = \angle OBQ$, por la condición del teorema. De aquí sigue que el triángulo OAP es igual al OBQ. En particular, $\angle BOQ = \angle AOP$ y, en consecuencia, los segmentos OP y OQ están sobre una misma recta PQ, a la cual son perpendiculares las rectas a y b. Por el teorema VI, estas rectas son divergentes, cosa que había que probar.

Ahora demostraremos que dos rectas divergentes cualesquiera tienen exactamente una perpendicular común. Por consiguiente, *la existencia de una perpendicular común, y, además, sólo una, es una propiedad característica de las rectas divergentes.*

Ante todo está claro que en la geometría de Lobachevski dos rectas no pueden tener dos perpendiculares comunes. En efecto, si AB y CD son perpendiculares a las rectas AC y BD, el cuadrilátero $ABCD$ tendrá suma de ángulos igual a cuatro rectos, cosa imposible, pues cada uno de los triángulos ABC y BCD tiene suma de ángulos menor que dos rectos. Así, la unicidad de la perpendicular común a dos rectas se establece inmediatamente.

La demostración se existencia de una perpendicular común a dos rectas divergentes no es tan sencilla.

Sean a y b dos rectas divergentes cualesquiera (fig. 42). Sea MN la perpendicular trazada de un punto arbitrario M de la recta b a la recta a. Si MN es también perpendicular a b, no hay nada que demostrar. Supongamos, pues, que MN no es perpendicular a b, y fijemos sobre b un sentido positivo de manera que éste forme un ángulo obtuso con la perpendicular MN. Entonces, en virtud del lema I, la longitud de MN, al desplazar el punto M en el sentido positivo, crece monótona e indefinidamente.

Demostraremos que, a partir de algún momento, la longitud de MN crece indefinidamente también cuando desplazamos el punto M en el sentido negativo.

La recta MN divide el plano en dos semiplanos; convendremos en llamar positivo a aquel hacia el cual está dirigida la semirrecta positiva de b, y negativo, al otro.

Tracemos por M en el semiplano negativo la semirrecta $\bar{c}$ paralela a la recta a.

Como a y b son rectas divergentes, la semirrecta c está más cerca de la recta a que la semirrecta negativa de la recta b. Por esto, si fijamos sobre b en el semiplano negativo algún punto M' y trazamos la perpendicular $M'N'$ a la recta a, ésta cortará la semirrecta $\bar{c}$ en algún punto P' del segmento $M'N'$. Así, pues, $M'N' > M'P'$. Tracemos ahora la perpendicular $M'Q'$ a la semirrecta $\bar{c}$; evidentemente, $M'P' > M'Q'$ y, en consecuencia, $M'N' > M'Q'$. Pero, de acuerdo con el lema II, la distancia de un punto variable sobre un lado de un ángulo al otro lado crece indefinidamente cuando este punto se aleja del vértice; en virtud de esto, cuando el punto M' se aleja en sentido negativo, $M'Q'$ crece monótona e indefinidamente. Como $M'N' > M'Q'$, entonces $M'N'$ a la postre también tandrá que crecer indefinidamente.

Introduzcamos sobre la recta b un sistema lineal de coordenadas, fijando arbitrariamente un origen y suponiendo que el crecimiento de la coordenada tiene lugar, por ejemplo, en sentido positivo. Sea x la coordenada de un punto variable M, e $y = f(x)$ la longitud de la perpendicular MN a la recta a. Por lo que acabamos de mostrar, $f(x)$ es una función continua siempre positiva, cuyo valor crece indefinidamente cuando x tiende al infinito ya sea en el sentido positivo o en el negativo. De aquí sigue, en primer lugar, que $f(x)$ tiene algún mínimo positivo $f(x_0)$ y, en segundo, que cada valor mayor que $f(x_0)$ lo toma la función $f(x)$ al menos para dos valores distintos del argumento. Sean x_1 y x_2 ($x_1 \neq x_2$) dos valores de x, tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Sean M_1 y M_2 los puntos de coordenadas x_1 y x_2, y M_1N_1, M_2N_2, las perpendiculares bajadas de ellos a la recta a. Por la elección de los puntos M_1 y M_2, el cuadrilátero $N_1M_1M_2N_2$ es un cuadrilátero de Saccheri y es, por ende, simétrico con respecto a la perpendicular trazada en el punto medio de la base inferior. De aquí sigue que la perpendicular M_0N_0 trazada desde el punto medio M_0 del segmento M_1M_2 a la recta a, es una perpendicular común a las rectas a y b. Queda, así, demostrada la existencia de una perpendicular común.

Si tomamos ahora sobre la recta b un punto arbitrario $\bar{M}$ y bajamos de él la perpendicular $\bar{M}\bar{N}$ a la recta a, en el cuadrilátero $N_0M_0\bar{M}\bar{N}$ los ángulos en los vértices N_0, M_0 y $\bar{N}$ serán rectos y, consecuentemente, en el ángulo externo en el vértice $\bar{M}$ será obtuso. De aquí, en virtud del lema I, sigue que los valores de la función $f(x)$ crecen en el lado del punto $\bar{M}$ en el que no se encuentra el punto M_0. En consecuencia, M_0 es el único punto donde $f(x)$ alcanza su mínimo valor.

Todo lo expuesto permite enunciar el siguiente

TEOREMA VIII. *Dos rectas divergentes cualesquiera tienen exactamente una perpendicular común, a ambos lados de la cual se alejan indefinidamente una de otra.*

Agreguemos, a propósito, que las proyecciones de todos los puntos de una de las

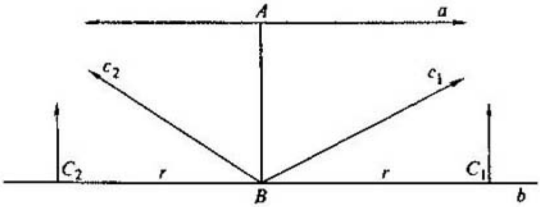


Fig. 43

dos rectas divergentes sobre la otra forman sólo un segmento finito en la segunda. En efecto, sean a y b dos rectas divergentes, y AB, su perpendicular común (fig. 43). Tracemos por B las rectas c_1 y c_2, paralelas a la recta a, e imaginemos que en todos los puntos de la recta b se han levantado perpendiculares a ella. Si todas estas perpendiculares encontrasen a las rectas c_1 y c_2, sería necesario aceptar el V postulado de Euclides (véase la proposición IV del § 8, o bien el teorema 54 del § 27).

Así, del postulado de Lobachevski sigue que las perpendiculares levantadas en los puntos de la recta b y suficientemente alejadas del punto B no cortan a las rectas c_1 y c_2. Sea r cota inferior de las distancias de estas perpendiculares al punto B. Determinemos sobre la recta b dos puntos C_1 y C_2 de modo que $C_1B = BC_2 = r$; entonces, evidentemente, las proyecciones de todos los puntos de la recta a cubrirán todo el interior del segmento C_1C_2.

Las perpendiculares en los puntos C_1 y C_2 son paralelas tanto a la recta a, como a las rectas c_1 y c_2 (no nos detendremos a demostrarlo; la demostración, en esencia, se hace más abajo, en el § 33). Si construimos la recta simétrica a a con respecto a b, se obtiene una figura representada esquemáticamente en la fig. 44. Se trata de un «rectángulo» singular, cuyos lados y diagonales son paralelos entre sí en las direcciones indicadas por las flechas.

Naturalmente, esta figura no tiene ningún análogo en la geometría de Euclides.

§ 32. Estudiemos ahora la disposición recíproca de rectas paralelas. Supongamos que las dos rectas a y b, representadas en la fig. 45, son paralelas en alguna dirección. Denotemos con M un punto variable sobre la recta a, y tracemos la perpen-

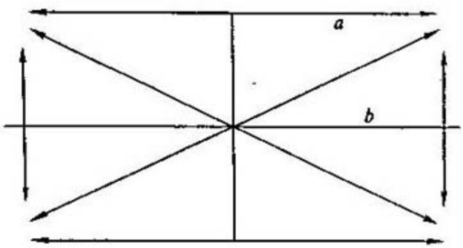


Fig. 44

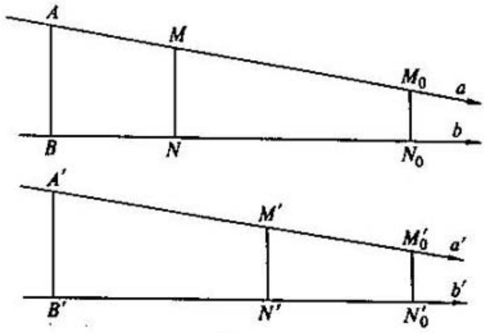


Fig. 45

dicular MN a la recta b. Del lado del paralelismo, esta perpendicular forma un ángulo agudo con la recta a. En virtud del lema I, de aquí sigue que la longitud de MN crece monótona e indefinidamente, cuando el punto M se desplaza en el sentido opuesto al de paralelismo, y decrece monótonamente en el sentido del paralelismo.

Demostraremos ahora que en el último caso la longitud de MN tiende a cero.

Fijando sobre la recta a algún punto A, bajemos la perpendicular AB a la recta b. Sea dado un número positivo ε; hay que mostrar que para alguna posición del punto M será $MN < \varepsilon$. Si $AB > \varepsilon$, tomaremos en el plano alguna recta b' y en un punto arbitrario N'_0 de ella levantaremos la perpendicular $N'_0M'_0$, cuya longitud tomaremos menor que ε. Tracemos por M'_0 una recta a' paralela a b'. Imaginemos ahora que un punto variable M' se desplaza sobre la recta a' en el sentido opuesto al de paralelismo. Entonces, la longitud de la perpendicular $M'N'$ a la recta b variará en forma continua, creciendo indefinidamente. Por esto, habrá alguna posición de M' tal que la longitud de $M'N'$ resulte ser igual a AB. Denotemos por A' y B' los puntos M' y N' en ese momento. Desplazando la figura formada por las rectas a' y b', la ubicaremos de tal forma que la recta b' coincida con b, el punto B', con el B, y la dirección de paralelismo de las rectas a' y b' coincida con la de las rectas a y b *).

Como $A'B' = AB$, el punto A' coincidirá con el A, y por cuanto por un punto dado pasa una única recta paralela a una recta determinada en una dirección fija, la recta a' se superpondrá a la recta a. Supongamos que el punto M'_0 de la recta a' ocupe la posición M_0 en la recta a; denotaremos con N_0 la posición correspondiente del punto N'_0. Entonces, la longitud de la perpendicular M_0N_0 resulta ser menor que el número positivo prefijado ε, es decir, las rectas a y b se aproximan indefinidamente en la dirección del paralelismo.

Recapitulando lo expuesto, podemos enunciar el siguiente

---

*) Al hablar de desplazamiento de una figura, sobreentendemos la construcción de otra figura, congruente con la dada. En tal sentido, el concepto de movimiento es totalmente preciso (véase el § 19).

TEOREMA IX. *La distancia de un punto variable sobre una de dos rectas paralelas a la otra recta tiende a cero si el punto se desplaza en el sentido del paralelismo, y crece indefinidamente cuando el punto se mueve en el sentido opuesto.*

Resumamos concisamente los resultados de nuestro análisis: dos rectas divergentes tienen siempre exactamente una perpendicular, en ambos lados de la cual se alejan indefinidamente una de la otra («divergen»); las rectas paralelas se alejan indefinidamente en un sentido, y se aproximan asintóticamente en el otro.

3. La función de Lobachevski $\Pi(x)$

§ 33. Tomemos alguna recta a y un punto A fuera de ella. Por A pasan dos rectas paralelas a la recta a en dos direcciones diferentes; las denotaremos por u_1 y u_2. Estas rectas forman ángulos iguales con la perpendicular AP bajada a la recta a desde el punto A. El ángulo agudo que forma cualquiera de las rectas u_1 ó u_2 con la perpendicular AP se denomina *ángulo de paralelismo en el punto A con respecto a la recta a.*

Demostraremos ahora que *el ángulo de paralelismo queda totalmente determinado por la distancia del punto A a la recta a.*

Sean A y A' dos puntos que se encuentran a igual distancia de las rectas a y a' respectivamente. Tracemos por el punto A una recta u paralela a a, y por A' una recta u', paralela a a'. Ahora denotemos con AP y $A'P'$ las perpendiculares trazadas a las rectas a y a', y por α y α', los ángulos de paralelismo en los puntos A y A' con respecto a las rectas a y a'. Debemos establecer la igualdad $\alpha = \alpha'$. Supongamos que, por el contrario, uno de estos ángulos es menor que el otro, por ejemplo, $\alpha < \alpha'$. Tracemos por A' una recta que forme con el segmento $A'P'$ un ángulo α, del lado del paralelismo de las rectas u' y a'. En virtud del paralelismo de estas rectas, la recta trazada tendrá que intersecar a' en algún punto Q' (situado en el sentido del paralelismo con respecto al punto P'). Determinemos sobre la recta a, partiendo del punto P y en el sentido del paralelismo, un segmento PQ, igual al $P'Q'$. El triángulo PAQ, evidentemente, es igual al $P'A'Q'$ (los lados AP y $A'P'$ son iguales por la condición, los lados PQ y $P'Q'$, por construcción, y los ángulos comprendidos entre estos lados son rectos); por esto, $\angle PAQ$ es igual a α. Por consiguiente, la recta u coincide con la recta AQ. Pero en este caso u tendrá que intersecar la recta a en el punto Q, cosa imposible por ser paralelas estas rectas. La contradicción obtenida demuestra nuestra afirmación.

Sea A algún punto fuera de la recta a_0, y α, el ángulo de paralelismo en el punto A con respecto a la recta a_0 (fig. 46). Sea x la longitud de la perpendicular AA_0 trazada a la recta a_0 desde A. Según lo expuesto, el ángulo α queda totalmente determinado por la magnitud x; introduciendo la notación de Lobachevski, pongamos

$$\alpha = \Pi(x).$$

Esta función tiene importancia fundamental en la geometría no euclidiana; pasaremos a estudiar sus propiedades elementales.

Mostremos, ante todo, que $\Pi(x)$ *es una función monótona decreciente.* Con este fin, tomemos sobre la recta AA_0 algún punto A' y denotemos por x' la longitud de $A'A_0$. Supongamos que $x' > x$; hay que demostrar que $\Pi(x') < \Pi(x)$. Tracemos

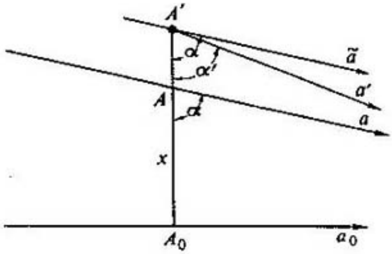


Fig. 46

por A una recta a paralela a a_0, y por A' otra $\tilde{a}$ de forma que forme un ángulo $\alpha = \Pi(x)$ con el segmento $A'A_0$, del lado de paralelismo de las rectas a y a_0. Las dos rectas a y $\tilde{a}$ forman ángulos correspondientes iguales al intersecar la recta AA'; en virtud del teorema VII son, por tanto, divergentes. De aquí sigue que la recta a' que pasa por A' y es paralela a a en la misma dirección en que a es paralela a a_0 está más cerca de a que $\tilde{a}$, del lado del paralelismo.

Así, pues, si $\alpha' = \Pi(x')$, entonces $\alpha' < \alpha$, es decir, cuando $x' > x$ será $\Pi(x') < \Pi(x)$.

Observemos, a continuación, que $\Pi(x)$ *toma todos los valores encerrados entre* 0 y $\frac{\pi}{2}$. Para establecerlo, tomemos un ángulo agudo arbitrario α y demostremos que es ángulo de paralelismo para algún segmento x. Sea O el vértice del ángulo, y a y b, sus lados. Del postulado de Lobachevski sigue que las perpendiculares a la recta a, suficientemente alejadas del punto O, no encuentran la recta b (véase el teorema 54 del capítulo II o bien la proposición IV del § 8).

Sea M un punto arbitrario, que sea el pie de una perpendicular a la recta a que no corte la oblicua b. Sea M_0 un punto de la recta a tal que $OM_0 = x$ sea la cota inferior de las distancias OM; denotemos por b_0 la perpendicular a a en el punto M_0. Mostraremos que b_0 y b son paralelas. Para esto, hay que probar ante todo que b_0 y b no se cortan.

Supongamos lo contrario, es decir, que b_0 y b tienen un punto común N_0 (fig. 47a). Tomemos entonces sobre la recta b un punto N_1 de forma que N_0 esté entre O y N_1, y tracemos la perpendicular N_1M_1 a la recta a; hagamos $M_0M_1 = \varepsilon$. Entonces, si M es el pie de alguna perpendicular a la recta a que no corta b, será $OM > x + \varepsilon$, lo cual contradice la definición de x como cota inferior de las longitudes OM.

Demostremos ahora que b_0 es recta frontera en el conjunto de las rectas que pasan por M_0 y no cortan la recta b.

Sea $\bar{b}$ una semirrecta arbitraria que pasa por M_0 del mismo lado de la recta b_0 que el punto O, y del mismo lado de la recta a que el ángulo agudo α (fig. 47b). Tomemos sobre $\bar{b}$ algún punto $\bar{P}$ de modo que se encuentre dentro del ángulo α, y tracemos la perpendicular $\bar{P}\bar{M}$ a la recta a. Evidentemente, el punto $\bar{M}$ estará entre los puntos O y M_0 y, por consecuencia, la perpendicular $\bar{P}\bar{M}$ tendrá un punto común $\bar{N}$

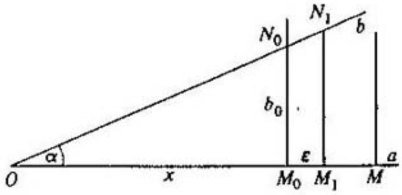


Fig. 47a

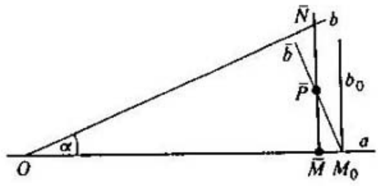


Fig. 47b

con la recta b. Como la semirrecta b interseca uno de los lados del triángulo $O\bar{M}\bar{N}$, precisamente, el lado $\bar{M}\bar{N}$, por el axioma de Pasch tendrá que intersecar uno de los otros dos lados de este triángulo; pero $\bar{b}$ no puede tener un punto común con el lado $O\bar{M}$. En consecuencia, $\bar{b}$ tiene un punto común con la recta b. Queda con esto demostrado el paralelismo entre las rectas b y b_0, con lo cual se ha demostrado, además, nuestra afirmación. Efectivamente, para un ángulo agudo α prefijado, resultó posible determinar un segmento $x = OM_0$ tal que $\alpha = \Pi(x)$, es decir, efectivamente $\Pi(x)$ toma todos los valores comprendidos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

De aquí sigue ya la continuidad de $\Pi(x)$, pues una función monótona que junto con dos valores cualesquiera toma todos los intermedios, es continua en todo su dominio.

Recapitulando todo lo expuesto, tendremos el

TEOREMA X. *La función* $\Pi(x)$ *está definida para todo x positivo, es monótona decreciente y continua*; $\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}$ *cuando* $x \to 0$, y $\Pi(x) \to 0$ *cuando* $x \to \infty$.

De que $\Pi(x) \to \frac{\pi}{2}$ cuando $x \to 0$, se desprende que en regiones pequeñas del espacio, la geometría de Lobachevski difiere poco de la de Euclides (pues para x pequeños el ángulo de paralelismo es próximo a un recto).

La dependencia entre las magnitudes lineales y las angulares, establecida por la función $\alpha = \Pi(x)$, confiere un carácter muy peculiar a la geometría de Lobachevski. Así, por ejemplo, en esta geometría no existe la semejanza entre figuras. Esto es fácil de prever: como las magnitudes angulares y las lineales están relacionadas por ecuaciones, entonces, si se dan los ángulos de un triángulo quedarán determinados sus lados, y triángulos con ángulos respectivamente iguales resultarán iguales entre sí. Más adelante (en el capítulo VIII, § 231) estableceremos esto con toda precisión y deduciremos fórmulas que expresan los lados de un triángulo como función de sus ángulos (véase también el § 61).

Otra particularidad importante de la geometría no euclidiana tiene que ver con la elección de la unidad de medición de longitudes. En la geometría de Euclides existen constantes absolutas de las magnitudes angulares, es decir, ángulos cuya construcción se puede describir de manera abstracta (independientemente de la interpretación concreta de los objetos geométricos); si bien esta construcción contiene elementos arbitrarios, éstos no influyen en la magnitud de los ángulos obtenidos, es decir, dichos ángulos resultan ser iguales entre sí. Como ejemplo, basta indicar el ángulo recto: si se fija éste como unidad de medida de ángulos, al efectuar las mediciones no habrá necesidad de fijar un «patrón» de ángulo recto, con el cual habrán de compararse los demás ángulos por superposición, pues el ángulo recto siempre puede determinarse por una construcción exacta.

Por el contrario, en la geometría euclidiana no existen constantes lineales absolutas. Para expresar las longitudes de todos los segmentos mediante números, es necesario convenir en la elección de la unidad de longitud, que bien puede ser cualquier segmento. Si alguien efectuase esta elección, no la podría describir, y a fin de compararla con otros segmentos tendría que EXHIBIR su patrón. Así, en la práctica, al medir longitudes se utilizan copias del metro patrón; pero la elección del patrón no está condicionada por ningún argumento geométrico.

Al contrario, en la geometría de Lobachevski, conjuntamente con constantes absolutas de las magnitudes angulares, existen también constantes lineales absolutas. Así, por ejemplo, el segmento x que satisface la ecuación $\Pi(x) = \dfrac{\pi}{4}$ está bien determinado, por cuanto la función $\Pi(x)$ lo está. Dicha función, como vimos, queda completamente determinada en toda la semirrecta numérica positiva por las propiedades geométricas del plano de Lobachevski, es decir, las propiedades de la variedad de objetos geométricos sujetos a los axiomas de la planimetría de Lobachevski. En el § 190 obtendremos una expresión para $\Pi(x)$ utilizando las funciones elementales, bien conocidas en el análisis matemático (véase asimismo el § 59).

4. Rectas y planos en el espacio de Lobachevski

§ 34. Daremos ahora una breve descripción de las particularidades de la posición recíproca de rectas y planos en el espacio de Lobachevski.

Ante todo, enumeraremos las proposiciones básicas de la estereometría absoluta que tendremos que utilizar en lo que sigue.

Sin detenernos a detallar los corolarios elementales de los axiomas I,1 — 8 y II,1 — 4, una parte de los cuales fue indicada en su oportunidad en el cap. II, referimos los teoremas siguientes.

1. *Sean dados un plano arbitrario α y dos rectas a, b, situadas en el plano α y que pasen por alguno de sus puntos O. Si la recta c es perpendicular en O a las rectas a y b, es también perpendicular a cualquier otra recta que está situada en el plano α y pasa por O.*

En este caso, la recta c se llama *perpendicular al plano α.*

2. *Por cada punto del espacio se puede trazar exactamente una recta perpendicular a un plano dado.*

3. *Por cada punto del espacio se puede trazar exactamente un plano perpendicular a una recta dada.*

Dos semiplanos que tengan una recta frontera común y no estén sobre un mismo plano, determinan un ángulo diedro. Los semiplanos que lo determinan se llaman sus *caras*, y la semirrecta frontera común, su *arista*.

Todo plano perpendicular a la arista de un ángulo diedro interseca las caras por dos semirrectas que forman *el ángulo lineal del ángulo diedro dado.*

Tiene lugar el teorema:

4. *Todos los ángulos lineales de un ángulo diedro dado son iguales entre sí.*

Dos ángulos diedros se dirán *iguales*, si sus ángulos lineales lo son.

Un ángulo diedro se llama *recto*, si lo son sus ángulos lineales.

Dos planos α y β que se cortan determinan dos pares de ángulos diedros opuestos por su arista. Si estos ángulos son rectos, los planos α y β se llaman *perpendiculares* entre sí.

Tienen lugar los teoremas:

5. *Si el plano α contiene alguna perpendicular al plano β, entonces α es perpendicular a β.* (Este teorema, evidentemente, es un caso particular del teorema 4.)

6. *Si el plano α es perpendicular a alguna recta perteneciente al plano β, entonces el plano α es perpendicular al plano β.*

7. *Por cada recta a se puede trazar un plano α perpendicular a un plano β dado y sólo un plano, si a no es perpendicular a β.* (El teorema 7 sigue de los teoremas 2 y 5.)

La recta a' de intersección de los planos α y β se llama *proyección* de la recta a sobre el plano β (si a no es perpendicular a β). Según el teorema 7, cada recta se puede proyectar unívocamente sobre cualquier plano no perpendicular a ella.

Las proposiciones enumeradas pertenecen a la geometría absoluta; las que siguen pertenecen ya esencialmente a la geometría de Lobachevski.

§ 35. Dos rectas que no se cortan y pertenecen a un mismo plano en el espacio de Lobachevski se llamarán *paralelas* o *divergentes*, si dentro del plano que determinan ambas éstas son paralelas o divergentes respectivamente, según la definición que dimos antes de estos conceptos en la planimetría plana.

Para lo que sigue es esencial establecer la transitividad de la relación de paralelismo, es decir, que dos rectas paralelas a una tercera en una misma dirección son paralelas entre sí en la misma dirección. Naturalmente, ahora tiene interés sólo el caso en que las tres rectas no pertenezcan a un mismo plano, pues ya hemos demostrado esta proposición en la planimetría (teorema V). Esta transitividad sigue directamente del siguiente lema.

LEMA IV. *La recta de intersección de dos planos que pasan por dos rectas paralelas en alguna dirección, es paralela a estas rectas en la misma dirección.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las rectas a y b, pertenecientes a un mismo plano γ y paralelas en alguna dirección. Sean α y β dos planos que pasan respectivamente por estas rectas, y c, la recta de intersección de los planos α y β (fig. 48; suponemos que los planos α y β no coinciden con el γ). Hay que probar que c es paralela a cada una de las rectas a y b en la misma dirección en que éstas lo son entre sí.

Demostremos, por ejemplo, el paralelismo de las rectas a y c. Ante todo, es claro que las rectas a y c no se cortan. En efecto, si se encontrasen en algún punto O, este punto sería común a los tres planos α, β, γ. Pero entonces también las rectas a, b tendrían un punto común O, contra lo supuesto.

Fijemos ahora sobre la recta c un punto arbitrario C y bajemos de éste la perpendicular CA sobre la recta a. El segmento CA forma dos ángulos adyacentes con la recta a; escojamos aquel que se encuentra del lado del paralelismo de las rectas a y b. Tracemos una semirrecta arbitraria c con origen en C y contenida dentro de este

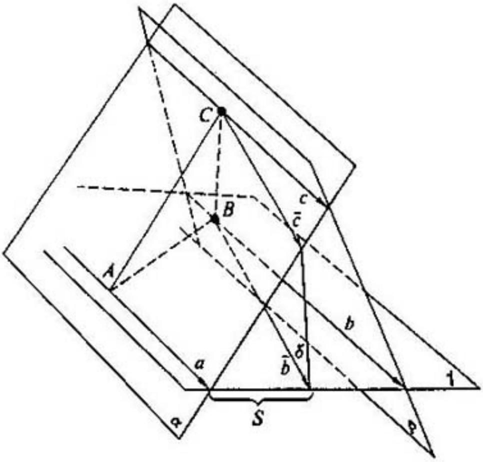


Fig. 48

ángulo. Para comprobar el paralelismo de las rectas c y a, hay que demostrar que la semirrecta $\bar{c}$ corta a a.

Fijemos un punto arbitrario B sobre la recta b y consideremos el semiplano δ, determinado por la recta CB y la semirrecta $\bar{c}$. Este semiplano interseca el plano γ según una semirrecta $\bar{b}$, que estará en el interior del ángulo formado por el segmento BA y la dirección de paralelismo de la recta b con la recta a. Como a y b son paralelas por la condición, la semirrecta $\bar{b}$ intersecará a en algún punto S; éste será un punto común de los tres planos α, γ y δ. Por esto, la semirrecta $\bar{c}$ tendrá que cortar a, y el lema queda demostrado.

TEOREMA XI. *Dos rectas paralelas a una tercera en una misma dirección son paralelas entre sí, en la misma dirección.*

DEMOSTRACIÓN. Para el caso en que las tres rectas están sobre un mismo plano, este teorema ya fue probado en el § 30. Consideremos ahora las rectas a, b y c, que no están sobre un mismo plano. Supongamos que b y c son paralelas a la recta a en alguna dirección. Hay que demostrar que b y c son paralelas entre sí en la misma dirección en que lo son con la recta a.

Para demostrar esto, fijemos sobre la recta c algún punto M y tracemos el plano β que contiene este punto y la recta b. Sea α el plano en que se encuentran las rectas a y c. Como b no está en el plano α, los planos α y β serán diferentes. Por el lema precedente, la recta c' de intersección de los planos α y β es paralela a las rectas a y b en la misma dirección en que éstas son paralelas entre sí. La recta c, por la condición, es paralela a la recta a en esta misma dirección. Pero por el punto M, como sabemos, puede pasar únicamente una recta paralela a a en una dirección determinada. En consecuencia, las rectas c y c' coinciden, es decir, c es la recta de intersección de los planos α y β y, por lo que ya vimos, es paralela a la recta b.

Queda así demostrada la transitividad de la relación de paralelismo para la geometría del espacio. Aquí debe siempre tenerse en cuenta que las direcciones de paralelismo de las rectas consideradas tienen que coincidir: dos rectas paralelas a una tercera en direcciones diferentes, nunca serán paralelas entre sí. Esto se demuestra fácilmente si se tiene en cuenta que las rectas paralelas se aproximan indefinidamente en la dirección de paralelismo y divergen indefinidamente en la dirección opuesta.

Pasando al estudio de la posición recíproca de rectas y planos, indicaremos sólo los tres casos posibles aquí.

1. La recta y el plano tienen un punto común.

2. La recta es paralela a su proyección en el plano; en este caso, se dice que la recta es paralela al plano.

3. La recta diverge con su proyección en el plano; en este caso, se dice que la recta y el plano son divergentes.

Indiquemos un teorema cuya demostración se obtiene de inmediato del lema IV.

TEOREMA XII. *Una recta es paralela a un plano si es paralela a alguna recta perteneciente al plano.*

El lector puede fácilmente imaginarse las diferencias cualitativas en la posición de rectas paralelas a un plano y rectas divergentes con él, si toma en cuenta lo expuesto en el § 32.

Pasemos ahora a analizar los casos posibles de posición recíproca de planos. Distinguiremos tres casos posibles.

1er CASO Los dos planos tienen una recta común.

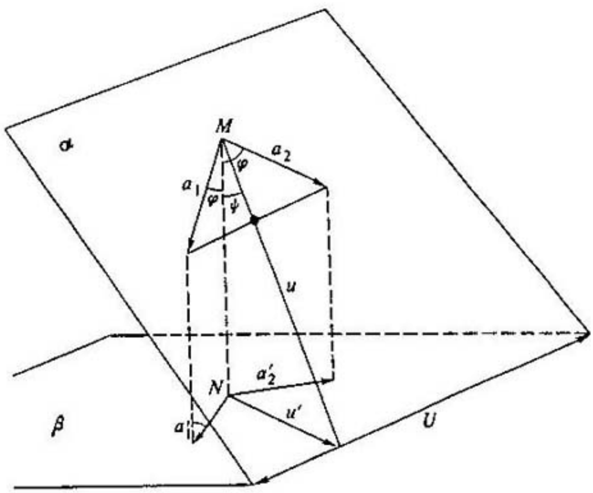


Fig. 49

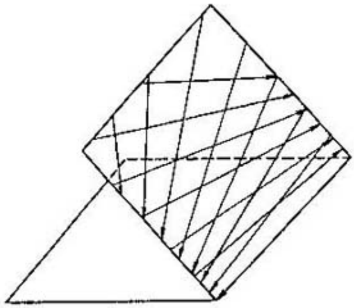


Fig. 50

Supongamos que los planos α y β tienen la recta común a. Entonces, por ejemplo, en el plano α se pueden trazar, por un punto arbitrario, dos rectas paralelas a la recta a en direcciones diferentes. En virtud del teorema XII, estas rectas serán paralelas al plano β. Entonces, *en cada uno de los dos planos secantes, por cada punto que no esté en la línea de corte, pasan dos rectas paralelas al otro plano.*

No es difícil establecer que *esta propiedad caracteriza los planos de intersección.* En efecto, sean dados dos planos α y β y supongamos que en el plano α por cada punto M pasan dos rectas a_1 y a_2 paralelas al plano β (fig. 49). Demostremos que los planos α y β se cortan. Evidentemente, las rectas a_1 y a_2 forman ángulos agudos iguales con la perpendicular MN bajada desde M sobre el plano β; la magnitud común de éstos es $\varphi = \Pi(x)$, donde x es la longitud de la perpendicular MN. Tracemos ahora en el plano α por M alguna recta u de forma que esté dentro del ángulo determinado por las rectas a_1 y a_2, si se las supone orientadas hacia el lado de paralelismo. Como recta u podemos tomar, en particular, la bisectriz de este ángulo. Sea ψ el ángulo agudo que la recta u forma con el segmento MN. Por consideraciones elementales sigue que $\psi < \varphi$, es decir, es menor que el ángulo de paralelismo $\Pi(x)$. Consecuentemente, la recta u tendrá que intersecar su proyección sobre el plano β en algún punto que será común de los planos α y β. De aquí concluimos inmediatamente que los planos α y β tienen una recta común.

Hemos obtenido, así, el siguiente teorema.

TEOREMA XIII. *Para que dos planos se corten, es necesario y suficiente que por cualquier punto de uno de ellos pasen dos rectas paralelas al otro* (fig. 50).

2do CASO. Los dos planos están situados de manera que por algún punto de uno de ellos pasa exactamente una recta paralela al otro; en este caso se dice que los planos son *paralelos.*

Ante todo, es claro que a la condición enunciada los planos no pueden tener puntos comunes, es decir, no pueden ser de intersección, ya que en caso contrario por cualquier punto de cada uno de ellos pasarían dos rectas paralelas al otro.

Ahora bien, si se dan dos planos α y β y si por el punto M en el plano α pasa exactamente una recta a paralela al plano β, es decir, paralela a su proyección a' sobre el plano β, entonces en el plano α por *cada* uno de sus puntos pasará exacta-

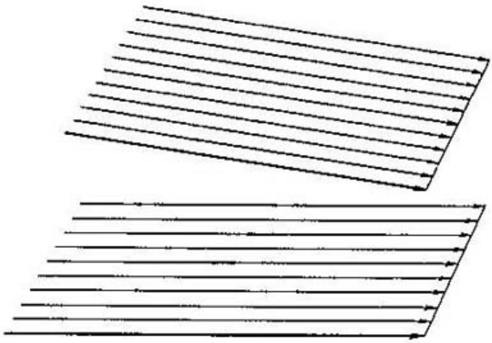


Fig. 51

mente una recta paralela al plano β. En efecto, por cada punto de α se puede trazar una recta paralela a a, en la misma dirección en que ésta es paralela a la recta a'. Por el teorema XI, esta recta es paralela a a', y entonces por el XII, es paralela al plano β.

No puede haber otra recta que esté en el plano α, pase por el mismo punto y sea paralela al plano β, pues de otro modo la recta paralela a ella que pasa por M sería, por las mismas razones, paralela al plano β y, al mismo tiempo, sería diferente de la recta a, cosa imposible según la hipótesis.

El plano α queda, así, cubierto por una familia de rectas paralelas al plano β. No sería difícil mostrar que el plano β a su vez está cubierto por una familia de rectas paralelas a α (fig. 51).

Evidentemente, ambos planos se aproximan indefinidamente en la dirección de paralelismo de las rectas de las familias indicadas.

3er CASO. Los dos planos están situados de modo que ninguno de ellos contiene rectas paralelas al otro; en este caso los planos se llaman *divergentes*.

Dos planos divergentes tienen siempre una perpendicular común y, recíprocamente, dos planos perpendiculares a una misma recta son divergentes. Dos planos divergentes se alejan indefinidamente uno del otro en todas las direcciones, a partir de la perpendicular común (de aquí el nombre de divergentes). No vamos a demostrar las últimas afirmaciones; el lector las puede hacer como ejercicios sencillos.

Los tres casos de posición recíproca de los planos pueden imaginarse bien, recurriendo a la siguiente consideración.

Sea α_0 algún plano; A, un punto que no le pertenece. Bajemos de A sobre el plano α_0 la perpendicular AP y tracemos, además, por A todas las rectas paralelas a α_0. Todas ellas forman un mismo ángulo con AP, igual a $\Pi(AP)$, formando, por ello, un cono circular K con eje AP (fig. 52).

Un plano que pasa por A e interseca el cono K por dos generatrices contiene dos rectas que pasan por A y son paralelas al plano α_0 (precisamente, estas dos generatrices). Este plano se corta con el α_0 (en la fig. 52 es el plano α_1). Su recta de intersección con α_0 se ve desde A bajo el ángulo determinado por las dos generatrices antedichas del cono K.

Un plano que pase por A y sea tangente al cono K según una cierta generatriz, contendrá sólo una recta que pase por A y sea paralela a α_0 (la generatriz de contacto). Este plano es paralelo a α_0 (el plano α_2 de la fig. 52).

Por último, un plano que pase por A y no contenga ninguna generatriz del cono K, no tendrá rectas paralelas al plano α_0; este plano y el α_0 divergen (el plano α_3 de la fig. 52).

Mostraremos un teorema que será necesario más adelante.

TEOREMA XIV. *Dados un plano y una recta paralela a él, existe exactamente un plano que pasa por esta recta y no interseca el plano dado.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y α la recta y el plano dados, respectivamente. Fijemos sobre la recta a un punto arbitrario A y tracemos por él todas las rectas paralelas al plano α; éstas formarán un cono circular K con vértice en A.

Si el plano que pasa por la recta a no corta al plano α, no puede contener dos generatrices del cono y, consecuentemente, tendrá que ser tangente a él a lo largo de la generatriz a. Pero por cada generatriz del cono circular pasa exactamente un plano tangente, de donde sigue nuestro teorema.

Concluiremos con este análisis la revista comenzada en el § 28 de las proposiciones básicas de la teoría de las paralelas de Lobachevski.

A pesar de su peculiaridad, en lo expuesto se pueden encontrar muchas similitudes con la teoría euclidiana de las paralelas.

En la siguiente sección estudiaremos una serie de objetos importantes de la geometría de Lobachevski que no tienen ningún análogo en la de Euclides.

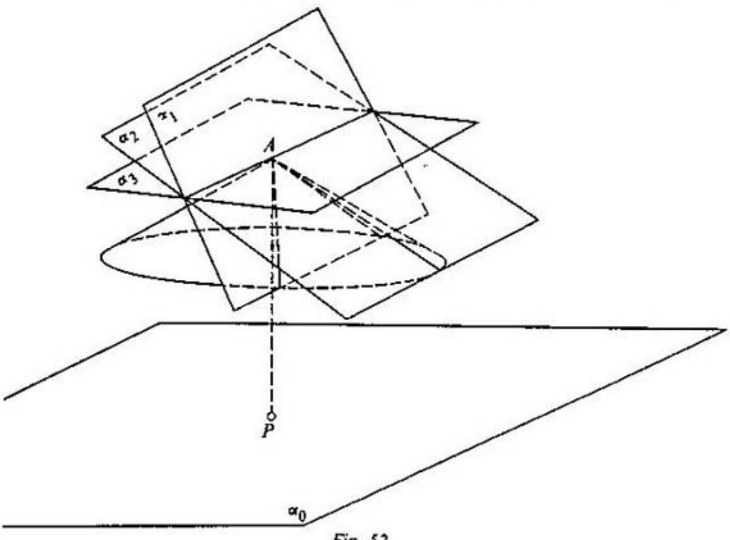


Fig. 52

5. Equidistante y oriciclo

§ 36. En la presente sección se discutirán algunas curvas características de la geometría no euclidiana. Llegaremos a su definición considerando los tipos básicos de movimientos del plano de Lobachevski en sí mismo.

Al final del § 19 demostramos que cada movimiento de una figura puede componerse de una traslación según una recta y un giro alrededor de un punto. El movimiento fue definido entonces como la construcción, dada una figura, de otra congruente a ella. No se hizo diferencia entre las figuras propiamente congruentes y las mutuamente especulares. Si se consideran sólo los movimientos en el sentido directo de la palabra, es decir, si se excluyen las reflexiones especulares se puede enunciar un teorema mucho más fuerte que el citado ahora.

Así, en la planimetría de Euclides tiene lugar el siguiente teorema (que es bien conocido en cinemática como teorema de d'Alembert).

Cada movimiento de la figura (o de todo el plano) es o bien un giro alrededor de un punto, o bien una traslación según una recta.

En otras palabras, un giro y una traslación no sólo permiten obtener mediante su composición cualquier movimiento, sino que son inclusive los únicos tipos posibles de movimientos euclidianos.

Consideraremos ahora los giros del plano euclidiano alrededor de algún punto O. Sea k una circunferencia arbitraria con centro O. Al girar el plano alrededor de O, todos los puntos de la circunferencia k se desplazan, pero permanecen sobre la misma circunferencia. La circunferencia, entonces, globalmente no cambia su posición en el plano, sino que desliza sobre sí misma.

Una línea que en algún movimiento del plano conserve su posición se llamará *invariante* con respecto a este movimiento.

Evidentemente, las circunferencias concéntricas de centro común O son invariantes con respecto a todos los giros alrededor de O.

Si se efectúan traslaciones del plano euclidiano según alguna recta u, las líneas invariantes serán rectas paralelas a u.

En la planimetría de Lobachevski existen tres tipos básicos de movimientos:

1. Giro alrededor de un punto: las curvas invariantes con respecto a todos los giros alrededor de un punto O en la planimetría de Lobachevski son, al igual que en la planimetría de Euclides, circunferencias con centro O, llamadas también *ciclos*.

2. Traslación a lo largo de una recta: las líneas invariantes con respecto a todas las traslaciones a lo largo de una recta u en la planimetría de Lobachevski no son rectas, como en el caso euclidiano, sino curvas particulares, llamadas *equidistantes*, o bien curvas de distancia, o bien *hiperciclos*.

La equidistante es el lugar geométrico de los puntos situados a un mismo lado de una recta u a distancias iguales de ella. La recta u se denomina *base* de la equidistante, y la magnitud h de la distancia, *altura*. Cada recta, evidentemente, puede ser considerada como una equidistante de altura $h = 0$.

Se prueba directamente que las equidistantes son invariantes con respecto a traslaciones. En efecto, al trasladar el plano según una recta u, cada punto de una equidistante con base u se desplaza de manera que su distancia a u permanece invariable. Consecuentemente, este punto permanece todo el tiempo sobre la equidistante que, entonces, globalmente no cambia su posición.

Es fácil ver, asimismo, que las equidistantes son líneas curvas. Además, tiene lugar el siguiente teorema.

Cada recta tiene con una equidistante no más de dos puntos comunes.

La demostración se hace en dos palabras. Supongamos que alguna recta tenga tres puntos comunes A, B, C con una equidistante, que han sido denotados de forma que B esté entre A y C. Si A', B', C' son las proyecciones de los puntos A, B, C sobre la base, de acuerdo con la definición de equidistante los cuadriláteros $ABB'A'$ y $BCC'B'$ son de Saccheri (pues los segmentos AA', BB' y CC' son iguales). Como en la geometría de Lobachevski tiene lugar la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri, la suma de los ángulos ABB' y $B'BC$ es menor que dos rectos. Pero como los puntos A, B, C están alineados, la suma de estos mismos ángulos tendrá que ser igual a dos rectos. La contradicción obtenida demuestra el teorema.

3. El tercer tipo de movimiento básico del plano de Lobachevski sobre sí mismo puede denominarse giro alrededor de un punto del infinito.

Para describir este tipo de movimiento con suficiente claridad, necesitaremos dos teoremas referentes a las «secantes de igual pendiente».

§ 37. Un segmento AB cuyos extremos están sobre las rectas a y b se llama secante de igual pendiente de las rectas a, b, si forma con ellas los ángulos correspondientes internos iguales *).

TEOREMA XV. *Cualesquiera que sean dos rectas paralelas, por cada punto de cualquiera de ellas se puede trazar exactamente una secante de igual pendiente de ambas.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a y b dos rectas paralelas arbitrarias; sea S algún punto igualmente alejado de las rectas a y b (la existencia de tal punto fue establecida en el § 30, en la demostración del teorema IV) y bajemos de S las perpendiculares SP y SQ sobre estas rectas. Tracemos, ahora, la bisectriz del ángulo PSQ, que denotaremos con g. Las rectas a y b son simétricas con respecto a g. Por esto, si A es un punto cualquiera de la recta a, el punto B, simétrico a A con respecto de g, estará sobre la recta b. La recta AB será, precisamente, una secante de igual pendiente de las rectas a y b. Es fácil ver que no existe otra secante de igual pendiente de estas rectas que pase por A. Efectivamente, si giramos la recta AB alrededor del punto A, uno de los dos ángulos que ésta forma con las rectas a, b disminuye, y el otro aumenta, de forma que la recta girada ya no puede ser secante de igual pendiente.

TEOREMA XVI. *Sean dadas en el plano tres rectas a, b, c paralelas entre sí en alguna dirección, que pasan por los puntos A, B, C respectivamente. Entonces, si AB es secante de igual pendiente de las rectas a y b, BC, secante de igual pendiente de b y c, AC será secante de igual pendiente de a y c.*

Supongamos primeramente que b está entre las rectas a y c (fig. 53). Sean p y q las perpendiculares en los puntos medios de los lados AB y BC del triángulo ABC, y P y Q, los puntos de su intersección con el lado AC.

Como el punto P está fuera de la franja del plano determinada por las rectas b y c, $\angle PBC$ será mayor que $\angle PCB$. De aquí sigue que el segmento PB es menor que el PC; pero $PB = AP$, por lo cual AP es menor que PC. Razonando análogamente

*) Las secantes de igual pendiente ya fueron mencionadas en el § 30. Ahora nos será más cómodo llamar así no a la recta, sino al segmento.

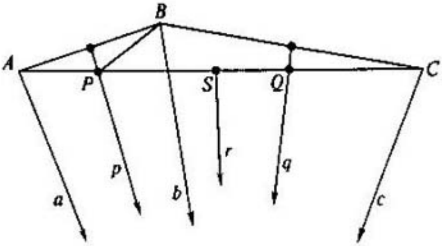


Fig. 53

hallamos que CQ es menor que QA, en virtud de lo cual el punto medio S del lado AC estará entre los puntos P y Q.

Obsérvese ahora que la recta p *es paralela* a las rectas a y b en la misma dirección en que éstas lo son entre sí. Efectivamente, la recta p no puede intersecar ninguna de las rectas a, b: si cortara, digamos, a, entonces, por la simetría de las rectas a y b con respecto a p, también b tendría que pasar por el punto de intersección. Las rectas a y b tendrían, así, un punto común, cosa excluida por la condición de paralelismo. Por otra parte, la recta p no puede ser divergente con alguna de las rectas a, b, pues estas rectas, al ser paralelas, se aproximan indefinidamente en dirección de paralelismo; como p permanece entre ambas, tendrá que aproximarse a cada una de ellas (para demostrar esto con todo rigor, es suficiente utilizar el lema III del § 30). Análogamente, la recta q es paralela a b y c. Todas las rectas a, b, c, p, q, son, entonces, paralelas entre sí (en una misma dirección).

Levantemos ahora en el punto S la perpendicular r al lado AC; esta recta no puede cortar ninguna de las rectas p, q. En efecto, si r cortase, por ejemplo, p en algún punto O, este punto sería el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, en cuyo caso por O tendría que pasar la recta q; por consiguiente, p y q tendrían un punto común O, cosa excluida, por ser paralelas. Más arriba mostramos que el punto S está entre P y Q. De aquí y de la observación que acabamos de hacer sigue que r está entre p y q; y siendo p y q paralelas, r será paralela a ellas en la misma dirección en que éstas lo son entre sí. Así, pues, las seis rectas a, b, c, p, q, r son paralelas entre sí en una misma dirección. Para nuestros fines es fundamental que la recta r, perpendicular al segmento AC en su punto medio, sea paralela a las rectas a y c; habiendo establecido esto, de hecho hemos concluido la demostración del teorema. Efectivamente, de aquí sigue que cada uno de los ángulos agudos que las rectas a y c forman con el segmento AC, es igual a $\Pi\left(\frac{AC}{2}\right)$, por lo cual estos ángulos son iguales entre sí.

Dicho de otro modo, AC es secante de igual pendiente de las rectas a y c.

Ahora hay que analizar el caso en que la recta b no está entre a y c.

Sean AB y BC secantes de igual pendiente de las rectas respectivas. Supongamos que AC no es secante de igual pendiente de las rectas a y c. Alguna de las rectas a, b, c está entre las otras dos; si tal recta es, por ejemplo, a, trazamos por el punto A la secante de igual pendiente AC' de las rectas a y c. En virtud de lo demostrado arriba, BC' será secante de igual pendiente de las rectas b y c; pero, por la condición, BC es secante de igual pendiente de las mismas rectas. Se obtiene una contradicción con el teorema XV.

§ 38. Definiremos ahora un giro con centro en un punto del infinito.

Sea dado un sistema de todas las rectas posibles, paralelas entre sí en una misma dirección. Imaginarémonos a estas rectas convergentes en la dirección de su paralelismo al punto del infinito O_∞ (al decir «punto del infinito», estamos únicamente introduciendo un término, cómodo, que, en esencia, no significa otra cosa que el sistema dado de rectas).

Llamaremos *giro* con respecto al punto del infinito O a un movimiento del plano sobre sí mismo, tal que alguna recta a del sistema dado coincide con otra recta a' del mismo sistema (de forma que a' es paralela a a) y algún punto A de la recta a se desplaza al punto A' de a', de forma que el segmento AA' sea secante de igual pendiente de las rectas a y a' (en virtud del teorema XV, la posición del punto A' sobre la recta a' queda totalmente determinada por la posición de A sobre a); supongamos, además, que el semiplano, con respecto de la recta a, que no contiene a', se superpone al semiplano, con respecto de la recta a' que contiene a. En este caso,

a) *todo otro punto de la recta a con el punto a que se desplaza determina una secante de igual pendiente de las rectas a y a'*;

b) *cada recta b del sistema dado coincide en este movimiento con alguna recta b' de este mismo sistema (de forma que b' es paralela a b) y en esta superposición los puntos correspondientes de las rectas b y b' son extremos de secantes de igual pendiente de estas rectas.*

La demostración de la afirmación a) es evidente. En efecto, si A_1 es un punto arbitrario de la recta a, y A_1' es el punto sobre la recta a' a que se desplaza el punto A_1, entonces $AA_1 \equiv A'A_1'$ (fig. 54). Por esto, los puntos A_1 y A_1' son simétricos con respecto a la perpendicular en el punto medio del segmento AA' (recuérdese que AA' es la secante de igual pendiente de las rectas a y a'). De la simetría de las rectas a, a' y los puntos A_1 y A_1' con respecto a dicha perpendicular, se desprende que A_1A_1' es una secante de igual pendiente de las rectas a y a'. Queda con esto demostrada la afirmación a).

La demostración de la proposición b) es un tanto más compleja. Introduciremos, ante todo, algunas notaciones. Precisamente, sea I el semiplano, con respecto a la recta a, que no contiene a', y II, el otro semiplano; sean, además, I′ el semiplano, con respecto a la recta a', que contiene a, y II′ el complementario. En el movimiento considerado del plano sobre sí mismo, la recta a se superpone sobre la a'; el semiplano I, sobre el I′ y el II, sobre el II′. Tomemos ahora en el sistema dado de rectas alguna recta b, digamos, en el semiplano I. Tracemos desde A la secante de igual pendiente a las rectas a y b; sea B el extremo de dicha secante (fig. 55). Determinemos el punto a donde debe trasladarse el punto B. Con este fin, tracemos del punto A', en el semiplano I′, un segmento que es igual a AB y forma con la recta a' el mismo ángulo que AB forma con la recta a (tomamos los ángulos del lado del paralelismo de las rectas de nuestro sistema); sea B' el extremo del segmento construido. Evidentemente, B' es el punto a donde se traslada el punto B. Tracemos, al fin, una recta b' por B', de manera que forme con el segmento $A'B'$ el mismo án-

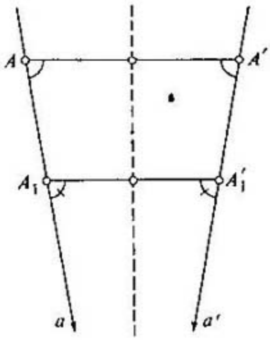


Fig. 54

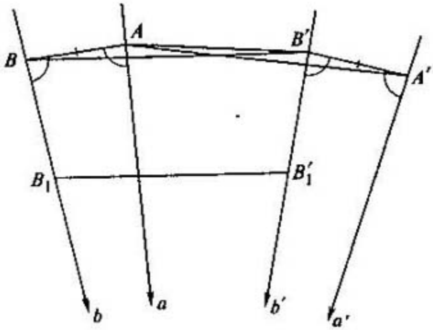


Fig. 55

gulo que b forma con AB. Evidentemente, b' es la recta sobre la cual se superpondrá la recta b. Además, es claro que $A'B'$ es secante de igual pendiente de las rectas a', b', pues AB lo es de las rectas a, b.

Es claro, asimismo, que la recta b' es paralela a a' (en la dirección dada), pues b es paralela a a. Consecuentemente, b' pertenece al sistema dado de rectas. Demostremos ahora que BB' es secante de igual pendiente de las rectas b, b'; esto sigue del teorema XVI. En efecto, como AA' es secante de igual pendiente de las rectas a, a' y $A'B'$ lo es de las rectas a', b', por el teorema XVI, AB' será secante de igual pendiente de las rectas a, b'. Pero AB es una tal secante de a, b; por consecuencia, en virtud del mismo teorema XVI, BB' será secante de igual pendiente de la rectas b, b'. Sea ahora B_1 un punto cualquiera de la recta b; B_1', el punto correspondiente sobre b' durante la superposición. Entonces $BB_1 \equiv B'B_1'$; de aquí sigue que B_1B_1' es, asimismo, secante de igual pendiente de las rectas b y b' (véase la demostración de la proposición a)).

Queda así demostrada la afirmación b).

Ahora es fácil comprender por qué este tipo de movimiento del plano en sí mismo es llamado giro con respecto a un punto del infinito. Es que si B es un punto arbitrario y B' es un punto a donde se traslada durante este movimiento, el «triángulo» infinito $BB'O_\infty$ (es decir, la figura formada por el segmento BB' y las semirrectas que parten de B, B' en el sentido de paralelismo del sistema dado de rectas) es similar a un triángulo isósceles ordinario. La similitud consiste en que el lado BB' forma ángulos iguales con los «lados» BO_∞ y $B'O_\infty$.

Así, pues, el punto del infinito O_∞ es en cierto sentido análogo al centro de un giro habitual.

Las líneas invariantes con respecto a giros alrededor de un punto del infinito fueron llamadas por Lobachevski *oriciclos*, o bien *circunferencias límite*.

Indicaremos ahora cómo construir estas líneas estableciendo, así, su existencia.

Sea dado algún sistema de todas las rectas paralelas entre sí en una dirección dada. Tomemos alguna recta a de este sistema, y un punto A sobre ella (fig. 56). Tracemos de A la secante de igual pendiente de la recta a y de otra recta m arbitraria del sistema dado. Denotemos por M el extremo de esta secante perteneciente a la recta m. Por el teorema XV, el punto M queda determinado de manera unívoca.

Ahora moveremos la recta m, sin sacarla del sistema considerado de rectas, es decir, conservando su paralelismo con la recta a.

El punto M describirá entonces una curva bien determinada, que es, precisamente, el oriciclo.

En otras palabras, *el oriciclo es el lugar geométrico de los extremos de las secantes de igual pendiente trazadas desde algún punto A de una recta a a todas las rectas paralelas a ella en una dirección determinada.* El propio punto A también se considera perteneciente al oriciclo.

Por cuanto la recta a una vez fijada determina el sistema de rectas paralelas a ella en una dirección dada, es evidente que *el oriciclo queda bien determinado al fijar el punto A y la recta orientada a, que llamaremos eje.*

Debemos mostrar que el oriciclo, cuya construcción acabamos de describir, posee efectivamente la propiedad de invariancia con respecto a los giros alrededor del punto del infinito O_∞, hacia el cual está dirigido su eje a.

Sean B y C puntos arbitrarios del oriciclo; b y c, rectas que pasan por estos puntos y están dirigidas hacia O_∞ (es decir, son paralelas a la recta a en la dirección dada). Por construcción del oriciclo, AB es secante de igual pendiente de las rectas a y b; AC lo es de las rectas a y c; en virtud del teorema XVI, de aquí se deriva que BC es secante de igual pendiente de las rectas b y c. Por esto, si se efectúa un giro del plano alrededor de O_∞ que lleve la recta b a la c, el punto B al desplazarse ocupa el lugar del punto C. Así, en este tipo de giros cada punto del oriciclo permanece sobre él; el oriciclo viene a girar sobre sí mismo.

De aquí sigue, en particular, que todos los puntos del oriciclo tienen propiedades análogas, de modo que la construcción que hicimos a partir del punto A se puede efectuar partiendo de cualquier otro punto de éste.

En otras palabras:

Cada recta paralela al eje a del oriciclo en la dirección escogida sobre dicho eje, interseca al oriciclo en un único punto y es, asimismo, eje de este oriciclo.

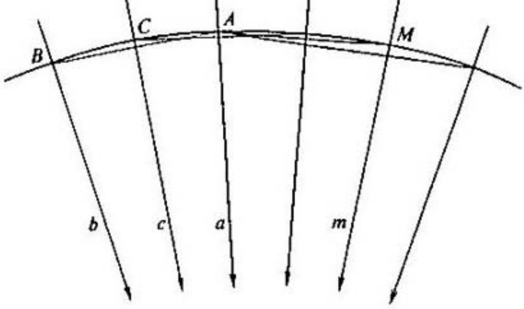


Fig. 56

Con respecto a los oriciclos vale un teorema análogo al que hemos demostrado para las equidistantes.

Toda recta puede tener con un oriciclo no más de dos puntos comunes.

De aquí se desprende, en particular, que *el oriciclo es una línea curva.*

La demostración puede ser reproducida fácilmente por el lector.

§ 39. Tomemos alguna equidistante con base u. Sea A un punto arbitrario de ella, A', su proyección sobre la base, de manera que AA' es la altura de la equidistante (fig. 57). Tracemos, además, por A la recta t perpendicular a la altura AA'. No es difícil establecer que todos los puntos de la equidistante, diferentes de A, se hallan de un mismo lado de la recta t, precisamente, de aquel que contiene la base u. En efecto, si M es algún punto de la equidistante y M' es su proyección sobre u, $AMM'A'$ será un cuadrilátero de Saccheri y $\angle A'AM$, como ángulo de su base superior, será agudo. Por lo tanto, el punto M está del mismo lado de la recta t que el punto A'. Podemos, así, decir que la recta t es recta de apoyo de la equidistante dada *). Ahora mostraremos que *t es, además, tangente.* Consideremos la secante AM y denotemos por α el ángulo $\angle A'AM$, y por 2δ, la longitud del segmento AM. Evidentemente, la perpendicular por el punto medio del segmento AM y la altura AA' son rectas divergentes, pues ambas son perpendiculares a la base. Por esto, α es mayor que el ángulo de paralelismo para el segmento δ, es decir

$$\alpha > \Pi(\delta).$$

Por otro lado, α es un ángulo agudo, de modo que tienen lugar las desigualdades

$$\Pi(\delta) < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Si el punto M, al desplazarse sobre la equidistante, tiende a A, entonces $\delta \to 0$ y, en virtud del teorema X, $\lim\limits_{\delta \to 0} \Pi(\delta) = \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente,

$$\lim_{M \to A} \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Con esto hemos probado que si $M \to A$, la secante AM tiende a una posición límite que es, precisamente, la recta t.

El resultado obtenido puede expresarse así: *cada altura de la equidistante es su normal.* De la discusión precedente sigue, también, que la equidistante tiene en cada punto la concavidad dirigida hacia la base.

Hagamos ahora un análisis similar para el oriciclo.

Consideremos algún oriciclo determinado por el punto A y la recta a (fig. 58). Convendremos en considerar sobre el eje a, así como también sobre cualquier otro eje del oriciclo, positiva la orientación en que este eje es paralelo a los demás ejes del oriciclo. Tracemos por A una recta t perpendicular al eje a. No es difícil establecer que todos los puntos del oriciclo diferentes de A están a un mismo lado de la recta t, precisamente, del lado correspondiente a la orientación positiva de la recta a. En efecto, sea M un punto arbitrario del oriciclo, y m, el eje que pasa por M. Sea α el

---

*) Una recta se llama recta de apoyo de una línea dada, si contiene al menos un punto de ésta y si de un lado de esta recta no hay puntos de la línea.

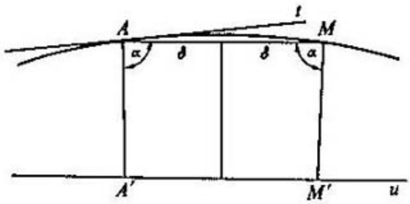


Fig. 57

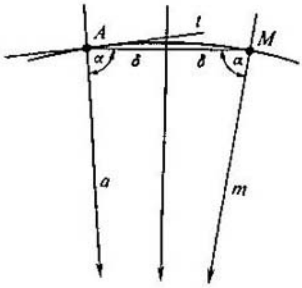


Fig. 58

ángulo que forma el segmento AM con el sentido positivo del eje a, y sea 2δ la longitud del segmento AM. Como, por definición del oriciclo, AM es secante de igual pendiente de las paralelas a y m, la perpendicular al segmento AM, levantada en su punto medio, es paralela a cada una de las rectas a y m. Por esto, α es el ángulo de paralelismo para el segmento δ:

$$\alpha = \Pi(\delta).$$

De aquí podemos concluir, primeramente, que α es agudo. Por consecuencia, cualquier punto M del oriciclo se encuentra efectivamente del lado de la recta t hacia el cual está dirigido el sentido positivo del eje a. Dicho de otra manera, t es recta de apoyo del oriciclo. Pero es fácil verificar que t es, asimismo, tangente. Para esto sólo hay que tomar en consideración la igualdad ya conocida

$$\lim_{\delta \to 0} \Pi(\delta) = \frac{\pi}{2}$$

la cual implica que cuando $M \to A$, la secante AM tiene por posición límite la recta t.

El último resultado se puede enunciar, también, como sigue: *cada eje del oriciclo es su normal.*

Del análisis precedente se deriva también que en cada punto del oriciclo su concavidad está dirigida hacia el sentido positivo del eje.

Indicaremos dos propiedades comunes para la circunferencia, el oriciclo y la equidistante:

1. Cada una de estas curvas es simétrica con respecto a cualquiera de sus normales.

Por esto, a veces llamaremos ejes a las normales de la circunferencia y la equidistante, al igual que las del oriciclo.

2. Las cuerdas de estas curvas son secantes de igual pendiente de las normales que pasan por sus extremos. Comparando la circunferencia, el oriciclo y la equidistante, podemos describir las familias de sus normales como sigue: todas las normales de la circunferencia convergen a un mismo punto; todas las del oriciclo son paralelas entre sí en alguna dirección (o, como se suele decir, convergen a un mismo punto del infinito); todas las normales de la equidistante son perpendiculares a una misma recta y, en consecuencia, divergen.

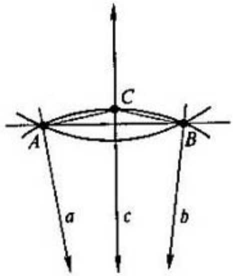


Fig. 59

En la geometría euclidiana, el conjunto de rectas que pasan por un punto, o bien el conjunto de rectas paralelas, se llama *haz*. Trasladando este concepto a la geometría de Lobachevski, llamaremos haz a todo conjunto de rectas que pasan por un mismo punto, o bien todo conjunto de rectas paralelas entre sí en una dirección determinada, o bien de rectas perpendiculares a alguna recta fija. En el primer caso llamaremos *elíptico* al haz, en el segundo, *parabólico*, en el tercero, *hiperbólico*. Basándonos en el análisis precedente, podemos entonces decir que *las circunferencias, los oriciclos y las equidistantes son las trayectorias ortogonales de haces elípticos, parabólicos e hiperbólicos, respectivamente.*

§ 40. Es esencial destacar que mientras las circunferencias se diferencian unas de otras por la magnitud de su radio, y las equidistantes, por la de su altura, *todos los oriciclos son congruentes entre sí.*

En efecto, hemos visto más arriba que un oriciclo queda totalmente determinado si se dan un punto de éste y el eje que pasa por él. Por esto, si movemos el plano de modo que un punto y el eje que pasa por él de un oriciclo coincidan respectivamente con un punto y el eje de algún otro, ambos oriciclos coincidirán (las propiedades de los movimientos que hay que utilizar en este razonamiento quedan aseguradas por el teorema C del § 19).

Demostremos, además, el teorema siguiente.

TEOREMA XVII. *Cualesquiera que sean dos puntos A y B del plano, por ellos pasan exactamente dos oriciclos, que son simétricos con respecto a la recta AB.*

DEMOSTRACIÓN. Tracemos la perpendicular c en el punto medio del segmento AB (fig. 59) y fijemos sobre ella alguno de sus dos sentidos. Tracemos, además, por A y B las rectas a y b, paralelas a c en la dirección fijada. Sea AC la secante de igual pendiente de las rectas a y c. Entonces, por el teorema XVI, BC será secante de igual pendiente de b y c. Evidentemente, el oriciclo determinado por el punto C y el eje c pasará por los puntos A y B.

Si se toma el sentido opuesto sobre la recta c y se repite esta construcción, se obtiene otro oriciclo, simétrico del primero con respecto a AB.

Demostremos, ahora, que no hay otros oriciclos que pasen por los puntos A y B. Con este fin, suponemos que existe algún oriciclo L con cuerda AB, y denotemos con a y b los ejes de éste que pasan por los extremos de dicha cuerda. Las rectas a y

b tienen que ser paralelas y formar ángulos iguales con el segmento AB. Por esto, la perpendicular c en el punto medio de AB es paralela a cada una de las rectas a, b. Pero, en tal caso, las rectas a y b quedan totalmente determinadas por la dirección de paralelismo hacia la recta c; por consiguiente, para la posición de a y b sólo son posibles los dos casos considerados más arriba. Así, pues, L coincide necesariamente con alguno de los dos oriciclos cuya construcción fue descrita en la primera parte de la demostración.

El teorema demostrado puede presentarse también así:

TEOREMA XVIII. *Los arcos de oriciclo determinados por cuerdas congruentes son congruentes entre sí.*

6. Superficie equidistante y orisfera

§ 41. El análogo espacial de la circunferencia es la esfera. De igual forma, existen también superficies que vienen a ser los análogos naturales de la equidistante y el oriciclo; se llaman respectivamente superficie equidistante y orisfera. *La superficie equidistante es el lugar geométrico de los puntos situados a un mismo lado de un plano σ y que se encuentran a una misma distancia de éste.* Diremos que el plano σ es la *base* de la superficie equidistante, y la perpendicular bajada de un punto arbitrario de la superficie sobre la base, su *altura*. Esta definición es totalmente similar a la de la equidistante. De igual modo, la orisfera se define por analogía directa con la definición del oriciclo.

Para dar esta definición, consideremos en el espacio una recta arbitraria a, que pase por algún punto A. Fijemos alguno de los dos sentidos de a, que llamaremos positivo. Sea m alguna otra recta cualquiera del espacio, paralela a a en el sentido positivo. Por el teorema XV, por el punto A se puede trazar exactamente una secante de igual pendiente de las rectas a y m. Sea M el extremo de esta secante situado sobre m. Si desplazamos la recta m conservándola paralela a a en el sentido positivo, los puntos M correspondientes formarán una superficie que se llama orisfera.

Dicho de otro modo, *la orisfera es el lugar geométrico de los extremos de las secantes de igual pendiente trazadas de un punto A de una recta a todas las rectas del espacio paralelas a ella en una dirección determinada.* El propio punto A también se considera perteneciente a la orisfera.

Por cuanto la recta a una vez fijada determina el sistema de rectas del espacio paralelas a ella en una dirección dada, resulta evidente que *al dar un punto A y una recta orientada a, que llamaremos eje, la orisfera queda totalmente determinada.*

Es esencial establecer que el punto A no se distingue en ningún aspecto de los demás de la orisfera, es decir, que la construcción de la orisfera descrita en su definición puede efectuarse a partir de cualquiera de sus puntos. Para esto hay que mostrar que cualesquiera que sean dos rectas paralelas al eje de la orisfera en un sentido distinguido de éste, el segmento que une los puntos de corte de estas rectas con la orisfera es una secante de igual pendiente de ellas.

Todo se reduce, evidentemente, al teorema que sigue.

TEOREMA XIX. *Sean dadas en el espacio tres rectas a, b, c, paralelas dos a dos, que pasen por los puntos A, B, C respectivamente. Entonces,* si *AB es secante de*

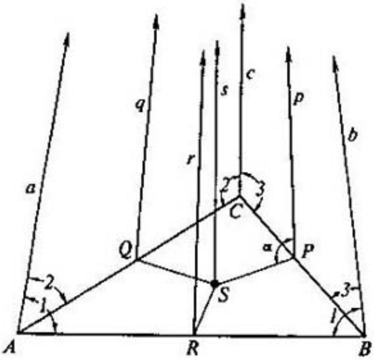


Fig. 60

igual pendiente de las rectas a y b, y BC lo es de las rectas b y c, AC lo será de las rectas a y c.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que las rectas a, b, c no están en un mismo plano, pues este caso ya fue considerado antes, en el teorema XVI.

Sean P, Q, R los puntos medios de los lados del triángulo ABC, opuestos a los vértices A, B, C respectivamente; tracemos por P, Q, R las rectas p, q, r, paralelas a a, b, c (fig. 60) y, consecuentemente, paralelas entre sí.

Es fácil descubrir que las proyecciones de las rectas p, q, r sobre el plano ABC convergen en un mismo punto. Efectivamente, como p y r son paralelas, al menos una de ellas, digamos, p, no será perpendicular al plano ABC. El ángulo agudo que esta recta determina con el plano ABC se denotará por α; determinemos sobre el lado de este ángulo que está en el plano ABC un segmento PS, de manera que se cumpla la igualdad

$$\Pi(PS) = \alpha.$$

Sea s la perpendicular al plano ABC por el punto S. Por construcción, la recta s es paralela a p, pero como las rectas p, q son paralelas entre sí, s será paralela asimismo a las rectas q y r. De aquí sigue que QS y RS son proyecciones de las rectas q y r, es decir, que efectivamente las tres proyecciones convergen en el punto S.

Obsérvese, ahora, que la recta r es perpendicular a AB, pues AB es secante de igual pendiente de las rectas a y b; por el mismo motivo, p es perpendicular a BC. Pero entonces los segmentos PS y RS serán perpendiculares a BC y AB respectivamente y, en consecuencia, S será el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. En virtud de esto, la recta AC será perpendicular a QS, es decir, a la proyección de q; de aquí se desprende que será perpendicular también a la propia q.

Así, q es la perpendicular en el punto medio de AC. Del paralelismo de la recta q con a y c sigue de inmediato que AC es secante de igual pendiente de a y c, cosa que había que probar.

Con esto, evidentemente, queda también establecido que la construcción de la orisfera indicada más arriba se puede efectuar partiendo de cualquiera de sus puntos.

El resultado obtenido puede enunciarse también así:

Cada recta paralela al eje de la orisfera en el sentido positivo interseca a la orisfera en un único punto y es, asimismo, eje de ésta.

§ 42. Presentaremos algunas propiedades generales de la esfera, la orisfera y la superficie equidistante.

Consideremos primeramente la esfera. Las propiedades que indicaremos no dependen, de ningún modo, de que se tome el espacio de Lobachevski o el de Euclides. Son, por supuesto, bien conocidas por el lector, y las enunciamos con el único fin de confrontarlas con las propiedades análogas de la superficie equidistante y la orisfera.

Tomemos sobre la esfera un punto arbitrario A y denotemos con a el diámetro con extremo en dicho punto. Cada plano que pasa por el diámetro a corta la esfera por un círculo de radio máximo. Evidentemente, todos los círculos máximos obtenidos por estos cortes tienen en su punto común A tangentes perpendiculares a la misma recta a. Consecuentemente, estas tangentes es encuentran sobre un mismo plano, que se llama *plano tangente* a la esfera en el punto A. El diámetro a es perpendicular al plano tangente y es, por esto, una normal. Podemos, así, afirmar que *todas las normales de la esfera convergen en un mismo punto* (el centro de la esfera).

Consideremos ahora una superficie equidistante. Sea A un punto arbitrario de ella, y a, la altura que pasa por A. Evidentemente, cada plano α que pasa por la altura a, corta la superficie considerada por una equidistante. La base de ésta será la recta de intersección del plano α con la base de la superficie equidistante, y su altura será igual a la de dicha superficie. De la discusión efectuada en el § 39 sigue que todas las equidistantes obtenidas por estos cortes tienen en su punto común A tangentes perpendiculares a una misma recta a. Por lo tanto, dichas tangentes están situadas en un mismo plano, que llamaremos plano tangente a la supeficie equidistante en el punto A. La altura a es perpendicular al plano tangente, siendo, por esto, una normal. Y como las alturas son perpendiculares a la base σ, podemos afirmar que *todas las normales de la superficie equidistante son perpendiculares a un mismo plano.*

Consideremos, por último, la orisfera. Sean A un punto cualquiera de ella; a, su eje que pasa por A. Evidentemente, cada plano α que contenga este eje intersecará la orisfera según un oriciclo; el eje a de la orisfera será, asimismo, eje de este último. De la discusión efectuada en el § 39 se desprende que todos los oriciclos obtenidos por estos cortes tienen en su punto común A tangentes perpendiculares a la misma recta a. Dichas tangentes estarán, pues, en un mismo plano, que llamaremos plano tangente a la orisfera en el punto A. El eje a es perpendicular al plano tangente, siendo, así, una normal. Y como los ejes de la orisfera, de acuerdo con su definición, son paralelos entre sí en una misma dirección, podemos afirmar que *todas las normales de la orisfera forman un sistema de rectas mutuamente paralelas.*

§ 43. Sea dado en el espacio algún sistema de rectas. Convendremos en llamarlo *radiación* (*haz*), si cada par de rectas de éste pertenecen a un mismo plano. Las rectas que constituyen la radiación se llamarán rayos.

Sean a y b dos rayos cualesquiera. Como, por definición de radiación, a y b están en un mismo plano, pueden darse únicamente los tres casos siguientes de posición relativa de a y b:

1) a y b se cortan en algún punto;

2) a y b son paralelas en alguna dirección;

3) a y b son divergentes.

Consideremos cada caso por separado.

1. Supongamos que a y b se cortan en algún punto O. Sea c un tercer rayo arbitrario, que no pertenece al plano de a, b. Sean α el plano que contiene a y c; β, el que contiene b y c. Ambos planos pasan por el punto O, y como la recta c se determina por la intersección de ambos planos, tendrá que pasar por el punto O.

Sea, ahora d un rayo arbitrario del plano a, b. Como a y c pasan por el punto O, y d no está en el plano a, c, concluimos, como arriba, que el rayo d pasa también por el punto O. Consecuentemente, todos los rayos pasan por un mismo punto *). Una tal radiación se denomina *elíptica*; el punto al cual convergen todos sus rayos lleva el nombre de *centro* de la radiación.

2. Supongamos que los rayos a y b son paralelos uno al otro en alguna dirección. Sea c un tercer rayo cualquiera que no pertenece al plano de a, b. Sea α el plano que contiene a y c, y β, el que contiene b y c. Como α y β contienen dos rectas paralelas a y b respectivamente, por el lema IV del § 35 la recta c determinada por su intersección es paralela a a y a b en la misma dirección en que éstas lo son entre sí. Sea ahora d un rayo arbitrario del plano de a, b. Como a y c son paralelas, y d no está en el plano de a, c, concluimos, como arriba, que d es paralela a a y a c. En consecuencia, todos los rayos de la radiación son paralelos entre sí en una dirección determinada; una tal radiación se llamará *parabólica*.

3. Supongamos, por último, que los rayos a y b son divergentes. Entonces existe un plano σ perpendicular a ambos. Sea c un tercer rayo arbitrario que no pertenezca al plano de a, b. Sean α el plano que contiene a y b; β, el que contiene b y c. Tanto α como β son perpendiculares al plano σ, pues el primero contiene la recta a, perpendicular a σ, y el segundo, la b, también perpendicular a σ. Pero entonces la recta c de intersección de α y β será, asimismo, perpendicular al plano σ.

Tomemos ahora un rayo arbitrario d del plano de a, b. Como a y c son perpendiculares al plano σ, y d no pertenece al plano de a, c, concluimos, igual que arriba, que también d será perpendicular a σ.

Así, pues, en este caso todos los rayos de la radiación serán perpendiculares a un mismo plano. Una tal radiación se dirá *hiperbólica*: el plano perpendicular a sus rayos lleva el nombre de *base* de la radiación.

Recapitulando lo expuesto, llegamos a la siguiente proposición.

Las esferas, las orisferas y las superficies equidistantes poseen la propiedad común de que las normales de cada una de estas superficies forman una radiación.

---

*) En este razonamiento es esencial que exista alguna recta c fuera del plano de a, b. Si todas las rectas de la radiación pertenecieran a un plano común, es fácil ver que bien podrían darse los tres casos simultáneamente para distintas rectas de una misma radiación. En este caso, esencialmente plano, la clasificación de las radiaciones habría que hacerla como en el § 39. La misma observación es aplicable también a los razonamientos hechos en los casos 2 y 3, que siguen a continuación (*N. del Tr.*)

Adémas, las normales de la esfera forman una radiación elíptica, las de la orisfera, una parabólica, y las de la superficie equidistante, una hiperbólica.

§ 44. Otra propiedad común de las esferas, las orisferas y las superficies equidistantes, que debemos destacar para nuestra exposición futura, consiste en lo siguiente: *cada una de ellas es una superficie de revolución, con eje en cualquiera de sus normales.*

La demostración de esta suposición es totalmente evidente desde el punto de vista intuitivo; la haremos sólo para la orisfera.

Sea Σ alguna orisfera; A, un punto de ella; a, la normal que pasa por A. Consideraremos todos los giros posibles del espacio alrededor de la recta a (véase el § 19). Debemos mostrar que durante estos giros, desplazándose, todos los puntos de la orisfera Σ quedan en la superficie de Σ, o bien, si utilizamos la terminología introducida en el § 36, que la orisfera Σ es invariante con respecto a los giros alrededor de la recta a. Con tal fin, tomemos sobre Σ un punto arbitrario M, y llamemos M' al punto a donde se lleva M después de algún giro del espacio alrededor de a. Sean, además, m la normal de la orisfera que pasa por M, y m' la recta con la cual coincide m durante el giro considerado; evidentemente, m' pasa por M'. En virtud de las propiedades que ya conocemos de la orisfera, la recta m es paralela a a, y el segmento AM es secante de igual pendiente de estas dos rectas. Pero la figura formada por a, m' y el segmento AM' es congruente a la constituida por a, m y el segmento AM. Por esto, m' es paralela a a y AM' es secante de igual pendiente de las rectas a y m'. De aquí sigue que el punto M' pertenece a la orisfera Σ, quedando así demostrada nuestra proposición.

Para la esfera y la superficie equidistante, esta proposición se demuestra de forma igualmente sencilla.

7. Geometría elemental sobre las superficies del espacio de Lobachevski

§ 45. Desde tiempos remotos son bien conocidos dos sistemas geométricos en variedades bidimensionales del espacio euclidiano: la geometría del plano (planimetría) y la de la esfera. Al elaborar estos sistemas geométricos, la siguiente propiedad resulta fundamental: tanto el plano como la esfera pueden ser desplazadas sobre sí mismas, sin deformarse.

El significado exacto de esta afirmación, de acuerdo con las definiciones del § 19, puede expresarse así: una superficie admite un movimiento sobre sí misma, si para el conjunto de sus puntos son posibles transportes congruentes que dejen todos estos puntos sobre la superficie.

Si nos imaginamos, por ejemplo, la esfera como un modelo liso de madera, recubierta de una funda delgada pero rígida, los movimientos de la funda sobre el modelo fijo darán una idea clara del fenómeno en cuestión.

El plano y la esfera no son las únicas superficies del espacio euclidiano que pueden ser desplazadas sobre sí mismas, pero se distinguen de todas las demás por un mayor grado de libertad en los movimientos admisibles.

Toda superficie de revolución admite también movimientos sobre sí misma, sin embargo, esta propiedad suya, desde el punto de vista de la libertad de elección de los movimientos, difiere de la propiedad correspondiente de la esfera o del plano. Para esclarecer esta diferencia, comparemos, por ejemplo, una esfera, un cilindro circular y un elipsoide de revolución.

Los únicos movimientos posibles de un elipsoide sobre sí mismo son los giros alrededor de su eje. Cada punto del elipsoide se desplaza en este caso sobre una trayectoria determinada de forma tal que para dos puntos arbitrariamente escogidos no existe, en general, un movimiento que haga coincidir uno con el otro.

El cilindro circular, además de giros, admite también traslaciones a lo largo de su eje; combinando movimientos de estos dos tipos se puede, evidentemente, hacer coincidir cualquier punto del cilindro con cualquier otro.

Diremos que el conjunto de movimientos que admite alguna superficie es *transitivo*, si dos puntos cualesquiera de ella pueden coincidirse uno con el otro mediante algún movimiento.

Así, el cilindro circular admite un conjunto transitivo de movimientos; por el contrario, el conjunto de movimientos de un elipsoide no es transitivo.

Es fácil ver que la colección de movimientos de la esfera es transitiva, igual que en el caso del cilindro circular. Sin embargo, aquí también existe una diferencia importante. A fin de ponerla en claro, consideraremos elementos lineales de la superficie. Se llama *elemento lineal* un punto conjuntamente con una dirección, que debe imaginarse determinada como una cierta flecha que parte del punto dado y está en el plano tangente. Los elementos lineales se consideran idénticos, si sus puntos coinciden y sus flechas apuntan a un mismo lado.

Tomemos dos elementos lineales sobre el cilindro circular, escogiendo los puntos de manera arbitraria y las direcciones de manera que una de ellas sea perpendicular al eje del cilindro y la otra, paralela a éste. Mediante un movimiento podemos hacer coincidir los puntos de estos elementos lineales; sin embargo no será posible hacer coincidir los propios elementos lineales.

Por el contrario, para dos elementos lineales arbitrarios de la esfera siempre existe un movimiento que hace coincidir uno con el otro. Precisamente, girando la esfera alrededor de algún eje, se pueden hacer coincidir primero los puntos de estos elementos; después, mediante un giro alrededor del eje al que pertenecen los puntos identificados, se pueden hacer coincidir también las direcciones.

Diremos que el conjunto de movimientos que admite alguna superficie *es transitivo con respecto a los elementos lineales*, si cualquier par de elementos lineales de esta superficie se puede hacer coincidir.

Podemos, pues, decir que, por ejemplo, el elipsoide de revolución posee un conjunto no transitivo de movimientos, mientras que el conjunto de los movimientos del cilindro circular y la esfera es transitivo, siendo, en el último caso, transitivo también con respecto a los elementos lineales. El conjunto de los movimientos del plano es igualmente transitivo con respecto a los elementos lineales.

En las proposiciones básicas de la planimetría que se refieren a la comparación de magnitudes geométricas, se utiliza esencialmente la posibilidad de un movimiento suficientemente libre de las figuras planas. Por ejemplo, al definir la longitud de un segmento rectilíneo AB, se pone en este segmento, a partir del punto A, un segmento cuya longitud se toma por unidad, tantas veces cuantas sean posibles, sin pasar por el punto B. Queda así determinada la longitud de AB salvo un entero. Determinando de la misma manera cuántas veces cabe en AB la mitad de la unidad de medida, se halla la longitud de AB salvo ½, y así sucesivamente, con cualquier grado de exactitud (véase el § 20). La medición se basa, así, en la posibilidad de desplazar un segmento de manera que su origen quede en cualquier punto prefijado de antemano, y el propio segmento se sitúe sobre una recta arbitraria dada, que pase por este punto. En otras palabras, aquí se utiliza la transitividad de la colección de movimientos del plano con respecto a sus elementos lineales.

En la geometría esférica, el papel que en la geometría plana hacen las rectas lo juegan las circunferencias máximas de la esfera. Esto se debe a tres motivos:

1. Entre todas las líneas que unen dos puntos de la esfera, la más corta es un arco de circunferencia máxima.

2. Por dos puntos cualesquiera de la esfera que no están diametralmente opuestos pasa una circunferencia máxima y sólo una.

3. Una circunferencia máxima queda determinada por cualquiera de sus elementos lineales.

(Llamaremos elemento lineal de una curva a cualquiera que tenga su punto sobre ella y su flecha dirigida por la tangente a la curva.)

Al desarrollar la geometría esférica, podríamos efectuar mediciones de magnitudes geométricas sobre ella, considerándolas como objetos de la geometría del espacio. Por ejemplo, la longitud de arco de una circunferencia máxima puede determinarse haciéndola igual a la cota superior de las longitudes de las quebradas inscritas con vértices dispuestos ordenadamente sobre el arco y con segmentos rectilíneos como componentes. Así se define la longitud de arco de una línea arbitraria del espacio.

Pero también se puede desarrollar la geometría esférica sin operar con objetos geométricos no pertenecientes a la esfera (como los segmentos rectilíneos de las quebradas inscritas). Esto puede hacerse utilizando la analogía con la planimetría. Por ejemplo, para trasladar a la geometría esférica el proceso descrito arriba de medición de un segmento de recta, hay que empezar por escoger una unidad de longitud. Supongamos que la longitud de algún arco de circunferencia máxima se adopta como unidad (para mayor claridad, aconsejamos al lector que imagine este arco pequeño en comparación con las dimensiones de la esfera). Si se pide medir algún arco de circunferencia máxima AB, debe desplazarse la unidad de medida sobre la esfera y aplicarla sobre el arco AB, a partir de A, tantas veces como quepa, sin pasarse del punto B. Queda así determinada la longitud de AB salvo un entero. Determinando de la misma manera cuántas veces cabe en el arco la mitad de la unidad de longitud, se puede hallar la longitud del arco AB salvo ½, y así sucesivamente, con cualquier grado de exactitud. Evidentemente, aquí se utiliza esencialmente la transitividad del conjunto de movimientos de la esfera con respecto a sus elementos lineales.

La medición de otras magnitudes geométricas (ángulos, áreas) se efectúa de manera análoga, superponiendo al objeto esférico dado una unidad prefijada, o bien partes de ella. Aquí no hay necesidad de utilizar objetos del espacio que no pertenecen a la esfera.

Se puede considerar, asimismo, la geometría sobre cualquier superficie. El papel de las rectas lo juegan, en este caso general, las líneas geodésicas. Se puede definir una geodésica como una línea tal que cada arco AB suficientemente pequeño de ella es más corto que cualquier otro arco sobre la superficie, con los mismos extremos que AB. Sobre una esfera de radio R, por ejemplo, las circunferencias de radio máximo son geodésicas, pues cada arco de éstas de longitud menor que πR es más corto que cualquier otro arco sobre la esfera con los mismos extremos.

Salvo algunas restricciones de carácter analítico impuestas a la superficie, se puede demostrar que cada geodésica queda determinada por alguno de sus elementos lineales, es decir, por un punto y una dirección, al igual que la recta en el plano.

Imaginémonos ahora que en una superficie fue hallado de alguna manera el conjunto de todas las geodésicas. Entonces, si se trata de construir la geometría de la superficie dada, surge naturalmente la pregunta: ¿es posible comparar las longitudes de los segmentos de geodésicas por el mismo método que en la planimetría o en la geometría esférica? Para esto, evidentemente, debe existir la posibilidad de mover la superficie sobre sí misma desplazando un arco de geodésica, escogido como unidad de medida, de modo que su origen pueda situarse en cualquier punto y el arco tome cualquier dirección prefijada. Cuando se pueden comparar las longitudes de geodésicas aplicando una unidad de longitud, diremos que la superficie admite *una geometría elemental.* Para que una superficie admita una geometría elemental, evidentemente, es necesario que el conjunto de sus movimientos sea transitivo con respecto a los elementos lineales.

Se puede demostrar que las únicas superficies del espacio euclidiano con un conjunto de movimientos transitivo con respecto a los elementos lineales son el plano y la esfera. De aquí se desprende que en este espacio puede existir geometría bidimensional elemental sólo en el plano (planimetría) y en la esfera (geometría esférica).

En el espacio de Lobachevski, además del plano y la esfera, existen dos tipos de superficie que admiten geometría elemental; éstas son la superficie equidistante y la orisfera, que ya conocemos.

El hecho de que estas superficies admitan efectivamente movimientos sobre sí mismas que formen un conjunto transitivo con respecto a los elementos lineales, ya fue, en esencia, establecido en el § 44, donde mostramos que cada una de ellas es superficie de revolución alrededor de cualquiera de sus normales. En efecto, si se dan dos elementos lineales arbitrarios en la superficie equidistante, o bien en la orisfera, girando la superficie alrededor de alguna normal pueden hacerse coincidir los puntos de estos elementos lineales, después de lo cual, girando alrededor de la normal que pasa por los puntos ya coincididos, se pueden superponer también los propios elementos lineales.

Podemos, pues, afirmar que *en el espacio de Lobachevski, la geometría elemental, además del plano, se realiza también en la esfera, en la superficie equidistante y en la orisfera.*

La geometría de la esfera en el espacio de Lobachevski no se diferencia de la geometría esférica en el espacio euclidiano, tal geometría (esférica) no será discutida aquí. Por el contrario, intentaremos describir en pocas palabras la geometría sobre la superficie equidistante, y analizaremos con todo detalle la geometría de la orisfera.

§ 46. Sea Σ alguna superficie equidistante, cuya base sea el plano σ. De acuerdo con las ideas generales expuestas en el § 45, debemos considerar las geodésicas de Σ como rectas de la geometría de esta superficie. Estas geodésicas son las equidistantes que se obtienen por intersección de esta superficie con planos perpendiculares al plano σ (dejaremos por ahora sin demostración este hecho).

Por esto, tales equidistantes serán consideradas rectas sobre Σ.

Nuestra finalidad es describir un sistema de proposiciones del cual puedan deducirse de manera lógica todas las propiedades de las posiciones recíprocas entre puntos y equidistantes de la superficie Σ, es decir, dar una fundamentación axiomática de la geometría de la superficie equidistante.

Como mostraremos ahora, esta geometría puede fundamentarse por los axiomas de los cuatro primeros grupos de Hilbert y el axioma de las paralelas de Lobachevski. (Sólo debe tenerse en cuenta que, por tratarse ahora de una geometría bidimensional, de los axiomas de Hilbert deben excluirse los I,4 — I,8, de carácter tridimensional; por esto, trabajaremos únicamente con los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV y el de paralelas.)

A fin de obtener nuestro resultado en la forma más sencilla posible, proyectemos los puntos y las equidistantes de la superficie Σ sobre el plano σ; sus proyecciones serán respectivamente puntos y rectas. Convendremos en llamar correspondientes a dos imágenes Φ y Φ', de los cuales Φ está en Σ, y Φ', en Φ, si Φ' se obtiene proyectando Φ. Es evidente que los puntos y las equidistantes en la superficie Σ se hallan en las mismas relaciones de pertenencia (incidencia) y de orden que sus puntos y rectas correspondientes del plano σ. Por esto, en la geometría de Σ se cumplen los axiomas I,1 — I,3 y II, pues éstos tienen lugar en la geometría del plano.

A continuación, llamaremos congruentes a dos imágenes de la superficie Σ, si pueden superponerse mediante algún movimiento de Σ en sí misma, o si son simétricas con respecto a algún plano. Coordinemos ahora los movimientos posibles de la superficie Σ y del plano σ como si ambos formaran un cuerpo rígido en el espacio. Entonces, cada movimiento de σ que hace coincidir algún par de sus imágenes Φ' y Ψ', determinará un movimiento de Σ que hará coincidir las imágenes Φ y Ψ, correspondientes a Φ' y Ψ'. Dicho de otro modo, las imágenes de la superficie Σ se hallan en las mismas relaciones de congruencia mutua que las imágenes respectivas del plano σ. Podemos concluir de esto que en la geometría de la superficie Σ se satisfacen los axiomas III de congruencia, pues éstos son válidos en la geometría del espacio.

Por el mismo método puede verificarse que en la geometría de la superficie Σ son válidos los axiomas de continuidad IV.

Consideremos ahora sobre Σ una equidistante arbitraria a y algún punto A fuera de esta equidistante. Proyectando a y A sobre el plano σ, obtenemos como sus proyecciones la recta a' y el punto A'. Supongamos que por A' se ha trazado en el plano σ alguna recta b'; ésta es proyección de alguna equidistante b sobre Σ que pasa por A, y si b' no corta a', la equidistante b tampoco tendrá puntos comunes con la equidistante a. Pero en el plano σ tiene lugar la geometría de Lobachevski y, en consecuencia, por A' pasa un número infinito de rectas que no cortan a'. Por esto, en la superficie Σ por el punto A pasa un número infinito de equidistantes que no tienen puntos comunes con la a; esto significa que en la geometría de la superficie Σ se realiza el postulado de las paralelas de Lobachevski.

Así, pues, en la superficie Σ son válidos todos los axiomas de la geometría absoluta, más el de Lobachevski. Por consiguiente, con respecto a los puntos y las equidistantes de Σ valen todos los teoremas existentes en la planimetría no euclidiana.

Podemos, pues, concluir que *la geometría elemental de la superficie equidistante es la de Lobachevski.*

Una observación más, para concluir. Al llamar rectas de Σ a las equidistantes obtenidas por cortes normales de esta superficie, no demostramos al principio que eran sus geodésicas; ahora esto puede establecerse fácilmente. En efecto, como sobre la superficie equidistante valen todos los teoremas de la geometría absoluta, se puede mostrar por los razonamientos habituales que un segmento de equidistante es más corto que cualquier otra línea que una sus extremos en la superficie Σ.

§ 47. Ahora acometeremos el análisis de la geometría elemental en la orisfera. El papel de las rectas de esta geometría lo adjudicaremos a los oriciclos obtenidos cortando la orisfera con cualquier plano que pase por alguno de sus ejes. (Nuevamente dejamos abierto el problema de si tales oriciclos son geodésicas en la orisfera o no; podremos darle una respuesta afirmativa después de concluido el estudio de la geometría de la orisfera.) Nuestra primera finalidad es mostrar que las relaciones mutuas de los puntos y los oriciclos en la orisfera pueden ser caracterizadas por los axiomas de la geometría absoluta. Luego veremos qué teoría de paralelas corresponde a la orisfera: la de Euclides o la de Lobachevski.

La verificación de los axiomas del grupo I,1 — I,3 se hace en dos palabras. Sean A y B dos puntos arbitrarios de la orisfera, a y b, los ejes que pasan por ellos. Como dos ejes cualesquiera de la orisfera están en un mismo plano, las rectas a y b determinan exactamente un plano α que contiene ambas. Por intersección de α y la orisfera considerada (que denotaremos con Ω en lo sucesivo) queda determinado exactamente un oriciclo u, que pasa por los puntos A y B. Así, cualesquiera que sean dos puntos A y B de la orisfera Ω, éstos determinan un oriciclo que pasa por ellos, y sólo uno.

Hemos establecido con esto que en la geometría de la orisfera tienen lugar los axiomas I,1 — I,2. El hecho de que todo oriciclo tiene no menos de dos puntos y la orisfera, no menos de tres que no están sobre un mismo oriciclo (de hecho tanto en uno como en otro caso hay incluso un número infinito de puntos), es decir, que en la geometría de la orisfera se cumple el axioma I,3, sigue directamente de la definición del oriciclo y la orisfera y de los teoremas elementales de la estereometría de Lobachevski (en nuestra descripción del oriciclo y la orisfera no mencionamos estas propiedades tan evidentes a fin de no distraer la atención del lector con detalles superfluos).

Ahora hay que probar si se cumplen en la orisfera los axiomas de orden II,1 — II,4. Ante todo conviene determinar las condiciones a las que consideraremos que un punto de un oriciclo está entre otros dos de éste. Sea u un oriciclo perteneciente al plano α, y sean A, B, C tres puntos sobre éste. Diremos que el punto B está en este oriciclo entre los puntos A y C, si su eje b, que pasa por B, está en el plano α entre los ejes a y c, los cuales pasan por A y C respectivamente (es decir, si en el plano α los puntos de las rectas a y c están a distintos lados de b). Puede verificarse sin dificultad que en este caso se satisfacen los axiomas de orden lineal II,1 — II,3. Es un tanto más difícil verificar la proposición de Pasch II,4. Para comprobar que también ésta se cumple en la geometría de la orisfera, procederemos como sigue. Considerando en la orisfera Ω un triángulo arbitrario ABC (fig. 61), formado por los arcos de tres oriciclos, tracemos por sus vértices A, B, C los tres ejes de Ω, que llamaremos a, b, c respectivamente. Fijemos, ahora, un punto A', B', C' en cada una de estas rectas, y tracemos por ellos el plano σ. La proposición de Pasch II,4

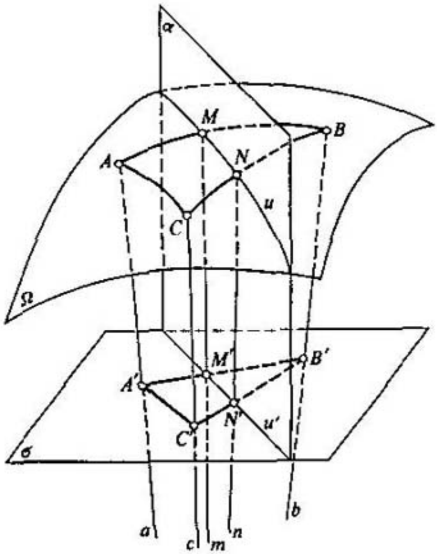


Fig. 61

tiene lugar para cualquier triángulo rectilíneo, en particular, para el triángulo $A'B'C'$ en el plano σ. De aquí deduciremos su validez para el triángulo ABC sobre Ω. Sea u algún oriciclo situado en Ω y que no pasa por ninguno de los puntos A, B, C. Debemos mostrar que si u pasa por algún punto interior del segmento de oriciclo AB, también pasará por algún punto interior del segmento de oriciclo BC, o bien del AC. Obsérvese que el plano α que contiene el oriciclo u y el plano $ABB'A'$ se intersecan por el eje m de la orisfera Ω, que pasa por el punto M. Este eje m está situado entre los ejes a y b en el plano $ABB'A'$, pues el punto M está entre A y B. Por esto, m deberá cortar al segmento de recta $A'B'$ en algún punto interior M'. Entonces, en virtud del axioma de Pasch II,4, la recta u' de intersección de los planos α y σ pasa por un punto interior de alguno de los segmentos $B'C'$, o bien $A'C'$. Supongamos, para precisión, que la recta u' contiene un punto interior N' del segmento $B'C'$. Entonces los planos α y $BCC'B'$, al tener un punto común N', se intersecarán por alguna recta n. Pero los planos α y $BCC'B'$ pasan por las dos rectas paralelas m y b respectivamente; en virtud del lema III del § 35, la recta n de intersección de estos planos es paralela tanto a m como a b, por lo cual es, asimismo, paralela a la recta c. Como el punto N' está entre B' y C', la recta n, paralela a b y c, estará ubicada entre ellas. Por otra parte, al igual que toda recta paralela a los ejes del oriciclo BC y que se encuentra en el plano de éste, es también eje de este oriciclo, razón por la cual lo cortará en algún punto N (véase el § 38). Como n

está entre las rectas b y c, también el punto N del oriciclo BC estará entre los puntos B y C.

Como la recta n está en el plano α, este plano contendrá el punto N. Así, pues, entre los puntos de intersección del plano α y la orisfera Ω, es decir, entre los puntos del oriciclo u, hay algún punto interior del segmento de oriciclo BC. Queda así demostrada la proposición de Pasch en la geometría de la orisfera.

Pasemos a los axiomas de congruencia III,1 — III,5.

El axioma III,1 requiere que sobre cualquier oriciclo de la orisfera Ω, a partir de cualquiera de sus puntos y en cualquier sentido, se pueda aplicar de manera unívoca un segmento congruente a cualquier segmento de otro oriciclo; el axioma III,4 exige que sobre Ω a cualquier lado de un oriciclo dado se pueda aplicar a este oriciclo un ángulo congruente a otro ángulo arbitrario prefijado; además, la posición del vértice puede escogerse arbitrariamente y, una vez indicada ésta, la construcción debe ser posible de manera unívoca.

Ambos axiomas se cumplen en la geometría de la orisfera, como consecuencia de que ésta admite desplazamientos sobre sí misma, cuyo conjunto es transitivo con respecto a los elementos lineales. La univocidad de las construcciones requeridas se desprende del teorema B del § 19.

Prosiguiendo, el axioma III,2 se verifica como consecuencia de la propiedad de grupo de los movimientos (véase el § 19).

Para demostrar en la geometría de la orisfera Ω la proposición III,3, consideremos sobre esta superficie dos oriciclos u, u'. Fijemos sobre u tres puntos A, B, C situados de manera que B está entre A y C; sean A', B', C' tres puntos del oriciclo u' que están en posición análoga. Si $AB \equiv A'B'$, existe un movimiento de la orisfera sobre sí misma que hace coincidir el punto A' con el punto A, y el B', con el B. Si además es $BC \equiv B'C'$, del teorema B del § 19 sigue que el punto C' coincidirá con el C en este movimiento. Así, en el movimiento considerado el segmento $A'C'$ se superpondrá al AC, es decir, de $AB \equiv A'B'$ y $BC \equiv B'C'$ sigue $AC \equiv A'C'$.

La proposición III,5 se demuestra con razonamientos igualmente sencillos.

Falta verificar la validez de los axiomas de continuidad IV,1 y IV,2. Al estudiar la geometría de la orisfera, en lugar de verificar por separado el axioma de Arquímedes IV,1 y el de Cantor IV,2, resulta más cómodo comprobar que se cumple el principio de Dedekind. Hecho esto, entonces, si se cumplen las proposiciones I — III, las proposiciones IV,1 y IV,2 también serán verdaderas para la orisfera, en virtud del teorema 41 del § 23.

Tomemos sobre la orisfera un oriciclo arbitrario u y denotemos su plano con α. Supongamos que en el conjunto de puntos de este oriciclo se ha efectuado una cortadura de Dedekind. Tomemos en la primera clase de la cortadura un punto arbitrario A, y en la segunda, un punto B; tracemos por estos puntos los ejes correspondientes a y b del oriciclo. Escogiendo en la primera recta un punto arbitrario A', y en la segunda, un punto B', tracemos la recta u' determinada por los puntos A' y B'. Obsérvese ahora que por cada punto M' de la recta u', al igual en general por cada punto del plano α, pasa exactamente un eje del oriciclo u, que lo interseca en algún punto M. Así, a cada punto M' de la recta u' nuestra construcción le pone en correspondencia un punto determinado M del oriciclo u. Distribuyamos todos los puntos de la recta u' en dos clases de acuerdo con la siguiente regla: el punto M' de esta recta se adjudicará a la primera clase, si el punto M correspondiente a M' del oriciclo u pertenece a la primera clase de la cortadura de Dedekind dada en este oriciclo, y se adjudicará a la segunda, si el punto correspondiente del oriciclo pertenece a la segunda clase. Evidentemente, esta distribución de puntos de la recta u' es una cortadura de Dedekind. Como para las rectas del espacio de Lobachevski tiene lugar el principio de Dedekind, podemos afirmar que en una de las clases de la cortadura de Dedekind obtenida en la recta u' existe un elemento de clausura.

Sea este elemento el punto X'. Supongamos, para precisión, que X' es el primer punto de la segunda clase. Como A' y B' están en clases diferentes, X' tendrá que estar entre ellos, o, a lo sumo, coincidir con el punto B'. El punto X del oriciclo, correspondiente a X', está en la segunda clase de la cortadura de Dedekind en este oriciclo, y está entre A y B, o a lo mas coincide con B. Si X no clausura la segunda clase en el oriciclo, entre A y X existe algún punto Y, perteneciente, asimismo, a la segunda clase. El eje y del oriciclo que pasa por el punto Y está entre los ejes AA' y XX'; por esto, tendrá que intersecar el segmento $A'X'$ en algún punto Y'; este punto figura en la segunda clase en la recta u', pues Y pertenece a la segunda clase en el oriciclo u. Pero además Y', por su construcción, está sobre la recta u' más cerca de los puntos de la primera clase que el punto X'. Esto es imposible, pues X' es el primer punto de la segunda clase. La contradicción obtenida muestra que X necesariamente clausura la segunda clase. Si supusiésemos que X' clausura la primera clase en u', un razonamiento análogo mostraría que el punto X correspondiente a X' clausura la primera clase del oriciclo.

Así, entonces, cualquiera que sea una cortadura de Dedekind en un oriciclo, una de las clases de ésta posee necesariamente un elemento de clausura. Hemos mostrado con esto que en la geometría de la orisfera tiene lugar el principio de Dedekind. Del teorema 41 del § 23 se deriva, entonces, que en la orisfera son válidos los axiomas de continuidad IV,1 y IV,2.

El análisis hecho nos permite concluir que en la orisfera tienen lugar todas las proposiciones de la geometría absoluta. En efecto, todas ellas pueden obtenerse por razonamientos lógicos, a partir de los axiomas I — IV, cuya validez hemos establecido.

Ahora debemos responder a la pregunta: ¿cuál teoría de paralelas tiene lugar en el sistema geométrico de la orisfera, la de Euclides o la de Lobachevski?

No es difícil responderla.

Tomemos sobre la orisfera Ω algún oriciclo a, cuyo plano denotaremos con α. Sea P un punto arbitrario de Ω, que no pertenece a a. Tracemos por el punto P el eje p de la orisfera. Del teorema XII del § 35 sigue que la recta p es paralela al plano α.

Imaginémonos ahora que por P se ha trazado un oriciclo arbitrario b. Su plano β pasará por la recta p. El oriciclo b no tendrá puntos comunes con el a sólo si el plano β no corta el α. Pero como la recta p es paralela a α, de acuerdo con el teorema XIV del § 35 por está recta pasará exactamente un plano β que no interseca el plano α.

En consecuencia, por el punto P en la orisfera Ω pasa exactamente un oriciclo que no corta a. Así, *en la orisfera tiene lugar el postulado euclidiano de paralelas.*

Podemos ahora asegurar que *la geometría elemental de la orisfera es la geometría de Euclides.*

Este resultado notable juega un papel importante en el desarrollo de la geometría de Lobachevski. Pero, aparte de su aplicación, resulta de gran interés por sí mismo. Resulta ser que al descartar el V postulado de Euclides en la geometría bidimensional de cada plano, de todas formas lo reencontramos en la geometría bidimensional de otra superficie.

Es interesante comparar las geometrías de la superficie equidistante, la orisfera y la esfera ordinaria, considerando en ellas la proposición sobre la suma de los ángulos de un triángulo.

Como en la superficie equidistante tiene lugar la geometría de Lobachevski, todo triángulo formado por arcos de geodésicas (es decir, arcos de equidistantes) tiene suma de ángulos internos menor que dos rectos.

Sobre la orisfera, por cuanto allí tiene lugar la geometría de Euclides, todo triángulo geodésico (formado por arcos de oriciclos) tiene su suma de ángulos igual a dos rectos.

Un triángulo esférico, cuyos lados son arcos de circunferencias máximas (es decir, líneas geodésicas de la esfera) tiene suma de ángulos mayor que dos rectos. En la esfera existe, inclusive, un triángulo geodésico con tres ángulos rectos.

En la geometría esférica vale, pues, justamente la proposición cuya falsedad en la geometría absoluta fue probada por muchos geómetras (Legendre, Saccheri, Lambert; estos últimos, a título de la hipótesis del ángulo obtuso).

Por supuesto, esto se explica por que la geometría de la esfera es aún más disímil de la del plano euclidiano que la geometría del plano de Lobachevski.

En efecto, en la geometría de la esfera no vale no sólo el axioma euclidiano de paralelas, sino tampoco la mayoría de los axiomas de la geometría absoluta (por ejemplo, dos líneas geodésicas de la esfera se cortan siempre en dos puntos; a los puntos de una geodésica no se les puede aplicar el concepto de «estar entre» etc.).

Para concluir, digamos que el espacio de Lobachevski en algún sentido es más rico que el de Euclides; precisamente, mientras en el último existen sólo dos geometrías elementales de variedades bidimensionales, la esférica y la euclidiana, en el espacio de Lobachevski se realizan, en distintas superficies, los tres sistemas geométricos que conocemos.

8. Área de un triángulo

§ 48. En la sección precedente consideramos únicamente magnitudes angulares y lineales. Ahora nos ocuparemos del problema de definir el área de figuras en el plano de Lobachevski.

Al definir el área utilizaremos el concepto de equicomposición de figuras: dos figuras se llaman *equicompuestas*, si se las puede partir en igual número de triángulos congruentes dos a dos. Por algún tiempo nos limitaremos a considerar únicamente triángulos.

Tiene lugar la siguiente proposición: *la condición necesaria y suficiente de equicomposición de dos triángulos es la igualdad de sus defectos.*

Recuérdese que se llama defecto del triángulo Δ la diferencia

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta),$$

siendo $S(\Delta)$ la suma de los ángulos internos del triángulo; en virtud del teorema de Legendre (proposición III del § 8), en la geometría no euclidiana $S(\Delta) < \pi$ y $D(\Delta) > 0$.

La demostración de la necesidad del criterio enunciado se basa en los dos lemas que siguen.

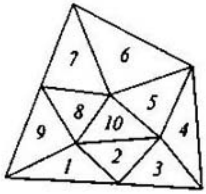


Fig. 62

LEMA 1. *Sea dada una partición de algún dominio simplemente conexo, delimitado por una quebrada cerrada, en triángulos de forma que se verifica la siguiente condición: cada par de triángulos de la partición o bien no tienen puntos comunes, o bien tienen un vértice común, o bien un lado común. Entonces, si α^2 denota el número de todos los triángulos de la partición, α_i^0, el número de vértices de estos triángulos que están en el interior del dominio y α_e^0, el de vértices en la frontera, tiene lugar la igualdad*

$$\alpha^2 - 2\alpha_i^0 - \alpha_e^0 = -2. \tag{A}$$

(En la fig. 62, $\alpha^2 = 10$, $\alpha_i^0 = 3$, $\alpha_e^0 = 6$.)

En la demostración supondremos conocida la fórmula de Euler

$$\alpha^2 - \alpha^1 - \alpha^0 = 1,$$

donde α^1 es el total de los lados de los triángulos de la partición, α^0, el total de los vértices *).

Numeremos de alguna manera los vértices de los triángulos de la partición y sea p_{ik}^2 el número de todos los triángulos que tienen un vértice interior común con número k, y p_{er}^2, el de todos los triángulos con vértice común en la frontera numerado r. Sean p_{ik}^1 y p_{er}^1 los números de lados que salen de estos vértices. Entonces, evidentemente,

$$\left.\begin{aligned} p_{ik}^2 &= p_{ik}^1, \\ p_{er}^2 &= p_{er}^1 - 1. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Por otra parte, sumando con respecto a todos los vértices interiores y exteriores, hallamos que

$$\sum_k p_{ik}^2 + \sum_r p_{er}^2 = 3\alpha^2,$$

$$\sum_k p_{ik}^1 + \sum_r p_{er}^1 = 2\alpha^1.$$

Restando la igualdad superior de la inferior, y tomando en consideración (B), tendremos que

$$\alpha_e^0 = 2\alpha^1 - 3\alpha^2.$$

Eliminando de aquí y de la identidad de Euler

$$\alpha^2 - \alpha^1 + \alpha^0 = 1$$

---

*) Véase, por ejemplo, П. С. Александров и В. А. Ефремович, Очерк основных понятий топологии, ОНТИ, 1936. (*P. S. Aleksandrov* y *V. A. Efremovich*, Esbozo de los conceptos básicos de la topología) (El lector de habla hispana puede consultar, por ejemplo, el libro de Courant y Robbins «Qué es la Matemática», ed. Aguilar, Madrid, 1962. *N. del Tr.*)

la magnitud α^1, obtenemos:

$$\alpha^2 - 2\alpha^0 + \alpha_e^0 = -2.$$

Pero $\alpha^0 = \alpha_i^0 + \alpha_e^0$; sustituyendo esta expresión en la igualdad precedente, hallaremos el resultado que deseábamos:

$$\alpha^2 - 2\alpha_i^0 - \alpha_e^0 = -2.$$

En topología, la partición de un dominio en triángulos sujetos a las condiciones expresadas en el enunciado del lema I, se llama *triangulación* de este dominio.

LEMA II. *Si el triángulo Δ está compuesto por los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, entonces*

$$D(\Delta) = D(\Delta_1) + \dots + D(\Delta_n).$$

Este lema generaliza, evidentemente, el lema I del § 8, en virtud del cual al dividir un triángulo ABC por una secante BD en dos triángulos ABD y BDC, tiene lugar la igualdad

$$D(ABC) = D(ABD) + D(BDC).$$

A su vez, del lema citado sigue que en la demostración del lema II todo se puede reducir al caso en que la partición del triángulo Δ sea una triangulación.

En efecto, el pegado de los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ uno al otro, no satisface las condiciones de una triangulación si los vértices de algunos triángulos Δ_i coinciden con los puntos interiores de los lados de algunos de los triángulos Δ_i. Pero entonces, uniendo sucesivamente los vértices de los triángulos Δ_i, que están en los lados de los triángulos vecinos, con los vértices de estos últimos opuestos a dichos lados, obtenemos un nuevo sistema de triángulos $\Delta_1', \dots, \Delta_m'$, la partición de Δ en estos nuevos triángulos será ya una triangulación. Pero la suma de los defectos de los triángulos $\Delta_1', \dots, \Delta_m'$ será igual a la de los triángulos $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, pues al dividir cada vez un triángulo Δ_i por una transversal se obtienen dos triángulos nuevos cuya suma de defectos, por el lema I del § 8, es igual al defecto del triángulo Δ_i.

Entonces, para demostrar nuestro lema basta establecer la igualdad

$$D(\Delta_1') + \dots + D(\Delta_m') = D(\Delta).$$

Sea l el número de vértices de los triángulos $\Delta_1', \dots, \Delta_m'$ que están en el interior de Δ, y p, el de vértices situados en los lados del triángulo Δ (no se toman en consideración los tres vértices del propio Δ). Entonces vale la relación

$$m - 2l - p = 1.$$

Esta igualdad se obtiene con un pequeño cambio de la fórmula (A) del lema precedente. En efecto, aplicando el lema I a la partición del triángulo Δ en los triángulos $\Delta_1', \dots, \Delta_m'$, obtendremos:

$$\alpha^2 = m, \qquad \alpha_1^0 = l, \qquad \alpha_e^0 = p + 3.$$

Introduciendo estas expresiones en la igualdad (A), obtenemos la (B).

Consideremos, ahora, la suma $D(\Delta_1') + \dots + D(\Delta_m')$. Evidentemente,

$$D(\Delta_1') + \dots + D(\Delta_m') = m\pi - [S(\Delta_1') + \dots + S(\Delta_m')].$$

La suma de los ángulos de los triángulos $\Delta_1', \dots, \Delta_m'$ que rodean cada vértice común en el interior de Δ es igual a 2π; los ángulos adjuntos a cada vértice situado en un lado del triángulo Δ dan una suma de π; por último, la suma de los ángulos de los triángulos $\Delta_1', \dots, \Delta_m'$ cuyos vértices coinciden con los de Δ es igual a $S(\Delta)$. Por esto,

$$S(\Delta_1') + \dots + S(\Delta_m') = 2l\pi + p\pi + S(\Delta).$$

De aquí se deriva que

$$D(\Delta_1') + \dots + D(\Delta_m') = (m - 2l - p)\pi - S(\Delta)$$

y, en virtud de (C),

$$D(\Delta_1') + \dots + D(\Delta_m') = \pi - S(\Delta) = D(\Delta).$$

Pero como

$$D(\Delta_1') + \ldots + D(\Delta_m') = D(\Delta_1) + \ldots + S(\Delta_n),$$

entonces

$$D(\Delta_1) + \ldots + D(\Delta_n) = D(\Delta).$$

El lema II queda demostrado.

El teorema que sigue expresa la necesidad del criterio indicado arriba de equicomposición de triángulos.

TEOREMA I. *Triángulos equicompuestos tienen iguales defectos.*

Supongamos que los triángulos Δ y Δ' están descompuestos en igual número de triángulos congruentes dos a dos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ y $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n'$. Supongamos que los triángulos se han numerado de tal forma que Δ_i y Δ_i' son congruentes si tienen números iguales. Por el lema II,

$$D(\Delta) = D(\Delta_1) + \ldots + D(\Delta_n)$$

y

$$D(\Delta') = D(\Delta_1') + \ldots + D(\Delta_n').$$

Pero como triángulos congruentes tienen, evidentemente, defectos iguales, será

$$D(\Delta_i) = D(\Delta_i').$$

De aquí y de las igualdades precedentes concluimos que

$$D(\Delta) = D(\Delta').$$

La suficiencia del criterio de equicomposición de triángulos la expresa el

TEOREMA II. *Si dos triángulos tienen defectos iguales, son equicompuestos.*

Reduciremos de demostración de este teorema a la prueba de una serie de lemas*).

LEMA α. *Dos figuras equicompuestas con una tercera son equicompuestas entre sí.*

Supongamos que las figuras A y B son equicompuestas con la figura C. Imaginémonos que tanto en A como en B se han trazado las rectas que las dividen en partes congruentes con partes de la figura C. Dibujemos sobre C las rectas que la dividen en partes correspondientemente congruentes a partes de la figura A, y después, las rectas que la dividen en partes correspondientemente congruentes a partes de B. Entonces, evidentemente, todas las rectas juntas dividirán a C en partes con las que se pueden formar tanto la figura A como la B.

LEMA β. *Si E y F son los pies de las perpendiculares bajadas de los vértices B y C de un triángulo ABC a la recta que une los puntos medios P y Q de sus lados AB y AC, entonces $BCFE$ es un cuadrilátero de Saccheri y el triángulo ABC es equicompuesto con este cuadrilátero.*

Demostremos, ante todo, que $BCFE$ es un cuadrilátero de Saccheri. Bajemos de A la perpendicular AD a la recta PQ; evidentemente, tienen lugar las igualdades de triángulos: $\Delta BEP = \Delta ADP$ y $\Delta CFQ = \Delta ADQ$, de donde $BE = AD$ y $CF = AD$. Por lo tanto, $BE = CF$, de forma que $BCFE$ es, efectivamente, un cuadrilátero de Saccheri. Para establecer la equicomposición del triángulo ABC con este cuadrilátero, habrá que considerar dos casos.

1) El segmento PQ es parte del segmento EF (figs. 63 a y b).

En este caso, la equicomposición de las figuras ABC y $BCFE$ se ve directamente de las figs. 63 a y b, donde los triángulos iguales están marcados con las mismas cifras (la fig. 63b corresponde al caso en que F y Q coinciden).

---

*) Los lemas que siguen fueron tomados, en parte, del libro de Baldus «Geometría no Euclidiana» (*R. Baldus, F. Löbell*, «Nichteuklidische Geometrie», Berlín, Sammlung Göschen, vol. 970, 3ª. ed., 1953).

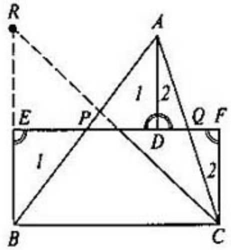


*Fig. 63*a

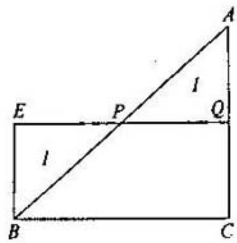


*Fig. 63*b

2) El segmento PQ está, al menos parcialmente, fuera de EF (fig. 64). En este caso, comenzaremos observando que $PQ = \frac{1}{2} EF$. En efecto, de las igualdades evidentes de triángulos

$$\Delta BEP = \Delta ADP \quad \text{y} \quad \Delta CFQ = \Delta ADQ$$

sigue que $EP = PD$ y $FQ = QD$, de donde $EP - FQ = PD - QD$, o bien $EF - PQ = PQ$, es decir, $2PQ = EF$ y $PQ = \frac{1}{2} EF$.

Unamos, ahora, el punto C con el P y determinemos sobre la recta de unión un segmento $PA' = PC$. Unamos luego el punto A' con el B. Sea P' el punto en que la recta EF corta el lado BA' del triángulo $A'BC$. No es difícil ver que P' es el punto medio del lado $A'B$. Efectivamente, si $A'D'$ es la perpendicular bajada desde A' a EF, entonces $A'D' = CF = BE$, por lo cual $\Delta P'A'D' = \Delta P'BE$, de donde $BP' = P'A'$. Además, el triángulo $A'BC$ es equicompuesto con el ABC, pues ambos tienen como parte común al BPC, y los triángulos BPA' y CPA son iguales, pues contienen ángulos iguales entre lados respectivamente iguales. Partiendo, pues, del triángulo ABC, podemos construir el $A'BC$ en la forma que acabamos de indicar; análogamente, partiendo del $A'BC$, determinamos el nuevo triángulo $A''BC$, etc. (fig. 64).

Todos los triángulos $ABC, A'BC, A''BC, \ldots$ tienen una mediana común y, por lo dicho arriba a base del lema α, son equicompuestos entre sí. Además, tienen lugar las igualdades entre segmentos:

$$QP = PP' = P'P'' = \ldots = \frac{1}{2} EF.$$

En virtud del axioma de Arquímedes, alguno de estos triángulos está ubicado como lo prevé el primer caso de la demostración de este lema y, por ende, es equicompuesto con el cuadrilátero de Saccheri $BCFE$; de este modo se establece la equicomposición con el cuadrilátero $BCFE$ del triángulo inicial ABC. El lema queda probado.

LEMA γ. *Si dos triángulos tienen defectos iguales y algún lado de uno de ellos es igual a un lado del otro, los cuadriláteros de Saccheri correspondientes a estos lados son congruentes.*

Efectivamente, $\angle B$ y $\angle C$ del cuadrilátero $BCFE$ son iguales entre sí y, como se ve fácilmente de la fig. 63 o bien de la fig. 64, la magnitud de cada uno es igual a $S/2$, donde S es la suma de los ángulos del triángulo ABC. Pero un cuadrilátero de Saccheri queda totalmente determinado por la base superior y un ángulo de esta base, de donde se deriva la justeza del lema.

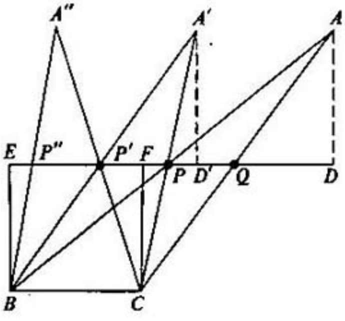


Fig. 64

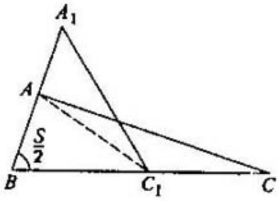


Fig. 65

De los lemas α, β y γ se desprende inmediatamente el

LEMA δ. *Si dos triángulos tienen defectos iguales y un lado de uno de ellos es igual a algún lado del otro, los triángulos son equicompuestos.*

Si en la fig. 63 continuamos el segmento BE hasta el punto R, de forma que $BE = ER$, el punto medio del lado RC del triángulo BRC estará sobre la recta EF, cosa que se ve de inmediato. Por el lema β, los triángulos BRC y BAC son equicompuestos con el cuadrilátero $BCEF$. Por consiguiente, en virtud del lema α son equicompuestos entre sí. El ángulo $EBC = S/2$. Hemos demostrado, así, el lema siguiente.

LEMA ε. *Si la suma de los ángulos del triángulo ABC es igual a S, es posible construir un triángulo equicompuesto con éste que tenga un ángulo de magnitud $S/2$.*

Tomemos ahora dos triángulos con defectos iguales y, por ende, con sumas iguales S de ángulos. En virtud del lema ε, podemos construir dos nuevos triángulos respectivamente equicompuestos con los triángulos dados, además cada uno de ellos tenga un ángulo igual a $S/2$. Superpongamos estos triángulos uno al otro de manera que sus ángulos iguales coincidan (fig. 65). Si los vértices C y C_1 coinciden, tendrán que coincidir, asimismo, los vértices A y A_1, pues en caso contrario un triángulo resultaría ser parte del otro y, por el lema 1 del § 8, tendría defecto menor, lo que contradiría nuestra hipótesis. En este caso, todos los vértices de los triángulos coinciden, y los triángulos resultan ser congruentes. Si esta coincidencia no se da, por la misma razón ninguno de los triángulos puede estar enteramente contenido en el otro, y los triángulos estarán dispuestos como en la fig. 65.

Trazando la línea AC_1, comprobamos, utilizando el lema I del § 8, que los triángulos AC_1A_1 y AC_1C tienen defectos iguales y, consecuentemente, por el lema δ, son equicompuestos. Por esto, los triángulos ABC y A_1BC_1 también lo son.

Con esto queda completamente demostrado el teorema II.

Consideremos ahora un triángulo arbitrario ABC. Tomemos en su lado BC un punto D, y hagamos $BC = a$, $BD = x$. El defecto del triángulo BAD es, evidentemente, una función de x:

$$D(ABD) = D(x)^{*)}$$

*) El autor utiliza la misma letra D para denotar esta función, pero debe quedar bien claro que se trata de una función distinta, cuyo dominio es ahora el conjunto de los reales entre 0 y a, y no el de los triángulos del plano. (*N. del Tr.*)

Si convenimos en considerar que $D(0) = 0$, la función $D(x)$ estará definida para todo valor de x, $0 \leqslant x \leqslant a$.

Demostraremos que $D(x)$ es continua para todo x, $0 \leqslant x \leqslant a$.

Sea $\alpha(x)$ la magnitud de $\angle BAD$, y $\beta(x)$, la de $\angle BDA$. Nos bastará demostrar la continuidad de las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$. Como ambas son monótonas, su continuidad quedará establecida una vez que demostremos que toman todos los valores intermedios entre dos valores cualesquiera de éstas.

Para la función $\alpha(x)$ esto resulta evidente, pues la recta AD puede ser trazada formando un ángulo cualquiera con la recta AB. Es fácil ver, asimismo, que el ángulo entre las rectas AD y BC también toma todos los valores posibles (entre 0 y π, si no se restringe la posición del punto D sobre la recta BC). Efectivamente, tomemos $\angle MON$ de magnitud arbitraria β_0 y desde un punto variable M^* sobre el lado OM de este ángulo bajemos la perpendicular M^*N^* sobre el lado ON. Pongamos $OM^* = x^*$, $M^*N^* = y^*$. En virtud del lema II del § 30,

$$y^* = f(x^*)$$

es una función continua creciente indefinidamente. De aquí se desprende que existe algún valor y_0^* de ésta, igual a la longitud de la altura del triángulo ABC correspondiente al lado BC. Sean M_0^* y N_0^* las posiciones correspondientes de los puntos M^* y N^*. Ubiquemos ahora el triángulo $OM_0^*N_0^*$ de forma que el punto M_0^* coincida con A, y el lado $M_0^*N_0^*$ se sitúe sobre la altura bajada del vértice A al lado BC del triángulo ABC. Evidentemente, en este caso los puntos O y N_0^* quedarán sobre la recta BC. Denotemos con D_0 el punto con el cual coincida el punto O y con x_0, la longitud de BD_0. Por construcción, $\beta(x_0)$ tendrá la magnitud β_0 prescrita, demostrando así nuestra afirmación: la función $D(x)$ es continua para $0 \leqslant x \leqslant a$.

Una vez demostrada la continuidad del defecto $D(x)$, podemos enunciar el siguiente

TEOREMA III. *Cualquiera que sea el número α, que satisface las desigualdades $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{n} D(ABC)$, en el lado BC del triángulo ABC existe un sistema de puntos $D_1, D_2, \ldots, D_n$ tal que cada triángulo BAD_1, D_1AD_2, $\ldots$, $D_{n-1}AD_n$ tenga defecto igual a α.*

La demostración sigue de la continuidad del defecto, que acabamos de establecer.

Después de todo lo que expusimos, resulta posible definir el área de un triángulo.

En la geometría euclidiana el área de un triángulo se define de forma que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

1) triángulos congruentes tienen igual área;

2) si el triángulo Δ está compuesto de los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, el área del triángulo Δ es igual a la suma de las áreas de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$.

Utilizaremos estas mismas dos condiciones como base para definir el área de un triángulo en la geometría no euclidiana.

Precisamente, supongamos que a cada triángulo del plano de Lobachevski se ha puesto en correspondencia cierto número positivo $f(\Delta)$; dicho de otro modo, se ha dado cierta función $f(\Delta)$, cuyo dominio es el conjunto de todos los triángulos y cuyos valores son todos positivos. En este caso, además, se satisfarán las dos condiciones que siguen:

1) si el triángulo Δ_1 es igual al Δ_2, entonces $f(\Delta_1) = f(\Delta_2)$;

2) si el triángulo Δ está compuesto por los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, entonces

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + \ldots + f(\Delta_n).$$

Entonces llamaremos a $f(\Delta)$ área del triángulo Δ.

A fin de que esta definición tenga sentido, hay que demostrar que existe una función $f(\Delta)$ que posea las propiedades 1 y 2. Demostraremos que una tal función existe y es, además, «única», en el sentido de que queda bien determinada si se da su valor para algún triángulo; dicho de otro modo, si a un triángulo se le adscribe un área prefijada, el área de cada triángulo quedará bien determinada.

En cuanto al problema de existencia, éste ha sido resuelto por toda la exposición precedente: el defecto $D(\Delta)$ de un triángulo posee las propiedades 1 y 2. El problema de unicidad del valor del área queda resuelto por el siguiente

TEOREMA IV. *Toda función $f(\Delta)$ que satisface las condiciones 1 y 2 es de la forma*

$$f(\Delta) = kD(\Delta) \tag{*}$$

donde k es una constante positiva, es decir, un número positivo que no depende de Δ.

En efecto, si este teorema es válido, fijando el valor de la función $f(\Delta)$ para algún triángulo Δ_0, determinaremos completamente esta función, pues la igualdad

$$f(\Delta_0) = kD(\Delta_0)$$

determina por completo el valor de la constante k.

Se puede decir que la elección de una de las funciones $f(\Delta)$ como área del triángulo, o, lo que es lo mismo, la elección de la constante k en la igualdad (*), corresponde a la elección de una determinada medida de áreas. Es necesario únicamente tener en cuenta que si se escoge la función $f(\Delta)$ como área arbitrariamente, puede no haber ningún triángulo de área igual a la unidad. Así, si se toma $k < \dfrac{1}{\pi}$, para todo triángulo será $f(\Delta) < 1$, pues el defecto de cada triángulo es menor que π.

Pasemos a la demostración del teorema IV.

Es suficiente demostrar que para dos triángulos cualesquiera Δ y $\bar{\Delta}$ será

$$\frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})} = \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})}.$$

En efecto, en este caso, fijando el triángulo $\bar{\Delta}$ y haciendo $\dfrac{f(\bar{\Delta})}{D(\bar{\Delta})} = k$, obtenemos la ecuación (*).

Fijemos algún entero positivo n y dividamos el triángulo $\bar{\Delta}$ por transversales que partan de alguno de sus vértices en triángulos $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \dots, \bar{\Delta}_n$ de manera que los defectos de cada uno de ellos sean iguales entre sí; entonces,

$$D(\bar{\Delta}_i) = \frac{D(\bar{\Delta})}{n} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Denotemos ahora los vértices del triángulo Δ por A, B, C y determinemos sobre el lado AC un sistema de puntos $A_1, A_2, \dots, A_m$ de forma que se satisfaga la siguiente condición: si Δ_1 es el triángulo ABA_1; Δ_2, el A_1BA_2, etc., entonces

1) los defectos de todos los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ deben ser iguales a $\dfrac{D(\bar{\Delta})}{n}$;

2) o bien el punto A_m coincide con el C, o bien

$$D(A_mBC) < \frac{D(\bar{\Delta})}{n}.$$

El teorema III garantiza la posibilidad de esta construcción.

En efecto, sea m el mayor número natural que satisfaga la desigualdad

$$mD(\bar{\Delta}) \leqslant nD(\bar{\Delta}).$$

Entonces, si hacemos

$$\alpha = \frac{D(\bar{\Delta})}{n},$$

será

$$\alpha \leqslant \frac{D(\Delta)}{m}.$$

Por el teorema III, en el lado AC del triángulo ABC existirán los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a los cuales corresponderán triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ con defectos iguales a α. El punto A_m coincidirá con C, si $\alpha = \dfrac{D(\Delta)}{m}$, y precederá a C, si $\alpha < \dfrac{D(\Delta)}{m}$; evidentemente, en el último caso el defecto del triángulo A_mBC será menor que α, pues de lo contrario tendríamos que $(m + 1)D(\bar{\Delta}) \leqslant nD(\Delta)$, contra la hipótesis.

Es evidente que tienen lugar las relaciones

$$\frac{m}{n} D(\bar{\Delta}) \leqslant D(\Delta) < \frac{m+1}{n} D(\bar{\Delta}),$$

o bien

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})} < \frac{m+1}{n},$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})}.$$

Obsérvese, ahora que como los triángulos $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \ldots, \bar{\Delta}_n, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ tienen defectos iguales, son todos equicompuestos con alguno de ellos, en virtud del teorema II. De aquí y de las condiciones 1 y 2 siguen las igualdades

$$f(\bar{\Delta}_1) = \ldots = f(\bar{\Delta}_n) = f(\Delta_1) = \ldots = f(\Delta_m),$$

o bien

$$f(\bar{\Delta}_i) = \frac{f(\bar{\Delta})}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$f(\Delta_j) = \frac{f(\bar{\Delta})}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{**}$$

Ahora bien, en virtud de la condición 2,

$$mf(\Delta_j) \leqslant f(\Delta) < (m + 1)f(\Delta_j).$$

De aquí y de las igualdades (**) siguen las relaciones

$$\frac{m}{n} f(\bar{\Delta}) \leqslant f(\Delta) < \frac{m+1}{n} f(\bar{\Delta}),$$

o bien

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})} < \frac{m+1}{n},$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})}. \tag{B}$$

Comparando (A) y (B), nos queda:

$$\frac{f(\Delta)}{f(\bar{\Delta})} = \frac{D(\Delta)}{D(\bar{\Delta})}.$$

El teorema IV queda demostrado.

Hemos demostrado así que las condiciones 1 y 2 determinan el área $f(\Delta)$ salvo un factor constante:

$$f(\Delta) = kD(\Delta). \tag{I}$$

Más adelante (en el § 182) estableceremos una dependencia entre la elección de la medida de área y la de longitud (en la geometría euclidiana esta dependencia se establece escogiendo como unidad de área la superficie de un cuadrado que tiene por lado la unidad de longitud). Con esto quedará fijada la constante k al escoger la escala lineal.

Una vez definida el área de un triángulo, la definición de área de un polígono arbitrario es sugerida por razonamientos enteramente naturales: suponiendo que un polígono arbitrario P está dividido en triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, llamaremos área de P al número σ igual a la suma de las áreas de estos triángulos.

El lector puede demostrar fácilmente que el número σ no depende de la partición del polígono en componentes triangulares.

Es esencial hacer algunas observaciones con respecto a lo expuesto arriba.

Por cuanto el defecto de un triángulo, por su propia definición, es menor que π, el área de cada triángulo será menor que $k\pi$. Se puede, pues, enunciar un teorema: en la geometría absoluta, suponer que existe un triángulo de área arbitrariamente grande equivale al V postulado de Euclides. En efecto, como se ve de lo que acabamos de exponer, esta suposición no tiene lugar en el sistema de Lobachevski.

Por otra parte, como existen polígonos formados por un número arbitrario de triángulos iguales, las áreas de los polígonos pueden ser tan grandes como se desee. Además, de la continuidad del defecto sigue que existe algun polígono cuya área sea igual a cualquier número positivo prefijado. En particular, existe un polígono de área unidad.

Para concluir, comparemos la medición de áreas en la geometría de Lobachevski con la medición de áreas en la esfera. Se sabe que el área de un triángulo esférico se da por la fórmula

$$\sigma(\Delta) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \tag{II}$$

donde R es el radio de la esfera y α, β, γ son los ángulos del triángulo. Pero la fórmula (I) puede escribirse así:

$$\sigma(\Delta) = k(\pi - \alpha - \beta - \gamma). \tag{I'}$$

Podemos ver que (I') se obtiene de (II) si sustituimos el radio R de la esfera por la magnitud imaginaria $i\sqrt{k}$. Este resultado fue observado ya por Lambert.

9. Demostración de la consistencia lógica de la geometría de Lobachevski

§ 49. Hemos entablado conocimiento con los resultados básicos de la teoría de las paralelas de Lobachevski. A pesar de que muchos de estos resultados contradicen decididamente nuestras ideas habituales sobre las propiedades de las rectas, sería imposible, aún con el análisis más minucioso, descubrir algún error LÓGICO en lo que hemos expuesto hasta ahora. Por el contrario, la geometría no euclidiana, al menos en la parte que ya conocemos, se presenta como una teoría muy esbelta desde el punto de vista lógico.

Sin embargo, ¿quién garantiza que la geometría no euclidiana no conduzca a contradicciones lógicas al continuar desarrollándola? El propio Lobachevski comprendía perfectamente que para demostrar la independencia del V postulado de Euclides de los demás postulados geométricos, no basta limitarse a exhibir un grupo de teoremas obtenidos bajo la hipótesis de que el postulado de Euclides no es válido y remitirse a la ausencia de contradicciones lógicas en *ese* grupo. Para él estaba claro que aquí es necesario algún razonamiento que muestre que las premisas aceptadas por él *nunca* conducirán a una contradicción, es decir, que la demostración del postulado de Euclides por el método de reducción al absurdo es imposible.

Habiendo obtenido las ecuaciones básicas de su geometría, Lobachevski le dio una interpretación analítica, con lo cual, en principio, demostró su consistencia. Más adelante (a fines del siglo XIX), cuando se consolidaron enfoques suficientemente amplios de los objetos y los axiomas geométricos, la consistencia de la geometría de Lobachevski fue demostrada con un rigor meticuloso y a la vez de manera extremadamente sencilla. Una de estas demostraciones, pertenecientes a H. Poincaré, será reproducida en las páginas que siguen.

A fin de no oscurecer la exposición con dificultades técnicas, consideraremos únicamente la geometría bidimensional.

En este caso, el problema planteado puede enunciarse así: demostrar que los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV y el axioma no euclidiano sobre las paralelas son lógicamente compatibles, es decir, que de estos axiomas no se puede deducir dos afirmaciones tales que una niegue a la otra.

La idea general de resolución de este problema es sugerida por la concepción moderna de los axiomas geométricos. Regresemos al § 11, donde se introducen los objetos geométricos. Allí no hay la más mínima alusión a una descripción de los objetos geométricos: los puntos, las rectas y los planos; únicamente se supone *la existencia* de algunos objetos que son denominados con estas palabras. Después se dice que entre los elementos existen determinadas relaciones, expresadas por los términos «está en…», «entre», «congruentes». Tampoco se hace una descripción de estas relaciones; sólo se supone que éstas poseen algunas, muy escasas, propiedades, que son enumeradas en los axiomas.

Por esto, al estudiar, digamos, la planimetría de Euclides, podemos llamar «punto» y «recta» a objetos concretos arbitrarios, y denotar con los términos «está en…», «entre», «congruentes» a relaciones cualesquiera entre ellos, con la única condición de que concuerden con lo que piden los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV, V. Cada proposición que siga lógicamente de los axiomas I,1 — I,3, II — V, expresará entonces un resultado determinado que corresponderá a los objetos escogidos. Claramente, el significado concreto de cada proposición geométrica abstracta dependerá de cuál sistema de objetos ha sido escogido. Eligiendo determinados objetos cuyas relaciones satisfagan el sistema dado de axiomas, obtenemos UN MODELO del esquema abstracto determinado por estos axiomas.

En la sección precedente nos encontramos con ejemplos de distintos modelos del mismo sistema abstracto de la planimetría de Lobachevski, al estudiar la geometría elemental en las superficies equidistantes. En efecto, como sabemos, las relaciones entre puntos y equidistantes sobre cualquier superficie equidistante y las relaciones entre puntos y rectas en cada plano del espacio de Lobachevski corresponden en igual medida a los axiomas de la geometría no euclidiana del plano. Es verdad que todavía no sabemos si existen los objetos en cuestión, pues el problema de la existencia del espacio de Lobachevski es precisamente el objeto de nuestra discusión.

La demostración de la consistencia del esquema lógico de Lobachevski consiste, precisamente, en la construcción de un modelo concreto de éste.

Resulta más fácil explicar la idea de tal tipo de demostración considerando un problema opuesto al que tenemos por delante. Imaginémonos que de alguna manera ya hemos comprobado la consistencia de la geometría de Lobachevski, y nos planteamos establecer la consistencia de la planimetría de Euclides. Tal problema podríamos resolverlo fácilmente; bastaría considerar la orisfera. En efecto, sobre ésta los puntos y los oriciclos se encuentran precisamente en las relaciones mutuas requeridas por los axiomas de la planimetría euclidiana (véase el § 47). Por esto, si los axiomas de la geometría euclidiana del plano pudiesen conducir a dos consecuencias mutuamente excluyentes, se obtendría con esto una contradicción en la geometría elemental de la orisfera, es decir, en la geometría de Lobachevski, pues la orisfera es un objeto de esta geometría.

Entonces, por cuanto en el espacio de Lobachevski puede construirse un modelo de la planimetría de Euclides, la consistencia de la geometría de Lobachevski implica la de la planimetría de Euclides.

Nuestra finalidad es demostrar la consistencia de la geometría de Lobachevski. Convendremos, al resolver este problema, en suponer consistente la geometría euclidiana (el problema de la consistencia de la geometría euclidiana será considerado en el próximo capítulo). Aunque en el espacio euclidiano no hay superficies cuya geometría elemental coincida con la planimetría de Lobachevski, podremos, de todas formas, construir un modelo de planimetría no euclidiana con objetos del espacio de Euclides. Unicamente nos veremos obligados, al hablar de puntos y rectas, abstraernos aún más de las ideas intuitivas que nos evocan estos términos, que al estudiar la geometría elemental de alguna superficie.

Es más, se puede construr un modelo de la planimetría no euclidiana en el plano euclidiano, y deducir, así, la consistencia de la planimetría de Lobachevski partiendo de la consistencia de la geometría euclidiana del plano.

El resultado preciso que obtendremos se enuncia así: si el sistema de axiomas de la planimetría euclidiana I,1 — I,3, II, III, IV, V es consistente, el sistema constituido por los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV y el axioma sobre las paralelas de Lobachevski tampoco puede conducir a contradicciones lógicas.

Con esto quedará probado que el axioma euclidiano sobre las paralelas no es consecuencia necesaria de los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV.

Más abajo se expone la construcción del modelo o, como también se dice, la interpretación de la planimetría no euclidiana en el plano de Euclides, perteneciente a H. Poincaré.

§ 50. Tomemos en el plano euclidiano una recta x, que, por comodidad, la imaginaremos horizontal. La recta x determina dos semiplanos; uno de ellos se convendrá en llamar «superior». Llamaremos *puntos no euclidianos* a los puntos del semiplano superior (sin incluir los puntos de la recta x) y *rectas no euclidianas*, a las semicircunferencias euclidianas que se encuentran en el semiplano superior y son ortonogales a la recta x (es decir, con centro en la recta x), así como también las semirrectas euclidianas del semiplano superior que parten de x y forman ángulo recto con ella. Para simplificar los enunciados necesarios en el futuro, convendremos en llamar a estas semirrectas, semicircunferencias de radio infinitamente grande.

Entre los puntos y las rectas no euclidianas estableceremos determinadas relaciones, de manera que se cumplan los axiomas I,1 — I,3, II, III, IV, es decir, los axiomas de la geometría absoluta. Después comprobaremos que en el sistema de objetos así construido se realiza el axioma de las paralelas de Lobachevski.

Las relaciones entre los objetos se irán estableciendo gradualmente, a medida que sean necesarias en el estudio ulterior de los axiomas.

Comencemos con los axiomas del grupo I. A dicho grupo le precede la hipótesis de que los objetos geométricos se encuentran en determinadas relaciones, expresadas por los términos «el punto está en la recta», «la recta pasa por el punto», etc.

Debemos establecer cómo interpretar estas expresiones para los puntos y rectas no euclidianos.

Sea A un punto no euclidiano, y a, una recta no euclidiana, representada por alguna semicircunferencia (esta última se denotará, asimismo, con a). Diremos que el punto A se encuentra en la recta (no euclidiana) a, si este punto se encuentra sobre la semicircunferencia euclidiana a, en el sentido de las relaciones establecidas en la geometría euclidiana.

La validez de los axiomas I,1 — I,3 para los puntos y rectas no euclidianos se verifica fácilmente con los métodos de la geometría euclidiana.

En efecto, el axioma I,1 se cumple, pues por dos puntos A y B del semiplano superior siempre se puede trazar una semicircunferencia ortogonal a la recta x.

El axioma I,2 se verifica, pues dos semicircunferencias, representantes de rectas no euclidianas, pueden tener no más de un punto común.

El axioma I,3 se cumple, porque sobre una semicircunferencia existe un número infinito de puntos y en el semiplano superior hay un número infinito de puntos que no están sobre una semicircunferencia.

Pasemos a analizar los axiomas de orden del grupo II. Ante todo debemos convenir en el significado exacto que daremos al término «está entre...» con respecto a puntos no euclidianos sobre una recta no euclidiana.

Sean A, B, C tres puntos de una recta no euclidiana, representada por una semicircunferencia a. Diremos que el punto B (en el sentido no euclidiano) está entre A y C, si sobre la semicircunferencia a el punto B está entre A y C en el sentido de la geometría euclidiana. Dicho de otro modo, el orden de puntos sobre una recta no euclidiana coincide con el orden de puntos sobre la semicircunferencia euclidiana que la representa en el semiplano superior.

Con más detalle, la definición del orden de los puntos de una recta no euclidiana cuando la semicircunferencia que la representa no degenera en una semirrecta euclidiana, puede enunciarse como sigue. Supongamos que alguna recta no euclidiana está representada por la semicircunferencia a, de centro O (el punto O no es un objeto de nuestro sistema). Tomemos alguna recta euclidiana u, paralela a la recta x. Cada recta euclidiana que pasa por O, a excepción de x, corta la semicircunferencia a en un punto M y la recta u en un punto M', que llamaremos correspondiente al punto M.

Entonces, si A, B, C son tres puntos de la recta no euclidiana representada por la semicircunferencia a, el punto B, como objeto de la geometría no euclidiana, está entre A y C, si en el sistema de puntos A', B', C' que en la recta euclidiana u corresponden a los puntos A, B, C, el punto B' está entre A' y C'.

De aquí sigue inmediatamente que para una recta no euclidiana valen los axiomas II,1 — II,3, por cuanto éstos son válidos para cada recta euclidiana.

Observemos, de paso, un resultado importante: *en el conjunto ordenado de puntos de la recta no euclidiana tiene lugar el principio de Dedekind.*

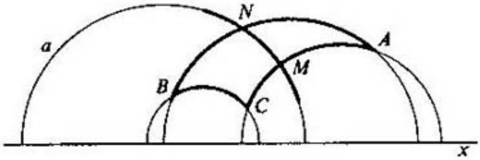


Fig. 66

En efecto, dicho principio tiene lugar en la geometría euclidiana. Pero, como hemos visto, entre los puntos de una recta euclidiana y los de una recta no euclidiana se puede establecer una correspondencia biyectiva de manera que los puntos correspondientes se encuentren en iguales relaciones de orden. Esto demuestra, en esencia, la afirmación enunciada.

Además de los axiomas II,1 — II,3, cuya validez hemos establecido, el grupo II contiene el axioma de Pasch II,4. A fin de comprobar que la proposición de Pasch tiene lugar en nuestro esquema, es necesario demostrar el siguiente teorema euclidiano: sea ABC un triángulo curvo (fig. 66), formado por arcos de semicircunferencia, y a, una semicircunferencia que no pasa por ninguno de los puntos A, B, C; entonces, si a pasa por algún punto interior del arco AC, pasará o bien por un punto del arco AB, o bien por un punto de BC. La demostración de este teorema, totalmente evidente desde el punto de vista intuitivo, no representa interés alguno, y la omitiremos.

La verificación de los axiomas de los dos primeros grupos se redujo a establecer una serie de proposiciones triviales en la geometría de Euclides. El problema es más complejo con los axiomas de congruencia III,1 — III,5, cuyo estudio atacaremos ahora. El significado del método que se utiliza consiste, precisamente, en la definición adecuada de figuras congruentes.

§ 51. El instrumento básico de nuestras construcciones futuras será una aplicación especial del plano euclidiano sobre sí mismo, bien conocida en la geometría elemental, en la teoría de funciones analíticas y en la física matemática bajo el nombre de *inversión*, o bien simetría con respecto a una circunferencia.

Sea dada una circunferencia k con centro en el punto A (fig. 67) y radio r. Sea M un punto arbitrario del plano. Dado el punto M, si éste no coincide con A, siempre se puede determinar de manera unívoca un nuevo punto M', que esté sobre la semirrecta AM y cumpla la condición

$$AM' \cdot AM = r^2 \qquad (*)$$

(uno de los casos de la construcción se muestra en la fig. 67). El punto M' se llama *imagen del punto M* en la inversión con respecto a la circunferencia k o, más sencillamente, *inversión del punto M*.

Convendremos, además, en llamar al punto M' *inversión del punto M con respecto a la recta u*, si M' es simétrico al punto M con respecto a esta recta. En los enunciados que siguen, por regla general no distinguiremos entre la inversión con respecto a una circunferencia y a una recta, considerando a esta última como una circunferencia de radio infinito. La demostración de los teoremas referentes a inversiones la haremos frecuentemente en la hipótesis de que la circunferencia de inver-

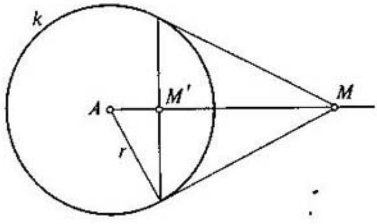


Fig. 67

sión es ordinaria. El caso particular en que ésta tenga radio infinito (es decir, sea una recta) a veces requiere razonamientos complementarios, aunque totalmente triviales; el lector puede fácilmente reproducirlos.

Las siguientes propiedades de la inversión son totalmente evidentes:

1. *Si M' es la inversión de un punto M, M será la inversión de M'. La inversión coincide, pues, con su aplicación inversa.*

2. *En una inversión, el dominio del plano exterior con respecto a la circunferencia k se aplica sobre el interior, y recíprocamente* *).

3. *Cada punto de la circunferencia k coincide con su inversión.*

Estableceremos otras propiedades de la inversión mediante unos pequeños cálculos. Introduzcamos en el plano un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal y pongamos en correspondencia a cada punto M el número complejo $z = x + iy$, siendo x, y las coordenadas de M. Como de costumbre, denotaremos con una raya encima de z al número complejo conjugado de z: $\bar{z} = x - iy$. Evidentemente, cualquiera de los números z o $\bar{z}$ determina el punto M.

Ubiquemos el centro de la circunferencia con respecto a la cual se determina la inversión, en el origen de coordenadas. Entonces, si dos puntos, determinados por los números z y z', son inversiones uno del otro, entonces, como consecuencia de la condición (*), subsistirá la siguiente relación entre z y z':

$$\bar{z}z' = r^2.$$

Obtenemos, de aquí, la representación analítica de la inversión:

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}},$$

o, en coordenadas,

$$x' = r^2 \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$y' = r^2 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

---

*) Si aquí k tiene radio infinito, es decir, es una recta, cualquiera de los dos semiplanos determinados por ella se puede considerar dominio interior, y entonces el otro será considerado exterior.

Utilizando estas fórmulas, es fácil demostrar la llamada propiedad circular de la inversión: si el punto z describe una circunferencia o una recta, su inversión z' describirá, asimismo, una circunferencia o una recta.

Considerando una recta como una circunferencia de radio infinito, la propiedad precedente se enuncia de manera más concisa:

4. *La inversión de una circunferencia es una circunferencia.*

Para probarlo, consideremos una circunferencia arbitraria; supongamos que ésta tiene ecuación

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

Sustituyendo en esta ecuación las coordenadas corrientes x, y por las expresiones

$$x = r^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2},$$

$$y = r^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2},$$

nos queda:

$$Ar^4 + Br^2x' + Cr^2y' + D(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Entonces, las coordenadas de los puntos que son inversiones de los puntos de la circunferencia satisfacen asimismo la ecuación de una circunferencia (o una recta, si $D = 0$); queda así demostrada nuestra afirmación.

En nuestro análisis jugarán un papel central las aplicaciones obtenidas como producto de varias inversiones sucesivas.

Sea dada una tal aplicación, que lleva un punto arbitrario z en otro, z'. No es difícil mostrar que si esta aplicación es producto de un número par de inversiones, z' se expresa en función de z por la fórmula

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{I}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes complejas. Si, en cambio, la aplicación dada se compone de un número impar de inversiones, la dependencia de z' de z es de la forma

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}. \tag{II}$$

Mostremos primero que la inversión con respecto a una circunferencia de centro ARBITRARIO a y radio r se representa analíticamente por una dependencia tipo (II). Introduzcamos, con este fin, un sistema auxiliar de coordenadas con origen en el punto a, cuyos ejes sean paralelos a los del sistema original. Sean M y M' dos puntos que corresponden uno al otro en la inversión con respecto a la circunferenica dada. Si Z y Z' son los números complejos que los determinan en el sistema auxiliar de coordenadas, será

$$Z' = \frac{r^2}{\bar{Z}}.$$

Sean z y z' los números complejos que determinan estos mismos puntos en el sistema inicial. Evidentemente, $z = Z + a$, $z' = Z' + a$. Sustituyendo en la relación precedente Z y Z' por sus expresiones en función de z y z', obtenemos:

$$z' - a = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}},$$

de donde

$$z' = \frac{a\bar{z} + (r^2 - a\bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}},$$

o bien, si hacemos $a = \alpha$, $r^2 - a\bar{a} = \beta$, $1 = \gamma$, $-\bar{a} = \delta$,

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}.$$

Hemos hecho esta discusión en la hipótesis de que la circunferencia de inversión era ordinaria. No es difícil obtener la dependencia entre z y z' para una inversión con respecto a una recta. En efecto, la inversión con respecto al eje real se caracteriza por la ecuación $z' = \bar{z}$. En consecuencia, la inversión con respecto a una recta por el origen se determina analíticamente por la igualdad $e^{i\varphi}z' = \overline{(e^{i\varphi}z)}$ o $z' = e^{-2i\varphi}\bar{z}$; de aquí, con una traslación, se halla la dependencia entre z y z' cuando la recta respecto a la cual se efectúa la inversión ocupe una posición arbitraria; precisamente:

$$z' = e^{-2i\varphi}\bar{z} + \text{const.}$$

Esta dependencia se obtiene de (II) si $\gamma = 0$.

Así, pues, con la relación $z' = \dfrac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma z + \delta}$, escogiendo adecuadamente las constantes α, β, γ, δ, se puede determinar cualquier inversión, ya sea con respecto a una circunferencia ordinaria, ya sea con respecto a una circunferencia de radio infinito.

Supongamos, ahora, que se efectúan dos inversiones sucesivas con respecto a circunferencias arbitrarias. Si la primera aplica z en z', y la segunda, z' en z'', de acuerdo con lo expuesto será

$$z' = \frac{\alpha_1\bar{z} + \beta_1}{\gamma_1\bar{z} + \delta_1}$$

y

$$z'' = \frac{\alpha_2\bar{z}' + \beta_2}{\gamma_2\bar{z}' + \delta_2}.$$

La primera igualdad nos da:

$$\bar{z}' = \frac{\bar{\alpha}_1 z + \bar{\beta}_1}{\bar{\gamma}_1 z + \bar{\delta}_1}.$$

Si sustituimos esta expresión en la segunda igualdad, después de algunas transformaciones nos queda, introduciendo notaciones adecuadas:

$$z'' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

es decir, una dependencia tipo (I). Evidentemente, si efectuamos otra inversión que aplica z'' en z''', la dependencia de z''' de z tendrá la forma (II); si efectuamos una nueva inversión con z''' nuevamente obtenemos (I), etc.

Demostremos ahora las propiedades, que necesitaremos más adelante, del producto de inversiones.

5. *Si una aplicación que representa el producto de un número par de inversiones deja fijos tres puntos del plano, todos los demás puntos en este caso quedarán fijos y la aplicación será en consecuencia, idéntica.*

Como sabemos, una aplicación del tipo indicado de z en z' se caracteriza por la igualdad

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Todos los puntos fijos de esta aplicación se determinan por la ecuación $z' = z$, es decir,

$$z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

o bien

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0.$$

Por hipótesis, la ecuación obtenida debe tener tres soluciones, lo cual es posible únicamente si ésta se reduce a una identidad, es decir, si

$$\gamma = 0, \qquad \delta - \alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

Por consiguiente,

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z.$$

Claramente, $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$, todo punto z se aplica en el mismo punto $z' = 0$, cosa imposible para el producto de inversiones, pues cada una de ellas aplica puntos distintos en puntos distintos). La igualdad $\delta - \alpha = 0$, para $\alpha \neq 0$, nos da $z' = z$, demostrando así nuestra afirmación.

6. *Si una aplicación obtenida como producto de un número impar de inversiones deja fijos tres puntos del plano, será una inversión con respecto a la circunferencia que pasa por estos puntos.*

Sea $z' = f(z)$ la aplicación dada. Si $z'' = \varphi(z')$ es una inversión con respecto a la circunferencia indicada, $z'' = \varphi(f(z))$ es una aplicación obtenida ya por un número par de inversiones, además, deja fijos los mismos tres puntos que la aplicación dada $z' = f(z)$. Según lo visto, $z'' = \varphi(f(z))$ debe ser entonces la aplicación idéntica, es decir, $z'' = z$. Así, $\varphi(z') = z$ y, consecuentemente, z y z' corresponden uno al otro en la inversión con respecto a la circunferencia que pasa por los tres puntos en cuestión; esto era lo que había que demostrar.

Por último, daremos sin demostración otra proposición respecto de las inversiones.

7. *Si dos circunferencias se cortan, entonces bajo cualquier inversión el ángulo que forman en su punto común es igual al ángulo que forman las circunferencias obtenidas como resultado de su aplicación.*

La invariación del ángulo con respecto a las inversiones se demuestra en la teoría elemental de las aplicaciones conformes *).

---

*) Véase, por ejemplo, *A. I. Markushevich*, Elementos de la teoría de funciones analíticas. (*А. И. Маркушевич*, Элементы теории аналитических функций, 1941) (Puede consultarse la traducción de una obra más completa del mismo autor, *A. I. Markushevich*, Teoría de las funciones analíticas, Editorial Mir, Moscú, 1978.

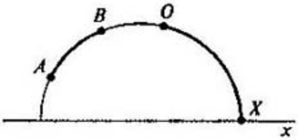


*Fig. 68*a

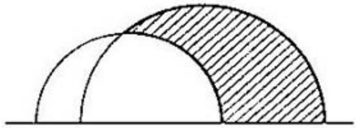


*Fig. 68*b

Ahora podemos regresar a la construcción de un modelo de la geometría no euclidiana.

§ 52. Según la definición dada en el § 50 para el concepto «entre», el orden de los puntos sobre una recta no euclidiana coincide con el de los puntos en la semicircunferencia euclidiana que representa esta recta en el semiplano superior. Por esto, un segmento no euclidiano AB se representa por un arco de semicircunferencia de extremos A, B; una semirrecta no euclidiana con origen en el punto O se representa por un arco OX, cuyo extremo X está sobre la recta x (fig. 68a). Naturalmente, aquí el punto X no debe incluirse entre los puntos de la semirrecta no euclidiana.

Llamaremos *ángulo no euclidiano*, naturalmente, al conjunto de dos semirrectas no euclidianas con origen en un mismo punto (fig. 68b).

Daremos ahora la definición de congruencia de segmentos y ángulos en nuestro modelo de geometría no euclidiana.

Aquí habrá que utilizar fuertemente la inversión. Convendremos en considerar únicamente inversiones que se efectúan con respecto a circunferencias ortogonales a la recta x. Evidentemente, en cada una de estas inversiones los puntos situados en el semiplano superior se aplican en puntos del mismo semiplano. Efectuando, pues, inversiones de figuras del semiplano superior, no nos saldremos de este semiplano.

Diremos que un segmento no euclidiano AB es congruente al segmento no euclidiano $A'B'$, si existe una sucesión de inversiones tal que su producto aplica el arco de circunferencia euclidiano AB sobre el arco de circunferencia $A'B'$.

Análogamente, diremos que el $\angle(h, k)$ no euclidiano es congruente con el $\angle(h', k')$, si existe una sucesión de inversiones tal que su producto aplica los lados del primer ángulo sobre los del segundo [*)].

En virtud de la proposición 7 del § 51, los ángulos congruentes en el sentido de esta definición son iguales entre sí tambien en el sentido que se entiende en la geometría euclidiana con respecto a ángulos curvos. Por el contrario, los arcos circulares que representen segmentos no euclidianos congruentes, no serán, en general, congruentes desde el punto de vista enclidiano, pues las inversiones, si bien conservan las magnitudes de los ángulos, deforman las dimensiones lineales de las figuras.

En nuestro modelo de geometría no euclidiana, las inversiones con respecto a circunferencias ortogonales a la recta x representan desplazamientos congruentes. Estudiemos con más detalle sus particularidades.

Consideremos alguna semicircunferencia del plano superior, ortogonal a la recta x. Bajo una inversión, esta semicircunferencia, según la proposición 4 del § 51, se

---

[*)] Las relaciones establecidas de congruencia de segmentos y ángulos son recíprocas. Esto sigue de que la aplicación inversa de una inversión es también una inversión.

transforma en algún arco de circunferencia (situado, asimismo, en el semiplano superior). La propia recta x se aplica sobre sí misma en esta inversión. Como la inversión conserva las magnitudes de los ángulos, el arco obtenido mediante la inversión de la semicircunferencia considerada tendrá que ser ortogonal a la recta x y, consecuentemente, también será una semicircunferencia. Entonces, la inversión del tipo admitido por nosotros siempre aplica semicircunferencias del plano superior, ortogonales a la recta x, en semicircunferencias del mismo tipo. Esto es un resultado muy importante, pues las semicircunferencias del semiplano superior, ortogonales a la recta x, representan rectas de nuestro modelo de geometría no euclidiana.

Sea, ahora, AB un arco de circunferencia que representa un segmento no euclidiano (fig. 69). Sea S el punto de intersección de la recta euclidiana AB con la recta x (suponiendo que éstas se corten); tracemos por S la tangente SC al arco AB. Por un conocido teorema de la geometría euclidiana, tiene lugar la igualdad $SA \cdot SB = SC^2$. Por esto, si llamamos u a la semicircunferencia de centro S y radio SC, la inversión con respecto a u aplicará el punto A en el B, y el B, en el A. El punto C queda fijo en esta inversión. De aquí sigue que el arco AB se aplica sobre sí mismo, de forma que su parte AC se aplica sobre BC, y BC, sobre AC. Los arcos AC y CB, por ser cada uno la inversion del otro, representan segmentos no euclidianos congruentes; el punto C es, en consecuencia, el punto medio no euclidiano del arco AB. Obsérvese, además, que el arco AB es ortogonal a la semicircunferencia u; esta semicircunferencia representa, pues, la perpendicular en el punto medio del segmento no euclidiano AB. Dicho de otro modo, los puntos A y B son simétricos, en el sentido no euclidiano, con respecto a la recta no euclidiana representada por la semicircunferencia u.

Podemos concluir, de aquí, que *la inversión, considerada desde el punto de vista no euclidiano, no es otra cosa que una simetría con respecto a una recta.*

Toda esta construcción fue efectuada suponiendo que existe el punto S. Si la recta euclidiana AB no corta a la recta x, hay que pensar que el punto S está en el infinito, trazar la tangente al arco AB paralela a x, y sustituir la semicircunferencia u por una semirrecta. En este caso la inversión se transforma en una simetría habitual con respecto a la perpendicular euclidiana a la recta x por el punto medio euclidiano C del arco AB.

Después de esto queda claro el significado de la definición dada arriba de congruencia de imágenes en nuestro esquema: la imagen A es congruente a la imagen A', si A' puede obtenerse de A por medio de cierto número de reflexiones especulares, en el sentido convencional (no euclidiano) que acabamos de describir.

Nuestra próxima finalidad es mostrar que la relación de congruencia que acabamos de establecer satisface todos los axiomas III,1 — III,5.

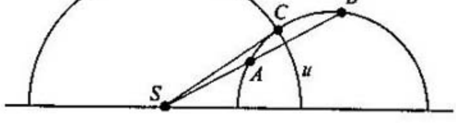


Fig. 69

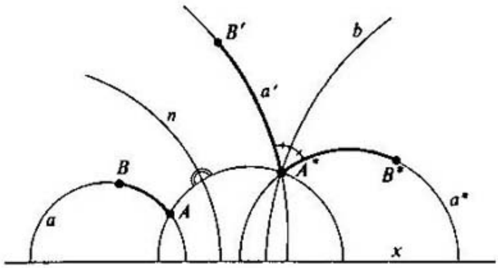


Fig. 70

Consideraremos estos axiomas uno tras otro. El axioma III,1 requiere que en cada recta, por cada uno de sus puntos y a un lado cualquiera se pueda trazar un segmento congruente a otro segmento arbitrariamente dado de alguna recta.

Esto se satisface en nuestro esquema. En efecto, sean a y a^* dos rectas no euclidianas; tomemos en la primera un segmento AB, y en la segunda, un punto A^* (fig. 70). Fijemos, además, una de las dos semirrectas determinadas por el punto A^* en la recta a^*. Tracemos, en la forma indicada antes, la perpendicular (no euclidiana) n en el punto medio del segmento AA^*. Empleando la reflexión especular (no euclidiana) con respecto a esta perpendicular, podemos aplicar la recta a sobre alguna recta a'; el punto A se aplicará, entonces, en el punto A^*, y el segmento AB de la recta a tendrá por imagen un segmento A^*B' de la recta a'. Tracemos ahora la bisectriz (no euclidiana) b del ángulo formado por las dos semirrectas (no euclidianas), una de las cuales va del punto A^* al B', y la otra es la semirrecta fijada de la recta a^*. La reflexión especular con respecto a b (en el sentido no euclidiano) lleva la recta (no euclidiana) a' en la a^*, y el segmento A^*B' de la recta a', en algún segmento A^*B^*. Así, sobre la recta (no euclidiana) a^*, a un lado prefijado de su punto A^* existe un punto B^* tal que el segmento A^*B^* se obtiene por medio de dos reflexiones especulares (no euclidianas) del segmento AB y, en consecuencia, $AB \equiv A^*B^*$ en el sentido adoptado arriba; esto, precisamente, constituye lo que había que probar.

El axioma III,1 exige, además, que entre los puntos de la recta a^* al lado prefijado de A^*, sólo uno determine con A^* un segmento congruente al AB. Demostremos que esto se satisface según nuestra definición de congruencia.

Supongamos que en la recta (no euclidiana) a^*, a un mismo lado de A^*, hay dos puntos diferentes B_1^* y B_2^* tales que se observan las condiciones $AB \equiv A^*B_1^*$ y $AB \equiv A^*B_2^*$. Esto significa que existe alguna sucesión de inversiones cuyo producto aplica el arco de circunferencia AB sobre el arco de circunferencia $A^*B_1^*$, y otra sucesión de inversiones cuyo producto aplica el arco AB sobre el arco $A^*B_2^*$. Sea X_2 el punto de corte de la prolongación del arco AB en la dirección desde A hacia B con la recta x, y X_1 el punto de encuentro con x del arco AB prolongado en sentido opuesto. Denotemos con X_2^* y X_1^* los extremos, determinados análogamente, de la semicircunferencia representante de la recta no euclidiana a^*. Evidentemente, los productos de cada una de las sucesiones de inversiones antedichas aplica X_1 sobre

X_1^* y X_2 sobre X_2^*. Imaginémonos que las inversiones de la primera sucesión se efectúan en orden inverso, y luego se efectúan las inversiones de la segunda sucesión. Como resultado se obtiene una aplicación que denotaremos con f. Evidentemente, al realizar la aplicación f el punto X_1^* coincidirá primero con X_1 y después regresará a la posicion X_1^*; este punto es, pues, un punto fijo de la aplicación f. Análogamente, A^* y X_2^* son puntos fijos de f. En cuanto al punto B_1^*, irá a parar en el punto B_2^* por la aplicación f. De este modo, f tiene tres puntos fijos X_1^*, A^* y X_2^*. En virtud de las proposiciones 5 y 6 del § 51, de aquí sigue que f es o bien la aplicación idéntica, o bien una inversión con respecto a la circunferencia que pasa por los puntos X_1^*, A^*, X_2^*, B_1^* y B_2^*. En ambos casos todos los puntos de esta circunferencia serán puntos fijos de f. En consecuencia, B_1^* y B_2^* no pueden ser diferentes. Esto demuestra la unicidad de la operación de aplicación congruente de un segmento.

Por último, el axioma III,1 requiere que el segmento AB sea congruente al BA. Para verificar esto en el modelo considerado de la geometría no euclidiana, basta efectuar una reflexión especular no euclidiana con respecto al punto medio del segmento AB.

Así, pues, todo lo que pide el axioma III,1 se cumple.

Consideremos el axioma III,2, según el cual si los segmentos $A'B'$ y $A''B''$ son congruentes al AB, entonces $A'B'$ debe ser congruente a $A''B''$.

Esto se cumple evidentemente en nuestro modelo de geometría no euclidiana. Efectivamente, las relaciones $A'B' \equiv AB$ y $A''B'' \equiv AB$ significan que existe una serie de reflexiones especulares no euclidianas como resultado de las cuales $A'B'$ se superpone sobre AB, y existe otra serie que superpone $A''B''$ también sobre AB. Efectuemos las reflexiones especulares de la primera serie y, a continuación, las de la segunda, en orden inverso. Como resultado, $A'B'$ se aplicará sobre $A''B''$, de donde seguirá, precisamente, la congruencia de estos segmentos.

Consideremos, ahora, el axioma III,3.

Sean AB y $A'B'$ segmentos no euclidianos, C, un punto interior del segmento AB y C', un punto interior de $A'B'$. Debemos demostrar que según nuestra definición de congruencia, de $AC \equiv A'C'$ y $CB \equiv C'B'$ sigue que $AB \equiv A'B'$.

Como $AC \equiv A'C'$, existirá una serie de reflexiones especulares no euclidianas cuyo producto aplica AC sobre $A'C'$. El punto B se aplicará simultáneamente en el punto B^* sobre la recta $A'B'C'$; además, B^* estará del mismo lado de C' que B'. Los segmentos $C'B'$ y $C'B^*$ están del mismo lado de C' y, siendo congruentes a CB($C'B'$, por hipótesis, y $C'B^*$, por construcción), tienen que serlo entre sí (por el axioma III,2, ya verificado). Pero entonces, por el axioma III,1, los puntos B^* y B' no pueden ser diferentes. Por lo tanto, el producto de las reflexiones especulares no euclidianas indicadas aplica AB sobre $A'B'$, de donde $AB \equiv A'B'$.

La verificación del axioma III,4 tampoco presenta dificultades. Este axioma exige que a cada semirrecta, de un lado cualquiera, se pueda aplicar un ángulo congruente a un ángulo arbitrario dado, y que esta construcción sea unívoca.

La posibilidad y la univocidad de esta construcción se establecen por razonamientos análogos a los efectuados al verificar el axioma III,1. Precisamente, sea $\angle(h, k)$ un ángulo no euclidiano de vértice O, y h', una semirrecta no euclidiana de origen O'. Ante todo, mediante una reflexión especular no euclidiana con respecto a la perpendicular en el punto medio del segmento OO', aplicamos $\angle(h, k)$ sobre el $\angle(h'', k'')$, cuyo vértice coincida con O'. Luego de esto, una reflexión especular no euclidiana con respecto a la bisectriz de $\angle(h', h'')$ transforma $\angle(h'', k'')$ en $\angle(h', k')$; este ángulo es, por construcción, congruente al $\angle(h, k)$ y está aplicado a algún lado de la semirrecta h'. Si, por casualidad, el lado prefijado era el opuesto, basta aplicar una reflexión especular más con respecto a h'. Ahora hay que demostrar la univocidad de la operación de aplicación de un ángulo a una semirrecta dada a un lado determinado de ésta. Supongamos que $\angle(h', k_1')$ se ha obtenido mediante una serie de reflexiones especulares no euclidianas de $\angle(h, k)$, y que $\angle(h', k_2')$ fue obtenido por medio de otra serie de reflexiones especulares no euclidianas también de $\angle(h, k)$. Sea f el producto de las reflexiones especulares de la primera serie, efectuadas en orden inverso, y las reflexiones especulares de la segunda. Claro, f aplica $\angle(h', k_1')$ sobre $\angle(h', k_2')$. Pero, considerando que las reflexiones especulares no euclidianas son inversiones, y utilizando las proposiciones 5 y 6 del § 51 en forma idéntica a como lo hicimos al verificar el axioma III,1, se puede demostrar que f es o bien la aplicación idéntica, o bien una reflexión especular no euclidiana con respecto a la semirrecta h'. En consecuencia, $\angle(h', k_1')$ y $\angle(h', k_2')$ o bien coinciden, o bien son mutuamente especulares (en el sentido no euclidiano) con respecto a h'; esto es, precisamente, lo que había que establecer.

El axioma III,4 requiere, además, que todo $\angle(h, k)$ sea congruente consigo mismo, es decir, que $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ y $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$. Pero la primera relación es evidente*), y la segunda puede comprobarse efectuando una reflexión especular no euclidiana del ángulo con respecto a su bisectriz.

Por último, las condiciones requeridas por el axioma III,5 se satisfacen en nuestro modelo, cosa fácil de verificar efectuando razonamiendos análogos a los utilizados en los cursos de geometría elemental para demostrar el primer teorema de igualdad de triángulos, pero entendiendo por movimiento el resultado de alguna serie de reflexiones especulares no euclidianas.

Vemos, así, que en el sistema construido de objetos la relación de congruencia satisface todos los axiomas del tercer grupo.

Hecho esto, podemos concluir de inmediato que en este sistema de objetos se verifican los axiomas de continuidad IV,1 y IV,2. En efecto, como observamos en el § 50, en las rectas no euclidianas se observa el principio de Dedekind; entonces, en virtud del teorema 41 del § 23, de los axiomas I — III, más el principio de Dedekind, se desprenden ambas proposiciones, la IV,1 y la IV,2.

Nuestro sistema de objetos satisface, pues, todos los axiomas de la planimetría absoluta I,1 — I,3, II, III, IV. Pero entonces en éste tendrá que realizarse o bien la teoría de paralelas de Euclides, o bien la de Lobachevski. Mostraremos ahora que tiene lugar precisamente el segundo caso.

Sea a alguna semicircunferencia del semiplano superior, ortogonal a la recta x. Sea A algún punto del semiplano superior que no pertenece a esta semicircunferencia (fig. 71). Es fácil comprobar que por A pasa un número infinito de semicircunferencias diferentes, ortogonales a la recta x, que no tienen puntos comunes con la semicircunferencia a. En los términos que convinimos utilizar desde el principio, esto puede expresarse también así: por un punto no euclidiano arbitrario, no pertene-

*) Pues la aplicación idéntica puede considerarse como la aplicación doble de cualquier inversión.

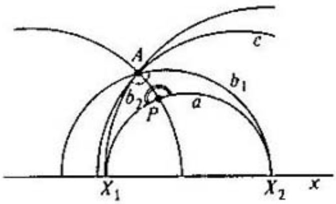


Fig. 71

ciente a una recta no euclidiana dada, pasa un número infinito de rectas no euclidianas que no cortan a la recta dada.

Esto significa, precisamente, que en el sistema considerado de objetos tiene lugar el postulado de Lobachevski; este sistema representa, por consecuencia, un modelo de la geometría de Lobachevski, cuya construcción nos habíamos puesto por finalidad. Utilizando este modelo, se puede dar a cada proposición de la planimetría de Lobachevski una interpretación bien concreta en el plano euclidiano. Para ello, los términos «punto», «recta», «congruentes», etc., que se encuentran en el enunciado de cada proposición, deben interpretarse en el sentido que convinimos, es decir, por «punto» sobreentender un punto euclidiano del semiplano superior, por «recta», una semicircunferencia euclidiana o una semirrecta, ortogonales al borde del semiplano; llamar congruentes a las figuras que pueden aplicarse una sobre la otra como resultado de la aplicación sucesiva de inversiones, etc. Entonces, a cada teorema de Lobachevski le corresponde un teorema euclidiano bien determinado. Por lo tanto, si existiesen contradicciones en la geometría de Lobachevski, también las habría en la euclidiana.

Vemos, así, que *la consistencia de la geometría de Lobachevski sigue de la consistencia de la de Euclides.*

Hemos demostrado, también, que *el postulado de las paralelas de Euclides no puede ser deducido de las premisas de la geometría absoluta.*

En efecto, en el modelo de H. Poincaré se realizan todos los axiomas de la geometría absoluta, pero en lugar del postulado de las paralelas de Euclides tiene lugar el de Lobachevski. Por consiguiente, el postulado de Euclides no es una consecuencia lógica de estos axiomas.

§ 53. Es interesante imaginarnos cómo tales o cuales resultados concretos de la geometría de Lobachevski se interpretan en el semiplano de Euclides.

Observemos la fig. 71. Allí hemos representado una recta no euclidiana como la semicircunferencia a, ortogonal a la recta x, y un punto A. Las rectas no euclidianas que pasan por A y no cortan a la recta dada, se representan mediante semicircunferencias que pasan por A, son ortogonales a x y no intersecan a la semicircunferencia a. Entre estas rectas no euclidianas, como se sabe, deben existir dos rectas fronteras, que se llaman, precisamente, paralelas a la recta dada en sus dos direcciones (sentidos). Las rectas paralelas están representadas en la fig. 71 como las semicircunferencias b_1 y b_2, tangentes a la semicircunferencia a en sus extremos X_1 y X_2, que están sobre la recta x. Como los puntos euclidianos de la recta x no son objetos no euclidianos, debe pensarse que las rectas no euclidianas representadas por las semicircunferencias b_1 y b_2 no cortan a la recta a. El hecho que éstas sean las rectas frontera se verifica directamente.

Tracemos por A una semicircunferencia ortogonal a la recta x que corte la semicircunferencia a en un punto P, también bajo un ángulo recto.

El arco AP, evidentemente, representa una perpendicular no euclidiana a la recta no euclidiana a; el ángulo que ésta forma con el arco b_1 no es otra cosa que el ángulo de paralelismo del segmento AP.

Un resultado enteramente trivial de la geometría de Lobachevski es que la perpendicular AP es la bisecriz del ángulo formado por las rectas no euclidianas b_1 y b_2. En la geometría euclidiana, la igualdad de los ángulos que el arco AP forma con los arcos b_1 y b_2 no es en absoluto evidente; pero no hay necesidad de demostrar tal teorema euclidiano. En efecto, como en el sistema de objetos del modelo de Poincaré tienen lugar todos los axiomas de Lobachevski, también tendrán lugar todos sus corolarios, entre ellos, la afirmación enunciada. De aquí se obtiene, en particular, un método singular de demostración de algunos teoremas euclidianos, utilizando la geometría no euclidiana.

Indiquemos, por ejemplo, el siguiente teorema euclidiano, cuya validez afirmaremos sin ninguna demostración especial: si un triángulo está formado por arcos de circunferencia, cuyas prolongaciones cortan alguna recta en ángulo recto, la suma de los ángulos internos de éste es menor que dos rectos. Evidentemente, este teorema se obtiene del correspondiente en la geometría de Lobachevski, por medio de la interpretación de Poincaré.

Veamos, además, cómo lucen en el modelo de Poincaré las circunferencias no euclidianas, las equidistantes y los oriciclos. Estas líneas son trayectorias ortogonales de haces elípticos, hiperbólicos y parabólicos, formados por rectas no euclidianas (véase el final del § 39).

En la fig. 72 se representa un haz de circunferencias no euclidianas con dos puntos nodales A y A', de los cuales A está en el semiplano superior, y A' en el infe-

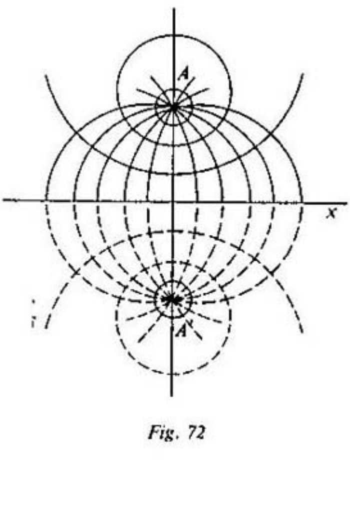


Fig. 72

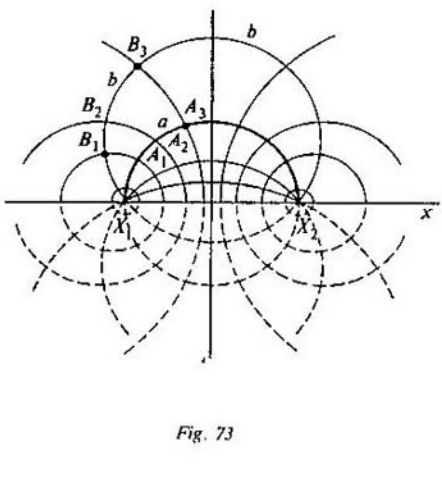


Fig. 73

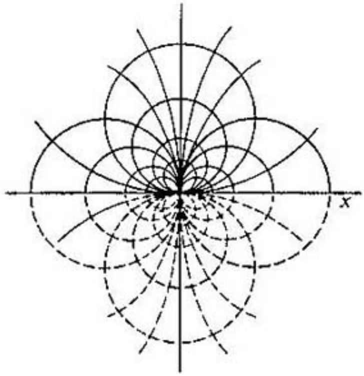


Fig. 74

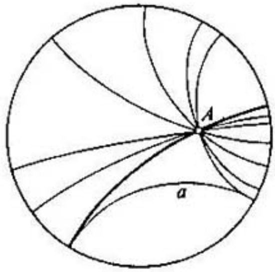


Fig. 75

rior, situado simétricamente a A. Las trayectorias ortogonales de este haz son también circunferencias, que forman un haz sin puntos nodales, pero con puntos límite A y A' (omitimos la demostración). Evidentemente, las mitades superiores de las circunferencias del primer haz representan rectas no euclidianas que pasan por el punto A y, por ende, constituyen un haz elíptico, de manera que las circunferencias ortogonales a ella del segundo haz que estén en el semiplano superior representarán circunferencias no euclidianas de centro común A.

En la fig. 73 se representa una semicircunferencia a ortogonal a la recta x y un haz de circunferencias ortogonales a ella, con puntos límite X_1 y X_2. Las mitades superiores de estas circunferencias representan rectas no euclidianas con perpendicular común a; el conjunto de tales rectas es un haz hiperbólico con base a. Toda circunferencia que pase por X_1 y X_2 representa una trayectoria ortogonal de este haz y, por consiguiente, el arco superior de esta circunferencia representa una equidistante cuya base es la recta no euclidiana a. Los arcos de circunferencia A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... etc. representan las alturas de la equidistante b, congruentes en el sentido no euclidiano.

En la fig. 74 se representa un haz de circunferencias con puntos nodales coincidentes; las mitades superiores de éstas representan rectas no euclidianas paralelas entre sí en una dirección y que forman, por lo tanto, un haz no euclidiano parabólico rectilíneo. Sus trayectorias ortogonales, consideradas desde el punto de vista no euclidiano, son oriciclos, y como objetos del plano euclidiano, circunferencias tangentes entre sí y a la recta x en el punto nodal.

Entonces, un arco de circunferencia que esté en el semiplano superior, representa una recta no euclidiana si tiene sus extremos sobre la recta x y forma con ella un ángulo recto; una equidistante, si, teniendo sus extremos en la recta x, forma con ésta un ángulo diferente del recto; un oriciclo, si sus extremos coinciden y en el punto de coincidencia es tangente a la recta x; por último, una circunferencia no euclidiana, si se trata de una circunferencia euclidiana completa del semiplano superior.

§ 54. Interpretación que acabamos de analizar de la geometría no euclidiana no es, en absoluto, la única posible; existe, además, una infinidad la interpretaciones distintas.

Por ejemplo, podemos interpretar la geometría no euclidiana en el plano de Euclides también de la siguiente manera.

Fijemos en el plano euclidiano alguna circunferencia K. Llamemos puntos no euclidianos a los puntos del plano euclidiano que están dentro de K, rectas no euclidianas, a los arcos, pertenecientes al interior de K, de circunferencias euclidianas ortogonales a ella (incluyendo los diámetros). A los conceptos de pertenencia mutua y de orden de los elementos geométricos les mantendremos su significado euclidiano.

Diremos que dos imágenes no euclidianas son mutuamente especulares en el sentido no euclidiano, si sus imágenes euclidianas en el interior de K pueden ser aplicadas una sobre la otra mediante una inversión con respecto a alguna circunferencia ortogonal a la circunferencia K. Diremos que dos imágenes no euclidianas son congruentes si pueden aplicarse una sobre la otra por medio de alguna serie de reflexiones especulares no euclidianas.

Efectuando razonamientos análogos a los hechos en los §§ 50 — 52, se puede mostrar que con tal definición de objetos geométricos y relaciones entre ellos, se satisfacen todos los axiomas de la geometría absoluta. Hecho esto, no es difícil decidir cuál teoría de las paralelas se realiza en el sistema de rectas no euclidianas dentro del círculo K. Sea a un arco de circunferencia ortogonal a la circunferencia K, y A, un punto en el interior de K que no pertenece a esta arco (fig. 75). Con métodos de geometría euclidiana elemental es fácil mostrar que por el punto A pasa un número infinito de arcos de circunferencia ortogonales a K y que no cortan el arco a. Esto significa que en el sentido de las relaciones que se han establecido para las imágenes no euclidianas dentro de K, en el sistema de estas imágenes se realiza el postulado de las paralelas de Lobachevski. Por consiguiente, hemos obtenido una nueva interpretación de la planimetría de Lobachevski en el plano de Euclides.

Cada proposición de la geometría de Lobachevski, enunciada en forma abstracta, puede ser interpretada en el semiplano euclidiano o dentro de un círculo euclidiano; se obtendrá, entonces, un cierto teorema de la geometría euclidiana, cuyo significado concreto dependerá del método escogido de interpretación. La posibilidad de obtener por esta vía teoremas euclidianos a partir del esquema lógico abstracto de Lobachevski encuentra su aplicación en la teoría geométrica de funciones de variable compleja, en donde se establece, asimismo, una relación estrecha entre las dos interpretaciones que acabamos de describir de la geometría de Lobachevski y se indican principios generales para construir un conjunto infinito de otras interpretaciones [*].

---

[*] Véase, por ejemplo, *А. И. Маркушевич*, Элементы теории аналитических функций (*A. I. Markushevich*, Elementos de la teoría de las funciones analíticas) (O bien la obra del mismo autor en español, Teoria de la funciones analíticas, Editorial Mir, Moscú, 1978. *N. del Tr.*)

10. Relaciones métricas fundamentales de la geometría de Lobachevski

§ 55. La singularidad de la geometría de Lobachevski se manifiesta de manera particularmente notoria en el estudio de sus relaciones métricas, es decir, las relaciones entre diversas magnitudes geométricas. Una de estas relaciones, precisamente, la expresión del área de un triángulo en función de la suma de sus ángulos internos, ya fue estudiada en el § 48. En la presente sección estableceremos la fórmula fundamental de Lobachevski, que expresa el ángulo de paralelismo en función del segmento correspondiente, y las fórmulas de la trigonometría de Lobachevski (que establecen relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo). Al deducir estas fórmulas, supondremos que el plano de Lobachevski se realiza con el modelo de Poincaré, es decir, los términos «punto», «recta», «está en», «entre», «congruentes» se interpretarán de la forma concreta convenida en los §§ 50 — 52. Esta deducción de las fórmulas de Lobachevski es suficientemente sencilla y clara. Además, revela claramente los nexos entre la geometría de Lobachevski y la teoría de funciones de variable compleja; pero esta deducción, por supuesto, no nos permite afirmar que las fórmulas así obtenidas son válidas en la geometría de Lobachevski en general, es decir, que tienen lugar al interpretarla en cualquier modelo.

En el capítulo VII daremos una deducción de las mismas fórmulas, partiendo de los axiomas, sin considerarlos realizados en modelo alguno. Con esto habremos mostrado que tales fórmulas son válidas para cualquier modelo de la geometría de Lobachevski. La deducción de las fórmulas fundamentales de la geometría de Lobachevski expuesta en el capítulo VII es también muy sencilla, pero se basa en algunas proposiciones de geometría proyectiva. Tales proposiciones se encuentran en el capítulo VII; por esto, el lector que esté de acuerdo en aceptarlas, puede, si lo desea, omitir los capítulos dedicados a la geometría proyectiva y estudiar directamente la deducción abstracta de las fórmulas de Lobachevski (véanse los §§ 216 — 221, 229 — 232).

§ 56. Ante todo habrá que presentar algunas proposiciones sobre los invariantes de las transformaciones lineales fraccionales de variable compleja. Como de costumbre, representaremos al número $z = x + iy$ por el punto de coordenadas cartesianas x, y; utilizaremos indistintamente los términos «el número z» y «el punto z».

Consideremos la transformación

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

donde z es una variable compleja, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes (en general, complejas). La transformación de la variable z en la variable z', expresada por una fórmula de tipo (1), lleva el nombre de *lineal fraccional* (ya hemos encontrado tales transformaciones en el § 51). Se sobreentiende que en la fórmula (1) al menos uno de los números γ, δ se asume diferente de cero.

En número $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ se llama *determinante* de la transformación lineal fraccional. Es fácil ver que si $\Delta = 0$, a todos los puntos z (escogidos, claro está, con la condición de que $\gamma z + \delta \neq 0$) les corresponde, por la fórmula (1), un mismo punto z'. En efecto, si $\Delta = 0$, los números α, β son proporcionales a γ, δ, es decir,

$\alpha = k\gamma$, $\beta = k\delta$ y, por consiguiente,

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{k(\gamma z + \delta)}{\gamma z + \delta} = k.$$

Por el contrario, si $\Delta \neq 0$, a distintos puntos z_1, z_2 les corresponden, por la fórmula (1), también puntos distintos z_1', z_2'. Efectivamente, tenemos:

$$z_1' - z_2' = \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} - \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)}(z_1 - z_2),$$

es decir,

$$z_1' - z_2' = \frac{\Delta}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)}(z_1 - z_2). \tag{2}$$

Entonces, cuando $\Delta \neq 0$, si $z_1 \neq z_2$, también $z_1' \neq z_2'$.

En el caso $\Delta = 0$, la transformación lineal fraccional se llama *degenerada*; en el caso $\Delta \neq 0$, *no degenerada*. De acuerdo con lo expuesto, una transformación degenerada aplica todos los puntos del plano en uno solo; la no degenerada aplica puntos diferentes en puntos diferentes. En ambos casos, el punto z para el cual $\gamma z + \delta = 0$ debe ser descartado de la consideración; éste no posee punto correspondiente.

En lo que sigue consideraremos únicamente transformaciones lineales fraccionales no degeneradas. Para nuestra discusión es esencial que cada transformación lineal fraccional no degenerada del tipo (1) posee transformación inversa

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha} \tag{3}$$

la cual, evidentemente, es también lineal fraccional y no degenerada (pues su determinante es $\Delta' = \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0$).

La existencia del punto excepcional $z = -\delta/\gamma$, para el cual la fórmula (1) pierde sentido, complica el enunciado de las proposiciones referentes a las transformaciones lineales fraccionales. Para facilitar estos enunciados, completaremos el plano de variable compleja con un nuevo objeto, que llamaremos *punto del infinito* [*)] y denotaremos con el símbolo ∞; convendremos en considerar que en una transformación no degenerada de tipo (1), el punto $z = -\delta/\gamma$ tiene por imagen al punto del infinito. El punto del infinito se considera imagen del punto excepcional de cada transformación lineal fraccional no degenerada. En particular, con respecto a la transformación (3), el punto del infinito es imagen del punto $z' = \alpha/\gamma$. Como las transformaciones (1) y (3) son mutuamente inversas, con respecto a la transformación (1) el punto del infinito debe considerarse PREIMAGEN del punto $z' = \alpha/\gamma$. Así, entonces, de acuerdo con nuestra convención, la transformación no degenera-

---

[*)] Conviene observar la diferencia entre esta condición y la del § 38. En el plano complejo se introduce un único punto del infinito ∞, mientras que en el plano de Lobachevski cada familia de rectas paralelas determina un punto del infinito diferente. En el plano proyectivo (véase el § 80) se hace una condición similar a esta última. (*N. del Tr.*)

da (1) lleva el punto $z = -\delta/\gamma$ en el punto $z' = \infty$ y el punto $z = \infty$ en $z' = \alpha/\gamma$.

Obsérvese, por último, que si $\gamma = 0$, no habrá punto excepcional, pues cada punto del plano tiene imagen (ordinaria). Con respecto a estas transformaciones convendremos en considerar que el punto del infinito es imagen de sí mismo.

Sean u, v, s, t cuatro puntos diferentes. Supongamos que todos ellos son ordinarios (es decir, que entre ellos no está el punto del infinito). Entonces el número denotado por el símbolo $(uvst)$ y definido por la igualdad

$$(vust) = \frac{u-s}{u-t} : \frac{v-s}{v-t} \tag{3'}$$

se llama *razón compuesta*, o bien *doble*, o bien *cruzada* de los números u, v, s, t, considerados en ese orden. La razón compuesta de estos mismos números dados en otro orden puede tener ya otro valor; por ejemplo, si $(uvst) = \lambda$, entonces

$$(vust) = \frac{1}{\lambda}, \qquad (uvts) = \frac{1}{\lambda}. \tag{4}$$

Si entre los puntos dados está el punto del infinito, la razón compuesta se determina por una de las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned} (uvs\infty) &= \frac{u-s}{v-s}, \qquad (uv\infty t) = \frac{v-t}{u-t},\\ (u\infty st) &= \frac{u-s}{u-t}, \qquad (\infty vst) = \frac{v-t}{v-s}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Obsérvese que la primera de estas fórmulas se obtiene pasando al límite en (3′) cuando $t \to \infty$, la segunda, cuando $s \to \infty$, etc.

La razón compuesta de cuatro puntos es un invariante de las transformaciones lineales fraccionales no degeneradas; esto significa que si alguna transformación lineal fraccional no degenerada lleva los cuatro puntos u, v, s, t respectivamente en u', v', s', t', entonces

$$(u'v's't') = (uvst).$$

Haremos la demostración primero para el caso en que ni entre los puntos dados ni entre sus imágenes está el infinito. Supongamos que la transformación que lleva u, v, s, t en u', v', s', t' se da por medio de la fórmula (1); entonces, de acuerdo con (2),

$$u' - s' = \frac{\Delta}{(\gamma u + \delta)(\gamma s + \delta)}(u - s),$$

$$u' - t' = \frac{\Delta}{(\gamma u + \delta)(\gamma t + \delta)}(u - t),$$

de donde

$$\frac{u' - s'}{u' - t'} = \frac{u - s}{u - t} \cdot \frac{\gamma t + \delta}{\gamma s + \delta}.$$

Análogamente,

$$\frac{v' - s'}{v' - t'} = \frac{v - s}{v - t} \cdot \frac{\gamma t + \delta}{\gamma s + \delta}.$$

En consecuencia,

$$\frac{u' - s'}{u' - t'} : \frac{v' - s'}{v' - t'} = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t},$$

es decir, $(u'v's't') = (uvst)$.

Supongamos, ahora, que todos los puntos u, v, s, t son ordinarios, y alguno de los puntos u', v', s', t' es infinito, por ejemplo, $t' = \infty$. Esto significa que $\gamma t + \delta = 0$. Entonces

$$(u'v's't') = (u'v's'\infty) = \frac{u' - s'}{v' - s'} = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{\gamma v + \delta}{\gamma u + \delta} =$$

$$= \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{v + (\delta/\gamma)}{u + (\delta/\gamma)} = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{v - t}{u - t} = \frac{u - s}{u - t} : \frac{v - s}{v - t} = (uvst).$$

El caso en que alguno de los puntos u, v, s, t sea el infinito y todos los u', v', s', t' sean ordinarios se reduce al precedente. En efecto, considerando la transformación inversa a la dada, hallamos, basándonos en lo expuesto, que $(uvst) = (u'v's't')$.

Falta analizar el caso en que uno de los puntos u, v, s, t es infinito y tiene por imagen al infinito *); si la transformación se da por la fórmula (1), este caso tiene lugar para $\gamma = 0$.

Supongamos, por ejemplo, que $t = \infty$ y $t' = \infty$. Entonces

$$(u'v's't') = (u'v's'\infty) = \frac{u' - s'}{v' - s'} = \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{\gamma v + \delta}{\gamma u + \delta} =$$

$$= \frac{u - s}{v - s} \cdot \frac{\delta}{\delta} = \frac{u - s}{v - s} = (uvs\infty) = (uvst).$$

Así, pues, en todos los casos $(u'v's't') = (uvst)$; nuestra afirmación queda demostrada.

§ **57.** También tendremos que considerar la transformación de la variable z en la variable z' determinada por la fórmula

$$z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta} \tag{6}$$

y llamada lineal fraccional de segunda especie (recuérdese que $\bar{z}$ denota el conjugado de z); en el § 51 ya nos topamos con estas transformaciones.

Una transformación de tipo (6) se dice *degenerada*, si $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 0$, y *no degenerada*, si $\Delta \neq 0$; una transformación degenerada aplica todos los puntos en uno solo, mientras que las no degeneradas transforman puntos diferentes en puntos

*) Tambien falta discutir el caso en que alguno de los u, v, s, t es ∞ y uno de los u', v', s', t' que no sea su imagen, también. El lector puede ejercitarse reproduciendo los detalles ausentes. (*N. del Tr.*)

diferentes (se demuestra igual que la afirmación análoga para las transformaciones de primera especie). En lo que sigue entre las transformaciones del tipo 6 consideraremos sólo transformaciones no degeneradas.

Sean u, v, s, t *puntos diferentes cualesquiera, y* u', v', s', t' *sus imágenes respecto de una transformación no degenerada del tipo* (6); *entonces la razón compuesta de los puntos* u', v', s', t' *es el número conjugado de la razón compuesta de* u, v, s, t. En símbolos, esta afirmación se expresa por la igualdad

$$(u'\,v'\,s'\,t') = \overline{(uvst)}.$$

Para probarlo, representemos la transformación (6) en forma de producto de dos transformaciones,

$$z' = \frac{\alpha z'' + \beta}{\gamma z'' + \delta} \tag{7}$$

y

$$z'' = \bar{z}. \tag{8}$$

Con respecto a la transformación (8) consideraremos que la imagen del punto del infinito es el propio infinito.

Obsérvese, ahora, que si todos los puntos que forman una razón compuesta son sustituidos por sus conjugados, la propia razón compuesta será sustituida por su conjugada. Por esto, denotado con u'', v'', s'', t'' las imágenes de u, v, s, t con respecto a la transformación (8), tendremos:

$$(u''\,v''\,s''\,t'') = \overline{(uvst)}.$$

Ahora, como la transformación (7) el líneal fraccional de primera especie,

$$(u'\,v'\,s'\,t') = (u''\,v''\,s''\,t'').$$

De estas dos igualdades obtenemos lo que queríamos:

$$(u'\,v'\,s'\,t') = \overline{(uvst)}.$$

§ 58. Ahora pasaremos a exponer el tema principal de esta sección. Ante todo, estableceremos la fórmula que expresa la distancia no euclidiana entre dos puntos del modelo de Poincaré (véanse los §§ 50 — 52).

Sean u, v dos puntos del semiplano superior. La recta no euclidiana que pasa por u, v se representa por una semicircunferencia no euclidiana que pasa por ellos y es ortogonal al eje x. Sean s y t los puntos de apoyo de esta semicircunferencia sobre dicho eje (fig. 76; recuerde el lector que los puntos del eje x, entre ellos s y t, no se incluyen en el modelo de Poincaré). Si la semicircunferencia ortogonal al eje x la cual pasa por los puntos u y v degenera en una recta (euclidiana), denotaremos con s el punto de apoyo de esta recta sobre el eje x, y con t, el punto del infinito (fig. 77). Consideremos la razón compuesta $(uvst)$. Es fácil mostrar que se trata de un número real y positivo. Demostremos esto primero para el caso representado en la fig. 76 (suponemos que s está a la izquierda de t). Sean r_1 y r_2 los módulos de los números $u - s$ y $u - t$, y θ_1, θ_2, sus argumentos. Como $\angle(sut)$ es recto,

$$\theta_2 - \theta_1 = \pi/2;$$

por lo tanto,

$$\frac{u - s}{u - t} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

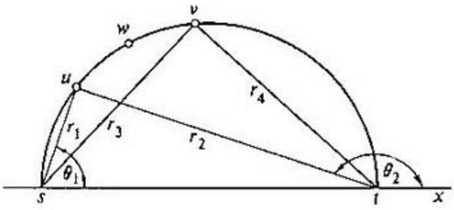


Fig. 76

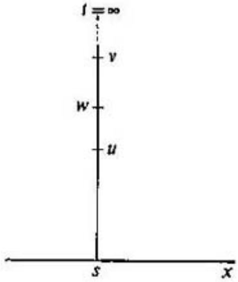


Fig. 77

Análogamente,

$$\frac{v-s}{v-t} = \frac{r_3}{r_4} e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

donde $r_3 = |v - s|$, $r_4 = |v - t|$. De aquí sigue que

$$(uvst) = \frac{r_1}{r_2} : \frac{r_3}{r_4} > 0. \tag{9}$$

En el caso correspondiente a la fig. 77, los números $u - s$ y $v - s$ son reales y tienen igual signo; por ende, en este caso

$$(uvst) = (uvs\infty) = \frac{u-s}{v-s} = \frac{r_1}{r_3} > 0. \tag{10}$$

Así, pues $(uvst) > 0$. Por tanto, podemos tomar el logaritmo del número $(uvst)$, entendiendo el logaritmo en el sentido del álgebra elemental.

Demostraremos que *la distancia no euclidiana entre puntos arbitrarios u y v del modelo de Poincaré se expresa por la fórmula*

$$\rho(u, v) = R\,|\ln(uvst)|, \tag{11}$$

donde R es alguna constante positiva (la elección de la constante R equivale a la elección de la escala).

Para demostrarlo, debemos establecer que $\rho(u, v)$ satisface las tres condiciones de definición de longitud de un segmento (véase la definición 12 del § 20). Pasemos a verificar esto.

1. Sea u', v' un par de puntos del semiplano superior que determina un segmento no euclidiano congruente del segmento determinado por el par de puntos u, v. Sean s', t' los puntos que se hallan a partir de u', v' por la misma construcción que determina s, t a partir de u, v. Según la definición de congruencia de segmentos no euclidianos en el modelo de Poincaré (véase el § 52), si el segmento no euclidiano uv es congruente del $u'v'$, existe una sucesión de inversiones cuyo producto lleva los puntos u, v, s, t en u', v', s', t'. Como se mostró en el § 51, el producto de cualquier número de inversiones representa una transformación lineal fraccional bien de primera especie, bien de segunda; en ambos casos la transformación es no degenera-

da, pues cada inversión aplica puntos diferentes en puntos diferentes. En el primer caso, tenemos que $(u'v's't') = (uvst)$ (véase el § 55), y en el segundo, $(u'v's't') = \overline{(uvst)}$ (véase el § 56). Pero más arriba, en esta misma sección, mostramos que $(uvst)$ es un número real; por ende, $\overline{(uvst)} = (uvst)$. Así, pues, en ambos casos $(u'v's't') = (uvst)$. De aquí y de la fórmula (11) nos queda que $\rho(u'v') = \rho(uv)$. Obsérvese, por último, que $(uvst) \neq 1$ (cosa que sigue de inmediato de (9) y (10)), por lo cual $\ln(uvst) \neq 0$ y $\rho(uv) > 0$. De esta manera, la fórmula (11) pone en correspondencia a cada segmento no euclidiano un número positivo, de forma que a segmentos congruentes les correspondan números iguales. Queda, así, satisfecha la primera condición de la definición 12 del § 20.

2. Sea w un punto arbitrario del interior del segmento no euclidiano uv (figs. 76, 77). Un cálculo sencillo muestra que

$$(uvst) = (uwst)(wvst)$$

y que los números $(uwst)$ y $(wvst)$ son o bien ambos mayores que la unidad, o bien ambos menores que ésta (aquí lo más fácil es recurrir a las fórmulas (9) y (10)). De aquí sigue que

$$\ln(uvst) = \ln(uwst) + \ln(wvst),$$

siendo ambos logaritmos del segundo miembro positivos, o bien ambos negativos. Por consiguiente,

$$|\ln(uvst)| = |\ln(uwst)| + |\ln(wvst)|$$

y la fórmula (11) nos da:

$$\rho(uv) = \rho(uw) + \rho(wv).$$

Vemos, así, que se satisface la segunda condición de la definición 12 del § 20.

3. Si el punto v sobre la recta no euclidiana tiende al punto u, entonces $(uvst) \to 1$; si el punto v tiende al punto t, será $(uvst) \to 0$ (véanse la fig. 76 y la fórmula (9), donde r_1, r_2, r_3, r_4 denotan las distancias euclidianas entre los puntos u y s, u y t, v y s, v y t). En el primer caso $\ln(uvst) \to 0$, en el segundo $\ln(uvst) \to -\infty$; consecuentemente, en el primer caso será $\rho(uv) \to 0$, en el segundo, $\rho(uv) \to +\infty$.

De la fórmula (11) se aprecia que $\rho(uv)$ depende continuamente del punto v. De aquí y del razonamiento precedente sigue que $\rho(uv)$ toma todos los valores entre 0 y $+\infty$; en particular, existirá un par de puntos u, v para el cual $\rho(uv) = 1$. Esto significa que también la tercera condición de la definición 12, § 20, se satisface.

Hemos demostrado, pues, que el número $\rho(uv)$, puesto en correspondencia a un par arbitrario de puntos u, v según la fórmula (11), es la longitud del segmento no euclidiano uv (en alguna escala) o, dicho de otra forma, la distancia no euclidiana entre los puntos u y v.

Si el segmento unitario u_1v_1 se determina de antemano, la constante R en la fórmula (11) debe ser fijada para que se cumpla la igualdad $\rho(u_1v_1) = 1$.

§ 59. Ahora obtendremos la célebre fórmula de Lobachevski, que expresa la función $\Pi(x)$ por medio de funciones elementales del argumento x. Recuerde el lector que $\alpha = \Pi(x)$ denota el ángulo de paralelismo correspondiente a un segmento de longitud x (véanse el § 33 y la fig. 46). Como en esta sección hemos denotado con x las abscisas de los puntos del modelo de Poincaré, a fin de evitar equivocaciones denotaremos ahora por l el argumento de la función de Lobachevski.

El ángulo de paralelismo que corresponde a un segmento se determina por la

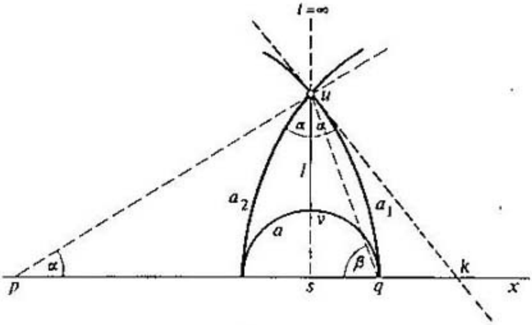


Fig. 78

longitud de este segmento y no depende de su posición; por esto, para deducir la fórmula que buscamos podemos tomar un segmento no euclidiano en el modelo de Poincaré de manera que los razonamientos ulteriores resulten lo más sencillos posibles. Teniendo esto presente, consideraremos un segmento no euclidiano que se represente en el modelo de Poincaré como un segmento de recta euclidiana perpendicular al eje x. Sean u y v los extremos del segmento en cuestión, y s, el punto de intersección de la recta uv con el eje x (fig. 78); admitiremos que el punto u se encuentra, en nuestro modelo, por encima del punto v. Supondremos, además, que la distancia euclidiana de v al eje x es igual a la unidad. Los demás elementos que necesitaremos se especifican en la fig. 78. Aquí hemos denotado con a la semicircunferencia que representa la recta no euclidiana perpendicular al segmento uv en su extremo v; con a_1 y a_2, las semicircunferencias representantes de las rectas no euclidianas que pasan por u y son paralelas a la recta no euclidiana a; p es el centro de la semicircunferencia a_1; q, el extremo (derecho) común de las semicircunferencias a y a_1; α denota cada uno de los ángulos que forman las semicircunferencias a_1 y a_2 con el segmento uv; como en el modelo de Poincaré la magnitud no euclidiana de un ángulo coincide con su magnitud euclidiana, α es el ángulo de paralelismo que corresponde al segmento uv. Sea l la longitud no euclidiana del segmento uv; nuestra finalidad es expresar α en función de l.

Sea h la distancia euclidiana entre los puntos u y s; entonces $u - s = h$, $v - s = 1$ y tenemos, en virtud de la fórmula (11),

$$l = R\,|\ln(uvs\infty)| = R\left|\ln\frac{u-s}{v-s}\right| = R\,|\ln h|.$$

Como $h > 1$, $\ln h > 0$, de modo que

$$l = R\ln h. \tag{12}$$

Obsérvese, ahora, que $\angle\, upq = \alpha$ (para comprobarlo, basta tomar en consideración que α es el ángulo entre el segmento uv y la semicircunferencia a_1, es decir, el ángulo entre el segmento uv y la tangente uk a la semicircunferencia a_1; claramente, $\angle\, upq = \angle\, suk$, pues estos ángulos son agudos y $us \perp pq$, $uk \perp up$). Ahora bien, como el triángulo upq es isósceles, $\angle upq = \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$. Considerando el triángulo usq, hallamos:

$$h = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}. \tag{13}$$

De las fórmulas (12) y (13) sigue que

$$l = R \ln \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

por lo cual

$$\alpha = 2\operatorname{arctg} e^{-l/R}.$$

Pero $\alpha = \Pi(l)$; consecuentemente,

$$\Pi(l) = 2\operatorname{arctg} e^{-l/R}. \tag{14}$$

Esta es, precisamente, la fórmula de Lobachevski que nos propusimos deducir; esta fórmula juega un papel fundamental en la geometría de Lobachevski, pues da una expresión exacta del ángulo de paralelismo correspondiente a un segmento de longitud l.

§ 60. Consideraremos segmentos del plano de Lobachevski cuya longitud no supera algún número positivo L. Hagamos

$$\alpha_0 = 2\operatorname{arctg} e^{-L/R};$$

entonces, si $l \leqslant L$, tendremos:

$$\alpha_0 \leqslant \Pi(l) < \pi/2.$$

La magnitud α_0 puede ser tan próxima a $\pi/2$ como se desee, si R es suficientemente grande en comparación con L. Consecuentemente, para todos los segmentos de longitud $l \leqslant L$ el ángulo de paralelismo $\Pi(l)$ será próximo a $\pi/2$. En otras palabras, si se observa alguna parte del plano de Lobachevski en donde las distancias entre todos los puntos no superan L, el carácter no euclidiano de dicho plano se revelará en tanto menor grado, cuanto mayor sea R en comparación con a L. En virtud de esto, el número R puede ser considerado como la «medida de no euclidianidad» del plano de Lobachevski; un segmento de longitud se llama radio de curvatura del plano de Lobachevski. El número R depende, por supuesto, de la elección de la escala; en una elección adecuada se puede obtener, en particular, $R = 1$. Sin embargo, el radio de curvatura para cada modelo concreto de la geometría de Lobachevski representa un segmento bien determinado, salvo desplazamientos congruentes. Por ejemplo, para el modelo de Poincaré el radio de curvatura es un segmento uv que satisfaga la condición $\ln(uvst) = 1$. Una descripción general del radio de curvatura, es decir, una descripción que no dependa de la elección de un modelo de la geometría de Lobachevski, puede encontrarse en el § 216.

§ 61. En el presente parágrafo estableceremos las relaciones básicas de la trigonometría de Lobachevski, suponiendo, como arriba, que el plano de Lobachevski se representa con el modelo de Poincaré.

Sea ABC un triángulo arbitrario. Sean α, β, γ las magnitudes de sus ángulos en los vértices A, B, C, y a, b, c, las longitudes no euclidianas de los lados BC, AC, AB.

Utilizando un desplazamiento congruente, situemos este triángulo relativamente

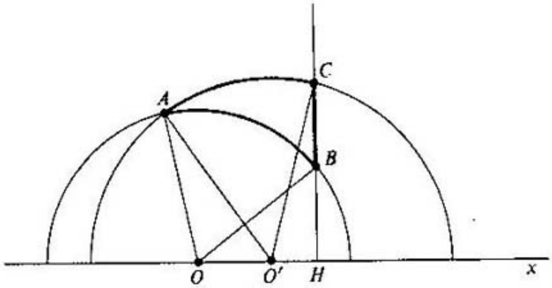


Fig. 79

a los ejes cartesianos del modelo, de forma que la recta no euclidiana BC se represente por una semirrecta euclidiana perpendicular al eje Ox. Sea H el punto donde esta semirrecta se apoya en el eje Ox (fig. 79). Las rectas no euclidianas AB y AC se representarán por ciertas semicircunferencias euclidianas con centro sobre el eje Ox; sean O y O' sus centros. Sin restringir la generalidad, podemos suponer que B está entre H y C. Entonces,

$$a = R\ln\frac{HC}{HB}, \tag{1}$$

donde HC y HB son las longitudes euclidianas de los segmentos (esta fórmula se demuestra igual que la (12) del § 60). Los razonamientos que siguen se basan en la fórmula (1).

Ante todo, obtendremos *la expresión de los lados del triángulo en función de sus ángulos**). De (1) sigue que

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{HC}{HB} + \frac{HB}{HC}\right) = \frac{HB^2 + HC^2}{2HB \cdot HC}. \tag{2}$$

Se tienen las relaciones euclidianas evidentes:

$$HB^2 = OB^2 - OH^2 = OA^2 - OH^2,$$
$$HC^2 = O'C^2 - O'H^2 = O'A^2 - O'H^2.$$

De aquí sigue que

$$HB^2 + HC^2 = (OA^2 + O'A^2) - (OH^2 + O'H^2) =$$
$$= (OO'^2 + 2OA \cdot O'A\cos(\angle OAO')) - [(OH - O'H)^2 + 2OH \cdot O'H] =$$
$$= 2OB \cdot O'C\cos(\angle OAO') - 2OH \cdot O'H; \tag{3}$$

*) La deducción que se presenta aquí de las fórmulas de la trigonometría de Lobachevski fue comunicada al autor, para la cuarta edición de este libro, por el matemático vietnamita Ngüen Kan Toan.

para simplificar, los razonamientos se efectúan aplicados a la fig. 79, donde O' está entre O y H. Las igualdades (2) y (3) nos dan

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{OB}{HB}\cdot\frac{O'C}{HC}\cos(\angle OAO') - \frac{OH}{HB}\cdot\frac{O'H}{HC}. \tag{4}$$

Obsérvese, ahora, que

$$\frac{OB}{HB} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\angle BON)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}, \qquad \frac{O'C}{HB} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\angle CO'H)} = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma},$$

$$\angle OAO' = \alpha, \qquad \frac{OH}{HB} = \operatorname{ctg}(\angle BOH) = \operatorname{ctg}\beta,$$

$$\frac{O'H}{HC} = \operatorname{ctg}(\angle CO'H) = \operatorname{ctg}(\pi - \gamma) = -\operatorname{ctg}\gamma.$$

De la igualdad (4) y de las últimas expresiones hallamos, por último,

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}. \tag{I}$$

Las otras fórmulas que expresan las longitudes no euclidianas de los lados b y c se obtienen de (I) por permutación cíclica de los símbolos α, β, γ.

La fórmula (I) expresa un lado de un triángulo en función de sus ángulos. La existencia de tal fórmula significa que en la geometría de Lobachevski un triángulo se determina por sus ángulos; esto, a su vez, implica que en dicha geometría no hay semejanza de figuras. Es natural, por esto, que en la geometría euclidiana no existe una fórmula análoga a la (I).

De la fórmula (I) es fácil deducir *las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo no euclidiano, que corresponden al teorema euclidiano de los senos.* En efecto,

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{R}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{a}{R} - 1}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\sqrt{(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 - \operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma}}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}. \tag{5}$$

Haciendo

$$Q = (\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 - \operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1,$$

podemos ver que esta expresión es simétrica con respecto a α, β, γ. En consecuencia, el segundo miembro de (5) posee también tal simetría, de forma que tendremos:

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{R}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{R}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{R}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\sqrt{Q}}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}. \tag{II}$$

De la fórmula (I) pueden obtenerse, asimismo, *expresiones para los ángulos de un triángulo en función de sus lados*. Escribamos, con este fin, las igualdades

$$\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \frac{(\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha)(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma},$$

$$\operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha = \frac{Q\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}.$$

De aquí sigue que

$$\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha =$$

$$= \frac{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha + (1-\cos^2\alpha)\cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}.$$

Tiene, así, lugar la fórmula

$$\cos\alpha = \left(\operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{ch}\frac{a}{R}\right)\cdot\left(\operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\right)^{-1}. \tag{III}$$

Comparando (I) y (III) puede apreciarse que en la geometría de Lobachevski existe una dependencia determinada entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Hallemos ahora las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Para esto, basta hacer en las fórmulas de tipo (I), (II), (III), por ejemplo, $\gamma = \pi/2$. Obtenemos, así

1) *la dependencia entre un cateto, la hipotenusa y uno de los ángulos agudos*:

$$\operatorname{sh}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{c}{R}\operatorname{sen}\alpha, \qquad \operatorname{th}\frac{a}{R} = \operatorname{th}\frac{c}{R}\cos\beta;$$

2) *la dependencia entre dos catetos y un ángulo agudo*:

$$\operatorname{th}\frac{a}{R} = \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{tg}\alpha;$$

3) *la dependencia entre la hipotenusa y los catetos* (el análogo del teorema de Pitágoras):

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ch}\frac{a}{R}\operatorname{ch}\frac{b}{R}.$$

Destaquemos, además, las dos relaciones siguientes:

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta, \qquad \operatorname{ch}\frac{a}{R} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Estas expresan un lado de un triángulo rectángulo en función de los ángulos y no tienen, por esto, análogos en la geometría euclidiana.

§ 62. Cambiando la escritura de la fórmula (III), obtenemos:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha; \tag{A}$$

presentada así, la fórmula expresa un lado de un triángulo no euclidiano arbitrario en función de los otros dos y del coseno del ángulo opuesto.

Comparemos la última relación con la conocida fórmula de la trigonometría esférica

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos\alpha, \tag{B}$$

donde R es el radio de la esfera. Esta fórmula, más las otras dos que se obtienen por permutación cíclica de lados y ángulos, permiten deducir las restantes fórmulas de la trigonometría esférica.

La fórmula (B) se transforma en la (A) si se cambia R por $Ri (i = \sqrt{-1})$. Teniendo esto presente, se dice que *la trigonometría de Lobachevski se puede considerar como la trigonometría sobre una esfera de radio imaginario.*

Las fuentes profundas de la relación de la geometría de Lobachevski con la de la esfera (así como también con la geometría de Riemann, que se expone en la sección siguiente) serán esclarecidas con todo detalle en el capítulo VIII.

11. Breves nociones sobre la geometría de Riemann

§ 63. En las secciones precedentes hemos hecho referencia más de una vez a la geometría esférica, conjuntamente con las geometrías de Euclides y Lobachevski. La confrontación de estas geometrías surgió de manera natural cuando descubrimos que tenían similitudes (como en los §§ 48, 62), o cuando las considerábamos desde algún punto de vista general (como en los §§ 45 — 47). Pero ahora debemos llamar la atención del lector sobre una diferencia muy importante que existe entre la geometría esférica, por un lado, y las de Lobachevski y Euclides, por el otro. Precisamente, en el plano de Euclides, al igual que en el de Lobachevski, dos rectas pueden tener NO MÁS DE UN PUNTO común; por el contrario, en la geometría sobre la esfera, donde las circunferencias máximas hacen las veces de rectas (véase el § 45), dos «rectas» (es decir, dos circunferencias máximas) siempre se cortan en dos puntos diametralmente opuestos de la esfera. Así, en la geometría esférica no se cumple una de las premisas básicas de las geometrías de Euclides y Lobachevski: la de que por dos puntos diferentes pasa una única recta.

Existe un sistema geométrico que en varias relaciones es similar a la geometría esférica, pero en el cual la premisa básica citada de la geometría elemental tiene LUGAR. Dicho sistema se llama *geometría de Riemann* (que ya fue citada en el § 10). Esta geometría es un complemento necesario de las de Euclides y Lobachevski. El estudio conjunto de las tres permitió dar una solución completa de uno de los problemas geométricos principales del siglo XIX (véanse los caps. VI — IX). La esencia de la geometría de Riemann es expuesta en los parágrafos que siguen.

§ 64. Fijemos en el espacio euclidiano una esfera arbitraria k. Convendremos en «identificar» los puntos diametralmente opuestos de ésta, es decir, considerar cada par de puntos diametralmente opuestos de k como un objeto único. Este objeto se llamará «punto» de cierta geometría particular, que pasaremos referir. Convendremos en llamar «recta» a cada circunferencia máxima de la esfera k.

Diremos que el «punto» A está en la «recta» a (o que la «recta» a pasa por el «punto» A) si los puntos ordinarios de la esfera k que constituyen el «punto» A están en la circunferencia máxima que representa a la «recta» a. Evidentemente,

1) por cada dos «puntos» pasa una «recta»,

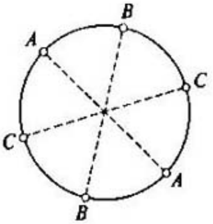


Fig. 80

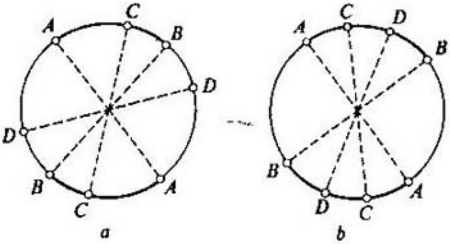


Fig. 81

2) por cada dos «puntos» diferentes pasa UNA ÚNICA «recta» *),

3) en cada «recta» hay al menos dos «puntos» (incluso hay una cantidad infinita de «puntos»); se pueden indicar tres «puntos» que no estén sobre una misma «recta».

Así, para el conjunto considerado de «puntos» y «rectas» se observan todos LOS AXIOMAS DE INCIDENCIA de la planimetría elemental (véanse § 12, axiomas I,1, I,2, I,3). Por el contrario, LOS AXIOMAS DE ORDEN, en la forma que fueron enunciados para la geometría elemental, son aquí inaplicables. Es que en estos axiomas se caracteriza el concepto de posición de un punto ordinario entre otros dos puntos ordinarios, sobre una recta ordinaria. Pero para nuestros «puntos» convencionales sobre una «recta» convencional, el concepto «entre» carece de sentido. En efecto, al considerar tres «puntos» arbitrarios A, B, C en una «recta» (es decir, tres pares de puntos diametralmente opuestos de una circunferencia; fig. 80), no podremos distinguir en su posición relativa alguno de ellos con respecto a los otros.

Para estudiar el orden de nuestros «puntos» convencionales sobre una «recta», deben tomarse CUATRO «puntos». Sean A, B, C, D cuatro «puntos» de alguna «recta»; supondremos que están numerados en el orden de su escritura (independientemente de su posición sobre la «recta»). Son posibles dos casos esencialmente diferentes en la posición de los «puntos» A, B, C, D con respecto a su numeración: 1) los dos primeros «puntos» A y B separan los dos últimos C y D (en cuyo caso C y D separan A y B, fig. 81, *a*); 2) los dos primeros «puntos» A y B no separan los dos últimos C y D (entonces C y D tampoco separan A y B, fig. 81, *b*). Análogamente, si a, b, c, d son cuatro «rectas» que pasan por un mismo «punto» y están numeradas en el orden de su escritura, son posibles dos casos en su posición relativa: 1) las «rectas» a, b separan las c, d (en cuyo caso c, d separan a, b; fig. 82, *a*); las «rectas» a, b no separan c, d (y entonces c, d tampoco separan a, b; fig. 82, *b*). Adoptaremos el concepto de separación de «puntos» y «rectas» como básico; los demás conceptos referentes al orden de posición de «puntos» en una «recta» y «rectas» que pasan por un «punto» se reducirán a este concepto básico.

Sean A y B dos «puntos» arbitrarios de alguna «recta» u; entonces todos los «puntos» de la «recta» u, excepción hecha de A y B, pueden ser separados de mane-

---

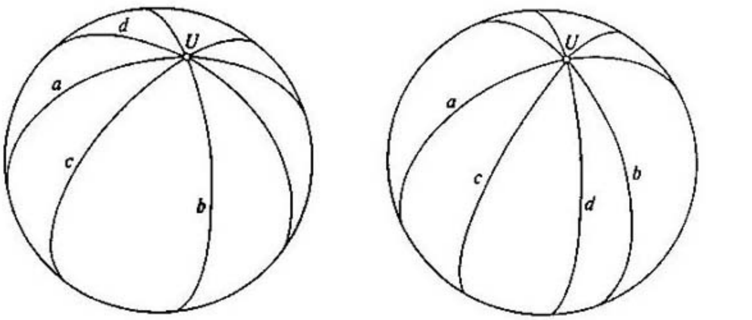
*) Cada «punto» A es un par *no ordenado* (es decir, un conjunto) $\{x, x'\}$ de puntos diametralmente opuestos. Por ello, los «puntos» $\{x, x'\}$ y $\{x', x\}$ coinciden, de modo que el hecho que por ellos pasen una cantidad infinita de «rectas» no contradice 2). (*N. del Tr.*)

ra única en dos clases de manera que dos «puntos» cualesquiera de una misma clase no separan A y B, mientras que dos «puntos» arbitrarios de clases diferentes separan A y B. En correspondencia con esto, convendremos en decir que los «puntos» A, B determinan sobre la «recta» u dos «segmentos»; consideraremos puntos interiores de un «segmento» a los «puntos» de una de las dos clases precitadas, y puntos interiores del otro, a los «puntos» de la otra clase [en las figs. 81, a), 81, b), uno de los dos segmentos determinados por los «puntos» A, B se representa por dos arcos en línea gruesa; en la fig. 81, a) C es un punto interior de este «segmento», mientras que D es «punto» interior del otro «segmento»; en la fig. 82, b), tanto C como D son «puntos» interiores de un mismo «segmento»].

Con respecto a «rectas» que pasan por un «punto», pueden ser enunciados conceptos análogos. Precisamente, si a y b son dos «rectas» que pasan por algún «punto» U, todas las «rectas» que pasan por U, exceptuando a y b, pueden ser divididas de manera única en dos clases, de manera que dos «rectas» cualesquiera de una misma clase no separan a y b, mientras que dos «rectas» arbitrarias de clases diferentes separan a y b. De acuerdo con esto, convendremos en decir que las «rectas» a y b determinan DOS «ángulos» con vértice U. Consideraremos «rectas» interiores de uno de los «ángulos» a las «rectas» de una de las dos clases antedichas, y «rectas» interiores del otro, a las «rectas» de la otra clase.

Luego de esto se definen de manera natural un triángulo, los ángulos internos de éste, el dominio interior de un triángulo, el de un polígono, un polígono simple (sin autointersecciones), los ángulos internos de un polígono simple, y toda una serie de conceptos utilizados en la geometría elemental.

Convendremos, por último, en llamar dos «segmentos» congruentes, si existe un movimiento de la esfera k sobre sí misma, o bien una reflexión especular de ésta con respecto a alguno de sus planos diametrales, que superpone uno de estos «segmentos» al otro (es decir, los puntos extremos e interiores de un segmento se superponen a los puntos extremos e interiores, respectivamente, del otro). Análogamente se define la congruencia de «ángulos» y de figuras arbitrarias (una figura M, como conjunto de «puntos» y «rectas» se considera congruente a otra figura M', si entre los «puntos» de éstas, así, como también entre sus «rectas», se puede establecer una



a

b

Fig. 82

correspondencia biyectiva de manera que como resultado de algún movimiento de la esfera k sobre sí misma, o de una reflexión especular con respecto a algún plano diametral, todos los «puntos» y «rectas» de la figura M se superpongan a los «puntos» y «rectas» correspondientes de M').

Estamos considerando, así: 1) relaciones de incidencia de «puntos» y «rectas», 2) relaciones de orden de «puntos» sobre una «recta» arbitraria y de «rectas» que pasan por un «punto» arbitrario, 3) relaciones de congruencia de «segmentos», «ángulos» y otras figuras. El sistema de teoremas que se refiere a estas relaciones se llama *geometría de Riemann*; el conjunto de «puntos» y «rectas», según el sentido conferido más arriba, que se hallen en las relaciones indicadas, se denomina *plano de Riemann*. Todos los teoremas de la geometría de Riemann representan teoremas de la geometría euclidiana, adecuadamente interpretados, por cuanto los «puntos» y las «rectas» del plano de Riemann son objetos euclidianos.

§ 65. Señalemos algunas proposiciones de la geometría de Riemann. Ante todo, como ya fue indicado, en esta geometría se realizan todos los tres axiomas de incidencia de la planimetría euclidiana; en particular, dos diferentes puntos cualesquiera determinan una recta y sólo una que pasa por ellos. Por otra parte, en la geometría de Riemann tiene lugar una proposición que no existe ni en la de Euclides, ni en la de Lobachevski, precisamente: cada dos rectas diferentes tienen un (único) punto (esto es claro, pues cada dos circunferencias máximas de la esfera tienen un par de puntos diametralmente opuestos de intersección). Dicho de otro modo, en el plano riemanniano no hay rectas paralelas. Así, mientras en la geometría euclidiana tiene lugar el postulado sobre la unicidad de la recta que pase por un punto dado y no corte a una recta dada, y en la de Lobachevski se adopta una de las premisas que niegan este postulado —se asume que existe una cantidad infinita de estas rectas— , en la geometría de Riemann se realiza la otra premisa que lo niega: en esta geometría toda recta corta a cualquier otra.

La disposición de las rectas en el plano de Riemann difiere radicalmente de la disposición de rectas en el plano de Euclides, o en el de Lobachevski, todavía por un motivo más: una recta no divide el plano de Riemann en dos partes. Esto significa que cualesquiera que sean la recta a y dos puntos A y B que no le pertenezcan, siempre se pueden unir A y B con un segmento que no corte a la recta a (fig. 83).

En la geometría de Riemann se definen de manera natural la comparación de segmentos (entre sí) y de ángulos (entre sí), así como también la medición de segmentos y ángulos (véase los §§ 18, 20, 21, donde estos conceptos fueron establecidos para la geometría euclidiana). Con esto surge la posibilidad de enunciar y demostrar teoremas concernientes a las relaciones entre las magnitudes geométricas, análogas en una u otra forma a los conocidos teoremas de Euclides y Lobachevski.

Resulta interesante comparar en las geometrías de Euclides, Lobachevski y Riemann la proposición que se refiere a la suma de los ángulos internos de un triángulo: en la de Euclides, esta suma es igual a dos rectos, en la de Lobachevski, es menor que dos rectos, en la de Riemann, mayor que dos rectos. Para verificar esto último, es decir, que en el plano de Riemann la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que dos rectos, basta observar que las rectas del plano riemanniano son circunferencias máximas de alguna esfera, y como un triángulo esférico tiene suma de ángulos internos mayor que dos rectos, un triángulo en el plano de Riemann tendrá la misma propiedad.

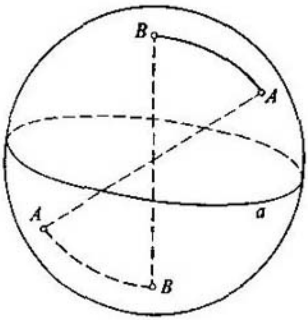


Fig. 83

Digamos, por último, que las relaciones métricas en la geometría de Riemann se expresan por fórmulas de la geometría esférica, adecuadamente interpretadas (lo cual es comprensible, pues cada figura M del plano de Riemann representa un par de figuras M_1 y M_2 de alguna esfera, situadas simétricamente con respecto al centro de ésta, y cada par de puntos diametralmente opuestos de las figuras M_1 y M_2 se considera como un punto de la figura M; por esto, cada relación métrica entre los elementos de M coincide con una relación métrica entre los elementos correspondientes de la figura M_1, o bien de la M_2). Así, por ejemplo, en el plano riemanniano, un lado a de un triángulo se expresa en función de los otros dos lados b, c y el ángulo opuesto α por la fórmula

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \operatorname{sen}\frac{b}{R}\operatorname{sen}\frac{c}{R}\cos\alpha,$$

pues esta fórmula expresa el lado de un triángulo sobre una esfera de radio R (véase el § 62). Aquí se sobreentiende que el plano riemanniano fue obtenido identificando los puntos diametralmente opuestos DE LA MISMA esfera (de radio R). Es fácil comprender que el número R tendrá que figurar, asimismo, en otras fórmulas métricas, que se refieren al mismo plano riemanniano. Evidentemente, este número (en una escala prefijada) caracteriza al plano riemanniano, al igual que a la esfera utilizada para definir este plano. Es evidente, también, que cuanto mayor sea R en comparación con las dimensiones de alguna porción del plano de Riemann, tanto menos se distinguirán por sus propiedades las figuras que se encuentren en esa porción, de las figuras euclidianas. Por esto, el número R puede considerarse la «medida de no euclidianidad» del plano riemanniano. Un segmento de longitud R que se encuentre en este plano (es decir, un segmento entendido en el sentido de la geometría de Riemann) lleva el nombre de su *radio de curvatura*.

§ 66. Como ya indicamos más arriba, todos los teoremas de la geometría de Riemann representan teoremas de la geometría euclidiana, intepretados adecuadamente. Por esto, los teoremas de la geometría riemanniana se deducen de los axiomas de la euclidiana. Por supuesto, no todos los teoremas de esta última admiten una interpretación como teoremas de la geometría de Riemann; la mayoría de los teoremas euclidianos no guarda relación alguna con los objetos que hemos llamado puntos y rectas del plano riemanniano.

Así, entonces, para obtener los teoremas de la geometría de Riemann a partir de los axiomas de la de Euclides, deben hacerse algunas deducciones PARTICULARES de estos axiomas.

Es posible, sin embargo, basar la geometría de Riemann en un sistema particular de axiomas, es decir, una serie de proposiciones (referentes a los conceptos de incidencia, orden y congruencia de los objetos del plano riemanniano), de las cuales puedan deducirse, de manera lógica, todas las demás proposiciones de dicha geometría, de manera que cada deducción conducirá a algún teorema de esta geometría.

Es este caso, al demostrar los teoremas de la geometría de Riemann se hacen indiferentes todas las propiedades de sus objetos, con excepción de las que se mencionan en los axiomas. Esta fundamentación axiomática de la geometría de Riemann la transforma en un sistema geométrico abstracto. Entendiendo por «punto» y «recta» a objetos arbitrarios, por «están en», «separan», «congruentes» a relaciones arbitrarias entre ellos, que satisfagan los axiomas, obtendremos diversos MODELOS concretos de la geometría abstracta de Riemann. Cada sistema de objetos cuyas relaciones mutuas satisfagan los axiomas de dicha geometría puede ser llamado *plano riemanniano*. Así, la esfera con los puntos antipodales identificados viene a ser uno del conjunto de los diferentes planos de Riemann.

§ 67. No vamos a enumerar los axiomas de la geometría de Riemann *). Con todo, podremos ilustrar fácilmente al lector la posibilidad de presentar diversas interpretaciones de la geometría de Riemann, construyendo un nuevo modelo de ésta. Los objetos de este modelo se encontrarán en correspondencia determinada con los del modelo en la esfera, que ya conocemos, en virtud de lo cual quedará claro, sin remitirnos a los axiomas, que ambos modelos realizan una misma geometría.

Construiremos el nuevo modelo utilizando también el espacio euclidiano.

Ante todo, completemos el conjunto de elementos del espacio euclídeo con elementos nuevos, que llamaremos *puntos del infinito*. La naturaleza de estos nuevos elementos será para nosotros indiferente, pero, al introducirlos, supondremos que se encuentran en correspondencia determinada con elementos dados inicialmente. Precisamente, suponemos que:

1) a cada recta a se le ha puesto en correspondencia *un* elemento nuevo, llamado punto del infinito de dicha recta;

2) rectas paralelas tienen un punto del infinito común;

3) los puntos del infinito de rectas no paralelas son diferentes.

El conjunto de todos los puntos del infinito de un plano arbitrario (es decir, el conjunto de los puntos del infinito de todas las rectas de dicho plano) se supondrá dispuesto sobre una nueva recta de éste, la recta del infinito. El conjunto de todos los puntos del infinito del espacio se considerará como un nuevo plano, el plano del infinito. Los elementos del infinito con estas propiedades se introducen en la geometría proyectiva. Por esto, el espacio completado con los elementos del infinito

---

*) Uno de los posibles sistemas de axiomas se encuentra en el libro de *S. A. Bogomólov* «Introducción a la Geometría no euclidiana de Riemann» (*С. А. Богомолов*, Введение в неевклидову геометрию Римана).

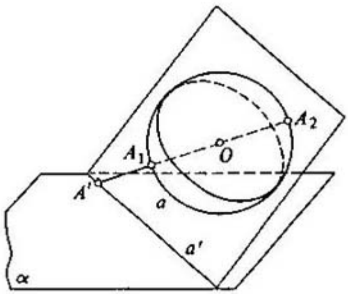


Fig. 84

que verifican las propiedades indicadas se denomina espacio proyectivo; el plano completado con los elementos del infinito bajo las mismas condiciones se llama plano proyectivo (véanse los §§ 80 — 82).

Consideraremos elementos del nuevo modelo a los puntos y rectas de algún plano α (entre ellos, sus puntos del infinito y la recta del infinito). El término «un punto está sobre una recta» se interpretará en el sentido habitual. Entonces:

1) se observan todos los tres axiomas de incidencia de la planimetría elemental;

2) dos rectas cualesquiera se cortan (posiblemente en un punto del infinito).

En consecuencia, para los puntos y rectas del nuevo modelo las relaciones de incidencia satisfacen las mismas condiciones básicas que tienen lugar en el modelo esférico, considerado más arriba. Ahora definiremos en nuestro nuevo modelo las relaciones de orden y de congruencia. Con este fin, tomemos alguna esfera, que denotaremos por k; sea O su centro (fig. 84). Supongamos que el punto O no está en el plano α. Tracemos por O una recta arbitraria; ésta cortará a α en algún punto A', posiblemente un punto del infinito, y a la esfera k en un par de puntos diametralmente opuestos A_1, A_2. Considerando al par A_1, A_2 como un único punto del modelo de la geometría riemanniana en la esfera k, denotemos a este par con A. Convendremos en decir que A' es la proyección de A (o bien que A es la proyección de A'). Sea a alguna circunferencia máxima de la esfera k; resulta evidente que todos los pares de puntos diametralmente opuestos de a tienen sus proyecciones en el plano α dispuestas sobre una recta determinada a' (que puede resultar la recta del infinito). Convendremos en decir que a' es la proyección de a (o bien que a es la proyección de a'). Le pondremos en correspondencia a cada par de puntos diametralmente opuestos de la esfera k, es decir, a cada punto del modelo de la geometría de Riemann sobre esta esfera, su proyección sobre el plano α. Pondremos en correspondencia, asimismo, a cada circunferencia máxima de k, su proyección en el plano α; en otras palabras, a cada recta del modelo de la geometría riemanniana en la esfera k le ponemos en correspondencia una recta del plano α. Es fácil comprobar que cada una de estas correspondencias es biyectiva. Es claro, también, que si un punto A del modelo de la geometría riemanniana en la esfera k pertenece a la recta a del mismo modelo, entonces en el plano α el punto A', correspondiente a A, pertenece a la recta a', correspondiente a a.

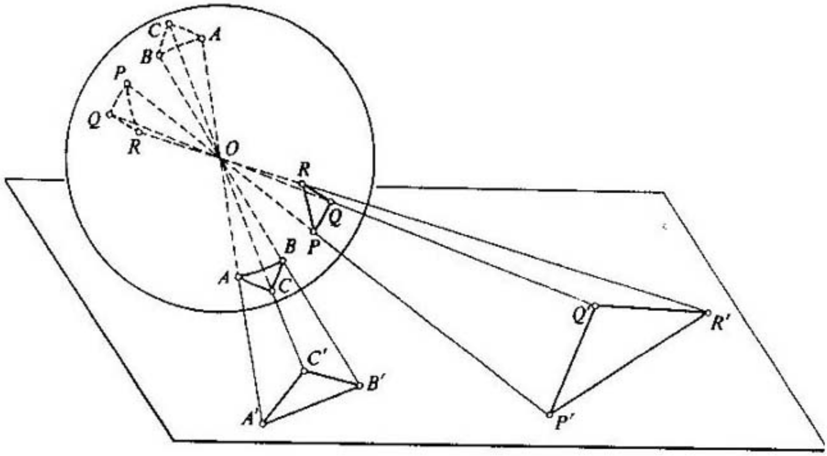


Fig. 85

Sean, ahora, A', B', C', D' cuatro puntos de α, pertenecientes a una recta u' de este plano, y A, B, C, D, los puntos que les corresponden en el modelo de geometría de Riemann en la esfera k, pertenecientes a la recta u de este modelo (u y u' se corresponden). Convendremos en decir que 1) los puntos A', B' separan a C', D' en la recta u' del plano α, si A, B separan a C, D en la recta u; 2) los puntos A', B' no separan a C', D' en la recta u' de α, si A, B no separan a C, D en la recta u. Análogamente, si a', b', c', d' son cuatro rectas del plano α que pasan por un punto U', y a, b, c, d son las rectas correspondientes del modelo sobre la esfera k, que pasan por el punto U de dicho modelo, diremos que: 1) las rectas a', b' separan a c', d' en el plano α, si a, b separan a c, d; 2) las rectas a', b' no separan a c', d' en el plano α, si a, b no separan a c, d. Quedan así definidas la relación de orden de puntos sobre una recta arbitraria de α y la relación de orden de rectas del plano α que pasan por algún punto de dicho plano.

Por último, convendremos en decir que dos figuras del plano α son congruentes, si lo son sus proyecciones en la esfera k.

Hemos definido, así, para los objetos del nuevo modelo, las relaciones de incidencia, orden y congruencia; los objetos del nuevo modelo se encuentran en las mismas relaciones mutuas que los objetos correspondientes de la geometría de Riemann sobre la esfera k. De aquí se desprende que cada proposición referente a incidencia, orden y congruencia de objetos del modelo de la geometría riemanniana sobre la esfera k será verdadera para los objetos del nuevo modelo en el plano proyectivo; recíprocamente, cada proposición relativa a incidencia, orden y congruencia de los objetos del nuevo modelo, será válida para el modelo de la geometría de Riemann sobre k. Ambos modelos, pues, realizan de manera diferente la misma geometría riemanniana.

Desde el punto de vista intuitivo, el modelo de geometría de Riemann en el plano proyectivo tiene ventajas sobre el modelo de una esfera con puntos antipodales identificados, en todos los casos en que se discuta la incidencia y el orden de los objetos, por cuanto en el plano proyectivo los puntos y las rectas se representan de manera habitual. En cambio, el modelo del plano proyectivo es desventajoso cuando se considera la congruencia de figuras, pues las figuras del modelo sobre el plano proyectivo, congruentes en el sentido de la geometría proyectiva, no lo son en el sentido habitual (véase la fig. 85, donde se representan los triángulos congruentes ABC y PQR en el modelo de la geometría riemanniana correspondiente a una esfera con puntos antipodales identificados, y los triángulos, también congruentes, $A'B'C'$, $P'Q'R'$ que les corresponden en el modelo de la geometría de Riemann sobre el plano proyectivo).

§ 68. Toda la exposición precedente se refirió a la geometría bidimensional de Riemann. Un modelo de la geometría tridimensional de Riemann puede obtenerse identificando los puntos antipodales de una esfera tridimensional en el espacio euclidiano de cuatro dimensiones *).

Sin recurrir al espacio de cuatro dimensiones, puede obtenerse un modelo de la geometría de Riemann tridimensional, recurriendo a la geometría proyectiva (véase el cap. VI, donde se expone la construcción de modelos proyectivos de la geometría bidimensional de Lobachevski y la geometría de Riemann de dos dimensiones. Dichas construcciones se generalizan directamente al caso tridimensional.)

---

*) El concepto de espacio euclidiano multidimensional se expone en el cap. VII; véase también la primera edición de este libro. El lector puede encontrar una exposición de la geometría de Riemann por el método de coordenadas en el libro de *F. Klein* «Geometría no Euclidiana» (*F. Klein*, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Ed. Springer-Verlag, 1928, reed. 1967.)

Capítulo IV

ANÁLISIS DE LOS AXIOMAS DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL

1. Los tres problemas básicos de la axiomática

§ 69. En el capítulo anterior demostramos que la consistencia de la geometría euclidiana implica la consistencia de la geometría de Lobachevski. Ahora cabe preguntarse: ¿quién asegura la consistencia de la geometría de Euclides? Puesto que esta última se ha considerado como un sistema de proposiciones que se obtienen de manera lógica a partir de los axiomas I — V del cap. II, *al hablar de la consistencia de la geometría euclidiana nos referimos a la consistencia del sistema de axiomas* I — V.

En las páginas que siguen probaremos que la geometría de Euclides no es contradictoria, si tampoco lo es la aritmética. *El problema de la consistencia de la aritmética no es discutido en los fundamentos de la geometría.*

Al investigar los axiomas de la geometría elemental, nos plantearemos tres problemas:

1) el problema de la consistencia,
2) el problema de la minimalidad,
3) el problema de la completitud.

Puesto que estos tres problemas surgen al estudiar cualquier sistema de axiomas —ya sean los de la geometría de Euclides, los de la de Lobachevski, u otros cualesquiera— , tiene sentido enunciar de manera general el planteo de los problemas indicados, así como los métodos para su resolución.

Sea dado un sistema de axiomas, que establece propiedades determinadas de las relaciones mutuas de ciertos objetos. De estos axiomas pueden hacerse deducciones lógicas sobre estas propiedades de los objetos, sin tomar en cuenta en absoluto otras posibles propiedades suyas, si no han sido mencionadas en los axiomas.

Por esto, pueden considerarse como objetos del sistema dado de axiomas a objetos de cualquier naturaleza, y a las relaciones entre ellos, mencionadas en los axiomas, se les puede conferir un significado concreto arbitrario, siempre que se satisfagan todas las condiciones expresadas en los axiomas asumidos. Entonces, cada teorema que se deduzca de manera lógica de los axiomas, expresará un hecho concreto, que se refiere a los objetos considerados, o, más precisamente, a las propiedades de éstos que se mencionan en los axiomas.

Toda elección concreta de objetos que se consideren como objetos del sistema dado de axiomas, será llamada *realización*, o *interpretación*, de estos axiomas.

El propio conjunto de objetos que realizan el sistema dado de axiomas, lo llamaremos, como ya hemos hecho antes, «modelo» del esquema lógico determinado por los axiomas.

Si estos axiomas PUEDEN SER realizados de alguna manera en el modelo, entonces será imposible deducir de ellos, con razonamientos correctos, dos conclusiones que se excluyen mutuamente desde el punto de vista lógico, tales como, digamos, la afirmación y la negación de un mismo resultado. Por esto, *a fin de demostrar la consistencia de un sistema dado de axiomas, basta hallar alguna de sus posibles realizaciones.* (Si, en cambio, el sistema es contradictorio, esto suele revelarse por medio de un razonamiento adecuado, que conduzca a una contradicción.)

La demostración de la consistencia de un sistema dado de axioma puede ser condicional.

Por ejemplo, la consistencia de la geometría plana de Lobachevski fue demostrada en el capítulo precedente construyendo el modelo de Poincaré, cuyos objetos fueron tomados en el plano euclidiano. Por ello, el resultado obtenido fue enunciado en forma condicional: la planimetría de Lobachevski no es contradictoria si no lo es la de Euclides.

El segundo problema consiste en establecer la necesidad de todas las condiciones enunciadas en los axiomas, es decir, mostrar que el sistema adoptado de axiomas no admite la eliminación de alguna de sus condiciones, conservando el mismo conjunto de consecuencias de ellos tomados en forma global (que el sistema es minimal)*). Resolver este problema en su totalidad significa mostrar que cada premisa del sistema de axiomas es independiente de las restantes, es decir, que no puede obtenerse de ellas por razonamientos lógicos.

Sea A alguno de los axiomas de un sistema (no contradictorio) en estudio.

Si el axioma A no sigue de los demás del sistema, sustituyendo en este último el axioma A por un nuevo axioma A^*, que enunciaremos así: «la afirmación A es falsa», debemos obtener otro sistema no contradictorio. Por eso, *para demostrar que el axioma A no puede ser deducido de los restantes del sistema considerado, basta realizar en algún conjunto de objetos todos los axiomas, a excepción del A, de manera tal que en esta realización dicho axioma no se verifique.*

En particular, fue así como establecimos la independencia del V postulado de Euclides de los restantes de la geometría elemental. Precisamente, en el modelo de Poincaré en el semiplano euclidiano tienen lugar todos los axiomas de la geometría absoluta, y no se cumple el axioma de paralelismo de Euclides. Consecuentemente, éste no es consecuencia lógica de los demás axiomas. (En este caso, una misma interpretación de los objetos geométricos revela tanto la independencia del postulado de Euclides como la consistencia de la geometría de Lobachevski.)

Más adelante efectuaremos un análisis análogo de otros axiomas importantes de la geometría elemental, pero, claro está, no resolveremos exhaustivamente el problema de minimilidad.

El planteo del tercer problema de la axiomática —el problema de la completitud de un sistema de axiomas— se diferirá al final del capítulo.

§ 70. Ya tenemos un ejemplo de aplicación de los métodos propuestos: la construcción del modelo de Poincaré. Sin embargo, los múltiples detalles de este modelo

---

*) Como en la base de una misma geometría pueden ponerse sistemas diferentes de axiomas, al eliminar de estos sistemas las condiciones superfluas (en caso que las hubiera) pueden obtenerse, en general, sistemas minimales diferentes. Por esto, el sistema minimal no es único, en absoluto.

podrían oscurecer la esencia de la cuestión, que es útil mostrar con un ejemplo lo más sencillo posible.

Ahora construiremos un modelo únicamente para el primer grupo de axiomas de Hilbert, considerando este grupo como un sistema axiomático aislado.

Tomemos algún tetraedro, y convengamos en llamar «puntos» a sus vértices, «rectas», a sus aristas, y «planos», a sus caras.

Así, el conjunto de elementos geométricos en nuestra realización consiste únicamente de cuatro puntos, seis rectas y cuatro planos.

Las rectas y los planos están en correspondencias determinadas con los puntos; además, si, por ejemplo, la recta a se ha puesto en correspondencia con el punto A, se dice que «a pasa por A», o bien que «A está en a», etc. En nuestra realización, al igual que *en cualquier otra*, *estas correspondencias deben ser descritas con precisión*. Convendremos en poner en correspondencia a cada punto, representado concretamente por alguno de los vértices del tetraedro, en calidad de rectas y planos que pasan por él, aquellas rectas y planos representados por las aristas y las caras que contienen el vértice en cuestión.

Es fácil ver que todos los axiomas I,1 — I,8 serán satisfechos. Veamos cada uno por separado.

Axioma I,1. Cualesquiera que sean dos puntos A y B, existe una recta a que pasa tanto por A como por B.

Esta condición se cumple, pues dos vértices cualesquiera del tetraedro tienen una arista que los une.

Axioma I,2. Cualesquiera que sean dos puntos A, B, existe no más de una recta que pasa por cada uno de ellos.

Este requisito se satisface, pues dos vértices del tetraedro son unidos por una única arista.

Axioma I,3. En cada recta existen al menos dos puntos; existen al menos tres puntos que no están sobre una misma recta.

Ambas condiciones se verifican, pues en cada arista existen dos vértices y existen tres vértices que no están en una misma arista (¡incluso cuatro!).

Axioma I,4. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenezcan a una misma recta, existe un plano α que pasa por cada uno de ellos; en cada plano hay al menos un punto.

Ambas premisas son satisfechas, pues por cada tres vértices pasa una cara y cada cara contiene algún vértice (¡incluso tres!).

Axioma I,5. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenezcan a una misma recta, existe no más de un plano que pasa por cada uno de ellos.

Esta condición es observada, pues por cada tres vértices pasa una única cara.

Axioma I,6. Si dos puntos A, B de una recta a están en un plano α, cada punto de a pertenece a α.

Esto también se cumple; en efecto, si dos vértices de una arista están en alguna cara, cada vértice de esta arista pertenece a la misma cara, pues una arista tiene únicamente dos vértices.

Axioma I,7. Si dos planos α, β tienen un punto común A, tienen, al menos, otro punto común B.

Este requisito es verificado, pues dos caras cualesquiera tienen dos vértices comunes.

Axioma I,8. Existen al menos cuatro puntos que no están en un mismo plano.

Este último axioma también es satisfecho, pues los cuatro vértices del tetraedro no están sobre una misma cara.

Hemos comprobado, así, que nuestra realización satisface todos los axiomas del primer grupo. Obsérvese, a propósito, que esta realización de los axiomas I,1 — I,8 es la mínima posible, en el sentido de que en cada recta hay únicamente un par de puntos, que la totalidad de los puntos es igual tan sólo a cuatro, etc. Es precisamente la cantidad de elementos requeridos por los axiomas. Es verdad que el axioma I,4 requiere que en cada plano haya al menos un punto, mientras que en nuestra realización hay tres en cada plano. Sin embargo, como lo muestra el teorema 3 del § 12, este número es también el mínimo.

Como se ha indicado una realización concreta para los axiomas I,1 — I,8, puede afirmarse que los axiomas del primer grupo forman un sistema no contradictorio.

En el parágrafo precedente se expuso un principio general para establecer la independencia de unas proposiciones con respecto a otras. Ahora resulta fácil dar una ilustración sencilla de este principio. Planteemos, por ejemplo, la siguiente pregunta: ¿es posible demostrar, utilizando los axiomas I,1 — I,8 que el conjunto de elementos de la geometría es infinito?

Evidentemente, la respuesta es negativa, pues hemos indicado una realización de los axiomas I,1 — I,8 en un conjunto FINITO de objetos. Dicho de otro modo: la proposición referente a la infinitud del conjunto de elementos de la geometría no depende de los axiomas del primer grupo.

2. Consistencia de los axiomas de la geometría euclidiana

§ 71. Ahora pasaremos a demostrar la consistencia de los cinco grupos de axiomas de la geometría de Euclides.

Estamos habituados a pensar estos axiomas realizados en cierto conjunto de objetos que imaginamos bien y que surgen en nuestra mente como abstracción de los objetos observados del mundo real. Sin embargo, los puntos, rectas y planos, como figuras de nuestra intuición geométrica, no son posibles de descripción matemática. Por esto, para demostrar la consistencia de los axiomas de la geometría de Euclides es necesario buscar un modelo que posea sentido independientemente de nuestras imágenes geométricas intuitivas. Con este fin, construiremos una realización de los axiomas I — V, que llamaremos realización aritmética, pues sus objetos son combinaciones de números. Con esto habremos establecido la consistencia de la geometría euclidiana, condicionada por la consistencia de la aritmética.

A fin de no oscurecer la esencia del problema con detalles superfluos de carácter operativo, nos limitaremos a considerar la planimetría, es decir, tomaremos en cuenta únicamente los axiomas I,1 — I,3 y II — V.

En nuestra realización aritmética llamaremos «punto» a qualquier par ordenado de números reales (x, y), «recta», a la razón de tres números reales $(u : v : w)$, con la condición de que al menos uno de los números u, v no sea igual a cero *).

---

*) Se puede llamar razón de los tres números u, v, w a la colección de los números u, v, w (en ese orden, *N. del Tr.*), con la condición de que las colecciones u, v, w y λu, λv, λw, donde λ es un número cualquiera, diferente de 0, se consideran idénticas.

Convendremos en decir que «el punto (x, y) está en la recta $(u : v : w)$»", o bien que «la recta $(u : v : w)$ pasa por el punto (x, y)»", si tiene lugar la igualdad

$$ux + vy + w = 0.$$

Todas las condiciones contenidas en los axiomas I,1 — I,3 serán satisfechas, como puede comprobarse por verificación sucesiva.

En efecto, sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes; entonces la razón de los tres números $u = y_1 - y_2$, $v = x_2 - x_1$, $w = x_1y_2 - x_2y_1$ es una recta [los números $y_1 - y_2$ y $x_2 - x_1$ no pueden ser iguales a 0 a la vez, pues los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son diferentes], que pasa tanto por (x_1, y_1) como por (x_2, y_2), pues

$$ux_1 + vy_1 + w = (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + w = (y_1 - y_2)x_2 + (x_2 - x_1)y_2 + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Por consecuencia, el axioma I,1 se satisface.

Ahora bien, de las ecuaciones

$$ux_1 + vy_1 + w = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + w = 0,$$

se desprende que

$$u : v : w = (y_1 - y_2) : (x_2 - x_1) : (x_1y_2 - x_2y_1).$$

Por ende, con los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) queda determinada sólo una recta $(u : v : w)$; esto significa que se satisface el axioma I,2.

También son satisfechas las condiciones contenidas en el axioma I,3. En efecto, como la ecuación

$$ux + vy + w = 0$$

tiene siempre un conjunto infinito de soluciones diferentes, en cada recta existen no sólo dos, sino una cantidad infinita de puntos. Como tres puntos que no pertenecen a una misma recta, podemos indicar, por ejemplo, (0, 0), (1, 0) y (0, 1); no hay ninguna recta que contenga estos tres puntos, pues evidentemente, no existen tres puntos u, v, w, que no sean iguales a cero simultáneamente y que satisfagan las igualdades

$$u \cdot 0 + v \cdot 0 + w = 0,$$
$$u \cdot 1 + v \cdot 0 + w = 0,$$
$$u \cdot 0 + v \cdot 1 + w = 0.$$

Definamos, ahora, la relación «entre». Sean dadas una recta $(u : v : w)$ y tres puntos sobre ella (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Supongamos, primero, que $v \neq 0$. Diremos que el punto (x_2, y_2) está entre los puntos (x_1, y_1) y (x_3, y_3), si

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad \text{o bien} \quad x_1 > x_2 > x_3.$$

Si, en cambio, es $v = 0$, para los puntos pertenecientes a esta recta será, necesariamente, $x_1 = x_2 = x_3 = -w/u$ y las condiciones precedentes no son aceptables. En este caso, convendremos en considerar al punto (x_2, y_2) situado entre (x_1, y_1) y (x_3, y_3), si

$$y_1 < y_2 < y_3, \quad \text{o bien} \quad y_1 > y_2 > y_3.$$

La relación «entre» así definida satisface todos los axiomas de orden II,1 — II,4.

Se comprueba de manera directa que se satisfacen los axiomas de orden lineal II,1 — II,3. Mostremos que el axioma de Pasch II,4 también se satisface.

Obsérvese, ante todo, que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los extremos de un segmento, todos los puntos interiores de este segmento serán de la forma $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$, donde λ es un número cualquiera que satisface las desigualdades $0 < \lambda < 1$. Además, si alguna recta $(u : v : w)$ pasa por un punto del segmento de extremos (x_1, y_1), (x_2, y_2), entonces los números $ux_1 + vy_1 + w$ y $ux_2 + vy_2 + w$ tienen signos diferentes. En efecto, si el punto interior que pertenece a dicha recta corresponde al número λ entonces

$$u[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] + v[\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] + w = 0.$$

De aquí sigue que

$$\lambda(ux_1 + vy_1 + w) = -(1 - \lambda)(ux_2 + vy_2 + w),$$

y como λ y $1 - \lambda$ son positivos, los números $ux_1 + vy_1 + w$ y $ux_2 + vy_2 + w$ tienen signos distintos.

Sean, ahora, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ tres puntos no alineados, y $(u : v : w)$, una recta que no pasa por ninguno de ellos. Debemos mostrar que si la recta $(u : v : w)$ pasa por algún punto del segmento AB, debe pasar o bien por un punto del segmento AC, o bien por uno del BC.

Como la recta $(u : v : w)$ no contiene ninguno de los puntos A, B, C, los números

$$\alpha_1 = ux_1 + vy_1 + w, \qquad \alpha_2 = ux_2 + vy_2 + w, \qquad \alpha_3 = ux_3 + vy_3 + w$$

son diferentes de cero y además, por lo que ya expusimos, α_1 y α_2 tienen signos diferentes. Supongamos que α_3 tiene signo distinto del de α_1; entonces la recta $(u : v : w)$ corta al segmento AC. Para probarlo, tomemos el número λ determinado por la igualdad $\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_3 = 0$, es decir,

$$\lambda = \alpha_3 : (\alpha_3 - \alpha_1).$$

Tomando en cuenta que α_1 y α_3 tienen signos diferentes, hallamos:

$$\lambda = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_1} = \frac{|\alpha_3|}{|\alpha_3| + |\alpha_1|};$$

por esto, $0 < \lambda < 1$. En consecuencia, el punto (x, y), donde

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3, \qquad y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_3,$$

pertenece al segmento AC. Por otro lado, dicho punto pertenece a la recta $(u : v : w)$, pues

$$ux + vy + w = \lambda(ux_1 + vy_1 + w) + (1 - \lambda)(ux_3 + vy_3 + w) = \lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_3 = 0.$$

Así, pues, la recta $(u : v : w)$ corta efectivamente al segmento AC. De igual manera se establece que cuando α_3 tiene signo distinto del de α_2, la recta $(u : v : w)$ corta al segmento BC. Pero como α_1 y α_2 tienen signos diferentes, entonces α_3 tiene necesariamente un signo distinto del signo del número α_1, o bien de α_2. Con esto queda demostrado lo que queríamos.

Daremos ahora la definición del concepto de congruencia. Con este fin, consideremos una cierta clase de transformaciones, conocidas en álgebra con el calificativo de ortogonales.

Sean dadas las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{*}$$

mediante las cuales, dados $a_1, \ldots, c_2$, cada punto (x, y) se transforma en un punto determinado (x', y'). La transformación se llama *ortogonal*, si los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2 satisfacen la condición.

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{**}$$

Indiquemos, ante todo, algunas propiedades de la transformación ortogonal (*). De (**) se tiene:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1a_2 + b_1b_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Estas tres igualdades son equivalentes a la relación (**) y, por ende, caracterizan la ortogonalidad de la transformación (*).

De las igualdades (I) sigue, ante todo, que tanto a_1 y a_2 como b_1 y b_2 no pueden ser simultáneamente nulos. En efecto, si, por ejemplo $a_1 = a_2 = 0$, de la tercera de las igualdades (I) es $b_1b_2 = 0$, lo cual, unido a las igualdades asumidas $a_1 = a_2 = 0$, debe contradecir alguna de las dos primeras igualdades de (I). Además, de la igualdad $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ se obtiene: $a_1^2a_2^2 = b_1^2b_2^2$. De aquí, multiplicando miembro a miembro la primera de las igualdades de (I) por b_2^2, la segunda por a_1^2 y restando, hallamos:

$$0 = b_2^2 - a_1^2,$$

de donde $b_2 = \delta_1 a_1$, donde $\delta_1^2 = 1$. Análogamente, obtenemos que $b_1 = \delta_2 a_2$, siendo $\delta_2^2 = 1$. Pero $b_1b_2 = -a_1a_2$, de manera que $\delta_1\delta_2 = -1$, por lo cual será o bien

$$b_1 = -a_2, \quad b_2 = a_1,$$

o bien

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = -a_1.$$

Vemos, así, que la transformación (*) puede ser escrita de una de las formas que siguen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta y + c_1, \\ y' &= \beta x + \alpha y + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + c_1, \\ y' &= \beta x - \alpha y + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

donde hemos denotado con α y β a a_1 y a_2; en ambos casos las condiciones de ortogonalidad (I) se reducen a la relación única

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Llamaremos a (I) y (II) transformaciones ortogonales de primera y segunda especie, respectivamente.

Para lo que sigue resulta de particular importancia la siguiente propiedad de las transformaciones ortogonales: puntos situados sobre alguna semirrecta van a parar bajo cualquier transformación ortogonal, en puntos situados asimismo sobre alguna semirrecta.

Antes de probarlo, fijemos una manera cómoda de determinar semirrectas.

Sea dada la recta $a(u : v : w)$ y un punto $O(x_0, y_0)$ sobre ella; como O pertenece a a, tiene lugar la igualdad

$$ux_0 + vy_0 + w = 0.$$

Si $M(x, y)$ es un punto arbitrario de la recta a, análogamente tendremos:

$$ux + vy + w = 0.$$

De aquí sigue que

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0.$$

Hagamos $m = \lambda v$, $n = -\lambda u$, donde λ es un número arbitrario $\neq 0$. Entonces la ecuación precedente puede escribirse así:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Denotando cada uno de estos cocientes iguales con t, nos queda:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Las igualdades (2) determinan, para cada valor de t, algún punto sobre la recta, de forma que a distintos valores numéricos de t de un mismo signo les corresponden puntos situados a un mismo lado del punto $O(x_0, y_0)$, mientras que a valores numéricos de t con signos diferentes les corresponden puntos situados en lados diferentes con respecto a O. Esto puede establecerse directamente a partir del concepto «entre», definido más arriba.

De esta forma, a números t positivos les corresponden puntos de una de las dos semirrectas en que queda dividida a por el punto O, mientras que a valores negativos de t les corresponderán puntos de la otra semirrecta.

Resulta más cómodo determinar los puntos de una semirrecta por medio de las igualdades (2) siempre para los valores positivos de t, distinguiendo las semirrectas de origen común O, situadas sobre la recta a, según los signos de las magnitudes m y n: si para una de las semirrectas $m = p$ y $n = q$, para la otra $m = -p$, $n = -q$.

Llamaremos a las magnitudes m y n parámetros normalizados de la semirrecta, si para éstos se cumple la relación

$$m^2 + n^2 = 1;$$

en el caso $\lambda = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$, esta condición se satisface.

Evidentemente, una semirrecta queda determinada fijando el origen (x_0, y_0) y los parámetros normalizados m, n.

Recíprocamente, si se ha fijado una semirrecta, su origen (x_0, y_0) y sus parámetros normalizados m, n quedan determinados unívocamente.

Para denotar una semirrecta, utilizaremos la escritura $(x_0, y_0; m, n)$, asumiendo siempre que $m^2 + n^2 = 1$.

Ahora podemos establecer fácilmente la propiedad mencionada más arriba de las transformaciones ortogonales: por cualquier transformación ortogonal, los puntos que constituyen una semirrecta se llevan en puntos que forman, asimismo, una semirrecta.

Sea dada la semirrecta $(x_0, y_0; m, n)$. Todos sus puntos se obtienen si damos, en las fórmulas

$$x = x_0 + mt,$$
$$y = y_0 + nt,$$

todos los valores positivos posibles al parámetro t. Consideremos alguna transformación ortogonal de I especie

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x + \alpha y + c_2,$$

o bien de II especie,

$$x' = \alpha x + \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x - \alpha y + c_2.$$

Un punto arbitrario (x, y) de la semirrecta dada se transforma, en el primer caso, en el punto

$$x' = (\alpha m - \beta n)t + (\alpha x_0 - \beta y_0 + c_1),$$
$$y' = (\beta m + \alpha n)t + (\beta x_0 + \alpha y_0 + c_2),$$

y en el segundo, en el punto

$$x' = (\alpha m + \beta n)t + (\alpha x_0 + \beta y_0 + c_1),$$
$$y' = (\beta m - \alpha n)t + (\beta x_0 - \alpha y_0 + c_2).$$

En ambos casos estas expresiones pueden escribirse en la forma

$$x' = m' t + x_0',$$
$$y' = n' t + y_0',$$

y, por ende, los puntos (x', y') que se obtienen para diferentes valores positivos de t, se encuentran sobre la semirrecta de parámetros m', n'. Queda, con esto, probada nuestra afirmación. Obsérvese que los parámetros

$$m' = \alpha m - \beta n,$$
$$n' = \beta m + \alpha n,$$

o bien

$$m' = \alpha m + \beta n,$$
$$n' = \beta m - \alpha n$$

son normalizados. En efecto,

$$m'^2 + n'^2 = (\alpha m \mp \beta n)^2 + (\beta m \pm \alpha n)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)m^2 + (\alpha^2 + \beta^2)n^2 = m^2 + n^2 = 1.$$

Convendremos en decir que la semirrecta $(x_0', y_0'; m', n')$ fue obtenida de la $(x_0, y_0; m, n)$ por una transformación ortogonal. Entonces, tiene lugar la siguiente proposición.

La transformación ortogonal de I *especie* (I) *o de* II *especie* (II) *que lleva los puntos* (x, y) *en los* (x', y') *determina una transformación ortogonal de* I *o* II *especie respectivamente, de las semirrectas* $(x_0, y_0; m, n)$ *en las semirrectas* $(x_0', y_0'; m', n')$.

Las magnitudes $x_0', y_0'; m', n'$ *se expresan por las fórmulas*

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= \alpha x_0 - \beta y_0 + c_1, \\ y_0' &= \beta x_0 + \alpha y_0 + c_2, \\ m' &= \alpha m - \beta n, \\ n' &= \beta m + \alpha n \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}^*)$$

en el caso de una transformación de I *especie, y por las fórmulas*

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= \alpha x_0 + \beta y_0 + c_1, \\ y_0' &= \beta x_0 - \alpha y_0 + c_2, \\ m' &= \alpha m + \beta n, \\ n' &= \beta m - \alpha n \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}^*)$$

si se trata de una transformación de II *especie. Además, si los puntos* (x, y) *se encuentran sobre la semirrecta* $(x_0, y_0; m, n)$, *sus imágenes* (x', y') estarán sobre la semirrecta $(x_0', y_0'; m', n')$.

Ahora definiremos, en nuestra realización, la congruencia de segmentos y de ángulos.

Diremos que un segmento AB es congruente a otro, $A'B'$, si existe una transformación ortogonal (de puntos) que envía el punto A en A', y B en B'.

Diremos que el ángulo (h, k) es congruente al (h', k'), si existe una transformación ortogonal (de semirrectas) que envía la semirrecta h en la h', y k en k'.

Hay que mostrar que estas definiciones satisfacen todas las condiciones requeridas por los axiomas III,1 — III,5.

Con este fin, analicemos sucesivamente todos los axiomas del tercer grupo.

El axioma III,1 pide que para cualquier segmento AB prefijado de antemano, sobre toda recta a', a cada lado de cualquier punto prefijado A' de ella, exista exactamente un punto B' que determine con A' un segmento $A'B'$ al cual sea congruente el segmento AB.

Sean dados el segmento $A(x_0, y_0)B(x, y)$ y un punto $A'(x_0', y_0')$ sobre alguna recta $a'(u' : v' : w')$. Las magnitudes

$$m' = \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}, \qquad n' = \frac{-u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$$

son los parámetros normalizados de una de las dos semirrectas que determina el punto A' sobre la recta a' (las magnitudes $-m'$, $-n'$ serán los parámetros normalizados de la otra semirrecta).

Sean m y n los parámetros normalizados de la semirrecta AB; entonces el punto $B(x, y)$ se determina por las fórmulas

$$x = x_0 + mt,$$
$$y = y_0 + nt,$$

para un valor positivo BIEN DEFINIDO de t.

Buscaremos la transformación ortogonal que lleva la semirrecta $(x_0, y_0; m, n)$ en la semirrecta $(x'_0, y'_0; m', n')$. Según (I*), de las ecuaciones

$$\alpha m - \beta n = m',$$
$$\beta m + \alpha n = n'$$

hallamos de inmediato:

$$\alpha = mm' + nn',$$
$$\beta = mn' - nm',$$

siendo, además,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (mm' + nn')^2 + (mn' - nm')^2 =$$
$$= m^2(m'^2 + n'^2) + n^2(m'^2 + n'^2) = m^2 + n^2 = 1.$$

Determinando c_1 y c_2 del primer par de ecuaciones (I*), obtenemos exactamente una transformación de I especie

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$
$$y' = \beta x + \alpha y + c_2,$$

que lleva la semirrecta $(x_0, y_0; m, n)$ en la $(x'_0, y'_0; m', n')$.

Análogamente se puede establecer que existe exactamente una transformación de II especie que también lleva la semirrecta $(x_0, y_0; m, n)$ en $(x'_0, y'_0; m', n')$.

Ambas transformaciones aplican el punto $B(x, y)$ en el mismo punto $B(x', y')$:

$$x' = x'_0 + m't,$$
$$y' = y'_0 + n't.$$

Así, en la recta a', a un lado cualquiera del punto A', existe un punto B' tal que $AB \equiv A'B'$. Hemos mostrado, así, que esta condición del axioma III,1 se satisface.

El axioma III,1 también requiere que

$$AB \equiv BA.$$

Pero esta condición también se satisface. En efecto, la transformación ortogonal

$$x' = -x + (x_1 + x_2),$$
$$y' = -y + (y_1 + y_2)$$

aplica el punto $A(x_1, y_1)$ en el $B(x_2, y_2)$ y, recíprocamente, el $B(x_2, y_2)$ en el $A(x_1, y_1)$.

Queda así establecido que todas las condiciones del axioma III,1 son observadas.

Pasemos al axioma siguiente, III.2, según el cual de las relaciones de congruencia

$$A'B' \equiv AB \quad \text{y} \quad A''B'' \equiv AB$$

debe seguir que

$$A'B' \equiv A''B''.$$

En nuestra realización, esta condición se satisface, como consecuencia de las propiedades de grupo de las transformaciones ortogonales. Precisamente,

1. Cada transformación ortogonal posee una inversa, que también es ortogonal.

2. Si alguna transformación ortogonal aplica los puntos (x, y) en los (x', y'), y alguna otra transformación ortogonal aplica los puntos (x', y') en los puntos (x'', y''), la transformación resultante (es decir, el producto de las dos dadas), que aplica los puntos (x, y) en los (x'', y''), también es ortogonal.

En efecto, consideremos una transformación ortogonal arbitraria, cuya matriz*) denotaremos con Φ; llamando Φ' a la matriz transpuesta, e I a la matriz unidad, podemos escribir la condición(**) de ortogonalidad (véase la pág. 179) en la forma

$$\Phi\Phi' = I. \tag{N}$$

De aquí se desprende que el determinante de la matriz Φ es igual a ± 1 y, por ser diferente de cero, cada transformación ortogonal tiene una inversa. La matriz de la transformación inversa satisface la condición de ortogonalidad. En efecto, obsérvese, previamente, que la relación (N) implica

$$\Phi^{-1} = \Phi';$$

pero $\Phi(\Phi'\Phi) = (\Phi\Phi')\Phi = \Phi$; por esto, $\Phi'\Phi = I$, y

$$(\Phi^{-1})(\Phi^{-1})' = I.$$

En conclusión, *la transformación inversa a una ortogonal es también ortogonal.*

Sean, ahora, Φ y Ψ las matrices de dos transformaciones ortogonales; el producto de estas transformaciones es, evidentemente, una transformación de matriz $X = \Psi\Phi$. Utilizando la conocida relación

$$(\Psi\Phi)' = \Phi'\Psi',$$

resulta sencillo comprobar que la matriz X satisface la condición de ortogonalidad. Efectivamente, tenemos:

$$XX' = \Psi\Phi(\Psi\Phi') = \Psi\Phi(\Phi'\Psi') = \Psi(\Phi\Phi')\Psi' = \Psi I\Psi' = \Psi\Psi' = I.$$

Así, al efectuar sucesivamente dos transformaciones ortogonales, la transformación resultante es, también, ortogonal.

Una vez comprobado que las transformaciones ortogonales poseen propiedades de grupo, podemos demostrar sin dificultad que el axioma III,2 se satisface en nuestra realización.

Supongamos que $A'B' \equiv AB$ y $A''B'' \equiv AB$. Convendremos en simbolizar la transformación ortogonal que aplica un punto arbitrario M' en un punto M, con la escritura

$$M = \Phi(M').$$

---

*) Como ordinariamente se entiende aquí por matriz de la transformación (*) a la matriz formada por los coeficientes de x, y en los segundos miembros de esta expresión, es decir,

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|.$$

(*N. del Tr.*)

Si $A'B' \equiv AB$, existe una transformación $M = \Phi(M')$ tal que

$$A = \Phi(A'), \qquad B = \Phi(B').$$

Análogamente, si $A''B'' \equiv AB$, existe una transformación $M = \Psi(M'')$ tal que

$$A = \Psi(A''), \qquad B = \Psi(B'').$$

Denotando con Ψ^{-1} la transformación inversa a Ψ, hallamos:

$$A'' = \Psi^{-1}(A) = \Psi^{-1}(\Phi(A')),$$
$$B'' = \Psi^{-1}(B) = \Psi^{-1}(\Phi(B')).$$

En virtud de las propiedades de grupo, la transformación $\Psi^{-1}\Phi$ es ortogonal; por lo tanto, $A'B' \equiv A''B''$.

Pasemos al axioma III,3. Sean A, B, C tres puntos de alguna recta a y supongamos qe B está entre A y C; sean A', B', C' tres puntos de alguna recta a', que se encuentran en análoga posición relativa. El axioma III,3 requiere que

$$AB \equiv A'B', \qquad BC \equiv B'C'$$

implique

$$AC \equiv A'C'.$$

De acuerdo con los razonamientos expuestos al inverstigar el axioma III,1, existe una transformación ortogonal que lleva la semirrecta BA a la $B'A'$ y, simultáneamente, la semirrecta BC a la $B'C'$. Como $AB \equiv A'B'$ y $BC = B'C'$, de los mismos razonamientos (o bien del propio axioma III,1) sigue que la transformación indicada lleva el punto A en A' y el C en C'. Por ende, $AC \equiv A'C'$, es decir, el axioma III,3 se satisface.

Mostremos ahora que en la realización aritmética se satisfacen las condiciones contenidas en el axioma III,4: si $\angle(h, k)$ es un ángulo arbitrario, h', alguna semirrecta, entonces a cada lado de ésta se encuentra exactamente una semirrecta k', que forma con ella un ángulo $\angle(h', k')$, al cual es congruente el dado $\angle(h, k)$; además,

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k), \qquad \angle(h, k) \equiv \angle(k, h).$$

Recién ahora tendremos que hacer una distinción esencial entre las transformaciones ortogonales de I y II especie.

Sea dada alguna semirrecta h; imaginémonos que la hemos completado hasta una recta $\bar{h}$ y consideremos los dos semiplanos que quedan separados por la recta $\bar{h}$. Denotemos uno de ellos con I, y el otro, II. Sea, asimismo, h' alguna otra semirrecta, $\bar{h}'$, la recta que la contiene, y I', II', los dos semiplanos separados por la recta $\bar{h}'$.

Supongamos que Φ_1 y Φ_2 son transformaciones ortonogales de I y II especie respectivamente, cada una de las cuales lleva la semirrecta h en la h'. Entonces, cada una de las transformaciones Φ_1 y Φ_2 lleva los puntos del semiplano I en los de uno de los dos semiplanos I' y II', y los del semiplano II, en los del otro de los semiplanos I', II'; además, si Φ_1 lleva el semiplano I en el I', Φ_2 llevará I en II'.

A fin de probar esto, comencemos observando que a puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) situados en lados diferentes con respecto a la recta $(u : v : w)$ les corresponden números $ux_1 + vy_1 + w$ y $ux_2 + vy_2 + w$ de signo diferente, como fue mostrado más arriba, al discutir el axioma de Pasch. Así, entonces, para los puntos (x, y) de un semiplano debe ser $ux + vy + w > 0$, y para los del otro, $ux + vy + w < 0$.

Si (x_0, y_0) es el origen de la semirrecta h y m, n son sus parámetros normalizados, la condición de pertenencia del punto (x, y) a uno u otro semiplano de borde $\bar{h}$ puede escribirse en la forma

$$n(x - x_0) - m(y - y_0) > 0$$

y

$$n(x - x_0) - m(y - y_0) < 0$$

respectivamente. Sean (x_0', y_0') el origen, y m', n', los parámetros normalizados de la semirrecta h'. Si

$$x' = \alpha x - \beta y + c_1,$$

$$y' = \beta x + \alpha y + c_2$$

es la transformación ortogonal de I especie que lleva h en h', entonces

$$x' - x_0' = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0),$$

$$y' - y_0' = \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0),$$

$$m' = \alpha m - \beta n,$$

$$n' = \beta m + \alpha n,$$

de donde

$$n'(x' - x_0') - m'(y' - y_0') = n(x - x_0) - m(y - y_0). \qquad (\alpha)$$

Si, en cambio, h va en h' por medio de la transformación de II especie

$$x' = \alpha x + \beta y + c_1,$$

$$y' = \beta x - \alpha y + c_2,$$

entonces

$$n'(x' - x_0') - m'(y - y_0') = -n(x - x_0) + m(y - y_0). \qquad (\beta)$$

De las igualdades (α) y (β) se desprende directamente la propiedad indicada arriba de las transformaciones ortogonales. Al mismo tiempo, se comprueba de inmediato la primera condición del axioma III,4 en la realización que estamos considerando.

En efecto, como ya sabemos, existe una transformación ortogonal de I especie y una de II especie, que llevan el lado h de un ángulo $\angle(h, k)$ en una semirrecta h'. De estas dos transformaciones, sólo una lleva la semirrecta k en una semirrecta k', que se encuentre en un semiplano prefijado de antemano y limitado por $\bar{h}'$.

Así, pues, a cada lado de la recta $\bar{h}'$ hay exactamente una semirrecta k' que forma, junto con h', un ángulo $\angle(h', k')$ tal que $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$.

Las dos condiciones restantes del axioma III,4 se verifican aún con mayor sencillez.

La relación $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ tiene lugar, pues existe una transformación ortogonal que deja h y k en su lugar: la transformación idéntica

$$x' = x,$$

$$y' = y.$$

La relación $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$ tiene lugar, pues existe una transformación ortogonal que lleva h en k y k en h.

Precisamente, si (x_0, y_0) es el vértice del ángulo; m_1, n_1 y m_2, n_2 son los parámetros normalizados de las semirrectas h y k, dicha transformación (de II especie) es

$$x' = (m_1m_2 - n_1n_2)x + (n_1m_2 + m_1n_2)y + \\ + [x_0 - (m_1m_2 - n_1n_2)x_0 - (n_1m_2 + m_1n_2)y_0],$$
$$y' = (n_1m_2 + m_1n_2)x - (m_1m_2 - n_1n_2)y + \\ + [y_0 - (n_1m_2 + m_1n_2)x_0 + (m_1m_2 - n_1n_2)y_0].$$

Efectivamente, por estas fórmulas obtenemos $x_0' = x_0$, $y_0' = y_0$, y por las fórmulas (II*) para los valores dados de α y β, tenemos que $m_1' = m_2$, $n_1' = n_2$ y $m_2' = m_1$, $n_2' = n_1$.

Quedan, así, verificadas todas las condiciones del axioma III,4.

Analicemos, por último, las condiciones del axioma III,5: si ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos, de las relaciones $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ deben seguir las relaciones $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

Estas condiciones son satisfechas en nuestra realización. En efecto, a base de lo expuesto podemos afirmar que con la condición $AB \equiv A'B'$ existen dos transformaciones ortogonales (una de I y otra de II especie), que llevan el punto A en el A' y el B en el B'. Como consecuencia de la relación $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, una sola de ellas lleva la semirrecta AC en la $A'C'$ y, como $AC \equiv A'C'$, esta misma transformación lleva el punto C en el C'. Consecuentemente, existe una transformación ortogonal que lleva los puntos A, B, C en A', B', C' respectivamente; esto implica que $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

Hemos comprobado, entonces, que la definición dada de congruencia de segmentos y ángulos satisface todos los axiomas del tercer grupo.

Pasemos a los axiomas de continuidad IV,1 — IV,2. En nuestra lista de axiomas, el cuarto grupo lo forman los axiomas de Arquímedes y de Cantor. Podríamos verificarlos directamente, tal como lo hicimos con los grupos I, II, III. Sin embargo, resulta más sencillo proceder de otra manera. Utilizaremos el teorema 41 del § 23, que establece la equivalencia (si se cumplen los axiomas de los grupos I — III) de los axiomas IV,1 y IV,2 al principio de Dedekind. En virtud de este teorema, para nuestros fines basta establecer que en la realización aritmética, en el conjunto de puntos de cada recta se cumple el principio de Dedekind. Pero esto es evidente. En efecto, sea $(u : v : w)$ alguna recta y sea, por ejemplo, $v \neq 0$; consideraremos que sobre esta recta el punto (x_1, y_1) precede al (x_2, y_2), si $x_1 < x_2$. En este caso, al efectuar cualquier cortadura de Dedekind en el conjunto de los puntos (x, y) de la recta $(u : v : w)$, simultáneamente efectuamos una cortadura de Dedekind en el conjunto de los números reales $\{x\}$. Como en el conjunto de los números reales tiene lugar el principio de Dedekind, existirá un número $\bar{x}$ que realice la cortadura, es decir, que clausure alguna de las clases. Hagamos

$$\bar{y} = \frac{-u\bar{x} - w}{v}.$$

Evidentemente, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ está sobre la recta $(u : v : w)$ y clausura una de las clases de la cortadura de Dedekind en esta recta. Por consiguiente, para cada cortadura de Dedekind en el conjunto de puntos de cualquier recta existe un punto que realiza esta cortadura. Dicho de otro modo, en todas las rectas tiene lugar el principio de Dedekind. Del teorema 41 del § 23 sigue entonces que los axiomas de continuidad IV,1 y IV,2 se satisfacen en la realización aritmética.

Nos resta considerar el axioma V de paralelismo.

Sea $(u : v : w)$ una recta arbitraria y (x_0, y_0) un punto que no le pertenece, es decir, que satisface la condición

$$ux_0 + vy_0 + w \neq 0.$$

Debemos determinar si existe una única recta que pasa por (x_0, y_0) y no tiene puntos comunes con $(u : v : w)$, es decir, paralela a ésta, o bien si exista más de una.

Sea $(u' : v' : w')$ una de estas rectas. Las magnitudes u', v', w' deben satisfacer dos condiciones: en primer lugar, debe verificarse la igualdad

$$u'x_0 + v'y_0 + w' = 0, \qquad (^*)$$

pues la recta $(u' : v' : w')$ pasa por el punto (x_0, y_0); en segundo lugar, el sistema

$$\left.\begin{array}{r} u'x + v'y + w' = 0, \\ ux + vy + w = 0 \end{array}\right\} \qquad (^{**})$$

debe ser incompatible, pues las rectas $(u' : v' : w')$ y $(u : v : w)$ no tienen puntos comunes. Si el sistema $(^{**})$ es incompatible, debe ser, necesariamente, $u' : u = v' : v$, o bien, si se denota con μ a cada uno de estos cocientes iguales,

$$u' = \mu u, \qquad v' = \mu v.$$

De $(^*)$ hallamos en seguida:

$$w' = -\mu(ux_0 + vy_0).$$

Esto implica que

$$u' : v' : w' = u : v : -(ux_0 + vy_0),$$

de forma que las razones $u' : v' : w'$ están bien determinadas, es decir, existe exactamente una recta que pasa por (x_0, y_0) y es paralela a la recta arbitraria prefijada $(u : v : w)$.

Entonces, en nuestra realización, las propiedades de paralelismo satisfacen el axioma V.

Hemos indicado, así, una realización concreta del sistema de axiomas I — V; *por lo tanto, este sistema es compatible.*

Como esta realización se basa en el concepto de número real, el resultado indicado tiene carácter condicional, y puede ser enunciado como sigue:

El sistema de axiomas I — V *no contiene contradicciones, siempre que la aritmética de los números reales sea consistente.*

La demostración de la consistencia de la aritmética está fuera de los límites de los fundamentos de la geometría, de forma que dejaremos de lado este problema.

Anotemos, por último, que todas las relaciones que hemos utilizado en el presente parágrafo surgen en la geometría analítica, cuando se utiliza el sistema ortogonal cartesiano de coordenadas. Es por esto que a veces llamaremos *cartesiana* a la realización considerada aquí.

Habiéndonos propuesto construir una realización concreta de los axiomas de Hilbert, hemos utilizado objetos de la aritmética y, verificando sucesivamente todos los axiomas, hemos comprobado que todas las definiciones dadas satisfacen estos axiomas. Como hemos eliminado toda referencia a la intuición geométrica, debido a la naturaleza puramente aritmética de los objetos escogidos, el estudio efectuado resultó bastante engorroso. Lo hemos hecho con todo detalle, porque reviste suma importancia, al permitirnos concluir la consistencia de la axiomática de Hilbert (más precisamente, al reducirla a la consistencia de la aritmética).

Además, como verá el lector en las secciones subsiguientes, algunas variaciones de la realización aritmética nos permitirán resolver varias cuestiones concernientes a la independencia de los axiomas I — V.

3. Demostración de la independencia de algunos axiomas de la geometría euclidiana

§ 72. En el § 69 destacamos el problema de minimalidad como uno de los básicos de la axiomática. A fin de resolverlo completamente, debe mostrarse que cada condición contenida en los axiomas adoptados es independiente de las restantes, es decir, que el número de condiciones no puede ser disminuido. Un tal estudio requiere mucho tiempo, y estaría fuera de lugar en nuestro libro. Nos limitaremos a demostrar la independencia de algunos de los axiomas I — V de los restantes axiomas de este sistema.

Ante todo, podemos afirmar que el axioma V de paralelismo no es consecuencia de los I — IV. El problema de su independencia ya lo hemos resuelto, de modo que no volveremos a él.

Ahora mostraremos la independencia de los axiomas de continuidad (grupo IV).

Demostraremos primero que el axioma de Cantor IV,2 no sigue de los demás (incluyendo el de Arquímedes, IV,1). De acuerdo con el principio general de tales demostraciones (§ 69), debemos construir algún conjunto de objetos y definir relaciones mutuas entre ellos, de manera que éstas satisfagan todos los axiomas, a excepción del de Cantor.

Siguiendo a Hilbert, utilizaremos para esto el conjunto infinito Ω de los números que pueden obtenerse a partir de los racionales, al aplicar muchas veces las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y, además, la quinta operación $\sqrt{1+\omega^2}$, donde ω es un número ya obtenido por medio de estas operaciones. Evidentemente, el conjunto Ω posee la siguiente propiedad: si ω_1 y ω_2 son dos números de Ω, entonces

$\omega_1+\omega_2,\ \omega_1-\omega_2,\ \omega_1\omega_2,\ \dfrac{\omega_1}{\omega^2}$ (si $\omega_2 \neq 0$) y $\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2} = \pm\,\omega_1\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}$ son también números del conjunto Ω.

Ahora definiremos los objetos geométricos: llamaremos punto a cualquier par de números (x, y) que PERTENEZCAN AL CONJUNTO Ω; recta, a la razón $(u : v : w)$ de tres números de este mismo conjunto, asumiendo que al menos uno de los dos números u y v es diferente de cero.

Todas las relaciones mutuas entre los objetos (pertenencia de puntos a rectas, congruencia, etc.) se definen igual a como lo hicimos en el § 71, al construir la realización cartesiana de los axiomas I — V; sin embargo, ahora escogeremos los coeficientes de las fórmulas de una transformación ortogonal sólo dentro del conjunto Ω. Al verificar los axiomas I, II, III, V, hemos utilizado sólo comparación de números, operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) y la operación de extracción de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dos números (esta última operación se utilizó al normalizar los parámetros de una semirrecta). Como observamos más arriba, estas operaciones, aplicadas a números del conjunto Ω, producen nuevamente números de este conjunto. Por ello, todas las conclusiones que hicimos al verificar los axiomas I, II, III, V en la realización cartesiana, siguen teniendo valor ahora, al restringir la elección de los números utilizados al conjunto Ω. En consecuencia, se puede afirmar que en nuestra nueva realización se satisfacen todas las condiciones contenidas en los axiomas I, II, III, V.

La situación es diferente con los axiomas del grupo IV. Verifiquemos por separado los axiomas de Arquímedes IV,1 y de Cantor IV,2. Obsérvese, ante todo, que mediante un desplazamiento congruente (en nuestra realización, mediante una transformación ortogonal) toda semirrecta puede superponerse a cualquier semirrecta dada. Por esto, basta verificar la condición de Arquímedes en una recta cualquiera. Para nuestros fines lo más sencillo es tomar el eje x, es decir, la recta que contiene los puntos del tipo $(x, 0)$. Evidentemente, los puntos $A_0(0, 0)$, $A_1(a, 0)$, $A_2(2a, 0)$, ... , $A_n(na, 0)$, ... , donde $a > 0$, determinan una sucesión de segmentos congruentes $A_0A_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots \equiv A_nA_{n+1} \equiv \ldots$ En efecto, existe una transformación ortogonal, precisamente:

$$x' = x + a,$$
$$y' = y,$$

que aplica cada uno de estos segmentos en su vecino de la derecha. Sea $B(b, 0)$ un punto cualquiera, que satisfaga la única condición $b > a$. Para que en nuestra realización tenga lugar el axioma de Arquímedes, debe existir un entero positivo n, tal que B se encuentre entre A_0 y A_n. Los puntos A_0, B, A_n estarán dispuestos en el orden indicado, si $na > b$. Pero en la aritmética la proposición de Arquímedes es verdadera: cualesquiera que sean los números $a > 0$, $b > 0$, $b > a$, existe un entero n tal que $na > b$. Por lo tanto, la proposición de Arquímedes tiene lugar también en la realización que estamos considerando.

Por el contrario, el axioma de Cantor no se cumple en esta realización. En efecto, si en un sistema de puntos y rectas, conjuntamente con los axiomas I, II, III, IV,1, V, tiene lugar también el axioma de Cantor IV,2, entonces es posible demostrar que en este sistema siempre se puede hallar un segmento cuya longitud sea igual a cualquier número prefijado de antemano (véase el capítulo II, § 21, teorema 35). En nuestra realización, en cambio, las longitudes de todos los segmentos se expresan únicamente por medio de puntos del conjunto Ω.

Llegamos, así, a la siguiente conclusión: existe un sistema de objetos cuyas relaciones mutuas satisfacen los axiomas I — III, IV,1, V, pero no satisfacen el axioma de Cantor IV,2. Dicho de otro modo, *el axioma de Cantor no es consecuencia de los demás de la geometría elemental.*

Si se toma en cuenta que el conjunto Ω es numerable, el resultado obtenido puede expresarse también de otro modo: *no es posible establecer que el conjunto de los elementos de la geometría es no numerable, si se utilizan sólo los axiomas* I — III, IV,1, V, *sin el axioma de Cantor.*

§ 73. Ahora probaremos que también el primer axioma del cuarto grupo, es decir, el axioma de Arquímedes, es independiente de los axiomas de los grupos restantes I, II, III, V.

Para esto, tendremos que hallar una realización de los axiomas I, II, III, V, en donde no tenga lugar la proposición de Arquímedes; tal realización existe, y se indicará más abajo. Al igual que la que acabamos de discutir, se basa en la aritmética, sólo que en un cierto sentido generalizado, que se refiere al llamado sistema no arquimediano de números.

A fin de aclarar al máximo la exposición que sigue, enumeremos las proposiciones básicas que se refieren a las propiedades de los números reales (las llamaremos axiomas de la aritmética).

1. Existe una operación llamada «suma», por medio de la cual del número a y el número b se obtiene un número determinado c; en notación simbólica,

$$a + b = c.$$

2. Existe otra operación, el «producto», mediante la cual del número a y el número b se obtiene un número determinado d; en símbolos,

$$ab = d.$$

3. Si a, b, c son números arbitrarios, tienen lugar las relaciones:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$
$$a + b = b + a,$$
$$a(bc) = (ab)c$$
$$a(b + c) = ab + ac,$$
$$ab = ba.$$

4. (Definición de la diferencia.) Si a y b son números dados, existe un número x, y sólo uno, tal que $a + x = b$.

De los axiomas 3 y 4 sigue que existe un número, y sólo uno —que se llama cero y se denota con 0— , tal que para cada número a tiene lugar la relación

$$a + 0 = a.$$

5. (Definición del cociente.) Si a y b son números dados y $a \neq 0$, existe un número x, y sólo uno, tal que $ax = b$.

De los axiomas 3 y 5 sigue que existe un número, y sólo uno —que se llama unidad y se denota por 1—, tal que

$$a \cdot 1 = a.$$

6. (Propiedad de orden.) Si a y b son dos números diferentes, siempre uno de ellos es mayor ($>$) que el otro; entonces el segundo es menor ($<$) que el primero. En notación simbólica,

o bien

$$a > b \quad \text{y} \quad b < a,$$

o bien

$$b > a \quad \text{y} \quad a < b.$$

Además, si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$. Para ningún a tiene lugar la relación $a > a$.

7. (Proposición de Arquímedes.) Si a y b son dos números positivos arbitrarios ($a > 0$ y $b > 0$), siempre se puede tomar el número a en calidad de sumando tantas

veces como para que la suma obtenida sea mayor que el número b:

$$a + a + \dots + a > b.$$

8. Proposición de Cantor (o cualquier otra equivalente a ella).

Todas estas proposiciones son aplicables al conjunto de los números reales con las operaciones aritméticas habituales. No nos interesa aquí decidir si las proposiciones 1 — 8 enumeradas constituyen un sistema completo de axiomas de la aritmética, es decir, si se puede, a partir de éstas, demostrar cualquier teorema aritmético. Pero si se analizaran con atención los razonamientos y cálculos que hemos efectuado al verificar los requisitos de los axiomas geométricos en la realización cartesiana, se podría comprobar que hemos utilizado únicamente propiedades de los números, expresadas en las proposiciones 1 — 8. Por esto, resulta posible considerar el concepto de número desde un punto de vista axiomático, ampliando así considerablemente la clase de objetos de la realización aritmética. Esta posibilidad jugará un papel importante en nuestro estudio.

Imaginémonos cierto conjunto A, cuyos elementos serán de naturaleza indiferente para nosotros. Supongamos que a cada par de elementos a, b del conjunto A (b puede coincidir con a) se le ha puesto en correspondencia un elemento c del mismo conjunto. Convendremos en llamar adición a esta correspondencia, y al elemento c, suma de los elementos a y b; para denotar la suma, utilizaremos la notación habitual: $c = a + b$. Supongamos, además, que a cada par de elementos a, b de A (b nuevamente puede coincidir con a) se le ha puesto en correspondencia, por otra regla, un elemento d de este conjunto. Llamaremos multiplicación a la segunda correspondencia, y al elemento d, producto de los elementos a y b, y escribiremos: $d = ab$.

Por último, supongamos que los elementos del conjunto A se asumen dispuestos en un orden determinado, es decir, cualesquiera que sean dos elementos diferentes a y b, uno bien determinado de ellos se considera precedente del otro; convendremos en decir que el elemento precedente es «menor» que el que le sigue.

Llamaremos números generalizados a los elementos del conjunto A, si las operaciones de suma y producto, así como también el orden de disposición de los elementos, están definidos de manera que se cumplan todas las relaciones indicadas en las proposiciones 1 — 8.

Supongamos, ahora, que definimos objetos geométricos y las relaciones mutuas entre ellos de manera idéntica a como lo hicimos al construir la realización cartesiana, pero tomando números generalizados en lugar de los habituales. Evidentemente, obtendremos cierta realización de los axiomas geométricos I — V, cualquiera que sea la naturaleza de los números generalizados utilizados. Es totalmente claro que las realizaciones así construidas no se diferencian de manera esencial de la cartesiana. En efecto, aunque al construir los objetos geométricos nos permitimos utilizar elementos de naturaleza arbitraria, estamos sometiendo las operaciones con estos elementos a las reglas de la aritmética ordinaria.

Sin embargo, es posible una generalización ulterior del concepto de número, que ya resulta ser útil y permite resolver el problema planteado: demostrar la independencia del axioma de Arquímedes de los axiomas I, II, III, V. Sea dado cierto conjunto A, para cuyos elementos se han definido las operaciones de suma y producto, y se ha establecido un orden; diremos que el conjunto A es un sistema no arquimediano de números (generalizados), si en éste son verdaderas las proposiciones 1 — 6, pero no así la proposición 7 de Arquímedes.

Daremos, ahora, la descripción de un sistema no arquimediano.

Consideremos el conjunto de todas las funciones racionales del tipo

$$\omega(t) = \frac{a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0t^m + b_1t^{m-1} + \ldots + b_m};$$

con coeficientes reales a_k, b_k. Le agregaremos, además, todas las funciones que se obtienen a partir de las racionales aplicando reiteradamente las operaciones de suma, resta, producto, cociente y la quinta operación $\sqrt{1 + \omega^2(t)}$, donde $\omega(t)$ es una función ya obtenida por medio de estas operaciones. Denotaremos con $\Omega(t)$ el conjunto de funciones construido de esta manera. Evidentemente, $\Omega(t)$ contiene todas las funciones racionales y, en particular, las funciones del tipo $\omega(t) = \text{const.}$, es decir, las funciones que al variar t se mantienen siempre iguales a un cierto número.

Queremos considerar los elementos del conjunto $\Omega(t)$ como números generalizados. Para esto, tendremos que definir, ante todo, el sentido de las operaciones de suma y producto. Tomemos dos funciones cualesquiera $a(t)$ y $b(t)$ de $\Omega(t)$; con la convención de considerarlas números generalizados, cambiaremos la forma de su escritura y pondremos sencillamente a, b en lugar de $a(t)$, $b(t)$. Claramente, $a(t) + b(t) = c(t)$ es una función del conjunto $\Omega(t)$, y otro tanto puede decirse de $a(t)b(t) = d(t)$. Por esto, $c(t)$ y $d(t)$ son, asimismo, números generalizados c y d; llamaremos al primero suma de los números a y b, y al segundo, producto de estos números. Como para cada valor de t *) las operaciones $a(t) + b(t)$ y $a(t)b(t)$ se efectúan según las reglas habituales de la aritmética, las operaciones que acabamos de definir de suma y producto de números generalizados satisfacen las condiciones de las proposiciones 1 — 5. Aquí el cero de nuestro sistema de números generalizados será la función idénticamente igual al 0 habitual, mientras que la unidad generalizada es la función idénticamente igual a la unidad usual.

Como en el sistema dado de números generalizados se observan las proposiciones 1 — 5, las cuatro operaciones aritméticas resultan bien definidas. Obsérvese que en nuestro sistema está definida, además, la operación $\sqrt{a^2 + b^2}$; en efecto, si $a(t)$ y $b(t)$ son dos funciones de $\Omega(t)$ y $a(t)$ no es idénticamente nula, pongamos

$$\sqrt{a^2(t) + b^2(t)} = \pm\, a(t)\sqrt{1 + \left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)^2}.$$

Entonces el segundo miembro de esta igualdad da también una función de $\Omega(t)$. Esta función puede ser considerada como el número generalizado $\sqrt{a^2 + b^2}$, que se determina a partir de dos números dados a y b (cómo hay que cambiar la definición para $a = 0$, se propone aclararlo al lector).

Ahora definiremos el orden en el conjunto $\Omega(t)$. Sea $\omega(t)$ una función arbitraria de $\Omega(t)$, que representa en nuestro sistema al número ω. Si $\omega \neq 0$, es decir, si $\omega(t)$

---

*) En rigor, no es para cada valor de t, sino para aquellos t pertenecientes tanto al dominio de $a(t)$ como de $b(t)$ (es decir, para los valores de t que no anulan el denominador de a, ni el de b). Una observación similar cabe en la definición del cociente $a(t)/b(t)$ (si b no es idénticamente cero). (*N. del Tr.*)

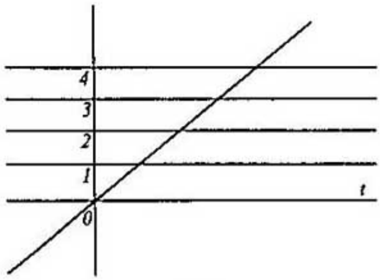


Fig. 86

no es idénticamente nula, para un t^* suficientemente grande tendremos que, para todo $t > t^*$, la función $\omega(t)$ tendrá un signo constante*). Si $\omega(t) > 0$ para $t > t^*$, convendremos en considerar positivo al número generalizado ω: $\omega > 0$; si, en cambio, para $t > t^*$ tiene lugar la desigualdad $\omega(t) < 0$, consideraremos que $\omega < 0$. Una vez divididos, así, todos los números generalizados (excepto el cero) en los positivos y los negativos, introducimos la comparación de los números mediante la condición habitual: consideraremos que $a > b$, si $a - b > 0$.

Es fácil comprobar que todos los requisitos de la proposición 6 serán satisfechos aquí.

Sin embargo, en nuestro sistema de números generalizados la proposición 7 no tiene lugar; el sistema es, en consecuencia, no arquimediano.

A fin de comprobarlo, resulta más cómodo representar el criterio de desigualdad $a > b$ enunciado arriba en la siguiente forma geométrica: $a > b$, si para $t \to +\infty$ la gráfica de la función $a(t)$ se encuentra por encima de la gráfica de $b(t)$. Como ya observamos, entre los elementos del conjunto $\Omega(t)$ se encuentran las funciones que al variar t mantienen un valor constante: $\omega(t) \equiv c$. Las gráficas de tales funciones son rectas paralelas al eje t. Cada función $\omega(t) \equiv c$ representa, desde nuestro punto de vista, un número generalizado; lo representaremos simplemente por c, de forma que, al escribir 10 ó 20, sobreentendemos la función $\omega(t)$ idénticamente igual a 10 o a 20. Tomemos las dos funciones $a(t) \equiv 1$ y $b(t) \equiv t$, que están en el conjunto $\Omega(t)$ y, en consecuencia, pueden ser consideradas como números generalizados a y b. Si sumamos el número a consigo mismo n veces, la suma obtenida se representa en el conjunto $\Omega(t)$ por una función cuya gráfica es una recta paralela al eje t y situada en el semiplano positivo a una distancia n de este eje. La gráfica de la función $b(t) \equiv t$ es la bisectriz del primer ángulo coordenado. Pero cuando $t \to +\infty$, la gráfica de esta función pasa por encima de cualquier recta paralela al eje t (fig. 86). De aquí sigue que cualquiera que sea la cantidad de veces que el número a se sume consigo mismo, para la suma obtenida siempre tendrá lugar la desigualdad

$$a + a + \ldots + a < b.$$

*) Esto sigue de que la función $\omega(t)$ es algebraica (toda función algebraica tiene un número finito de cambios de signo).

Así, entonces, en nuestro sistema de números generalizados la proposición de Arquímedes no tiene lugar.

Ahora no resulta difícil construir un sistema de objetos geométricos en el cual se realicen los axiomas I, II, III, V, pero en donde sea falso el axioma de Arquímedes.

Llamaremos punto a un par de números (x, y) DEL SISTEMA NO ARQUIMEDIANO $\Omega(t)$, recta, a la razón $(u : v : w)$ de tres números u, v, w del sistema $\Omega(t)$, sujetos a la única condición de que al menos uno de los dos números u, v sea diferente de cero. Todas las relaciones mutuas entre los objetos geométricos son definidas de manera idéntica a como lo hicimos en la realización cartesiana de los axiomas de Hilbert. En el sistema $\Omega(t)$ están definidas las operaciones de suma y producto de elementos, así como también las relaciones «mayor» y «menor», en correspondencia con los axiomas de la aritmética 1 — 6. Además, para dos elementos a y b arbitrarios, está definida la operación $\sqrt{a^2 + b^2}$. Por esto, todos los razonamientos y cálculos que efectuamos al verificar los axiomas I, II, III, V en la realización cartesiana, pueden ser repetidos en su totalidad ahora, cuando en lugar de los números ordinarios utilizamos los números generalizados del sistema $\Omega(t)$. Por lo tanto, en la realización que acabamos de construir se satisfacen los axiomas I, II, III, V. En cambio, la proposición de Arquímedes IV,1 no tiene lugar en esta realización, pues el sistema de números $\Omega(t)$ es no arquimediano. De aquí se desprende que el axioma de Arquímedes no depende de los axiomas I, II, III, V.

Resumiendo lo expuesto, podemos enunciar la siguiente proposición:

Utilizando los axiomas I, II, III, V, *no es posible demostrar el axioma de Arquímedes* IV,1.

Utilizando los axiomas I, II, III, IV,1 V, *es imposible probar el axioma de Cantor* IV,2.

Es natural plantearse la pregunta: ¿no se desprende el axioma de Arquímedes de los restantes, incluyendo el axioma de Cantor? También aquí la respuesta es negativa.

Para comprobarlo, debe construirse un sistema no arquimediano de números en donde la proposición de Cantor tenga lugar.

Presentaremos un ejemplo de tal sistema*).

Convendremos en llamar número a toda serie de potencias**)

$$a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \dots,$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots$ son números reales ordinarios arbitrarios, y n, un entero ordinario cualquiera (positivo, negativo o cero). Incluiremos los números reales ordinarios en el sistema considerado, como series del tipo

$$a + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$$

Llamaremos cero a la serie

$$0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots$$

Si el número

$$a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + \dots$$

no es cero, supondremos que el número ordinario a_0 es diferente de cero.

*) Este ejemplo me fue presentado por A. N. Kolmogórov.

**) Se trata de series *formales*, es decir, no se plantea para nada su posible convergencia. (*N. del Tr.*)

Supongamos que la adición y la multiplicación coinciden con las operaciones formales de adición y multiplicación de series de potencias (es decir, la suma de dos números de nuestro sistema, representados por dos series de potencias cualesquiera, se define como la serie de potencias obtenida sumando términos semejantes de las series que representan los sumandos; llamaremos producto de dos números de nuestro sistema, representados por dos series de potencias cualesquiera, a la serie de potencias que se obtiene multiplicando cada término de una de las series, que representan a los factores, por cada término de la otra, reduciendo luego términos semejantes y ordenándolos en potencias crecientes del argumento t).

No es difícil comprobar que los axiomas 1 — 5 de la aritmética se satisfacen. Además, en nuestro sistema está definida la operación $\sqrt{1 + \omega^2}$, donde ω es un número cualquiera del sistema. La determinación del cociente $x = \frac{b}{a}$, con la condición de que $a \neq 0$, se reduce a la determinación sucesiva de los coeficientes desconocidos de la serie x, por medio de la comparación de los términos de ambos miembros de la ecuación

$$ax = b;$$

la determinación del número

$$x = \sqrt{1 + \omega^2}$$

se efectúa análogamente, por medio de la ecuación

$$x^2 = 1 + \omega^2.$$

Ahora introduciremos un orden en el conjunto de nuestros números. Convendremos en llamar positivo (mayor que cero) al número

$$a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + \dots,$$

$a_0 \neq 0$, si $a_0 > 0$, y negativo (menor que cero), si $a_0 < 0$. Si a y b son dos números de nuestro sistema, convendremos en considerar que $a > b$, si $a - b > 0$, y que $a < b$, si $a - b < 0$. El orden así establecido satisface las condiciones del axioma 6 de la aritmética.

Verifiquemos que en nuestro sistema tiene lugar la proposición de Cantor. Sean dadas una sucesión monótona creciente de números de nuestro sistema

$$a^{(m)} = a_0^{(m)} t^{p_m} + \dots, \quad m = 1, 2, \dots,$$

y una sucesión monótona decreciente

$$b^{(m)} = b_0^{(m)} t^{q_m} + \dots, \quad m = 1, 2, \dots,$$

tales que 1) cualquier número de la sucesión $a^{(m)}$ es menor que cualquiera de la sucesión $b^{(m)}$; 2) cualquiera que sea el número positivo ε (de nuestro sistema), existe un índice m para el cual

$$b^{(m)} - a^{(m)} < \varepsilon.$$

Demostremos que existe un (único) número de nuestro sistema, que está en el interior de todos los segmentos $(a^{(m)}, b^{(m)})$.

Obsérvese, ante todo, que las sucesiones numéricas ordinarias p_m y q_m ($m = 1, 2, \dots$) están acotadas por debajo. En efecto, si entre los números habituales p_m hay números situados a la izquierda de 0 y tan lejos como se quiera de éste, de la sucesión de exponentes p_m se puede escoger una subsucesión que tiende monótonamente a $-\infty$; los coeficientes iniciales respectivos deben ser positivos, pues de lo contrario se violaría la condición de crecimiento monótono de la sucesión de números de nuestro sistema $a^{(m)}$. Pero, en tal caso, alguno de los números $a^{(m)}$ será mayor que un cierto número de los $b^{(m)}$, cosa imposible.

Análogamente se demuestra la acotación por debajo de los números q_m. Podemos, pues, considerar formalmente que todas las series que representan a $a^{(m)}$ y $b^{(m)}$, comienzan con términos de una misma potencia (admitiendo, durante el transcurso de esta demostración, valores nulos para los coeficientes iniciales).

Escribiremos ahora estas series como sigue:

$$a^{(m)} = a_0^{(m)}t^n + a_1^{(m)}t^{n+1} + \ldots,$$
$$b^{(m)} = b_0^{(m)}t^n + b_1^{(m)}t^{n+1} + \ldots$$

Es fácil ver que, a partir de cierto $m = m_1$, la diferencia no negativa $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ debe hacerse igual a cero. Efectivamente, como la sucesión $a^{(m)}$ es creciente, la sucesión de los números (ordinarios) $a_0^{(m)}$ debe ser no decreciente. Análogamente, como la sucesión $b^{(m)}$ es decreciente, la sucesión de números (ordinarios) $b_0^{(m)}$ debe ser no creciente. Por tanto, la diferencia (de los números ordinarios) $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ no puede crecer. En consecuencia, o bien la diferencia $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ es positiva todo el tiempo, o bien es igual a 0 para algún índice y entonces permanecerá ya igual a 0 para todos los índices subsiguientes. Supongamos que siempre es

$$b_0^{(m)} - a_0^{(m)} > 0;$$

tomemos en nuestro sistema el número positivo

$$\varepsilon = t^{n+1} + \ldots$$

Entonces, para todo índice será

$$b^{(m)} - a^{(m)} > \varepsilon,$$

contra lo supuesto. Así, pues, la diferencia $b_0^{(m)} - a_0^{(m)}$ no puede permanecer positiva.

Concluimos que a partir de cierto $m = m_1$,

$$b_0^{(m)} - a_0^{(m)} = 0.$$

Como la sucesión de los números ordinarios $a_0^{(m)}$ es monótona no decreciente, y la sucesión de los números ordinarios $b_0^{(m)}$, monótona no creciente, a partir de $m = m_1$ los números $a_0^{(m)}$ y $b_0^{(m)}$ serán constantes e iguales; hagamos $a_0^{(m_1)} = b_0^{(m_1)} = d_0$. Tenemos, entonces:

$$a_0^{(m)} \leqslant d_0 \leqslant b_0^{(m)}.$$

Para $m \geqslant m_1$, razonamientos análogos, aplicados a las sucesiones de números ordinarios $a_1^{(m)}$, $b_1^{(m)}$, nos permiten establecer que existe un número d_1 tal que, para $m \geqslant m_1$, satisface las desigualdades

$$a_1^{(m)} \leqslant d_1 \leqslant b_1^{(m)}$$

y además, a partir de algún $m = m_2 (m_2 \geqslant m_1)$, se anula la diferencia $b_1^{(m)} - a_1^{(m)}$, etc.

El número $d = d_0 t^n + d_1 t^{n+1} + \ldots$ está en el interior de todos los segmentos $(a^{(m)}, b^{(m)})$. Con esto queda demostrada la afirmación de Cantor para nuestro sistema de números (la unicidad del número d se desprende inmediatamente de la segunda condición en el enunciado del axioma de Cantor).

En el sistema dado de números no tiene lugar la proposición de Arquímedes. En efecto, tomemos los dos números positivos

$$a = t + 0 \cdot t^2 + \ldots,$$
$$b = t^2 + 0 \cdot t^3 + \ldots;$$

para todo n natural tenemos:

$$nb < a,$$

es decir, la condición del axioma de Arquímedes no se cumple.

En la realización aritmética de los axiomas de Hilbert, basada en el sistema de números que acabamos de describir, tiene lugar la proposición de Cantor (así como también todos los axiomas I, II III, V), pero no se observa la de Arquímedes.

Podemos, en consecuencia, afirmar:

Basándose en los axiomas I, II, III, IV,2, V, *no es posible demostrar el axioma de Arquímedes* IV,1.

Así, entonces, los dos axiomas que constituyen el grupo IV de axiomas de continuidad son esenciales.

El sistema geométrico que puede ser desarrollado a base de los axiomas I, II, III (o bien I, II, III, V) y en donde no tiene lugar el principio de Arquímedes, lleva el nombre de *no arquimediano*. En la geometría no arquimediana el proceso de medición de longitudes no es aplicable a segmentos cualesquiera; además, muchas proposiciones de esta geometría se distinguen singularmente tanto de las proposiciones de la geometría euclidiana, como de las proposiciones de la de Lobachevski. Esto no debe asombrarnos, pues el axioma de Arquímedes se utiliza en la demostración de muchos teoremas. En particular, en la geometría no arquimediana no son válidos los resultados de Legendre, que establecen la dependencia entre el axioma de paralelismo y la proposición que se refiere a la suma de los ángulos de un triángulo (para más detalles, véase *D. Hilbert*, Fundamentos de la Geometría *)).

4. Axioma de completitud

§ 74. En el cap. II las propiedades de continuidad fueron expresadas con dos axiomas: el de Arquímedes, IV,1, y el de Cantor, IV.2. En los «Fundamentos de la Geometría» de Hilbert, el primer axioma de continuidad es, al igual que en nuestra exposición en el cap. II, el axioma de Arquímedes; el segundo axioma de continuidad difiere del de Cantor y fue llamado por Hilbert *axioma de completitud*. Esta proposición se enuncia como sigue.

Los elementos (puntos, rectas, planos) de la geometría forman un sistema de objetos que, con la condición que se cumplan todos los axiomas adoptados antes, no admite extensión alguna, es decir, el sistema de puntos, rectas y planos es tal que no se le puede agregar nuevos puntos, rectas y planos de forma que en el nuevo sistema extendido se sigan satisfaciendo todos los axiomas I — III, IV,1, V.

*) Véase, por ejemplo, la traducción castellana publicada en Madrid, 1973. (*N. del Tr.*)

La conservación de todos los axiomas, referida en esta proposición, debe entenderse como sigue: luego de extender el sistema, las condiciones contenidas en todos los axiomas se siguen satisfaciendo como antes, de manera que, en particular, las relaciones existentes entre los elementos — su orden, la congruencia de segmentos y ángulos, etc. — no se violan. Así, por ejemplo, un punto que antes de la extensión se encuentra entre otros dos, sigue estando entre ellos también después de la extensión; segmentos y ángulos congruentes antes, siguen siéndolo después de la extensión. A fin de poner más en claro el significado de la condición de completitud del sistema de elementos de la geometría, comparemos las dos realizaciones de los axiomas, que hemos discutido en los §§ 71 y 72.

La primera es la realización cartesiana, que satisface todos los axiomas sin excepción. En esta realización se llama *punto* a un par (x, y) de números reales cualesquiera; *recta*, a la razón $(u : v : w)$ de tres números reales, que se escogen con la única condición de que al menos uno de los dos números u, v sea diferente de cero. Las relaciones mutuas entre los objetos se expresan en relaciones aritméticas, que no repetiremos aquí.

La realización analizada en el § 72 se construye en forma totalmente análoga a la cartesiana. Aquí un punto es también un par de números reales; una recta, una razón de tres números; las relaciones mutuas entre los objetos se definen por las mismas relaciones aritméticas que en la realización cartesiana. Pero en esta realización, a diferencia de la cartesiana, los objetos se construyen no a partir de todos los números reales, sino únicamente de los que pertenecen a cierto conjunto Ω, que fue descrito detalladamente en su oportunidad. Por lo tanto, la colección de objetos de la realización considerada en el § 72 constituye una parte del conjunto de objetos de la realización cartesiana, pero tanto en una como en otra se satisfacen todos los axiomas I — III, IV,1, V.

Imaginémonos el conjunto de objetos determinados con ayuda de los números de Ω como el dado inicialmente, y el conjunto de objetos de la realización cartesiana, como el obtenido después de completar el primero. Como las relaciones mutuas entre los objetos de las dos realizaciones analizadas se expresan por iguales dependencias aritméticas (sólo que en un caso estas dependencias se refieren a todos los números reales, y en el segundo, a los números reales de cierto conjunto), en la completación indicada todas las relaciones mutuas entre los objetos dados inicialmente se conservan. Por ejemplo, si A, B, C, D son cuatro puntos del conjunto inicial y $AB \equiv CD$, después de agregar los nuevos elementos seguirá siendo $AB \equiv CD$. Además, están bien definidas tanto las relaciones entre los nuevos objetos y los iniciales, como las relaciones entre los nuevos elementos, y de manera tal que se satisfacen las condiciones de todos los axiomas originales.

Consecuentemente, la colección de objetos determinados por el método descrito, partiendo de números del conjunto Ω, admite precisamente una completación prohibida por el axioma de completitud. Dicho de otro modo, está colección de objetos no satisface el requisito de completitud.

Es natural que se puede exhibir una cantidad infinita de sistemas similares de objetos. Para esto, sólo hace falta variar adecuadamente la construcción del conjunto del que tomamos los números utilizados. Así, por ejemplo, en lugar del conjunto Ω se puede tomar como base de la construcción de los objetos el conjunto de números que se expresan por medio de radicales, o bien el conjunto aún más grande de todos los números algebraicos, etc. Entre las realizaciones aritméticas que se obtienen así, sólo la cartesiana (basada en el conjunto de todos los números reales) satisface la condición de completitud. Para comprobarlo, debe observarse, en primer lugar, que de todas las realizaciones aritméticas únicamente la cartesiana satisface el axioma de Cantor (o la condición de Dedekind) y, en segundo lugar que del axioma de Cantor, si se dispone de los demás axiomas, sigue la proposición de completitud. La primera afirmación no necesita ser demostrada. En efecto, en la realización cartesiana se satisface el axioma de Cantor, como fue probado antes; por otra parte, el axioma de Cantor se satisface sólo en la realización cartesiana, entre todas las aritméticas, pues la condición de Cantor (o la de Dedekind) no se cumple para cualquier conjunto numérico que no contenga aunque sea un número.

La segunda afirmación será demostrada. Además probaremos no sólo que del axioma de Cantor, unido a los restantes axiomas, se desprende la proposición de completitud, sino que, recíprocamente, la afirmación del axioma de Cantor puede ser demostrada si a los demás axiomas se agrega la condición de completitud. Detallaremos lo dicho en forma del siguiente enunciado:

Si un sistema de elementos geométricos satisface los axiomas I — V, *no se la puede extender observando las condiciones de la proposición de completitud, es decir, la proposición de completitud sigue de los axiomas* I — V. *Si un sistema de elementos geométricos satisface los axiomas* I — III, IV,1,V *y la condición de completitud, entonces en éste tiene lugar la proposición de Cantor, es decir, la proposición de Cantor se desprende de los axiomas* I — III, IV,1,V *más el axioma de completitud.*

Demostremos ante todo la primera parte de esta proposición. Sea Σ un conjunto de elementos geométricos, es decir, un sistema de puntos, rectas y planos cuyas relaciones mutuas satisfagan los axiomas I — V. Supongamos que el conjunto Σ puede ser ampliado, agregando nuevos elementos, de forma que se cumplan las condiciones indicadas en el enunciado de la proposición de completitud. Sea Σ' la colección de elementos obtenida luego de la extensión. Las relaciones mutuas de los elementos del conjunto ampliado también satisfacen los axiomas I — V. En el § 22 hemos demostrado que, basándonos en los axiomas I — III, IV,1, se puede establecer una aritmetización de los elementos de la geometría, de manera que cada punto tenga como coordenadas una terna bien determinada (x, y, z) de números y que ninguna terna de números corresponda a puntos diferentes. Introduzcamos coordenadas en el conjunto Σ', eligiendo como unidad de medida de longitudes un segmento cuyos extremos pertenezcan al conjunto Σ. Supongamos que Σ' tiene puntos que no están en Σ. Sea M' uno de estos puntos, y (x, y, z), sus coordenadas. Por hipótesis, el conjunto inicial de elementos Σ satisface los axiomas I — V. Como consecuencia de esto, y en virtud del teorema 35, § 21, entre los puntos del conjunto Σ siempre se puede hallar uno que tenga coordenadas prefijadas de antemano. Sea M el punto de Σ con coordenadas (x, y, z). Como M' no está en Σ, M' y M no pueden coincidir. Entonces, la terna de números (x, y, z) corresponde a dos puntos diferentes M y M'. La contradicción obtenida nos muestra que Σ' no tiene más puntos de los que ya están en Σ.

Supongamos que Σ' tiene rectas que no están en Σ. Sea a' una de ellas. En virtud del axiomas I,3, la recta a' tiene al menos dos puntos A y B. Ambos pertenecen a Σ, pues Σ' no contiene nuevos puntos. Pero el conjunto Σ es, por sí solo, una realización de los axiomas I — V. Por eso, el par de puntos A y B determina una recta a, perteneciente a Σ. Como a' no está incluida en Σ, a' y a no pueden coincidir. Entonces, los puntos A y B determinan dos rectas diferentes, en contra del axioma I,2. La contradicción obtenida muestra que Σ' no tiene más rectas que las ya contenidas en Σ. Análogamente se prueba que Σ' tampoco contiene nuevos planos. Con esto hemos demostrado que Σ no puede ser extendida, es decir, satisface la condición de completitud.

Ahora demostraremos la segunda parte de la afirmación. Para simplificar, nos limitaremos a considerar la geometría del plano. Supongamos que ahora Σ denota un conjunto de puntos y rectas con respecto al cual se satisfacen los axiomas I — III, IV,1, V. El axioma de Cantor IV,2 no lo adoptamos de antemano; en su lugar, supondremos que el conjunto Σ satisface la condición de completitud.

Debemos obtener la proposición de Cantor como consecuencia de las premisas adoptadas. Para esto, introduciremos en el conjunto Σ un sistema de coordenadas en la forma hecha en el § 22, escogiendo de manera arbitraria dos rectas mutuamente perpendiculares y un segmento como unidad de escala. Entonces, a cada punto le corresponderá un par de coordenadas (x, y). Si pudiésemos basarnos en el axioma de Cantor, podríamos también afirmar, en virtud del teorema 35, § 21, que las coordenadas de los puntos del conjunto Σ cubren todos los pares posibles de números. Sin disponer de este axioma, trataremos, con todo, de demostrar esta afirmación, recurriendo al axioma de completitud. Hecho esto, se podrá establecer directamente que en el conjunto Σ tiene lugar el principio de Cantor.

Para los puntos y rectas del conjunto Σ son válidos todos los teoremas de la geometría euclidiana, con la posible excepción de algunos que se refieren a las propiedades de continuidad (pues entre los axiomas adoptados no está el IV,2). En todo caso, el sistema de coordenadas escogido tendrá las características principales del sistema cartesiano de coordenadas. En este sistema, una recta se determina por una ecuación de primer grado

$$ux + vy + w = 0,$$

de modo que a cada recta le corresponderá una razón de tres números $(u : v : w)$. Utilizando el aparato usual de la geometría analítica, podemos caracterizar todas las relaciones mutuas entre puntos y rectas del conjunto Σ, referidas en los axiomas I — III, IV,1, V, por medio de dependencias aritméticas, que contienen las coordenadas x, y de los puntos y los coeficientes u, v, w de las ecuaciones de las rectas. Resulta evidente que las formas de estas dependencias serán idénticas a las que hemos utilizado al describir la realización cartesiana de los axiomas geométricos.

Supongamos, ahora, que existen pares de números (x, y) que no son pares de coordenadas de puntos de Σ, y razones $(u : v : w)$ que no son razones de coeficientes de ecuaciones de rectas de Σ. En este caso, como mostraremos ahora, el conjunto de elementos de la geometría Σ se puede extender, observando las condiciones indicadas en el enunciado de la proposición de completitud.

Agreguemos al conjunto Σ nuevos puntos y rectas, determinándolos como sigue: un nuevo punto es cualquier par de números (x, y) que no sea un par de coordenadas de algún punto de Σ; una nueva recta es una razón de tres números cualesquiera

$(u : v : w)$, tales que al menos uno de los dos números u, v es diferente de cero, y que los números u, v, w no son coeficientes de la ecuación de alguna recta de Σ. Denotemos con Σ' el conjunto de puntos y rectas obtenido después de la extensión. Los puntos y las rectas de Σ' se determinan unívocamente por pares de números (x, y) y por razones de tres números $(u : v : w)$ respectivamente: además como tales representantes aritméticos de los elementos de Σ se encontrarán ahora todas las combinaciones posibles de todos los números reales.

Todas las relaciones mutuas entre los elementos de Σ' se definen exactamente con las mismas dependencias aritméticas que encontramos al describir la realización cartesiana. Evidentemente, en este caso para los puntos y rectas del conjunto Σ' se cumplirán los axiomas I — III, IV,1, V, por cuanto éstos se satisfacen en la realización cartesiana. Además, de nuestras observaciones previas se desprende que las relaciones mutuas entre los elementos del conjunto Σ' que pertenecen a Σ, no se diferencian de las que ya se tenían inicialmente entre los elementos de Σ, antes de la extensión. Efectivamente, estas relaciones antes y después de la extensión se caracterizan por iguales relaciones aritméticas. El conjunto Σ ha sido, pues, extendido observando las condiciones indicadas en el enunciado de la proposición de completitud. Pero como dicha proposición ha sido aceptada, y ésta excluye la posibilidad de una tal extensión, debemos concluir que como coordenadas (x, y) de los puntos del conjunto dado Σ deben estar presentes todos los pares posibles de números reales. Pero en tal caso cada recta de Σ puede ser considerada como un eje numérico, cuyos puntos representan todos los números reales. Como el principio de Cantor tiene lugar en el conjunto de los números reales, también debe ser válido en el conjunto de puntos de cada recta de Σ.

Hagamos un resumen de nuestra investigación.

Hemos demostrado que si se dispone de los axiomas I — III, IV,1, V, la continuidad del conjunto de los elementos de la geometría puede asegurarse de dos formas equivalentes: tomando como axioma o bien la proposición de Cantor relativa a un sistema contractante de segmentos, o bien la de Hilbert, que se refiere a la completitud del sistema de los elementos geométricos. Si se acepta una de estas proposiciones sin demostración, la segunda puede ser ya probada como un teorema.

Destaquemos otro hecho interesante, relacionado con el axioma de completitud. Es imposible conservar este axioma, si se elimina de la lista el axioma de Arquímedes. Es que siempre es posible, sin cumplir los requisitos de este último, completar el sistema de los elementos de la geometría con nuevos elementos, sin alterar las relaciones mutuas entre los del sistema inicial. Por eso, el axioma de completitud da una contradicción, sin el de Arquímedes. Por esto, los dos axiomas de continuidad de Hilbert están orgánicamente relacionados: el primero prepara la condición de continuidad y el segundo expresa esta condición por medio del requisito de completitud.

5. Completitud del sistema de axiomas de la geometría euclidiana

§ 75. En el § 69 fueron indicados los tres problemas fundamentales de la axiomática: el problema de consistencia, el de independencia de los axiomas y el de completitud. Estos problemas surgen de manera natural al estudiar cualquier sistema axiomático. Los dos primeros fueron discutidos en las secciones precedentes, para el caso del sistema de axiomas de Hilbert. Ahora nos ocuparemos del tercero.

Trataremos, ante todo, de poner en claro su significado. Imaginémonos, para comenzar, la situación creada por el desarrollo de la geometría en la segunda mitad del siglo XIX. En esta época ya estaban bien consolidadas las disciplinas geométricas fundamentales y fue puesto en el tapete el problema de su fundamentación axiomática. Entonces quedó muy claro que el antiguo sistema de axiomas de Euclides no podía servir de base para un desarrollo lógico de la geometría. Había que construir un sistema completo de axiomas (y definiciones), es decir, un sistema que contuviera todas las proposiciones que, una vez aceptadas, permitieran efectuar las demostraciones de los teoremas de la geometría elemental sin referencia alguna a la evidencia que emana de un dibujo. En el capítulo II pudimos comprobar que los teoremas que hemos considerado pueden ser demostrados en forma rigurosamente lógica, basándonos en los axiomas de Hilbert.

Resulta natural, sin embargo, preguntarnos cómo debe entenderse, exactamente, la completitud del sistema de axiomas de Hilbert. Es claro que podemos suponer que la completitud de dicho sistema se establece analizando las demostraciones de todos los teoremas de la geometría conocidos, digamos, para el año 1900. Tal respuesta puede satisfacernos únicamente si convenimos en considerar la geometría elemental como una disciplina concluida. Pero, a pesar de que históricamente el problema de fundamentación de la geometría elemental se resolvía cuando esta disciplina estaba ya suficientemente elaborada, desde el punto de vista puramente matemático no podemos plantear este problema considerando a la geometría dentro de un marco convencional, pues el número de teoremas posibles de la geometría es infinito. Por esto, intentaremos definir el concepto de completitud de forma que se refiera al sistema dado de axiomas, independientemente de en qué medida se encuentra desarrollada la geometría que ha de ser fundamentada con estos axiomas.

Supongamos que los axiomas del sistema dado han sido realizados de dos maneras en dos conjuntos diferentes de objetos. Llamaremos *isomorfas* a dos realizaciones de los axiomas, si entre los objetos de éstas se puede establecer una correspondencia biyectiva, tal que los objetos correspondientes se encuentran en relaciones mutuas análogas. (Así, si el punto A y la recta a de la primera realización corresponden al punto A' y la recta a' de la segunda y si el punto A está en la recta a, entonces A' estará en la recta a'; si los segmentos AB y CD de la primera realización corresponden a los segmentos $A'B$ y $C'D'$ de la segunda y si $AB \equiv CD$, entonces $A'B' \equiv C'D'$, etc. Aquí las relaciones «está en», «entre», «congruentes» deben entenderse en cada realización en el sentido concreto correspondiente.)

Aclaremos esta definición con algunos ejemplos.

En el § 46 mostramos que los axiomas de la planimetría de Lobachevski pueden ser realizados sobre cualquier superficie equidistante. Consideremos el sistema de superficies equidistantes con base común σ. Sean Σ y Σ' dos superficies equidistantes de este sistema. Consideraremos que los puntos de las superficies Σ y Σ' se corresponden, si están sobre una misma semirrecta ortogonal a la base σ; consideraremos, asimismo, que dos líneas equidistantes de las superficies Σ y Σ' se corresponden, si están en un mismo plano ortogonal a la base σ. Queda así establecida una correspondencia entre los objetos de las realizaciones de la geometría de Lobachevski en Σ y en Σ'. Esta correspondencia es, evidentemente, isomorfa.

Consideremos ahora los tres primeros axiomas del I grupo de Hilbert como un sistema independiente. Obtendremos una realización de este sistema, si llamamos puntos a los tres vértices de algún triángulo, rectas, a sus lados. Los requisitos de los axiomas I,1 — I,3 son aquí satisfechos, aunque hay en total seis objetos (la realización indicada se asemeja a la que fue descrita en el § 70, pero es aún más simple que aquélla; esto es comprensible, pues ahora tomamos en consideración sólo una parte de los axiomas del I grupo). Recordemos, por otra parte, las realizaciones aritméticas de los axiomas de Hilbert, descritas en los §§ 71 y 72; convendremos en considerarlas como realizaciones de los axiomas I,1 — I,3 únicamente (es decir, no nos interesará que en estas realizaciones se cumplan también los demás axiomas). Todas las realizaciones indicadas son no isomorfas entre sí. En efecto, en el primer caso los axiomas I,1 — I,3 se realizan sólo en seis objetos, mientras que en el § 72 se presenta una realización de dichos axiomas en un conjunto infinito, aunque numerable, de objetos; en cambio, el conjunto de objetos de la realización estudiada en el § 71 es infinito y no numerable. Así, cualesquiera que sean dos de realizaciones que tomemos de entre estas tres, entre sus objetos es imposible establecer no sólo la correspondencia isomorfa, sino ni siquiera una biunívoca.

Evidentemente, cuanto menor sea el número de requisitos planteados en los axiomas de un sistema dado, tanto mayor libertad habrá en la elección de su realización. Así, el sistema formado únicamente por los axiomas de Hilbert I,1 — I,3 puede ser realizado por cualquiera de las tres formas indicadas arriba. Pero si a los axiomas I,1 — I,3 agregamos los del II grupo, la primera forma se descarta, pues de los axiomas I — II sigue que el conjunto de los objetos geométricos es infinito. Ahora bien, los axiomas I — III, IV,1 pueden ser realizados tanto en la forma descrita en el § 71, como en la indicada en el § 72. Pero si a estos axiomas agregamos el IV,2, la realización indicada en el § 72 ya no sirve, pues allí no se satisface el axioma IV,2.

Así, entonces, al completar cierto sistema de axiomas, agregándole axiomas nuevos, independientes de los anteriores y, por supuesto, compatibles con aquéllos, la clase de realizaciones admisibles del sistema se restringe.

Ahora estamos ya en condiciones de enunciar de manera precisa el concepto de completitud de un sistema de axiomas.

Un sistema dado de axiomas se dice completo, si todas sus realizaciones son isomorfas entre sí.

Estableceremos, ahora, la completitud del sistema de axiomas I — V [*]).

Supongamos que se considera alguna realización Σ de los axiomas I — V. Según el § 22, en el conjunto de objetos que recibieron el nombre de puntos en la realización Σ, se puede introducir un sistema de coordenadas, de manera que a cada punto le corresponderá unívocamente un par de coordenadas (x, y) y a cualquier par de números (x, y) le corresponderá unívocamente un punto de coordenadas (x, y).

---

*) Nuevamente nos limitaremos a considerar el caso de la geometría plana.

Además, si disponemos del axioma V (de paralelismo), el sistema coordenado, construido en el § 22, es cartesiano. En consecuencia, las coordenadas de los puntos situados sobre alguna recta se caracterizan por la ecuación

$$ux + vy + w = 0.$$

Así, entonces, los puntos de la realización Σ están en correspondencia biunívoca con los pares de números reales (x, y), y las rectas, con las razones tipo $(u : v : w)$.

Hemos obtenido correspondencia biunívoca entre los objetos de la realización Σ y los objetos de la realización aritmética, considerada en el § 71. Esta correspondencia es un isomorfismo. Para comprobarlo, basta observar que los axiomas de la geometría elemental I — V permiten deducir las fórmulas cartesianas básicas, mediante las cuales se caracterizan aritméticamente las relaciones mutuas de los objetos de la realización Σ, en forma idéntica a las relaciones mutuas de los objetos correspondientes de la realización indicada en el § 71.

Vemos, así, que cada realización de los axiomas I — V es isomorfa a la cartesiana. Pero, evidentemente, dos realizaciones isomorfas a una tercera, son isomorfas entre sí. Por lo tanto, dos realizaciones cualesquiera de los axiomas I — V son isomorfas entre sí. De aquí concluimos que el sistema de axiomas I — V es completo.

Por razonamientos análogos se podría establecer la completitud del sistema de axiomas de la geometría de Lobachevski (demostrando previamente, *a partir de los axiomas*, sus fórmulas básicas; véanse los §§ 216 — 224).

6. Método axiomático en matemática

§ 76. Hasta aquí hemos tratado únicamente con dos sistemas concretos de axiomas: el de la geometría de Euclides, y el de la de Lobachevski.

Por cierto, a lo largo del presente capítulo hemos estudiado algunos sistemas que se obtienen eliminando uno o varios axiomas de la lista de Hilbert; sin embargo, tales sistemas no contienen nada nuevo, por tratarse de partes del sistema de Hilbert.

Por otra parte, el punto de vista general respecto de los objetos y los axiomas geométricos que fue alcanzado en el estudio de los problemas básicos de la axiomática de la geometría elemental, nos permitió entrever la posibilidad de aplicar el método axiomático en un campo extremadamente amplio.

En la actualidad, en la matemática, numerosas disciplinas se basan en sistemas de axiomas confeccionados adecuadamente. Son éstas, por ejemplo, la teoría de los grupos, la topología a base de la teoría de los conjuntos, diversas ramas del análisis funcional. En los axiomas que constituyen la base de tales disciplinas matemáticas, se toman en consideración sólo algunas propiedades de los objetos matemáticos estudiados. Por regla general, estas propiedades son comunes para numerosas clases de objetos, que difieren unas de otras por el carácter de sus propiedades restantes. Con esto se consigue que los teoremas deducidos a partir de los axiomas adoptados, son válidos simultáneamente para todas las clases de objetos matemáticos concretos. La generalidad de las deducciones matemáticas es una de las características primordiales de la aplicación del método axiomático.

Es importante destacar que como base de la mayoría de las teorías matemáticas se toman sistemas incompletos de axiomas. Por ejemplo, los axiomas de la teoría de grupos constituyen un sistema incompleto, ya que existen grupos no isomorfos. Los espacios que se estudian en la topología a base de la teoría de los conjuntos también están fundamentados por un sistema incompleto de axiomas. La gran amplitud de las aplicaciones de la topología y la teoría de grupos se debe a que estas disciplinas tienen por base a un sistema incompleto de axiomas.

Si se agregan nuevos requerimientos a los axiomas de la topología, la clase de espacios cuyos elementos satisfacen el sistema ampliado de axiomas será más restringida que la original. Así, por ejemplo, completando sucesivamente la axiomática de un espacio topológico con nuevos axiomas, se puede llegar a uno de los sistemas completos de axiomas que determinan el espacio de Euclides, o el de Lobachevski, o algún otro. Cabe observar que cuanto más axiomas contiene el sistema escogido, tanto más rico será el contenido de la teoría que se basa en ellos, pero, a la vez, tanto más restringido será el campo de su aplicación, es decir, tanto menor será la generalidad de sus teoremas.